Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

A existência de fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas

Polyana de Castro Costa
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientadora: **Profa. Dra. Thais da Silva Nascimento**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

julho de 2020

A existência de fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Polyana de Castro Costa e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 02 julho de 2020.

Profa. Dra. Thais da Silva Nascimento
Orientadora

Banca examinadora:

Profa. Dra. Thais da Silva Nascimento
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

C837e Costa, Polyana de Castro.
A existência de fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas / Polyana de Castro Costa. -- 2020
xi, 81 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientadora: Thais da Silva Nascimento.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Equações Algébricas. 2. Fórmula de Cardano. 3. Fórmula de Ferrari. 4. Teoria de Galois. 5. Teorema de Abel-Ruffini. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: A existência de fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas

Autora: Mestranda Polyana de Castro Costa

Dissertação defendida e aprovada em 2 de julho de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutora Thais Silva do Nascimento (Presidente Banca/Orientadora)**
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
2. **Doutor Reinaldo de Marchi (Examinador Interno)**
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
3. **Doutor Junior Cesar Alves Soares (Examinador Externo)**
Instituição: UNEMAT – Barra do Bugres

Cuiabá, **02/07/2020**.

Documento assinado eletronicamente por **Junior Cesar Alves Soares**, **Usuário Externo**, em 02/07/2020, às 17:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **REINALDO DE MARCHI**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 02/07/2020, às 17:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **THAIS SILVA DO NASCIMENTO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 02/07/2020, às 17:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23108.046585/2020-63 SEI nº 2643545

À minha família, em especial meus avós maternos

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado à vida e uma família maravilhosa.

À minha mãe Pedrosa, por ter dado amor incondicionalmente a minha vida toda.

Ao pai Nelcindo, por ter voltado a ser presente em minha vida e me apoiado durante todo o curso.

Ao meu esposo Alexandre que sempre me apoiou, incentivou, me carregou no colo nos momentos difíceis e junto com nossas filhas Samyra, Sofya, Sara e Soraya tiveram paciência com minhas ansiedades e fizeram de tudo para que meus momentos de estudo fossem produtivos e tranquilos.

À minha madrinha pelos conselhos e palavras de conforto.

Ao meu irmão e minhas amigas que sempre me apoiaram e encorajaram nos momentos difíceis.

Aos meus colegas do PROFMAT pela parceria nos estudos e conselhos.

Aos professores do PROFMAT pelo crescimento intelectual proporcionado pelas excelentes aulas.

À Profa. Dra. Thais da Silva Nascimento, por ter aceitado ser minha orientadora, por ter paciência com minhas limitações e ser minha referencia profissional.

Ao programa PROFMAT e à UFMT pelo interesse em capacitar os profissionais da educação matemática do Brasil.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para minha formação.

Não coloque obstáculos em seus sonhos,

tenha confiança em Deus.

Samyra de Castro.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma revisão bibliográfica sobre o surgimento das equações algébricas e a dedução de fórmulas por radicais para resolver equações de segundo grau, terceiro grau e quarto grau. Após, apresentaremos como seguiu o estudo das equações à Álgebra Moderna, sobre as contribuições de Abel e Galois, para a compreensão da inexistência de uma fórmula por radicais para a resolução das equações de grau 5 ou superior. Destacando a importância da teoria dos grupos no esclarecimento da questão da resolubilidade algébrica das equações.

Palavras chave: Equações Algébricas; Fórmula de Cardano, Fórmula de Ferrari; Teoria de Galois e Teorema de Abel-Ruffini.

Abstract

In this work we will present a bibliographic review on the emergence of algebraic equations and the deduction of formulas by radicals to solve equations of second degree, third degree and fourth degree. Then, we will present how the study of the equations in Modern Algebra followed, on the contributions of Abel and Galois, for understanding the inexistence of a formulas by radicals for solving equations of grade 5 or higher. Highlighting the importance of group theory in clarifying the question of the algebraic resolution of the equations.

Keywords: Algebraic Equations, Cardano Formula, Ferrari Formula, Galois Theory and Abel-Ruffini Theorem.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O ensino de matemática visa desenvolver capacidades intelectuais e atitudinais do educando. Entendendo que, o domínio da matemática, vai além de efetuar cálculos e aplicar fórmulas para resolver problemas matemáticos, devem-se ter habilidades matemáticas baseadas na capacidade de interpretar, relacionar, analisar, sintetizar, conceber e projetar. E é dever do professor mediar a contextualização da aprendizagem, respeitando cada etapa de desenvolvimento do educando.

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2008), para ensinar matemática, em qualquer nível, é necessário ajudar os estudantes a entenderem as questões e formas de pensamento que associa os detalhes. A importância dada a tais questões é o que marca os melhores currículos. Estudantes, no geral, tem uma curiosidade natural sobre de onde vieram as coisas, então, o professor deve aproveitar esta curiosidade natural para levá-los a entender processos matemáticos que eles precisam conhecer. Ou seja, saber a história de uma ideia pode levar a um entendimento mais profundo para professores e estudantes.

Pensando em auxiliar o professor, o estudo da história da matemática, tem por objetivo proporcionar através do contato com a história da criação do conhecimento em matemática, o reconhecimento da Matemática como uma ciência de grande relevância social, organizada por características próprias e que desenvolva habilidades que favoreçam a autonomia intelectual.

Estrada et al. (2000) defende que é através da história que o passado e o futuro se interligam, dando consistência ao presente. É através da história que se aprende o emergir dos conceitos, o desenvolvimento das teorias, a variedade dos algoritmos e dos métodos. É a história que coloca todas estas descobertas no contexto politico, social e cultural da época respectivamente. É na história que assistimos ao evoluir do papel da demonstração, do significado do rigor e da importância do erro nos avanços e retrocessos.

É, pois, a história que nos dá a visão da matemática que temos hoje. Esta, como edifício em permanente evolução, pode apresentar aspectos diferentes amanhã, e estará sempre ligada as necessidades culturais, econômicas, ambientais e físicas dos povos em que se desenvolve.

Através de conceitos e algoritmos análogos desenvolvidos por povos muito distanciados no tempo ou nas fronteiras geográficas, a história da matemática é também um elemento de união das diferentes raças, culturas, civilizações. Cada uma com a sua criatividade própria, mas sempre valiosa e indispensável (Estrada et al., 2000).

Sendo professora de educação básica e fazendo uma análise dos meus 10 anos em sala de aula, tenho notado a dificuldade no ensino-aprendizagem da álgebra, do desafio enorme que é alfabetizar algebricamente e de fazer com que os alunos apliquem a álgebra de forma significativa. Pensando em ajudar professores de matemática e alunos de graduação em matemática no estudo das equações algébricas é que foi desenvolvido este trabalho, que tem a história das equações algébricas como ponto de partida.

Segundo Estrada et al. (2000), um professor com informação e formação histórica poderá melhorar sua didática. Na medida em que seu entusiasmo aumente pela disciplina que ensina, irá contagiar seus educandos, entusiasmando-os. E ao conhecer as dificuldades que os próprios matemáticos sentiram em relação a determinados conceitos e teorias, também ira compreender melhor as correspondentes dificuldades de seus alunos, ajudando a ultrapassá-las e a desdramatizá-las.

No entanto, neste trabalho estudaremos a existência de fórmulas por radicais para a resolução das equações algébricas, baseando-nos na curiosidade de conhecer a existência dessas fórmulas. Faremos isso conceituando as equações algébricas; conhecendo o surgimento das equações algébricas; apresentando demonstrações das fórmulas por radicais existentes para a resolução das equações algébricas de grau menor ou igual a quatro, dadas por alguns autores; compreendendo a insuficiência dos números reais e o aparecimento dos números complexos; reconhecendo e representando os números complexos, bem como identificando seus elementos; por fim explicitaremos como seguiu o estudo das equações á Álgebra Moderna, das contribuições de Abel e Galois, para a compreensão da inexistência de uma fórmula para a resolução das equações de grau 5 ou superior. Destacando a importância da teoria dos grupos no esclarecimento da questão da resolubilidade algébrica das equações.

No primeiro capítulo apresentaremos um breve histórico das equações algébricas, mencionando como se deu o estudo destas no Egito, na Mesopotâmia, na Grécia, na China, na Índia, na Arábia e na Itália. No segundo capítulo demonstraremos as fórmulas por radicais para resolução de equações algébricas de grau menor ou igual a quatro apresentada por alguns autores. No terceiro capítulo faremos um breve estudo sobre a álgebra dos complexos. No quarto capítulo apresentaremos as contribuições da Álgebra Moderna, descrevendo um pouco da teoria dos grupos e corpos usadas para a compreensão da inexistência de uma fórmula para a resolução das equações de grau 5 ou superior.

Capítulo 1

O surgimento das equações algébricas

Segundo Roque e Carvalho (2012), definimos a Álgebra como o ramo da matemática que usa letras, e símbolos em geral, para representar números e quantidades. As equações tem grande destaque no estudo da Álgebra.

De acordo com Garbi (2009) e Peruzzo (2013), as equações tem grande importância dentro da matemática, pois qualquer problema solucionado através de números pode ser tratado por meio de equações.

De forma generalizada entendemos que equacionar um problema é coloca-lo dentro de um mecanismo do qual ele sairá resolvido. Equação é uma palavra que possui a mesma origem latina das palavras igual e igualdade. Quando uma sentença matemática possui letras representando números desconhecidos e é expressa por uma igualdade, esta se caracteriza como uma equação. As letras na expressão são denominadas incógnitas.

Quando as expressões matemáticas possuem incógnitas que sofrem apenas as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação, são caracterizadas como equações algébricas. Resolver uma equação é encontrar a(s) incógnita(s).

Temos como exemplo de equações algébricas:

a) $3x + 7 = 6$

b) $2x^2 + 4x - 6 = 0$

c) $x^4 + \sqrt{5}x^3 + \dfrac{3}{4} = 8$

d) $x^7 + x^3 + 25x = \sqrt[5]{x^3} + 16$

Enquanto que as equações abaixo, não são algébricas.

a) $x^3 + 2x^2 + 2 = e^{-x}$

b) $\cos x + x^2 \cos 3x = 5$

c) $\arccos x = \dfrac{\pi}{8}$

Chamamos de equações polinomiais as equações algébricas colocadas na forma canônica:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Onde os termos $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1$ e a_0 são números complexos e são chamados de coeficientes e n é um número natural. Chamamos de coeficiente dominante o a_n, caso este seja diferente de 0 e n de grau de uma equação o maior expoente da incógnita.

Resolver uma equação algébrica por meio de fórmulas é exibir as soluções de uma dada equação geral, de qualquer grau, por meio de radicais, ou seja, encontrar tais soluções manipulando os coeficientes da equação através das operações de aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e extração de raízes.

O desenvolvimento da matemática primitiva teve um embasamento prático, de início na atividade de mensuração, e aos poucos desenvolveu-se tendências direcionadas pela abstração, para então estudar a ciência por si mesma. De início, apenas os números eram representados por símbolos, enquanto que o desenvolvimento e as operações eram apresentados por palavras. (Peruzzo, 2013)

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2008), o estudo da matemática pertence a uma tradição que se iniciou no antigo Oriente e então se desenvolveu e cresceu na Grécia Antiga, Índia e no império islâmico medieval, e mais tarde encontrou um lar no fim da Idade Média e no Renascimento Europeu, para então transformar-se na matemática de hoje.

As evidências de qualquer nível de conhecimento matemático está relacionada a toda civilização que desenvolveu a escrita. Antropólogos encontraram objetos pré-históricos que apresentavam elementos matemáticos (pré-matemáticos) que são indícios do que seriam as antigas atividades matemáticas humanas.

Segundo Garbi (2009), à aproximadamente 4.000 a. C. apareceram formas primitivas de escritas que evoluíram e consolidaram-se definitivamente na Mesopotâmia, área entre os rios Tigre e Eufrates onde agora é o Iraque, com os sumérios e, alguns séculos depois no Egito, terra no vale do Nilo no Nordeste da África. Os mais antigos documentos escritos registram a glorificação dos reis e a contabilidade de impostos, estoques e transações comerciais.

Era de grande importância saber o tamanho dos campos, o volume de cestos, o número de trabalhadores que deveriam ser designados para algumas tarefas. Foram criadas então unidades de medidas, que geraram problemas de conversão, envolvendo aritmética. Estas atividades eram designadas para os escribas, conceituados como funcionários públicos profissionais que sabiam escrever e resolver problemas matemáticos básicos. Estes primeiros conhecimentos matemáticos foram sendo acumulados de maneira indutiva (ou empírica) e não dedutiva.

Neste capítulo, faremos uma revisão bibliográfica de livros, dissertações e revistas, como a Revista do Professor de Matemática, com o objetivo de aprimorar nosso conhecimento, quanto ao surgimento das fórmulas por radicais para resolução de equações algébricas.

1.1 A Matemática no Egito

No antigo Egito o estudo da matemática foi realizado a partir de informações contidas nos papiros (produzidos a partir do caule de uma planta aquática). Segundo Boyer (1974), um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios.

Dentre os papiros encontrados, os mais famosos são, de acordo com Garbi (2009), os chamados papiros de Ahmes e o papiro de Moscou. O de Ahmes, conhecido como o papiro de Rhind, foi comprado em Luxos, por volta de 1850, por Alexander Henry Rhind (1833 - 1863) e que hoje está exposto no Museu Britânico em Londres, consta de 87 problemas, foi escrito em 1650 a.C., pelo escriba Ahmes.O papiro de Moscou possui 25 problemas de Aritmética e Geometria, foi escrito por volta de 1850 a.C. e nele é apresentado o cálculo do volume de um tronco de pirâmide. Em ambos aparecem problemas que contém disfarçadamente, equações do primeiro grau.

Um dos exemplos é o problema 26 do papiro de Ahmes, este foi extraído por Estrada et al. (2000) e dizia: Uma quantidade e a sua quarta parte somadas perfazem 15. Qual é a quantidade?

No simbolismo atual, escreveríamos essa equação:

$$x + \frac{1}{4}x = 15,$$

onde x representa a quantidade desconhecida.

Na sequencia Ahmes, assume que $x = 4$ e ao substituir encontra

$$4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5.$$

Após, o escriba multiplica 5 por 3 encontrando 15. Assume então que fazendo o produto de 4 por 3, obterá a solução correta, $4 \cdot 3 = 12$, que é verdadeira, pois,

$$12 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 15$$

A partir dos fins do século XV, esse método foi chamado de "método da falsa posição".

1.2 A Matemática na Mesopotâmia (Babilônia)

As civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas babilônias (Boyer, 1974). De acordo com Garbi (2009), os mais antigos documentos contendo registro numéricos são tabletes de barro. Os primeiros tabletes que apresentavam operações com números era de 2.200 a.C. Neles continha um sistema de numeração posicional com base 60 e grafia cuneiforme. Algum tempo depois, foi estabelecido o Império Babilônico, com capital em Babilônia.

Um tablete cozido cerca de 1700 a.C. e, encontrado no século XIX, era um livro de exercícios de matemática. Segundo Peruzzo (2013), os registros em tábuas mostram que os povos da Mesopotâmia dominavam os cálculos aritméticos, aplicados em transações agrícolas.

Quanto as equações algébricas, os mesopotâmios resolviam sistemas com equações lineares com 2 variáveis, utilizando o método de substituição. Em uma mesma época que os egípcios, os babilônicos trabalhavam com equações do segundo grau. Eles utilizavam o método com o mesmo raciocínio empregado posteriormente pelos hindus chamados, completando quadrados. No geral, eram apresentados sequências, sem qualquer justificativa lógica.

Na Mesopotâmia o surgimento de equações quadráticas está relacionado com problemas de medidas de terra. Um dos problemas encontrados num escrito babilônico, mencionado por Peruzzo (2013) é, em símbolos matemáticos:

$$x^2 - x = 870.$$

Os babilônicos também estudaram equações cúbicas puras, da forma: $ax^3 = d$, resolvidas de forma direta, utilizando tabelas de cubos e raízes cúbicas. Por exemplo, a equação $x^3 = 27$, tem solução $x = 3$, pois $3^3 = 27$.

