



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Isaiás Pedro Alexandrino

A MATEMÁTICA NATURAL

RECIFE
2020



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Isaías Pedro Alexandrino

A MATEMÁTICA NATURAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

382m

ALEXANDRINO, ISAÍAS PEDRO
A MATEMÁTICA NATURAL / ISAÍAS PEDRO ALEXANDRINO. - 2020.
72 f. : il.

Orientador: RODRIGO GENUINO CLEMENTE.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Harmonia. 2. Fibonacci. 3. Proporção. 4. Razão de ouro. I. CLEMENTE, RODRIGO GENUINO, orient. II. Título

CDD 510

Isaías Pedro Alexandrino

A MATEMÁTICA NATURAL

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 24/01/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Genuíno Clemente (Orientador) – PROFMAT/UFRPE

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque – UFPB

Profa. Dra. Maria Ângela Caldas Didier – PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho à minha esposa, Raquel Mariã, e à minha filha, Deborah Jaelli.

Agradecimentos

Ao meu Deus, Senhor da vida e autor da criação.

À minha família, em geral, pelo apoio e força dispensada.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Clemente, pela insólita e impecável orientação.

Aos meus amigos, que, de alguma forma, torceram por essa conquista.

“O mundo me intriga, e não consigo imaginar que esse relógio exista e não haja relojoeiro”
(Voltaire)

DECLARAÇÃO

Eu, ISAÍAS PEDRO ALEXANDRINO, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título “A MATEMÁTICA NATURAL”, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador RODRIGO GENUINO CLEMENTE, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 10 de julho de 2020.

Isaías Pedro Alexandrino

Resumo

A presença de uma harmonia matemática na natureza tem sido observada por inúmeros ícones da humanidade, desde os pitagóricos, muito antes da era cristã. Sob o orvalho da antiguidade clássica e da renascença, ou à sombra de celebridades como Da Vinci, Durer, Polycletus e Myron, suas marcas foram promovidas ao estilo da arte, ciência, arquitetura, etc. Simultaneamente, nada tem impedido que as simetrias das folhas, os ritmos do coração e a sequência de Fibonacci sejam presenciadas em todo tempo e ao redor de todos. Números, razão e proporção embelezam o universo em um tom de sabedoria inexplicável. Neste trabalho, será analisado o que já se descobriu no citado terreno e ao sabor da matemática; tratando a natureza como uma grande aliada da metodologia do ensino e uma indispensável ferramenta na potencialização do aprendizado.

Palavras-chave: Fibonacci, Harmonia, Matemática, Natureza, Números, Proporção e Razão de Ouro.

Abstract

The presence of a mathematical harmony in nature has been observed by Pythagoreans and many other icons of mankind, long before the Christian era. Under the dew of classical antiquity and the renaissance, or in the shadow of celebrities as Da Vinci, Durer, Polycletus and Myron, their brands were promoted in the style of art, science, architecture, etc. At the same time, nothing has prevented the symmetries of leaves, heart rhythms and Fibonacci sequence are present throughout time and around everyone. Numbers, reason, and proportion beautify the universe in a tone of inexplicable wisdom. In this work, we will analyze what has already been discovered in terrain and the taste of mathematics; treating nature as a great ally of teaching methodology and an indispensable tool in enhancing the learning.

Keywords: Fibonacci, Harmony, Math, Nature, Numbers, Proportion and Golden ratio.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pirâmide de Cheops – Fonte: Produzido pelo autor	20
Figura 2 – Retângulo de ouro – Fonte: Produzido pelo autor	21
Figura 3 – Triângulo isósceles de ouro – Fonte: Produzido pelo autor	22
Figura 4 – Triângulo retângulo de ouro – Fonte: Produzido pelo autor	22
Figura 5 – Pentágono de ouro - Fonte (1, p.28)	23
Figura 6 – Euclides - Fonte: Google imagens	24
Figura 7 – Razão Dourada no retângulo - Fonte (1, p.03)	24
Figura 8 – Razão Dourada na linha - Fonte: Produzido pelo autor	24
Figura 9 – Partenon e Phidias - Fonte: Google imagens	25
Figura 10 – Leonardo de Pisa - Fonte: Google imagens	27
Figura 11 – Problema dos coelhos - Fonte: Google imagens	28
Figura 12 – Escala musical - Fonte: Google imagens	33
Figura 13 – Jonhannes Kepler (1571-1630)	34
Figura 14 – 1ª Lei de Kepler - Fonte (3, p.373)	34
Figura 15 – 2ª Lei de Kepler - Fonte (3, p.373)	35
Figura 16 – 3ª Lei de Kepler - Fonte (3, p.373)	35
Figura 17 – Espiral de Fibonacci - Fonte (1, p.96)	36
Figura 18 – Galáxia - Fonte: Google imagens	36
Figura 19 – Conchas - Fonte: Google imagens	37
Figura 20 – Beleza helicoidal - Fonte (1, p.28)	37
Figura 21 – Distribuição filotóxica (a) - Fonte: Produzido pelo autor	38
Figura 22 – Distribuição filotóxica (b) - Fonte: Google imagens	38
Figura 23 – Disposição filotóxicas - Fonte: Produzido pelo autor	38
Figura 24 – 8 espiras à esquerda e 13 a direita - Fonte: Google imagens	39
Figura 25 – 13 espiras à esquerda e 8 a direita - Fonte: Google imagens	39
Figura 26 – 55 espiras à esquerda e 34 a direita - Fonte: Google imagens	39
Figura 27 – Componentes de uma colmeia - Fonte: Google imagens	40
Figura 28 – Árvore genealógica do drone - Fonte: Produzido pelo autor	41
Figura 29 – O homem vitruviano, 1940, Da Vinci - Fonte (1, p.28)	42
Figura 30 – Adão e Eva, 1504, Durer - Fonte: Google imagens	42
Figura 31 – A estátua de Doryphorus, séc. V a.C., Polycletus - Fonte (1, p.40)	43
Figura 32 – Discobolus, séc. V a.C., Myron - Fonte: Google imagens	43
Figura 33 – Hermes e o Infante, séc. IV a.C., Praxiteles - Fonte: Google imagens	44
Figura 34 – Vênus de Milo, séc. II a.C., Alexandro de Antioquia - Fonte (1, p.41)	44
Figura 35 – O homem sob medida - Fonte (1, p.56)	45
Figura 36 – Hermann Weil - Alemanha, séc. XX - Fonte: Google imagens	47

Figura 37 – Simetria bilateral do espelho - Fonte (1, p.100)	48
Figura 38 – Simetria no reino animal (1, p. 677)	48
Figura 39 – Museu Osteotécnico de Dois Irmãos (Exposição 3-9)	48
Figura 40 – Simetria pentagonal - Fonte (1, p.678)	49
Figura 41 – Simetria nas flores - Fonte: Google imagens	49
Figura 42 – Floco de neve - Fonte: Google imagens	50
Figura 43 – Johannes Kepler, Robert Hooke, Mikhail Lomonosov - Fonte: Google imagens	50
Figura 44 – Cristais espaciais do NaCl e CaO - Fonte (1, p.102)	50
Figura 45 – Sistema planetário - Fonte (3, p.373)	51
Figura 46 – Massas e períodos planetários - Fonte: Produzido pelo autor	51
Figura 47 – Frequência cardíaca nos animais - Fonte: Produzido pelo autor	52
Figura 48 – Diástole e sístole - Fonte: Google imagens	53
Figura 49 – Batimento cardíaco - Fonte (1, p.127)	54
Figura 50 – Leonardo Fibonacci - Fonte: Google imagens	55
Figura 51 – Números de Fibonacci - Fonte: Produzido pelo autor	56
Figura 52 – Distribuição angular das folhas - Fonte: Produzido pelo autor	62

Sumário

	Introdução	15
1	PILARES DA MATEMÁTICA NATURAL	19
1.1	A razão de ouro, uma pérola na história	19
1.1.1	Identificação primitiva da razão de ouro	20
1.1.2	Pitágoras e a razão de ouro	21
1.1.3	Euclides e a Razão de Ouro	23
1.1.4	Representação da razão de ouro	25
1.1.5	Nomes dados à razão de ouro	25
1.2	Fibonacci, o precursor da matemática ocidental	26
1.2.1	Fibonacci e sua história	26
1.2.2	Fibonacci e os coelhos	28
1.2.3	Fibonacci e a razão de ouro	29
2	CONSTANTES E SEQUÊNCIAS NA NATUREZA	33
2.1	A matemática no céu e no mar	33
2.1.1	As Leis de Kepler	34
2.1.2	Fibonacci no Universo	35
2.2	A matemática nos vegetais	37
2.2.1	A beleza dos números nas folhas	37
2.2.2	A beleza dos números nas embalagens	39
2.3	A matemática nas abelhas	40
2.3.1	Componentes de uma colmeia	40
2.3.2	A árvore genealógica do drone	40
2.4	A razão de ouro no homem	41
2.4.1	Da Vinci, Durer e a razão de ouro	42
2.4.2	Polycletus, Myron, Praxiteles e a razão de ouro	42
2.4.3	Vênus de Milo	44
2.4.4	Identificando a presença do número ϕ	45
3	SIMETRIAS E RITMOS NA NATUREZA	47
3.1	Simetria bilateral	48
3.2	Simetria pentagonal	49
3.3	Simetria dos cristais	50
3.4	O ritmo nos corpos celestes	51
3.5	O ritmo no mundo zoológico	52

3.6	O ritmo humano	52
4	A MATEMÁTICA NATURAL E A SALA DE AULA	55
4.1	Fibonacci em sala de aula	55
4.2	Razão de ouro em sala de aula	56
4.3	O ritmo do coração	58
4.4	Simetrias em sala de aula e afins	59
4.4.1	Observação de simetria	59
4.4.2	Construção de simetria bilateral	60
4.5	Filotaxia em sala de aula	61
	Conclusão	63
	REFERÊNCIAS	65

Introdução

Por mais que se tenha escrito acerca da matemática natural ou harmonia numérica da natureza, há sempre muito a se discorrer, principalmente sobre a sua importância no ensino da matemática. Dois grandes argumentos poderiam, suficientemente, explicar a referida importância do estudo desse tema: em primeiro lugar, a sua onipresença, pois a beleza, metrificacão e estética apresentadas nos elementos da natureza estão por toda parte; e em segundo lugar, a riqueza que a natureza pode trazer ao estudo em sala de aula e seus afins, e em condições extremamente otimizadas. Não é necessário pagar-se R\$ 160,00 (Cem Reais) a um bom alfaiate, para que faça uma obra costurada de qualidade, onde se perceba uma bela simetria. Isso se encontra na maioria das flores, ao redor dos edifícios e das casas, por mais simples que sejam. Não é preciso gastar-se uma fortuna e levar os alunos a um bom conservatório de música, para que eles aprendam o que é ritmo. Dentro deles existe uma máquina que trabalha em ritmo que pode ser sentido ao simples toque, e quantificado. Tudo isso enobrece e embeleza a didática, com um grande diferencial e ao alcance de todos.

A percepção da chamada harmonia natural, pode ser promovida pela observação simples e popular ou pelo crivo da observação científica e filosófica. Esse tema permeia centenas e centenas de milhares de enciclopédias, livros, revistas e afins. Para homens como Platão (séc IV a.C.), essa harmonia matemática no universo é tão lúcida, quanto o sol ao meio dia. Entre os gregos, a beleza harmônica não consistia, meramente, na semelhança dos corpos, dos elementos, das grandezas, mas, até mesmo nas diferenças que, segundo eles, eram fascinantes.

Aristóteles (384 a.C – 322 a.C) afirmava: “A natureza aponta para os contrastes. A partir deles, em vez de semelhanças, ela produz consonância. A primeira combinação pública não é estabelecida por semelhanças, mas subsiste em uma conexão de fatores distintos e até opostos: um macho com uma fêmea, a beleza do contraste.” Discípulo de Platão, ele defendia que, “na arte, o pintor imita a natureza, fazendo as imagens em conformidade com os originais, misturando tintas brancas com pretas, e amarelas com vermelhas. Nada diferente se dá na música, onde se cria uma harmonia única, misturando frequências altas com baixas, e agudos longos com curtos... vozes diferentes, em canto congregacional; e, por sua vez, na gramática, área onde se cria toda a arte da pronúncia e dos sons, a partir da mistura de vogais e consoantes” (1, p. 39).

Entretanto, não é justo tecer-se uma apreciação da visão harmônica da natureza, sem se voltar mais no tempo, e se deparar com o séc VI a.C., a era de Pitágoras que, até onde se sabe, no campo da filosofia e do saber, foi o responsável pela ideia da organização harmoniosa do universo, e mentor da doutrina da essência criativa do número (1, p. XXVI).

Segundo Pitágoras:

a) a harmonia é o princípio de toda conexão, sem a qual, o cosmos não existiria

b) os números ocupam o primeiro lugar em toda a natureza

c) os números são o começo e o fim de todas as coisas; e estas são, apenas, a sua expressão

d) a Terra provém do cubo; o Fogo, do tetraedro; o Ar, do octaedro e a Água, do Icosaedro e, dessa forma, o éter (esfera do universo), provém do dodecaedro (1, p. XXVII).

Bem além do simples fato de se perceber a harmonia do mundo e elaborar uma doutrina, como fizeram os muitos ícones citados, a humanidade foi presenteada com mentes brilhantes e destacáveis que, observando a beleza das proporções na natureza, incutiram-na na arte, como imitação da vida. Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), na inspiração renascentista do séc XV, implantou, na arte, razões e proporções presentes nos seres vivos e, principalmente, no homem. Comprimento de braço, antebraço, dedos, pernas; largura de ombro, cintura, etc., tudo encerrando um arsenal de proporções douradas (1, p. 54). Por sua vez, o arquiteto e pintor suíço, Charles Edouards (1887 – 1965), mais conhecido como Le Corbusier, referência máxima da arte moderna do séc XX, imprimiu, nas suas obras referenciais, a beleza das proporções matemáticas que deslumbrava na natureza. Corbusier criou, em plena segunda guerra mundial, a sua obra de notoriedade máxima, O Modulor, um engenhoso sistema de relações proporcionais, onde, endossando Da Vinci, consagrou as proporções matemáticas no homem, e as colocou como condições sine qua non para a maximização da estética e beleza arquitetônica (1, p. 54). Segundo o físico alemão, Albert Eistein (1879 – 1955), O Modulor não é uma teoria, mas um guia prático para o emprego das proporções humanas tanto na arquitetura quanto em qualquer outra atividade, pois a razão de ouro, nele enaltecida, é sempre bem vinda ao inteligente universo da arte (1, p. 54).

