Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Aplicações da derivada de uma função real sobre uma perspectiva histórica

Fernando Gomes Machado

Teresina - 2013

Fernando Gomes Machado

Dissertação de Mestrado:

Aplicações da derivada de uma função real sobre uma perspectiva histórica

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

Teresina - 2013

.

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

M149a Machado, Fernando Gomes.

Aplicações da derivada de uma função real sobre uma perspectiva histórica / Fernando Gomes Machado. – 2013.

60 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciência da Natureza, Mestrado em Matemática, 2013.

"Orientador: Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva".

1. Álgebra. 2. Matemática . 3. Ensino Médio. 4. Derivadas. I. Título.

CDD 512

Agradecimentos

A Deus pelos caminhos que preparaste para que eu chegasse até aqui.

À meu orientador Juscelino Pereira Silva, pela eficiente e dedicada orientação no transcorrer deste trabalho, pela amizade, apoio e atenção constante a minha sincera gratidão.

À minha esposa Joseline Sá de Carvalho Machado, pela paciência, abnegação e acima de tudo pelo seu amor.

À minha mãe, meus saudosos pai e irmã que constituem o lugar onde pude aprender as primeiras lições de valorização da vida e do ser humano.

Aos meus amigos do Mestrado em Ensino de Matemática especialmente ao Chaguinha, Fabiano, Jomildo, Nascimento e Edivan que sempre me apoiaram e me ajudaram em momentos delicados pelo companheirismo, pela solidariedade e pelas horas de convivência em que trocamos idéias durante todo este curso.

Ao meu Diretor Geral do Instituto Federal do Maranhão - Campus Caxias, João da Paixão Soares, que por várias vezes me liberou das minhas atividades no Campus para que eu pudesse me dedicar ao meus estudos durante as provas do mestrado.

À família Escola Santa Helena (Zélia, Lilian, Sônia e Expedito) que me cederam diversas vezes as salas de aula da escola para que eu pudesse estudar com meus amigos e me liberaram das minhas atividades no final do mestrado para que eu pudesse concluir tal dissertação de mestrado.

À professora Sandra Sampaio pela sua disponibilidade e colaboração na revisão do abstract.

Á Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudos concedida, proporcionando condições para realização desse mestrado.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse mestrado.

O autor

"É naturalmente mais fácil fornecer a demonstração de um problema quando adquirimos conhecimento prévio sobre ele, por meio de um método mecânico, do que achar a demonstração sem nenhum conhecimento prévio a respeito dele".

Arquimedes (III A.C.)

Resumo

Nas últimas décadas, alguns programas nacionais têm demonstrado algumas preocupações quanto ao ensino da matemática. Tais programas defendem a idéia que os objetivos educacionais podem ser intensificados, a fim de obter um maior envolvimento do aluno, tanto no que diz respeito às informações, procedimentos e atitudes abordados, como em competências, habilidades e valores desenvolvidos. Como a história da matemática é um elemento facilitador e motivador no processo de ensino-aprendizagem de derivadas, o presente estudo tem como objetivo aplicar derivadas sobre uma perspectiva histórica, mostrando a importância do estudo do cálculo no Ensino Médio. Foram realizadas aplicações de definições, propriedades e teoremas de máximos e mínimos em problemas de otimização, mostrando como o conteúdo de derivadas está presente no cotidiano das pessoas. Pode-se observar que derivadas e suas aplicações em diferentes exemplos de atividades realizadas no dia-a-dia, podem ser apresentados ao aluno de uma maneira mais prazerosa e eficiente, contribuindo favoravelmente para o processo de construção do conhecimento.

Palavras chaves: cálculo, história da derivada, otimização, aplicações de derivadas.

Abstract

In recent decades, some national programs have shown some concerns about the teaching of mathematics. These programs support the idea that the educational goals may be intensified in order to achieve greater student engagement both with regard to information, attitudes and procedures covered as for skills, values and developed. As the history of mathematics is a facilitator and motivator in the teaching-learning derivatives, the present study aims to apply derivatives on a historical perspective, showing the importance of the study of calculus in high school. Applications were made definitions, theorems and properties of maxima and minima in optimization problems by showing how content is derived from this in daily life. It can be observed that derivatives and their applications in different examples of activities in the day-to-day, may be presented to the student in a more pleasant and efficient way, to positively influence the process of knowledge construction.

Keywords: calculus, history derivative, optimization, applications derived.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No decorrer da minha carreira de professor, percebi que grande parte da falta de motivação dos alunos vinha do fato de suas aulas de matemática serem sempre a mesma rotina: definição, exemplos, propriedades, demonstrações e atividades de fixação. Os alunos se preparavam para a prova e alguns conseguiam alcançar nota suficiente para a aprovação, mas, quando aquele mesmo conteúdo era solicitado mais adiante ou no semestre seguinte, a maioria não se lembrava de nada, pois se preocupavam mais com os modelos e exemplos, e acabavam mecanizando as soluções sem saber direito o que estava fazendo. Percebemos também durante esta trajetória que os conteúdos de matemática podem ser apresentados aos alunos de forma mais eficiente e prazerosa, não só destacando os seus conceitos com o devido rigor, mas também analisando as perspectivas históricas em que estas idéias apareceram, para que fiquem mais claras as aplicações que provenieram destes conceitos. Pois o conteúdo seguido do fator histórico e aplicação do mesmo, facilita o processo de construção do conhecimento. Com isto abordamos neste trabalho o tema aplicações da derivada de uma função real sobre uma perspectiva histórica, mostrando a importância do estudo do cálculo no ensino médio.

O trabalho tem a seguinte estrutura:

No capítulo 1 mostraremos a importância do estudo do cálculo no ensino médio, fundamentado no trabalho de dissertação de mestrado de Selma Lopes da Costa André, com o seguinte tema: Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio. No capítulo 2 enfatizamos que para compreender os conceitos de derivada é importante conhecer suas razões históricas; para isso tive como base o trabalho de dissertação de mestrado de Daniel Gustavo de Oliveira, com o seguinte tema: Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica. No capítulo 3 apresentamos os preliminares conceituais, como definições, interpretações físicas e geométricas sobre derivadas, seguido das regras de derivação e máximos e mínimos de funções de uma variável real baseado no material de cálculo do PROFMAT, que nos deu suporte teórico para desenvolvermos as aplicações de derivadas apresentadas no capítulo 4; No capítulo 4 apresentamos um estudo sobre situações nas quais possamos aplicar derivada nas diversas áreas de conhecimento e inclusive do nosso próprio dia a dia. A fonte de pesquisa dos problemas de otimização foi o livro "A DERIVADA E ALGUMAS APLICAÇÕES"de meu orientador prof. Dr. Juscelino Pereira Silva. O foco principal do trabalho consistiu em mostrar como o conteúdo de derivadas pode ser trabalhado no Ensino Médio, evidenciando o desenvolvimento histórico do conteúdo e aplicando o mesmo na prática, de modo que o aluno possa entender a importância desse conteúdo com aplicações nas áreas da administração, medicina,física e geofisica.

Capítulo 2

A Importância do Estudo do Cálculo no Ensino Médio

Há cerca de uma década, o ensino da matemática vem tomando novos rumos no Brasil. Em 2000, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentaram novos objetivos de abordagem do estudo da Matemática tomando como referência a Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9.394/96), que considera o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE) de 1998, que organizou as áreas de conhecimento. Os PCN "orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania"(PCN, 2000, p.6). Ao instituir as diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio, "apontam de que forma o aprendizado de Ciências e Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio". Os PCN ressaltam, ainda, que:

> Nessa nova etapa de estudo, o Ensino Médio, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (PCN, 2000, p.6).

Considerando as novas perspectivas traçadas para o Ensino Médio, o currículo de Matemática foi revisto e sistematizado em três eixos ou temas estruturadores que serão desenvolvidos, simultaneamente, nas três séries do Ensino Médio. De acordo com os PCN+ (2002), estes eixos estruturadores correspondem a "um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos". Os três eixos estruturadores são:

1. Álgebra (números e funções);

2. Geometria e Medidas;

3. Analise de Dados.

> Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino cada um deles foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização (PCN+,2002, p.120).

Em relação a Álgebra, os PCN+ propuseram, para melhor organizar o planejamento de ensino, uma divisão em duas unidades temáticas: variação de grandezas e a trigonometria. A unidade temática, Variação de Grandezas (PCN+, 2002, p.122), será abordada neste trabalho, especificamente, no que diz respeito a taxa de variação de funções elementares.

A importância do estudo da taxa de variação é decorrente de uma necessidade de dar maior significado ao estudo das funções no Ensino Médio. Após trabalharmos alguns anos, neste nível de ensino, observamos que a abordagem dada ao estudo das funções explorando a definição, construção e analise de gráficos (intersecções com os eixos coordenados, intervalos de crescimento e decrescimento, estudo do sinal da função,...), resolução de problemas modelados a partir dos tipos de funções estudadas era insuficiente, ou seja, estava aquém do que poderia ser explorado neste nível de estudo. Vimos que, por exemplo, no estudo da função polinomial do 1° grau, o coeficiente angular poderia ser analisado, não apenas como o parâmetro que definiria a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, mas também como a razão entre as variações de duas grandezas envolvidas num tipo de problema e que uma outra análise poderia ser feita a partir dessa informação. Considerando ser a função polinomial do 1° grau a única que possui variação constante para qualquer intervalo I do domínio, e que, de fato, pode ser caracterizada por esta propriedade, passamos a explorar problemas que tratavam da análise dessa variação.

No entanto, esta mesma análise da razão das variações das grandezas não se processaria de maneira tão simples para os outros tipos de funções estudados nesse nível cujo valor da razão das variações $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ depende dos valores das variáveis nos extremos do intervalo considerado $(I \subset D(f))$. Surgiu, então, o questionamento: como poderíamos encaminhar este estudo para funções cuja variação não é constante? Além disso, estávamos certos de que as funções deveriam ser estudadas não somente como entes estáticos, mas também, através da exploração de seu caráter dinâmico.

Podemos observar que este caráter dinâmico está na essência do surgimento da noção de função na seguinte citação de Roque (2006):

> [...] A generalização da noção de função se deve ao desenvolvimento da física após Galileu e Descartes. A idéia de uma variação em função do tempo (que Descartes havia excluído da geometria) é fundamental nos trabalhos de Galileu, onde já encontramos uma certa noção de função, no sentido de uma associação entre duas variabilidades, dada por uma lei de variação que é encarada como um objeto matemático.[...] (Roque, 2006, modulo 8, p. 2)

A necessidade de estudar Cálculo no Ensino Médio é destacada por vários autores. Em Rezende (2003), podemos observar a importância de se estudar os conceitos fundamentais do Calculo no Ensino Básico:

> [...] Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem "do atual"ensino de Cálculo esta "fora"dele e é "anterior"inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada "falta de base"dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores.[...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma "falta de base"dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, e estabelecer os conceitos básicos e necessários para se aprender as idéias básicas do Calculo. [...] (Rezende, 2003, p. 31)

Giraldo (2004, notas de aula) considera que:

> Um dos objetivos fundamentais do ensino é democratizar a produção intelectual da humanidade, isto é, tornar o conhecimento básico produzido acessível a todos. Derivada, certamente, está entre as maiores criações do homem, em Matemática, dos últimos séculos. Isto reforça o caráter de terminalidade e de formação plena do cidadão definidos nos PCN+ do Ensino Médio.

O desejo de inserir o ensino de conceitos de cálculo no Ensino Básico, também, pode ser observado nos fragmentos de textos abaixo relacionados:

1. Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2° grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do cálculo e suas aplicações (Avila, 1991, p. 8).

2. O professor de matemática deve ordenar seu programa conforme o desenvolvimento dado pelas disciplinas técnicas e da cadeira de Física. A Física é a base da técnica e a Matemática a linguagem da Física. Do mesmo modo, quem não tem experiência física das variações lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, periódicas, etc., dificilmente poderá compreender a importância do estudo genérico das funções (Duclos, 1992, p. 28).

3. A capacidade de analisar e interpretar gráficos é muito importante em qualquer domínio científico. E, portanto, necessário levar os estudantes a compreensão desse tema. Esta foi uma das conclusões do grupo que discutiu o ensino de Matemática para as Biociências (Medicina e Biologia, incluindo Física e Química) na 1a reunião de Didática da matemática do Cone Sul, realizada em Montevidéu, em abril de 1992. Nessa ocasião, os professores do 2o grau presentes reivindicaram de seus colegas, professores universitários, material didático adequado as aplicações da Matemática as outras ciências. Estes são analisados com ênfase na identificação e interpretação dos pontos críticos. Seu conteúdo pode ser explorado no 2° grau com o auxílio das noções intuitivas de evolução contínua, velocidade e aceleração, que fazem parte do cotidiano do aluno (Carneiro, 1992, p. 32).

4. Queria saber por que os alunos aprendem ou não aprendem funções, como desenvolvem o pensamento variacional, quando e como constroem conceitos como: variável, dependência, taxa de variação e limite; queria investigar de que maneira situações do cotidiano contribuem para a construção da concepção de função. Observava que os estudantes universitários que já estudaram funções no Ensino Médio não possuem uma boa concepção de função. Esta deficiência não lhes permite entender relações entre variáveis, interpretar gráficos e integrais e usar a matemática como ferramenta (Schreiner, 2004).

5. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de va-

> riações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade (Rezende, 2003 p.37).

Os argumentos apresentados até agora procuram justificar a relevância cultural (a derivada como uma das maiores descobertas, em Matemática, da humanidade), social (a utilização dos conceitos de cálculo permitindo maior compreensão de problemas relacionados a vida do cidadão, já citados) e funcional (a aplicação dos conceitos básicos de cálculo na resolução de problemas em outras Ciências) do estudo dos conceitos básicos do cálculo no Ensino Médio. No entanto, há outro argumento, o econômico, tão importante quanto os anteriores, que vem em defesa de se antecipar o ensino de conceitos de cálculo na Escola Básica.

Um artigo publicado pela jornalista Flavia Rodrigues (O Globo, 03/12/2007) sob o titulo "Escassez generalizada"mostra que o Conselho Federal de Engenharia, Arquitetura e Agronomia (CONFEA) estima que o Brasil precisa de 20 mil engenheiros. Relata que algumas empresas estão oferecendo bolsas a estudantes de cursos de engenharia para não deixarem os bancos das universidades ou trabalharem para outras companhias. Esta atitude se dá devido a carência de engenheiros, de varias especialidades, no país. A jornalista informa que, de acordo com o presidente da entidade CONFEA, Marcos Túlio de Melo, o Programa de Aceleração do Crescimento (PAC) esta exigindo muita mão-de-obra de uma só vez.