As equações cúbicas mistas, na forma padrão normal: $x^3 + x^2 = d$, também eram resolvidas por referência as tabelas que continham valores para $n^3 + n^2$; com n entre 1 e 30.

Para casos de equações da forma, $ax^3 + bx^2 = d$ era utilizado métodos de substituição. Por exemplo:

$$144x^3 + 12x^2 = 21$$

$$12 \cdot (144x^3 + 12x^2) = 21 \cdot 12$$

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252$$

fazendo $y = 12x$, obtemos uma equação do tipo,

$$y^3 + y^2 = 252.$$

Era então utilizado os valores tabelados $y = 6$, e como $x = \dfrac{y}{12} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Na álgebra Mesopotâmica as equações biquadradas, $ax^4 + bx^2 = d$ e $ax^8 + bx^4 = d$, eram conhecidas como equações quadráticas disfarçadas. Observe que podemos fazer,

$$a((x)^2)^2 + bx = d$$

$$a[(x^2)^2]^2 + b(x^2)^2 = d$$

Segundo Boyer (1974), a solução de equações quadráticas e cúbicas na Mesopotâmia é considerado um feito notável, pelo alto nível de habilidades técnicas, mas principalmente pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos.

1.3 A Matemática na Grécia

De acordo com Garbi (2009), o Egito e a Mesopotâmia foram onde a Europa começou a obter seus conhecimentos matemáticos. Os gregos foram os primeiros europeus que em contato com o Oriente Médio, interessaram-se pelas técnicas e reconheceram a utilidade da Geometria (palavra de origem grega, que significa medida de terra). Em meados do século VII a.C. os gregos tiveram contato com os esplendores da civilização egípcia, e começaram a aprender matemática.

O primeiro grande matemático grego foi Tales, da cidade de Jônia de Mileto, a ele se deve a primeira profunda transformação pela qual passou o pensamento matemático desde que o homem aprendera a contar. Ele introduziu um conceito revolucionário de que as verdades matemáticas precisam ser demonstradas. Iniciando as demonstrações dos teoremas.

Tales de Mileto iniciou provando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; que qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais; que um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto; que feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais; entre outros.

Pitágoras, que nasceu após algumas décadas, na ilha de Samos, demonstrou o teorema dos triângulos retângulos. No sul da Itália, em Crotona, cerca de 540 a.C. Pitágoras criou uma escola voltada para o estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática. Poucas décadas depois, os pitagóricos espalharam no mundo uma febre pelo estudo da Matemática, incentivando a civilização à era cientifico-tecnológica atual.

Na relação do triângulo retângulo a expressão

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

surge na Europa uma equação do segundo grau.

Cerca de 323 a.C. Ptolomeu I criou a Universidade de Alexandria. Segundo Peruzzo (2013), a escola grega de Alexandria produziu matemáticos notáveis. Entre eles está Diofanto, este viveu por volta do ano 250 a.C. e era considerado pai da Álgebra, pois intermediou o estilo puramente retórico dos babilônios e as formas simbólicas das equações usadas hoje.

Diofanto utilizava o método da tentativa para resolver alguns sistemas de equação, neste método era assumido valores para algumas incógnitas e estas sugeriam estratégias para que os valores corretos fossem encontrados. Em seu livro *Arithmetica*, ele resolveu algumas equações quadráticas dos tipos: $ax^2 + bx = c; ax^2 = bx + c$ e $ax^2 + c = bx$, onde a, b e c eram números positivos.

E por volta de 300 a.C., surge Euclides, responsável pela sintetização e sistematização do conhecimento matemático. Seguindo o raciocínio da Matemática dedutiva de Tales, Euclides faz a seguinte ressalva de que nem todas as verdades podem ser provadas; algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas sem demonstração.

Euclides foi o autor da coleção Os elementos, formado por 13 livros. Nesta, ele sistematizou os conhecimentos de Geometria elementar, com rigorosidade e dedução, a partir de um número pequeno de definições e de verdades aceitas sem provas.

Apesar da Grécia não se destacar no estudo da Aritmética, Euclides demonstrou alguns importantes teoremas da Teoria dos Números e introduziu conceitos que se tornaram fundamentais na solução de equações. Algumas verdades evidentes foram agrupadas em postulados de natureza geométrica (cinco) e em noções comuns (seis) no inicio dos Elementos. Segue abaixo as noções comuns de Euclides:

a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

b) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

c) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

d) Coisas coincidentes são iguais entre si.

e) O todo é maior do que a parte.

f) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.

Essas noções se tornaram a chave para a resolução das equações do primeiro grau. Ou seja, foi encontrado um método geral de resolução das equações do primeiro grau. (Este método será apresentado no próximo capítulo)

O domínio que os gregos tiveram sobre a Geometria permitiu a resolução de alguns tipos de equações do segundo grau apenas com régua e compasso.

1.4 A Matemática na China

Segundo Peruzzo (2013), os chineses praticaram a álgebra desde os tempos mais antigos e registravam o resultado em palavras. Eles resolviam equações lineares e sistemas de equações lineares com três incógnitas, efetuando operações sobre colunas de uma matriz. Há registros de resoluções de equações do segundo grau e de algumas específicas do nono grau, porém os métodos não eram claros, nos levando a conjecturar que utilizavam o método de aproximação por tentativas.

1.5 A Matemática na Índia e na Arábia

Os indianos aceitavam os números negativos e os irracionais, contribuindo para grandes avanços na matemática. Eram hábeis aritméticos e contribuíram significativamente à álgebra.

O sistema de numeração hindu consolidou-se por volta do século V d.C., tornando-se posicional e empregando dez símbolos, onde o zero é chamado pelos hindus de *sunya*, que significa vazio, vácuo.

Eles solucionavam as equações do segundo grau por métodos geométricos, e analisaram que quando as raízes eram reais, eram duas.

Os indianos, colocaram as três formas de equações quadráticas apresentado pelos gregos em um único caso geral,

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Resolveram alguns casos especiais de equações de grau maior ou igual a 2. Aquelas nos quais os dois lados da equação poderiam ser transformados em potências perfeitas com a adição de termos a cada um deles (Peruzzo, 2013), ou seja, usavam o método de completar quadrados.

Os árabes se destacaram na álgebra geométrica, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento de métodos de resolução de equações quadráticas e cúbicas. Um dos métodos utilizados era a resolução das equações pelo método da falsa posição.

Segundo Peruzzo (2013) e Garbi (2009) o matemático que deu nome á Álgebra foi o árabe *Mohammad ibn Musa Al-Khwarizmi* (783 - 850), que deixou como herança as palavras algarismo e algoritmo. Em seu livro *Al-Kitab al-jarb wal Muqabalah* (O Livro da Restauração e do Balanceamento), a palavra *Al-jarb* era empregada para expor operações que completava a incógnita x. Por exemplo, para a resolução da equação $x - 3 = 6$, restaurava-se a expressão $x-3$, adicionando 3, completando-se a incógnita x e encontrando o valor $x = 9$.

A partir daí, temos que álgebra é um dos ramos da matemática que recorre a números, letras e sinais (símbolos) para fazer uma generalização de algumas operações matemáticas.

Para simplificar a simbologia, *Al-Khwarizmi*, popularizou o sistema hindu de numeração decimal, onde os algarismos de zero a nove e seu valor em função da posição ocupada, são elementos fundamentais. A obra de *Al-Khwarizmi*, *Kitab al-jami wa'l tafriq bi hisab al hindi* (Livro sobre o método hindu de adição e subtração), exerceu muita influência na Matemática européia durantes os últimos séculos da Idade Média.

Alguns matemáticos e astrônomos surgiram no primeiro milênio da era cristã na Índia, tais como Varahamihira (circa 505), Brahmagupta (circa 630) e Bhaskara (1.114 - 1.185), este último é lembrado pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

usada para resolver a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. O Brasil é o único país que utiliza o termo fórmula de Bháskara, nome atribuido de forma errada ao indiano uma vez que esta fórmula foi encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara.

De acordo com Roque e Carvalho (2012), de forma geral, o método de resolução das equações quadráticas consiste em:

1. completar o quadrado no primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida a seu quadrado em um quadrado perfeito;

2. diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros;

3. resolver a equação de primeiro grau que daí resulta.

Segundo Peruzzo (2013), o encontro da fórmula de Bháskara baseou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação do segundo para o primeiro grau, através da extração de raízes quadradas (a demonstração da fórmula será apresentada no próximo capitulo).

As equações do segundo grau estão relacionadas com problemas que envolvem encontrar dois números, x e y, conhecendo sua soma S e seu produto P.

Representando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = S - x \\ xy = P \end{cases}$$

ou seja, $x(S - x) = P$ ou $x^2 - Sx + P = 0$ e, portanto

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2a}$$

onde a, b e c são coeficientes da equação $ax^2 - Sx + P = 0$. Essa fórmula levantou alguns questionamentos voltados para o número raízes de uma equação e a raiz quadrada de um número negativo. E estimulou alguns matemáticos a buscar uma formula para a resolução das equações cúbicas.

1.6 Álgebra italiana

O inicio do segundo milênio é marcado pelo despertar da ciência do Ocidente. O sistema numérico dos árabes teve três tentativas de introdução na Europa, sendo a terceira bem sucedida. A primeira foi realizada por Gerbert d' Aurillac (950 - 1.003), a segunda por Adelard de Bath (1.075 - 1.160) e a terceira por Leonardo de Pisa (1.175 - 1.250), conhecido como Leonardo Fibonacci, este passou parte da sua juventude no norte da África onde teve contato com a cultura árabe. Também viajou pelo mediterrâneo, onde teve a oportunidade de estudar vários dos sistemas aritméticos, tendo o método indo-arábico seu favorito.

Em 1.202, na Itália, Leonardo publicou *Liber Abaci*, onde além de ter descrito o sistema numérico dos árabes, discorreu sobre Álgebra, contribuindo com a simbologia algébricas, introduzindo as palavras *res* (coisa, em latim) e *radix* (raiz) para representar a incógnita, *census* (quadrado), *cubus* (cubo) e *aequalis* representava o símbolo da igualdade (=).

O próximo matemático italiano foi o franciscano *Fra* (frei) Luca Paciolo (Pacioli), nascido em 1.445. Ele se aprofundou no estudo da aritmética e é considerado pai da contabilidade moderna. Em 1.456, Gutenberg inventava a imprensa na Alemanha, facilitando a divulgação dos livros.

No ano de 1.494, Luca Pacioli publicou em Veneza sua obra sob o título *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportion et Proportionalita.* Nela, ele fez uma síntese do conhecimento matemático acumulado na Europa. Na Álgebra, Pacioli introduziu mais alguns símbolos, *cosa* (coisa, em italiano, abreviada como co), o quadrado (*censo*) e o cubo (*cubo*) tinha como abreviaturas ce e cu.

Segundo Peruzzo (2013), em seu livro Pacioli afirma, que não foi possível encontrar regras gerais para a solução das equações cúbicas e das equações quárticas. A partir de então, tornou-se um desafio intelectual e uma obsessão para os matemáticos encontrar uma solução geral para resolver equações de terceiro e quarto grau.

No século XVI matemáticos italianos, encontraram a solução algébrica para equações cúbicas e quárticas. De acordo com Milies (1994), o primeiro a encontrar a solução das equações cúbicas foi o matemático italiano Scipione Del Ferro, este nasceu em Bolonha em 1465 e faleceu na mesma cidade em 1526.

Por volta de 1515, Del Ferro conseguiu resolver a equação cúbica da forma, $x^3 + cx = d$, e guardou segredo por um tempo. Antes de morrer, ele ensinou seu método a dois discípulos, Annibade dela Nave (seu futuro genro) e Antônio Maria Fior (conhecido como *Floridus*, em latim).

Peruzzo (2013) nos diz, que era costume entre os italianos guardar em segredo os métodos usados na solução de problemas, apresentando apenas os resultados, com o intuito de ter vantagens quando se era proposta as questões à alguns rivais. Gerando disputas em que um propunha problemas para o outro tentar resolver.

Segundo Garbi (2009), em 1535, houve uma disputa matemática entre Fior e Tartaglia, onde o perdedor deveria pagar trinta banquetes para o ganhador. Tartaglia era apelido do italiano Nicolo Fontana (1500 - 1557 aproximadamente).

Na disputa, cada participante teria que resolver trinta problemas que lhe foram propostos. Enquanto que Fiori sabia apenas um, Tartaglia foi declarado vencedor, porém renunciou ao prêmio. Ele aprofundou os estudos das equações cúbicas, mas não revelou seus métodos a ninguém. A notícia da vitória de Tartaglia se espalhou e chegou a Girolano Cardano (1501 - 1576), este era professor de medicina e matemática em Bolonha, Paris e Milão.

De acordo com Peruzzo (2013), Cardano era obcecado pelas equações algébricas, e tentou fazer com que Tartaglia lhe oferecesse o método da resolução das equações cúbicas. Após implorar e fazer juramento para guardar segredo, obteve a resolução do método.

Segundo Garbi (2009), por essa época Cardano estava escrevendo a *Artis magnae* *sive de regulis algebraicis*, (livro de álgebra intitulado *Ars Magna*). Em sua obra ele não tinha a intenção de mencionar a resolução das equações cúbicas, mas ao tomar conhecimento do trabalho de Del Ferro. Cardano não cumpriu o juramento e publicou em 1545 a solução das equações cubicas, dando créditos da descoberta do método a Tartaglia.

De acordo com Peruzzo (2013), o livro *Ars Magma* (A Grande Arte), marca o inicio da álgebra moderna. Além de demonstrar solução das equações, ele demonstrou que tais soluções não podiam ser negativas, irracionais e raízes quadradas de números negativos.

Uma vez que Tartaglia ficou furioso com a atitude de Cardano, começou uma troca de acusações. Como defensor de Cardano, entrou em cena seu aluno Ludovico Ferrari, que em 1548 realizou um debate público com Tartaglia, onde cada um deles propôs 31 poblemas para ser resolvido, num prazo de 15 dias. Segundo Peruzzo (2013), ocorre a hipótese de que Ferrari foi o vencedor, mas Garbi (2009) nos informa que o debate não se realizou.

A fórmula para a resolução das equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$, foi:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Devido as conquistas com a resolução das equações do terceiro grau, os matemáticos italianos passaram a resolver as equações do quarto grau. Segundo Peruzzo (2013), em 1540 o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs um problema a Cardano, que é representado pela equação quártica.

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Como Cardano não conseguiu êxito na resolução, Ludovico Ferrari encontrou um método geral para a solução das equações do quarto grau. Tal método foi publicado no livro *Ars Magna*, de Cardano.

Ludovico Ferrari (1522 - 1560, aproximadamente), oriundo de família humilde e discípulo de destaque de Cardano, procurou reagrupar os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos. Sendo possível tal reagrupamento, seriam extraídas as raízes quadradas, resultando em equação do segundo grau, e teríamos o problema resolvido.

A demonstração das soluções das equações cúbicas e quárticas serão apresentadas no próximo capítulo.

Capítulo 2

Demonstração das fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas

Neste capítulo, apresentaremos algumas deduções das fórmulas por radicais para a resolução das equações algébricas com grau n, n menor ou igual a 4, demonstrações estas realizadas por alguns autores.

Iniciaremos com as equações do primeiro grau (equações lineares), que eram resolvidas inicialmente pelo método da falsa posição, apresentada no capitulo anterior, mas que passaram a ser resolvidas usando os axiomas de Euclides.

Em seguida, trataremos das resoluções das equações do segundo grau (equações quadráticas). Por ultimo, apresentaremos a dedução das fórmulas para a resolução das equações do terceiro (cúbicas) e quarto grau (quárticas), respectivamente conhecidas como Fórmula de Cardano-Tartaglia e Fórmula de Ferrari.