Neste trabalho, será analisada uma boa parte do que, cientificamente, já foi observado ao longo dos séculos e que se encontra em obras como Seres Vivos, de Ayrton César; Diagnóstico Clínico Veterinário, de W.L.Kelly e, principalmente, The Mathematics of harmony, de Alexey Stakhov, onde poder-se-ão encontrar subsídios bem mais exaustivos. Essa análise, por sua vez, contemplará o que mais diretamente se encaixa nas nuances da matemática, fortalecendo a essência do seu conteúdo, do 6º ao 9º anos, através de uma relação numérica com a natureza. Nessa plataforma, serão sugeridos mecanismos pelos quais as muitas realidades discutidas sejam, efetivamente, vivenciadas em salas de aula, possibilitando três importantes indicadores:

A) Ideias fundamentais: A matemática compreende diversos campos e apresenta um conjunto de ideias fundamentais que produzem uma sólida articulação entre eles. São elas: equivalência, representação, proporcionalidade, aproximação, entre outras, devidamente reconhecidas pelos PCNs (BNCC p. 270). Essas grandezas serão vivenciadas, tomando-se, como objetos de observação, elementos da dinâmica celeste, figuras do mar, folhas de árvores e etc.

B) Unidades temáticas: Os campos de estudo compreendidos pela disciplina em apreço e reconhecidos como unidades temáticas como: número, álgebra, geometria, estatística, grandezas e medidas, etc. são territórios férteis onde se pode potencializar a capacidade intelectual do aluno

de matemática (BNCC p. 270). Através de elementos naturais, essas unidades serão trabalhadas; principalmente o número, como poderosa ferramenta para desenvolver, no aluno, o pensamento quantitativo sobre os atributos dos objetos e, no mesmo terreno, capacitá-lo a interpretar e julgar argumentos afins. Nesse aspecto, devem ser utilizados registros, significados e operações, cujos cálculos podem ser efetuados mentalmente, por algoritmos ou uso de calculadoras. (BNCC p. 270). Semelhantemente, serão trabalhados diversos aspectos de geometria, nos seus conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico em diversas áreas, envolvendo formas e relações entre elementos de figuras geométricas, sobretudo as simetrias, como determina a Base Nacional (BNCC p. 270).

C) Interdisciplinaridade: Os Parâmetros Curriculares Nacionais, especialmente na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, apresentam a interdisciplinaridade como elemento essencial para a abordagem por competências. [PCN / CNM& T-2002]. Respaldados na LDB/96, nas recomendações do parecer CEB/CNE/15/98 e nos EF/CN-1998, os seus textos recomendam a integração entre as muitas disciplinas, de modo que o conhecimento oferecido por cada uma delas seja vinculado à realidade social; não descaracterizando as linguagens, ciências e humanidades enquanto disciplinas, mas levando-as a constituir, a um só tempo, uma cultura geral como instrumento para a vida; tendo-se a “interdisciplinaridade como uma perspectiva que se coloca no âmbito de um determinado processo, procurando o equilíbrio entre a análise fragmentada e a síntese simplificadora, entre a especialização e o saber geral” (2).

1 Pilares da matemática natural

Foram muitas as apreciações feitas, ao longo dos séculos, sobre a presença da matemática na natureza. Desde os matemáticos pós-modernos até a antiguidade pitagórica; de Pitágoras, aos egípcios, babilônios e hindus, de quem muito aprendeu. É inegável, entretanto, que há uma chave dupla, um dipolo dourado, um sagrado par de pilares, sem os quais, toda relação matemática-natureza se esboroa e esvai: a *Razão de ouro*, com as suas inúmeras outras nomenclaturas e a *sequência de Fibonacci*, o precursor da matemática moderno-ocidental.

O célebre matemático russo, Nikolay Lobachevsky (1792-1856), acertadamente comentou em uma das suas obras: “os matemáticos voltaram toda a sua atenção para as partes avançadas de análise, e negligenciaram as origens da matemática. Isso criou uma lacuna entre a Matemática Elementar e a Matemática Avançada”. Para ele, o que preenche essa lacuna, é a chamada Matemática da Harmonia (1, p.10), desenvolvida pelo ucraniano Alexey Stakhov, e que subsiste nos dois pilares da Matemática Natural: A Razão de Ouro e a Sequência de Fibonacci.

1.1 A razão de ouro, uma pérola na história

É bem verdade que, após a morte do notável astrônomo e matemático alemão, Johannes Kepler (1571 - 1630), a “Razão de Ouro”, utilizada e apreciada por tantos ícones da matemática e das artes, e assim chamada por Leonardo da Vinci (1452 - 1519), foi obliterada pela maioria dos expoentes da matemática moderna e da física teórica; repetindo-se, assim, o fenômeno ocorrido ao longo da Idade Média, quando suplantou-se toda a ideia numérica da “harmonia cósmica”, marca registrada da antiga matemática desenvolvida por Pitágoras (570a.C. - 495 a.C.) e Platão (428 a.C. - 348 a.C.) e engenhosamente sistematizada por Euclides de Alexandria (séc III a.C.). Um forte motivo pelo qual a “Razão de Ouro”, os “Sólidos de Platão” e seus afins perderam força na esfera científico-matemática, foi a sua utilização na astrologia e demais ciências esotéricas.

Entretanto, a intenção de se condenar ao lixo científico, temas desse porte, por terem sido utilizados indevidamente em outras esferas, não sobreviveu mais que 200 anos, sucumbindo ante a avalanche de sérias descobertas correlacionadas às citadas grandezas. No séc XIX, Os matemáticos franceses Édouard Lucas (1842-1891) e Phlippe Binet (1786-1856) foram protagonistas de um verdadeiro renascimento nesse campo. O primeiro introduziu, na matemática, os chamados “Números de Fibonacci” e o último estabeleceu a relação entre estes e a “Média de Ouro”. Mas o séc XX traria mais! Em 1963, foi criada nos EUA a Associação Fibonacci que, por sua vez, passou a publicar os livros especiais de Vorobyov, Hoggatt, Vaida, Dunlap e outros. Com essas obras, apareceram, na Matemática Contemporânea, a Teoria dos Números de Fibonacci e a obra rara “Uma História Matemática do Número Dourado”, escrita pelo proeminente matemático canadense Roger Herz-Fishler.

Avançando no achado das espirais de Fibonacci nos objetos de filotaxia, o arquiteto ucraniano Oleg Bodnar, demonstrou, por profundas pesquisas, que a geometria dos objetos de filotaxia mantém uma estreita relação com a média de ouro, sendo baseada em uma classe especial de funções - as funções hiperbólicas “douradas”. Em 1984, finalmente, o russo Eduardo Soroko formulou a “Lei da harmonia estrutural dos sistemas”, provando que todos os sistemas auto-organizados baseiam-se nas *proporções p generalizadas de ouro*.

1.1.1 Identificação primitiva da razão de ouro

A chamada Razão de Ouro (com as suas tantas outras nomenclaturas, como veremos) é uma constante irracional, representada – normalmente – pela letra grega ϕ , e que funciona como um fator extremamente perceptível na natureza, em incontáveis obras de arte, artefatos comuns e objetos de popular utilidade, como livros, agendas, cartão de crédito, etc.

$$\phi = 1,618033988749894\dots$$

o que a partir de então será convencionado como $\phi \approx 1,618$.

Talvez, por ser tão comum na natureza, essa razão é encontrada já nas construções de pirâmides do Egito. Em 1840, o pesquisador inglês, Howard Vyse (1784 - 1863) mediu o ângulo de inclinação entre as faces da famosa pirâmide de Quéops, encontrando $\alpha = 51^\circ 50'$ (veja Figura 1), cuja secante é ϕ .

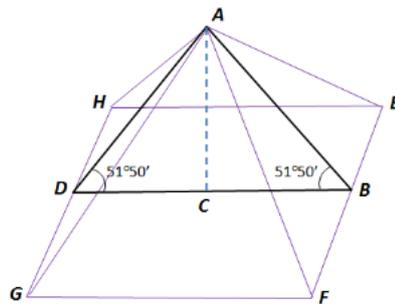


Figura 1 – Pirâmide de Cheops – Fonte: Produzido pelo autor

Sendo $L = 233,14\text{m}$, a medida da aresta da base, tem-se:

$$L = DB = 233,14\text{m}.$$

Por uma simples relação trigonométrica, a medida do segmento original AB é dado por

$$\begin{aligned} AB &= \frac{CB}{\cos \alpha} = \frac{DB}{(2 \times 0,618)} \\ &= \frac{233,14}{1,236} = 188,624. \end{aligned}$$

Surpreendentemente, a razão entre AB e CB (lados maior e menor do triângulo, respectivamente) é $\phi \approx 1,618$. De posse dessa façanha matemática, pode-se calcular a razão entre a

área lateral e da base da referida pirâmide, e encontrar

$$\frac{A_L}{A_B} = 4 \times L \times \frac{AB}{2L^2} = \frac{2 \cdot AB}{L} = \frac{2 \times 188,624}{233,14} = \phi \approx 1,618.$$

1.1.2 Pitágoras e a razão de ouro

Pitágoras (569 a.C. - 500 a.C.) é, sem dúvidas, uma das maiores celebridades da história da ciência. Matemático, filósofo, cientista, religioso e ético, reformador, influente político e “semideus” para muitos, personifica a sabedoria antiga. O séc V a.C. registrou a existência de moedas com sua imagem e, até onde se sabe, Pitágoras foi o primeiro filósofo grego a ter um livro especial dedicado a ele.

De acordo com fontes lendárias, mesmo havendo nascido na ilha de Samus - Ásia Menor - Pitágoras, viveu por 22 anos no Egito, absorvendo toda a sua ciência através dos seus sacerdotes, depois do que, viveu por 12 anos em Babilônia, de onde captou muita sabedoria que seria acrescentada ao que aprenderia, também, na Índia. Por volta de 530 a.C., Pitágoras estabeleceu a sua escola em Crotona, costa sudeste da Grécia – hoje Itália. Tendo sido influenciado pelo saber egípcio-babilônico-hindu, Pitágoras esposava uma doutrina concentrada na harmonia, geometria, teoria dos números, astronomia e outros tópicos. A grande ênfase dos pitagóricos, entretanto, era a “Teoria da Harmonia”, cuja essência era “os números determinam tudo”.

Várias espécies geométricas são atribuída aos pitagóricos: a soma dos ângulos internos de um triângulo, o problema da segmentação do plano em polígonos regulares, etc. Acredita-se que foi Pitágoras que descobriu os cinco poliedros regulares espaciais. Dessa forma, diversas concepções podem ter surgido sob a influência dos pitagóricos:

A - O retângulo de ouro

É um retângulo especial, cuja razão entre a medida da Base e a da Altura vale $\phi \approx 1,618$.

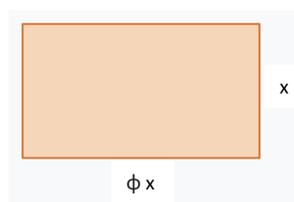


Figura 2 – Retângulo de ouro – Fonte: Produzido pelo autor

B - O triângulo isósceles de ouro

É um triângulo isósceles especial, em que a razão entre a medida de um dos lados e a medida da base vale $\phi \approx 1,618$. Dessa forma, o ângulo da base será 72° , pois, tomando-se $\frac{x}{2}$ como cateto adjacente e ϕx como hipotenusa, obtém-se um arco cosseno de 0,309.

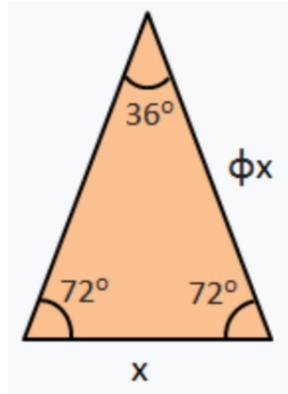


Figura 3 – Triângulo isósceles de ouro – Fonte: Produzido pelo autor

C - O triângulo retângulo de ouro

É o triângulo retângulo especial, em que a razão entre a hipotenusa e o menor cateto vale $\phi \approx 1,618$.

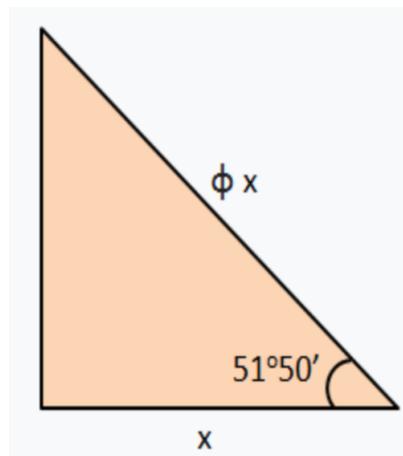


Figura 4 – Triângulo retângulo de ouro – Fonte: Produzido pelo autor

D - O pentágono de ouro

É qualquer pentágono regular, pois possui uma infinidade de razões de ouro em seu contexto.