Por outro lado, apesar de todos esses argumentos, poucas escolas apresentam esse assunto em seus programas de matemática. Alguns livros didáticos (por exemplo, Guelli, 2003; Machado, A. S., 1991; Iezzi, G., Murakami, C. & Machado, N.J. 2002) usados no terceiro ano do Ensino Médio reservam alguns capítulos para tratar do assunto.

Em muitos casos, os livros didáticos apresentam a seguinte seqüência para o estudo de derivada:

1) definição de taxa de variação média, seguida da noção de limite;

2) definição de taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0 como sendo o limite da razão $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$;

3) apresentação deste limite como sendo a derivada da função no ponto x_0,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

A proposta descrita acima se baseia na definição formal de derivada através do conceito de limite. Diversas pesquisas assinalam (Tall, 1989) que o aluno não tem maturidade para entender a definição baseada no conceito de limite. Desta forma, em muitos dos casos, o professor, para simplificar a apresentação do conteúdo, opta por uma abordagem baseada em procedimentos algébricos, sendo esta, a abordagem utilizada pelos alunos. Esses procedimentos, embora possibilitem resolver alguns problemas, em que é suficiente conhecer as formulas de derivação, desvia do entendimento conceitual, o que pode tornar o cálculo mecânico.

Podemos observar, também, que, nesta abordagem, a idéia de variação de grandezas, associada ao conceito de derivada fica diluída. Isto posto, entendemos que apresentar regras simplificadas em contextos simplificados pode agir como obstáculo para a aprendizagem posterior (Tall, 1989).

Neste trabalho, será focada a atenção no estudo sobre a aplicação de derivadas nos problemas de otimização, de modo que o aluno possa perceber a importância de tal conteúdo em situações do seu cotidiano e quem sabe até mesmo da sua vida futura.

Capítulo 3

Evolução Histórica do Conceito de Derivadas

3.1 A origem do Cálculo

A palavra "cálculo" é o diminutivo de calx, do latim, que significa "pedra". Mas, qual é a relação dessa palavra com a Matemática? Será que o Cálculo pode ser considerado uma pedra no ensino da Matemática?

A semente do Cálculo Integral já existia na matemática grega, principalmente nos trabalhos de Eudóxio[1] e Arquimedes[2].

Deve-se a Eudóxio a criação de uma teoria das proporções que constitui a base do livro V dos elementos de Euclides e também os fundamentos do chamado Método de Exaustão, largamente utilizado por Arquimedes e que representa a primeira semente do Cálculo Integral.

O trabalho de Eudóxio sobre a teoria das proporções, de certa forma, explicou a grande dúvida dos Pitagóricos quanto à existência dos números irracionais.

Tão ou mais importante que sua Teoria das Proporções foi o tratamento dado por Eudóxio

[1]Eudóxio viveu no século IV a.C. Parece que seu primeiro mestre foi Arquitas de Tarento, um neopitagórico. Posteriormente estudou em Atenas, na Academia de Platão. Exerceu a Medicina por algum tempo em Atenas e depois viajou para o Egito. Na volta estabeleceu-se em Cízico na Ásia Menor. (BOYER, 1974, p. 66)

[2]Arquimedes (287 a.C – 212 a.C) nasceu em Siracusa e permaneceu nesta cidade durante toda a sua vida, só se ausentando por um pequeno período quando estudou em Alexandria. É considerado o maior matemático e físico de toda a Antiguidade. (BOYER, 1974, p. 89)

ao chamado **Método da Exaustão**. Naquela época, os geômetras gregos já haviam conjecturado que imaginar o círculo como sendo o limite ao qual tende uma família de polígonos inscritos (ou circunscritos), cujo número de lados tende ao infinito, era o caminho para a determinação da área e do perímetro daquela figura delimitada por uma linha curva. Tal conjectura já teria sido levantada por Briso, um jovem aluno de Pitágoras e, certamente, o foi pelo filósofo Ântifon (cerca de 430 a. C), contemporâneo e amigo de Sócrates. Dizia-se, então, que, inscrevendo-se um polígono em um círculo, ficaria caracterizada uma diferença entre as áreas das duas figuras e que tal diferença poderia ser sucessivamente diminuída, à medida que o número de lados do polígono fosse sendo aumentado. Mas era preciso prová-lo. Para tanto, Eudóxio demonstrou, com base em seu postulado (a prova encontra-se na proposição X-1, dos elementos de Euclides), que **dadas duas grandezas da mesma espécie, A e ϵ , sendo tão pequeno quanto quisermos, se subtrairmos de A uma quantidade não inferior à sua metade, do resto outra quantidade não inferior à metade deste e assim por diante, chegar-se-á, finalmente, a um resto menor do que ϵ** . (GARBI, 2006, p.46, grifo do autor.)

Foi com base nesse método que Eudoxio determinou a área do círculo e o perímetro da circunferência considerando uma família de polígonos inscritos ao mesmo.

Esse processo de reduzir tanto quanto quisermos as diferenças entre um comprimento, uma área ou um volume **desconhecidos** e, respectivamente, famílias de comprimentos, áreas e volumes **conhecidos** recebeu o nome de **Método da Exaustão**. O círculo (perímetro e área) é exaurido por uma família de polígonos, o volume do cilindro o é pelos volumes de uma família de prismas, o do cone o é pelos de uma família de pirâmides, etc. (GARBI, 2006, p.47, grifo do autor.)

A contribuição de Arquimedes ao Cálculo Integral deve-se ao uso habilidoso que fez do Método da Exaustão, com o qual calculou pela primeira vez áreas e perímetros de algumas figuras cujos lados são curvas.

Os conceitos de derivada e diferencial, obviamente, não estavam presentes na Grécia. Na primeira metade do século XVII, dois grandes matemáticos franceses, Fermat[3] e Descartes[4] , criaram a Geometria Analítica. Inicialmente eles não usaram os eixos coor-

[3]Pierre de Fermat (1601–1665) viveu e estudou em Toulouse, onde exerceu o cargo de Juiz. É considerado o maior dos matemáticos amadores. Ficou famoso o seu teorema que por mais de 300 anos desafiou grandes matemáticos posteriores a ele. Os seus estudos em Geometria ofereceram elementos não só para a criação da Geometria Analítica, como também para o Cálculo Diferencial e Integral. (BOYER, 1974, p. 253)

[4]René Descartes (1596–1650) durante sua vida exerceu várias atividades, inclusive como soldado mer-

denados como hoje são conhecidos, mas essa idéia já estava presente, de forma implícita, na obra de Apolônio.

Uma aplicação prática da Geometria Analítica aparece no urbanismo, principalmente no planejamento de várias cidades gregas e romanas, nas quais as ruas obedecem uma distribuição quadriculada. O plano de Alexandria, por exemplo, obra do arquiteto grego Dinocratesse desenvolvido a partir de dois eixos monumentais, com as ruas dispostas perpendicularmente a eles, como se fosse um grande tabuleiro quadriculado. Provavelmente uma das principais preocupações ao criar a Geometria Analítica era a de utilizar a Álgebra, que dava seus primeiros passos com o trabalho dos matemáticos do Renascimento, aplicando-a a problemas geométricos.

O desenvolvimento da imprensa com a utilização de tipos móveis por Gutemberg, a partir de 1447 (data do 1° livro impresso), permitiu a divulgação de muitas obras da Matemática da Antiguidade e um número grande de pessoas, em vários países, começou a se interessar pelo assunto.

Não havia ainda organizações de matemáticos profissionais, mas começaram a surgir grupos de estudiosos que apresentavam seus problemas para que os outros membros pudessem colaborar nas soluções.

Na França, formou-se um grupo ao qual pertenciam Fermat e Descartes e que contava também com a participação de um frade chamado Marin Mersenne[5]. Foi praticamente pelos trabalhos dos membros desse grupo que apareceram as idéias básicas do que hoje se conhece como Geometria Analítica.

Com essa nova ferramenta, esses dois grandes matemáticos, como também outros que pertenciam ao grupo de Mersene puderam atacar com sucesso problemas que ainda estavam em aberto. Dentre essas questões, estavam à determinação da tangente a uma curva qualquer e o cálculo de máximos e mínimos de curvas polinomiais. Fermat resolveu este último de forma muito elegante e por esse e outros motivos Laplace considera Fermat o criador do Cálculo Diferencial.

cenário do exército holandês, mas sua verdadeira vocação era para a Filosofia e a Matemática. Juntamente com Fermat contribuiu para o surgimento da Geometria Analítica e do Cálculo. (BOYER, 1974, p. 245)

[5]Mersenne (1588–1648) não foi um matemático de grandes criações, mas é muito importante o seu papel de "despachante" de correspondência. Muito ligado a Fermat e Descartes, ele não só levava a um os resultados do outro, como também divulgava seus estudos a toda uma comunidade de matemáticos europeus. (BOYER, 1974, p. 245)

Os métodos para estudar retas tangentes que levaram ao conceito moderno de derivada, tanto em Descartes como em Fermat estavam baseados na idéia de "infinitamente pequeno".

Alguns matemáticos consideravam que uma curva é formada de segmentos de reta, infinitamente pequenos, e sustentavam que a reta tangente a um ponto é a extensão de um desses segmentos. Outros afirmavam que as retas tangentes são as que passam por dois pontos infinitamente próximos na curva.

Os cálculos algébricos baseados nessas idéias envolveram infinitesimais, isto é, quantidades que são infinitamente pequenas, mas, não nulas.

Dentre as várias críticas aos "novos métodos", surgidas no século XVII, destacam-se as do bispo e filósofo George Berkeley (1685–1753), registradas no seu livro "O Analista"de 1734 que tem um subtítulo bastante longo e explicativo:

> Um discurso dirigido a um matemático infiel[6] , onde se examina se o objeto, princípios e inferências da Análise Moderna são concebidos mais claramente ou são deduzidos com maior evidência que os mistérios e pontos da fé da religião. Primeiro tira tranca de teu olho; e então verás claramente para tirar o argueiro do olho do teu irmão. (BERKELEY apud BOYER, 1974 p. 316)

Berkeley não negava a teoria dos fluxões de Newton, nem os resultados obtidos empregando tais técnicas, mas tinha críticas bastante fundamentadas. Ele dizia que os matemáticos primeiro assumem que são dados incrementos às variáveis e depois retiram esses incrementos supondo que sejam nulos.

> E o que são esses fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes. E o que são esses incrementos evanescentes? Não são nem quantidades finitas, nem infinitas, nem nada. Não poderíamos chamá-las de fantasmas de quantidades que se expiraram? (BERKELEY apud BOYER – 1974 p.316)

[6]O ”matemático infiel” era um grande amigo de Newton, Edmund Halley (o que deu nome ao cometa). Halley como livre pensador que era, havia convencido um individuo da não existência de Deus, e por essa razão Berkeley não pôde administrar a ele os sacramentos na hora da morte. (BOYER, 1974, p. 316)

O uso dos infinitesimais foi desenvolvido até a operação geral conhecida hoje como derivação, na Inglaterra, por Newton[7] , por volta de 1660 e, de modo independente, na Alemanha, por Leibniz[8] , em 1670.

Os trabalhos de Newton só foram publicados depois de 1670, enquanto Leibniz publicou os seus de imediato, fatos que contribuíram para a polêmica que se criou sobre o verdadeiro criador do Cálculo. Parece que os dois brilhantes matemáticos chegaram a esses resultados de forma independente.

No que diz respeito às notações adotadas, Leibniz teve mais êxito que Newton, por essa razão seus trabalhos foram mais lidos e compreendidos e, a partir daí, vários matemáticos conseguiram resolver problemas que se encontravam em aberto até então.

3.2 O conceito de Tangente

A reta tangente à circunferência aparece em Euclides, mais precisamente no livro III, na definição 2: "Uma reta que, tocando o círculo e sendo prolongada, não o corta, é dita ser tangente ao círculo".(BICUDO, 2009, p.151).

Essa definição certamente não serve para a definição de reta tangente a uma curva qualquer, neste caso, não se pode dizer que a tangente é uma reta que encontra a curva em um único ponto.

Observe, na figura 1, uma reta r que encontra a curva num único ponto, mas não é tangente a ela. Já na figura 2, observe que a reta s encontra a curva em vários pontos, sendo tangente no ponto P.

[7]Isaac Newton (1645–1727) estudou e depois foi professor na Universidade de Cambridge. É considerado um dos maiores gênios de todos os tempos. Além de ser um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral tem trabalhos relevantes em outros campos da Matemática e também da Física. (BOYER, 1974, p. 287)

[8]Gottfried Leibniz (1646–1716) aos 12 anos, já dominava o grego e o latim, além de todos os conhecimentos correntes da época em Matemática, Teologia, Filosofia e Direito. Quando, por sua pouca idade, a Universidade Leipzig, cidade onde nasceu, lhe negou o título de Doutor, ele mudou-se para Nuremberg e aí escreveu um brilhante trabalho sobre o ensino das leis pelo método histórico. Daí em diante seguiu a carreira diplomática, atividade que lhe proporcionou tempo para escrever uma quantidade imensa de artigos sobre os mais variados assuntos. (BOYER, 1974, p. 292–293)

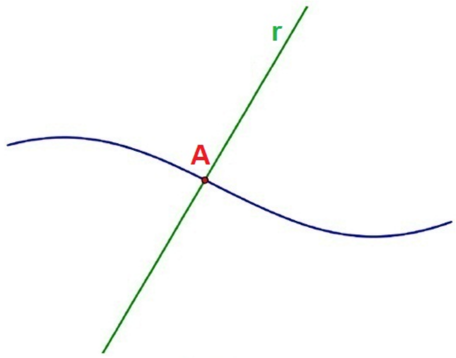


Figura 1

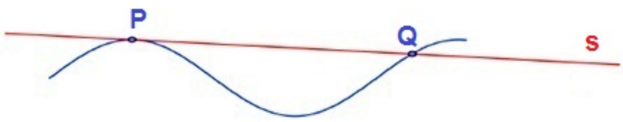


Figura 2

Tudo leva a crer que os gregos não conheciam muitas curvas. Euclides estudou circunferência. Mais tarde Apolônio trabalhou com as cônicas e Arquimedes com a espiral que leva seu nome.

