Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências exatas e naturais
Programa de pós-graduação em matemática em rede nacional

LUIZ GUILHERME PANTOJA MOREIRA

SISTEMAS AXIOMÁTICOS NA MATEMÁTICA: CONSTRUÇÃO, REFLEXÕES E APLICAÇÕES

Belém - Pará
2020

LUIZ GUILHERME PANTOJA MOREIRA

SISTEMAS AXIOMÁTICOS NA MATEMÁTICA: CONSTRUÇÃO, REFLEXÕES E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Irene Castro Pereira.

Belém - PA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P198s Pantoja Moreira, Luiz Guilherme
Sistemas axiomáticos : construção, reflexões e aplicações / Luiz Guilherme Pantoja Moreira. — 2020.
70 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Irene Castro Pereira
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Matemática. 2. Axiomas. 3. Sistemas Axiomáticos. 4. Axioma da Escolha. I. Título.

CDD 510

LUIZ GUILHERME PANTOJA MOREIRA

SISTEMAS AXIOMÁTICOS NA MATEMÁTICA: CONSTRUÇÃO, REFLEXÕES E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 03 de julho de 2020.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Irene Castro Pereira (Orientadora)
UFPA

Profa. Dra. Tânia Madaleine Begazo Valdivia
UFPA

Profa. Dra. Maité Kulesza
UFRPE

Dedico esta dissertação aos meus avós
Maria Raimunda e Dilmar Moreira (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, agradeço a Deus, pela benção do conhecimento e a dádiva da curiosidade. Agradeço porque esteve comigo desde o indeferimento da solicitação de atendimento especial para fazer o Exame Nacional de Acesso ao Profmat até a conclusão deste curso de mestrado. Naquele sábado à noite, sozinho naquela sala do NPI, ouvi tua voz perguntando uma vez mais: “Confia em mim?”. Tu és fiel, Senhor! Dia após dia.

À família, em especial a minha mãe Leila e irmãos Raphael e Davi, que são a maior motivação que tenho para cada batalha desta vida. Vocês são gigantes!

À Universidade Federal do Pará, pelo oportunidade de estudo e aprofundamento do conhecimento a mim permitidos. Vocês sempre terão minha profunda admiração!

À Coordenação e Secretaria do Profmat Belém, por todo apoio sem reservas a mim concedido na realização de mais esta etapa da minha história.

Aos professores do Profmat Belém, pela paciência e conhecimentos compartilhados. Vocês são incríveis!

É claro que não posso deixar de agradecer de forma específica à professora Dra. Irene Castro, mulher brilhante que me orientou nesta pesquisa. Obrigado pela atenção e confiança a mim endereçadas. Você é um exemplo!

Gostaria também de agradecer aos demais membros da banca examinadora desta pesquisa, as professoras Dras. Tania Begazo (UFPA) e Maité Kulesza (UFRPE), pelas ricas considerações, imprescidíveis à confecção final deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, pelas resoluções de exercícios compartilhadas, palavras de incentivo e companheirismo sem par. Oro para que o futuro ainda nos reserve momentos tão bons quanto os que vivemos nas nossas saudosas sextas-feiras na Universidade.

Aos meus amigos, por cada vez que colocaram meu nome em suas orações. Obrigado por estarem comigo nos bons e maus momentos desta caminhada que chamamos “vida”. Vocês são meu bem mais precioso!

Aos meus mais que colegas de trabalho, em especial à Silmara Resque e Daniele Nogueira, pelo carinho, respeito e amizade que nos une a Cristo e por todo o incentivo a ingressar neste programa de pós-graduação. Vocês são espetaculares!

“As leis da natureza são apenas os
pensamentos matemáticos de Deus.”
Euclides

MOREIRA, L. G. P. **Sistemas axiomáticos na Matemática: construção, reflexões e aplicações.** 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

RESUMO

Axiomas são verdades inquestionáveis, universalmente válidas, muitas vezes utilizadas como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação. Nesse sentido, a compreensão do funcionamento de um Sistema Axiomático pode ser uma rota para entender o que é Matemática e, a partir desse conhecimento, obter professores ainda mais competentes em sua prática docente. Para cumprir os objetivos desta pesquisa, o presente trabalho apresenta uma revisão bibliográfica a respeito do tema com a intenção de definir os axiomas matemáticos que compõem a Teoria Axiomática de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (Teoria ZFC) e compreender o funcionamento e importância deles ao longo da História da Matemática. Mais importante que conhecer tal funcionamento é perceber suas implicações para o Ensino de Matemática atual. Por fim, como motivação para futuras pesquisas, registram-se duas importantes contribuições para a Matemática que conhecemos hoje: os Teoremas de Incompletude de Gödel e a Hipótese do contínuo.

Palavras-chave: Matemática; Axiomas; Sistemas Axiomáticos; Axioma da Escolha.

MOREIRA, L. G. P. **Axiomatic systems in Mathematics: construction, reflections and applications.** 70 s. Dissertation (Professional Master in Mathematics) - Postgraduate Program in Mathematics in National Network, Federal University of Pará, Belém, 2020.

ABSTRACT

Axioms are unquestionable truths, universally valid, often used as principles in the construction of a theory or as the basis for an argument. In this sense, understanding the functioning of an Axiomatic System can be a route to understand what Mathematics is and, from this knowledge, obtain even more competent teachers in their teaching practice. To fulfill the objectives of this research, the present work presents a bibliographic review about the theme with the intention of defining the mathematical axioms that make up the Axiomatic Theory of Zermelo-Fraenkel with the Axiom of Choice (ZFC Theory) and understand the functioning and importance of them throughout the History of Mathematics. More important than knowing this functioning is to understand its implications for Teaching Mathematics today. Finally, as a motivation for future research, two important contributions to mathematics that we know today are registered in this research: Gödel's incompleteness theorems and the continuum hypothesis.

Key-words: Mathematics; Axioms; Axiomatic Systems; Axiom of Choice.

Sumário

INTRODUÇÃO

Qualquer professor de matemática, em algum momento da docência, questionamos, ainda que de forma inconsciente, sobre a veracidade de alguns conceitos e propriedades da matemática. "Como não existe um teorema matemático que nos defina o que é um axioma?" ou "Seria um axioma uma verdade pronta que, às cegas, preciso aceitar?" são tipos de perguntas que parecem não possuir uma resposta imediata.

Isso acontece porque, antes de obter respostas a perguntas desse tipo, somos quase que obrigados a questionar a própria atividade matemática. Sendo assim, não estamos diante de um problema de matemática (afinal, com esse tipo de problema já estamos mais que familiarizados), mas sobre ela própria (SILVA, 2007).

Gottschalk (2008), baseada nas reflexões filosóficas de Ludwig Wittgenstein (1889-1951), aponta para determinadas implicações educacionais quando estamos aprisionados a uma concepção exclusivista e reducionista da linguagem. A autora sugere outro modo de se ver as relações entre ensino e aprendizagem, ao considerarmos o papel peculiar que as proposições da matemática exercem nos diversos contextos em que são empregadas. Grande parte destas reflexões dizem respeito aos fundamentos do conhecimento matemático, com o objetivo de esclarecer algumas das questões levantadas pelos filósofos da matemática. São exemplos delas:

> O conhecimento matemático refere-se de fato a uma realidade objetiva, apreensível por meio de algum método? De onde viria a evidência de seus axiomas, definições e postulados? Como as expressões que decorrem dessas estipulações nos levam a construir os mais diversos equipamentos, pontes que não caem, foguetes e as mais altas tecnologias? E a intuição, teria algum papel no processo de construção desse conhecimento? Enfim, como a mente humana se torna capaz de possuir esse conhecimento? De onde viria a necessidade das proposições matemáticas? (GOTTSCHALK, 2008, p. 78)

Segundo a autora, tentar responder qualquer uma destas questões tem levado a paradoxos e contradições sem solução. O desafio do educador atualmente seria refletir de modo a esclarecer a misteriosa conexão entre ensinar e constituir significados, "contribuindo para a compreensão de como se dá o processo de construção e transmissão do conhecimento matemático no contexto escolar" (GOTTSCHALK, 2008, p. 78).

A primeira pergunta que surge é "O que é um axioma?" e essa já decoramos responder. Para provar um teorema, é natural fazermos uso de outro que, por sua vez, também é provado por meio de um terceiro e assim por diante. Imagine então que, depois de ter recorrido a todos os teoremas para provar um primeiro, você encontra uma declaração (ou mesmo uma ideia) tal que, de tão elementar, dispensa até mesmo uma prova. A esta declaração chamamos "axioma" – uma ideia intuitiva que, de tão "simples" (o Axioma da Escolha explica o porquê das aspas aqui), não pode ser provada.

Este trabalho aborda os principais axiomas da matemática e a importância deles no ensino desta disciplina. A compreensão do funcionamento de um Sistema Axiomático pode ser uma maneira de entender o que é matemática e, empossados desse conhecimento, acreditamos ser possível obter professores ainda mais competentes em sua prática docente e, consequentemente, melhorias na qualidade do ensino.

Como objetivo específico desta pesquisa, pretendemos conduzir profissionais da Educação à:

1. Reflexão sobre a axiomática da matemática e a importância da organização lógica desta ciência ao longo do tempo; e

2. Identificação de caminhos para potencializar a prática docente por meio do conhecimento acerca dos princípios que norteiam a matemática.

Para alcançar todos os objetivos desta pesquisa, valemo-nos de uma revisão bibliográfica a respeito do tema com a intenção de definir os principais axiomas matemáticos (de forma específica os que compõem a Teoria Axiomática de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha) e compreender o funcionamento e importância deles ao longo da História da Matemática. Identificaremos suas propriedades, necessidades de existência e a aplicabilidade no Ensino de Matemática no Ensino Básico.

No primeiro capítulo, definiremos o que são axiomas e Sistemas Axiomáticos e também veremos as contribuições de Cantor e sua famosa Teoria dos Conjuntos ao assunto. No segundo capítulo, definiremos paradoxos e abordaremos um de forma específica - o Paradoxo de Russell (bem como suas curiosas versões). No terceiro capítulo, abordaremos os axiomas de Zermelo-Fraenkel e suas importâncias, definições, propriedades e operações com conjuntos. Dedicamos os dois capítulos seguintes ao Axioma da Escolha, suas equivalências e uso em várias áreas da matemática. Abordaremos então outro paradoxo - o de Banach-Tarski, que apresenta uma esfera que pode ser particionada e depois remontada em outra esfera de tamanho maior. No sexto capítulo, abordaremos brevemente acerca da construção de um Sistema Axiomático e pelo menos três planos de incidência: afim, projetivo e hiperbólico, conforme proposto nos estudos de Martin (1986). Finalmente, nos capítulos finais, a fim de incentivar outras pesquisas, apresentamos um resumo acerca dos famosos Teoremas de Incompletude de Kurt Gödel, resultados de grande importância para a lógica e filosofia matemática, e também sobre a hipótese do contínuo, interessante conjectura proposta por Cantor.

Conhecendo o nível de importância que este estudo pode atingir no que diz respeito ao ensino-aprendizagem da matemática, acreditamos atingir outro objetivo tão importante quanto os que já apresentamos - oferecer aos docentes de matemática um material embasado que apresenta, de uma forma mais compreensível, não uma fórmula pronta para a ministração de aulas eficazes, mas uma adequada delimitação da importância do conhecimento e estudo dos fundamentos da matemática no Ensino Básico.

1 AXIOMAS E SISTEMAS AXIOMÁTICOS

De acordo com Santos (2014), os axiomas são verdades inquestionáveis, universalmente válidas, que muitas vezes são utilizadas como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação. Segundo o autor, etimologicamente, a palavra "axioma" vem do grego *axios*, que significa "digno" ou "válido", sendo também sinônimo de postulado, lei ou princípio.

A palavra "axiomático", portanto, refere-se a algo evidente, inquestionável, incontestável e o mais imediato - relativo aos axiomas. De acordo com Santos (2014, p. 2), um Sistema Axiomático consiste no "conjunto dos axiomas que definem uma determinada teoria e que constituem as verdades mais simples a partir das quais se demonstram os novos resultados dessa teoria".

Martin (1986), por sua vez, define um Sistema Axiomático como sendo um agrupamento de termos indefinidos e uma lista de axiomas referentes a estes termos. Em seus estudos, o autor nos permite constatar que cada novo axioma que vai constituir um Sistema Axiomático deve ser independente dos axiomas anteriores. Sobre o termo "independente" trataremos mais à frente nesta pesquisa.