2.1 Equação do primeiro grau ou linear

Definição 1. *As equações lineares ou equações do primeiro grau, são da forma:*

$$ax + b = 0,$$

onde a e b são os coeficientes , x é a incógnita e $a \neq 0$.

Equações deste tipo, possuem apenas uma solução, chamada raiz da equação.

A dedução da fórmula das equações lineares se baseia nas "noções comuns de Euclides":

a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

b) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

c) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

d) Coisas coincidentes são iguais entre si.

e) O todo é maior do que a parte.

f) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.

Tomando a equação linear,

$$ax + b = 0$$

Pela noção c), podemos subtrair b de ambos os lados que a igualdade se preserva. Então:

$$ax + b - b = 0 - b \quad \text{ou} \quad ax = -b$$

Pela noção f), dividindo ambos os lados por a, a igualdade é preservada. Logo,

$$x = -\frac{b}{a}. \tag{2.1}$$

Sendo este o método geral de resolução das equações do primeiro grau.

Exemplo 1. *Seja a equação $7x - 28 = 0$, temos que $a = 7$ e $b = -28$. Pela fórmula (2.1), a raiz da equação será:*

$$x = -\left(-\frac{28}{7}\right) \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

2.2 Equação do segundo grau ou quadrática

Definição 2. *Uma equação quadrática ou do segundo grau possui a forma*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são coeficientes e $a \neq 0$ (pois se $a = 0$, seria uma equação do primeiro grau). Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação é completa. Quando $b = 0$ e/ou

$c = 0$, *dizemos que a equação é incompleta.*

2.2.1 Equações da forma $ax^2 + c = 0$

Neste caso, resolvemos diretamente pelas propriedades algébricas.

Seja a equação

$$ax^2 + c = 0$$

Isolamos x, subtraímos c e multiplicamos $\frac{1}{a}$ em ambos os membros da equação.

$$ax^2 + c - c = 0 - c \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow ax^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = -c \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

Se $-\frac{c}{a}$ for negativo não teremos soluções reais, caso contrário, temos que:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Exemplo 2. *A equação $x^2 - 16 = 0$ possui duas soluções reais distintas. Isolamos a incógnita x e extraímos as raízes,*

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16},$$

obtemos duas raízes, as quais são $x_1 = +4$ e $x_2 = -4$.

Exemplo 3. *Para resolver a equação $x^2 + 25 = 0$, isolamos a incógnita x e obtemos*

$$x^2 = -25.$$

Logo, não teremos solução real, pois o quadrado de um número real é sempre maior ou igual a zero.

2.2.2 Equação da forma $ax^2 + bx = 0$

Equações desta forma resolveremos por fatoração e uma das raízes é nula. Seja a equação $ax^2 + bx = 0$. Colocando a incógnita x em evidência, obtemos

$$x \cdot (ax + b) = 0.$$

Observamos que para o produto ser nulo, temos que um dos fatores deve ser nulo, ou seja, $x = 0$ ou $ax + b = 0$, pelo método apresentado anteriormente, temos

$$x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Exemplo 4. *Considerando a equação quadrática incompleta $x^2 - 7x = 0$. Colocando o fator x em evidência, obteremos*

$$x \cdot (x - 7) = 0,$$

e assim concluiremos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 7$.

2.2.3 Equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$

.

Para resolver as equações quadráticas completas ($a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$), geralmente usamos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A seguir vamos apresentar a dedução a fórmula, obtida por dois métodos, ambos com a ideia de reduzir o grau da equação do segundo grau para o primeiro, através da extração de raízes quadradas.

No método 1, temos o método de completar quadrados (Peruzzo, 2013). Na época a fórmula foi apresentada usando apenas palavras. Descreveremos a seguir o método utilizando simbologia moderna.

Seja a equação quadrática na forma completa.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dividindo a equação por a, temos

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Isolando o termo independente $\left(\frac{c}{a}\right)$, vem

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Como o primeiro membro não é um quadrado perfeito, somamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aos dois membros da equação, tornando o lado esquerdo um trinômio quadrado perfeito,

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

e reescrevendo o primeiro termo

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

obtemos um trinômio quadrado perfeito. Trabalhando o segundo membro, adquirimos a forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

O sinal da expressão $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, depende apenas do sinal de $\Delta = b^2 - 4ac$, conhecido como discriminante. A quantidade de soluções da equação de segundo grau vai depender, portanto, do sinal deste discriminante.

- Se $\Delta < 0$, então a equação não possui soluções reais.
- Se $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma solução real.
- Se Se $\Delta > 0$,, a equação possui duas soluções reais.

No caso de termos Se $\Delta \geq 0$, as extrações de raízes quadradas sempre geram duas alternativas, de modo que:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.2}$$

Exemplo 5. *Seja a equação* $x^2 - x - 6 = 0$. *Os coeficientes são:* $a = 1, b = -1$ *e* $c = -6$. *Substituindo na fórmula (2.2)*

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}.$$

e desenvolvendo,

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

obtemos as raízes,

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad e \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

No método 2, vamos descrever o método de Viète apresentada por Amaral (1988).

Seja $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0$$

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0.$$

reescrevendo essa igualdade como um equação na incógnita v, obtemos

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Viète transformou essa equação numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de v, isto é, escolhendo $u = \dfrac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

e com algumas manipulações encontrou $v^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então $v = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Logo,

$$x = u + v = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula encontrada anteriormente.

Exemplo 6. *Vamos resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pelo método de Viète.*

Fazendo $x = u + v$ e substituindo na equação dada, temos:

$$(u + v)^2 - 3(u + v) + 2 = 0,$$

desenvolvendo, temos

$$v^2 + (2u - 3)v + u^2 - 3u + 2 = 0.$$

Escolhendo $u = \dfrac{3}{2}$ (para anular o coeficiente de v) ficamos com:

$$v^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 0 \text{ ou } v^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Daí, $v = \pm\dfrac{1}{2}$ e $x = u + v = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}$. Logo, as raízes da equação são 2 e 1.

2.2.4 Equação quadrática em termos geométricos

De acordo com Lima (1988) o problema de achar dois números conhecendo sua soma S e seu produto P é um dos problemas mais antigos da Matemática.

Podemos determinar os lados de um retângulo, do qual se conhecem o semi-perímetro s e a área p. Vamos assumir que os números procurados a e b, são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$.

Temos que, se $a + b = s$ e $ab = p$, então o trinômio $x^2 - sx + p$ se anula para $x = a$ e $x = b$, ou seja,

$$a^2 - sa + p = a^2 - (a + b)a + ab = a^2 - a^2 - ab + ab = 0,$$

$$b^2 - sb + p = b^2 - (a + b)b + ab = b^2 - b^2 - ab + ab = 0.$$

Observando de outra forma, se

$$x^2 - sx + p = x^2 - (a+b) + ab$$

e

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b) + ab,$$

temos que,

$$x^2 - sx + p = (x-a)(x-b)$$

Portanto, a e b são os únicos valores de x que tornam $x^2 - sx + p = 0$, ou seja, são raízes desse trinômio.

2.3 Equação do terceiro grau ou cúbica

Definição 3. *Uma equação cúbica ou do terceiro grau, possui a forma*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

onde $a \neq 0$ e a, b, c e d são coeficientes.

Quando $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, dizemos que a equação é completa.Caso contrário incompleta.

2.3.1 Equações Cúbicas do tipo: $ax^3 + px + q = 0$

A solução encontrada para as equações cúbicas conhecida como Fórmula de Cardano-Tartaglia é para equações do tipo $x^3 + px + q = 0$.

A ideia foi supor que a solução era formada por duas parcelas. Ou seja,

$$x = A + B$$

Como os dois lados da equação são iguais, pelas noções de Euclides, seus cubos também o serão, portanto,

$$x^3 = (A+B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

como

$$A + B = x$$

temos que

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

ou

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Porém, temos ao mesmo tempo que

$$x^3 + px + q = 0$$

portanto,

$$p = -3AB \text{ e } q = -(A^3 + B^3).$$

Elevando p ao cubo, temos que

$$p^3 = -27A^3B^3 \text{ e } q = -(A^3 + B^3)$$

ou

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \text{ e } A^3 + B^3 = -q$$

Desta forma, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto. Logo podemos resolver com equações do segundo grau, pela fórmula apresentada anteriormente.

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2a},$$

onde $S = -q$ e $P = -\dfrac{p^3}{27}$.

Substituindo, obtemos

$$\frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\dfrac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

logo,

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como $x = A + B$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ou ainda

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4}\right) + \left(\frac{p^3}{27}\right)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q^2}{4}\right) + \left(\frac{p^3}{27}\right)}} \tag{2.3}$$

Exemplo 7. *Seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$. Temos que $p = -6$ e $q = -9$. Logo, pela fórmula de Cardano-Tartaglia (2.3) temos:*

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1 = 3$$

2.3.2 Equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Para resolvermos a equação cúbica na forma geral utilizando o Método de Cardano-Tartaglia, devemos fazer uma mudança de variável, escrevendo $x = y + t$ de tal forma que se anule o coeficiente de grau 2, ou seja, devemos encontrar um valor para t de tal modo a obter um polinômio do tipo

$$y^3 + py + q = 0.$$

Tomamos a equação na forma geral

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dividimos os coeficientes por a temos,

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

fazendo $x = y + t$,

$$(y+t)^3 + \frac{b}{a}(y+t)^2 + \frac{c}{a}(y+t) + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 + \frac{b}{a}y^2 + \frac{b}{a}2yt + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}y + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + 3ty^2 + \frac{b}{a}y^2 + 3t^2y + 2\frac{bt}{y} + \frac{c}{a}y + t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + \left(3t + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3t^2 + 2\frac{b}{a}t + \frac{c}{a}\right)y + \left(t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Igualando o coeficiente de y^2 a zero, temos:

$$3t + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow t = -\frac{b}{3a} \Rightarrow x = y - \frac{b}{3a}.$$

Substituindo $t = -\dfrac{b}{3a}$ na equação (2.4), vamos estudar separadamente:

1. Coeficiente linear:

$$3t^2 + 2\frac{b}{a}t + \frac{c}{a} = 3 \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right) + \frac{c}{a}$$

$$= 3\frac{b^2}{3a^2} - \frac{b^2}{3a} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$$

$$= -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

2. Coeficiente constante:

$$t^3 + \frac{b}{a}t^2 + cat + \frac{d}{a}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + ca\left(-\frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} \\
&= -\frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \\
&= -\frac{1}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a} \\
&= \left(-\frac{1}{27} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a} \\
&= \left(-\frac{-1+3}{27}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a} \\
&= \left(-\frac{2}{27}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}.
\end{aligned}
$$

Então, a equação cúbica geral $ax^3 + bx^2 + cx^d = 0$ pode ser escrita na forma

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.5}$$

Sendo,

$$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} \tag{2.6}$$

e

$$q = \left(-\frac{2}{27}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}. \tag{2.7}$$

Uma vez que identificamos p e q, podemos resolver a equação cúbica por meio da formula apresentada anteriormente. Após devemos somar ao resultado de y o fato $t = -\frac{a}{3}$, pois no início da resolução da equação geral substituímos $x = y + t$.

Pela fórmula de Cardano-Tartaglia encontramos uma raiz para a equação cúbica, lembrando que esta possui até três raízes. No capítulo 3, após revisarmos as operações com os números complexos, retornaremos ao estudo de como identificar todas as raízes das equações de terceiro grau.

Exemplo 8. *Vamos resolver a equação cúbica $x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$, cujo os coeficientes são $b = 1$, $c = -3$ e $d = -6$. Através de (2.6) calculamos o valor de p.*

$$p = -\frac{1}{3}(1)^2 - 3 = \frac{-1-9}{3} = \frac{-10}{3}$$

e através de (2.7) o valor de q.

$$q=\left(\frac{2}{27}\right)(1)^3-\frac{1}{3}\cdot(-3)-6=-6+1+\frac{2}{27}=-\frac{133}{27}$$

Levando os valores de p e q na Equação (2.5), obtemos

$$y^3-\frac{10}{3}y-\frac{133}{27}=0$$

A solução desta equação é dada pela fórmula de Cardano-Tartaglia (2.3).

$$y=\sqrt[3]{\frac{133}{54}+\sqrt{\left(\frac{133}{54}\right)^2+\left(-\frac{10}{9}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{133}{54}-\sqrt{\left(\frac{133}{54}\right)^2+\left(-\frac{10}{9}\right)^3}}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{133}{54}+\sqrt{\left(\frac{169}{36}\right)}}+\sqrt[3]{\frac{133}{54}-\sqrt{\left(\frac{169}{36}\right)}}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{133}{54}+\frac{13}{6}}+\sqrt[3]{\frac{133}{54}-\frac{13}{6}}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}+\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$$

$$y=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{7}{3}$$

Logo, $x=y-\frac{b}{3a}=\frac{7}{3}-\frac{1}{3}=\frac{6}{3}$, *ou seja,* $x=2$.

2.4 Equação do quarto grau ou quártica

Definição 4. *Uma equação quártica ou do quarto grau, possui a forma*

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

onde $a\neq 0$ *e* a, b, c, d *e* e *são coeficientes.*

Quando $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$ *e* $e\neq 0$, *dizemos que a equação é completa. Caso contrário incompleta.*

2.4.1 Resolução da equação quártica

Descreveremos abaixo o método de Ferrari para resolução das equações quárticas. Seja a equação quártica na forma completa $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Dividindo os coeficientes por a temos,

$$\frac{a}{a}x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

e fazendo uma mudança de variável, substituindo $x = y + t$, temos

$$(y+t)^4 + \frac{b}{a}(y+t)^3 + \frac{c}{a}(y+t)^2 + \frac{d}{a}(y+t) + \frac{e}{a} = 0$$

$$y^4+4y^3t+6y^2t^2+4yt^3+t^4+\frac{b}{a}(y^3+3y^2t+3yt^2+t^3)+\frac{c}{a}(y^2+2yt+t^2)+\frac{d}{a}y+\frac{d}{a}t+\frac{e}{a}=0$$

$$y^4+4ty^3+\frac{b}{a}y^3+6t^2y^2+\frac{3bt}{a}y^2+\frac{c}{a}y^2+4t^3y+\frac{3bt^2}{a}y+\frac{2ct}{a}y+\frac{d}{a}y+t^4+\frac{bt^3}{a}+\frac{ct^2}{a}+\frac{dt}{a}+\frac{e}{a}=0$$

$$y^4+(4t+\frac{b}{a})y^3+(6t^2+\frac{3bt}{a}+\frac{c}{a})y^2+(4t^3+\frac{3bt^2}{a}+\frac{2ct}{a}+\frac{d}{a})y+(t^4+\frac{bt^3}{a}+\frac{ct^2}{a}+\frac{dt}{a}+\frac{e}{a})=0. \quad (2.8)$$

Como queremos que o novo polinômio fique da forma

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \quad (2.9)$$

devemos anular o coeficiente do y^3, fazendo

$$3t + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow t = \frac{-b}{4a}$$

Então substituindo $t = \dfrac{-b}{4a}$ na equação (2.8), estudando separadamente

1. O coeficiente de y^2:

$$p = 6t^2 + \frac{3bt}{a} + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow p = 6\left(\frac{-b}{4a}\right)^2 + \frac{3bt}{a}\cdot\left(\frac{-b}{4a}\right) + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow p = \frac{6b^2}{16a^2} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow p = \frac{3b^2 - 6b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow p = \frac{-3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