Podemos considerar Arquimedes como o matemático mais criativo de toda a Antiguidade e um dos maiores de todos os tempos, mas quem recebeu o título de "O grande geômetra"foi Apolônio, uma vez que ele se preocupou com os problemas mais complexos.

Muitas das obras de Apolônio não chegaram até nós. Dentre as que se perderam, existe uma que se chamava "Tangências."Papus, um dos mais importantes matemáticos posteriores a Apolônio, comentou a obra dizendo que ela se compunha de dois livros e tratava basicamente do seguinte problema: "Dadas três coisas, cada uma das quais podendo ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que seja tangente às três coisas". Sabe-se também que Apolônio sabia traçar a tangente a qualquer cônica, mas não existe referência de que ele tenha determinado algum processo para traçar a tangente a uma curva qualquer.

Arquimedes, no seu trabalho "Sobre Espirais", faz o estudo de uma curva que ficou conhecida como Espiral de Arquimedes. Uma das propriedades que ele estudou foi a construção da tangente por um ponto dado na curva, e é provável que esta tenha sido a primeira vez que se determinou a tangente a uma curva diferente da circunferência e das cônicas.

No século XVII, mais precisamente no período que precede a criação do Cálculo Diferencial e Integral, a sociedade estava envolvida com novos problemas, que iriam acarretar mudanças na filosofia das ciências. O pioneiro dessas modificações foi Galileu, que mudou os paradigmas até então válidos e adotou novas posturas para a ciência. A geometria não ficou alheia a essas modificações. De uma ciência com características estáticas trazidas da Grécia, passou a ser uma ciência dinâmica como o mundo da época. De fato, enquanto para Apolônio, a parábola era uma curva determinada pela secção de um cone por um plano, para Galileu, ela representava a trajetória de um projétil disparado por um canhão. Ele percebeu ainda que havia um movimento no sentido horizontal, outro no sentido vertical, e que a direção final seguia a orientação da reta tangente à parábola, em cada ponto.

Outros problemas tinham modelos diferentes e levavam a outras curvas, mas o princípio era o mesmo, dado pelo paralelogramo das forças, daí a necessidade de se saber calcular a tangente a cada curva, o que demandava um processo geral para esse cálculo, em qualquer circunstância.

Os grandes matemáticos da época atacaram o problema e as soluções começaram a aparecer. Dentre eles, destacamos Fermat e Descartes.

3.3 Os principais problemas do Cálculo

Aprofundando um pouco mais a fase que é considerada o período da verdadeira "criação do Cálculo", podemos identificar quatro tipos de problemas principais que motivaram os pesquisadores da época a os investigarem no tema de derivadas e integrais:

- O primeiro era sobre velocidade e aceleração;
- O segundo, sobre a obtenção de uma tangente a uma curva;
- O terceiro, em como obter valores de máximo e mínimo de uma função;
- O quarto, que era o de se obter o comprimento de curvas, as áreas delimitadas por curvas e os volumes formados por superfícies.

Em relação ao primeiro problema, era dada uma fórmula da distância que um corpo percorre em função do tempo, para assim obter-se a velocidade e a aceleração em qualquer instante, ou a fórmula que descreve a aceleração para então se obter a velocidade ou a distância percorrida.

O segundo tipo de problema, considerado de geometria pura, tinha grande importância para aplicações científicas, principalmente no ramo da óptica, que era de interesse de grandes matemáticos da época como Fermat, Descartes e Newton.

O terceiro problema estava relacionado com valores de máximo e mínimo de determinadas funções. Seu cálculo poderia, por exemplo, ser aplicado a um canhão de guerra que dispara uma bala para atingir certos alvos, tentando responder qual seria a distância percorrida pela bala horizontalmente e qual o valor do ângulo de inclinação do canhão com o solo, para se atingir certa distância.

Até o fim do século XVII, os artilheiros ajustavam seus canhões empiricamente e ajustavam os tiros a partir do primeiro. Eles sabiam, com base em alguns estudos de Tartaglia, no século XVI, que o alcance máximo era obtido com canhão inclinado a 45° e que qualquer variação simétrica (para mais ou para menos) a determinado tiro era alcançada com uma variação simétrica do ângulo do referido tiro para mais ou para menos.

Galileu mostrou que a trajetória da bala era uma parábola e calculou a sua velocidade em qualquer ponto da trajetória, com isso, foi possível estabelecer uma tabela que dava a altura e amplitude do tiro a partir do ângulo usado pelo canhão.

Os valores de máximos e mínimos também estavam relacionados com o movimento dos planetas, para calcular suas distâncias em relação ao Sol. Problemas de máximo e mínimo também ocorrem em questões práticas e contextualizadas que envolvam, por exemplo, as dimensões que uma embalagem deve ter para que se gaste uma menor quantidade de material e/ou problemas sobre maximizar o lucro de venda de um determinado produto.

Em relação ao quarto problema, tentava se obter, por exemplo, a distância que um planeta percorria em um determinado intervalo de tempo, as áreas formadas por certas curvas, os volumes que eram formados por superfícies. Um exemplo disto era o método de exaustão aplicado pelos gregos para obter algumas áreas e volumes:

> Mersene em 1615 tinha chamado a atenção dos matemáticos para a ciclóide, tendo talvez ouvido falar da curva através de Galileu; em 1628 quando Roberval chegou a Paris, Mersene propôs ao jovem que estudasse a curva. Em 1634 Roberval pode provar que a área sobre um arco da curva é exatamente 3 vezes a área do círculo gerador. Em 1638 ele tinha descoberto como traçar a tangente a curva em qualquer ponto (problema resolvido ao mesmo tempo

> também por Fermat e Descartes) e tinha achado o volume gerado quando a área sob um arco gira em torno da reta de base. (BOYER, 1974, p. 259)

Quanto ao comprimento de arco, Torricelli, e também Roberval, trabalhando de forma independente, complementaram um trabalho anterior feito por Cavalieri de comparação entre a parábola e a espiral de Arquimedes.

Assim, buscando responder a estas perguntas, foram elaborados os importantes trabalhos de Newton e Leibniz.

3.4 O Cálculo de Newton

Tudo indica que Newton (1642–1727) chegou primeiro ao Cálculo, em 1665/1666, chamado por ele de "Teoria das Fluxões". Newton desenvolveu seu Cálculo Diferencial para descobrir exatamente como as tangentes mudam de direção, à medida que percorremos determinada curva, ou seja, ele tentava investigar qual era a inclinação desta reta. Newton escreveu Philosophiae naturalis principia mathematica, em 1665–1666, mas só a publicou em 1687 enquanto o primeiro artigo de Leibniz sobre o Cálculo apareceu em 1684 na Acta Erunditorum, uma espécie de "periódico científico"mensal fundado em 1682. Ficou então esta célebre polêmica: quem chegou primeiro aos resultados? Leibniz conhecia os manuscritos de Newton?

> Como um influente representante de governo Leibniz viajou muito. Em 1672 foi a Paris, esperando distrair os desígnios aquisitivos dos franceses contra a Alemanha por meio da "guerra santa"dirigida contra o Egito (sugestão mais tarde adotada por Napoleão). Lá ele encontrou Huygens, que sugeriu que se ele desejava tornar-se um matemático deveria ler os tratados de Pascal de 1658–1659. Em 1673 uma missão política levou-o a Londres, onde comprou um exemplar das Lectiones Geometricae de Barrow, encontrou Oldenburg e Collins, e tornou-se membro do Royal Society. (BOYER, 1974, p.293)

Isaac Barrow (1630–1677), em seu trabalho Lectures on Optics and Geometry, de 1669, desenvolveu um método para determinar tangentes a uma curva, usando o ”Triângulo Diferencial” ou ”Triângulo de Barrow”. Esse método contribuiu muito para o avanço do Cálculo, pois, aplicando o Cálculo Elementar, temos a derivada para várias equações específicas. O método de Barrow não apresentava nenhuma formalização. Tal formalização apareceu, entretanto, nos trabalhos de Newton (seu pupilo), Leibniz, Cauchy (1789–1857) e outros.

No período de 1666 e 1676, os matemáticos precisavam de algum algoritmo geral que se aplicasse a todos os tipos de funções, seja racional, irracional, algébrica ou transcendente. Com essa preocupação, Newton propôs uma nova análise infinitesimal a partir de uma expansão binomial infinita, para se chegar às quadraturas.

Nessa mesma época Newton desenvolveu outro trabalho chamado "*o método das fluxões*". Nesse método a simbologia utilizada por Newton era um ponto em cima de uma letra para representar um valor finito ou uma velocidade chamada de "fluxão"e as letras sem pontos representavam os "fluentes".

Ilustraremos com um exemplo o método de Newton:

Newton interpretou a curva como sendo a trajetória de um ponto P cuja velocidade tangencial projetada nos eixos OX e OY produz as componentes da velocidade $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Para Newton x e y são quantidades que "fluem", por isso chamou-as de "fluentes" são as variações de x e y respectivamente, Newton chamou-as de "fluxões"[9].

Para este intervalo de tempo o infinitamente pequeno (evanescente) as coordenadas de P, antes (x, y) passam a ser $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$

A inclinação da tangente é a "fluxão".

Fluxões $= \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Newton considera x e y como função do tempo, pois $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ representam o movimento uniforme.

Resumindo o método de Newton ou o método das fluxões considera que:

Fluxões $= \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

e

$f(x, y) = f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$

Suponhamos como exemplo o cálculo dos fluxões da curva $y = x^2$:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= y - x^2 \\
f(x, y) &= f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) \\
y - x^2 &= (y + \dot{y}o) - (x + \dot{x}o)^2 \\
y - x^2 &= y + yo - x^2 - 2x\dot{x}o - \dot{x}^2 o^2 \\
\dot{y}o &= 2x\dot{x}o + \dot{x}^2 o^2 \\
\dot{y} &= 2x\dot{x} + \dot{x}^2 o
\end{aligned}$$

[9]Em linguagem moderna: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$

Mas:

Fluxões $= \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

então $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(2x + \dot{x}o)\dot{x}}{\dot{x}} = 2x + \dot{x}o.$

Por ser infinitesimal o pode ser desprezado. Assim: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$

3.5 O Cálculo de Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) desenvolveu seu Cálculo nos anos de 1673 a 1676 sob a influência de Huygens (1629–1695) e dos trabalhos de Descartes e Pascal (1623–1662), publicando seu primeiro artigo em 1684, com duas páginas, tratando das regras básicas da diferenciação. O processo utilizado era muito parecido com o de Newton, no que diz respeito a quantidades infinitamente pequenas.

Leibniz deu uma nova notação para a diferenciação, ao invés de utilizar $x + x_0'$, ele utilizou $x + dx$.

Assim, para achar a diferencial de xy, era só fazer o produto $(x+dx).(y+dy)$ menos a quantidade xy, que daria:

$$xy + xdy + ydx + dxdy - xy = d(xy)$$

Como $dxdy$ era uma quantidade muito pequena, Leibniz a desprezou, tornando a diferencial de xy em:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

Essa relação entre diferenciais acabou se tornando uma regra bastante conhecida nos dias de hoje, pelos alunos de Cálculo.

Segundo o Teorema de Leibniz, podemos escrever a derivada n-ésima de um produto de funções. Para $n = 4$, por exemplo, temos a notação:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)},$$

sendo $y = uv$, teremos $\frac{d^4y}{dx^4} = u^{(4)}v^{(0)} + 4u^{(3)}v^{(1)} + 6u^{(2)}v^{(2)} + 4u^{(1)}v^{(3)} + u^{(0)}v^{(4)}$, onde os coeficientes 1, 4, 6, 4 e 1 são os coeficientes binomiais correspondentes à expansão da potência de expoente 4.

Leibniz não parou só na diferenciação, ele propôs também avanços no ramo da integração, como:

$$\int_0^x x = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \int (x+y) = \int x + \int y$$

Leibniz produziu, também, várias notações como dx, dy, $\int$ e também criou alguns termos como abscissa, ordenada, coordenada, eixo de coordenadas e função. Reis (2001) propõe um questionamento acerca da notação utilizada nos dias de hoje, pois ela se assemelha muito com a notação de Leibniz.

> ... por que a nossa "tradição"em Cálculo é, reconhecidamente, leibniziana, conforme podemos constatar nos livros didáticos? Teria sido pela notação de Leibniz (...), mais intuitiva e aplicável que a de Newton (...). (REIS, 2001, p. 56)

Concordamos com as idéias de Reis (2001), quando relata que nossa tradição atual no Cálculo é, essencialmente, "leibnitziana", conforme pode ser observado pelas notações acima destacadas, usualmente encontradas nos livros didáticos de Cálculo utilizados nos cursos de graduação das universidades. Isto ocorre porque Leibniz foi mais feliz que Newton na notação que usou.

> Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton. (EVES, 2004, p.243)

Os matemáticos ingleses que, por um costume muito britânico de valorizar suas conquistas, insistiram em utilizar a notação de Newton, tiveram um considerável atraso no desenvolvimento do Cálculo depois da morte do mestre.

3.6 A Otimização

Segundo Bennaton (2001), a otimização é um ramo da matemática aplicada que se preocupa em determinar as melhores soluções para problemas de tomada de decisões a partir de modelos matemáticos.

> Do Aurélio [9]:
>
> Otimização: [De otimizar + ação]. Determinação do valor ótimo de uma grandeza ou conjunto de grandezas.
>
> Ótimo: [Do latim optimu]. Quantidade ou estado que se considera o mais favorável em relação a um determinado critério.

A otimização é um campo que pode ser estudado em vários campos de pesquisa como na perspectiva da programação linear e não linear. Neste trabalho vamos utilizar de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, em especial, nas aplicações das derivadas para funções reais de uma variável afim de maximizar ou minimizar funções geradas nas áreas da administração, medicina, física e geofísica.

A seguir apresentamos uma breve introdução sobre a otimização matemática utilizando os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Bennaton (2001), a história da otimização teve início com os problemas isoperimétricos, ou seja, como encontrar a maior área de uma região com um perímetro fixo. Nos relatos históricos da antiguidade, existia um problema que buscava encontrar a maior área na beira de um rio com um determinado perímetro fixo e os povos antigos descobriram que a maior área a beira-rio seria a do semi-círculo. Na obra de Euclides, encontra-se uma menção, de que o retângulo que possui maior área é o quadrado. Segundo a autora em referência, foi com Pierre Fermat que foi dado início aos problemas de otimização utilizando os conceitos de máximos e mínimos de uma função. Segundo ela, da forma que sabemos encontrar área máxima com o menor perímetro nos dias atuais é muito diferenciada da que era feito no passado. As técnicas de Cálculo que utilizamos atualmente começaram por volta do séc. XVII, momento que ocorre o nascimento da ciência moderna na qual expoentes presentes na história matemática como: Newton, Leibniz, Cavaliere (1598–1647), Halley (1656–1742), Descartes (1596–1650) e outros tornaram-se os verdadeiros propulsores e revolucionários do desenvolvimento da Matemática Moderna.