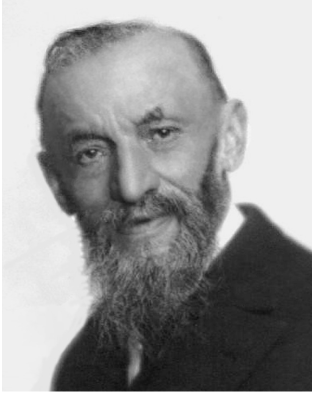
São exemplos de Sistemas Axiomáticos os axiomas de Giuseppe Peano (1858-1932) - que representam a base dos estudos em aritmética elementar - e os axiomas de Euclides de Alexandria - que fundamentam a geometria que recebe o nome deste importante matemático e escritor grego: a Geometria Plana Euclidiana (SANTOS, 2014).

Figura 1: Euclides de Alexandria

Fonte: Wikiblog colaborativo Culturama, 2020[1]

[1]Disponível em: <https://edukavita.blogspot.com>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Figura 2: Giuseppe Peano



Fonte: Wikipédia, 2020[2]

Relembremos agora algumas definições que são necessárias no presente estudo. A de teorema, por exemplo. Segundo Santos (2014), um **teorema** é uma proposição que pode ser demonstrada de uma maneira lógica a partir de um axioma ou de outros teoremas, desde que tenham sido previamente demonstrados (provados). Nesse sentido, Poggi (2020, p. 2) concorda com Santos (2014) e completa:

> É dessa forma que se desenvolvem diversas áreas de conhecimento: resultados cada vez mais complexos podem ser provados a partir de resultados mais simples. Essa cadeia, no entanto, não é infinita. Há dois tipos de enunciados que não precisam (e não podem) ser provados, as definições e os axiomas. Em última análise, todos os teoremas são provados a partir unicamente deles.

O termo "simples" utilizado na definição de Sistema Axiomático de Santos (2014) e constante nesta afirmação de Poggi (2020) parece no mínimo contraditório quando confrontado com a profundidade do Axioma da Escolha, por exemplo, sendo este nada ingênuo quanto pode aparentar. Adiante, dedicaremos uma boa parte deste trabalho para falar apenas sobre este importante axioma e seu uso na matemática, conforme abordado por Hrbacek e Jech (1999), Martin (1986) e outros estudiosos.

Santos (2014) define **lema** como a afirmação de um teorema maior e o **corolário** como uma afirmação que segue de forma imediata ao teorema. Finalmente, o autor define uma **proposição** como sendo um resultado que não está associado a nenhum teorema específico e destaca que uma afirmação não passa de uma **hipótese** (ou conjectura) se não for demonstrada. Todas essas definições e as distinções entre elas precisam estar bem claras em nossa mente.

[2]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Alguns teoremas conhecemos bem. São eles:

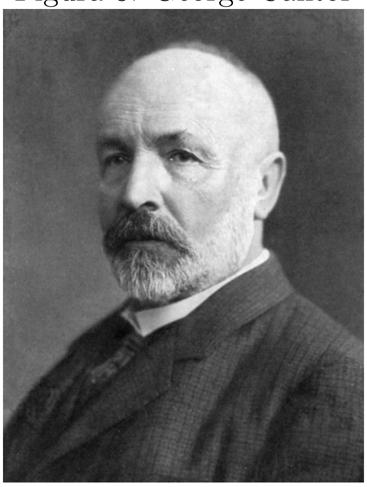
a) **Teorema de Tales** - Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra;

b) **Teorema de Pitágoras** – a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do mesmo triângulo;

c) **Teorema de Pitot** – Em um quadrilátero convexo circunscritível (ou seja, um em que um círculo pode ser inscrito), o resultado da soma dos comprimentos dos lados opostos é o mesmo; e

d) O último **Teorema de Fermat** cujo enunciado afirma que $x^n + y^n = z^n$ não possui solução para números inteiros x, y e z se n, também inteiro, é maior que 2. Este teorema, uma das charadas mais difíceis da história da Álgebra, foi solucionado em 1994 pelo gênio britânico Andrew John Wiles, professor da Universidade de Oxford (SINGH, 1998).

Figura 3: George Cantor



Fonte: Wikipédia, 2020[3]

Um importante personagem na história da Teoria dos Conjuntos foi George Cantor (1845-1918). Segundo Aguiar (2015, p. 24), sobre Cantor:

[3]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor>. Acesso em: 10 jul. 2020.

> Seu estudo em relação aos conjuntos, em especial aos conjuntos infinitos, ao mesmo tempo em que lhe deram características de objetos matemáticos, foram de fundamental importância para a consolidação do que hoje sabemos sobre eles.

Santos (2014), por sua vez, afirma que, em sua obra, Cantor concentrava-se em um conceito meramente intuitivo de conjuntos. Estes geralmente identificados por meio da designação de seus elementos (extensão) ou por meio da indicação de uma propriedade que os caracterizasse (compreensão). Tal concepção informal, além de vaga e insuficiente para o desenvolvimento da matemática, favoreceu o aparecimento de vários paradoxos - o Paradoxo de Russell, por exemplo, que veremos a seguir.

> Cantor estava bem consciente destas dificuldades, reconhecendo que não poderia existir o conjunto de todos os conjuntos, e admitia que há propriedades que determinam conjuntos e outras não, sem que tivesse apontado um critério bem definido para decidir sobre isso (SANTOS, 2014, p. 4).

Era evidente na comunidade matemática a necessidade de se estruturar com mais rigor as noções de conjunto. Nesse contexto, surge a Teoria de Zermelo-Fraenkel. Este Sistema Axiomático propõe a regulamentação axiomática do conceito de conjunto, incorporando o conceito intuitivo de conjuntos usado pelos matemáticos (SANTOS, 2014).

Sobre a Teoria de Zermelo-Fraenkel, trataremos em breve. Vejamos antes disso de que trata o paradoxo de Russell.

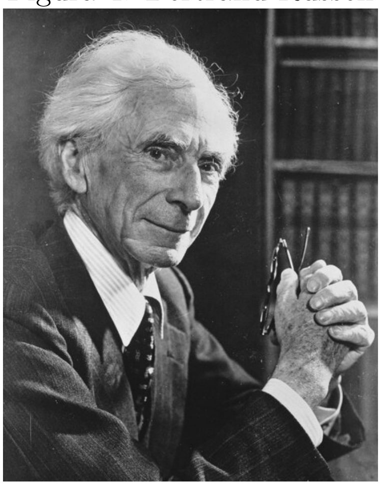
2 O PARADOXO DE RUSSELL

Usamos a palavra “paradoxo” para indicar uma aparente contradição que pode ser solucionada ou mesmo uma contradição verdadeira sem solução (SANTOS, 2014). Existem registros de paradoxos em suas variadas formas desde a Grécia Antiga. Lages (2014, n.p) nos lembra um exemplo bem clássico:

> Eubulides de Mileto, no século 4 a.C., perguntou: “Um homem diz que está mentindo. O que ele diz é verdade ou mentira?”. Mais uma vez, encontramos uma afirmativa que leva à negação e uma negação que leva à afirmativa. Se o homem estiver mentindo, então ele está falando a verdade. Se o homem estiver falando a verdade, então ele está mentindo. O problema revelado aqui é da ordem do senso comum: o que entendemos por verdade e mentira nos leva a contradições.

Em 1901, enquanto trabalhava em seu livro “Os princípios da Matemática” (*Principia mathematica* em latim), Bertrand Russell (1872-1970) descobriu uma construção que expunha uma falha nos fundamentos da Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor (1845-1918), o que levou cientistas a repensarem a lógica moderna. Segundo a teoria de Cantor, um conjunto pode conter outros conjuntos, inclusive a si mesmo. Porém, isso não é verdade para todos os conjuntos, já que existem alguns que não podem conter a si mesmos. Esta construção é conhecida hoje como paradoxo de Russell (LAGES, 2014).

Figura 4: Bertrand Russell



Fonte: Wikipédia, 2020[4]

Paradoxo de Russell. *Existe um conjunto universo, isto é, que contém todos os conjuntos.*

[4]Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell>. Acesso em: 10 jul. 2020.

O paradoxo vem de supor que existe um conjunto de todos os possíveis elementos de qualquer conjunto, pois nesse caso o conjunto seria elemento de si mesmo.

Segundo Wade (2018, n.p), a resposta do próprio Russell ao quebra-cabeça que criou veio na forma de uma "teoria dos tipos":

> O problema no paradoxo, raciocinou ele, é que estamos confundindo uma descrição de conjuntos de números com uma descrição de conjuntos de conjuntos de números. Assim, Russell introduziu uma hierarquia de objetos: números, conjuntos de números, conjuntos de conjuntos de números etc. Esse sistema serviu de veículo para as primeiras formalizações dos fundamentos da matemática; ainda é usado em algumas investigações filosóficas e em ramos da ciência da computação.

Agora podemos demonstrar um teorema importante decorrente deste paradoxo.

Teorema 2.1. *Não existe o conjunto que contém todos os conjuntos.*

Demonstração. Suponhamos que exista V, o conjunto de todos os conjuntos. Seja $B = \{x \in V \mid x \notin V\}$. Pela definição de B, temos que: $B \in B \iff B \notin B$, o que é uma contradição. Desta forma, não existe V. $\square$

Por fim, vamos mostrar uma versão deste paradoxo, usada pelo próprio Bertrand Russell como ilustração (sugerida a ele por uma pessoa não identificada) que ficou conhecida como Paradoxo do Barbeiro. Tal versão pode ser encontrada no livro "The Philosophy of Logical Atomism" e foi considerada pelo próprio Russell "não muito difícil de resolver" (RUSSELL, 1985, p. 101, tradução nossa).

O paradoxo do barbeiro consiste em considerar um grupo de barbeiros que raspam apenas aqueles homens que não se barbeiam. Suponha então que haja um barbeiro nesse grupo que não se barbeia. Deste modo, pela definição do grupo, ele deve se barbear. Porém, nenhum barbeiro do grupo pode se barbear, pois, se fizer a barba, ele seria um homem que faz a barba de homens que se barbeiam (WADE, 2018).

A partir deste paradoxo, vários matemáticos se debruçaram sobre o problema de criar axiomas para que pudesse ser estabelecida uma Teoria dos Conjuntos baseadas em regras para a formação de objetos que se chamariam conjuntos. Mais tarde, em 1904, Zermelo apresenta à comunidade matemática uma possível coleção de axiomas para a Teoria dos Conjuntos que, com pequenas alterações, é conhecida atualmente como os Axiomas de Zermelo-Fraenkel (SANTOS, 2014). Abordaremos esta Teoria no capítulo a seguir.

3 SISTEMA AXIOMÁTICO ZFC

O sistema formado pelos axiomas que veremos a seguir foi essencialmente formulado por Ernst Zermelo em 1908 e é conhecido como **Sistema Axiomático de Zermelo-Fraenkel** para Teoria dos Conjuntos.

Figura 5: Ernest Zermelo

Fonte: Wikipédia, 2020[5].

Figura 6: Adolf Fraenkel

Fonte: Wikipédia, 2020[6]

Apesar das maiores contribuições à Teoria terem sido dadas por Ernest Zermelo (1871-1953) - que apresentou à coleção oito axiomas - e Adolf Fraenkel (1891-1965) - que acrescentou à coleção o Axioma da Substituição, razão pela qual o Sistema Axiomático é

[5]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernst_Zermelo>. Acesso em: 10 jul. 2020.
[6]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Adolf_Abraham_Halevi_Fraenkel>. Acesso em: 10 jul. 2020.

denominado por Teoria ZF (devido às iniciais dos sobrenomes), o matemático húngaro John von Neumann (1903-1957) também contribuiu para o estabelecimento do Sistema ao acrescentar o Axioma da Fundação à lista de axiomas (LEAL, 2016).

Figura 7: John von Neumann

Fonte: Wikipédia, 2020[7]

Quando se agrega o Axioma da Escolha a esse sistema, este passa a ser denominado **Sistema Axiomático ZFC**. A letra C aqui vem do inglês *choice* - "escolha".

Conforme pesquisa bibliográfica nos estudos de Hrbacek e Jech (1999) e outros estudiosos (a quem faremos referência quando necessário), vejamos então os principais axiomas que compõem este Sistema:

3.1 O Axioma da Existência

Existe um conjunto que não possui elementos.

Um conjunto sem elementos pode intuitivamente ser descrito de várias formas. Por exemplo, como o conjunto de todas as presidentas do Brasil antes de 2010 ou o conjunto de todos os reais x que satisfazem $x^2 = -1$. Todos os exemplos desse tipo descrevem um e o mesmo conjunto chamado *conjunto vazio*. Intuitivamente também podemos provar a existência de um único conjunto vazio, porém, antes é preciso outro postulado que expresse o fato de que cada conjunto é determinado pelos seus elementos.