Sendo 108° ($3 \times 36^\circ$) a medida de cada ângulo interno de pentágono regular, percebe-se a presença de 20 triângulos 72° , 72° e 36° . Logo, triângulos isósceles de ouro, como já

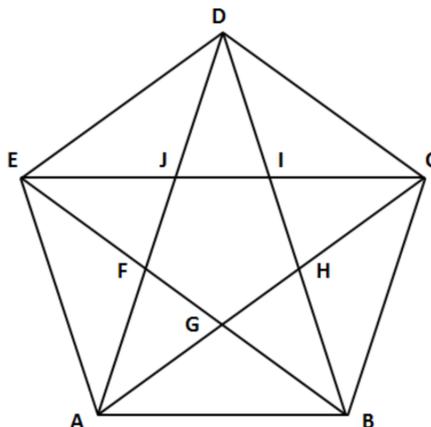


Figura 5 – Pentágono de ouro - Fonte (1, p.28)

demonstrado, apresentam uma razão $\phi \approx 1,618$. Logo

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AC}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{DA}{DC} = \frac{CE}{CB} = \phi \approx 1,618$$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{EA}{EJ} = \frac{DE}{DI} = \frac{CD}{CH} = \frac{BC}{BG} = \phi \approx 1,618$$

$$\frac{AF}{FG} = \frac{EJ}{JF} = \frac{DI}{IJ} = \frac{CH}{HI} = \frac{BG}{GH} = \phi \approx 1,618$$

Observação 1.1. As diagonais de um pentágono regular [por exemplo: ABCDE], determinam outro pentágono regular (por exemplo: FGHIJ) e assim, infinitamente.

1.1.3 Euclides e a Razão de Ouro

Euclides de Alexandria (séc III a.C.) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Natural de Alexandria, principal cidade do Egito, era aluno de Arquimedes e discípulo indireto de Pitágoras e Platão, de quem sistematizou, de maneira engenhosa, todas as principais ideias, na sua obra de 13 volumes, Os Elementos. Essa obra-prima de Euclides é o trabalho matemático mais conhecido de toda a Ciência Antiga, e aborda as principais teorias da matemática de então: Geometria Elementar, Teoria dos Números, Álgebra, Teoria das Proporções e Métodos de Cálculos de Áreas e Volumes, etc.

Com Os Elementos, Euclides sintetizou 300 anos passados de sabedoria matemática e ofereceu bases sólidas para dois milênios por vir. É Euclides que, em Os Elementos (livro II), sistematiza a identificação real da Razão de Ouro, por ele chamada de DEMR (Divisão em Razão Média Extrema), levantando o seguinte problema:

Dividir uma linha AB em dois segmentos, um maior AC e um menor CB; de forma que a área do quadrado de lado AC, seja igual à área do retângulo de lados AB e CB.



Figura 6 – Euclides - Fonte: Google imagens

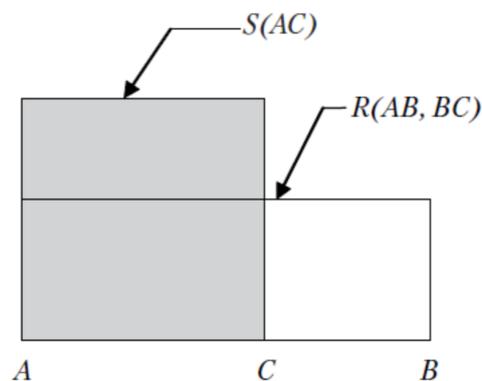


Figura 7 – Razão Dourada no retângulo - Fonte (1, p.03)

A formulação euclidiana é análoga à proposta de se dividir uma linha AB , no ponto C , em dois segmentos, um maior AC e um menor CB ; de forma que a relação entre a linha AB e o maior segmento AC seja igual à relação entre o maior segmento AC e o menor segmento CB .



Figura 8 – Razão Dourada na linha - Fonte: Produzido pelo autor

Seja x a medida de AC e y a medida de CB , vem

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Considerando que $\phi = \frac{x}{y}$ e isolando-se x , vem

$$\frac{\phi y + y}{\phi y} = \frac{\phi y}{y}$$

ou ainda,

$$\frac{\phi + 1}{\phi} = \phi.$$

Temos então a Equação de 2º grau,

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

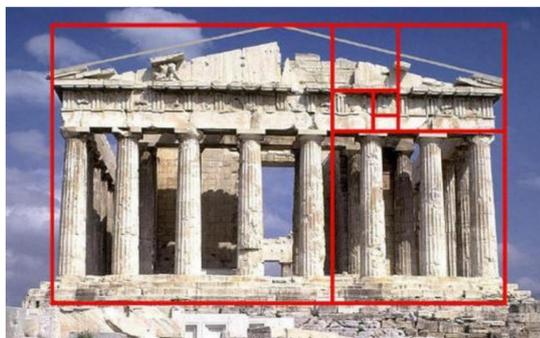
Por Báskara, ter-se-á o valor positivo,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

1.1.4 Representação da razão de ouro

A representação mais usual para a constante Razão de Ouro é a letra grega ϕ (phi), em homenagem ao célebre escultor grego, Phidias (480 a.C. - 430 a.C.) que usava a constante 1,618 em todas as suas famosas obras e que, juntamente com Polycleto, foram considerados os dois mestres mais autorizados da antiguidade, no tocante à clássica escultura grega. As suas principais artes escultóricas foram:

- (a) a estátua de bronze Atena, em comemoração da vitória sobre os Persas;
- (b) a estátua de ouro e marfim, Athena Parthenos para o Partenon;
- (c) e Zeus para o templo olímpico de Zeus, considerado uma das “Sete Maravilhas do mundo antigo”.



*O Partenon, templo à deusa Atena,
na Grécia Antiga. Séc V a.C.*



Figura 9 – Partenon e Phidias - Fonte: Google imagens

1.1.5 Nomes dados à razão de ouro

A constante irracional ϕ , identificada desde a antiguidade, tem recebido inúmeros nomes ou títulos ao longo dos séculos. Vejam-se:

Divisão em Razão Média Extrema (DEMR). Essa nomenclatura, indiscutivelmente, é a primeira que aparece na história, devendo-se a Euclides de Alexandria (séc III a.C.), tendo sido introduzida em “Os Elementos”, no Teorma II.11. A expressão ganhou eco ou reprodução

em vários outros matemáticos a partir do séc XIII, como Fibonacci (1220), Zumberti (1516), Gryaneus (1533), Candalla (1566), Billingsley (1570), Commandino (1572), Clavius (1579) e Barrow (1722).

Proporção contínua. Esse termo também foi introduzido por Euclides, no século III a.C. e encontrou apoio e uso em Johannes Kepler, na sua famosa carta, escrita em 1597.

Secção dourada (ou Razão de ouro). Segundo o respeitado pesquisador eslavo, Edward Soroko, em seu livro: “O título da Seção Dourada”, esta nomenclatura teve a sua origem no cientista grego, Claudio Ptolemeu, (séc II), depois convencer-se de que o crescimento de uma pessoa, com constituição perfeita, é dividido naturalmente nessa relação. Em 1894, a referida expressão foi utilizada, também, por Georg Cantor e, finalmente, por Simon Ohm, na segunda edição de seu livro “Pura Matemática Elementar”, em 1835.

Meio e dois extremos. Essa expressão foi introduzida pelo matemático árabe, Abu Kamil (850-930). O título foi utilizado por Al-Biruni (973-1050), Gerhard de Cremona (séc XII), Adelardo (séc XII), Campanus de Novara (Séc XIII) e Billingsley (séc XVI).

Divina proporção. Esse título, para a DEMR, foi introduzido pelo grande matemático italiano, Luca Pacioli, em 1509, em sua obra “Da Divina Proporção”, primeiro livro sobre a Razão de Ouro, na História. Sabe-se que, tanto o título quanto o conteúdo dessa trabalho, se deram sob a influência de Leonardo da Vinci, que dele participou ativamente, ilustrando-o, inclusive, com diversas figuras. Este termo foi usado por Kepler em sua carta de 1608.

Divisão proporcional. Essa nomenclatura foi introduzida na matemática pelo matemático e jesuíta alemão Christophorus Clavius (1538 -1612), na sua obra “Os Elementos de Clavius”, edição de 1574. O termo também foi reverberado por Johannes Kepler, em sua sagrada obra *Mysterium Cosmographycum*.

1.2 Fibonacci, o precursor da matemática ocidental

Alguém já disse que as marcas da “Idade Média” foram a Inquisição com as execuções de “bruxas e hereges”, as forçadas conversões ao catolicismo romano e as hostis cruzadas empreendidas a partir do papa Urbano II, em busca do túmulo de Cristo”. Em outras palavras, ciência ou matemática não estavam em foco na época. É nessa fase histórica, que surge, como uma luz nas trevas, a figura de Leonardo de Pisa, também chamado de Leonardo Pisano ou, como mais conhecido Fibonacci; que, mais tarde, seria reconhecido como o primeiro e mais talentoso matemático ocidental, da Idade Média.

1.2.1 Fibonacci e sua história

Leonardo (1170-1240), nasceu na cidade de Pisa, na região da Toscana, na Itália e recebeu o cognome de Fibonacci por causa da sua filiação paterna (filho de Bonacci, que quer

dizer filho de touro). No século XII, a história dá conta de que a aritmética, astronomia, ciência, cultura, arquitetura e artes árabes floresciam copiosamente, ultrapassando a sua concorrência na civilização cristã. Mesmo morando em Pisa, o pai de Leonardo, na condição de comerciante e funcionário do Estado Italiano e em plena revolução comercial, precisou trabalhar em um dos postos do comércio italiano na costa norte da África; o que possibilitou Leonardo receber uma exitosa formação matemática em uma das melhores instituições educacionais da Arábia.



Figura 10 – Leonardo de Pisa - Fonte: Google imagens

Essa oportunidade ímpar caía como chuva serôdia numa terra fértil, que era a mente de Fibonacci com os seus inatos e indizíveis dotes. A colheita que haveria para o mundo de então, não poderia ser diferente do que aconteceu. Fibonacci escreveu várias obras de altíssima preciosidade, entre elas: *Liber Quadratorum* (Livro dos Quadrados), *Practica Geometriae* (Prática de Geometria) e a sua principal obra, *Liber abaci* (Livro do Ábaco ou do Cálculo) (1, p. 61), que foi impresso em 1202 e 1228, apresentando um profundo conhecimento da Aritmética e Álgebra que Fibonacci aprendeu com a cultura do oriente. Essa obra, com 15 capítulos, serviu como uma enciclopédia-modelo para a aritmética do comércio medieval renascentista, introduzindo os numerais indo-arábicos na Europa, apresentando métodos para o cálculo de juros, conversão monetária, medidas, equação quadrática, etc., além de levantar inúmeros e estratégicos problemas de matemática.

O nível de extração intelectual de Fibonacci estava tão à frente da realidade da Europa Ocidental dos seus dias, que, por não alcançarem o seu nível nem o significado dos seus postulados, os ícones da matemática europeia subestimaram o seu trabalho. Em seu livro “Integer Number” (1919), o notável matemático russo, prof. Vasiliev, teceu o seguinte comentário:

As obras do comerciante educado de Pisa estavam tão acima e além do nível de conhecimento matemático dos cientistas daqueles tempos, que a influência de seu trabalho, na literatura matemática, só se tornou visível dois séculos após sua morte, no final do século XV, quando muitos de seus teoremas e problemas foram incluídos por Luca Pacioli, e no início do século XVI, quando os talentosos matemáticos italianos (Ferro, Cardano, Tartalia e Ferrari) produziram o início de uma maior álgebra, graças à solução das equações cúbica e biquadrada (1, p. 61).

Pode-se, então, afirmar que assim como Pitágoras adquiriu uma vasta gama de conheci-

mento das ciências egípcias e babilônicas e o transferiu para a Grécia; Fibonacci extraiu muito “ouro sapiencial” da Arábia e o enxertou na Europa Ocidental, proporcionando-lhe um gigante desenvolvimento.

1.2.2 Fibonacci e os coelhos

De todos os problemas suscitados e equacionados por Fibonacci, destacou-se, ao longo dos séculos, a reprodução dos coelhos:

Um par de coelhos foi colocado dentro de um recinto, para se determinar quantos pares de coelhos nasceriam em um ano, considerando-se que, após nascer, cada par de coelhos leva dois meses para atingir a sua maturidade e que, a partir daí, todo mês produz um novo par. Quantos pares de coelhos haveria após os doze meses?

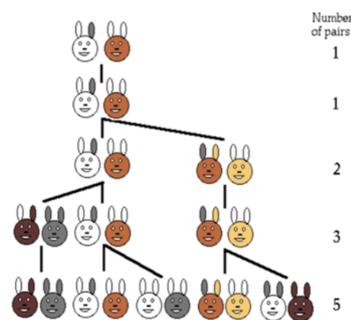


Figura 11 – Problema dos coelhos - Fonte: Google imagens

Com um pouco de atenção, percebe-se que a quantidade de pares de coelhos, ao longo dos meses e a partir do par original se comporta da seguinte forma:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ...

Essa sequência mais tarde seria chamada *Os Números de Fibonacci* e, curiosamente, eles estão relacionados a uma das maiores descobertas da matemática e frequentemente presente em toda a natureza. Uma das belezas vistas nessa sequência é que, a partir do terceiro termo, cada um é igual à soma dos dois anteriores. Ou seja, designando-se por F_n o n ésimo termo da sequência, a sua regra geral pode ser representada pela seguinte fórmula matemática:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3$$

que é chamada “recorrência” ou “relação recursiva”.