Na história a relação entre máximos e mínimos de uma função está relacionada com as retas tangentes que tem como consequências o conceito de derivada. O Cálculo de Newton e Leibniz não fugiu da utilização da geometria, caso diferente de Euler e Lagrange, no qual trabalharam justamente em desgeometrizar o Cálculo criado por Newton e Leibniz, que era repleto de figuras geométricas não menos importantes. Euler lança o conceito de função como $f(x) = y$, e Lagrange por sua vez desviou o foco e reconstruiu a Mecânica Newtoniana com base analítica para melhor obter formas genéricas nas quais aplicamos nos dias atuais.

Posteriormente Cauchy complementa o Cálculo Diferencial com a introdução de limites aplicados no cálculo e começa a formalização de continuidade de uma função, e assim Cauchy deu amparo para chegarmos à forma do Cálculo que conhecemos atualmente.

Pierre de Fermat no século XVII tinha a Matemática, não como ofício, mas sim como distração de seu trabalho. Na matemática, Fermat desenvolveu métodos de representar curvas por meios de relações algébricas entre coordenadas dando início à geometria cartesiana (1630). Destacamos aqui que a geometria cartesiana foi criada por Descartes o que segundo a história é coincidente, pois não sabia Descartes do desenvolvimento de Fermat, como conhecedor de representação algébrica para curvas e superfícies, Fermat dedicou-se na resolução de problemas clássicos (otimização de áreas). O traçado da reta tangente deu início ao estudo de extremos de curvas e nesse período o estudo de extremos de curvas era praticamente inexplorado então se criou o método que consiste em obter máximos e mínimos que era da seguinte forma:

1°) Conhecendo a função da curva estudada, exemplo $f(x) = ax^2 + bx + c$, avaliava-se os pontos de leve deslocamento do tipo $f(x+x_0)$. Sobra-se dois termos de deslocamento de x para $x + x_0$ a própria função $f(x)$. Veja a seguir:

$$\begin{aligned}
f(x+x_0) &= a(x+x_0)^2 + b(x+x_0) + c \\
f(x+x_0) &= a(x^2 + 2xx_0 + x_0^2) + bx + bx_0 + c \\
f(x+x_0) &= ax^2 + 2axx_0 + ax_0^2 + bx + bx_0 + c \\
f(x+x_0) &= ax^2 + bx + c + 2axx_0 + ax_0^2 + bx_0
\end{aligned}$$

2°) Separando-se os termos no deslocamento então obtemos $\Delta f(x) = ax^2 + 2axx_0 + bx_0$.

3°) Desloca-se em quantidade extremamente pequena, investiga-se apenas os termos mais relevantes como $(2ax + b)x_0$, pois x_0^2 trata-se de um número pequeno elevado ao quadrado torna-se menor ainda e é esse o motivo de não considerá-lo.

4°) Investiga-se quando a expressão resultante é nula (igualamos a função a zero) para qualquer valor do deslocamento do tipo $\dfrac{-b}{2a}$, que trata-se do valor da abscissa do vértice da parábola.

5°) Nesse ponto da curva a reta tangente deve ser horizontal assim sendo pode-se tratar de um ponto crítico ou seja pode haver um máximo ou um mínimo em tal ponto.

Fermat utilizou a idéia básica de extremo de uma função e de forma embrionária estava presente os conceitos de diferencial, conceito que é base para o desenvolvimento deste trabalho.

Os trabalhos desenvolvidos por grandes matemáticos, tais como; Fermat (1601–1665), Leibniz (1646–1716), Newton (1643–1727), Cauchy (1798–1857), dentre outros, os mesmos marcaram um longo trajeto na Matemática para chegar ao cálculo que conhecemos e utilizamos nos dias atuais. Atualmente indústrias e varias áreas de engenharias e muitos outros ramos da ciência estão conseguindo se desenvolver em termos de aplicabilidade graças à magnífica ferramenta do Cálculo Diferencial e Integral e os conceitos desenvolvidos por matemáticos citados anteriormente foram base para tal feito histórico.

No próximo capítulo, apresentamos os conceitos preliminares que dará suporte ao desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 4

Resultados Preliminares

4.1 Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

Definição 1. *Se uma função* f *é definida em um intervalo aberto contendo* x_0*, então a derivada de f em* x_0*, denotada por* $f'(x_0)$*, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se este limite existir. Δx *representa uma pequena variação em* x*, próximo de* x_0*, ou seja, tomando* $x = x_0 + \Delta x (\Delta x = x - x_0)$ *, a derivada de* f *em* x_0 *pode também se expressa por*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Interpretação física: a derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0. Vejamos como isso ocorre:

Suponha que y seja uma função de x, ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de um valor x_0 até um valor x_1, representaremos esta variação de x, que também é chamada de incremento de x, por $\Delta x = x_1 - x_0$, e a variação de y é dada por $y = f(x_1) - f(x_0)$, o que é ilustrado na figura 3 a seguir:

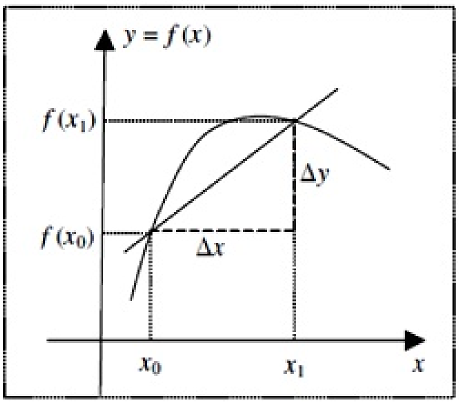


Figura 3

O quociente das diferenças, dado por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, é dito taxa de variação média de y em relação a x, no intervalo $[x_0, x_1]$. O limite destas taxas médias de variação, quando $\Delta x \to 0$, é chamado de taxa de variação instantânea de y em relação a x, em $x = x_0$. Assim, temos:

$$\textit{Taxa de variação instantânea} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Porém, $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

Interpretação Geométrica: a derivada de uma função f em um ponto a fornece o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Vejamos:

Dada uma curva plana que representa o gráfico de f, se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, então a equação da reta tangente r à curva em P é dada por $y - f(a) = m(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter m para que r seja tangente à curva em P?

Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q, cujas coordenadas são $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.

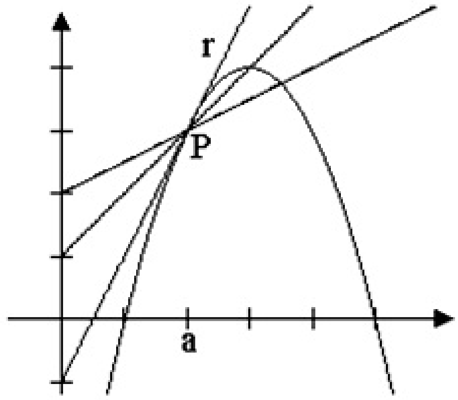


Figura 4

Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de P, ou seja, tomando Δx cada vez menor.

Tudo indica que quando P está próximo de Q, o coeficiente angular m_{sec} da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular m da reta r, ou seja, o coeficiente angular m_{sec} tem um limite m quando Q tende para P, que é o coeficiente angular da reta tangente r.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$ ($\Delta x = x - a$) e sabendo-se que a abscissa de P é expressa por a, então, se $Q \to P$ temos que $\Delta x \to 0$, o que é equivalente a $x \to a$. Assim:

$$m = \lim_{x\to a} m_{PQ} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(se este limite existe), é o coeficiente angular da reta tangente r. Porém,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Logo, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto, de fato, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

4.2 Regras de Derivação

No momento apresentaremos de forma sistemática as regras gerais para obter a derivada da soma, produto e quociente de duas ou mais funções. Apresentaremos também derivadas de funções como potência, polinomiais e trigonométricas. Por fim, apresentaremos a regra da cadeia, que permite encontrar a derivada de uma função que é a composição de duas funções que serão utilizadas posteriormente neste trabalho.

4.2.1 Derivada da Soma

Vamos provar que a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das funções. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais. Então

$$\begin{aligned}(f+g)(x+h)-(f+g)(x) &= f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))\\ &= (f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x),\end{aligned}$$

caso os limites envolvidos existam.

Provamos então a seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo aberto I. Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função soma $f+g$ é derivável em x_0 e vale que*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

4.2.2 Derivada do Produto

Vamos obter uma fórmula para a derivada do produto de duas funções $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Observe inicialmente que:

$$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$$

em que simplesmente somamos e subtraímos na expressão a parcela $f(x)g(x+h)$.

Reagrupando a expressão:

$$\begin{aligned}f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) &= f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\\ &= (f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))\end{aligned}$$

Dividindo a expressão por h e passando ao limite $h \to 0$, obtemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{(g(x+h)-f(x)g(x))}{h}\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\right)g(x)+f(x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{(g(x+h)-f(x)g(x))}{h}\right)
\end{aligned}$$

Observe que no desenvolvimento acima usamos as propriedades do limite da soma e do produto (a demonstração encontra-se na p.10 do material de cálculo do PROFMAT, unidade 3). Usamos também a continuidade da função g, assegurada para o caso em que g é derivável. Os limites na última equação acima são, supondo f e g deriváveis, respectivamente, os valores de $f'(x)$ e $g'(x)$.

Provamos, portanto, a seguinte proposição.

Proposição 2. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções definidas em um intervalo aberto* I. *Se as duas funções forem deriváveis em* $x_0 \in I$, *então a função produto* $(fg)(x)$ *é derivável em* x_0 *e vale que*

$$(fg)'(x_0) = f_0(x_0)g(x_0) + f(x_0)g_0(x_0)$$

4.2.3 Derivada do Quociente

Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo não trivial I. Definimos a função quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo ponto $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$.

Suponha agora que f e g são deriváveis em um ponto $x_0 \in I$ e que $g(x_0) \neq 0$. Provaremos que $\frac{f}{g}$ também é derivável em x_0 e obteremos uma expressão para a derivada da função $\frac{f}{g}$ em x_0.

Para começar, se g é derivável em x_0, então é contínua em x_0. Se $g(x_0) \neq 0$ então há um intervalo aberto J com $x_0 \in J$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in J$, ou seja, a função $\frac{f}{g}$ está definida em J. Para $x, x+h \in J$, temos que:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{f(x+h)}{h}.g(x)-f(x).\frac{g(x+h)}{h}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{f(x+h)}{h}.g(x)-\frac{f(x)g(x)}{h}+\frac{f(x)g(x)}{h}-f(x).\frac{g(x+h)}{h}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.g(x)-f(x).\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

em que somamos e subtraímos um termo $\frac{f(x)g(x)}{h}$

Passando agora ao limite quando $h \to 0$, obtemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)g(x+h)}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}\left(g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Se f e g forem deriváveis, então todos os limites envolvidos existem e $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, pois sendo g derivável em x também é contínua em x.

Resulta que, se f e g são deriváveis em um ponto $x_0 \in I$ vale que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 3. *Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo não trivial* I. *Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0$, então a função produto $\left(\frac{f}{g}\right)$ é derivável em x_0 e vale que*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

4.2.4 Derivada da Potência

Vamos calcular a derivada da função potência $f(x) = x^n$, para n inteiro qualquer. Vamos separar nossa dedução em duas partes: primeiro encontraremos a derivada de x^n para $n > 0$ usando a derivada do produto e indução. Em seguida, encontraremos a derivada de x^n para $n < 0$ usando a derivada do quociente. O caso $n = 0$ é trivial.

Proposição 4. *A função* $f(x) = x^n$ *é derivável para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se* $n \geqslant 0$ *e derivável para* $x \in \mathbb{R}^*$ *se* $n < 0$. *Nos dois casos* $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$

Demonstração. Se $n = 0$ o resultado se segue imediatamente, pois $x_0 = 1$, cuja derivada é 0.

Provaremos o caso $n > 0$ por indução.

Vale para $n = 1$, pois $f(x) = x^1 = x \Rightarrow f'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$.

Suponha que o resultado vale para $n = k$, ou seja, $f(x) = x^k$ é derivável e $f'(x) = kx^{k-1}$, então, aplicando a regra do produto, temos que $g(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$ é derivável e $(x^{k+1})(x.x^k) = x'x^k + x(x^k) = x^k + k \cdot x \cdot x^{k-1} = x^k + k \cdot x^k = (k+1) \cdot x^{k+1}$, o que completa a prova do caso $n > 1$.

Suponha agora que $n < 0$. então $n = -m$, com $m > 0$ e

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Se $x \neq 0$ então, pela derivada do produto, $\dfrac{1}{x^m}$ é derivável e vale que:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'(x^m) - 1(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

□

4.2.5 Derivadas das Funções Trigonométricas

Vamos encontrar as derivadas das funções $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$. As outras funções trigonométricas podem ser obtidas a partir destas duas utilizando as regras de derivação já estudadas.

Usaremos os dois limites trigonométricos abaixo para determinar a derivada da função $sen(x)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Calculando diretamente a derivada de $f(x) = sen(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\text{sen}(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\cos(x)\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right) + \text{sen}(x)\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right)\right]
\end{aligned}$$

em que usamos a fórmula do seno da soma:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$$

e agrupamos os termos com $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$. Passando o limite quando $h \to 0$ e usando os limites citados acima, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \cos(x) \lim_{h\to 0}\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right) + \text{sen}(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) \\ &= \cos(x).1 + \text{sen}(x).0 \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Concluímos assim: Se,

$$f(x) = \text{sen}(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x).$$

Passamos agora à derivada da função cosseno. O desenvolvimento é análogo ao que foi feito para a função seno.

Para a função $f(x) = \cos(x)$, temos:

$$\begin{aligned} (\cos(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[-\text{sen}(x)\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right) + \cos(x)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\right] \end{aligned}$$

em que usamos a fórmula do cosseno da soma $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$ e agrupamos os termos com $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$. Passando o limite quando $h \to 0$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= -\text{sen}(x) \lim_{h\to 0}\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right) + \cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) \\ &= -\text{sen}(x).1 + \cos(x).0 \\ &= -\text{sen}(x) \end{aligned}$$

Portanto, se

$$f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -\text{sen}(x).$$

□

4.2.6 Regra da Cadeia

Vamos encontrar a derivada da composição de duas funções.