Exemplo 3.1. Considere os conjuntos a seguir:

[7]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann>. Acesso em: 10 jul. 2020.

A é o conjunto constituído exatamente pelos números 3 e 5.

B é o conjunto de todos os números inteiros ímpares compreendidos entre 2 e 6.

C é o conjunto de todas as soluções inteiras da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Note que $A = B$, $A = C$ e $B = C$. Deste modo, temos três descrições diferentes para um mesmo conjunto - o que nos leva ao próximo axioma: o Axioma da Extensão.

3.2 O Axioma da Extensão

Se cada elemento de A é um elemento de B e cada elemento de B é um elemento de A, então $A = B$.

Em outras palavras, se dois conjuntos possuem os mesmos elementos, ou ainda, a mesma extensão, então eles são iguais.

Exemplo 3.2. Considere os conjuntos a seguir:

(a) X é o conjunto das soluções inteiras da equação $x^2 - 5x + 6$;

(b) Y é o conjunto de todos os números naturais primos menores que 4.

Uma vez que os elementos de X e Y são exatamente 2 e 3, então, X e Y coincidem, ou seja, $X = Y$.

Ao afirmar que dois conjuntos são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos, a teoria fornece naturalmente a relação de igualdade entre conjuntos. Sendo assim, escrevemos que A = B para indicar que $x \in A$ se, e somente se, $x \in B$. Nesta relação, a propriedade de simetria é válida, isto é, se $A = B$, então $B = A$ (SANTOS, 2014).

Segundo Halmos (1970, p. 3), é importante compreender "que o Axioma da Extensão não é somente uma propriedade logicamente necessária da igualdade, mas uma asserção não-trivial sobre a pertinência."

É o Axioma da Extensão que nos permite provar o lema a seguir.

Lema 3.3 (Unicidade do conjunto vazio)**.** *Existe um único conjunto que não possui elementos.*

Demonstração. Consideremos A e B conjuntos sem elementos. Então cada elemento de A é um elemento de B (uma vez que A não tem elementos, a proposição "$a \in A$ implica $a \in B$" é uma implicação com falso antecedente, logo verdadeira). Analogamente, cada elemento de B é um elemento de A (uma vez que B não tem elementos). Portanto, $A = B$, pelo Axioma da Extensão. $\square$

Definição 3.4. O único conjunto que não possui elementos é chamado **conjunto vazio** e denotado $\emptyset$.

Note que a definição da constante $\emptyset$ é justificada pelo Axioma da Extensão e pelo lema da unicidade do conjunto vazio.

Podemos dizer de forma intuitiva que conjuntos são coleções de objetos que compartilham alguma propriedade comum e esperamos ter axiomas que expressem esse fato. Porém, vale lembrar que nem toda propriedade descreve um conjunto. "$X \notin X$" ou "$X = X$", por exemplo. Em ambos os casos, o problema parece ser que, para coletar todos os objetos que possuem determinada propriedade em um conjunto, já precisamos ser capazes de perceber todos os conjuntos. Tal dificuldade pode ser evitada se postularmos a existência de um conjunto de todos os objetos com a propriedade dada somente se já existir algum conjunto ao qual todos eles pertencem (HRBACEK; JECH, 1999).

3.3 O Axioma-esquema da Compreensão

Seja P uma propriedade de x. Para cada A, existe B tal que $x \in B$ se, e somente se, $x \in A$ e $\boldsymbol{P}(x)$ é válida.

Alguns autores chamam este axioma de "Axioma da Especificação" ou ainda "Axioma da Separação". Trata-se na verdade de um esquema de axiomas (ou um conjunto deles), pois com ele se obtém um axioma para cada propriedade P que se considere. Por exemplo, se $\mathbf{P}(x)$ é "$x = x$", o axioma nos permite afirmar que:

Para qualquer conjunto A, existe um conjunto B tal que $x \in B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x = x$ (nesse caso, $B = A$).

Se $\mathbf{P}(x)$ é "$x \notin x$", o axioma postula:

Para qualquer conjunto A, existe um conjunto B tal que $x \in B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \notin x$.

Segundo Hrbacek e Jech (1999), embora o suprimento de axiomas seja ilimitado, isso não causa problemas, já que é fácil reconhecer se uma afirmação específica é ou não um axioma e também pelo fato de que toda prova usa uma quantidade finita de axiomas.

A propriedade $\mathbf{P}(x)$ pode depender de outros parâmetros $p, \ldots, q$. O axioma correspondente logo postula que para quaisquer conjuntos $p, \ldots, q$ e qualquer A, existe um conjunto B (dependente de $p, \ldots, q$ e, é claro, de A) constituído exatamente por todo $x \in A$ que satisfaz $P(x, p, \ldots, q)$.

Segundo Silva e Jesus (2007, p. 18):

> Um problema que surge com esse axioma é que em sua formulação usa-se uma noção imprecisa de propriedade, pois não se especifica exatamente quais asserções devam ser consideradas como tal – o que pode levar a paradoxos classificados como semânticos (ou "linguísticos") [...] Thoralf Skolem propõe em 1922 que a solução mais adequada para tornar precisa a formulação desse axioma [...] é a especificação prévia de uma linguagem formal para a Teoria Axiomática de Zermelo.

Exemplo 3.5. Se P e Q são conjuntos, então existe um conjunto R tal que $x \in R$ se, e somente se, $x \in P$ e $x \in Q$.

Demonstração. Considere a propriedade $P(x, Q)$ e Q : "$x \in Q$". Então, pelo Axioma-esquema da Compreensão, para cada Q e cada P, existe um conjunto R tal que $x \in R$ se, e somente se, $x \in P$ e vale $P(x, Q)$, ou seja, se, e somente se, $x \in P$ e $x \in Q$ (P desempenha o papel de A, Q é um parâmetro). $\square$

Lema 3.6. *Para cada A, existe um único conjunto B tal que $x \in B$ se, e somente se, $x \in A$ e vale $\boldsymbol{P}(x)$.*

Demonstração. Se B' é outro conjunto tal que $x \in B'$ se, e somente se, $x \in A$ e $\mathbf{P}(x)$ é válida, então $x \in B$ se, e somente se, $x \in B'$, logo $B = B'$, pelo Axioma da Extensão. $\square$

Uma vez verificada a unicidade do conjunto construído pelo axioma, podemos agora atribuir um nome ao conjunto B.

Definição 3.7. $\{x \in A | \mathbf{P}(x)\}$ é o conjunto de todo $x \in A$ com a propriedade $\mathbf{P}(x)$.

Exemplo 3.8. O conjunto do Exemplo 3.5 podia ser denotado $\{x \in P \mid x \in Q\}$.

Em referência ao Axioma da Especificação, Halmos (1970, p. 8) conclui que:

> para especificar um conjuntos, não é suficiente pronunciar algumas palavras mágicas [...]; é necessário também ter à mão um conjunto a cujos elementos as palavras mágicas se aplicam.

Precisamos tornar nosso sistema de axiomas mais forte, pois o único conjunto cuja existência já foi provada é o conjunto vazio, sendo que as aplicações do Axioma-esquema da Compreensão para o conjunto vazio só nos levariam ao conjunto vazio novamente: $\{x \in \emptyset \mid \mathbf{P}(x)\} = \emptyset$ para qualquer propriedade P. Os três próximos princípios postulam que algumas das construções que usamos com frequência em matemática produzem conjuntos. Começaremos pelo Axioma do Par.

3.4 O Axioma do Par

Para qualquer A e B, existe C tal que $x \in C$ se, e somente se, $x = A$ ou $x = B$.

Logo, $A \in C$ e $B \in C$. Além disso, não há outros elementos de C. O conjunto C é único.

Definição 3.9. Chamamos de **par não-ordenado** de dois conjuntos A e B o conjunto que os possui como elementos e denotamos $\{A, B\}$. Em particular, se $A = B$, escrevemos A em vez de $\{A, A\}$.

Exemplo 3.10.

(a) Sejam $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$. Temos que $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ é o conjunto no qual $\emptyset \in \{\emptyset\}$, e se $x \in \{\emptyset\}$, então $x = \emptyset$. Logo $\{\emptyset\}$ possui um único elemento $\emptyset$. Observe que $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, pois $\emptyset \in \{\emptyset\}$, mas $\emptyset \notin \emptyset$.

(b) Consideremos agora $A = \emptyset$ e $B = \{\emptyset\}$, então $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Além disso, $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são os únicos elementos de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Note que $\emptyset \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

O Axioma do Par nos assegura que todo conjunto é um elemento de algum conjunto e que dois conjuntos quaisquer são, ao mesmo tempo, elementos de pelo menos um mesmo conjunto (HALMOS, 1970).

3.5 O Axioma da União

Para qualquer S, existe U tal que $x \in U$ se, e somente se, $x \in A$ para algum $A \in S$.

O conjunto U é único e o chamaremos de **união** de S (denotado por $\bigcup S$). Dizemos que S é um sistema de conjuntos ou uma coleção de conjuntos quando queremos enfatizar que seus elementos são conjuntos (obviamente isto é sempre verdade – todos os nossos objetos são conjuntos e, portanto, as expressões "conjuntos" e "sistema de conjuntos" possuem o mesmo significado.

A união de um sistema de conjuntos S é, então, um conjunto constituído precisamente por todo x que pertence a algum conjunto do sistema S.

Exemplo 3.11.

(a) Considere $S = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Assim, $x \in \bigcup S$ se, e somente se, $x \in A$ para algum $A \in S$, ou seja, se, e somente se, $x \in \emptyset$ ou $x \in \{\emptyset\}$. Portanto, $x \in \bigcup S$ se, e somente se, $x = \emptyset$. Desta forma, $\bigcup S = \{\emptyset\}$.

(b) $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Exemplo 3.12. Sejam M e N conjuntos; $x \in \bigcup\{M, N\}$ se, e somente se, $x \in M$ ou $x \in N$.

O conjunto $x \in \bigcup\{M, N\}$ é chamado de união de M e N e denotado $M \cup N$. Esta é uma operação básica da Teoria dos Conjuntos com a qual estamos bastante familiarizados.

O Axioma do Par e o da União são necessários para definir a união de dois conjuntos e o Axioma da Extensão para garantir que esta união gera um único conjunto. À união de dois conjuntos podemos atribuir um significado mais usual, a saber: $x \in M \cup N$ se, e somente se, $x \in M$ ou $x \in N$.

Exemplo 3.13. $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

O Axioma da União é claramente um pouco mais forte uma vez que nos habilita a formar uniões de (não somente dois, mas) qualquer coleção de conjuntos (inclusive uma infinita). Se A, B e C são conjuntos, podemos provar a existência e unicidade de um conjunto P cujos elementos são exatamente A, B e C. P é denotado $\{A, B, C\}$ e chamado de **terna não-ordenada** de A, B e C (HRBACEK; JECH, 1999).

Definiremos agora outro conceito simples e igualmente necessário.

Definição 3.14 (Subconjunto). A é um **subconjunto** de B se, e somente se, cada elemento de A pertence a B, isto é, para cada x, $x \in A$ implica $x \in B$.

Escrevemos $A \subseteq B$ para denotar que A é subconjunto de B.

Exemplo 3.15.

(a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$ para todo A.

(c) $\{x \in A | \mathbf{P}(x)\} \subseteq A$.

(d) Se $A \in S$, então $A \subseteq \bigcup S$.

O próximo axioma postula que todos os subconjuntos de um dado conjunto podem ser reunidos em um mesmo conjunto.

3.6 O Axioma da Potência

Para qualquer S, existe P tal que $X \in P$ se, e somente se, $X \subseteq S$.

Uma vez que o conjunto P é único, chamamos o conjunto de todos os subconjuntos de S de **conjunto potência** de S e o denotamos $\mathcal{P}(S)$.

Exemplo 3.16.

(a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$;

(b) $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$;

(c) Os elementos de $\mathcal{P}(a, b)$ são $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{a, b\}$.

Outra convenção de notação surge se consideramos $\mathbf{P}(x)$ – uma propriedade de x (e possivelmente de outros parâmetros).

Se existe um conjunto A tal que, para todo x, $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A$, então $\{x \in A \mid \mathbf{P}(\mathrm{x})\}$ existe e não depende de A. Isto significa que, dado um outro conjunto A' tal que, para todo x, $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A'$, então $\{x \in A' \mid \mathbf{P}(\mathrm{x})\} = \{x \in A \mid \mathbf{P}(\mathrm{x})\}$.