1.2.3 Fibonacci e a razão de ouro

Uma colossal beleza, vista na sequência de Fibonacci, é a sua identificação com a Razão Áurea. Considerando-se a sequência

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad \dots$$

vejamos o que acontece com as frações construídas pelos pares de números adjacentes de Fibonacci:

$$\frac{F_2}{F_1} \quad \frac{F_3}{F_2} \quad \frac{F_4}{F_3} \quad \frac{F_5}{F_4} \quad \frac{F_6}{F_5} \quad \frac{F_7}{F_6} \quad \frac{F_8}{F_7} \quad \frac{F_9}{F_8} \quad \frac{F_{10}}{F_9} \quad \dots$$

Essas frações valem:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,666\dots$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,615$$

$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,619$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,617$$

Diante do exposto, é imaginável que o limite da série alternada: F_n/F_{n-1} , F_{n+1}/F_n , F_{n+2}/F_{n+1} ... se aproxima da média de ouro, quando n tende para o infinito. Na razão $F_{20}/F_{19} = 6765/4181 = 1,6180\dots$, já se tem o valor de ϕ com exatidão de quatro casas decimais. A ideia, em apreço, pode ser comprovada em duas etapas:

A) Prova de Convergência da Sequência

Segundo a Identidade de Cassini (1625-1712),

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Isso pode ser comprovado por indução, como a seguir: Sejam $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_3 = 2$ verifique-se a sentença, primeiramente, para $n = 2$:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_3 - F_2^2 &= (-1)^2 \\ 1 \cdot 2 - 1^2 &= (-1)^2 \\ 2 - 1 &= 1 \quad \text{OK!!!} \end{aligned}$$

Tomando-se como verdadeira a sentença para k , isto é, $F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$ e verificando-se para $k+1$, vem

$$\begin{aligned} F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (-1)^{k+1} = F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 \\ &= F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1} \cdot F_{k+1} = F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1} \cdot (F_{k-1} + F_k) \\ &= F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_{k+1} \cdot F_k \\ &= F_k \cdot (F_{k+2} - F_{k+1}) - F_{k+1} \cdot F_{k-1} \\ &= F_k \cdot F_k - F_{k+1} \cdot F_{k-1} = (-1) \cdot (F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2) \\ &= (-1) \cdot (-1)^k \end{aligned}$$

logo, $F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$. Assim, está comprovada a Identidade de Cassini. E dividindo-se os dois membros por $F_n \cdot F_{n-1}$, fica:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}},$$

ou seja,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}},$$

Expandindo, indefinidamente, a primeira parcela do segundo membro da expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-1}F_{n-2}} + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}} \\ &= \frac{F_{n-2}}{F_{n-3}} + \frac{(-1)^{n-2}}{F_{n-2}F_{n-3}} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-1}F_{n-2}} + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}} \\ &= \frac{F_{n-3}}{F_{n-4}} + \frac{(-1)^{n-3}}{F_{n-3}F_{n-4}} + \frac{(-1)^{n-2}}{F_{n-2}F_{n-3}} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-1}F_{n-2}} + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}} \end{aligned}$$

Dessa forma, quando n tende para o infinito, pode-se afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k-1}}.$$

Finalmente, o teste de Libniz (1646-1716) garante, para $n < F_n$, a convergência da série acima; ou seja, a referida sequência dos quocientes dos números de Fibonacci é convergente.

B) Cálculo do Limite da sequência

Considerando agora $K_n = F_{n+1}/F_n$ temos

$$K_n = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{K_{n-1}}.$$

Sendo x o procurado limite de K_n , quando n vai ao infinito tem-se

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{K_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x},$$

de onde surge a equação do segundo grau

$$x^2 - x - 1 = 0$$

que, por Bhaskara,

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Esse resultado é a “chave” para muitas descobertas, pois mostra uma profunda conexão entre os números de Fibonacci e ϕ , o número de ouro.

2 Constantes e sequências na natureza

Como já dito na introdução, tem sido – pelo menos para muitos – insofismável, a relação entre a matemática, na sua forma mais rica de ser, e o mundo natural que nos cerca. O problema da proporcionalidade não poderia fugir da aguçada percepção de Pitágoras, que detendo uma inspiração na cultura egípcio-babilônica, implantou-a nos cânones da cultura, da estética e da arte de toda a Grécia, influenciando-as de maneira magistral. Mas, em última análise, de onde Pitágoras extraiu toda essa beleza, se não do universo natural que o cercava?



Figura 12 – Escala musical - Fonte: Google imagens

Entre os gregos, Pitágoras foi o pioneiro na tentativa de, matematicamente, compreender, por exemplo, a essência das relações entre os intervalos musicais ou harmônicos; e já havia descoberto que os referidos intervalos são expressos por números naturais que, por sua vez, têm uma estreita ligação com o número de oscilações das cordas, e tudo isso era visto, por ele, como a base teórica da harmonia musical, enxergando, ele, em todo o universo, a constante ou o número de ouro (1, p. 40). Platão, por sua vez, expandindo o pensamento pitagórico, enfatizou a beleza ideal dos cinco poliedros regulares, apregoando a sua presença em todo o “cosmos” (1, p. 27). Aristóteles, discípulo de Platão, relacionou toda sorte de beleza existente no universo a uma rigorosa proporcionalidade matemática; e a razão entre o número de oscilações de um tom básico e o da sua oitava (por ele chamada “a mais bela consonância”), ele considerou igual à dos naturais $1/2$ (1, p. p.40). Mas não pára por aí, a presença da matemática, com as suas constantes, sequências numéricas, proporções de ouro e afins, invade todo o universo natural: homens, peixes, plantas e constelações. Tudo, segundo Jonhanes Kepler, foi invadido pela beleza numérica da matemática (1, p. 42).

2.1 A matemática no céu e no mar

É impossível falar-se na revolução científica que marcou o mundo do séc XVII, sem envolver o célebre nome de Johannes Kepler, notável matemático e pai da astronomia moderna. Kepler nasceu em 1571, na Alemanha, foi professor de matemática nas cidades de Graz e Linz, na Áustria, assistente do astrônomo dinamarquês, Tycho Brahe, fazendo um brilhante trabalho no campo da óptica e desenvolvendo uma melhor versão do telescópio refrator – o telescópio de Kepler.

A despeito de todo o seu conhecimento científico, Johannes Kepler nunca se divorciou de uma interpretação religiosa para a contemplação do universo que, segundo concebia, havia sido criado por Deus, em um plano matemático e inteligível. O mundo estava abandonando a ideia ptolomaica, que perdurara 1500 anos, pregando que os planetas giravam em órbitas circulares e em torno da terra. A teoria copernicana, a partir do séc XV, ganhava vez entre os mais dotados de saber. Segundo ela, os planetas giravam, sim, em órbitas circulares, mas em torno do sol. Coube a Kepler a segunda grande quebra de paradigmas, quando todo o mundo de cultura cristã cria que a única trajetória perfeita - e portanto, obra de Deus - era a circunferência. Esforçando-se para fazer prevalecer a essência racional das suas descobertas, Kepler formulou a sua teoria, segundo a qual, os astros giram em torno do sol e em órbitas elípticas.

Antes de morrer em 1630, a notabilidade de Kepler foi estabelecida, em função das suas três principais obras: Nova Astronomia, Harmonices Mundi e Epítome da Astronomia de Copérnico, as quais serviram de base para a newtoniana teoria da gravitação e as Leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como as Leis de Kepler (3, p. 372).



Figura 13 – Johannes Kepler (1571-1630)

2.1.1 As Leis de Kepler

A 1ª Lei de Kepler - Lei das Órbitas: Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que assume a posição de um dos focos.

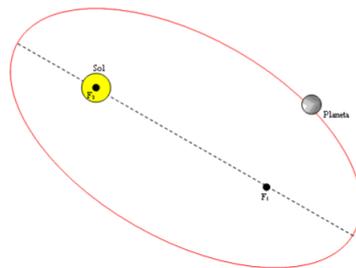


Figura 14 – 1ª Lei de Kepler - Fonte (3, p.373)

Dessa forma, a primeira lei de Kepler garante que, independentemente do planeta a ser observado, a equação de uma elipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

estará sendo obedecida.

A 2ª Lei de Kepler - Lei das Áreas: O segmento que une o sol a um planeta, descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

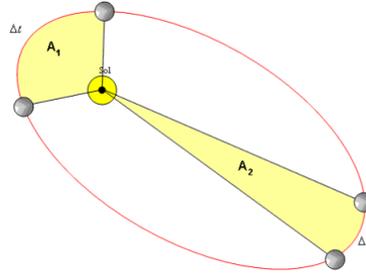


Figura 15 – 2ª Lei de Kepler - Fonte (3, p.373)

Dessa forma, a segunda lei de Kepler garante que, em qualquer intervalo de tempo Δt , as áreas varridas pelo segmento que une o sol a qualquer planeta são iguais, independentemente da sua posição. Ou seja,

$$\frac{A_1}{\Delta t} = \frac{A_2}{\Delta t}.$$

A 3ª Lei de Kepler - Lei dos Períodos: O quociente entre o quadrado do período T e o cubo de sua distância média a do sol é igual a uma constante k , para todos os planetas.

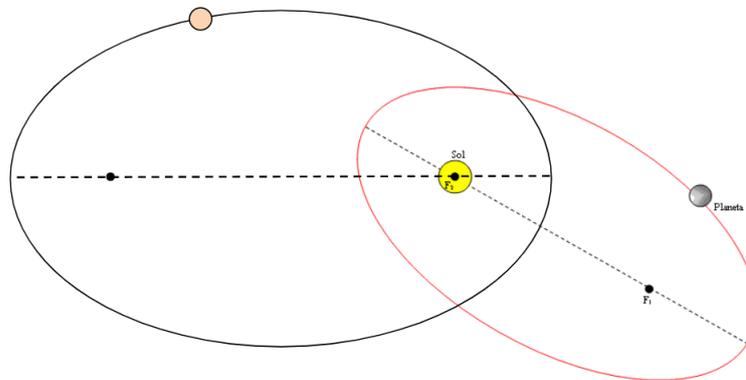


Figura 16 – 3ª Lei de Kepler - Fonte (3, p.373)

Dessa forma, para dois quaisquer planetas, tem-se:

$$T^2 = k \cdot a^3.$$

2.1.2 Fibonacci no Universo

A famosa Espiral de Fibonacci é uma figura geométrica que apresenta, além de retângulos de Fibonacci, quadrados de lado 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34..., e nos quadrados, desenham-se arcos

correspondentes a um quarto da circunferência. Esses arcos, interligados são, essencialmente, a Espiral de Fibonacci, que não é, estritamente, o espiral matemático, mas dele se aproxima em sua beleza numérica. Veja-se:

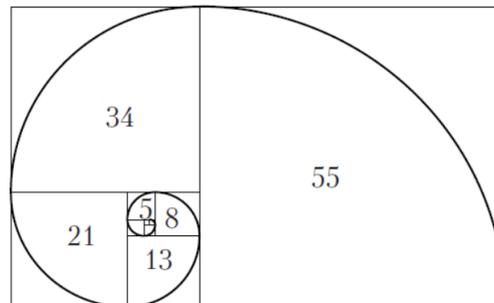


Figura 17 – Espiral de Fibonacci - Fonte (1, p.96)

A Espiral de Fibonacci está presente em grande parte da natureza, e que - segundo o notável poeta e cientista alemão, Johann Goethe (1749-1822) – é “um dos atributos característicos de todos os organismos vivos e uma manifestação da secreta essência da vida” (1, p. 105). Essa natural façanha matemática é vista, por exemplo, em bigodes curtos de plantas e chifres de carneiros; e essa realidade se alastra em outras esferas.

Espiral de Fibonacci nas galáxias. É conhecida e notória a expressão sideral da forma de uma galáxia. A sua disposição, face às inúmeras estrelas, com a espiral de Fibonacci.



Figura 18 – Galáxia - Fonte: Google imagens

A Espiral de Fibonacci na Concha de Nautiloides. A Concha de Nautiloides é um molusco da família dos cefalópodes nectônicos e naturais do Indo-Pacífico, caracterizado por ter uma grande concha calcária externa. A sua anatomia é uma expressão rigorosa da Espiral de Fibonacci, o que acontece com tantas outras (1, p. 106).



Figura 19 – Conchas - Fonte: Google imagens

2.2 A matemática nos vegetais

Como diziam as sapiências antiga e medieval, “tudo na natureza parece subordinado a leis matemáticas”. Mas é fantástico observar-se o rigor destas leis obedecidas no campo da botânica, no que diz respeito à disposição das folhas nos caules das plantas ou árvores, pétalas em cestas de flores (1, p. 107), sementes de pinha e de girassol, na formação de hélices ou espirais, o fenômeno da filotaxia. A referida beleza da matemática natural foi devidamente percebida pelo polímata italiano, Leonardo da Vinci (1452-1519), apreciada pelo físico e matemático alemão, Jonhannes Kepler e enaltecida pelo cientista da computação e matemático britânico, Mathison Turing (1912-1954), entre outros. O ponto central da questão em apreço é que a disposição dessas folhas ou sementes não é aleatória; pelo contrário, obedece a uma rigorosa lei de posicionamento, estabelecendo uma relação com a sequência de Fibonacci.

2.2.1 A beleza dos números nas folhas

Examinando-se a disposição das folhas no caule de uma planta, por exemplo, no sentido de baixo para cima, percebe-se não apenas que cada uma delas ostenta uma altura diferente ao longo da curva helicoidal que circunda o caule, mas que, a partir da segunda, cada uma apresenta o giro de um ângulo α em relação à anterior e ao redor do eixo, o caule. Essa abertura é chamada, pelos botânicos, de “ângulo de divergência da folha” (1, p. 105). Sendo o valor dessa abertura um número racional, conclui-se que, depois de uma certa quantidade de giros (ou folhas) ao longo da curva heicoidal, ter-se-á uma folha sobreposta à primeira; depois de 1, 2 ou uma outra quantidade m de voltas. Então se diz, no terreno da filotaxia, que completou-se um ciclo.



Figura 20 – Beleza helicoidal - Fonte (1, p.28)

Os especialistas trabalham com uma fração m/n , que indica o fenômeno pelo qual um folha chegou a se sobrepôr à primeira. Nessa relação, m representa o número de voltas para a disposição das folhas atingir um ciclo e n representa o número de folhas envolvidas para cada um desses ciclos. Nas figuras *a* e *b* seguir, tem-se, respectivamente, uma estrutura Filotáxica $1/3$, ou seja, o ciclo é atingido em uma única volta e com três giros (folhas) de 120° ($1 \times 360 \div 3$) cada (1, p. 105); e outra $2/5$, ou seja, o ciclo é atingido com duas voltas e cinco giros (folhas) de 144° ($2 \times 360 \div 5$) cada.