Lembramos que dadas funções f e g, em que a imagem de f está contida no domínio de g, a composta $h = f \circ g$ é definida por:

$$h(x) = f(g(x))(x)$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))(x)$$

Proposição 5. *Sejam* f *e* g *funções reais tais que a imagem de* g *está contida no domínio de* f*. Se* g *é derivável em* x_0 *e* f *é derivável em* $g(x_0)$ *então* $f \circ g$ *é derivável em* x_0 *e* $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Demostração: (*Material de Cálculo do PROFMAT*)

Para demonstrar a Regra da Cadeia precisamos calcular

$$(f \circ g)(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h}$$

Aqui imporemos uma condição restritiva que simplifica bastante a demonstração. A condição é a seguinte: existe um intervalo não trivial I, com $0 \in I$ tal que $g(x_0 + h) - g(x_0) \neq 0$ para todo $h \in I$; $h \neq 0$. Neste caso, podemos dividir a expressão acima por $g(x_0 + h) - g(x_0)$ e passar o limite quando $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} . \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Como g é derivável em x_0, então

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0).$$

Como g é função contínua, então $\lim_{h \to 0} g(x_0 + h) = g'(x_0)$. Se escrevermos

$$u = g(x_0 + h) - g(x_0) \Rightarrow g(x_0 + h) = g(x_0) + u,$$

então $u \to 0$ quando $h \to 0$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\overbrace{g(x_0 + h)}^{g(x_0)+u}) - f(g(x_0))}{\underbrace{g(x_0 + h) - g(x_0)}_{u}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0) + u) - f(g(x_0))}{u} \\
&= f'(g(x_0))
\end{aligned}$$

Substituindo os dois limites calculados concluímos que:

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\
&= f'(g(x_0))g'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Caso a condição não se aplique, a demonstração torna-se um pouco mais delicada e não a faremos aqui. Esta condição se verifica em todas as aplicações que faremos nesse trabalho, exceto quando g for uma função constante. Neste caso, porém, o resultado vale trivialmente pois g e $(f\circ g)$ são constantes, logo têm derivada nula.

Para ver uma demostração do caso geral veja [25].

4.3 Máximos e Mínimos

Uma parte importante das aplicações do Cálculo Diferencial está relacionada ao problema de encontrar máximos e mínimos de funções. São os chamados problemas de otimização e que consistem, de maneira geral, em construir um modelo matemático do problema no qual alguma grandeza é dada por uma função derivável de uma ou mais variáveis e a informação que buscamos consiste em encontrar o máximo ou mínimo da função.

Máximos e mínimos de uma função são, respectivamente, os maiores e menores valores que a função assume em seu domínio, são os chamados valores extremos da função. Estes são extremos absolutos. No entanto, são também importantes os valores extremos em uma vizinhança de um ponto. São os chamados *extremos locais.*

O valor máximo (mínimo) de uma função em todo seu domínio é chamado máximo (respectivamente, mínimo) absoluto. Iremos formalizar esta definição e, em seguida, veremos as noções de máximo e mínimo relativos.

Definição 2. *Um função* $f : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tem máximo absoluto em* c *se* $f(x)\leqslant f(c)$ *para todo* x *no domínio* D *de* f*. Neste caso, o valor* $f(c)$ *é chamado valor máximo de* f *em* D.

Definição 3. *Um função* $f : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tem mínimo absoluto em* c *se* $f(x)\geqslant f(c)$ *para todo* x *no domínio* D *de* f*. Neste caso, o valor* $f(c)$ *é chamado valor mínimo de* f *em* D.

Os valores de máximo e mínimo absoluto de uma função são chamados valores extremos da função.

Observe agora a figura a seguir:

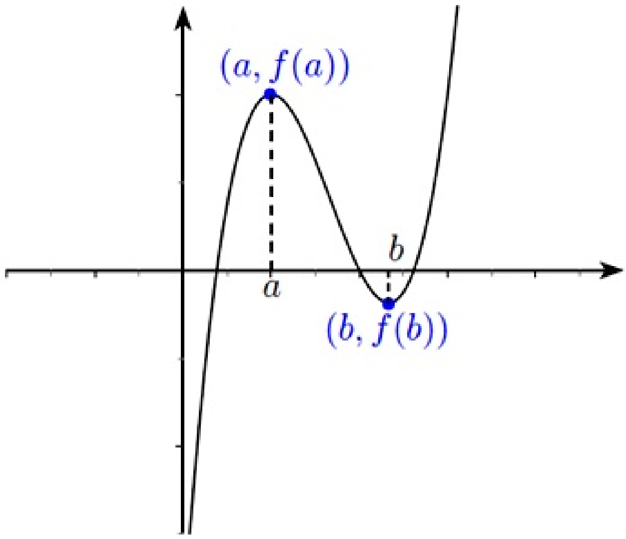


Figura 5

Claramente, o gráfico na figura 5 não possui máximo ou mínimo absoluto. No entanto, $f(a)$ é maior que todos os valores $f(x)$ para x próximo de a, ou seja, $f(a)$ é um valor máximo em um certo intervalo aberto contendo a. Nesta situação, dizemos que $f(a)$ é valor máximo local de f.

Da mesma forma, $f(b)$ é menor que todos os valores $f(x)$ para x próximo de b. Dizemos que $f(b)$ é valor mínimo local de f.

Definição 4. *Uma função* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto* c *de seu domínio, se existe intervalo aberto* I*, tal que* $c \in I$ *e* $f(x) \leqslant f(c)$ *para todo* $x \in I$*. Neste caso, dizemos que* $f(c)$ *é valor máximo local de* f*.*

Definição 5. *Uma função* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto* c *de seu domínio, se existe intervalo aberto* I*, tal que* $c \in I$ *e* $f(x) \geqslant f(c)$ *para todo* $x \in I$*. Neste caso, dizemos que* $f(c)$ *é valor mínimo local de* f*.*

Pontos de máximo local e pontos de mínimo local são chamados extremos locais (ou extremos relativos).

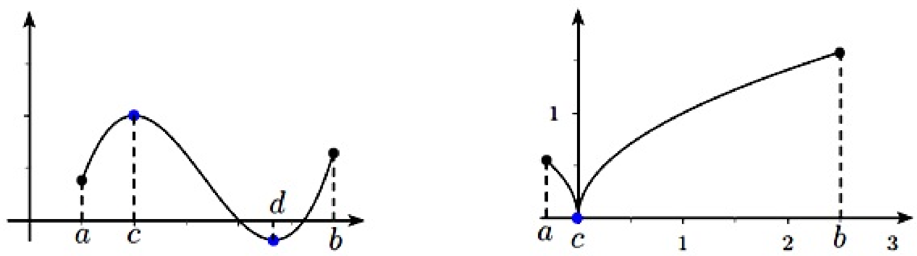
Como uma função pode ou não ter máximos e mínimos absolutos e relativos, a questão chave passa então a ser a seguinte: como determinar quando uma função tem valores extremos e como identificá-los.

Para determinar quando uma função tem valores extremos, utilizaremos o Teorema de Weierstrass para valores extremos, pois ele nos garante que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, definida em um intervalo fechado possui um máximo e um mínimo absoluto em $[a, b]$.

Teorema 1. *(Teorema de Weierstrass): Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua definida no intervalo* $[a, b]$*, fechado e limitado da reta. Então, existem números* c *e* d*, contidos em* $[a, b]$*, tais que, para todo* $x \in [a, b]$*,* $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.

Para ver uma demonstração do Teorema 1 veja [16].

Os valores extremos podem corresponder a pontos do interior do intervalo ou serem os extremos $f(a)$ ou $f(b)$. Veja os exemplos a seguir:



(a) Máximo absoluto em $x = c$ e mínimo absoluto em $x = d$

(b) Mínimo absoluto em $x = c$ e máximo absoluto em $x = b$

Figura 6

Lembramos que, as condições da função ser contínua e do intervalo ser fechado, no Teorema de Weierstrass, são necessárias. Relaxando qualquer uma das duas condições, pode não haver valores máximo ou mínimo absoluto no gráfico da função.

O próximo passo é descobrir como encontrar os máximos e mínimos relativos e absolutos de uma função. Veremos que para funções deriváveis, os extremos locais são pontos de derivada nula, embora nem todo ponto de derivada nula seja extremo local. Portanto, encontrando os pontos onde a derivada se anula, teremos os candidatos a extremos locais. Outros critérios serão mostrados para determinar, dentre estes candidatos, quais são de fato mínimos e máximos locais.

Observe a **figura 7**, onde mostramos um máximo local (**figura 7(a)**) e um mínimo local (**figura 7(b)**) em $x = c$ de uma função f. Suponha que f seja derivável em um intervalo aberto I e $c \in$ I.

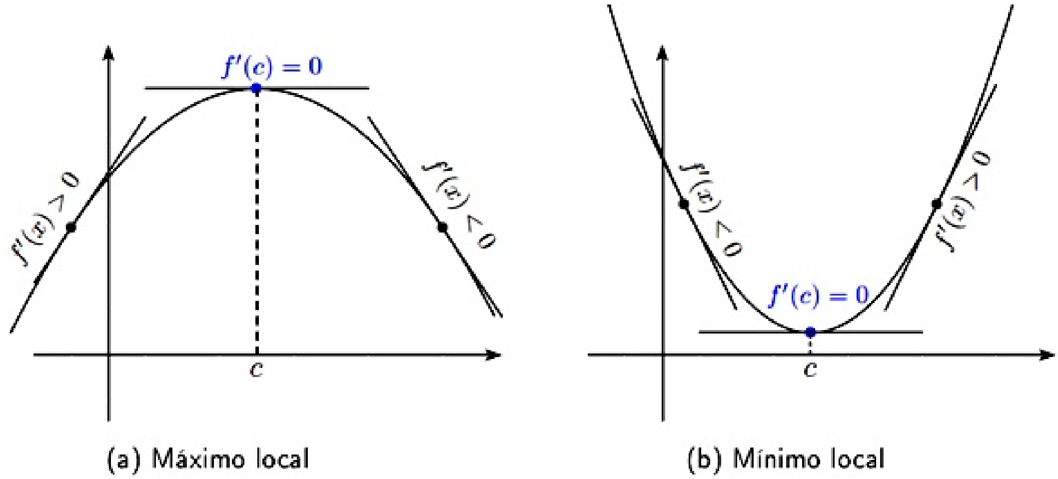


Figura 7

No caso de um máximo local, a função passa de crescente (pela figura, $f'(x)$ positivo) antes de $x = c$ para função decrescente (pela figura, $f'(x)$ negativo) depois de $x = c$, passando por $f'(x) = 0$ no ponto $x = c$.

No caso de um mínimo local, a função passa de decrescente ($f'(x)$ negativo) antes de $x = c$ para função crescente ($f'(x)$ positivo) depois de $x = c$, passando por $f'(x) = 0$ no ponto $x = c$.

O raciocínio anterior nos leva a crer que a função f tem derivada nula nos pontos de máximo e de mínimo locais. O próximo teorema mostra que isso é verdade sempre que f seja derivável no extremo local.

Teorema 2. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é totalmente análoga. Como f é derivável em c, então

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leqslant f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leqslant 0$, para todo $x \in (a, b)$. Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \tag{4.1}$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \tag{4.2}$$

Comparando as desigualdades (3.1) e (3.2) e levando em conta que são o mesmo número, resulta

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0$$

□

A recíproca do teorema não é verdadeira. Seja, por exemplo, a função $f(x) = x^3$. Como $f'(x) = 3x^2$ então $f'(0) = 0$. No entanto, f não possui máximo ou mínimo local em $x = 0$. Na verdade, a função não possui extremo local.

Também é verdade que uma função pode possuir máximo ou mínimo local sem que seja derivável neste ponto. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ possui mínimo local em $x = 0$, mas não é derivável neste ponto (Figura 8).

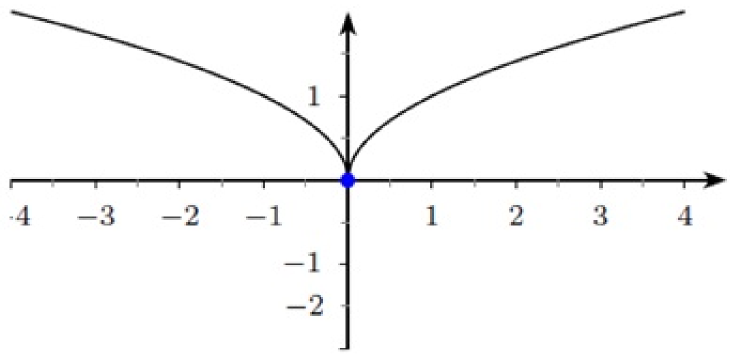


Figura 8

Este último fato motiva a seguinte definição:

Definição 6. *Um ponto* c *no domínio de uma função* f *é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguintes casos:*

(a) f *não é derivável em* $x = c$.

(b) f *é derivável em* c *e* $f'(c) = 0$.

O **Teorema 2** nos diz que qualquer máximo ou mínimo local c deve ser ponto crítico, pois se f não for derivável em c então é ponto crítico (item (a) da definição acima) e se f for derivável em c então $f'(c) = 0$ pelo teorema e c é ponto crítico de f (item (b) da definição acima). Resulta que podemos reescrever o **Teorema 2** como: Se $x = c$ é máximo ou mínimo local de f então c é ponto crítico de f. Portanto, a busca pelos máximos e mínimos locais de f deve se dar pelos pontos onde f não é derivável e pelos pontos onde é derivável e sua derivada é nula.

Para encontrar o máximo e mínimo absoluto da função definida em um intervalo, devemos ainda considerar seus valores no ponto inicial e final do intervalo, caso estejam no domínio da função. O seguinte método resume o procedimento para uma função definida em um intervalo fechado.

Para determinar o máximo e mínimo absoluto de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Determine os pontos críticos de f no intervalo aberto (a, b).

2. Determine $f(a)$ e $f(b)$.

3. Compare os valores assumidos por f nos pontos críticos com $f(a)$ e $f(b)$. O maior dentre eles será o máximo absoluto de f em $[a, b]$ e o menor entre eles será o mínimo absoluto de f em $[a, b]$.