2. O coeficiente de y:

$$q = 4t^3 + \frac{3bt^2}{a} + \frac{2ct}{a} + \frac{d}{a}$$

$$\Rightarrow q = 4\left(\frac{-b}{4a}\right)^3 + \frac{3b\left(\frac{-b}{4a}\right)^2}{a} + \frac{2c\left(\frac{-b}{4a}\right)}{a} + \frac{d}{a}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-b^3}{16a^3} + \frac{3b^3}{16a^3} - \frac{2bc}{4a^2} + \frac{d}{a}$$

$$\Rightarrow q = \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}$$

3. O coeficiente constante:

$$r = t^4 + \frac{bt^3}{a} + \frac{ct^2}{a} + \frac{dt}{a} + \frac{e}{a}$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{-b}{4a}\right)^4 + \frac{b\left(\frac{-b}{4a}\right)^3}{a} + \frac{c\left(\frac{-b}{4a}\right)^2}{a} + \frac{d\left(\frac{-b}{4a}\right)}{a} + \frac{e}{a}$$

$$\Rightarrow r = \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

$$\Rightarrow r = \frac{-3b^4}{25a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}.$$

Como identificamos os valores de p, q e r, temos uma equação da forma

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

Reagrupamos então os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos.

$$y^4 + py^2 + r = -qy$$

$$y^4 + py^2 + r + \alpha y^2 + \beta = \alpha y^2 - qy + \beta$$

$$y^4 + (p + \alpha)y^2 + (r + \beta) = \alpha y^2 - qy + \beta$$

Vamos considerar

$$\Delta_1 = y^4 + (p+\alpha)y^2 + (r+\beta)$$

e

$$\Delta_2 = \alpha y^2 - qy + \beta$$

Pelas noções de Euclides, temos que α e β são números a serem determinados de forma que os dois lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Para isto, os discriminantes daqueles dois trinômios, devem ser iguais a zero ao mesmo tempo. Logo:

- $\Delta_1 = 0 \Rightarrow (p+\alpha)^2 - 4.(r+\beta) = p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - 4\beta = 0$
- $\Delta_2 = 0 \Rightarrow q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{q^2}{4\alpha}$

Substituindo Δ_2 em Δ_1 temos

$$0 = p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{4q^2}{4\alpha} = \alpha p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^3 + 4\alpha r - q^2$$
$$\Rightarrow \alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2+4r)\alpha - q^2 = 0$$

Encontramos α pela fórmula de Cardano-Tartaglia (2.3). Após, encontramos $\beta = \dfrac{q^2}{4\alpha}$. Assim, temos os dois quadrados perfeitos procurados

$$y^4 + (p+\alpha)y^2 + (r+\beta) = \alpha y^2 - qy + \beta$$

Extraindo as raízes quadradas, obtemos

$$\sqrt{y^4 + (p+\alpha)y^2 + (r+\beta)} = \pm\sqrt{\alpha y^2 - qy + \beta}$$

que são do segundo grau. Resolvendo estas duas equações obtemos as raízes da equação (2.9). Para encontrarmos as raízes de $p(x)$, basta lembrar que $x = y - \dfrac{b}{4a}$.

Exemplo 9. *Seja a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$. Aplicamos o método de Ferrari,*

$$x^4 - (15-\alpha)x^2 + (24+\beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta$$

com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos. Portanto,

$$\Delta_1 = (15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$$

e

$$\Delta_2 = 100 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{25}{\alpha}$$

substituindo Δ_2 *em* Δ_1 *encontramos a equação*

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$$

. *Uma vez que esta equação é de terceiro grau, podemos resolver algebricamente e suas raízes são* $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ *e* $\alpha_3 = 25$. *Devemos para cada valor de* α *encontrar o valor de* β *e depois identificar os valor de* x.

1. *Para* $\alpha = 1$ *temos* $\beta = \dfrac{25}{1} = 1$ *e os dois lados da igualdade ficam*

$$x^4 - (15-1)x^2 + (24+25) = x^2 + 10x + 25$$

$$x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25$$

$$(x^2-7)^2 = (x+5)^2$$

Assim

$$x^2 - 7 = (x+5) \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \;\; e \;\; x_2 = -3$$

ou

$$x^2 - 7 = -x + 5 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \;\; e \;\; x_4 = 1$$

2. *Para* $\alpha = 4$ *temos* $\beta = \dfrac{25}{4}$ *e os dois lados da igualdade ficam*

$$x^4 - (15-4)x^2 + \left(24 + \frac{25}{4}\right) = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$\left(x^2 + \frac{11}{4}\right)^2 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2$$

Assim

$$x^2 + \frac{11}{4} = 2x + \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \;\; e \;\; x_2 = -2$$

ou

$$x^2 + \frac{11}{4} = -2x + \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \ \ e \ \ x_4 = -3$$

3. Para $\alpha = 1$ *temos* $\beta = \dfrac{25}{1} = 1$ *e os dois lados da igualdade ficam*

$$x^4 - (15 - 25)x^2 + (24 + 1) = 25x^2 + 10x + 1$$

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 25x^2 + 10x + 1$$

$$(x^2 + 5)^2 = (5x + 1)^2$$

Assim

$$x^2 + 5 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \ \ e \ \ x_2 = 1$$

ou

$$x^2 + 5 = -5x + 1 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = -3 \ \ e \ \ x_4 = -2$$

Podemos observar que as raízes sempre são $-3,\ -2,\ 1$ *e* 4. *Isso acontece porque, temos* 3 *maneiras diferentes de reagrupar os termos da equação* $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$, *obtendo quadrados perfeitos em ambos os lados.*

Observe que para a resolução da equação quártica, usamos em algum momento a fórmula para a resolução da equação cúbica de Cardano-Tartaglia (2.3). Na época de Cardano só se conheciam os números reais e, portanto não era aceito a extração de raízes quadradas de números negativos. Por exemplo, a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, possui solução $x = 4$. Porém a fórmula fornecia

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

e a não existência da raiz de um número negativo impedia a continuação do cálculo.

Assim, os matemáticos da época se viram desafiados a resolver esse problema. Por volta de 1550, Bombelli começou a estudar um conjunto numérico que permitisse operar com raízes de números negativos. Atualmente conhecido como conjunto dos números complexos e falaremos mais sobre ele no próximo capítulo.

Capítulo 3

Álgebra dos complexos

Segundo Hefez e Villela (2018), a necessidade de inserir os números complexos foi sendo detectada a medida em que se tentava resolver equações algébricas. No século XVI, quando Cardano descobriu algumas equações do terceiro grau, chamadas de caso irredutível, estas possuíam raízes reais, mas em fórmulas resolventes não se conseguia evitar expressões envolvendo radicais quadráticos de números negativos. Essa dificuldade motivou Bombelli a criar novos números, encarados com desconfiança por algumas gerações de matemáticos e mais adiante batizados de números complexos por Gauss. Estes números conquistaram sua legitimidade no início do século XIX, quando Gauss empregou sua representação geométricas e suas operações para deduzir propriedades dos números inteiros.

Neste capítulo abordaremos de início a insuficiência dos números reais para a resolução das equações algébricas e o surgimento dos números complexos. A seguir explicitaremos os conceitos e resultados básicos sobre a estrutura algébrica dos números complexos.

3.1 A insuficiência dos números reais para a resolução das equações algébricas e o surgimento dos números complexos

A aplicação da fórmula de Cardano, em algumas equações, desafiaram alguns matemáticos. Temos como exemplo,

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Nesta equação, por verificação vemos que 4 é uma raiz. Mas aplicando a fórmula, ficamos com

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Onde a extração de raízes quadradas de números negativos e a extração de raízes cúbicas de números de naturezas desconhecidas, eram um problema.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2008), Rafael Bombelli (1526 - 1572), deu o próximo passo no estudo da álgebra.

Em 1572, Bombelli em seu livro *L'Álgebra parte Magigiore dell'Arithmetica*, revelou que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser respectivamente números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, ou seja, ele desenvolveu um método para tratar das equações cúbicas que resultassem em expressões desta forma, envolvendo raízes quadradas de números negativos (Garbi, 2009).

Roque e Carvalho (2012) afirma que este matemático reconheceu a existência das raízes negativas e segue afirmando que estas expressões são mais sofísticas que reais.

Segundo Garbi (2009), Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = -1$$

$$(-\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = 1$$

$$(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$$

$$(\pm 1) \cdot (\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1) \cdot (-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}$$

Ele criou a regra para soma de dois números da forma $m + n\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

Segundo algumas fontes, o método de Bombelli, ficou conhecido como o início da Teoria dos números complexos.

No fim do século XVI, a álgebra se aproximou a aparência de hoje, por meio de Françóis Viète (1540 - 1603), matemático francês, que foi um grande algebrista.

Segundo Amaral (1988), Viète não era matemático por opção, mas desempenhou papel central na transição da Matemática da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições á aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Em sua obra, Viète apresentou na álgebra uma clara distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida (incógnita).

De acordo com Roque e Carvalho (2012), este matemático introduziu um simbolismo algébrico sistemático em seu livro *In artem analyticem isagoge* (Introdução à arte analítica), publicado em 1591.

Viète representou uma quantidade desconhecida por vogais e números supostamente conhecidos por consoantes. Desenvolveu novos métodos de solução para equação do segundo, terceiro e quarto grau, percebeu algumas relações entre coeficientes e raízes das equações, mas não aceitava os números complexos.

Outro matemático de destaque foi o inglês Isaac Newton (1642 - 1727), que segundo Garbi (2009), foi o maior matemático e maior físico. Ele possui feitos extraordinários nas áreas de Matemática pura e aplicada, sistematização das leis da dinâmica, concepção da lei da gravitação universal, teoria das cores e óptica em geral, concepção e fabricação de instrumentos científicos, em especial telescópios e lentes.

Na teorias das equações algébricas, Newton foi responsável pelos métodos algébricos aproximados para o encontro de raízes reais, um método aproximado não algébrico (utilizando elementos de Cálculo Diferencial e amplamente conhecido como o Método de Newton) e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes, como a determinação de números chamadas cotas superiores e cotas inferiores (Garbi, 2009).

Newton descobriu, que se um número r é raiz de uma equação polinomial $P(X) = 0$, então $P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de grau imediatamente abaixo de $P(x)$.

Dando sequência aos matemáticos que contribuíram com o estudo da álgebra, temos Leohnardo Euler (Suíça, 1707 - 1783), ele foi o consolidador da simbologia moderna, criou o símbolo para a somatória (Σ), a notação f(x) para as funções, a representação $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ para as combinações, entre outras. De interesse para nosso tema de estudo temos o "i"significando $\sqrt{-1}$, utilizado por ele em um artigo escrito em 1777.

Segundo Garbi (2009), Euler é considerado o matemático que dominou os números complexos. Lembrando que um número complexo é escrito na forma: $z = a + bi$, onde a e b são reais e $i = \sqrt{-1}$.

De acordo com Hefez e Villela (2018) com os trabalhos de Caspar Wessel (Noruega, 1745 - 1818), em 1797 e de Jean Robert Argand (Suíça, 1768 - 1822), em 1806, onde apresentaram o surgimento da representação geométrica dos números complexos e as operações envolvendo esta, a desconfiança dos matemáticos sobre esse números foi se desfazendo.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2008), no século XIX, a figura dominante era Carl Friendrich Gauss (Alemanha, 1777 - 1855). Seu primeiro livro importante, publicado em 1801, chamava-se *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigações Aritméticas), seu tema favorito era a Teoria dos Números. Sua obra cobria toda a matemática pura e aplicada.

Em 1831, Gauss batizou os números complexos pelo seu respectivo nome e contribuiu para a sua completa aceitação mediante trabalhos realizados entre 1828 e 1832, e utilizou o conhecimento adquirido nos estudos dos números complexos para provar novos e profundos resultados em Teoria dos Números.

De acordo com Garbi (2009), no estudo da Teoria das equações algébricas, Gauss se destaca pelo Teorema Fundamental da Álgebra, onde ele afirma que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz. Nas palavras de Estrada et al. (2000), este teorema nos afirma que um polinômio de grau n com coeficientes reais (complexos), pode ser fatorado como um produto de n polinômios de grau 1, com coeficientes complexos, tendo portanto exatamente n raízes complexas.

Ou seja, se as raízes da equação

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

forem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, pode escrever-se

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n).$$

Estrada et al. (2000) nos informa que Gauss foi o primeiro a fazer uma demonstração rigorosa do Teorema Fundamental da Álgebra. Perante sua vida ele realizou quatro demonstrações, a primeira em 1799, na sua dissertação na Universidade de Helmestedt.

A seguir apresentaremos os conceitos e resultados básicos sobre a estrutura algébricas dos números complexos. Para então, baseados no Teorema Fundamental da Álgebra, encontrarmos as três raízes das equações Cúbicas

3.2 Forma binomial ou algébrica de um número complexo

Sabemos de fato que a raiz quadrada de um número negativo não é definida no $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}.$$

Para atribuir significado a este número, criou-se a unidade imaginária. Chama-se **unidade imaginária** o número não real representado por i e definido por

$$i^2 = -1.$$

Ao introduzir a unidade imaginária, certos números não reais, ligados especialmente à operação de radiciação, passam a ser definidos.

1. $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9i^2} = 3i$
2. $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm i$

A definição das potências da unidade imaginária com expoente natural, tem as seguintes formas:

- $i^0 = i^4 = i^8 = ... = 1$
- $i^1 = i^5 = i^9 = ... = i$

- $i^2 = i^6 = i^{10} = ... = -1$

- $i^3 = i^7 = i^{11} = ... = -i$

De modo geral, se n é um número natural, temos que $i^n = i^r$, sendo r o resto da divisão de n por 4. Por exemplo, $i^{39} = i^3 = -i$, pois o resto da divisão de 39 por 4 é igual a 3.

Definição 5. *Chamamos de **número complexo**, todo número z do tipo*

$$z = a + bi,$$

onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária.

*Chamamos de **forma binomial** ou **algébrica**, essa forma de representação de um número complexo. Dizemos que **a** é a **parte real** de z, e que **b** é a **parte imaginária** de z. Em símbolos,*

$$Re(z) = a \quad e \quad Im(z) = b$$

Exemplo 10. *Considere os seguintes números complexos:*

- *$z_1 = 3 - 2i$ temos que $Re(z_1) = 3$ e $Im(z_1) = -2$.*

- *$z_2 = 5i = 0 + 5i$ temos que $Re(z_2) = 0$ e $Im(z_2) = 5$.*

- *$z_3 = 2 = 2 + 0i$ temos que $Re(z_3) = 2$ e $Im(z_3) = 0$. Observamos que todo número real é complexo.*

Definição 6. *Temos que $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos, e que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. O conjunto $\mathbb{C}$ pode ser definido assim:*

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Considerando um número complexo $z = a + bi$, temos os seguintes casos especiais:

- $b = 0 \Rightarrow z$ é **real** (caso de $2 = 2 + 0i$)

- $b \neq 0 \Rightarrow z$ é **imaginário** (caso de $5 - 4i$ ou $6i$)

- $b \neq 0$ e $a = 0 \Rightarrow z$ é **imaginário puro** (caso de $7i$)

Podemos afirmar que dois complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais e suas partes imaginárias são iguais, respectivamente.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow (a = c) \quad \text{e} \quad (b = d)$$

Exemplo 11.

Sendo x e y reais, $3 + (x - 1)i = y - 5 + 4i \Rightarrow 3 = y - 5$ e $x - 1 = 4 \Rightarrow y = 8$ e $x = 5$.

3.3 Operações com números complexos

Definiremos no conjunto dos números complexos, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Definição 7. *A* ***soma*** *de dois números complexos é obtida adicionando-se, respectivamente, suas partes reais e suas partes imaginárias. Ou seja, dados $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$, temos $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.*

Chamamos de ***oposto*** *de um número complexo $z = a + bi$ o número complexo indicado por $-z$, assim definido:*

$$z = a + bi \Rightarrow -z = -a - bi$$

A ***diferença*** *de dois números complexos é a soma do primeiro número com o oposto do segundo.*

Exemplo 12.