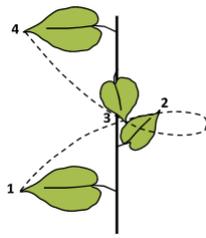


Figura 21 – Distribuição filotáxica (a) -
Fonte: Produzido pelo autor

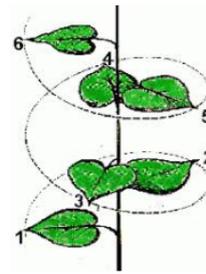


Figura 22 – Distribuição filotáxica (b) -
Fonte: Google imagens

Os casos $1/3$ e $2/5$ apresentados, são dois entre tantos outros; porém, outras duas belezas na disposição filotáxicas das folhas das plantas (1, p. 106) que são:

A - para plantas diferentes, têm-se razões diferentes, propiciando o máximo influxo de energia solar.

m/n	Planta	Figura
$1/2$	Vide	
$1/3$	Amieiro	
$2/5$	Pereira	
$3/8$	Repolheira	
$5/13$	Jasmim	

Figura 23 – Disposição filotáxicas - Fonte: Produzido pelo autor

B - As referidas frações não podem ser razões quaisquer, e se forem escritas de forma que os numeradores ou denominadores estejam em ordem crescente, formam a seguinte seqüência:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{8}{21} \quad \frac{13}{34} \quad \frac{21}{55} \quad \dots$$

onde a série dos numeradores ou denominadores é, rigorosamente, a de Fibonacci.

2.2.2 A beleza dos números nas embalagens

Uma outra riqueza apreciável, no terreno da filotaxia, é o rigor dos números na estrutura de embalagem de diversos frutos. É o caso de Pinha e Abacaxi, por exemplo; em cujas embalagens há espiras à direita e à esquerda, em quantidades que correspondem, sempre, a números adjacentes da sequência de Fibonacci, F_n e F_{n+1} (1, p. 107).



Figura 24 – 8 espiras à esquerda e 13 a direita - Fonte: Google imagens

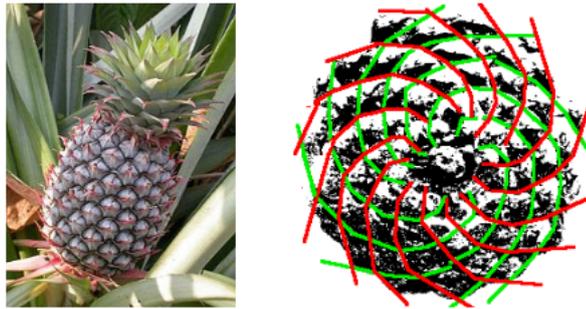


Figura 25 – 13 espiras à esquerda e 8 a direita - Fonte: Google imagens



Figura 26 – 55 espiras à esquerda e 34 a direita - Fonte: Google imagens

Todo o exposto revela, com clareza, uma aplicação matemática rigorosa e linda, como visto, na disposição das folhas, pétalas de flores, nas sementes de uma pinha, na estrutura do abacaxi, do cacto e na performance de um girassol. A referida lei matemática é expressa por números de Fibonacci e, portanto, está relacionada à média de ouro! Essa realidade, segundo o Dr. Alexey Stakhov, favorece o entendimento de que toda a natureza é subordinada a inteligentes leis matemáticas, e a sua causa se constitui num grande desafio para a ciência e a filosofia (1, p. 109).

2.3 A matemática nas abelhas

Depois de diversas apreciações em botânica, é importante percorrer e apreciar algumas maravilhas matemáticas no mundo das abelhas. Esse pequeno inseto subsiste em mais de 30.000 espécies e a mais conhecida é a *Apis Mellifera* (abelha europeia), consagrada pela sua grandiosa capacidade na produção de mel, cêra e geleia real. Tomando-se um grupo de qualquer espécie de abelha, percebem-se diferenças biológicas e funcionais entre elas, mas, no exercício das suas funções, todas coexistem em um mesmo ambiente, a colmeia (1, p. 66).

2.3.1 Componentes de uma colmeia

Em linhas gerais, são três os integrantes de uma “população” de abelhas: abelha operária, abelha rainha e drone (zangão). a) a operária (menor do grupo) apesar de ser fêmea, não tem a propriedade da ovulação e, assim, é estéril, enquanto que assume um inusitado papel na síntese de mel, cêra e geleia. b) a rainha (maior do grupo) é, em certo sentido, a razão de ser da colmeia. É a grande responsável pela fecundação, multiplicação e governo do grupo. c) o drone (mais forte do grupo) é o elemento macho da colmeia, sendo responsável pelo acasalamento com a rainha e a conseqüente garantia de reprodução da espécie.

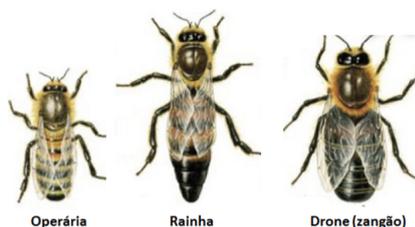


Figura 27 – Componentes de uma colmeia - Fonte: Google imagens

O surgimento de uma operária se dá como resultado comum do acasalamento da rainha com o drone; enquanto que o surgimento de uma rainha, se dá entre várias operárias, quando, sendo alimentada com a geleia real, adquire as propriedades anatômicas e genéticas para tal, e se vai para formar um outro ninho, uma outra colônia. Por último, o surgimento de um drone (abelha macho), se dá a partir de um óvulo não fertilizado da rainha. É o fenômeno da patogênese, uma forma de reprodução assexuada, na qual sem a presença do gameta masculino e a conseqüente fertilização do gameta feminino. Dessa forma, enquanto a rainha tem os seus dois progenitores, o drone não tem pai, mas somente mãe, a rainha.

2.3.2 A árvore genealógica do drone

A peculiaridade no sistema de reprodução das abelhas não fica de graça, mas propicia, mais uma vez na natureza, a formação da sequência de Fibonacci, no caso particular da árvore

genealógica dos drones. Isso é facilmente perceptível, quando essa árvore é construída partindo-se de um elemento (o drone ou zangão) para os seus ancestrais, considerando-se, sempre, o fato de que cada rainha provém de uma rainha com um drone, e que cada drone provém, unicamente, de uma rainha.

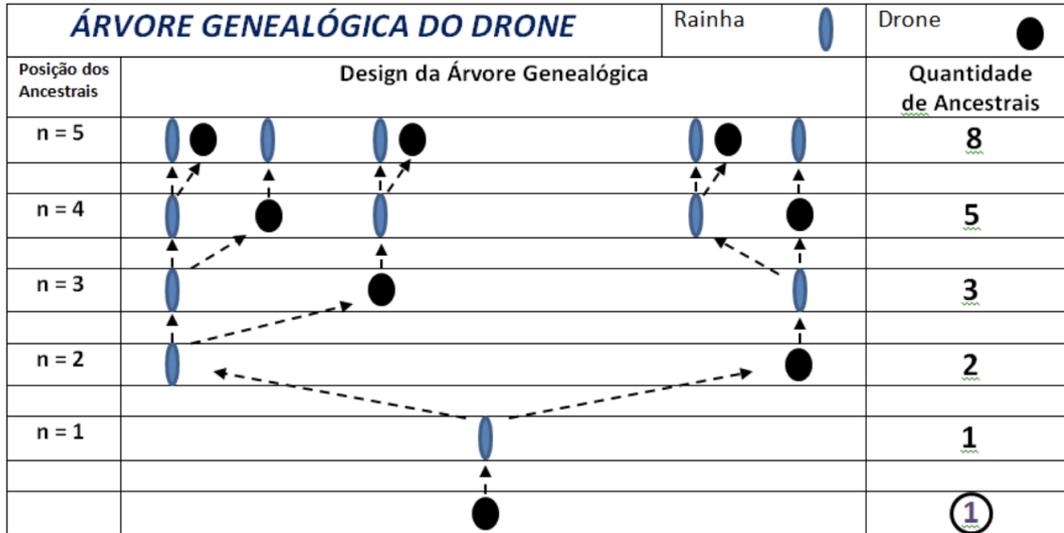


Figura 28 – Árvore genealógica do drone - Fonte: Produzido pelo autor

Na coluna da esquerda, apresenta-se a posição da ancestralidade: $n = 1$ para pais; $n = 2$, para avós; $n = 3$, para bisavós; e assim, sucessivamente. Na coluna da direita, está posta a quantidade de ancestrais de cada posição: 1 pai (ou mãe-rainha); 2 avós; 3 bisavós; 5 trisavós; 8 tetravós; etc. Dessa forma, se tem a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

2.4 A razão de ouro no homem

É inevitável ao estudo do orbital de aplicação da Razão Áurea, a precisa contemplação da anatomia do corpo humano. Desde que surgiu, na antiguidade grega, a teoria da harmonia está entrelaçada à razão de ouro. Isso serviu de plataforma para o conceito de harmonia na ciência e na cultura europeia. Nesta última, foi imprescindível, à produção escultural, a observação acurada e engenhosa do corpo humano em todo o seu invólucro. Em tom de reverberação de toda uma realidade vivida no mundo das esculturas, desde o renascimento, o escultor francês, Auguste Rodin (1840-1917), considerado o progenitor da escultura moderna, declarou: “Um corpo nu parece-me a coisa mais linda. É um milagre, onde nada de feio há” (1, p. 56). Na sua compreensão, em todos os momentos, o corpo humano deve ser reconhecido como o objeto mais perfeito existente e digno da mais inspirada arte escultória, reconhecendo-se a beleza do seu aspecto, expressa em maravilhosas proporções.

2.4.1 Da Vinci, Durer e a razão de ouro

O pensamento supra exposto não foi, mesmo, uma peculiaridade de Rodin. Essa leitura foi feita por diversas celebridades históricas, na observação do corpo humano pra um glorioso reflexo na arte. Leonardo da Vinci (1452-1519), o gênio italiano da ciência e da arte, enxergava a proporção áurea em todo o design do corpo humano. Em sua obra, “O homem Vitruviano” produzida em 1490, ele consegue expressar a sua visão, até mesmo em termos de radialidade no corpo humano.

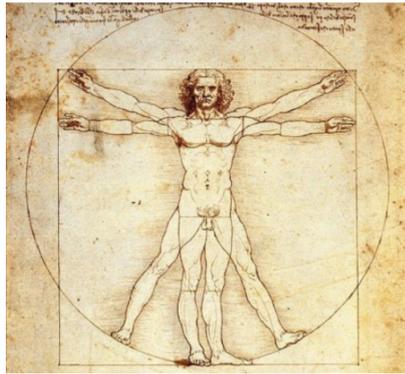


Figura 29 – O homem vitruviano, 1490, Da Vinci - Fonte (1, p.28)

No campo da pintura, ninguém menos que o famoso Albrecht Dürer (1471-1528), grande matemático e pintor alemão, provavelmente o mais famoso artista do Renascimento nórdico. Em sua consagrada obra “Adão e Eva”, em 1504, expõe a sua percepção da média dourada no corpo biótipo humano.



Figura 30 – Adão e Eva, 1504, Durer - Fonte: Google imagens

2.4.2 Polycletus, Myron, Praxiteles e a razão de ouro

Voltando-se mais no tempo, pode-se adentrar a antiguidade grega e perceber-se essa visão em verdadeiros ícones da arte, há séculos antes da era cristã. Polycletus (séc. V a.C),

também conhecido como Polycletus de Argos, um dos mais notáveis escultores da Grécia Antiga, cofundador do classicismo escultórico e pai da teoria da arte ocidental, expressou a sua visão da razão de ouro no homem, em muitas das suas artes. A sua obra prima, A Estátua de Doryphorus, encarada como uma das maiores realizações da arte grega clássica, é considerada o melhor exemplo para análise das proporções do ideal corpo humano, estabelecido pelos antigos escultores gregos. À obra, foi dado o nome “Cânion”, do grego canon, [referência de medição]. Em seu livro *Proportionality in Architecture*, o arquiteto russo G.D. Grimm, detalha as conexões entre a famosa estátua e a razão de ouro (1, p. 41).

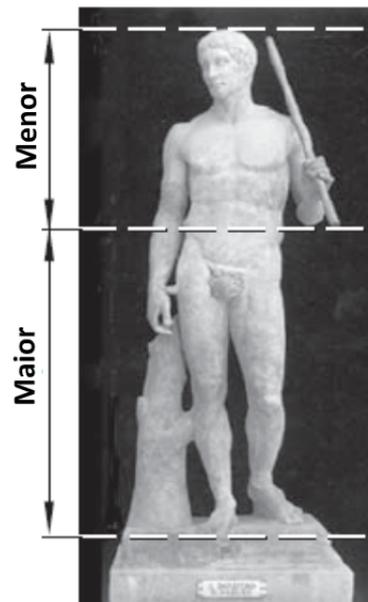


Figura 31 – A estátua de Doryphorus, séc. V a.C., Polycletus - Fonte (1, p.40)

Myron (440 a.C. – 380 a.C.), destacado escultor grego, revela a sua percepção da razão de ouro no homem, em sua magnífica obra Discobolus, através da qual, principalmente, ficou consagrado no mundo das artes escultóricas da Grécia Antiga (1, p. 41).



Figura 32 – Discobolus, séc. V a.C., Myron - Fonte: Google imagens

Praxiteles (395 a.C. – 330 a.C.), um dos mais famosos escultores da Grécia Antiga, mentor da prática escultural de se alongar as figuras para incutir-lhes leveza, e cujas obras foram disseminadas, também, através de cópias romanas, deixou clara a sua visão de que em todo o corpo humano perfeito há a indubitável presença da proporção áurea. Isso ficou claro, na sua célebre obra *Hermes e o Infante* (1, p. 41).



Figura 33 – Hermes e o Infante, séc. IV a.C., Praxiteles - Fonte: Google imagens

Por muitos séculos, a canonicidade das obras das citadas celebridades fê-las o padrão de beleza e a harmoniosa construção baseada no corpo humano. Assim, sob o envolvimento da razão áurea, estabeleceu-se a lei das proporções a serem aplicadas por estilistas nas mais nobres peças de roupa do mundo.