Até o momento, sabemos que os pontos de máximo e mínimo local são pontos críticos. No entanto, dado um ponto crítico, não sabemos ainda determinar se é ponto de máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois. Para isso usaremos o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Médio e algumas proposições.

Observe os dois gráficos da figura 6 a seguir. Neles podemos observar o gráfico de função definidas em um intervalo $[a, b]$, em que $f(a) = f(b)$. O que se observa nos dois gráficos é que existe algum $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

O Teorema de Rolle afirma que este é sempre o caso.

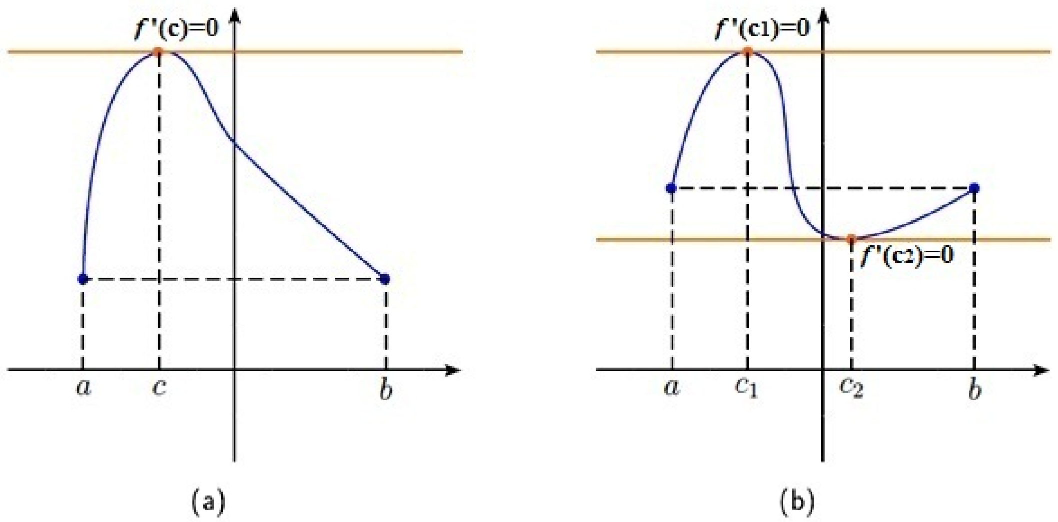


Figura 9

Teorema 3. *(Teorema de Rolle) Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b) *e* $f(a) = f(b)$ *então existe pelo menos um número* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração: Pelo Teorema de Weierstrass, a função f contínua em $[a, b]$ possui valor máximo e mínimo no intervalo. Sejam m e M os valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, respectivamente.

Se estes valores são assumidos nos extremos do intervalo, por exemplo, $f(a) = m$ e $f(b) = M$, então, como $f(a) = f(b)$ por hipótese, o mínimo e o máximo da função são o mesmo valor e, portanto, a função é constante em todo o intervalo. Como a derivada da função constante é nula, temos $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$, o que prova o Teorema de Rolle neste caso.

Caso o mínimo ou máximo absoluto da função não estejam nos extremos do intervalo, então há um ponto c no intervalo aberto (a, b) tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f. Então c é extremo local de f e, pelo Teorema 2, como f é derivável em (a, b) temos $f(c) = 0$, o que conclui a demonstração.

□

Um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial é o chamado Teorema do Valor Médio. Ele será utilizado para provar resultados que permitem analisar aspectos do comportamento global de uma função (como intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade etc.) a partir de sua função derivada. Iremos agora enunciar e provar o

Teorema do Valor Médio, usando o Teorema de Rolle. Antes disso, observe os dois gráficos na figura 9 a seguir.

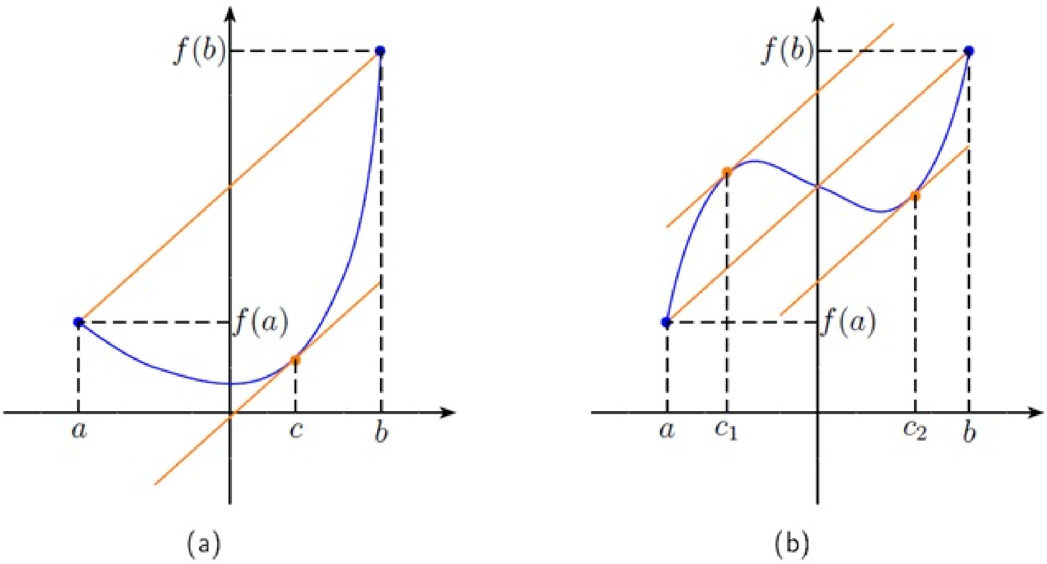


Figura 10: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Intuitivamente, se deslocarmos a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ mantendo a mesma inclinação, isto é, deslocarmos paralelamente a reta, em algum momento ela se torna tangente à curva em um ponto c. Então, a tangente obtida passando por c tem a mesma inclinação que a reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Logo, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

O argumento acima não constitui uma prova formal do Teorema do valor médio, mas somente um argumento geométrico que mostra sua plausibilidade. Seguem o enunciado e a prova formal do Teorema.

Teorema 4. *(Teorema do Valor Médio) Seja* f *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b)*. Então existe pelo menos um número* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Para aplicar o Teorema de Rolle, faremos uso de uma função g, definida a partir de f e tal que $g(a) = g(b)$.

Seja a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

Então g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Além disso:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \text{ e } g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

Logo, $g(a) = g(b)$. Podemos então aplicar o Teorema de Rolle para g e concluir que existe um $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Logo, $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, o que completa a demonstração do Teorema do Valor Médio.

$\square$

Agora veremos duas consequências importantes do Teorema do Valor Médio. A primeira delas é que se uma função tem derivada nula em todo ponto então ela é uma função constante.

Proposição 6. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b) *tal que* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in (a,b)$. *Então* f *é constante em* (a,b).

Demonstração: Sejam $x_0, x_1 \in [a,b]$, com $x_0 < x_1$, então f é contínua em $[x_0,x_1]$ e derivável em (x_0,x_1). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_0,x_1)$ tal que

$$f'(c) - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Mas $f'(c) = 0$, logo $f(x_1) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_0)$, ou seja, a função tem o mesmo valor para quaisquer pontos $x_0, x_1 \in (a,b)$. Resulta que f é constante em (a,b) e, por continuidade, constante em $[a,b]$.

$\square$

Proposição 7. *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas e deriváveis em* (a,b). *Se* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (a,b)$ *então existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + k$ *para todo* $x \in (a,b)$.

Demonstração: Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então h é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$; para todo $x \in (a,b)$. Pela Proposição 6, $h(x)$ deve ser constante, isto é, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k \Rightarrow f(x) = g(x) + k$, para todo $x \in (a,b)$.

$\square$

Agora iremos relacionar a propriedade de crescimento de uma função e sua derivada. Intuitivamente, a relação entre crescimento e derivada é a de que a função é crescente nos intervalos de derivada positiva e decrescente nos intervalos de derivada negativa. De fato, mostraremos o seguinte:

Proposição 8. *Seja a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b) *então:*

(i) f *é não decrescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$. *Além disso, se* $f'(x) > 0$ *pra todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é crescente em* $[a, b]$.

(ii) f *é não crescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$. *Além disso, se* $f'(x) < 0$ *pra todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é decrescente em* $[a, b]$.

Demonstraremos o item (i), já que o item (ii) o procedimento é análogo.

Demonstração: Suponha que f seja não decrescente em $[a, b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$. Se $h > 0$, temos $x + h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x + h) \geqslant f(x) \Rightarrow f(x + h) - f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Se $h < 0$, temos $x + h < x$ e, como f é não decrescente:

$$f(x + h) \leqslant f(x) \Rightarrow f(x + h) - f(x) \leqslant 0 \Rightarrow \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Em ambos os casos, $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$, Portanto

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Suponha agora que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$. Sejam $x_0, x_1 \in [a, b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do valor médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(c) \geqslant 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_0)$ e, portanto, f é não decrescente. Por outro lado, se vale que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então fica garantido que $f'(c) > 0$ e vale que $f(x_1) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$, o que mostra que f é crescente.

□

A partir da Definição 6, vimos que se $f'(c) = 0$ então $x = c$ é ponto crítico de f e $f(c)$ pode ser mínimo local, máximo local ou nenhum dos dois. Agora que relacionamos crescimento e decrescimento do gráfico de função com o sinal da derivada, podemos usar esta para, dado um ponto com $x = c$ tal que $f'(c) = 0$, dizer em quais dos três casos ele se enquadra.

Inicialmente, verifique na figura 10 a seguir os casos possíveis:

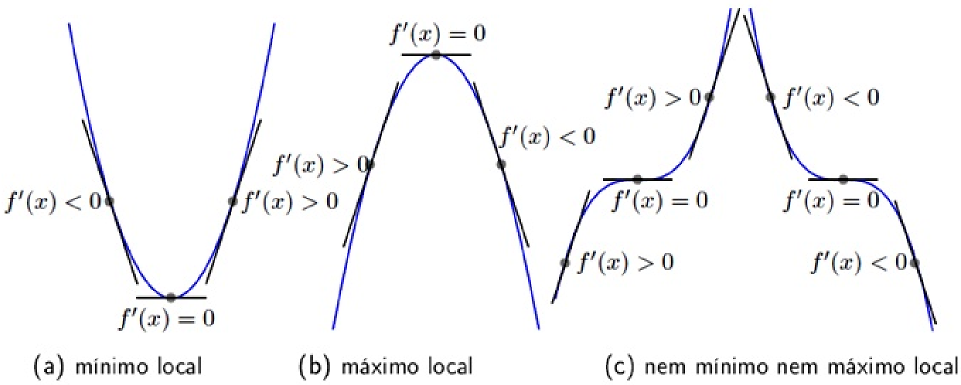


Figura 11

Vemos que os máximos e mínimos locais acontecem exatamente quando há mudança de sinal de $f'(x)$. Mais precisamente, temos o chamado Teste da derivada primeira:

Proposição 9. *(Teste da Derivada Primeira): Seja a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b) *e seja c um ponto crítico de* f *(caso (b) da Definição 6).*

(i) *Se* f' *passa de positiva para negativa em* c *então* f *tem máximo local em* c.

(ii) *Se* f' *passa de negativa para positiva em* c *então* f *tem máximo local em* c.

(iii) *Se* f' *não muda de sinal em* c *então* f *não tem um máximo nem mínimo local em* c.

Demonstração:

Vamos demonstrar o item (i). Se f' passa de positiva para negativa em c então existem $x_0, x_1 \in (a, b)$, $x_0 < c < x_1$, tais que $f'(x) > 0$ se $x \in (x_0, c)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (c, x_1)$. Pela Proposição 8, f é crescente em $[x_0, c]$ e decrescente em $[c, x_1]$, segue que $f(c)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$ que contém c.

Analogamente, se f' passa de negativa para positiva em c, então existe intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é decrescente em $[x_0, c]$ e crescente em $[c, x_1]$. Portanto, $f(c)$ é valor mínimo no intervalo $[x_0, x_1]$, o que demonstra (ii).

Para provar o item (iii), seja $I \in [a, b]$ um intervalo contendo c. Como f' não muda de sinal em c então há um intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é crescente (respectivamente, decrescente) em $[x_0, c]$ e continua crescente (respectivamente, decrescente) em $[c, x_1]$. Aproximando x_0 e x_1 de c o que for necessário, podemos supor que $[x_0, x_1] \in I$. Portanto, $f(c)$ não pode ser valor máximo nem mínimo em I.

□

Proposição 10. *(Teste da Derivada Segunda): Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe então:*

(i) *Se $f''(c) < 0$ então f possui máximo local em c.*

(ii) *Se $f''(c) > 0$ então f possui mínimo local em c.*

O teste é inconclusivo caso $f''(c) = 0$.

Demonstração. Demonstraremos o caso (i). O caso (ii) é análogo. Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Então

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Portanto,

$$a < x < c \Rightarrow x - c < 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$c < x < b \Rightarrow x - c > 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c. Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$.

□

Capítulo 5

Aplicações de Derivadas - Problemas de Otimização

Uma das aplicações mais comuns do Cálculo são os problemas de otimização. Tratam-se de problemas que são modelados por uma função e buscamos obter os valores de máximo ou mínimo da função.

Neste capítulo, daremos vários exemplos de problemas de otimização, em várias áreas do conhecimento, mostrando como o Cálculo pode ser aplicado nos mais diversos campos do conhecimento humano.

5.1 A Receita Otimizada

Na atividade operacional de uma empresa diversos fatores contribuem para a formação da receita proveniente do volume de vendas. Fatores como volume da produção e potencial de mercado não podem ser esquecidos na formação da receita: porem em pequenos intervalos, onde já foram consideradas as variáveis restritivas, e considerando-se o preço constante nesse intervalo de produção, o rendimento total da empresa ou receita total, será função, somente, da quantidade vendida. Supondo que sejam vendidas "x" unidades do produto, o que se recebe pela venda efetuada é chamado função receita de vendas. Veremos como obter o valor de x que gera a receita máxima da empresa.