- $(3 + 2i) + (5 - 4i) = (3 + 5) + (2 - 4)i = 8 - 2i$
- *O oposto de $z = -5 + 2i$ é $-z = 5 - 2i$.*
- $(6 + i) - (4 - 2i) = 6 + i - 4 + 2i = 2 + 3i$

Para quaisquer números complexos, temos as seguintes propriedades da adição: Vamos considerar $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

(A_1) Comutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(A_2) Associativa:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

(A_3) Existência de elemento neutro:

O complexo $0 = 0 + 0i$ é o elemento neutro, isto é, $0 + z = z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

(A_4) Existência de elemento simétrico:

Todo número complexo possui um simétrico. De fato, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, o complexo $-z = -a - bi$ satisfaz a propriedade.

$$(-z) + z = z + (-z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Definição 8 (O **produto** de dois complexos)**.** *Dados* $z_1 = a + bi$ *e* $z_2 = c + di$*, temos*

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Exemplo 13.

$$(4 - 3i)(2 + 5i) = 8 + 20i - 6i - 15i^2 = 8 + 14i - 15(-1) = 8 + 15 + 14i = 23 + 14i$$

Considerando $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c = di$, temos que para qualquer número complexo, as seguintes propriedades são válidas:

(M_1) Comutativa:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(M_2) Associativa:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

(M_3) Existência de elemento neutro:

O complexo $1 = 1 + 0i$ é o elemento neutro da multiplicação, isto é:

$$1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

(M_4) Inverso:

Todo número complexo z, não nulo, possui um inverso, ou seja, existe um complexo z^{-1} não nulo, tal que:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

(M_5) Distributiva em relação a adição:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Proposição 1 (Inverso)**.** *Se $z = a + bi$ é não nulo, ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), ou equivalentemente $a^2 + b^2 \neq 0$, temos que seu inverso multiplicativo existe e é igual a*

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Demonstração: 1. *Considere $z^{-1} = x + yi$. Desta forma, desenvolvendo a igualdade*

$$1 = z \cdot z^{-1} = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$$

obtemos,

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

onde $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = A.$

Calculando o determinante da matriz A e a matriz inversa de A, obtemos

$$det(A) = a^2 + b^2 \neq 0 \ e$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix}$$

Prosseguindo com a resolução do sistema, temos de (3.1)*, que*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad e \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Concluímos então que, $z^{-1} = x + yi$ *existe e que multiplicado por* z*, resulta no elemento neutro da multiplicação. Também denotamos o inverso multiplicativo do número complexo* z *por* $\dfrac{1}{z}$.

Definição 9 (Conjugado)**.** *O conjugado do complexo* $z = a + bi$ *é o número complexo* $\bar{z} = a - bi$.

Considerando os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ e os conjugados $\bar{z_1} = a - bi$ e $\bar{z_2} = c - di$, segue as propriedades:

(i) A multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado é um número real, pois

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

(ii) Para o número complexo z, temos que: Se $z = \bar{z}$ então z é real.

(iii) Se z_1 e z_2 são números complexos, então $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(iv) Se z_1 e z_2 são números complexos, então $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Proposição 2 (Divisão utilizando do conjugado)**.** *O* ***quociente*** *de dois complexos pode ser obtido multiplicando-se o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor.*

Demonstração: 2. *Sejam* z_1 *e* z_2 *complexos, com* $z_2 \neq 0$.

Considerando a divisão de z_1 *por* z_2*, sendo:*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Temos pela propriedade ii) dos conjugados que se um número complexo z_2 pelo seu conjugado $\bar{z}_2$, este será um número real.

Portanto, podemos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, e teremos transformado a operação numa divisão por um número real.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}.$$

Exemplo 14.

$$\frac{8-i}{3-2i} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24+16i-3i-2i^2}{9-4i^2} = \frac{24+16i-3i+2}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2+i$$

3.4 Forma trigonométrica ou polar de um complexo (representação geométrica)

Os números complexos possuem uma representação geométrica. Podemos obtê-la estabelecendo uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números complexos e o conjunto dos pontos de um sistema de coordenadas cartesianas.

A cada complexo $z = a + bi$ está associado um par ordenado (a, b) de números reais, sendo este um ponto do sistema cartesiano. Chamamos este sistema cartesiano de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**.

O eixo das abcissas passa a ser chamado **eixo real**; o das ordenadas, **eixo imaginário**. O ponto $P(a, b)$ associado ao complexo $z = a + bi$ é o **afixo** de z.

Suponhamos um complexo $z = a + bi$, cujo afixo é $P = (a, b)$, conforme figura a seguir.

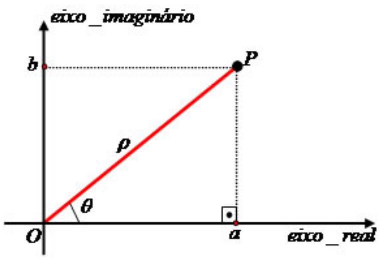

Figura 3.1: Plano de Argand-Gauss

A distância $OP = \rho$, do ponto P à origem do plano complexo, é chamada **módulo**

de z. Em símbolos,

$$|z| = \rho$$

Chamamos de **argumento de** z o ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, no qual o semieixo real positivo deve girar, no sentido anti- horário, até se sobrepor ao segmento OP. Em símbolos,

$$arg(z) = \theta$$

Não definimos o argumento de z, para $z = 0$ e $|z| = 0$. No triângulo PaO, retângulo em a, utilizando o Teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas de θ, obtemos

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\,\theta = \frac{a}{\rho} \ \text{ e } \ \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$$

Independente do quadrante de z, as duas últimas relações valem, mesmo quando o afixo de $z \neq 0$ estiver sobre os eixos real ou imaginário.

Um número complexo $z = a+bi$ não nulo pode ser escrito em função de seu módulo ρ e seu argumento θ.

Das duas últimas relações, obtemos

$$\cos\,\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho\,\cos\,\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho\,\operatorname{sen}\theta$$

Portanto, $z = a + bi = \rho\,\cos\,\theta + \rho\,\operatorname{sen}\theta \cdot i$ ou

$$z = \rho(\cos\,\theta + i\,\operatorname{sen}\theta)$$

Essa é a **forma trigonométrica** ou forma polar de um número complexo.

3.5 Operações com complexos na forma polar

Considerando dois números complexos escritos na forma polar:

$$z_1 = |\rho_1|(\cos\,\theta_1 + i\,\operatorname{sen}\theta_1) \ \text{ e } \ z_2 = |\rho_2|(\cos\,\theta_2 + i\,\operatorname{sen}\theta_2)$$

Utilizaremos alguns conhecimentos de trigonometria na demonstração das fórmulas para o produto, o quociente, a potenciação e o cálculo da raiz enésima entre dois números complexos.

Proposição 3 (Multiplicação de números complexos na forma polar)**.** *O produto* $z_1 \cdot z_2$ *é igual a:*

$$z_1 \cdot z_2 = |\rho_1|\,|\rho_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

Demonstração: 3. *Calculando o produto de* z_1 *com* z_2*, temos:*

$$z_1 \cdot z_2 = [|\rho_1|(\cos\ \theta_1 + i\ \text{sen}\,\theta_1)]\ \cdot\ [|\rho_2|(\cos\ \theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_2)]$$

$$\Rightarrow |\rho_1| \cdot |\rho_2|(\cos\ \theta_1\ \cos\ \theta_2 + i\cos\ \theta_1\ \text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\ \cos\ \theta_2 + 1^2\ \text{sen}\,\theta_1\ \text{sen}\,\theta_2)$$

$$\Rightarrow |\rho_1| \cdot |\rho_2|(\cos\ \theta_1\ \cos\ \theta_2 -\ \text{sen}\,\theta_1\ \text{sen}\,\theta_2 + i\cos\ \theta_1\ \text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\ \cos\ \theta_2)$$

Portanto,

$$z_1 \cdot z_2 = |\rho_1|\,|\rho_2|\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Exemplo 15.

$$2(\cos\ 20^\circ + i\,\text{sen}\,20^\circ) \cdot 3(\cos\ 40^\circ + i\,\text{sen}\,40^\circ) =$$

$$= 2 \cdot 3[\cos(20^\circ + 40^\circ) + i\,\text{sen}(20^\circ + 40^\circ)]$$

$$= 6\,(\cos\ 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + 3\sqrt{3}i.$$

Proposição 4 (Divisão de números complexos na forma polar)**.** *A divisão* $\dfrac{z_1}{z_2}$*, para* $z_2 \neq 0$ *é igual a:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|\rho_1|}{|\rho_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demonstração: 4. *: Calculando o quociente* $\dfrac{z_1}{z_2}$ *temos:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|\rho_1|(\cos\ \theta_1 + i\ \text{sen}\,\theta_1)}{|\rho_2|(\cos\ \theta_2 + i\ \text{sen}\,\theta_2)} \cdot \frac{|\rho_2|(\cos\ \theta_2 - i\ \text{sen}\,\theta_2)}{|\rho_2|(\cos\ \theta_2 - i\ \text{sen}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{|\rho_1||\rho_2|[\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\,\text{sen}\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - i^2\,\text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2]}{|\rho_2|^2[\cos^2\theta_2 - i^2\,\text{sen}^2\theta_2]}$$

$$= \frac{|\rho_1|[\cos\theta_1\cos\theta_2 +\ \text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2 + i(\ \text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\theta_2)]}{|\rho_2|[\cos^2\theta_2 +\ \text{sen}^2\theta_2]}$$

$$= \frac{z_1}{z_2} = \frac{|\rho_1|}{|\rho_2|}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

Exemplo 16.

$$\frac{6(\cos\,110^\circ + i\,\mathrm{sen}\,110^\circ)}{2(\cos\,20^\circ + i\,\mathrm{sen}\,20^\circ)} =$$

$$\frac{6}{2}[\cos\,(110^\circ - 20^\circ) + i\,\mathrm{sen}\,(110^\circ - 20^\circ)] =$$

$$3(\cos\,90^\circ + i\,\mathrm{sen}\,90^\circ) = 3(0 + i) = 3i$$

Para demonstrar a fórmula para cálculo da potência de um número complexo, com expoente inteiro, utilizaremos a fórmula da multiplicação.

Proposição 5. *Dado o complexo $z = |\rho|(\cos\,\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)$, e sendo n um número inteiro, temos a seguinte fórmula, chamada* ***primeira fórmula de De Moivre****:*

$$z^n = |\rho|^n\,(\cos\,(n\theta) + i\ \mathrm{sen}\,(n\theta))$$

Demonstração: 5. *Na demonstração veremos que para elevar um número complexo a um expoente inteiro, elevamos seu módulo a esse expoente e multiplicamos seu argumento por esse expoente.*

Seja o complexo, $z = |\rho|(\cos\,\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)$ não nulo e $n \in \mathbb{N}$.

Assim temos que:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \ldots z}_{\textit{produto de n fatores}}$$

$$= \underbrace{|\rho| \cdot |\rho| \cdot |\rho| \ldots |\rho|}_{\textit{produto de n módulos}} \cdot [\cos \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\textit{soma de n argumentos}} + i\,\mathrm{sen} \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\textit{soma de n argumentos}}]$$

Portanto,

$$z^n = |\rho|^n\,(\cos\,(n\theta) + i\ \mathrm{sen}\,(n\theta)).$$

Vamos considerar a fórmula para o caso de n inteiro negativo. Seja $n = -m$, com m inteiro e positivo. Temos:

$$(|\rho| \cdot [\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta])^n = (|\rho| \cdot [\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta])^{-m}$$

$$= \frac{1}{(|\rho| \cdot [\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta])^m}$$

$$= \frac{1 \cdot \cos 0 + i\,\text{sen}0}{|\rho|^m \cdot [\cos(m\theta) + i\,\text{sen}(m\theta)]}$$

$$= \frac{1}{|z|^m} \cdot \cos(0 - m\theta) + i\,\text{sen}(0 - m\theta)$$

$$= |z|^{-m} \cdot [\cos(-m\theta) + i\,\text{sen}(-m\theta)]$$

$$= |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)].$$

No caso em que os números complexos têm módulo iguais a 1,

$$(\cos\,\theta + isen\,\theta)(\cos\,\theta' + isen\,\theta') = \cos\,(\theta + \theta') + isen\,(\theta + \theta').$$

Hefez e Villela (2018), nos informa que ocorre uma conexão entre os números complexos e logaritmos e esta é dada pela fórmula:

$$e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta,$$

descoberta por Euler.

Desta fórmula podemos escrever todo número complexo não nulo na forma

$$z = r(\cos\,\theta + isen\,\theta) = re^{i\theta}.$$

O produto se expressa como:

$$(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (r \cdot r')e^{i(\theta+\theta')}$$

e a fórmula de De Moivre:

$$(rei\theta)^n = r^n e^{in\theta}.$$

Exemplo 17.

$$[2(\cos\,15^\circ + i\,\text{sen}\,15^\circ)]^3 =$$

$$= 2^3\,(\cos\,3 \cdot 15^\circ + i\,\text{sen}\,3 \cdot 15^\circ) =$$

$$= 8(\cos\,45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) =$$

$$= 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

Definição 10. *Se z é um número complexo e n é um número natural não nulo, todo complexo w tal que $w^n = z$ é uma **raiz enésima** de z. Ou seja, uma raiz enésima de um complexo z, indicada por $\sqrt[n]{z}$, é um complexo w, tal que $w^n = z$.*

Exemplo 18. *O número complexo $w = 1 + i$ é uma raiz quadrada de $z = 2i$, pois $w^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i = z$.*

Proposição 6. *Dado um número complexo $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, e denotando por $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ suas n raízes enésimas, vale a **Segunda fórmula de De Moivre**. Se w_k é uma raiz enésima de z,*

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq n-1$.

Demonstração: 6. *Sejam os números complexos na forma polar $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, em que $\rho = |z|$, $\theta = arg(z)$, $r = |w|$ e $\varphi = arg(w)$.*

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$w^n = z \Rightarrow r^n(\cos n\varphi + i \ \operatorname{sen} n\varphi) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

A igualdade é verdadeira se, e somente se,

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, r \in \mathbb{R} \text{ e } r > o \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

No entanto, para que tenhamos $0 \leq \varphi < 2\pi$, temos que $0 \leq k \leq n-1$. Logo, encontraremos diversos valores diferentes para w, uma vez que os arcos $\dfrac{\theta+2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$ não são iguais.

Caso $k = n, n+1, n+2, \ldots$ os arcos passam pelos mesmos pontos repetindo os valores de w.

Concluímos então, que

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq n-1$.

Exemplo 19. *Vamos calcular a* $\sqrt[3]{8}$:

- *Em* $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{8} = 2$, *pois* $2^3 = 8$.

- *Em* $\mathbb{C}$: $\exists\, z \in \mathbb{C}, z = r(\cos\,\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta), z = \sqrt[3]{8} \Rightarrow z^3 = 8$

$$z^3 = r^3 \cdot (\cos\,3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta) = 8(\cos\,0 + \,\mathrm{sen}\,0)$$

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$$

e

$$3\theta = 0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Temos que $k = 0, 1$ *e* 2, *pois para* $k \geq 3$ *o valor das raízes repetem.*

$$k = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow z_1 = 2(\cos\,0 + i\,\mathrm{sen}\,0)$$
$$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 2(\cos\,\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3})$$
$$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_3 = 2(\cos\,\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3})$$

Exemplo 20. *: Calcule as raízes cúbicas da unidade*

Escrevendo $z = 1$ *na forma polar temos que:*

- *O módulo* $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

- *O* $\theta = arg(x)$, *temos*

$$\cos\,\theta = a\rho = \frac{1}{1} = 1 \;\; e$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = b\rho = \frac{0}{1} = 0 \;\; e$$

Portanto,

$$\theta = 0rad.$$

Assim,

$$Z = \rho(\cos\,\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \Rightarrow z = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}0.$$

Desta forma,

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\,\frac{0 + 2k\pi}{n} + i\,sen\,\frac{0 + 2k\pi}{n}\right)$$

$$= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\,sen\,\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,sen\,\frac{2k\pi}{3}$$

Como $n = 3$, *então* k *poderá ser* $0, 1$ *e* 2. *Assim, temos:*

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos\,0 + i\,\mathrm{sen}\,0 = 1$$
$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Logo, as raízes cúbicas da unidade são os complexos:

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;\; e \;\; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Vimos no estudo dos números complexos, que devido à contribuição de Euler podemos considerar a representação dos números complexos não nulos na forma polar ou trigonométrica. Esta representação é de suma importância, por relacionar os números complexos com as funções trigonométricas, permitindo uma maior facilidade nos cálculos do produto de dois números complexos, a potência e a extração de raízes de um número complexo, assim como interpretar geometricamente estas operações.