2.4.3 Vênus de Milo

Dentre todas as preciosas obras artísticas da antiguidade clássica, desponta com relevante brilho a mitológica e colossal Vênus de Milo. Envolvida por uma auréola de mistérios e indeterminações, há muitas dúvidas sobre a real procedência dessa escultura. É fartamente aceito, entretanto, que a estátua de Vênus, a deusa do amor, na mitologia grega, e correspondente a Afrodite no panteão romano, foi produzida por Alexandro de Antioquia, um escultor helenístico, no séc. II a.C. Encontrada, em 1820, na ilha de Milos, no mar Egeu, a obra foi encaminhada para o famoso museu de Louvre em Paris, onde se encontra atualmente à exposição. Feita de mármore e com 203 cm de altura, Vênus de Milo é considerada uma gloriosa relíquia e a mais famosa estátua grega. É perceptível, em toda a sua performance, a presença da razão de ouro. É um magistral padrão de beleza da Grécia Antiga (1, p. 41).



Figura 34 – Vênus de Milo, séc. II a.C., Alexandro de Antioquia - Fonte (1, p.41)

2.4.4 Identificando a presença do número ϕ

A partir das observações renascentistas feitas por Da Vinci, sobre o corpo humano, na sua obra, O Homem Vitruviano, é possível se verificar as proporções em todo o seu contexto, como visto na figura à esquerda, apresentada pelo Alexey Stakhov em sua obra A Matemática da Harmonia (1, p. 56). Nela, existem várias partes divididas em duas secções, cada, e a maior corresponde a 61,8% do todo. Curiosamente, então, a razão entre o comprimento de qualquer parte e o da maior secção é igual a 1,618, o valor de ϕ .

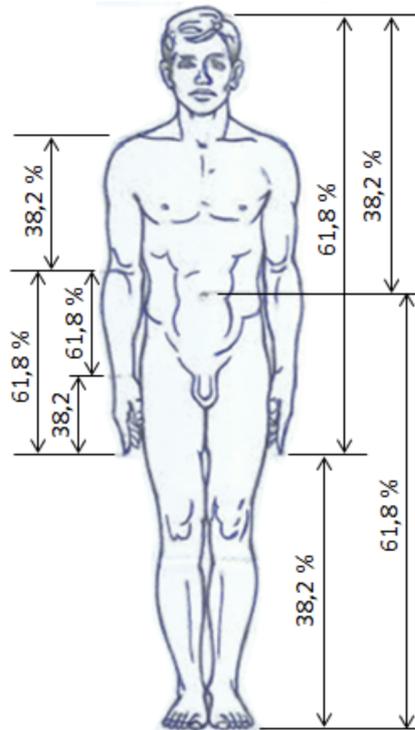


Figura 35 – O homem sob medida - Fonte (1, p.56)

Razões básicas no corpo humano	
Altura do homem e a do seu umbigo	$\frac{100}{61,8} \approx \phi$
Altura do homem e o segmento da ponta dos dedos ao topo da cabeça	$\frac{100}{61,8} \approx \phi$
Medidas umbigo-topo da cabeça e umbigo-ombro da cabeça	$\frac{100}{61,8} \approx \phi$
Medidas mandíbula-topo da cabeça e mandíbula-sobrancelha	$\frac{100}{61,8} \approx \phi$
Medidas ombro-ponta dos dedos e cotovelo-ponta dos dedos	$\frac{100}{61,8} \approx \phi$
Medidas cotovelo-ponta dos dedos e cotovelo-pulso	$\frac{100}{61,8} \approx \phi$

3 Simetrias e ritmos na natureza

Uma das afirmações feitas ao longo de séculos, por personalidades como Platão, Newton, Galilei e Kepler, é que sem as leis que regem a natureza, estaríamos diante de um caos. Isso está confirmado na periodicidade e repetição rigorosas e surpreendentes em todos os processos naturais. Os fenômenos rítmicos da natureza têm sido foco de observações por matemáticos, físicos, astrônomos e polímatas desde muito. O ritmo do sol, da lua, dos planetas e cometas; o ritmo do sistema circulatório no reino animal, especificamente no homem. Está-se diante de mais uma grandeza matemática no universo natural.

Por outro lado e no que diz respeito à beleza e harmonia, simetria é um dos conceitos fundamentais que se relacionam com todos os ramos da Natureza, Ciência e Arte. Como notável matemático alemão e patrono da Universidade de Frankfurt (na Alemanha), Hermann Weil (1885 – 1955) avaliou a função da simetria na arte e na ciência moderna, defendendo que é bem mais que um mero “estreito ou largo”, mas que traz consigo a ideia e produção de ordem, beleza e perfeição (1, p. 100).



Figura 36 – Hermann Weil - Alemanha, séc. XX - Fonte: Google imagens

No terreno da matemática, a simetria encerra uma transformação de espaço, quando cada ponto P dessa grandeza produz um outro ponto P' em relação a um plano α ; sendo o segmento de linha PP' perpendicular ao referido plano, que o divide à metade. Nesse caso, o plano é chamado Plano (ou Eixo) de Simetria, que se constitui num fundamental conceito no estudo da simetria.

Em sua já citada obra, Vernadsky pontua que simetria engloba as propriedades de todos os campos da física e química; e acrescenta que os pitagóricos prestaram muita atenção ao fenômeno da simetria na natureza [principalmente as simetrias bilateral e radial] por estar ligado à sua chamada Doutrina da Harmonia (1, p. 103).

3.1 Simetria bilateral

Quando uma pessoa se olha num espelho, pode se ver em sua reflexão. A reflexão espelhada é um exemplo da chamada Transformação Ortogonal que altera uma orientação, como no triângulo ABC, da figura abaixo; sendo o segmento BD, o Eixo de Simetria.

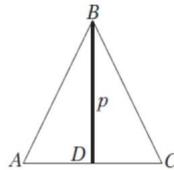


Figura 37 – Simetria bilateral do espelho - Fonte (1, p.100)

Na natureza, essa simetria é bastante encontrada e, nesse caso, os corpos (animais ou vegetais) apresentam um único eixo de simetria, pelo qual são perfeitamente divididos em duas partes iguais, correspondentes (parte a parte) e, conseqüentemente, simétricas. No reino animal, essa simetria se vê, por exemplo, em bois, besouros, borboletas, tigres, gatos, homens, etc. (1, p. 677) Em seu livro, Os Seres Vivos, Marcondes registra que a maioria dos animais possui esse tipo de simetria (4, p. 76), isso, naturalmente, possibilita não somente a boa estática do corpo, como a sua locomoção aquática, terrestre ou aérea.

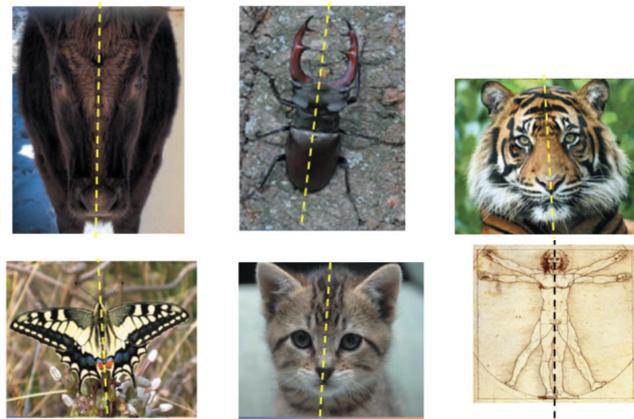


Figura 38 – Simetria no reino animal (1, p. 677)



Figura 39 – Museu Osteotécnico de Dois Irmãos (Exposição 3-9)

3.2 Simetria pentagonal

Um conceito mais genérico de simetria angular nos seres vivos, é o da simetria radial, presente na anatômica estrutura biológica de muitas espécies vegetais, em que os 360° da volta inteira são distribuídos em n regiões angulares congruentes, em cujos eixos estão posicionadas as nervuras centrais das folhas. Dessa forma, o ângulo entre a nervura central de uma folha e a da sua adjunta mede, sempre, $360/n$.

Descobertas botânicas, do séc XIX, concluíram que as forças gravitacionais da Terra têm a simetria de um cone em cada ponto, e influencia a simetria das formas naturais. A declaração científica resultante foi que “tudo que evolui na direção horizontal ou inclinada, expressa uma simetria bilateral; enquanto que tudo que cresce na direção vertical, expressa uma simetria radial” (1, p. 103). Dentre todos os casos de simetria radial no bojo citado, refulge, imponentemente, a simetria pentagonal.

Nessa estrutura, tomando-se um ponto como o centro da sua expressão geométrica, pode-se traçar, a partir daí, cinco segmentos que dividem a circunferência em cinco partes iguais, de forma que a abertura entre cada um o seu adjunto vale 72° , como visto, abaixo, numa flor de maracujá [reino vegetal, *passiflora edulis*] e numa estrela do mar [reino animal, *asteroidea*], expostos por Stakhov, em sua obra *The Mathematics of Harmony* (1, p. 41).

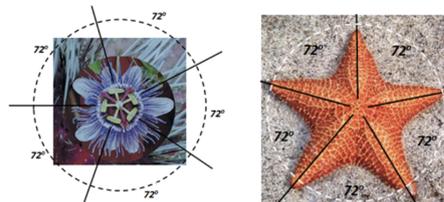


Figura 40 – Simetria pentagonal - Fonte (1, p.678)

Em tom de enriquecimento desses exemplos, podem ser tomadas a “rosa de cachorro”, a flor da pereira, da cerejeira, da macieira, da morangueira silvestre, etc. Todas elas apresentam, como visto a seguir, uma perfeita simetria pentagonal exposta pela natureza, especialmente na flora mundial (1, p. 678).



Figura 41 – Simetria nas flores - Fonte: Google imagens

3.3 Simetria dos cristais

Até o séc XVI, os cientistas viam a geometria dos cristais como algo transcendente, enigmático e misterioso. Essa leitura, entretanto, não perpassou a era de Johannes Kepler (1571-1630) que, em 1619, prestando atenção à simetria das seis dobras do floco de neve, tentou explicar o fenômeno, ligando-o a um possível fato de seus cristais serem construídos a partir de pequenas bolas idênticas, ligadas umas às outras. Essa explicação, mesmo não sustentável, influenciou o polímata inglês Robert Hooke (1635-1703) e o matemático russo Mikhail Lomonosov (1711-1765) (1, p. 101).



Figura 42 – Floco de neve - Fonte: Google imagens

Por volta de 1670, o cristalógrafo dinamarquês Nicolas Stenon (1638-1686) descobriu a principal lei da cristalografia geométrica, a Lei da Constância dos Ângulos de Interface, que tem sido o sólido fundamento para o desenvolvimento deste campo científico, garantindo a autêntica simetria das estruturas cristalográficas.



Figura 43 – Johannes Kepler, Robert Hooke, Mikhail Lomonosov - Fonte: Google imagens

Implementando o avanço, o pesquisador francês Rene Hauy (1743-1822) demonstrou que os cristais não são formados de pequenas esferas [como supunham Kepler, Hooke e Lomonosov], mas de tijolos moleculares em forma de paralelepípedo. Apesar da ingenuidade da ideia de Hauy, ela serviu de base para que, substituindo os “tijolos moleculares” por pontos, o físico francês Augusto Bravais (1811-1863) obtivesse as chamadas Redes de Cristais Espaciais, ainda antes da descoberta dos raios X (1, p. 101).

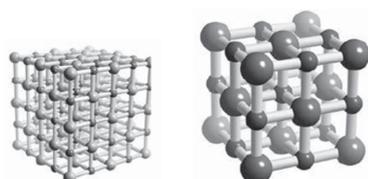


Figura 44 – Cristais espaciais do NaCl e CaO - Fonte (1, p.102)

Têm-se, na figura acima, as redes do cristal espacial do sal comum (NaCl) e do óxido de cálcio (CaO). A realidade dessas treliças na estrutura desses cristais se estende a todos os demais na natureza; e é universalmente aceito que os cristais são corpos sólidos constituídos de partículas (átomos, íons e moléculas) formado uma verdadeira treliça espacial, numa rigorosa expressão de simetria (1, p. 101). Isso significa que, considerando-se O, o ponto central do cristal, uma partícula X (átomo, íon ou molécula) desse cristal e um segmento de reta cujo ponto médio coincida com O e uma extremidade esteja em X; pode-se garantir que na outra extremidade há uma partícula (em tudo) idêntica a X.

3.4 O ritmo nos corpos celestes

A grande façanha das descobertas de Kepler, no séc XVII e em relação aos avanços copernicanos, não se deu, meramente, no terreno da trajetória (elíptica) dos planetas, mas, sobretudo, no terreno dos ritmos.

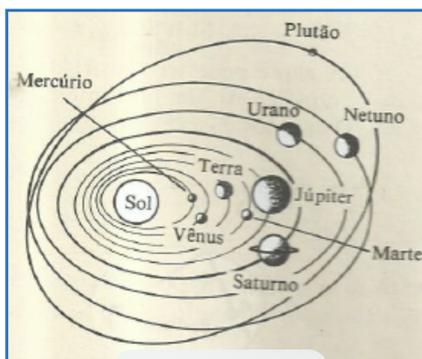


Figura 45 – Sistema planetário - Fonte (3, p.373)

Nos dias de Copérnico (1473-1543), eram conhecidos seis planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno). Com a perspicácia do alemão Johannes Kepler (1571-1630), assidente do conceituado astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), sabe-se, hoje, da existência de outros três planetas (Urano, Netuno e Plutão) e todos esses nove movem-se, em torno do sol, obedecendo períodos constantes, segundo a tabela abaixo (3, p. 375).

MASSAS E PERÍODOS DOS PLANETAS		
Planeta	Massa (em 10 ²⁴ toneladas)	Período (em anos terrestres)
Mercúrio	0,32	0,241
Vênus	4,86	0,615
Terra	5,98	1,000
Marte	0,64	1,881
Júpiter	1898	11,865
Saturno	568	29,650
Urano	87,3	83,745
Netuno	105	165,951

Figura 46 – Massas e períodos planetários - Fonte: Produzido pelo autor

É por demais interessante que, em se tratando do sistema solar, esse fenômeno rítmico não se dá, apenas, com os planetas, mas com todo e qualquer corpo que, eventualmente, gravite

em torno de outro, cuja massa seja bem maior. É o caso, por exemplo, dos satélites artificiais que se movem ao redor da terra (3, p. 375).