Assim, podemos definir $\{x \mid \mathbf{P}(\mathrm{x})\}$ como o conjunto $\{x \in A \mid \mathbf{P}(\mathrm{x})\}$, onde A é qualquer conjunto para o qual $\mathbf{P}(x)$ implica $x \in A$. Deste modo, $\{x \in A \mid \mathbf{P}(\mathrm{x})\}$ é o *conjunto de todo x que possui a propriedade* $\mathbf{P}(x)$. Vale ressaltar que tal notação só pode ser usada depois de provado que todo A contém todo x com a propriedade $\mathbf{P}$.

Exemplo 3.17.

(a) $\{x \mid x \in P \text{ e } x \in Q\}$ existe.

Demonstração. $\mathbf{P}(x, P, Q)$ é a propriedade "$x \in P$ e $x \in Q$". Considere $A = P$. Então, $\mathbf{P}(x, P, Q)$ implica $x \in A$. Portanto, $\{x \mid x \in P \text{ e } x \in Q\} = \{x \in P \mid x \in P \text{ e } x \in Q\} = \{x \in P \mid x \in Q\}$ é o conjunto R do Exemplo 3.5. □

(b) $\{x \mid x = A \text{ ou } x = B\}$ existe. Um caminho para a prova consiste em considerar $A = \{a, b\}$ e depois mostrar que $\{x \mid x = A \text{ ou } x = B\} = \{a, b\}$.

(c) $\{x \mid x \notin x\}$ não existe (por causa do paradoxo de Russell), de modo que, nesse exemplo, a notação $\{x \mid \mathbf{P}(x)\}$ não pode ser usada.

Segundo Halmos (1970, ps. 20-21), é o Axioma da Extensão quem garante a unicidade do conjunto potência $\mathcal{P}$ e, sobre este conjunto, completa:

> [. . .] o conjunto potência de um conjunto finito com, digamos, n elementos tem 2^n elementos. (É claro que conceitos como "finitos" e "2^n" não têm ainda pra nós um significado oficial; isto não deverá impedir que sejam entendidos não oficialmente.) A ocorrência de n como um expoente (a n-ésima potência de 2) tem alguma coisa a ver com a razão pela qual o conjunto potência recebe seu nome.

Mesmo que alguns conceitos já possam ser introduzidos e alguns teoremas provados a partir dos postulados que temos até agora, nossa lista de axiomas continua incompleta e, até então, não garantimos a existência de conjuntos infinitos, razão pela qual veremos agora outro importante axioma - o do infinidade. Antes disso, são necessárias as seguintes definições:

Definição 3.18. Seja um conjunto x. Define-se x^+ como $x \cup \{x\}$. Isto é,

$$\forall y (y \in x^+ \text{ se, e somente se, } y \in x \text{ ou } y = x)$$

Definição 3.19. Um conjunto x é dito *indutivo* se, e somente se, $\emptyset \in x$ e, para todo y, se $y \in x$ então $y^+ \in x$.

Em outras palavras, quando o conjunto x possui o vazio como elemento e é fechado pela operação de sucessor, então dizemos que ele é indutivo (FAJARDO, 2017).

3.7 O Axioma da Infinidade

Existe um conjunto indutivo.

Este mesmo axioma pode ser descrito através de outras palavras: "Há um conjunto que contém 0 e que contém o sucessor de cada um de seus elementos." (HALMOS, 1970, p. 47).

Há quem se oponha a este axioma (também chamado de *Axioma da Infinitude* ou ainda *Axioma do Infinito*), alegando que uma coleção de objetos produzidos por um processo infinito (**N**, por exemplo) não deve ser tratada como uma entidade completa. Apesar disso, a maioria das pessoas com algum conhecimento matemático não tem dificuldade em visualizar a coleção de números naturais dessa forma. Conjuntos infinitos (ou indutivos) são ferramentas básicas da matemática moderna e a essência da Teoria dos Conjuntos. Apesar das muitas pesquisas sobre o assunto, não existe nenhuma contradição resultante de seu uso ou pelo menos nenhuma descoberta. Trata-se, portanto, o Axioma da Infinidade em pé de igualdade com nossos outros axiomas (HRBACEK; JECH, 1999).

É importante destacar que a "razão para o nome do axioma deve estar clara. Ainda não demos uma definição precisa de infinidade, mas parece razoável que conjuntos tais como aqueles que o Axioma da Infinidade prescreve mereçam ser chamados infinitos" (HALMOS, 1970, p. 47).

Antes de continuar, é preciso verificar que o conjunto dos números naturais **N**, é, de fato, indutivo.

Lema 3.20. $\mathbf{N}$ *é indutivo. Se I é um conjunto indutivo qualquer, então* $\mathbf{N} \subseteq I$

Demonstração. $0 \in \mathbf{N}$ porque $0 \in I$ para qualquer indutivo I. Se $n \in \mathbf{N}$, então $n \in I$ para qualquer indutivo I, logo $(n+1) \in I$ para qualquer indutivo I, e consequentemente $(n+1) \in \mathbf{N}$, o que mostra que $\mathbf{N}$ é indutivo. A segunda parte do lema vem imediatamente da definição de $\mathbf{N}$. $\square$

Agora que temos **N** a nossa disposição, vamos definir a ordenação dos números naturais por tamanho. Faremos isso definindo cada um deles como um conjunto de números naturais menores.

Obviamente é necessário provar que $<$ é de fato uma ordem linear e que o conjunto ordenado $(N, <)$ realmente tem as propriedades que esperamos que os números naturais tenham. Sobre ordenação, abordaremos adiante.

3.8 O Axioma-esquema da Substituição

Seja $\boldsymbol{P}(x,y)$ uma propriedade tal que, para cada x, existe um único y, para o qual $\boldsymbol{P}(x,y)$ é válida. Para todo A, existe B tal que, para todo $x \in A$, existe $y \in B$ para o qual $\boldsymbol{P}(x,y)$ é válida.

Este Axioma-esquema foi proposto em 1922 por Abraham Fraenkel (1891-1965) e (independentemente) Thoralf Skolem (1887-1963).

Seja $\boldsymbol{F}$ a operação definida pela propriedade $\mathbf{P}$; isto é, permita que $\boldsymbol{F}(x)$ denote o único y para o qual $\mathbf{P}(x,y)$ vale. O Axioma da Substituição correspondente pode ser indicado da seguinte forma:

Para todo conjunto A existe um conjunto B tal que, para todo $x \in A$, $\boldsymbol{F}(x) \in B$.

É claro que B também pode conter elementos que não estão na forma $\boldsymbol{F}(x)$ para qualquer $x \in A$, no entanto, uma aplicação do Axioma-esquema da Compreensão mostra que $\{y \in B \mid y = \boldsymbol{F}(x),\ \text{para algum } x \in A\} = \{y \in B \mid \mathbf{P}(x,y) \text{ vale para algum } x \in A\} = \{y \mid \mathbf{P}(x,y) \text{ vale para algum } x \in A\}$ existe. Chamamos esse conjunto de *imagem* de A por $\boldsymbol{F}$ e o denotamos $\{\boldsymbol{F}(x) \mid x \in A\}$ ou simplesmente $\boldsymbol{F}[A]$.

3.9 O Axioma da Fundação

Todos os conjuntos são bem-fundados.

Este axioma também é conhecido como *Axioma da Regularidade* e nos garante que qualquer conjunto não-vazio contém um elemento minimal com respeito à relação $\in$. A ideia é construir todos os conjuntos a partir do conjunto $\emptyset$, evitando a concorrência de cadeias descendentes e infinitas em relação à pertinência $\in$ (SANTOS, 2014).

Segundo Silva e Jesus (2007, p. 21),

> Este axioma aparece em um trabalho de Zermelo de 1930 e baseia-se em idéias anteriores de von Neumann em seu artigo de 1925 (onde o axioma aparece explicitamente) e de Dimitry Mirimanoff em seu artigo de 1917 (onde o axioma aparece de forma implícita). É um axioma técnico, estrutural, irrelevante para as aplicações matemáticas "standard", cuja finalidade mais óbvia é impedir que ocorram certas patologias, tais como $x = x$, $x \in x$ e $x \in y \in x$, etc. Prova-se ainda que, na presença do Axioma da Regularidade, os conjuntos ficam organizados em níveis "hierárquicos cumulativos" que são obtidos por iteração "transfinita" das operações $\mathcal{P}$ de partes e $\bigcup$ de união, de tal maneira que todo conjunto pertença a algum desses níveis.

3.10 O Axioma da Escolha

Para cada sistema de conjuntos, existe uma função de escolha.

Este famoso (e igualmente controverso) resultado foi formulado em 1904 por Zermelo. Sessenta anos depois, em 1963, o matemático Paul Joseph Cohen, da Universidade de Chicago, mostrou que o Axioma da Escolha não pode ser provado a partir dos axiomas da Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel. O Axioma da Escolha é, portanto, um novo princípio de formação de conjuntos; difere dos outros princípios de formação de conjuntos, na medida em que não é eficaz. Ou seja, o Axioma da Escolha afirma que certos conjuntos (as funções de escolha) existem sem descrever esses conjuntos como coleções de objetos com uma propriedade específica. Por causa disso, e por causa de algumas de suas consequências contra-intuitivas, alguns matemáticos levantaram objeções a seu uso (HRBACEK; JECH, 1999).

O Axioma da Escolha foi utilizado para demonstrar o Lema de Zorn, que é nada além de uma das muitas formas equivalentes do axioma. Veremos mais detalhes sobre este axioma no capítulo a seguir.

4 O AXIOMA DA ESCOLHA - O “C” DE ZFC

Em 1908, Zermelo publicou um trabalho que deu partida à axiomatização da Teoria dos Conjuntos e, na lista dos axiomas publicados, está um dos mais polêmicos axiomas da História da Matemática - o Axioma da Escolha, utilizado em 1904 por Zermelo em sua demonstração de que todo conjunto pode ser bem ordenado (SILVA; JESUS, 2007).

De acordo com Silva e Jesus (2007), a tal polêmica se deve ao seu caráter inerentemente *não construtivo*, já que este Axioma permite que o matemático faça infinitas escolhas arbitrárias e isto não pode ser demonstrado por processos construtivos e finitísticos de prova.

Em outras palavras, “o problema reside em acreditar na completude da escolha em um conjunto infinito sem que haja uma propriedade a seguir. Como acreditar que uma escolha aleatória de elementos de um conjunto infinito possa ser completada?” (AGUIAR, 2015, ps. 30-31).

Sentone (2017, p. 24) destaca que o Axioma da Escolha difere dos outros axiomas de ZFC

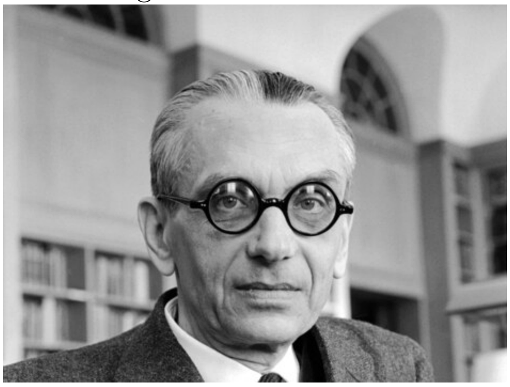
> [...] por postular a existência de um conjunto sem estabelecer uma forma de construí-lo, diferentemente dos axiomas do par e da união, por exemplo. Isto causou inicialmente muita polêmica entre os matemáticos, que aos poucos foram aceitando o axioma pela necessidade do mesmo em diversas áreas da matemática, como Teoria dos Conjuntos, Topologia, Álgebra e Análise Funcional. O caráter não construtivo do Axioma da Escolha, permitindo escolhas arbitrárias sem descrever como fazê-las, pode gerar argumentos para a não validacão do axioma.

De forma intuitiva, o Axioma da Escolha afirma que, dada uma família infinita de conjuntos não-vazios, existe a possibilidade de formar um conjunto “escolhendo” exatamente um elemento de cada um dos conjuntos não-vazios desta família (SILVA; JESUS, 2007).

Halmos (1970, p. 64), por sua vez, descreve o Axioma da seguinte forma: “O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio.” O autor ressalta que a razão do nome do axioma está na existência de uma chamada *função de escolha*, que “pode ser descrita como uma escolha simultânea de um elemento de cada um dos muitos conjuntos.” Falaremos sobre esta função mais adiante.