3.6 Derivação computacional simples de equações quadráticas

Esta prova da fórmula para resolução das equações quadráticas foi apresentada por Loh (2019).

De acordo com Loh (2019) a derivação é computacionalmente leve e conceitualmente natural. Devemos considerar o conjunto dos números complexos.

De início queremos encontrar uma fatoração na forma $x^2+Bx+C = (x-R)\cdot(x-S)$.

Para que o produto seja igual a zero, temos que: $x = R$ ou $x = S$.

Pela lei da distributiva, $R + S = -B$ e $R \cdot S = C$.

Então o conjunto $\{R, S\}$ será o conjunto das raízes da equação quadrática.

Temos que dois números somam $-B$ quando sua média é $\dfrac{-B}{2}$.

Devemos então encontrar dois números $\dfrac{-B}{2} \pm z$, onde z é um quantidade desconhecida e o produto entre eles seja C.

Se $z = 0$, temos que $R = S = -B$.

Se $z \neq 0$, temos que o produto será

$$\left(\frac{-B}{2} + z\right) \cdot \left(\frac{-B}{2} - z\right) = C$$

Desenvolvendo encontramos,

$$\left(\frac{-B}{2}\right)^2 + z^2 = C$$

$$\frac{B^2}{4} + z^2 = C$$

$$z^2 = \frac{B^2}{4} - C$$

$$z = \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}$$

$$z = \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

Como as soluções da equação quadrática são $R = \dfrac{-B}{2} + z$ e $S = \dfrac{-B}{2} - z$, e encontramos o valor de z, substituindo obtemos

$$R = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \text{ e } S = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

.

3.6.1 Equação quadrática na forma $ax^2 + bx + c = 0$

Tomando uma equação quadrática na forma $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo ambos os membros por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Temos então que $B = \dfrac{-b}{a}$ e $C = \dfrac{c}{a}$, substituindo na fórmula anterior, obtemos a fórmula por radicais para resolução das equações quadráticas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Exemplo 21. *Considerando a equação* $x^2 - 2x + 4$.

Temos que $B = 2$ *e* $C = 4$. *Queremos encontrar dois números* R *e* S, *tais que:*

$$R + S = -2 \text{ e } R \cdot S = 4$$

Como a média da soma será $\frac{-B}{2}$ *e queremos encontrar as soluções* $\frac{-B}{2} \pm z$, *substituindo obtemos* $1 \pm z$.

Temos ainda que $(1 + z) \cdot (1 - z) = 4$. *Logo,*

$$1 - z^2 = 4$$

$$z^2 = -3$$

$$z = i\sqrt{3}$$

Portanto, as soluções são $R = 1 + i\sqrt{3}$ *e* $S = 1 - i\sqrt{3}$.

3.7 Todas as raízes das equações cúbicas

No estudo das raízes cúbicas, na forma

$$ax^3 + px + q = 0,$$

consideramos $x = A + B$ e encontramos que:

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Vamos considerar $A^3 = z_1$ e $B^3 = z_2$. Escolhendo uma das raízes cúbicas de z_1 e detonando-a por $\sqrt[3]{z_1}$, temos que as soluções são $\sqrt[3]{z_1}, w\sqrt[3]{z_1}$ e $w^2\sqrt[3]{z_1}$, em que $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas da unidade. Denotando agora por $\sqrt[3]{z_2}$ a raiz cúbica de z_2 tal que $\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2} = -\frac{p}{3}$, de forma que a segunda equação do sistema seja satisfeita, admitindo as seguintes soluções:

$$A_1 = \sqrt[3]{z_1}, \;\; B_1 = \sqrt[3]{z_2}$$

$$A_2 = w\sqrt[3]{z_1}, \;\; B_2 = w^2\sqrt[3]{z_2}$$

$$A_3 = w^2\sqrt[3]{z_1}, \;\; B_3 = w\sqrt[3]{z_2}$$

Logo, a equações cúbicas possuem como solução as chamadas *fórmulas de Cardano*:

$$y_1 = A_1 + B_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2 = A_2 + B_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_3 = A_3 + B_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

Exemplo 22. *: Encontre as raízes de $p(x) = x^3 - 6x - 9$.*

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{1323}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{1323}{108}}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x_1 = 2 + 1$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = w\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + w^2\sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}}$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 1$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{3}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2 - 1 + 2\sqrt{3}i - \sqrt{3}i}{2}$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3 = w^2\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + w\sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}}$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 1$$

$$x_3 = -1 - \sqrt{3}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Quando Cardano publicou seu livro *Ars Magna* em 1545, as equações até o quarto grau eram resolúveis por radicais. As equações de primeiro, segundo e terceiro grau apresentavam fórmulas para suas resoluções, a de quarto grau não apresentava uma fórmula, mas uma vez que era manipulada algebricamente até chegar à equação do segundo grau, também era solúvel por radicais. O desafio então era encontrar uma fórmula, ou técnicas de manipulação para encontrar a solução do quinto grau.

Segundo Becker (2014), por aproximadamente dois séculos e meio, alguns matemáticos se empenharam em buscar a solução da equação do quinto grau, entre eles Euler em 1750 e Lagrange em 1780, mas sem êxito algum.

Após várias tentativas, alguns estudiosos começaram a pensar na possibilidade de tais equações serem solúveis por radicais.

No final do século XVIII, Ruffini apresenta a primeira prova da inexistência de fórmulas por radicais para resolução de equações algébricas, porém sua apresentação tinha insuficiência de rigor matemático. Quem finalmente demonstrou de modo geral que é impossível resolver equações do quinto grau utilizando apenas operações algébricas, foi Abel em 1823, após ter acreditado encontrar a fórmula procurar e ter identificado erros.

Mas foi Galois, que deu a cartada final sobre a questão da solubilidade por radicais de equações algébricas, por meio do desenvolvimento de uma nova teoria, contribuindo para várias outras áreas da Álgebra. Daremos continuidade no estudo da inexistência de fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas de grau maior ou igual a cinco no próximo capítulo.

Capítulo 4

Inexistência de fórmulas por radicais para resolução das equações de grau maior ou igual a cinco

Neste capítulo, apresentaremos como seguiu-se o estudo das equações á Álgebra Moderna, das contribuições de Abel e Galois, para a compreensão da inexistência de uma fórmula para a resolução das equações de grau 5 ou superior. Destacando a importância da teoria dos grupos no esclarecimento da questão da resolubilidade algébrica das equações.

4.1 Contextualização histórica

A álgebra e a geometria estavam mudando de modo fundamental no século XIX. Fórmulas algébricas para a resolução de equações de terceiro e quarto grau tinham sido obtidas no século XVI, mas resolver a equação de quinto grau ainda era um desafio.

Aos poucos os matemáticos pararam de buscar a solução e passaram a procurar uma demonstração da inexistência das fórmulas por radicais para a resolução das equações de grau maior ou igual a 5 (Berlinghoff e Gouvêa, 2008).

Segundo Estrada et al. (2000), para estas equações o foco era encontrar fórmulas para as raízes em função dos coeficientes, e nessas fórmulas deveriam poder usar-se as quatro operações algébricas e ainda a extração de radicais, chamado resolução algébrica das equações.

Ou seja, tratava-se de procurar estabelecer uma relação entre coeficientes e raízes de equações, investigar a possibilidades destas se exprimirem em função dos coeficientes, usando radicais.

Na respectiva sequência, Lagrange, Ruffini, Abel e Galois buscavam provar que não há uma solução geral para resolver equações de grau maior ou igual a cinco. Porém, equações quínticas, já estudadas por De Moivre, da forma $x^5 - px^3 + \left(\frac{p^2}{5}\right) x - r = 0$, tem raízes dadas por uma fórmula que envolve radicais de maneira análoga a da Fórmula de Cardano-Tartaglia. A seguir demonstraremos a fórmula para resolução destas equações quínticas.

Considere a equação,

$$x^5 - px^3 - qx - r = o$$

Calculemos polinômios do binômio

$$(u+v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$$

$$(u+v)^5 = 5uv(u^3+v^3) + 10u^2v^2(u+v) + (u^5+v^5) \tag{4.1}$$

e

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u+v)^3 = (u^3+v^3) + 3uv(u+v)$$

$$\Rightarrow (u^3+v^3) = (u+v)^3 - 3uv(u+v) \tag{4.2}$$

Substituindo (4.2) em (4.1), obtemos:

$$(u+v)^5 = 5uv[(u+v)^3 - 3uv(u+v)] + 10u^2v^2(u+v) + (u^5+v^5)$$

Desenvolvendo, obtemos

$$(u+v)^5 = 5uv(u+v)^3 - 5u^2v^2(u+v) + (u^5+v^5).$$

Igualando com a equação $x^5 - px^3 - qx - r = o$, temos que:

$$p = 5uv; q = -5u^2v^2 \text{ e } r = u^5 + v^5.$$

Estabelecendo,

$$\Rightarrow p^2 = 25u^2v^2 \text{ e } q = \left(-\frac{p^2}{5}\right),$$

temos uma equação da forma

$$x^5 - px^3 + \left(\frac{p^2}{5}\right)x - r = 0,$$

se $x = u + v$, for uma raiz. Verificando as relações,

$$\begin{cases} r = u^5 + v^5 \\ \left(\frac{p^2}{5}\right)^5 = u^5v^5. \end{cases}$$

Como conhecemos a soma e o produto de u^5 e v^5, pela formula da equação de segundo grau, deduzimos que as raízes são

$$\frac{-S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}, \text{ onde } S = r \text{ e } P = \left(\frac{p^2}{5}\right)^5.$$

Assim,

$$= \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4\left(\frac{p^2}{5}\right)^5}}{2}$$

$$= -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p^2}{5}\right)^5}.$$

Portanto,

$$u^5 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p^2}{5}\right)^5}$$

e

$$v^5 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p^2}{5}\right)^5}.$$

Logo a raiz $x = u + v$ é dada pela fórmula

$$x = \sqrt[5]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p^2}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p^2}{5}\right)^5}}.$$

A seguir apresentaremos a contribuição de alguns matemáticos para a demonstração da inexistência de fórmulas por radicais para resolução das equações de grau maior que quatro.

No século XVIII, Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) em sua obra *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, apresentadas à Academia de Berlim em 1770 e publicadas em 1771, observou que era possível entender todas as soluções existentes analisando o efeito de permutar as raízes de uma equação em várias expressões polinomiais.

Lagrange destaca a importância essencial do estudo das permutações das raízes e do efeito que essas permutações tem sobre funções polinomiais ou racionais das raízes, ou seja, o número de valores possíveis de tais funções quando submetidas a permutações de raízes.

Ele foi o primeiro a admitir a impossibilidade da resolução algébrica das equações de graus superiores a quatro (Estrada et al., 2000).

De acordo com Peruzzo (2013), em torno de 1800 o matemático italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822), escreveu alguns artigos alegando provar que a equação quíntica não podia ser resolvida por uma fórmula que envolvesse operações simples.

Ruffini, assim como Lagrange, estudou a questão do número de valores de uma função racional das raízes de uma equação de grau n quando estas são permutadas de todas as maneiras possíveis. Mas ele foi criticado por seus contemporâneos, pela falta de clareza e lacunas nos raciocínios (Estrada et al., 2000).

Mesmo assim Ruffini foi o responsável pela grande mudança na abordagem das equações. Estimulando a partir de então, a demonstração de que as equações de grau superior a 4 não podem ser resolvidas por radicais.

Em 1808, o matemático finlandês Niels Henrique Abel (Noruega, 1802 - 1829), aos 16 anos supôs ter resolvido equação algébrica do quinto grau. Mas logo, descobriu um erro na sua prova.

Dando continuidade aos estudos, demonstrou que é impossível resolver todas as equações do quinto grau por meio de fórmulas por radicais. O seu argumento procedeu por redução ao absurdo (Estrada et al., 2000).

Mas estas podem ser resolvidas por meio de manipulações algébricas simples, quando incompletas; e com uso de computadores ou pela introdução de ferramentas matemáticas mais avançadas quando completas. Embora existam um número ilimitado de equações algébricas de grau maior que quatro que podem ser resolvidas por radicais. Abel tentou esclarecer essa questão, mas não alcançou seu objetivo (Peruzzo, 2013).

De acordo com Boyer (1974), Abel em 1824 demonstrou a insolubilidade das equações quínticas, mas em 1799 Ruffini havia apresentado uma demonstração, apesar de ser menos satisfatória, por isso leva o nome de teorema de Abel-Ruffini.

Segundo Lima (1987), o problema de determinar quais equações de grau n têm suas raízes expressas sob forma de radicais em função dos coeficientes só veio ter uma solução definitiva com o trabalho do genial matemático francês Galois.

Èvariste Galois (França, 1808 - 1832), brilhante e temperamental, apaixonado pela matemática e pela politica. Dedicou muito de seu tempo a matemática, mas seus escritos não foram notados. Em 1832, ele envolveu-se em um duelo e morreu.

No estudo da teoria das equações algébricas, Galois resolveu a questão pendente, de como saber quais equações são solúveis algebricamente. Ou seja, ele encontrou critérios que possibilitaram saber quando uma equação poderia ser resolvida algebricamente. Abrindo portas para a Teoria dos grupos.

Segundo Garbi (2009), depois de Galois a álgebra nunca mais foi a mesma. A teoria dos grupos é um dos pilares mais importantes da matemática moderna, com aplicações diversas na geometria, teoria das equações, física nuclear, entre outras.

A possibilidade de que existia equações de grau maior que 4, que podiam ser resolvidas por radicais, dependia da forma particular da equação e de suas raízes e Galois esclareceu como se processa essa dependência.

Galois começa com algumas definições. De início ele apresenta a irredutibilidade do polinômio que está no primeiro membro da equação. Depois ele descreve o chamado corpo (ou domínio de racionalidade)“gerado” pelos coeficientes da equação “ou como de base” da equação. Após ele define a extensão de um corpo por adjunção de elementos de um corpo que contém tanto o corpo inicial como os elementos que se juntam. Dando início a moderna teoria das extensões de corpos. A seguir Galois introduz a nomenclatura sobre permutações de várias letras ou variáveis.

Devemos considerar que nesse período nasce a teoria dos grupos. A ele só interessa estudar equações irredutíveis, pois estas não podem ter raízes repetidas se os coeficientes da equação estão dentro do corpo dos complexos.

Após, Galois demonstra que sendo $\lambda_1, ..., \lambda_n$ as raízes e K o corpo base, se tem $K(\lambda_1, ..., \lambda_n) = K(V)$, o que é uma sequência do chamado "Teorema do elemento primitivo".

Sua principal contribuição é a demonstração do teorema a seguir, chamado "Grupo de equação".

Seja dada uma equação de que $a, b, c, ...$ são as m raízes. Existirá sempre um grupo de permutações das letras $a, b, c, ...$ que terá as seguintes propriedades:

(1º) que toda a função das raízes invariável pelas substituições deste grupo, seja racionalmente conhecida;

(2º) reciprocamente, que toda a função das raízes, determinável racionalmente seja invariável por estas substituições.