3.5 O ritmo no mundo zoológico

Não fica à parte do contexto dos ritmos, toda a esfera dos animais, quer aquáticos, répteis, anfíbios, domésticos, etc. W.L.Kelly, professor de Medicina Veterinária e Farmacologia do University College, Dublin, na Irlanda, traz em sua Obra, Diagnóstico Clínico Veterinário (5), uma lista da frequência cardíaca (com base em ondas por minuto) de diversos animais, entre as muitas espécies existentes.

TABELA VETERINÁRIA DE FREQUÊNCIA CARDÍACA (Pulso Normal)		
Animal	Representação	Batidas por minuto
Cavalo		34
Boi		68
Bezerro (recém-nascido)		110
Galo		80
Bode		80
Porco		75
Leitão		115
Cão (grande porte)		78
Cão (pequeno porte)		105
Gato		185
Coelho		158

Figura 47 – Frequência cardíaca nos animais - Fonte: Produzido pelo autor

3.6 O ritmo humano

É do conhecimento de todos, e comprovado cientificamente, que o coração do homem funciona como um pistão cilíndrico ou como uma bomba contrátil-propulsora, recebendo e

bombeando os, aproximadamente, seis litros de sangue para todo o corpo. Esse funcionamento não é aleatório, mas obedece, rigorosamente, a leis biológicas estabelecidas. O coração de uma pessoa que alcança 80 anos, bate (em média) 2,5 bilhões de vezes proporcionando-lhe a vida. Nesse contexto, envolve-se, obviamente, temperatura, pressão e frequência cardíaca.

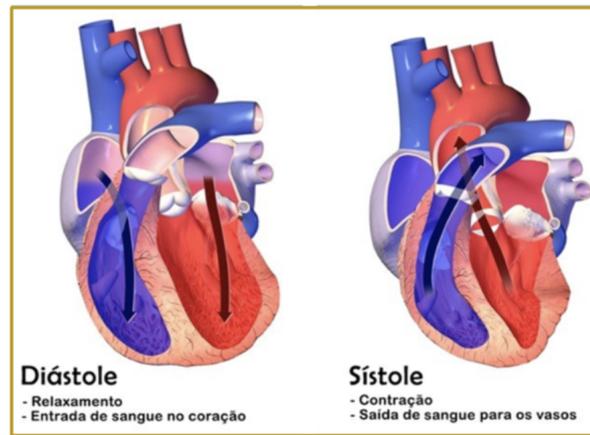


Figura 48 – Diástole e sístole - Fonte: Google imagens

Ao longo de todo o processo que se dá com o sangue no coração, a pressão sanguínea sofre variações, conforme apresentado na figura abaixo. Tomando-se como referencia o momento em que o coração bate (*A*), vêm, depois disso, dois fenômenos essenciais:

- (a) o fenômeno em que o coração recebe o sangue, e que é marcado pela diástole.
- (b) o fenômeno em que o coração bombeia o sangue, e é marcado pela sístole.

O primeiro fenômeno inicia com a diástole (*AB*), caracterizada pela brusca expansão do coração e a conseqüente queda de pressão e entrada de sangue no seu interior. Nesse momento (*B*) a pressão cardíaca alcança a sua cota mínima de, aproximadamente, 75mmHg. Ainda, nesse primeiro fenômeno, a diástole é sucedida pela continuidade da expansão do coração (*BC*), mas com um discreto aumento de pressão, que alcança o seu ponto máximo local (*C*).

O segundo fenômeno propicia uma discreta queda de pressão (*CD*), enquanto o coração se prepara para a sístole (*DE*), que é o súbito bombeamento do sangue, caracterizado por uma impetuosa redução de volume e o conseqüente aumento de pressão e saída do sangue em direção às artérias. Nesse instante (*E*), a pressão atinge o seu ponto máximo de, aproximadamente, 120mmHg. Vale-se observar-se que a razão entre as pressões sistólica e diastólica é $120/75 \approx 1,618 \approx \phi$ (1, p. 127).

Em 1997, o notável biólogo russo, Tsvetkov, publicou em sua Obra Simetria e Secção de Ouro no Coração, a marcante presença não só de ritmos no coração do homem [e todos os mamíferos, principalmente] mas da própria razão de ouro. Segundo a sua pesquisa, existe a frequência ótima (dourada) para uma pessoa, o que acontece em plena saúde, e esse quadro, é marcado por duas realidades:

- (a) Uma quantidade média de 60 batimentos por minuto.
- (b) Dentro do período (T) do processo cardíaco sobre o sangue, têm-se, para (t_1), tempo de sucção, e (t_2), tempo de recalque, a seguinte relação dourada: $\frac{T}{t_2} = \frac{t_2}{t_1} \approx 1,618 \approx \phi$ (1, p. 127).

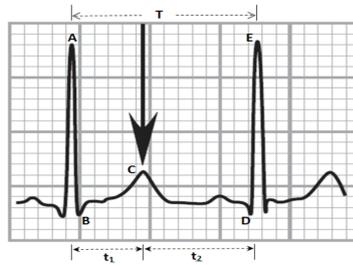


Figura 49 – Batimento cardíaco - Fonte (1, p.127)

4 A matemática natural e a sala de aula

Por mais exaustivo e brilhante que seja um trabalho realizado na observação matemática da natureza, se não contemplar o ensino em sala de aula, tornar-se-á opaco e incompleto, na científica esfera da docência; levando-se em conta que o supremo afã desta é o aperfeiçoamento da arte de se transmitir o conhecimento por vias compreensíveis e atrativas. Dessa forma, urge, sim, uma canalização do referido conhecimento, na intenção de se otimizar o aprendizado da matemática em sala de aula, aulas de campo, etc.

Este trabalho, como já dito, está voltado para os alunos do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, pessoas marcadas por transformações diversas e ampliação de vínculos socioafetivos, mas que, como reconhecido no Parecer CNE/CEB nº 11/2010, apresentam grande capacidade para raciocínios acentuadamente abstratos. Assim, trazemos à baila duas principais grandezas:

a) algumas formas de familiarizar esses alunos com a razão de ouro e a sequência de Fibonacci, fortes indicadores da matemática natural

b) algumas ideias para, nas plataformas da BNCC, utilizar a natureza como ferramenta estratégica para o ensino de temas como médias aritméticas, aproximação, configuração espacial, ângulos, etc.

4.1 Fibonacci em sala de aula



Figura 50 – Leonardo Fibonacci - Fonte: Google imagens

Como exemplo de atividades para tornar conhecida a sequência de Fibonacci, nas aulas de matemática, o professor poderá elaborar e apresentar problemas em sistemas de equação de 1º grau a serem resolvidos.

Exemplo: Dona Sílvia e a sua Tartaruga

Público Alvo: 8º e 9º anos

Unidade Temática: Álgebra

Objeto de Conhecimento: Sistemas de Equação de 1º grau

Ambiente Especial: Uma grande foto de Fibonacci no quadro

Material Específico: Não Necessário

Dona Sílvia tem, em grande estima, uma tartaruga, presente da sua falecida avó. Em uma longa conversa, um curioso descobriu que a soma das idades de dona Sílvia e da sua tartaruga é igual a 20% de F_{15} somados a $11/3$ de F_8 ; enquanto que a diferença entre a idade da tartaruga e o dobro da idade de dona Sílvia é igual a F_9 . Determine as idades de dona Sílvia e da sua tartaruga.

Para que o aluno resolva o problema, precisará, previamente, montar os 15 primeiros números de Fibonacci.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Figura 51 – Números de Fibonacci - Fonte: Produzido pelo autor

Daí vem:

$$i) s + t = 20\% \text{ de } 610 + 11/3 \text{ de } 21$$

$$ii) t - 2s = 34.$$

Ou seja,

$$s + t = 122 + 77$$

$$-2s + t = 34.$$

Por comparação, $s = 55$ e $t = 144$. Observe que as duas idades também pertencem à sequência de Fibonacci.

4.2 Razão de ouro em sala de aula

Como exemplo de atividades para que o aluno reflita melhor sobre a beleza do número de ouro nas aulas de matemática, o professor poderá apresentar as propriedades de um retângulo de ouro. Exemplo: Quadrados dentro de um Retângulo de Ouro

Público Alvo: 8º e 9º anos

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: Construções Geométricas, segmentos e ângulos

Ambiente Especial: Não Necessário

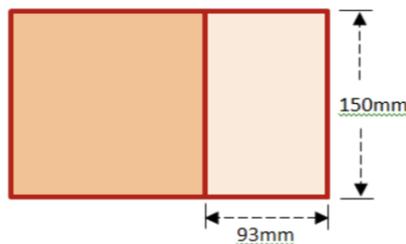
Material Específico: Uma folha de papel ofício, um lápis de grafite, uma borracha, uma régua 300mm e uma calculadora.

Procedimento:

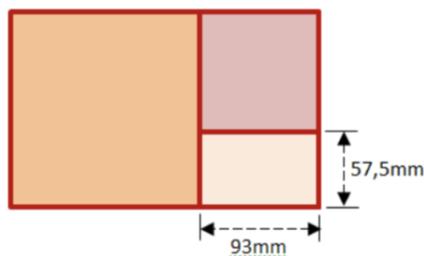
I) Dividir a turma em grupos de quatro alunos (por exemplo), solicitando-se a cada grupo que, com uma folha de papel tamanho ofício, desenhe um retângulo de lados 241,5mm x 150mm. Com o desenho construído, a equipe deverá calcular a razão entre o maior e o menor lados, verificando-se que se trata do valor de ϕ e que, portanto, se tem um retângulo de ouro.



II) Na segunda etapa, cada grupo deverá construir um quadrado dentro do retângulo, utilizando o seu menor lado. Ao lado do quadrado, haverá um novo retângulo, de dimensões 150mm x p. Entre as alternativas: a) 87mm b) 93mm c) 100mm e d) 107mm, o grupo deverá identificar [por aproximação] que o valor de p é 93mm e, após a identificação, a equipe deverá calcular a razão entre o maior e o menor lados, verificando-se que se trata, também, do valor de ϕ e que, portanto, se tem um outro retângulo de ouro.

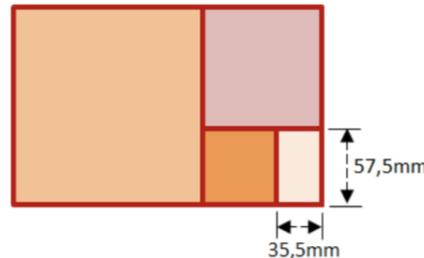


III) Na terceira etapa, cada grupo deverá construir um quadrado dentro do último retângulo, utilizando o seu menor lado. Ao lado do quadrado, haverá um novo retângulo, de dimensões 93mm x q. Entre as alternativas: a) 57,5mm b) 50,5mm c) 43,5mm e d) 36,5mm, o grupo deverá identificar [por aproximação] que o valor de q é 57,5mm e, após a identificação, a equipe deverá calcular a razão entre o maior e o menor lados, verificando-se que se trata, também, do valor de ϕ e que, portanto, se tem um outro retângulo de ouro.



IV) Na quarta etapa, cada grupo deverá construir um quadrado dentro do último retângulo, utilizando o seu menor lado. Ao lado do quadrado, haverá um novo retângulo, de dimensões

57,5mm x r. Entre as alternativas: a) 28,5mm b) 35,5mm c) 42,5mm e d) 49,5mm, o grupo deverá identificar [por aproximação] que o valor de r é 35,5mm e, após a identificação, a equipe deverá calcular a razão entre o maior e o menor lados, verificando-se que se trata, também, do valor de ϕ e que, portanto, se tem um outro retângulo de ouro.



V) O infinito processo poderá ser executado até a quinta e sexta etapas, quando [s = 22mm] e [t = 13,6mm], respectivamente. O resultado será, sempre, a razão de ouro.

4.3 O ritmo do coração

Uma boa dinâmica pedagógica, sobre o ritmo do coração dos animais, pode ser elaborada e vivenciada em sala de aula, para estimular o exercício matemático mental por meio do cálculo de médias aritméticas, no seu conceito mais fundamental, que consiste numa divisão em partes iguais do todo, entre os seus componentes (6, p. 18). Para isso, é muito interessante envolver-se todos os alunos da turma.

Público Alvo: 6° e 7° anos

Unidade Temática: Álgebra

Objeto de Conhecimento: Média Aritmética

Ambiente Especial: Tabela (no quadro) com a frequência cardíaca de cinco animais

Material Específico: 05 plaquinhas de papelão, onde estejam escritos os nomes dos 05 animais do quadro, um em cada.

CAVALO	CACHORRO	BEZERRO	COELHO	GATO
34 bat/min	78 bat/min	110 bat/min	158 bat/min	184 bat/min
				

Procedimento:

I) Cada um dos cinco alunos deverá calcular, mentalmente, a média aritmética da frequência do animal que representa e a imediatamente inferior (M_1); assim como a média da frequência do animal que representa e a imediatamente superior (M_2).

II) Em seguida deverá estar atento para atender à chamada de frequência entre M_1 e M_2 . Por Exemplo: No caso acima, se Carlos representa o Coelho, o seu $M_1 = (110 + 158)/2 = 134$ e o

seu $M_2 = (158 + 184)/2 = 171$. Logo Carlos atenderá as chamadas entre 134 e 171.

III) O professor a cada vez, anunciará um número entre a frequência de um e outro animal, e ver-se-á que aluno atenderá a chamada, entendendo que está no seu intervalo numérico.

Obs 1 : Poderão ser realizadas dez chamadas, canalizando duas para cada um

Obs 2 : No final, pode haver empate, obviamente.

Obs 3 : Mesmo em face de erro, o momento chamará a atenção para o número de batidas do coração de cada animal. E o professor, finalmente, enfatizará a universal realidade do ritmo no coração.