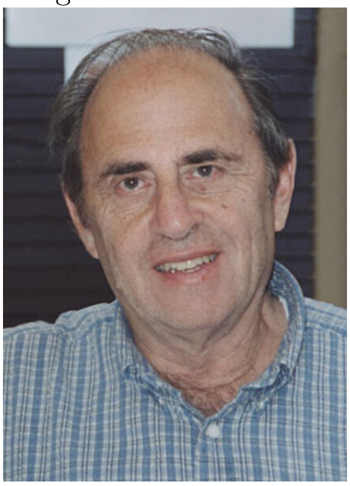
Segundo Aguiar (2015), este axioma é tão evidente que costuma ser usado na matemática sem nem mesmo ser percebido. O autor também conclui que podemos construir uma Teoria dos Conjuntos consistente com ou sem este axioma, pois ele é independente dos demais axiomas de ZFC, conforme provado por Kurt Gödel (1906-1978) em 1938 e, mais tarde, em 1963, por Paul Cohen (1934-2007).

Figura 8: Kurt Gödel



Fonte: Blog Simply Charly, 2020[8]

Figura 9: Paul Cohen



Fonte: Site Story of Mathematics, 2020[9]

4.1 O Axioma da Escolha e seus equivalentes

Apresentaremos agora as demonstrações de equivalência entre o Axioma da Escolha e algumas proposições clássicas da matemática, tais como o Princípio da Boa Ordenação e o Lema de Zorn . Noções de relação binária, ordem parcial e boa ordem se fazem necessárias aqui.

[8]Disponível em: <https://simplycharly.com/blog/godels-god-it-all-adds-up>. Acesso em: 10 jul. 2020.

[9]Disponível em: <https://www.storyofmathematics.com/20th_cohen.html>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Definição 4.1. Seja A um conjunto. Uma **relação binária** R num conjunto A é qualquer subconjunto de $A \times A$.

Se R é uma relação binária num conjunto A e $(a, b) \in R$, escrevemos aRb.

Definição 4.2. Seja A um conjunto não vazio. Uma relação R em A é dita de **ordem parcial** se satisfaz, para todo $a, b, c \in A$, as seguintes propriedades:

i) aRa (reflexiva);

ii) $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ (antissimétrica);

iii) $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ (transitiva).

Definição 4.3. Seja R uma relação de ordem parcial definida num conjunto não vazio A, dizemos que (A, R) é um **conjunto parcialmente ordenado**.

Definição 4.4. Seja A um conjunto não vazio. Uma relação R em A é dita de **ordem total** se, além das propriedades *i)*, *ii)* e *iii)* da definição 4.2, para todo $a, b \in A$, também satisfaz a seguinte propriedade:

iv) $a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$ *(dicotomia);*

Definição 4.5. Seja R uma relação de ordem total definida num conjunto não vazio A, dizemos que (A, R) é um **conjunto totalmente ordenado**.

Usamos habitualmente os símbolos $\leq$ para designar uma relação de ordem parcial e $<$ para designar uma relação de ordem total, desde que, é claro, não haja ambiguidade. Podemos usar ainda as notações "p.o(A, R)" e "t.o(A, R)" para designar os conjuntos parcial e totalmente ordenados, respectivamente.

Por mais tentador que possa ser adentrar nos pormenores destas definições e encher nossa pesquisa de exemplos, certamemnte não o faremos aqui. Aliás, é fácil encontrar muitos exercícios sobre este assunto em qualquer livro de cálculo. Vamos à definição que julgamos ser a mais importante - a de conjuntos bem ordenados.

Definição 4.6. Um conjunto X parcialmente ordenado é chamado **bem ordenado** (e sua ordem é chamada **boa-ordenação**) se, e somente se, todo subconjunto não-vazio de X possui um elemento mínimo.

De acordo com Santos (2014, p. 18), "uma consequência desta definição, que merece ser mencionada antes mesmo de procurarmos exemplos e contraexemplos, é que todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado."

O conjunto dos números inteiros $\mathbf{N}$, por exemplo, é bem ordenado, mas o conjunto dos números inteiros $\mathbf{Z}$, com a ordem usual, não.

Teorema 4.7 (Princípio da Boa-Ordenação). *Para todo conjunto X, existe uma relação $\leq$ tal que $(X, \leq)$ é uma boa ordem.*

Lima (1998) faz a demonstração deste teorema e nos lembra que o mesmo "pode muitas vezes ser usado em demonstrações, substituindo o Princípio da Indução." (LIMA, 1998, p. 34).

Lema 4.8. *Um conjunto X pode ser bem ordenado se, e somente se, existe uma numeração de X.*

Lema 4.9 (Lema de Zorn). *Se X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em X é limitada superiormente, então X possui pelo menos um elemento maximal.*

O teorema que demonstramos a seguir é o último deste capítulo. Sua demonstração completa está registrada em Silva e Jesus (2007).

Teorema 4.10. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) **(AC)** Axioma da Escolha - Existe uma função escolha para cada sistema de conjuntos;

(b) **(BO)** Princípio da Boa-Ordenação - Todo conjunto pode ser bem ordenado;

(c) **(LZ)** Lema de Zorn - Se toda cadeia em um conjunto parcialmente ordenado possui um limitante superior, o conjunto parcialmente ordenado terá um elemento maximal.

Demonstração. **(AC) $\Rightarrow$ (BO):** Seja X um conjunto qualquer e $ON = \{x : x \text{ é cardinal}\}$ a Classe dos Ordinais. Para provar que X é bem-ordenado, é suficiente, pelo Lema 4.8 exibir uma numeração de X. Obviamente, se $X = \emptyset$, não precisamos fazer nada. Caso contrário, por consequência de **(AC)**, consideremos $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ uma função-escolha para $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Pelo Teorema da Indução Transfinita de ON (cuja demonstração não faremos aqui), existe uma única função-classe F definida em ON tal que $x_0 = F(0) = f(X)$ e, para qualquer $\alpha > 0$,

$$x_\alpha = F(\alpha) = \begin{cases} f(X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\}), & \text{se } X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\} \neq \emptyset. \\ x_0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha, por absurdo, que $X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\} \neq \emptyset$, para todo $\alpha > 0$. Logo, teremos que $x_\alpha = f(X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\}) \in X \setminus \{x_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq X$, para todo $\alpha > 0$. Como $x_0 = f(X) \in X$, então, para todo $\alpha \in ON$ temos que $x_\alpha \in X$. Deste modo, pelo Axioma-Esquema da Separação, segue que $Y = \{y \in X : \exists\alpha(\alpha \in ON \wedge x_\alpha = y)\} = \{x_\alpha : \alpha \in ON\}$ é um conjunto. Além disso, se $\beta < \gamma$, então, pela definição de F, temos que $x_\beta \neq x_\gamma$. Assim, para todo $y \in Y$, teremos um único α tal que $\alpha \in ON$ e $x_\alpha = y$. Segue, portanto, do Axioma-esquema da Substituição (e da Separação) que $\{\alpha \in ON : \exists y \in Y(x_\alpha = y)\} = \{\alpha : \alpha \in ON\} = ON$ é um conjunto. Contradição, pois não existe conjunto tal que tenha por elementos todos os ordinais. Consequentemente, existe $\alpha > 0$ tal que $X = \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Agora, seja β o menor ordinal que cumpra essa condição. Portanto, segue disso e da definição de F, que $\langle x_\xi : \xi < \beta\rangle$ é injetora e, por conseguinte, uma enumeração de $X = \{x_\xi : \xi < \beta\}$.

(BO) $\Rightarrow$ (LZ): Seja $\langle \mathbb{P}, \preceq\rangle$ uma ordem parcial não-vazia tal que toda cadeia em $\mathbb{P}$ possui um limitante superior. Por **(BO)**, $\mathbb{P}$ pode ser bem ordenado. Denotemos por $\leq$ uma tal boa ordem sobre $\mathbb{P}$. Pelo Lema 4.8, consideremos a enumeração canônica: $\mathbb{P} = \{p_\xi < \alpha\}$, em que $\alpha = t.o.(\mathbb{P}, <)$. Assim sendo, considere a seguinte definição recursiva sobre α:

$$\mathcal{C}_0 = \{p_0\}\mathcal{C}_\xi = \begin{cases} \left(\bigcup_{\gamma<\xi} \mathcal{C}_\gamma\right) \cup \{p_\xi\}, & \text{se } \left(\forall x \in \bigcup_{\gamma<\xi} \mathcal{C}_\gamma\right)(x \prec p_\xi) \\ \bigcup_{\gamma<\xi} \mathcal{C}_\gamma, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Daí, vem que:

(i) $\mathcal{C}_\gamma \subseteq \mathcal{C}_\xi$, sempre que $\gamma < \xi < \alpha$.

(ii) Para todo $\xi < \alpha$, tem-se que $\mathcal{C}_\xi$ é uma cadeia em $\mathbb{P}$ segundo $\preceq$.

Seja então $\mathcal{C} = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{C}_\xi$. Segue de (i) e (ii) que $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathbb{P}$ segundo $\preceq$. Pela hipótese acima, conclui-se que $\mathcal{C}$ possui um limitante superior $M \in \mathbb{P}$ segundo $\preceq$. Afirmamos que M é um elemento maximal de $\mathbb{P}$ segundo $\preceq$. De fato, seja um $x \in \mathbb{P}$ tal que $M \preceq x$.

Segue da enumeração de $\mathbb{P}$ que existe $\xi < \alpha$ tal que $x = p_\xi$. Assim, $M \preceq p_\xi$. Por construção, $p_\xi \in \mathcal{C}_\xi \subseteq \mathcal{C}$. Deste modo, como M é limitante superior de $\mathcal{C}$, temos que $p_\xi \preceq M$. Portanto, segue da antissimetria de $\preceq$ que $M = p_\xi$, isto é, que $M = x$. Usamos a boa-ordem $<$ do conjunto para "percorrê-lo" e construir uma cadeia segundo $\prec$, e a hipótese dessa cadeia ter um limitante superior faz com que a mesma "estacione" num elemento maximal segundo $\preceq$.

(LZ) $\Rightarrow$ **(AC):** Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não-vazios. Considere agora o conjunto $\mathbb{P} = \{f : \exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}\ (f \text{ é uma função-escolha para } \mathcal{S})\}$. Por vacuidade, $f = \emptyset$ é uma função-escolha para $\mathcal{S} = \emptyset$. Com isso, $\emptyset \in \mathbb{P}$ e, consequentemente, $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Como também é claro que $\langle \mathbb{P}, \subseteq \rangle$ é uma ordem parcial, basta agora verificarmos que toda cadeia em $\mathbb{P}$ possui um limitante superior. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia em $\mathbb{P}$ e considere então $G = \bigcup \mathcal{C}$. Afirmamos que G é uma função. De fato: como todos os elementos de G são pares ordenados, sejam então $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in G$ quaisquer. Existem funções $f, g \in \mathcal{C}$ tais que $\langle x, y \rangle \in f$ e $\langle x, z \rangle \in g$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia segundo $\subseteq$, segue que $f \subseteq g$ ou $g \subseteq f$. Sem perda de generalidade, suponha que $f \subseteq g$. Então, $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in g$, implicando que $y = z$, o que mostra que G é uma função. Claramente, G é uma função-escolha para o subconjunto $\bigcup \{\operatorname{dom}(f) : f \in \mathcal{C}\}$ de $\mathcal{F}$ e, portanto, um limitante superior de C segundo $\subseteq$. Por **(LZ)**, conclui-se que existe um elemento maximal $H \in \mathbb{P}$. Suponha, por absurdo, que $\operatorname{dom}(H) \subset \mathcal{F}$ (inclusão estrita!), isto é, que exista $a \in \mathcal{F} \setminus \operatorname{dom}(H)$. Assim, $a \neq \emptyset$ e existe $b \in a$. Como consequência disso e das conclusões anteriores, segue que $H \cup \{\langle a, b \rangle\} \in \mathbb{P}$ e que $H \subset H \cup \{\langle a, b \rangle\}$, o que contradiz a maximalidade de H em $\mathbb{P}$. Portanto, $\operatorname{dom}(H) = \mathcal{F}$ e H é uma função-escolha para $\mathcal{F}$. $\square$

Segundo Silva e Jesus (2007), existem muitas outras asserções equivalentes ao Axioma da Escolha, tais como o Princípio Maximal de Hausdorff, o Teorema da Existência de Bases de Hamel-Banach, o Teorema da Existência de Ideais Maximais, os Teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski e o Teorema de Tychonoff para espaços compactos. Não fique surpreso se nos aprofundarmos um pouco em alguns destes exemplos no capítulo seguinte.