Problema 1. *Para comemorar sua formatura, uma turma de alunos da Universidade do Piauí pretende realizar uma viagem e, para tal, fretar um avião com "*n*" lugares. A empresa locadora estipulou que cada aluno participante deverá pagar "*k*" reais acrescidos* *de um adicional de "p" reais por cada lugar vago. Mostre que* $\dfrac{k+np}{2p}$ *é a quantidade ótima de pessoas, isto é, tal quantidade maximiza a receita obtida pela empresa.*

Demonstração. Denotando-se por "x" o número de passageiros e por $V(x)$ o valor pago em dinheiro em função do número de passageiros, temos que

$$V(x) = k + p \cdot (n - x)$$

Adotando $R(x)$, a receita obtida pela empresa, chegamos à expressão da mesma função do número de passageiros, que é obtida pela multiplicação do número de passageiros pelo valor pago por eles.

$$R(x) = x \cdot V(x) = x \cdot [k + p \cdot (n - x)] = -px^2 + (k + np)x.$$

Daí segue que para encontrar a quantidade de passageiros para a qual a receita é máxima, é equivalente a encontrar o valor "x" que maximiza a função receita $R : [0, n] \to \mathbb{R}$ definida por

$$R(x) = -px^2 + (k + np)x.$$

Calculando a derivada de "R" e igualando-a a zero para determinar o ponto crítico, assim temos:

$$R(x) = -2px + k + np = 0,$$

implicando que $x = \dfrac{k+np}{2p}$. Caso desejássemos calcular o valor máximo da receita teríamos de calcular $R\left(\dfrac{k+np}{2p}\right) = \dfrac{(k+np)^2}{4p}$. Por último, note que $R''(x) = -2p < 0$, $\forall x$ e assim sendo confirmado que o ponto crítico encontrado é, de fato, um ponto de máximo absoluto, uma vez que $R(0) = 0$ e $R(n) < R\left(\dfrac{k+np}{2p}\right)$.

□

5.2 O Lote de Wilson

EOQ também conhecido como quantidade econômica de encomenda é um modelo de gestão de stocks que envolve, de cada vez que uma nova encomenda tem lugar, a aquisição de uma quantia fixa de produto. O montante exato do produto a ser encomendado depende da relevância do inventário transportado, das características de custo e procura dos produtos, assim como dos custos envolvidos de uma nova encomenda (Coyle et al., 2002, p. 227).

É um modelo clássico, que foi apresentado como resultado do seu trabalho na Westinghouse Corporation, por Ford Harris, em 1913. Este modelo ficou também conhecido, graças ao consultor que o implementou em diversas empresas, como lote de Wilson (Garcia et al., 2006, p.22).

Relativamente à quantidade económica de encomenda, usualmente as empresas chamam a esta abordagem o sistema dos dois caixotes. Quando o primeiro caixote está vazio, é feita uma encomenda. A quantidade de inventário que a empresa necessita, até a nova encomenda chegar é representada pela quantidade de stock no segundo caixote. Ambas as noções implicam, que uma empresa irá produzir stock ou voltar a encomendar quando a quantidade de inventário em mão diminuir para um nível predeterminado (Coyle et al., 2002, p. 227).

Novamente, a quantidade encomendada depende da procura e do custo do produto, juntamente com os custos de uma nova encomenda e de posse de inventário. O nível de encomenda de stock (número de unidades), depende do tempo que demora para obter essa nova encomenda e da procura desse produto ou da taxa de vendas do mesmo durante esse período de tempo, tais como, quantas unidades a empresa vende por dia ou por semana (Coyle et al., 2002, p. 227).

As empresas usando este modelo, necessitam, de modo a determinar quando voltar a encomendar uma quantidade fixa, de desenvolver um nível mínimo de stock. Isto é usualmente chamado de ponto de encomenda. Quando o número de itens do inventário atinge o nível predeterminado, a quantidade fixa de encomenda (também conhecida como quantidade econômica de encomenda, ou EOQ) é como que espontaneamente encomendada (Coyle et al., 2002, p. 227).

Problema 2. *Uma grande loja de departamentos vende um total anual de "*N*" unidades de um certo artigo – digamos geladeiras – a uma taxa constante durante o ano. Os artigos adquiridos do distribuidor num único pedido são entregues em um único lote. Se a loja encomenda todas as "*N*" unidades, que são entregues no início do ano, ela evita os custos de novas encomendas, como o tempo de serviço de escritório e despesas de transporte. No entanto fica sujeito a custos de manutenção mais altos com a ocupação de espaços nos depósitos, seguro, etc. Note-se que o estoque médio durante o ano é* $\frac{\mathsf{N}}{2}$*, um número* *relativamente grande. Por outro lado, se faz uma encomenda por dia, o estoque médio se mantém baixo, mas os custos de novas encomendas tornam-se substanciais. Considerando ambos os tipos de custo, demonstre que o valor do lote de Wilson, isto é, o tamanho do lote que minimiza o custo total é dado por*

$$x = \sqrt{\frac{2FN}{w}}$$

Onde F *é a parte fixa do custo de encomenda e* W *é o custo anual total de transporte e manutenção de uma unidade de geladeira.*

Demonstração. Com "x" unidades por lote, haverá $\frac{N}{x}$ encomendas por ano. Supomos que o custo de encomenda consiste em uma parte fixa F (tempo de serviços de escritório, correio, despesas de recepção, etc.) mais o custo da encomenda me si, S_x, que é proporcional ao tamanho da encomenda. O custo total de cada encomenda é, então:

$$(F + S_x)\frac{N}{x} = \frac{FN}{x} + SN,$$

que é claro, cresce quando o tamanho do lote "x" decresce. Além disso, supomos que o custo anual total de transporte e manutenção de uma única unidade é uma constante "W" que pode ser determinada pelo setor de contabilidade. Como o estoque médio é $\frac{x}{2}$ quando o tamanho do lote é x, o custo total anual de manutenção é

$$W \cdot \frac{x}{2}$$

que cresce quando x cresce. O conjunto é, portanto

$$C(x) = \frac{Wx}{2} + \frac{FN}{x} + SN.$$

O custo mínimo é obtido fazendo $C'(x) = 0$, ou seja,

$$\frac{W}{2} + \frac{FN}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{FN}{x^2} = \frac{W}{2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2FN}{W}}.$$

Como $C''(x) = \frac{2FN}{x^3}$, então $C''(x_0) > 0$ e x_0 é de fato, um ponto de mínimo.

□

5.3 Implantes em Vasos Sanguíneos

O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para outros órgãos e de volta para o coração.

Quanto menor a resistência ao fluxo em um vaso sanguíneo menor a energia gasta pelo coração. Assim, o sistema vascular sanguíneo opera de tal forma que a circulação do sangue do coração através dos órgãos do corpo e de volta ao coração é executada com mínimo de gasto de energia possível. Assim, é razoável esperar que, quando a artéria se ramifica o ângulo entre a artéria "mãe" e a artéria "filha" deve minimizar a resistência total ao fluxo do sangue.

Jean Louis-Marie Poiseuille (1799–1869) foi um médico fisiologista e físico francês nascido em Paris que estudou micro tubos com diâmetros inferiores a 0,2 mm. Suas publicações iniciaram-se em 1828 discutindo sobre o bombeamento do coração, o escoamento do sangue nas veias e nos vasos capilares e a resistência a este movimento.

De acordo com a 2ª Lei de Poiseuille, para uma vazão constante, a variação de pressão entre dois pontos quaisquer (resistência ao fluxo) dentro do tubo é diretamente proporcional ao comprimento desse tubo e inversamente proporcional a quarta potência de seu raio, isto é,

$$R = \frac{k \cdot L}{R^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; R, o raio; e k é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue.(Poiseuille estabeleceu experimentalmente essa lei).

Outra consequência interessante da 2ª lei de Poiseuille é que uma pequena variação no raio do tubo provoca uma grande alteração da pressão, pois ela é inversamente proporcional a quarta potência do raio. É devido a este fato, que um pequeno acúmulo de gordura nas artérias, provoca um grande aumento na pressão sanguínea, levando a paradas cardíacas e outras complicações vasculares.

Problema 3. *Na figura abaixo, temos uma artéria "filha" de raio* r *se ramificando através de uma artéria "mãe" de raio* R. *O sangue flui do ponto A para o ramo em B, e então para* C *e* D.

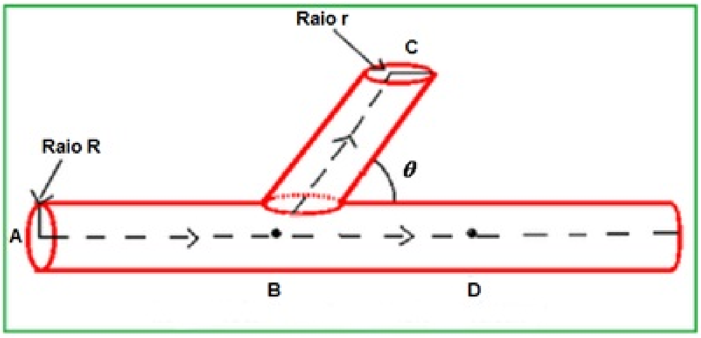


Figura 12

Demonstre que o ângulo ótimo de ramificação entre duas artérias satisfaz a equação

$$\cos(\theta) = \frac{r^4}{R^4}$$

Demonstração. De acordo com a 2ª lei de Poiseuille, a resistência do sangue em fluir do ponto A para o ponto B é dada por

$$s_1 = \frac{ks_1}{R^4}$$

e a resistência do ponto B ao ponto C é

$$s_2 = \frac{ks_2}{r^4}$$

onde k é uma constante que depende da viscosidade do sangue e s_1 e s_2 são os comprimentos das partes da artéria de A a B e de B e C, respectivamente. Assim, a resistência total do sangue em fluir através da ramificação é dada pela soma

$$s = s_1 + s_2 = \frac{ks_1}{R^4} + \frac{ks_2}{r^4} = k\left(\frac{s_1}{R^4} + \frac{s_2}{r^4}\right).$$

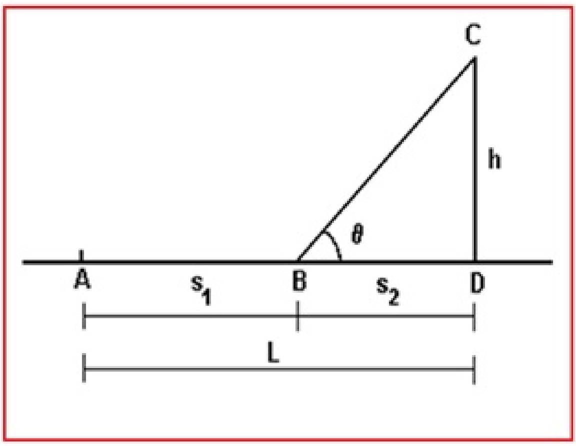


Figura 13

Através da figura acima, podemos escrever a resistência s em função do ângulo de ramificação θ, isto é,

$$s(\theta) = k\left(\frac{L - h.\text{cotg}(\theta)}{R^4} + \frac{h.\cos(\theta).\sec(\theta)}{r^4}\right)$$

Os valores de θ que minimizam a resistência $s(\theta)$ deve satisfazer a equação $s'(\theta) = 0$, ou seja,

$$s'(\theta) = k.h\left(\frac{\text{cosec}^2\theta}{R^4} - \frac{\text{cosec}(\theta)\cdot\text{cotg}(\theta)}{r^4}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\text{cosec}(\theta)}{R^4} - \frac{\text{cotg}(\theta)}{r^4} = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{r^4}{R^4}.$$

Finalmente, se $\theta = \theta_0$ é o ângulo que satisfaz esta equação, basta demostrar que $s''(\theta_0) > 0$, o que garante que a resistência é minimizada para este ângulo.

$$\begin{aligned}
s''(\theta_0) &= k\cdot h\left[\frac{-2\text{cosec}^2(\theta)\cdot\text{cotg}(\theta)}{R^4} - \frac{\text{cotg}^2(\theta)\cdot\text{cosec}(\theta) + \text{cosec}^3(\theta)}{r^4}\right]\\
s''(\theta_0) &= k\cdot h\left[\frac{-2\text{cosec}^2(\theta)\cdot\text{cotg}(\theta)\cdot r^4 + \text{cotg}^2(\theta)\cdot\text{cosec}(\theta)\cdot R^4 + (1+\text{cotg}^2(\theta))\cdot\text{cosec}(\theta)R^4}{R^4\cdot r^4}\right]\\
s''(\theta_0) &= k\cdot h\left[\frac{2\text{cosec}(\theta)\cdot\text{cotg}(\theta)\cdot(\text{cotg}(\theta)\cdot R^4 - \text{cosec}(\theta)\cdot r^4) + \text{cosec}(\theta)\cdot R^4}{R^4\cdot r^4}\right]\\
s''(\theta_0) &= k\cdot h\left[2\text{cosec}(\theta)\cdot\text{cotg}(\theta)\cdot\left(\frac{\text{cotg}(\theta)}{r^4} - \frac{\text{cosec}(\theta)}{R^4}\right) + \frac{\text{cosec}(\theta)}{r^4}\right]
\end{aligned}$$

Como $\left(\frac{\text{cotg}(\theta)}{r^4} - \frac{\text{cosec}(\theta)}{R^4} = 0\right)$, temos que

$$s''(\theta_0) = k\cdot h\left[\frac{\text{cosec}(\theta)}{r^4}\right] > 0$$

□

5.4 Instalando um Painel Solar

Painel Solar ou Placa solar é um dispositivo criado para converter a radiação solar em energia. Por se valer exclusivamente do Sol, a fonte de energia mais abundante do planeta, trata-se do método mais limpo conhecido de geração de energia. Estima-se que com apenas 4 metros quadrados de painéis solares instalados, possa-se reduzir em até meia tonelada as emissões de Gás Carbônico de um edifício. Painéis Solares pode ser divididos painéis solares fotovoltaicos e painéis térmicos.