Galois observa que no caso das equações algébricas o grupo é o conjunto de todas as permutações possíveis de raízes, isto é, m é o número de raízes, S_m é o grupo simétrico.

O grupo de Galois de um equação(polinômio) depende da equação e de suas raízes. Este grupo, reflete exatamente se a equação é ou não resolúvel por radicais.

Ou seja, se o grupo só contiver a permutação identidade, as raízes da equação pertencem ao corpo base considerado. Para resolver uma equação é necessário diminuir o seu grupo até que ele contenha apenas a permutação identidade.

A resolubilidade de uma equação por radicais, pode ser traduzido por uma sequencia de adjunções de radicais de índice primo.

Por exemplo, para obter a expressão $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, primeiro se junta $\alpha = \sqrt{5}$, depois $\beta = \sqrt{1+\alpha}$ e depois $\sqrt{\beta}$.

Galois analisou então o que acontecia ao grupo de uma equação quando o corpo base se junta, isto é, dado um tal subgrupo, mediante a adjunção de um radical de índice p, é possível reduzir o grupo da equação a esse subgrupo.

Em resumo, dada uma equação qualquer, se o grupo admitir uma cadeia de subgrupos que termina na permutação identidade, a equação será solúvel por radicais, caso contrário, não.

Galois observa que o grupo simétrico S_5 não tem esta propriedade, o que explica o fato de algumas equações do quinto grau, não serem solúveis por radicais.

Revisaremos a seguir alguns conceitos que são pré-requisitos para entendermos a resolubilidade por radicais dada por Galois.

4.2 Teoria dos grupos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados da teoria de grupos, necessários para a compreensão do Teorema de Abel-Ruffini que trata sobre a resolubilidade de equações por meio de radicais. Para um estudo mais detalhados destes conceitos sugerimos ao leitor ver Gonçalves (2013) e Domingues e Iezzi (2003).

Definição 11. *Um conjunto não vazio G, munido de uma operação $* : G \times G \to G$, é chamado de **grupo**, se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. ***Associatividade**: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c, \in G$;*

2. ***Existência de elemento neutro**: $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$;*

3. ***Existência de simétrico**: Isto é, todo elemento possui um elemento inverso. ($\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$).*

*Se para um grupo G valer a propriedade da comutatividade, ou seja, $a * b = b * a, \forall a, b \in G$, dizemos que o grupo é **abeliano** ou **comutativo**.*

Observações

- A operação de $*$ poderá ser uma adição, multiplicação (produto) ou uma composição de funções.

- O elemento neutro é único.

- O elemento inverso é único.

Denotamos um grupo por $(G, *)$ ou apenas G. E denotamos o número de elementos de G, chamado "ordem de G", por (G) ou $|G|$.

Quando um grupo, tem como conjunto suporte um conjunto infinito, dizemos que o grupo é infinito, ou seja, G possui infinitos elementos ($|G| = \infty$). Caso contrário o grupo é finito, isto é G possui n elementos ($|G| = n, n \in \mathbb{N}$).

Exemplo 23. *:*

1. *Grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo infinito.*

2. *$(\mathbb{Z}, \cdot)$ não é grupo, pois nem todo elemento possui inverso.*

3. $(\mathbb{Z}_n, +)$ *denota o grupo finito das classes residuais módulo* n.

Exemplo 24 (**Grupo de permutações**). *Na teoria dos grupos entendemos por permutação uma bijeção de um conjunto nele mesmo.*

Sejam S *um conjunto não vazio e "* $\circ$ *" a operação de composição de funções. Tomando o conjunto* $G = \{f : S \to S : f \text{ é bijetiva}\}$*; temos que* G *é um grupo, chamado de* ***grupo das permutações*** *do conjunto* S*, se* $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$ *e denotaremos esse grupo por* S_n.

A bijeção $f \in S_n$*, pode ser definida por:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

O número de elementos de S_n *é* $n!$. *O grupo* S_n*, quando* $n \geq 3$ *não é abeliano.*

Considere os seguintes exemplos de permutações em S_4*:*

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que, a permutação e *é o elemento neutro de* S_4. *Além disso,* $f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2$.

De fato,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

enquanto que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Definição 12. *Seja* $(G, *)$ *um grupo e* H *um subconjunto não vazio de* G. *Dizemos que* H *é um* ***subgrupo*** *de* G $(H \leq G)$ *se* H *for um grupo com a mesma operação de* G *ou, equivalentemente, se para todo* $a, b \in H$ *temos que* $ab^{-1} \in H$.

Definição 13. *Dado um elemento* $x \in G$ *e* $H \leq G$*, os conjuntos*

$$Hx = \{hx | h \in H\} \quad e \quad xH = \{xh | h \in H\}$$

*são chamados **classe lateral** à direita e classe lateral à esquerda de H em G, respectivamente.*

Definição 14. *Dizemos que um subgrupo N de um grupo G é um **subgrupo normal** se, para todo $x \in G$, temos a igualdade $xN = Nx$, ou seja, as classe laterais á esquerda e a direita de N são igual para todo elemento $x \in G$. E denotamos que N é subgrupo normal de G, por $N \lhd G$.*

Temos que os subgrupos triviais $\{e\}$ e G, são subgrupos normais de G. Quando estes são os únicos subgrupos normais de G, dizemos que G é um grupo simples. Qualquer subgrupo H de G será normal em G, se este for abeliano (comutativo).

Definição 15. *Considerando G um grupo e H um subgrupo normal de G. O conjunto de todas as classes laterais $\dfrac{G}{H} = \{xH | x \in G\}$ munido da operação $(xH)(yH) = (xy)H$, é chamado de **grupo quociente**.*

Definimos a igualdade de classe fazendo $xH = yH$ se, e somente se, $x * y^{-1} \in H$. O elemento neutro de $\dfrac{G}{H}$ é a classe $eH = H$. Ao número de elementos de $\dfrac{G}{H}$ chamamos de índice de H em G e denotamos $[G : H]$.

Teorema 7. ***(Teorema de Lagrange)*** *Se G é um grupo finito e H é subgrupo de G, então $|H|$ é divisor de $|G|$, ou seja, a ordem de H divide a ordem de G. Além disso, temos*

$$|G| = [G : H]|H|$$

.

Definição 16. *Um grupo G é dito **solúvel** se existem subgrupos que obedecem as seguintes condições:*

(I) Tem-se uma série normal de G, em que cada G_{i-1} é normal a G_i, ou seja

$$\{e\} = id = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G$$

.

(II) O grupo quociente $\dfrac{G_i}{G_{n-1}}$ é abeliano, para todo $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 25. *Como todo subgrupo de um grupo abeliano é normal e grupo quociente também será abeliano, podemos concluir que todo grupo abeliano é solúvel.*

Exemplo 26. *Sobre os grupos de permutações S_n é conhecido que:*

- *S_2 é solúvel, pois é um grupo abeliano.*

- *S_3 é solúvel, pois consideramos o subgrupo normal $H = \{id, f_1, f_2\}$, onde*

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Assim obtemos uma subsérie normal $id \lhd H \lhd S_3$ que satisfaz $\dfrac{S_3}{H}$ abeliano.

- *S_4 é solúvel, pois também conseguimos uma subsérie normal $id \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd S_3$ com todos os grupos quocientes abelianos.*

- *Para $n \geq 5$, S_n não é um grupo solúvel.*

Outro conceito importante na Teoria de Grupos são aplicações entre grupos que preservam a estrutura algébrica.

Definição 17. *Considerando a função $f : G \to L$ entre dois grupos $(G, *)$ e $(L, \circ)$. Dizemos que f é um homomorfismo se para quaisquer que sejam $x, y \in G$, valer:*

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Quando essa representação for injetora chamaremos de monomorfismo. Quando essa representação for sobrejetora chamaremos de epimorfismo ou homomorfismo sobrejetivo. Quando essa representação for bijetora, teremos um **isomorfismo**, e denotamos por $G \simeq L$.

Um isomorfismo de um grupo nele mesmo é chamado de **automorfismo** e denotamos o conjunto de todos os automorfismos de G por $Aut\ G$. Sendo G um grupo, o conjunto $Aut\ G$ com a composição de funções, também é um grupo.

4.3 Teoria de corpos

Nesta seção faremos uma breve coletânea de resultados da teoria de corpos que serão utilizados na explicação do Teorema de Abel-Ruffini. Aqui a apresentação será superficial e sugerimos novamente Gonçalves (2013) e Domingues e Iezzi (2003) ao leitor que tenha o interesse de aprofundar os estudos.

Definição 18. *Seja K um conjunto com duas operações chamadas adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$. Dizemos que K é um **corpo**, se as operações satisfazerem as propriedades abaixo:*

1. ***Comutativa***

$$a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in K$$

2. ***Associativa***

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ e } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in K$$

3. ***A multiplicação é distributiva com relação à adição***

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. ***A adição possui elemento neutro***

$$a + 0 = a, \forall a \in K$$

5. ***A multiplicação possui elemento neutro***

$$a \cdot 1 = a, \forall a \in K$$

6. ***Todo elemento** a **de** K **possui um simétrico**, ou seja,*

$$\forall a \in K, \exists (-a) \in K \text{ tal que } a + (-a) = 0.$$

7. ***Todo elemento não nulo** b **de** K **possui um inverso**, ou seja,*

$$\forall b \in K, b \neq 0, \exists b^{-1} \in K \text{ tal que } b \cdot b^{-1} = 1.$$

Denotamos $a \cdot b$ por ab para simplificar a notação. Observamos que os elementos neutro da adição e da multiplicação, o simétrico e o inverso de uma elemento são únicos.

Quando as operações $(+)$ e $(\cdot)$ de K possuem todas as propriedades listadas acima exceto a propriedade dos inversos, dizemos que K é uma anel comutativo com unidade. Portanto, todo corpo é um anel.

Chamamos de domínio de integridade um anel A que possua a propriedade a seguir:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \;\text{ ou }\; b = 0, \forall a, b \in A$$

Portanto A é um domínio de integridade se, e somente se, fatores não nulos resultam num produto não nulo. Observe que todo corpo é um domínio de integridade.

Exemplo 27. *Considere os seguintes conjuntos numéricos munidos das operações usuais de adição e multiplicação.*

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *são corpos.*
- $\mathbb{Z}$ *é um domínio de integridade mas não é um corpo, pois os únicos inteiros que têm inverso são* 1 *e* -1.

Definição 19. *Um subconjunto K não vazio de um corpo L que com as operações $(+)$ e $(\cdot)$ de L, continua sendo um corpo, será chamado subcorpo de L. Equivalentemente, $K \neq \emptyset$ é subcorpo de L se*

- $\forall a, b \in K$ *temos que* $a - b \in K$
- $\forall a, b \in K, b \neq 0$ *temos que* $ab^{-1} \in K$

Também podemos fazer a definição de corpos via a definição de grupos. Dado um conjunto não vazio K e duas operações $(+), (\cdot) : K \times K \to K$ dizemos que o terno $(K, +, \cdot)$ é um corpo se, se somente se, $(K, +)$ e $(K * .\cdot)$ forem grupos abelianos e a operação $(\cdot)$ for distributiva em relação á operação $(+)$.

De forma análoga ao caso dos grupos, conceituaremos o homomorfismo de corpos. Pois precisaremos de aplicações entre corpos que preservam as propriedades de ambas as operações.

Definição 20. *Considerando K e F dois corpos, uma aplicação $f : K \to F$ é dito um homomorfismo de K em F se,*

$$f(x + y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in K$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y); \forall x, y \in K$$

Se f for um homomorfismo bijetivo, dizemos que f é um isomorfismo. Caso exista um isomorfismo de K em F, dizemos que K e F são isomorfos e denotamos por $K \cong F$. Teremos um automorfismo de K, se tivermos um isomorfismo $f : K \to K$.

Definição 21. *Seja F um corpo, dizemos que K é uma extensão de F, se F for um subcorpo de K e denotamos por $K \supset F$.*

Sendo K uma extensão de F, temos K como um espaço vetorial sobre F. Neste caso, os elementos de K são os vetores e os elementos de F os escalares. Assim podemos definir a base e a dimensão de uma extensão e denotamos por $[K : F] = dim_F K$. Quando a dimensão é finita, dizemos que K é uma extensão finita de F.

Exemplo 28. *A seguir temos dois exemplos de extensões finitas:*

1. *$\mathbb{C}$ é uma extensão de $\mathbb{R}$, de dimensão 2, o conjunto $\{1, i\}$ é base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Assim $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.*
2. *$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma extensão de $\mathbb{Q}$, temos que $\{1, \sqrt{2}\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$sobre $\mathbb{Q}$ logo a dimensão é 2. Então $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 2$*

Considerando uma extensão $K \supset F$ do corpo F, podemos criar corpos intermediários entre F e K.

Teorema 8. ***(Teorema da torre)*** *Se K é uma extensão finita do corpo L e L é uma extensão finita do corpo F, ou seja, $(K \supset L \supset F)$, então K é uma extensão finita de F e*

$$[K : F] = [K : L][L : F].$$

Demonstração: 7. *Ver referência Gonçalves (2013) e Domingues e Iezzi (2003).*

Seja $B \subset K$ um subconjunto qualquer de K, chamamos de adjunção $K_{(B)}$ o menor subcorpo de K contendo F. Quando B for um conjunto unitário, temos que a adjunção de único elemento.

Exemplo 29. *São exemplos de adjunções:*

1. *$\mathbb{Q}[2\sqrt{2}]$ é intermediário entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e o menor corpo de $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{Q}$ e $\sqrt{2}$.*

2. $\mathbb{R}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ *é uma extensão de corpo* $\mathbb{R}$ *dos reais, note que,* $\mathbb{R}[i] \cong \mathbb{C}$.

Seja $E \supset F$ uma extensão de corpos e $\alpha \in E$. Dizemos que α é algébrico sobre F se α for raiz de algum polinômio não nulo em $F[x]$. Se α não algébrico sobre F dizemos que α é transcendente sobre F.

Dizemos que $E \supset F$ é uma **extensão algébrica** se todos os elementos de E são algébricos sobre F. Caso contrário, dizemos que $E \supset F$ é uma **extensão transcendente** de F.

Tomando o corpo F. Definimos

$$F[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n; a_i \in F, n \in \mathbb{N}\}$$

ou seja, $F[x]$ é o conjunto de todos os polinômios na variável x, com coeficientes em F.

Considere $f(x) \in F[x]$ um polinômio não constante. Chamamos uma extensão K de F de **corpo de decomposição** (ou corpo de raízes) de $f(x)$ sobre F, se todas as raízes de $f(x)$ estão em K e todo subcorpo intermediário E tal que $F \subset E \subset K$ não satisfaz essa propriedade.

Dizemos que um polinômio $f(x) \in F[x]$ é irredutível se qualquer fatoração em dois polinômios só é possível se um dos fatores for um polinômio invertível. Quando um polinômio irredutível não tem raízes múltiplas em qualquer corpo de decomposição, dizemos que é uma polinômio separável.

4.4 Teorema de Abel-Ruffini

Seja $K \supset F$ uma extensão de corpos e considere $\varphi : K \to K$ um automorfismo do corpo K. Se a restrição de φ ao corpo F for a identidade, ou seja, $f(x) = x, \forall x \in F$, dizemos que φ é um F-automorfismo de K.

Exemplo 30. *Seja* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \supset \mathbb{Q}$ *e considere a função* $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *definida por* $\varphi(a + b\sqrt{2}) = (a - b\sqrt{2})$.