5 APLICAÇÕES DO AXIOMA DA ESCOLHA

A aplicação do Axioma da Escolha é o que consideramos mais importante neste capítulo. Para compreendermos a solidez e importância deste resultado, selecionamos uma série de exemplos do uso dele na matemática devidamente encontrados nos estudos de Hrbacek e Jech (1999). Conforme declarado pelos próprios autores, tais exemplos não requerem amplo conhecimento da Teoria dos Conjuntos por parte dos leitores, o que só torna a leitura ainda mais interessante.

5.1 Pontos aderentes

De acordo com a definição usual, uma sequência de números reais $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ converge para $a \in \mathbf{R}$ se, para qualquer número real positivo ε, existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ vale para qualquer natural $n \geq n_\varepsilon$, sendo $|x|$ o valor absoluto de x.

Seja A um conjunto de números reais. Podemos caracterizar o que chamamos de *pontos aderentes* de ambas as formas a seguir:

(a) $a \in \mathbf{R}$ é um ponto aderente de A se, e somente se, existe uma sequência $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ com valores em A, que converge para a.

(b) $a \in \mathbf{R}$ é um ponto aderente de A se, e somente se, para cada número real positivo ε, existe $x \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$.

Hrbacek e Jech (1999) provam que (a) e (b) são equivalentes:

Demonstração. (a) implica (b). Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para qualquer $n \geq n_\varepsilon$. Em particular, $|x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$ e $x_{n_\varepsilon} \in A$.

(b) implica (a). Considere $X_n = \left\{x \in A \mid |x - a| < \frac{1}{n}\right\}$. Por (b), $X_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Seja $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ uma sequência tal que $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Logo, cada $x_n \in A$ e $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ converge para a. □

É importante termos em mente que razões possuímos para assumir que qualquer sequência $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ existe. Observe que nenhuma propriedade $\mathbf{P}(x, y)$ foi dada tal que $\mathbf{P}(n, y)$ é válida se, e somente se, $y = x_n$ (para todo $n \in \mathbf{N}$). Tal propriedade pode ser exibida em casos especiais (se A é aberto, por exemplo). Porém, a equivalência de (a) e (b) para todo $A \subseteq \mathbf{R}$ não pode ser provada apenas por meio dos axiomas da Teoria dos

Conjuntos de ZF. Obviamente, quando assumimos o Axioma da Escolha, o fato de que $X_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbf{N}$ implica imediatamente que $\prod_{n\in\mathbf{N}} X_n \neq \emptyset$ (HRBACEK; JECH, 1999).

5.2 Continuidade de uma função

Vamos começar definindo a continuidade de uma função real de variável real, extraída de Hrbacek e Jech (1999).

(a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é *contínua* em $a \in \mathbf{R}$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo x tal que $|x - a| < \delta$.

No que diz respeito à continuidade de uma função, vale ainda a seguinte propriedade:

(b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é *contínua* em $a \in \mathbf{R}$ se, e somente se, para toda sequência de reais $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N}\rangle$ que converge para a, a sequência $\langle f(x_n) \mid n \in \mathbf{N}\rangle$ converge para $f(a)$.

Demonstração. (a) implica (b): Se $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N}\rangle$ converge para a e se $\varepsilon > 0$ é dado, então primeiro encontramos $\delta > 0$, como em (a), e, uma vez que $\langle x_n \mid n \in \mathbf{N}\rangle$ converge, existe n_δ tal que $|x_n - a| < \delta$ sempre que $n \geq n_\delta$. Logo, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ para todo n.

(b) implica (a): Se assumirmos o Axioma da Escolha, então (a) e (b) são definições equivalentes de continuidade. De fato, suponha que (a) falha, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe um x tal que $|x - a| < \delta$, mas $|f(x) - f(a) \geq \varepsilon$. Especificamente, para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$, podemos "escolher" algum x_k tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$. A sequência $\langle x_k \mid k \in \mathbf{N}\rangle$ converge para a, porém a sequência $\langle f(x_k) \mid k \in \mathbf{N}\rangle$ não converge para $f(a)$ e, portanto, (b) também falha. □

Mais uma vez, como em 5.1, os axiomas da Teoria ZF não são suficientes para provar a equivalência entre (a) e (b).

5.3 Bases de um espaço vetorial

Aprendemos que um conjunto finito A de vetores diz-se *linearmente independente* se nenhum dos seus elementos for combinação linear dos outros e que uma base de um espaço vetorial V será um subconjunto linearmente independente maximal (ordenado por inclusão) desse espaço.

Estas, sem dúvida, são definições importantes, porém nenhum caso onde o espaço vetorial é finito necessita do Axioma da Escolha. Logo, precisamos definir quando um conjunto infinito é linearmente independente, pois, deste modo, podemos aplicar o Axioma da Escolha no estudo dos espaços de dimensão infinita.

Definição 5.1. Um conjunto *infinito* é linearmente independente se todos os seus subconjuntos finitos são linearmente independentes.

Teorema 5.2. *Todo espaço vetorial tem uma base.*

Demonstração. O teorema é uma aplicação direta do Lema de Zorn: Seja C uma $\subset$-cadeia de subconjuntos independentes de um determinado espaço vetorial, então a união de C também é um conjunto independente. Deste modo, existe um conjunto independente maximal. $\square$

Este teorema não pode ser provado somente na Teoria ZF, isto é, sem fazer uso do Axioma da Escolha, e traduz uma das verdades mais fundamentais sobre espaços vetoriais.

O lema de Zorn (logo, o Axioma da Escolha) também é usado para provar que todo espaço vetorial tem um base de Hamel. Veremos a seguir.

5.4 Bases de Hamel

Considere o conjunto de todos os números reais como um espaço vetorial no corpo dos racionais. Pelo Teorema 5.2, este espaço tem uma base, que chamamos *base de Hamel* para $\mathbf{R}$.

Podemos definir isso de outra forma: um conjunto $X \subseteq \mathbf{R}$ é uma base de Hamel para $\mathbf{R}$ se qualquer $x \in \mathbf{R}$ pode ser expresso de uma única forma como

$$x = r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n,$$

onde $x_1, \ldots, x_n \in X$ são distintos dois a dois e $r_1, \ldots, r_n$ são racionais não-nulos. Um conjunto com esta última propriedade existe de fato? A resposta é positiva. Vejamos:

Definição 5.3. Um conjunto de números reais X é chamado *dependente* se existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ distintos dois a dois e $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}$ tais que

$$r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n = 0$$

e pelo menos um dos coeficientes $r_1, \ldots, r_n$ é não-nulo.

Apesar de óbvio, vale lembrar que quando o conjunto não é dependente, ele é dito *independente*. Sendo A o sistema de todos os conjuntos independentes de números reais, usamos o Lema de Zorn para mostrar que A possui elemento maximal na ordenação por $\subseteq$.

Concluímos o argumento mostrando que qualquer $\subseteq$-Conjunto Maximal independente é uma base de Hamel.

Para que as hipóteses do Lema de Zorn sejam verificadas, consideremos $A_0 \subseteq A$ linearmente ordenado por $\subseteq$. Seja $X_0 = \bigcup A_0$. X_0 é um limite superior de A_0 em $(A, \subseteq)$ se $X_0 \in A$, isto é, se X_0 é independente. De fato: Suponha que houvesse $x_1, \ldots, x_n \in X_0$ e $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}$, não todos nulos, tal que $r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n = 0$. Logo, teríamos $X_1, \ldots, X_n \in A_0$ tais que $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Como A_0 é linearmente ordenado por $\subseteq$, o subconjunto finito $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de A_0 teria um $\subseteq$ - elemento maior: X_i. Como $x_1, \ldots, x_n \in X_i$, então X_i não seria independente.

Pelo Lema de Zorn, $(A, \subseteq)$ tem um elemento maximal X. Resta-nos verificar que este elemento é uma base de Hamel.

Suponhamos que $x \in \mathbf{R}$ não pode ser expresso como $r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n$, para todo $r_1, \ldots\ r_n \in \mathbf{Q}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$. Logo, $x \notin X$ (do contrário, $x = 1 \cdot x$). Assim, $X \cup \{x\} \supset X$, e $X \cup \{x\}$ é dependente (não esqueça que X é um conjunto independente maximal). Portanto, existem $x_1, \ldots, x_n \in X \cup \{x\}$ e $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{Q}$, não todos nulos, tais que $s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_n \cdot x_n = 0$. Como X é independente, temos que $x \in \{x_1, \ldots x_n\}$; Se $x = x_i$ e o coeficiente correspondente $s_i \neq 0$, então:

$$\begin{aligned} x &= x_i \\ &= \left(-\frac{s_1}{s_i}\right) \cdot x_1 + \cdots + \left(-\frac{s_{i-1}}{s_i}\right) \cdot x_{i-1} + \left(-\frac{s_{i+1}}{s_i}\right) \cdot x_{i+1} + \cdots + \left(-\frac{s_n}{s_i}\right) \cdot x_n, \end{aligned}$$

onde $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in X$ e os coeficientes são números racionais, contradizendo a hipótese sobre x.

Suponhamos agora que algum $x \in \mathbf{R}$ pode ser expresso de duas formas: $r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n = s_1 \cdot y_1 + \cdots + s_k \cdot y_k$, onde $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k \in X$, $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_k \in \mathbf{Q} - \{0\}$. Logo,

$$r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n - s_1 \cdot y_1 - \cdots - s_k \cdot y_k = 0. \tag{1}$$

Se $\{x_1, \ldots, x_n\} \neq \{y_1, \ldots, y_k\}$, ou ainda, $x_1 \notin \{y_1, \ldots, y_k\}$, então (1) pode ser escrito como uma combinação de elementos (distintos) de X com pelo menos um coeficiente não-nulo (chamaremos r_1), o que contradiz a independência de X. Concluímos que $n = k$ e $x_1 = y_{i_1}, \ldots, x_n = y_{i_n}$ para qualquer associação um a um $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ entre índices $1, 2, \ldots, n$. Portanto, (1) pode ser escrito na forma $(r_1 - s_{i_1}) \cdot x_1 + \cdots (r_n - s_{i_n}) \cdot x_n = 0$. Como $x_1, \ldots, x_n$ são elementos de X distintos dois a dois, então $r_1 - s_{i_1} = 0, \ldots, r_n - s_{i_n} = 0$, ou seja, $r_1 = s_{i_1}, \ldots, r_n = s_{i_n}$.

Tais argumentos traduzem o fato de cada $x \in \mathbf{R}$ possui uma e apenas uma forma de ser expressa na forma desejada, razão pela qual X é uma base de Hamel.

A Teoria ZF não é suficiente para provar a existência de uma base de Hamel. O Axioma da Escolha se faz necessário aqui também.

5.5 Funções aditivas

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é dita aditiva quando $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$. A função $f_a(x)$ regida por $f_a(x) = a \cdot x$, sendo a um número real fixo e $x \in \mathbf{R}$, por exemplo, é aditiva.

O exemplo anterior é interessante. Segundo Hrbacek e Jech (1999), são necessários cálculos simples para concluirmos que qualquer função aditiva parece com f_a para algum $a \in \mathbf{R}$. Observe que, se f é aditiva e o conjunto $f(1) = a$, então:

$$f(2) = f(1) + f(1) = a \cdot 2, \quad f(3) = f(2) + f(1) = a \cdot 3,$$

e assim por diante. Por indução, $f(b) = a \cdot b$, para todo $b \in \mathbf{N} - \{0\}$. Outras conclusões são importantes:

a) Uma vez que $f(0) + f(0) = f(0 + 0) = f(0)$, então $f(0) = 0$;

b) Como $f(-b) + f(b) = f(0) = 0$, então $f(-b) = -f(b) = a \cdot (-b)$, onde $b \in \mathbf{N}$;

c) Como $a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$, então $f\left(\frac{1}{n}\right) = a \cdot \frac{1}{n}$.

Se prosseguirmos com este raciocício, provamos que $f(x) = a \cdot x$ para todo x racional. Porém, se x for real? $f(x) = a \cdot x$ permaneceria válida? O que somos levados a conjecturar é se toda função aditiva é da forma f_a com $a \in \mathbf{R}$.

Hrbacek e Jech (1999) declaram que tal conjectura não pode ser refutada apenas na Teoria ZF. Ela (a conjectura) só é considerada falsa se assumirmos o Axioma da Escolha. Deste modo, poderemos provar o teorema a seguir:

Teorema 5.4. *Existe uma função aditiva* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *tal que* $f \neq f_a$ *para todo* $a \in \mathbf{R}$.