Problema 4. *Você foi contratado para construir um painel solar no nível do solo no eixo leste-oeste entre dois prédios, conforme a figura 13.*

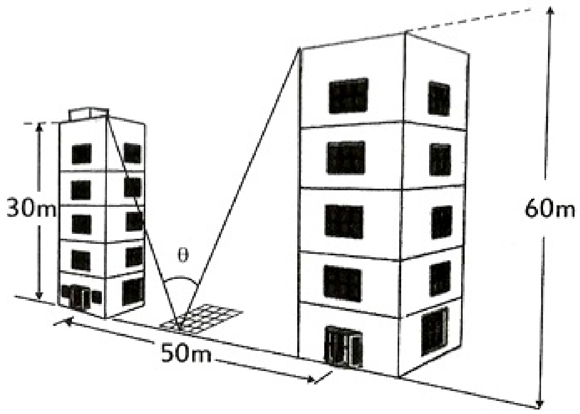


Figura 14

A que distância do prédio mais alto você deve colocar o painel para maximizar o número de horas que o painel ficará exposto à luz quando o sol passar perpendicularmente sobre o painel? Demonstre que

$$\theta = \pi - \textit{arc cotg}\left(\frac{x}{60}\right) - \textit{arc cotg}\left(\frac{50-x}{30}\right)$$

e utilize tal expressão para determinar o valor de x *que a maximiza.*

Demonstração: sendo α o ângulo de vértice em x que se opõe ao prédio maior e β, de forma análoga, o ângulo que se opõe ao menor prédio, temos que

$$\text{tg}\alpha = \frac{60}{x} \quad \text{e} \quad \text{tg}\beta = \frac{30}{50-x}$$

e como $\alpha + \theta + \beta = \pi$, concluímos que

$$\theta = \pi - \text{arc cotg}\left(\frac{x}{60}\right) - \text{arc cotg}\left(\frac{50-x}{30}\right).$$

À luz de que arc $\text{cotg}'\lambda = \dfrac{-\lambda'}{1+\lambda^2}$, obtemos o resultado abaixo para a derivada θ

$$\theta'(x) = \frac{60}{3600+x^2} - \frac{30}{900+(50-x)^2}$$

e ainda

$$\theta''(x) = \frac{-120x}{3600+x^2} + \frac{60.(x-50)}{900+(50-x)^2} < 0, \forall x \in [0,50],$$

pois $(3600 + x^2)$ e $(900 + (50 - x^2))$ são sempre positivas $\forall x \in [0, 50]$ enquanto $(-120x)$ e $(60 \cdot (x - 50))$ são sempre negativas $\forall x \in [0, 50]$.

Analisando a equação dos pontos críticos $\theta'(x) = 0$, obtemos, depois de algumas simplificações, a equação quadrática

$$x^2 - 200x + 3200 = 0,$$

cujas as soluções são dadas por

$$x_1 \approx 182,46 \text{ m} \quad \text{e} \quad x_2 \approx 17,54 \text{ m},$$

e como $x \in [0, 50]$ segue que o valor de x que maximiza θ é $x \approx 17,54$ m.

□

5.5 Exploração Sísmica

A Geofísica é uma ciência que estuda a Terra usando medidas físicas tomadas normalmente na sua superfície, envolvendo o estudo de partes profundas da Terra geralmente inacessíveis às observações diretas (SBGf, 2003). Através da interpretação das observações realizadas na superfície, são geradas informações úteis sobre a estrutura e a composição das zonas inacessíveis em grandes profundidades. Quase todo o conhecimento sobre áreas abaixo de profundidades limitadas por poços e minas subterrâneas provém de observações geofísicas. Grande parte das ferramentas e técnicas desenvolvidas para tais estudos tem sido aplicada em pesquisas acadêmicas sobre a natureza do interior da Terra. Entretanto, o grande avanço obtido nas técnicas geofísicas é, principalmente, devido à sua forte utilização na exploração de hidrocarbonetos e de minérios. Especificamente, dentre as técnicas geofísicas, na área de exploração de petróleo, a prospecção sísmica é a mais utilizada.

A forte utilização da sísmica na exploração e desenvolvimento de reservatórios de hidrocarbonetos deve-se à sua larga e densa amostragem tanto em área quanto em profundidade aliada ao contínuo refinamento de técnicas de tratamento e interpretação dos dados sísmicos. O desenvolvimento de tecnologias nas áreas de aquisição, processamento e interpretação dos dados sísmicos, aliado ao estudo das relações entre propriedades sísmicas, propriedades petrofísicas e condições ambientais, tornaram esta técnica indiscutivelmente a mais poderosa ferramenta de exploração e uma das mais importantes na caracterização de reservatórios de petróleo.

Problema 5. *As velocidades do som* c_1 *em uma camada superior e* c_2 *em uma camada inferior de rocha e a espessura h da camada superior podem ser determinadas pela exploração sísmica se a velocidade do som na camada inferior for maior que a velocidade do som na camada superior. Uma carga de dinamite é detonada em um ponto* P *e os sinais* *transmitidos são registrados em um ponto* Q*, o qual está a uma distância* D *de* P*. O primeiro sinal leva* T_1 *segundos para chegar ao ponto* Q *pela superfície. O próximo sinal viaja do ponto* P *ao ponto* R*, do ponto* R *para um ponto* S *na camada inferior e daí para o ponto* Q *e leva* T_2 *segundos para fazer este percurso todo. O terceiro sinal é refletido na camada inferior no ponto médio de* RS *e leva* T_3 *segundos para chegar em* Q*. Veja figura 14.*

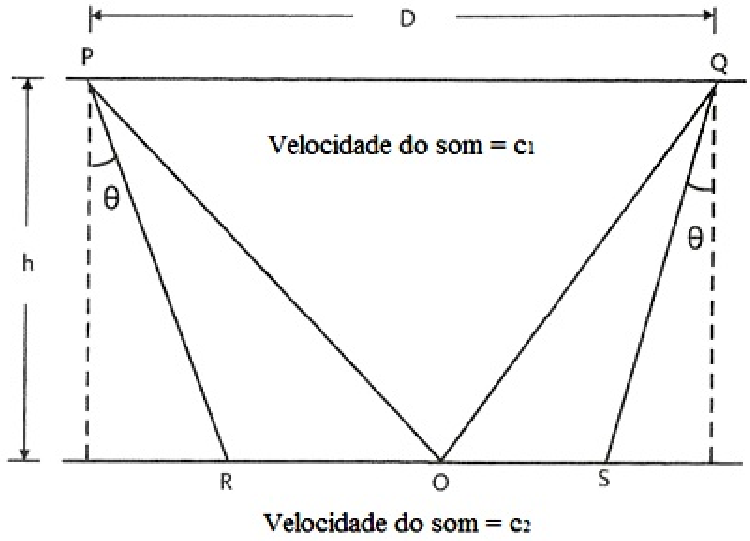


Figura 15

Escreva T_1*,* T_2*, e* T_3 *em termos de* D*,* h*,* c_1*,* c_2 *e* θ *e em seguida mostre que* T_2 *assume o seu valor mínimo em* $sen(\theta) = \frac{c_1}{c_2}$*.*

Demonstração: Vejamos inicialmente que, como a velocidade do som, em cada uma das porções é constante então vale que

$$c_1 = \frac{D}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{D}{c_1}.$$

De modo análogo, temos que

$$T_2 = \frac{|PR|}{c_1} + \frac{|RS|}{c_2} + \frac{|QS|}{c_1}.$$

Note agora que $|PR| = |QS| = h.\sec\theta$ e ainda $|RS| = D - 2h \cdot \text{tg}(\theta)$ e portanto

$$T_2 = \frac{2h \cdot \sec(\theta)}{c_1} + \frac{D - 2h \cdot \text{tg}(\theta)}{c_2}$$

Por último

$$T_3 = 2 \cdot \frac{\sqrt{h^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}}{c_1} = \frac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{c_1}.$$

Agora só falta mostrar que T_2 assume o seu valor mínimo em $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Para isso calculemos

$$T_2' = \frac{2h \cdot \sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)}{c_1} - \frac{2h.\sec^2(\theta)}{c_2},$$

e resolvendo a equação $T_2' = 0$ obtemos

$$\frac{2h \cdot \sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)}{c_1} - \frac{2h \cdot \sec^2(\theta)}{c_2} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{c_1}{c_2}.$$

Ao calcularmos T_2'',obtemos que

$$\begin{aligned} T_2'' &= \frac{2h}{c_1} \cdot \left[\operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta) + \sec^3(\theta)\right] - \frac{2h}{c_2} \cdot 2 \cdot \sec^2(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta) \\ T_2'' &= \frac{2h \cdot \sec(\theta)}{c_1 c_2} \cdot \left[c_2 \cdot \left(\operatorname{tg}^2(\theta) + \sec^2(\theta)\right) - 2 \cdot c_1 \cdot \sec(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta)\right], \end{aligned}$$

daí, ao restringirmos os valores de θ tais que $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{c_1}{c_2}$, obtemos que

$$\begin{aligned} T_2''\Big|_{\operatorname{sen}(\theta)=\frac{c_1}{c_2}} &= \frac{2h \cdot \sec(\theta)}{c_1 c_2} \cdot \left[c_2 \cdot \left(\frac{(c_2)^2 + (c_1)^2}{(c_2)^2 - (c_1)^2}\right) - 2 \cdot c_1 \cdot \left(\frac{c_1 \cdot c_2}{(c_2)^2 - (c_1)^2}\right)\right] \\ T_2''\Big|_{\operatorname{sen}(\theta)=\frac{c_1}{c_2}} &= \frac{2h \cdot \sec(\theta)}{c_1} \end{aligned}$$

Logo, segue que os pontos críticos encontrados são de fato de mínimo, pois

$$T_2''\Big|_{\operatorname{sen}(\theta)=\frac{c_1}{c_2}} > 0$$

.

$\square$

Capítulo 6

Considerações Finais

Ao iniciarmos a construção deste trabalho, argumentamos baseados nos PCN e nas citações de alguns pesquisadores, a importância do estudo do cálculo no ensino médio. Mas, o grande desafio seria mostrar como despertar no aluno o interesse de se estudar cálculo, em especial derivadas.

Para isso, desenvolvemos a proposta de introduzirmos o conteúdo mostrando a evolução histórica do conceito de derivadas, pois o fato de o aluno conhecer a necessidade do surgimento de certas definições, propriedades e teoremas, serve como instrumento motivador para provocar o interesse pelo conteúdo. A partir daí, o aluno precisa entender o real motivo de se estudar tal conteúdo como forma de um dia precisar aplicá-lo no seu cotidiano.

Logo, aplicamos o conteúdo de derivadas em problemas de otimização mostrando como o mesmo pode ser útil nas áreas da administração, medicina, física e geofísica. Para isso, tivemos que aplicar teoremas e propriedades de derivadas, seguindo basicamente o seguinte roteiro:

(i) Identificamos as variáveis do problema, isto é, quais grandezas representam a situação descrita no problema.

(ii) Identificamos os intervalos de valores possíveis para as variáveis. São os valores para os quais o problema tem sentido físico.

(iii) Descrevemos as relações entres estas variáveis por meio de uma ou mais equações. Em geral, uma destas equações dará a grandeza que queremos otimizar, isto é encontrar seu máximo ou mínimo. Se há mais de uma variável no problema, substituindo uma ou mais equações naquela principal permitirá descrever a grandeza que queremos otimizar em função de uma só variável.

(iv) Usando a primeira e segunda derivada da função que queremos otimizar, encontramos seus pontos críticos e determinamos aquele(s) que resolve(m) o problema. Neste ponto é importante estar atento para o fato de que alguns dos pontos críticos da função podem estar fora do intervalo de valores possíveis para a variável (item ii) e devem ser desprezados.

Referências Bibliográficas

[1] André, Selma L. C. - *Uma Proposta para o Ensino de Derivada no Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

[2] AVILA, G. - *O ensino de Cálculo no 2° grau*. Revista do Professor de Matemática, n° 18, pp. 1–9, 1991.

[3] BARON, Margaret E. e BOS, H. J. M. - *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. Ed. Universidade de Brasília, Brasília 1985, vols. 3 e 5, 74p e 50p.

[4] BENNATON, Jocelyn Freitas. - *Fermat o Início da História dos Problemas de Otimização*. Disponível em `http://www.lps.usp.br/neo/jocelyn/historia_jocelyn.htm`. Acesso em: 20 junho. 2013, última atualização em 04/2001.

[5] BOYER, Carl B. - *História da Matemática*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1974, 488p.

[6] CARNEIRO, V. C. A - *Matemática aponta pontos críticos de outras ciências*. Revista do Professor de Matemática, no 22, p. 32. 1992.

[7] EVES, Howard. - *Introdução à História da Matemática*. Ed. Unicamp, Campinas, 2002, 843p.

[8] DUCLOS, R. C. - *Cálculo no 2° grau*. Revista do Professor de Matemática, no 20, p. 28, 1992.

[9] EUCLIDES. - *Tradução e introdução: Irineu Bicudo*. Os Elementos, Editora Unesp, São Paulo, 2009, 600p.

[10] GARBI, Gilberto G. - *A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. Editora livraria da Física, São Paulo, 2006, 346p.

[11] GIRALDO, V. - *Descrições e Conflitos computacionais: O Caso da Derivada*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2004.

[12] GUELLI, O. - *Matemática – Série Brasil*. Ensino Médio. Volume Único. Ática. São Paulo. 2003.

[13] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. - *Um Curso de Cálculo*. Volume 1, 5ª edição. Rio de Janeiro. LTC, 2008.

[14] IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N. J. - *Fundamentos da Matemática Elementar - limites, derivadas e noções de integral*. Vol. 8. Atual. São Paulo. 2002.

[15] MACHADO, A. S. - *Matemática Temas e Metas - Funções e Derivadas*. Vol. 6. Atual. São Paulo. 1991.

[16] *Material de Cálculo do PROFMAT*.

[17] OLIVEIRA, Daniel G. - *Explorando o Conceito de Derivada em Sala de Aula, a partir de suas Aplicações e sob uma Perspectiva Histórica*.

[18] *PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)*. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, p 6, pp 40-46. 2000.

[19] *PCN+, Ensino Médio*. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pp.117-118. 2002.

[20] REIS, Frederico S. - *A tensão entre rigor e intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação - Universidade de Campinas. UNICAMP, 2001.

[21] REZENDE, W. M. - *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

[22] RICIERI, Aguinaldo Prandini. - *Assim nasceu o Cálculo; origens de Derivadas e Integrais*, Ed. Prandiano, São José dos Campos, 1993, 112p.

[23] ROQUE, T. - *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de Historia da Matemática. Modulo 4. p. 1 e modulo 8, p.2. 2006;

[24] SCHREINER, I. V. - *Construção do conceito de função: o pensamento variacional e a alfabetização funcional.* Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, vol. eletrônico, UFP, Recife, Brasil. 2004.

[25] SILVA, Juscelino P. - *A Derivada e Algumas Aplicações*. EDUFPI. Teresina.2012.

[26] TALL, D. O. - *Conceito de Imagens, Computadores e Mudança Curricular*, p 37 - 42, 1989.