Temos que φ *é um automorfismo. De fato, para* $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$*, temos:*

- $\varphi((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})) = \varphi(a+b\sqrt{2})+\varphi(c+d\sqrt{2})$ *pois*

$$\begin{aligned}\varphi((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})) &= \varphi((a+c)+(b+d)\sqrt{2})\\ &= (a+c)-(b+d)\sqrt{2}\\ &= (a-b\sqrt{2})+(c-d\sqrt{2})\\ &= \varphi(a+b\sqrt{2})+\varphi(c+d\sqrt{2})\end{aligned}$$

- $\varphi((a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})) = \varphi(a+b\sqrt{2})\varphi(c+d\sqrt{2})$, *pois temos*

$$\begin{aligned}\varphi((a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})) &= \varphi((ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2})\\ &= (ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}\\ &= (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})\\ &= \varphi(a+b\sqrt{2})\varphi(c+d\sqrt{2})\end{aligned}$$

Observe que se $x \in \mathbb{Q}$, $\varphi(x) = \varphi(x+0\sqrt{2}) = x - 0\sqrt{2} = x$, ou seja, a restrição de φ ao corpo $\mathbb{Q}$ é a identidade. Portanto, φ é um $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Definição 22. *Chamamos de grupo de Galois de uma extensão E de F ao grupo de F-automorfismos de E, munido das operações de composição de funções e denotamos por $G(E,F)$.*

Chamados de grupo de Galois de um polinômio, o grupo de Galois de uma extensão L de F em que L é o corpo de decomposição de $p(x)$. Ou seja, tomando L o corpo de Galois de $p(x) \in F[x]$. O grupo de Galois de $p(x)$ sobre F é o grupo dos F-automorfismos de L.

No caso de $K \supset \mathbb{Q}$ ser uma extensão de $\mathbb{Q}$, K contendo todas as raízes de um polinômio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, um automorfismo $\varphi : K \to K$ que fixa $\mathbb{Q}$, ou seja um $\mathbb{Q}$-automorfismo, leva uma raiz r de f em outra raiz de f.

Segundo Becker (2014), como r é raiz de f, temos

$$a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n = 0$$

Aplicando φ em ambos os membros da igualdade, temos

$$\varphi(a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n) = \varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(a_0) + \varphi(a_1 r) + \cdots + \varphi(a_n r^n) = 0$$

Como φ é um $\mathbb{Q}$-automorfismo temos que:

$$a_0 + a_1\varphi(r) + \cdots + a_n\varphi(r)^n = 0$$

Portanto, $\varphi(r)$ é raiz de F.

O que nos diz que a restrição de φ ao conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ induz uma função deste conjunto sobre ele mesmo.

Temos ainda que a função é:

- injetiva: φ é automorfismo.
- sobrejetiva: o conjunto é finito.

Portanto, φ é uma bijeção do conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ sobre ele mesmo, ou então uma permutação do conjunto.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, as raízes distintas de um polinômio de grau N são no máximo n, vemos que a aplicação de φ apenas permuta as raízes de f.

Concluímos então, que seja K o corpo das raízes de um polinômio separável $f(x) \in F[x]$ que tem n raízes distintas, então $G(K; F)$ é isomorfo a um subgrupo de S_n.

Exemplo 31. *Calculemos o grupo de Galois de* $p(x) = x^3 - 2$

1. *As raízes de* $p(x)$ *são* $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}z, \sqrt[3]{2}z^2$, *sendo* z *e* z^2 *as raízes complexas.*
2. *O corpo de decomposição* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z, z^2) = \mathbb{Q}_{(\sqrt[3]{2}, z)}$
3. *O grupo de Galois de* $p(x)$ *é o grupo dos* $\mathbb{Q}$*-automorfismos de* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$
4. *Para encontrar* $G(p(x), \mathbb{Q})$, *temos que calcular todos os* $\mathbb{Q}$*-automorfismos de* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *em* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
5. *Depois devemos encontrar o prolongamento de cada automorfismo (Todos os* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$*-automorfismo de* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$ *em* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$*).*

Pois temos 2 extensões $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

Desenvolvendo,

1. $\mathbb{Q}$ *- automorfismo de* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *em* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$ *(*τ_i *por* $\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}z^i, i = 0, 1, 2$*). Então:* τ_0 *por* $\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}$ τ_1 *por* $\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}z$ τ_2 *por* $\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}z^2$

2. *Prologamentos de* $\phi_{i,j}$ *de* τ_i *(Todos os* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *- automorfismo de* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$*) em* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$

$$\phi_{i,j} : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),$$

sendo $z_j, j = 1, 2$, *tal que:* $\phi_{i,j}|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

$$\phi_{0,1} : \begin{cases} \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2} \\ z \mapsto z \end{cases}$$

$$\phi_{0,2} : \begin{cases} \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2} \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$$

$$\phi_{1,1} : \begin{cases} \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}z \\ z \mapsto z \end{cases}$$

$$\phi_{1,2} : \begin{cases} \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}z \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$$

$$\phi_{2,1} : \begin{cases} \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}z^2 \\ z \mapsto z \end{cases}$$

$$\phi_{2,2} : \begin{cases} \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}z^2 \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$$

3. *Resultou em* 6, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$*-automorfismo de* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$ *em* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, z)$.

O grupo de Galois $p(x)$ será:

$$G(x^3-2,\mathbb{Q}) = \{\phi_{0,1}, \phi_{0,2}, \phi_{1,1}, \phi_{1,2}, \phi_{2,1}, \phi_{2,2}\}$$

Explicaremos a seguir como se dá a associação de cada elemento do grupo de Galois as permutações.

Denotamos cada raiz de $p(x)$ por um números, ou seja: 1 - representa $\sqrt[3]{2}$; 2 - representa $\sqrt[3]{2}z$; 3 - representa $\sqrt[3]{2}z^2$;

Desenvolvendo, temos

- $\phi_{0,1}$

$$\phi_{0,1}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$$

$$\phi_{0,1}(\sqrt[3]{2}, z) = \phi_{0,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{0,1}(z) = \sqrt[3]{2}z$$

$$\phi_{0,1}(\sqrt[3]{2}, z^2) = \phi_{0,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{0,1}(z^2) = \phi_{0,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{0,1}(z) \cdot \phi_{0,1}(z) = \sqrt[3]{2}z^2$$

Então,

$$\phi_{o,1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- $\phi_{0,2}$

$$\phi_{0,2}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$$

$$\phi_{0,2}(\sqrt[3]{2}, z) = \phi_{0,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{0,2}(z) = \sqrt[3]{2}z^2$$

$$\phi_{0,2}(\sqrt[3]{2}, z^2) = \phi_{0,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{0,2}(z^2) = \sqrt[3]{2} \cdot z^4 = \sqrt[3]{2} \cdot z^3 \cdot z = \sqrt[3]{2} \cdot 1 \cdot z = \sqrt[3]{2} \cdot z$$

Então,

$$\phi_{o,2} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $\phi_{1,1}$

$$\phi_{1,1}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}z$$

$$\phi_{1,1}(\sqrt[3]{2}, z) = \phi_{1,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{1,1}(z) = \sqrt[3]{2}z^2$$

$$\phi_{1,1}(\sqrt[3]{2}, z^2) = \phi_{1,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{1,1}(z^2) = \phi_{1,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{1,1}(z) \cdot \phi_{1,1}(z) = \sqrt[3]{2}z \cdot z \cdot z = \sqrt[3]{2}$$

Então,

$$\phi_{1,1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\phi_{1,2}$

$$\phi_{1,2}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}z$$

$$\phi_{1,2}(\sqrt[3]{2}, z) = \phi_{1,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{1,2}(z) = \sqrt[3]{2}z \cdot z^2 = \sqrt[3]{2}z^3 = \sqrt[3]{2}$$

$$\phi_{1,2}(\sqrt[3]{2}, z^2) = \phi_{1,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{1,2}(z^2) = \phi_{1,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{1,2}(z) \cdot \phi_{1,2}(z) = \sqrt[3]{2}z \cdot z^2 \cdot z^2 = \sqrt[3]{2}z^2$$

Então,

$$\phi_{1,2} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- $\phi_{2,1}$

$$\phi_{2,1}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}z^2$$

$$\phi_{2,1}(\sqrt[3]{2}, z) = \phi_{2,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{2,1}(z) = \sqrt[3]{2}z^2 \cdot z$$

$$\phi_{2,1}(\sqrt[3]{2}, z^2) = \phi_{2,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{2,1}(z^2) = \phi_{2,1}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{2,1}(z) \cdot \phi_{2,1}(z) = \sqrt[3]{2}z^2 \cdot z \cdot z = \sqrt[3]{2}z$$

Então,

$$\phi_{1,1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $\phi_{2,2}$

$$\phi_{2,2}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}z^2$$

$$\phi_{2,2}(\sqrt[3]{2}, z) = \phi_{2,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{2,2}(z) = \sqrt[3]{2}z^2 \cdot z^2 = \sqrt[3]{2}z$$

$$\phi_{2,2}(\sqrt[3]{2}, z^2) = \phi_{2,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{2,2}(z^2) = \phi_{2,2}(\sqrt[3]{2}) \cdot \phi_{2,2}(z) \cdot \phi_{2,2}(z) = \sqrt[3]{2}z^2 \cdot z^2 \cdot z^2 = \sqrt[3]{2}$$

Então,

$$\phi_{1,1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Foi feito um isomorfismo entre o grupo de Galois $p(x) = x^3 - 2$ e grupo simétrico (ou grupo de permutações) S_3, ou seja $Gal(x^3 - 2, \mathbb{Q}) \cong S_3$.

Definição 23. *Uma extensão L de F é dita uma extensão por radicais se existir uma* *torre de corpos $F = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_r = L$ tal que se $\alpha \in E_i$ então existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m \in E_{i+1}$, para todo $0 \leq i < r$. Dizemos que um polinômio $p(x)$ é resolúvel por radicais se seu corpo de decomposição está contido numa extensão de radicais de $p(x)$.*

É devido a Galois um teorema que relaciona os corpos intermediários de uma extensão de corpos $L \supset F$ com subgrupos do grupo $G(L, F)$, conhecido como correspondência de Galois. Esta correspondência nem sempre é bijetora, ou seja, nem todo corpo intermediário da extensão pode ser relacionado com um subgrupo de $G(L, F)$. Quando L é o corpo de decomposição de um polinômio $p(x)$ cujas raízes são todas distintas, a correspondência será biunívoca. Com este resultado, Galois vincula a existência de uma extensão de corpos com elementos expressos por radicais à solubilidade de um grupo, o grupo de Galois $G(\mathbb{Q}; K)$. Pelo seu critério, um polinômio é solúvel por radicais se, e somente se, o seu grupo de Galois é solúvel.

No exemplo anterior fizemos um isomorfismo entre o grupo de Galois do polinômio $p(x) = x^3 - 2$ e grupo simétrico S_3. Também vimos anteriormente que S_3 é solúvel, logo o polinômio $p(x) = x^3 - 2$ é solúvel por radicais. Confirmando o que já sabíamos pela Fórmula de Cardano-Tartaglia (2.3). Como S_4 também é solúvel, temos a confirmação pelo critério de Galois que as equações polinomiais de grau quatro são solúveis por radicais, como nos mostrou o método de Ferrari. Quanto as equações polinomiais de grau maior ou igual a 5 temos o seguinte:

Teorema 9. *Teorema de Abel-Ruffini A equação geral de grau maior ou igual a cinco não pode ser resolvida em radicais.*

Para demostração deste teorema consideramos um polinômio de grau 5 que possui três raízes reais e duas raízes complexas não-reais, por exemplo $p(x) = x^5 - 4x + 2$. Em seguida consideramos L o corpo de decomposição deste polinômio e $G = G(p(x), L)$ o seu grupo de Galois. Como $p(x)$ possui todas as 5 raízes distintas, temos que G será isomorfo a algum subgrupo de S_5, pois agora faremos a identificação com permutações de cinco elementos.

Considerando α uma raiz complexa não-real de $p(x)$, como o polinômio é irredutível termos que o grau da extensão algébrica $\mathbb{Q}(\alpha)$ sobre $\mathbb{Q}$ será igual a 5. Como $L \supset \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$, pelo teorema da torre temos que 5 divide o grau da extensão $L \supset \mathbb{Q}$. A correspondência de Galois no permite concluir, a nível de grupos, que 5 didide a ordem do grupo de Galois G.

Os grupos de permutações S_n são gerados por um permutação de ordem n e uma permutação de ordem 2(tranposição). Como 5 divide a ordem o grupo de Galois G, já sabemos que existe um elemento de ordem 5 ao qual podemos associar uma permutação de ordem 5. Além disso, um $\mathbb{Q}$-automorfismo de L que leva uma raiz complexa à sua raiz conjugada e fixa as raízes reais possui ordem 2, o que nos permite associar uma tranposição. Deste modo podemos concluir que o grupo de Galois G do polinômio $p(x)$ será isomorfo à S_n.

Por fim, usamos o fato do grupo S_n não ser solúvel e o critério de Galois nos dirá que o polinômio $p(x)$ não é solúvel por radicais. Portanto, se existe um polinômio de grau 5 cujas raízes não podem ser encontradas apenas com as operações usuais, então não existirá uma fórmula geral para resolver qualquer equação de grau 5. Podemos construir exemplos similares para equações de grau maior que 5 e usar o fato de que S_n não é solúvel para todo $n \geq 5$, para concluir que o polinômio não é solúvel por radicais.

Considerações finais

.

A aprendizagem da linguagem algébrica de início costuma ser bastante difícil e até traumática, pois o contato inicial com a álgebra é uma ruptura com a matemática "concreta"da aritmética, para uma entrada na matemática "abstrata"da álgebra.

Alguns professores tem dificuldade para visualizar esse momento delicado de transição e do amadurecimento necessário que os alunos devem ter para compreender a álgebra.

O estudo das equações algébrica, por meio da história da matemática, promove entre professores em formação uma melhor compreensão sobre como se deu o surgimento das fórmulas por radicais para resolução das equações algébricas, bem como o porque da inexistência de fórmulas para resolver equações de grau n, $n > 4$, pois evidência o caráter humano da matemática.

Procuramos expor em linguagens simples a maneira de resolver equações de grau menor ou igual a quatro. Apesar de termos abordado superficialmente o relato da resolução da equação de grau maior ou igual a cinco, temos esperança de que nosso enfoque irá despertar a curiosidade do leitor interessado, incentivando-o a um aprofundamento do tema.

Referências Bibliográficas

Amaral, J. T. (1988). Método de Viète para resolução de equações do 2^o grau. *Revista do Professor de Matemática. SBM*, 13:18–20.

Becker, J. M. (2014). Polinômios, equações algébricas e suas resoluções. Dissertação de Mestrado, UFMS, Três Lagoas-MS.

Berlinghoff, W. P. e Gouvêa, F. Q. (2008). *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.* Edgar Blücher, São Paulo. Traduzido Elza Gomide e Helena Castro.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* Universidade de São Paulo, São Paulo.

Domingues, H. H. e Iezzi, G. (2003). *Álgebra Moderna.* Editora Atual, São Paulo.

Estrada, M. F., Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M., e Costa, M. J. (2000). *História da Matemática.* Universidade Aberta, Lisboa.

Garbi, G. G. (2009). *O romance das equações algébricas.* Editora Livraria da Física, São Paulo.

Gonçalves, A. (2013). Introdução à álgebra. In *Projeto Euclides.* IMPA, Rio de Janeiro.

Hefez, A. e Villela, M. L. T. (2018). *Polinômios e Equações Algébricas.* SBM, Rio de Janeiro.

Lima, E. L. (1987). A equação do terceiro grau. *Matemática Universitária*, 5:9–23.

Lima, E. L. (1988). A equação do segundo grau. *Revista do Professor de Matemática. SBM*, 13:21–33.

Loh, P.-S. (2019). A simple proof of the quadratic formula. *arXiv preprint, arXiv:1910.06709.*

Milies, C. P. (1994). A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. *Revista do Professor de Matemática. SBM*, 25:15–22.

Peruzzo, J. (2013). *Evolução dos Métodos de Resolução de Equações Algébricas*. Ed. do Autor, Irani-SC.

Roque, T. e Carvalho, J. B. P. (2012). *Tópicos de história da matemática*. SBM, Rio de Janeiro.