Demonstração. Considere X uma base de Hamel para $\mathbf{R}$. Fixamos $\overline{x} \in X$ e definimos $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} r_i, & \text{se } x = r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_i \cdot x_i + \cdots + r_n \cdot x_n \text{ e } x_i = \overline{x} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que f é aditiva, $0 \notin X$ e X é infinito (pra ser bem exato, $|X| = 2^{\aleph_0}$). Temos que $f(\overline{x}) = 1$ (porque $\overline{x} = 1 \cdot \overline{x}$ é a representação básica de $\overline{x}$), enquanto $f\left(\overline{\overline{x}}\right) = 0$, para qualquer $\overline{\overline{x}} \in X$, sendo $\overline{\overline{x}} \neq \overline{x}$ (pois $\overline{x}$ não ocorre na representação básica de $\overline{\overline{x}} = 1 \cdot \overline{\overline{x}}$). Se $f = f_a$ fosse válida para algum $a \in \mathbf{R}$, teríamos $f(\overline{x}) = 1 = a \cdot \overline{x}$, mostrando $a \neq 0$, e, por outro lado, $f\left(\overline{\overline{x}}\right) = 0 = a \cdot \overline{\overline{x}}$, mostrando $a = 0$. □

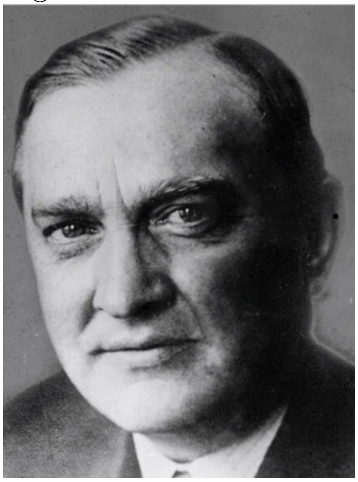
5.6 O Teorema de Hahn-Banach

Uma função f definida num espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbf{R}$ dos números reais com valores em $\mathbf{R}$ é um *funcional linear em* V se, para qualquer $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, temos $f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)$.

Chamamos a função p definida em V com valores em $\mathbf{R}$ de *funcional sublinear em* V quando, para todo $u, v \in V$ e $\alpha \geq 0$, temos $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ e $p(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot p(u)$.

O teorema seguinte - um dos pilares da análise funcional - é fruto dos estudos de Stefan Banach (1892-1945) com o austríaco Hans Hahn (1879-1934) e sua demonstração encontramos em Hrbacek e Jech (1999).

Figura 10: Stefan Banach



Fonte: Wikipédia, 2020[10]

Figura 11: Hans Hahn

Fonte: Wikipédia, 2020[11]

Teorema 5.5. *Seja p um funcional sublinear no espaço vetorial V e f_0 um funcional linear no subespaço V_0 de V tal que $f_0(v) \leq p(v)$, para todo $v \in V_0$. Então existe um funcional linear f definido em V tal que $f \supseteq f_0$ e $f(v) \leq p(v)$, para todo $v \in V$.*

Demonstração. Considere F o conjunto de todas as funcionais lineares g definidas em algum subespaço W de V em que, para todo $v \in W$, temos

$$f_0 \subseteq g \ \text{ e } \ g(v) \leq p(v).$$

[10]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach>. Acesso em: 10 jul. 2020.
[11]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Hans_Hahn>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Obtemos o funcional linear f que queremos como um elemento maximal de $(F, \subseteq)$. Para verificar as premissas do Lema de Zorn, considere um não-vazio $F_0 \subseteq F$, linearmente ordenado por $\subseteq$. Se $g_0 = \bigcup F_0$, g_0 é um $\subseteq$-limite superior em F_0 desde que $g_0 \in F$. Perceba que g_0 é uma função com valores em $\mathbf{R}$ e $g_0 \supseteq f_0$. Uma vez que a união de um conjunto de subespaços de V linearmente ordenados por $\subseteq$ é um subespaço de V, então o $\operatorname{dom} g_0 = \bigcup_{g \in F_0} \operatorname{dom} g$ é um subespaço de V. Para mostrarmos que g_0 é linear, vamos considerar $u, v \in \operatorname{dom} g_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Logo, existem $g, g' \in F_0$ tais que $u \in \operatorname{dom} g$ e $v \in \operatorname{dom} g'$. Como F_0 é linearmente ordenado por $\subseteq$, então ou $g \subseteq g'$ ou $g' \subseteq g$. No primeiro caso, $u, v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \operatorname{dom} g'$ e $g_0(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = g'(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot g'(u) + \beta \cdot g'(v) = \alpha \cdot g_0(u) + \beta \cdot g_0(v)$. O segundo caso é análogo. Por fim, $g_0(u) = g(u) \leq p(u)$, para qualquer $u \in \operatorname{dom} g_0$ e $g \in F_0$ tal que $u \in \operatorname{dom} g$. Portanto, de fato, $g_0 \in F$.

Pelo Lema de Zorn, $(F, \subseteq)$ tem um elemento maximal f. Precisamos mostrar ainda que $\operatorname{dom} f = V$. Provamos que $\operatorname{dom} f \subset V$ implica que f não é maximal. Fixemos $u \in V - \operatorname{dom} f$. Seja W o subespaço de V estendido pelo $\operatorname{dom} f$ e u. Como todo $w \in W$ só pode ser expresso como $w = x + \alpha \cdot u$, com $x \in \operatorname{dom} f$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, a função f_c definida por

$$f_c(w) = f(x) + \alpha \cdot c$$

é um funcional em W e $f_c \supset f$. Para completar esta prova, resta-nos mostrar que $c \in \mathbf{R}$ pode ser escolhido de modo que

$$f_c(x + \alpha \cdot u) = f(x) + \alpha \cdot c \leq p(x + \alpha \cdot u) \tag{2}$$

para todo $x \in \operatorname{dom} f$ e $\alpha \in \mathbf{R}$.

As propriedades de f garantem imediatamente (2) para $\alpha = 0$. Então, temos que escolher c a fim de satisfazer dois requisitos:

(a) Para todo $\alpha > 0$ e $x \in \operatorname{dom} f$, $f(x) + \alpha \cdot c \leq p(x + \alpha \cdot u)$.

(b) Para todo $\alpha > 0$ e $y \in \operatorname{dom} f$, $f(y) + (-\alpha) \cdot c \leq p(y + (-\alpha) \cdot u)$.

De forma equivalente,

$$f(y) - p(y - \alpha \cdot u) \leq \alpha \cdot c \leq p(x + \alpha \cdot u) - f(x),$$

logo

$$f\left(\frac{1}{\alpha} \cdot y\right) - p\left(\frac{1}{\alpha} \cdot y - u\right) \leq c \leq p\left(\frac{1}{\alpha} \cdot x + u\right) - f\left(\frac{1}{\alpha} \cdot x\right) \tag{3}$$

deve ser válida para todo $x, y \in \operatorname{dom} f$ e $\alpha > 0$. Porém, para todo $v, t \in \operatorname{dom} f$,

$$f(v) + f(t) = f(v+t) \leq p(v+t) \leq p(v-u) + p(t+u).$$

Portanto,

$$f(v) - p(v-u) \leq p(t+u) - f(t).$$

Se $A = \sup\{f(v) - p(v-u) \mid v \in \operatorname{dom} f\}$ e $B = \inf\{p(t+u) - f(t) \mid t \in \operatorname{dom} f\}$, temos $A \leq B$. Quando escolhermos c tal que $A \leq c \leq B$, então a identidade (3) se mantém. $\square$

5.7 O problema de medida

Um importante problema em análise consiste em ampliar nossa concepção de comprimento de um intervalo para conjuntos mais complicados de números reais. O ideal era que tivéssemos uma função μ definida em $\mathcal{P}(\mathbf{R})$, com valores em $[0, \infty) \cup \{\infty\}$, que possuísse as seguintes propriedades:

0) $\mu([a, b]) = b - a$, para qualquer $a, b \in \mathbf{R}$, sendo $a < b$.

i) $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\mathbf{R}) = \infty$.

ii) **(Aditabilidade enumerável)** Se $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathbf{R}$ disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Esta propriedade também é chamada de σ-aditabilidade de μ.

iii) **(Invariância da translação de μ)** Se $a \in \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}$ e $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$, então $\mu(A + a) = \mu(A)$.

Destas propriedades derivam outras, tais como:

iv) **(Aditabilidade finita)** Se $A \cap B = \emptyset$, então $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

v) **(Monotonicidade)** Se $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Somente usando o Axioma da Escolha é possível provar que não existe uma função com as propriedades acima.

Teorema 5.6. Não existe função $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \longrightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ com as propriedades **0)-v)**.

Demonstração. Seja a relação de equivalência $\approx$ em $\mathbf{R}$ tal que: $x \approx y$, se, e somente se, $x - y$ é um número racional. Usaremos o Axioma da Escolha para obter um conjunto de representantes X para $\approx$. Logo,

$$\mathbf{R} = \bigcup \{X + r \mid r \text{ é racional}\}; \tag{4}$$

Além disso, se q e r são racionais distintos, então $X + q$ e $X + r$ são disjuntos. Observe que $\mu(X) > 0$. Assim, se $\mu(x) = 0$, então $\mu(X + q) = 0$, para todo $q \in \mathbf{Q}$, e

$$\mu(\mathbf{R}) = \sum_{q \in \mathbf{Q}} \mu(X + q) = 0,$$

o que é uma contradição. Pela Aditabilidade enumerável, existe um intervalo fechado $[a, b]$ tal que $\mu(X \cap [a, b]) > 0$. Seja $Y = X \cap [a, b]$. Então:

$$\bigcup_{q \in \mathbf{Q} \cap [0,1]} (Y + q) \subseteq [a, b + 1] \tag{5}$$

e o lado esquerdo é a união de uma quantidade infinita de conjuntos $Y + q$ disjuntos dois a dois, cada um de medida $\mu(Y + q) = \mu(Y) > 0$. Portanto, a medida do lado esquerdo de (5) é ∞, o que contradiz com o fato de que $\mu([a, b + 1]) = b + 1 - a$. $\square$

O teorema acima demonstra que alguns dos requisitos em μ precisam ser atenuados. "Para os propósitos da análise matemática, é mais proveitoso deixar de lado a condição de que μ seja definida para todos os subconjuntos de $\mathbf{R}$ e exigir apenas que o domínio de μ seja fechado sob adequadas operações de conjunto" (HRBACEK; JECH, 1999, p. 151, tradução nossa).

Definição 5.7. Seja S um subconjunto não-vazio. Uma coleção $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ é uma σ-álgebra (lê-se "sigma-álgebra") de subconjuntos de S desde que:

(a) $\emptyset \in \mathfrak{S}$ e $S \in \mathfrak{S}$;

(b) Se $X \in \mathfrak{S}$, então $S - X \in \mathfrak{S}$;

(c) Se $X_n \in \mathfrak{S}$ para todo n, então $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in \mathfrak{S}$ e $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \in \mathfrak{S}$.

Definição 5.8. Uma σ-medida aditiva (lê-se "sigma-medida aditiva") numa σ-álgebra $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de S é uma função $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ tal que:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(S) > 0$;

(b) Se $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma coleção de conjuntos de $\mathfrak{S}$ disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(X_n\right).$$

Destaca-se que:

- Chamamos os elementos de $\mathfrak{S}$ de μ-conjuntos mensuráveis;
- $\mathcal{P}(S)$ é o maior σ-álgebra de subconjuntos de S;
- Para nos referirmos a uma medida definida em $\mathcal{P}(S)$, usamos a expressão "medida em S".

Corolário 5.9. *Seja μ uma σ-medida aditiva qualquer em uma σ-álgebra $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de $\mathbf{R}$ tal que*

(0) $[a, b] \in \mathfrak{S}$ e $\mu([a, b]) = b - a$, para todo $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

(iii) Se $A \in \mathfrak{S}$, então $A + a \in \mathfrak{S}$ e $\mu(A + a) = \mu(A)$, para todo $a \in \mathbf{R}$.

Então existem conjuntos reais que não são μ-mensuráveis. □

Particularmente, em Análise Real, existe um σ-álgebra $\mathfrak{M}$ de Conjuntos mensuráveis à Lebesgue (ou conjuntos Lebesgue mensuráveis) e uma medida aditiva em $\mathfrak{M}$ - a medida de Lebesgue - que satisfaz as propriedades (0) e (iii) do Corolário 5.9. De acordo com Hrbacek e Jech (1999), a medida de conjuntos Lebesgue não-mensuráveis é uma consequência do Axioma da Escolha e foi Robert Solovay (1938-) quem mostrou a necessidade deste Axioma para provar este resultado.