4.4 Simetrias em sala de aula e afins

Exemplos de atividades nessa área e sob a direta orientação do professor, podem ser tomados por observação em pesquisas de campo [museus, jardins, parques zoológicos, etc.], e por construção em sala de aula; de forma que o aluno se familiarize com as simetrias pentagonal e bilateral, por exemplo.

4.4.1 Observação de simetria

Público Alvo: 7º, 8º e 9º anos

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: Simetria

Ambiente Especial: Jardins, Parques, Museus, etc.

Material Específico: Não Necessário

É farta a presença de simetria nas folhagens de plantas na anatomia dos animais. Dessa forma, o professor poderá promover visitas aos ambientes citados e trabalhar a apreciação do aluno quanto às simetrias na natureza.

A) Simetria Pentagonal. Um grande percentual das rosas ou flores possuem cinco pétalas; logo, apresentam simetria pentagonal. Isso pode ser observado em quaisquer jardins, parques, reservas, etc. No laboratório de Zoologia da Universidade Federal de Pernambuco, há estrelas do mar preservadas e ao alcance de alunos.



B) Simetria Bilateral nas Plantas. Ao redor do Depto. de Biologia da UFPE, há uma enorme quantidade de diferentes perfis de folhas vegetais, que se expressam em simetria bilateral. Mas essa apreciação, sob o auxílio do professor, poderá ser feita nos jardins da própria escola ou de autorizadas casas da rua onde ela se localiza.



C) Simetria Bilateral em animais. São abundantes os casos de simetria bilateral nos animais, pois – como já dito – ela permite uma adequada locomoção. No Museu de Osteotecnia do Parque de Dois Irmãos há diversos exemplares de crânios de animais, em que é perceptível a simetria bilateral; e tudo fica ainda mais curioso, quando do acompanhamento do professor, com orientações coordenadas.



4.4.2 Construção de simetria bilateral

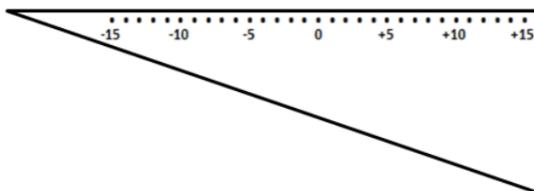
Público Alvo: 7º, 8º e 9º anos

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: Simetria

Ambiente Especial: Não Necessário

Material Específico: Um esquadro com régua entre -15cm e +15cm e uma folha de planta simétrica.



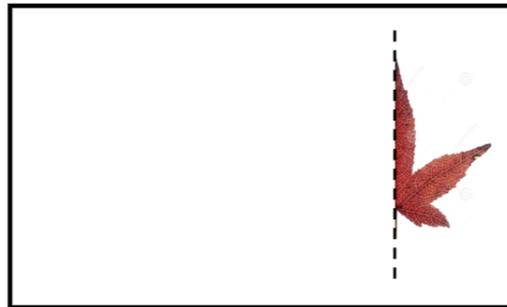
Procedimento:

I) Constrói-se um eixo de simetria vertical, a 15cm da borda direita do quadro branco

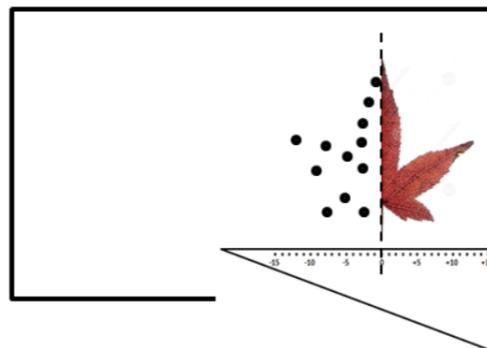
II) Coloca-se a folha vegetal sobre o quadro, de forma que o eixo da folha coincida com o eixo desenhado



III) Contornando-se somente a parte direita da folha, deixa-se o seu desenho no quadro.



IV) Através do esquadro graduado, apoiado na borda direita do quadro, onde pode deslizar livremente, constrói-se, para cada ponto do lado direito (+x), um ponto de mesma ordenada, no lado esquerdo (-x).



V) Finalmente, ligando-se os pontos, ter-se-á a folha completa, no tamanho original.

Obs: Esse exercício poderá ser feito com várias folhas no quadro e o aluno poderá adaptar a ideia para o caderno.

4.5 Filotaxia em sala de aula

Um interessante exercício, em sala de aula, pode ser feito na construção do perfil de um caule, no tocante à distribuição filotáxica das folhas. Trata-se de uma excelente atividade, em que

os alunos, em grupos de quatro, trabalharão ângulos, espaço e alinhamento vertical.

Exemplo: A Filotaxia da Pereira (2/5)

Público Alvo: 9º ano

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: Vistas de Figuras Espaciais

Ambiente Especial: Não Necessário

Material Específico para cada Equipe: Uma base circular de madeira com uma haste de 1cm de diâmetro e 35cm de altura; 06 pegadores de roupa (em madeira); seis folhas de plantas, feitas em papel adesivo; um transferidor de 360º ; uma Folha de papel ofício; uma régua escolar e um prumo.



Procedimento:

I) Marcam-se, em uma circunferência desenhada no papel ofício, os ângulos: 0° , 144° , 288° , 432° , 576° e 720° , pois a pereira, sendo de filotaxia 2/5, completa o ciclo em 2 voltas, com 5 giros de 144° .

II) Fura-se o papel no centro da circunferência e, assim, deve ser posto na base circular

III) À altura de 5cm (aproximadamente), prende-se um pegador sobre a indicação de 0° ; a 10cm, prende-se outro pegador sobre a indicação de 144° ; a 15cm, outro sobre a indicação 288° ; e 20cm, outro sobre 432° ; a 25cm, outro sobre 576° e, finalmente, a 30cm, prende-se o último pegador sobre a indicação 720° .

IV) Sobre cada pegador, coloca-se uma folha de papel adesivo e a tarefa está concluída.

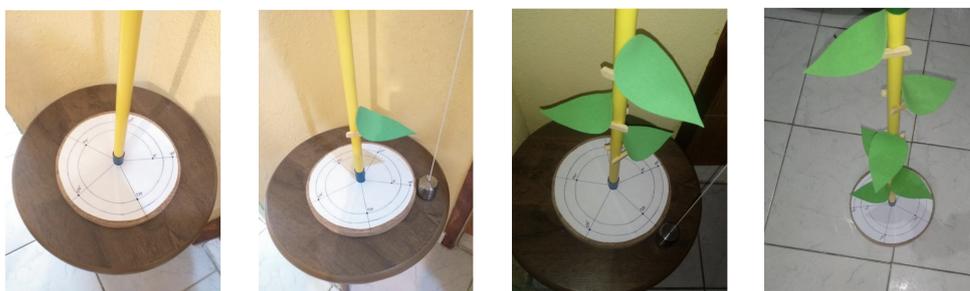


Figura 52 – Distribuição angular das folhas - Fonte: Produzido pelo autor

Obs 1 : O prumo será usado para garantir que cada pegador ou folha esteja na sua posição angular.

Obs 2 : O ciclo foi atingido pelo fato de a sexta folha estar rigorosamente sobre a primeira.

Conclusão

Como exaustivamente apresentado, é, mesmo, de precípua importância, o conhecimento da razão áurea e a série de Fibonacci, para que se tenha uma percepção mais adequada da gigantesca presença da matemática na natureza. A famosa razão de ouro, cultuada e enaltecida, foi a “pedra fundamental” das misteriosas e perfeitas construções egípcias e, a partir de Pitágoras, tem-se a completa denúncia de que foi o álamo da ciência, beleza, arte e gregas. Através de Euclides, a sua sistematização fê-la um espetáculo para o mundo, um brilho onipresente nas figuras da natureza e humanas. Apesar de obliterada em quase todo o milênio de medievalismo, ergueu-se, depois de então e imponentemente, na esfera da estética e do saber, proclamando-se bela e indispensável. A sequência de Fibonacci, por sua vez e com as suas infundáveis aplicações, dispensou comentários e registros, com a ressurreição das evidências da sua imperiosidade na observação inteligente e sistemática da beleza natural. Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano, Leonardo Posollo, ou simplesmente Fibonacci... quantos nomes! Mas é ímpar o avanço por ele produzido no mundo ocidental, a partir da sua sequência, não só na matemática, mas em biologia, química, física, e tantos outros campos do saber. É pitoresco o débito que se tem a Fibonacci na ciência da computação, nas funções hiperbólicas, na matemática da harmonia, na matemática moderna, na física teórica, e tantas outras áreas. A razão de ouro e sequência de Fibonacci, sem dívidas, têm se constituído num par de óculos, com os quais é possível se enxergar toda sorte de beleza no mundo natural que nos cerca.

Johann Bach, na Alemanha do séc XVIII; Wolfgang Mozart, na Áustria doséc XVIII; Ludwig van Beethoven, na Alemanha do séc XIX; Giuseppe Verdi, na Itália do séc XIX; Richard Wagner, na Alemanha do séc XIX, e tantos outros... Quem nunca se encantou com a imensurável beleza da música, com os seus tons e as suas oitavas? Pois é, a matemática está lá, bem viva e atraente. O que se dizer das equações tão matemáticas propostas e obedecidas pelos planetas, cometas e astros, nas regiões celestes? Elas estão lá, inflexíveis e atuantes; antigas e vigentes; escondidas e insofismáveis. Kepler e a sua história que o digam! Cada detalhe da primeira, segunda e terceira leis, cada princípio de trajetória, área ou tempo; tudo enaltecendo a impecável presença da matemática, mesmo de forma, à primeira vista, imperfeita e não compreendida, mas finalmente vitoriosa e triunfal, como a beleza de uma elipse.

O que há de mais sutil que as lindas flores, as folhas das plantas, as árvores? Na sua estrutura geral, está a matemática perfeição da filotaxia e o encantamento dos ângulos de distribuição. Na sua configuração, está a beleza e simetria bilateral, pentagonal, ou outra. Nada se encerrou. Tudo continua nas embalagens dos frutos [pinha, abacaxi, couve-flor, etc.].

O universo não seria completo sem o mundo das abelhas. Dentro dele estão os drones com os suas misteriosas ascendências. Sem pai, as suas árvores genealógicas, naturalmente, vão

obedecendo a sequência de Fibonacci. Mas percebeu-se que a rigorosa matemática não é uma beleza exclusiva do mundo das abelhas ou uma outra espécie animal; essa propriedade é vista com maestria nos seres que voam no céu e que nadam no mar; desde a mais singela andorinha, ao mais robusto elefante; desde o rei leão que se impõe na selva, à mais delgada borboleta. Esse universo deu, a Pitágoras, razão pra dizer: “tudo são números!”

No tocante à presença da matemática, em nada deixaria a desejar a anatomia do homem. Rodin (1840- 1917) estava certo ao declarar: “tudo é perfeição”! A percepção de Da Vinci, na Itália do séc XV; a leitura de Durer, na Alemanha do séc XVI; a descoberta de Polyclethus, na Grécia do séc V a.C.; a ênfase de Myron e Praxiteles, na Grécia do séc IV a.C.; o achado de Alexandro de Antioquia, no Egito do séc II a.C., e tantos outros. Todos eles, em situações, culturas, focos e tempos diferentes, foram atraídos e se detiveram como contempladores de uma mesma grandeza, a razão de ouro no homem. Altura, braço, antebraço, pernas, cabeça, peito... nada foge ao controle matemático na anatomia do corpo humano. Mas tudo isso, como visto, não foi o fim. A matemática coordena os ritmos das máquinas naturais. O coração dos seres vivos proclama essa insofismável verdade. sobrevoando o céu, a menos de 200m ou a mais de 10.000 metros de altura; arrastando-se sobre a terra, nos mais diversos climas e altitudes e ao longo do seu raio de 6.000 quilômetros; ou nadando no interior dos mares, até mesmo a uma pressão maior que 6 atm; a citada realidade não muda! Há um ritmo a ser obedecido pelo coração de cada ser vivo, nas suas mais intrínsecas propriedades. Condor dos Andes, Cegonha Branca, Fuselo, Pato Real, Abutre, Sisne, Ganso Cabeça-Listrada, todos com um coração em ritmo definido. A águia, reinando sobre as alturas; a abelha, na formidável produção do mel; a anta, o maior mamífero terrestre da América do Sul; a baleia, com a sua reconhecida inteligência; o boi, na sua enorme força de tração; a borboleta, com a sua beleza ímpar; o coelho na sua convivência com as rochas; o camelo e as suas muitas peculiaridades... todos, sem exceção, expressam uma matemática dentro de si, reforçando a ideia de um universo em harmonia, o que levou Johannes Kepler a dizer: “O objetivo geral de todas as pesquisas científicas do mundo é descobrir a harmoniosa ordem que Deus incorporou no universo e nos apresentou em linguagem matemática” (1, p. 56).

Todas essas grandezas de harmonia matemática podem ser trabalhadas em sala de aula, partindo-se de uma plataforma responsável, inteligente e consonante com as competências e propostas indicadas pelos PCNs e BNCC. Dessa forma, quer estritamente em sala de aula ou em aulas de campo, uma grande parcela desse importe de conhecimento e curiosidades pode ser transferida para o aluno, visando ao aprimoramento da metodologia e didática da matemática, e a conseqüente potencialização de uma aprendizagem referencial, produtiva e prazerosa.

Referências

- 1 STAKHOV, A. *The mathematics of harmony: From Euclid to contemporary mathematics and computer science*. [S.l.]: World Scientific, 2009.
- 2 JANTSCH ARI PAULO; BIANCHETTI, L. Interdisciplinaridade: para além da filosofia do sujeito. 2002 p. 204–204.
- 3 JUNIOR FRANCISCO RAMALHO; FERRARO, N. G. D. T. S. P. A. *Os fundamentos da física*. [S.l.]: Moderna, 2007.
- 4 MARCONDES, A. C. D. A. L. *Seres vivos*. [S.l.]: Atual, 1994.
- 5 KELLY, W. R. *Diagnóstico clínico veterinário*. [S.l.]: Interamericana, 1986.
- 6 CAZORLA I; SANTANA, E. Tratamento da informação para o ensino fundamental e médio. *Via Litterarum*, 2006.