Quando enfraquecemos uma ou mais das propriedades **0)-v)** de μ somos levados a questionamentos que se tornaram muito interessantes na Teoria dos Conjuntos. Por exemplo, se abrirmos mão do requisito iii) - invariância da translação de μ - podemos questionar se existem σ-medidas aditivas μ quaisquer em $\mathbf{R}$ tais que $\mu([a, b]) = b - a$, para todo $a, b \in \mathbf{R}$, onde $a < b$. Tal questionamento tem conexões profundas com a Teoria dos Grandes Cardinais, mas não trataremos sobre ela neste trabalho. Agora se deixarmos de lado a propriedade ii) - Aditabilidade enumerável - e exigimos apenas a iv) Aditabilidade finita - então podemos concluir que existem medidas não-triviais finitamente aditivas, desde que o Axioma da Escolha seja assumido (HRBACEK; JECH, 1999).

5.8 O Teorema de Banach-Tarski

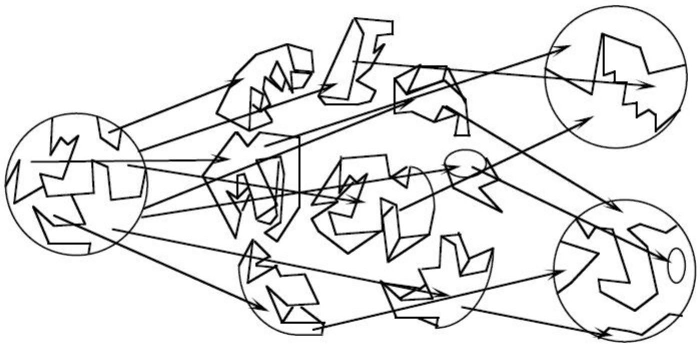
Em 1924, os poloneses Stefan Banach e Alfred Tarski (1901-1983) provaram que, uma vez aceito o Axioma da Escolha, então uma esfera pode ser cortada em um número finito de pedaços e depois remontada em uma esfera de raio maior.

Figura 12: Alfred Tarski

Fonte: Wikipédia, 2020[12]

Eles provaram ainda que o corte pode ser feito de modo a remontá-la em duas esferas de raios iguais aos da esfera original, sem esticar nem comprimir estes pedaços (ver figura 13). Este é o Teorema de Banach-Tarski. Mesmo sendo um resultado não contraditório e possível de ser provado formalmente, ele é considerado um paradoxo por ser um resultado contra-intuitivo (SENTONE, 2017).

Figura 13: Decompondo uma esfera em duas de mesmo tamanho da original



Fonte: Blog La Mitocondria, 2020[13]

[12]Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Alfred_Tarski>. Acesso em: 10 jul. 2020.
[13]Disponível em: <http://mitocondriacientifica.blogspot.com>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Sobre o assunto, González (2011, p. 729) explica que:

> Seria realmente contraditório se dividíssemos a esfera da maneira que é cortada uma laranja com uma faca e juntássemos os pedaços para formar duas laranjas de tamanho igual à original. A contradição surgiria porque os pedaços cortados com a faca teriam definido um volume, de modo que a soma dos volumes dos pedaços tem que dar sempre o mesmo resultado e, portanto, o enunciado "o todo é maior que a parte" geraria uma contradição (sendo o todo correspondente ao volume das duas laranjas e a parte, ao volume de uma delas).

No entanto, o mesmo autor completa que, se os pontos forem manipulados usando procedimentos conjuntistas, não existe nenhuma contradição, já que o procedimento não preserva volumes. Sentone (2017, p. 55) concorda nesse aspecto com González (2011) quando afirma que "o paradoxo de Banach-Tarski fundamenta-se na não preservação de volumes, sendo definido por conjuntos de pontos" .

De acordo com Gama (2016), o teorema de Banach-Tarski é consequência do Axioma da Escolha e, de maneira informal, diz que:

Teorema 5.10 (Teorema de Banach-Tarski)**.** *Uma esfera sólida em* $\mathbf{R}^3$ *pode ser particionada em uma quantidade finita de subconjuntos de maneira que, rearranjados, duas esferas sejam obtidas, do mesmo tamanho da esfera inicial.*

Segundo Sentone (2017), não existe prova construtivista (ou seja, uma prova que descreva como fazer o referido corte) para o Teorema de Banach-Tarski, pois trata-se de uma abstração matemática. Para demonstrá-lo, recorremos ao Axioma da Escolha, à Álgebra Matricial e a alguns conceitos de Análise.

Em se tratando da situação paradoxal advinda deste Teorema, a autora conclui ainda que:

> [. . .] podemos, teoricamente, dividir a esfera em pedaços de qualquer forma. Contudo, na prática, somos limitados pela natureza do material do qual a esfera é composta e, em última instância, pelo tamanho dos átomos. Para dividirmos a esfera de qualquer maneira, deveria haver nela uma infinidade de pontos e ela teria que ser infinitamente densa com esses pontos. Uma vez separados, os pontos determinariam formas tão complexas que não teriam volume definido. Poderíamos então reorganizar essas formas, cada uma contendo ainda infinitos pontos, em uma esfera de raio arbitrário. Poderíamos obter de uma ervilha esférica uma esfera do tamanho do sol. (SENTONE, 2017, p.56)

O paradoxo de Banach-Tarski tem consequências importantes em matemática. Uma delas é que não é possível definir uma noção de volume que se aplique a todo e qualquer conjunto de pontos em $\mathbf{R}^3$. O Teorema de Banach-Tarski pode ainda ser generalizado para dimensões maiores e para esferas com raios de medidas distintas (SENTONE, 2017).

Existe ainda uma versão mais geral do Teorema que encontramos em Gama (2016). Vejamos:

Teorema 5.11 (Teorema de Banach-Tarski generalizado)**.** *Dados dois conjuntos quaisquer limitados com interior não vazio em um espaço de dimensão maior ou igual a três, podemos particionar o primeiro conjunto em uma quantidade finita de subconjuntos e rearranjá-los de modo a obtermos o segundo conjunto.*

De acordo com Hrbacek e Jech (1999), as provas de muitos resultados em relação aos conjuntos contáveis e propriedades topológicas e teóricas da reta real dependem do Axioma da Escolha. Vimos alguns deles em 5.1 e 5.2. Especificamente, na prova destes resultados, encontramos uma forma bem limitada deste Axioma - o Axioma da Escolha Enumerável.

Axioma da Escolha Enumerável *Existe uma função escolha para cada coleção enumerável de conjuntos não vazios.*

Pode ser que o Axioma da Escolha Enumerável seja justificado intuitivamente, porém o Axioma da Escolha completo não é. Basta perceber que este possui algumas consequências contra-intuitivas, tais como a existência de funções aditivas não-lineares do exemplo 5.5 ou de conjuntos Lebesgue não mensuráveis do exemplo 5.7. Nenhuma destas consequências decorrem do Axioma da Escolha Enumerável.

Aplicações como a do exemplo 5.6 explicam a aceitação universal do Axioma da Escolha. Outros teoremas de generalidade ampla (como é o Teorema de Hahn-Banach) requerem o Axioma da Escolha em suas provas (alguns deles chegam a ser equivalentes ao próprio Axioma). O Teorema de Thiconov (Um produto topológico de qualquer sistema de espaços topológicos compactos é compacto) e o Teorema do Ideal Maximal (Todo anel pode ser estendido a um ideal maximal), por exemplo.

Por fim, em relação ao papel do Axioma da escolha, concordamos que:

> Embora seja verdade que não necessitamos de resultados gerais para aplicações em objetos de interesse matemático mais imediato, como números reais e complexos ou funções, o papel insubstituível do Axioma da Escolha é simplificar considerações topológicas e algébricas que, de outra forma, seriam atoladas em detalhes irrelevantes de Teoria dos Conjuntos. Por esta razão pragmática, espera-se que o Axioma da Escolha sempre mantenha seu lugar na Teoria dos Conjuntos. (HRBACEK; JECH, 1999, p. 153, tradução nossa)

No capítulo final deste trabalho, veremos a abordagem de estudiosos como Martin (1986) com relação à construção dos sistemas axiomáticos e a importância destes para a matemática.

6 CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA AXIOMÁTICO

6.1 Axiomática de Euclides

De acordo com Arcari (2008, p. 15), Euclides estabeleceu dez axiomas tais que cinco deles são noções comuns (N) e os outros cinco são postulados (P). "Euclides acreditava que as noções comuns eram aceitas em 'todas as ciências' ". Os postulados, por sua vez, "são axiomas específicos da geometria plana". Eis os axiomas:

> **N1 -** Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
> **N2 -** Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
> **N3 -** Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
> **N4 -** Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
> **N5 -** O todo é maior do que qualquer de suas partes.
> [...]
> **P1 -** Pode-se traçar uma **(única)** reta **(segmento)** por quaisquer dois pontos.
> **P2 -** Pode-se continuar **(de modo único)** uma reta infinitamente.
> **P3 -** Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.
> **P4 -** Todos os ângulos retos são iguais.
> **P5 -** Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Foi a partir daqueles cinco postulados de Euclides que David Hilbert (1862-1943) criou cinco grupos de axiomas: Axiomas de Incidência, Ordem, Congruência, Continuidade e o famoso Axioma das Paralelas (ARCARI, 2008);

Figura 14: David Hilbert

Fonte: Site Geocities, 2020[14]

[14]Disponível em: <http://www.geocities.ws/hifi_eventos/sistemaformal-hilbert.html>. Acesso em: 10 jul. 2020.

6.2 Linguagem

Conforme já vimos anteriormente, Martin (1986) define um *Sistema Axiomático* ou *sistema de postulados* como um agrupamento de termos indefinidos e uma lista de declarações chamadas *axiomas* ou *postulados* referentes a estes termos. Segundo o autor, para obter uma teoria matemática, temos que provar novas afirmações, chamadas *teoremas*, e o fazemos usando apenas os axiomas e os teoremas anteriores. Algumas definições também são feitas no processo. Parece mais prudente fornecer a lista de axiomas de uma só vez, no entanto, isso pode ser inviável, pois alguns dos axiomas geralmente dependem de definições e teoremas resultantes de axiomas anteriores. Para construir um sistema de axioma, temos que assumir no mínimo uma linguagem, uma lógica e alguma teoria de conjuntos.

Nossa convenção de linguagem neste capítulo está baseada em Martin (1986). Para este autor, as seguintes afirmações podem ou não ser a mesma coisa:

1. P e Q são pontos.

2. P e Q são dois pontos.

3. P e Q são dois pontos distintos.

4. P e Q são pontos distintos.

As afirmações em (3) e (4) dizem a mesma coisa. A sentença (1) nos leva a duas possibilidades: P e Q são distintos ou $P = Q$. A afirmação (2) também pode levar a mais de uma interpretação, no entanto, "totalmente indesculpável é usar (2) para ambos (1) e (3)", de modo que, usaremos (3) em vez de (2) apenas por ênfase (MARTIN, 1986, p. 35, tradução nossa)

Por exemplo, se na frase "Existem três professores doutores no Profmat de Belém", que é uma afirmação verdadeira, substituirmos "três" por "exatamente três" ou por "pelo menos três", mudamos totalmente o sentido dela.

Outra convenção matemática de linguagem é o uso sempre inclusivo do "ou", o uso de "fora" no sentido de "não estar sobre" bem como o uso de "igual a" no sentido de "é exatamente a mesma coisa que". Segundo Martin (1986), quando escrevemos $a = b$ estamos tão somente dando nomes diferentes ao mesmo objeto.

Martin (1986) define alguns conceitos aplicáveis em geral a um sistema axiomático. Consistência, independência e categoricidade são alguns deles. Vejamos a seguir.

6.3 Definições

Em se tratando de sistemas axiomáticos, algumas propriedades precisam de análise. Três delas são indispensáveis: Consistência, Independência e Categoricidade.

Dizemos que um sistema axiomático é *consistente* se não existe afirmação tal que ambos - a própria afirmação e sua negação - sejam teoremas deste sistema.

Segundo Margotti (2007, p. 7, grifo do autor):

> A *consistência* de um conjunto de axiomas diz respeito à impossibilidade de derivação de contradições, isto é, diremos que um conjunto de axiomas é *consistente* se conseguirmos provar que apenas assumindo esses axiomas é impossível deduzirmos uma afirmação e sua negação.

Se aos termos indefinidos de um sistema axiomático atribuimos significados de outro sistema axiomático (da Geometria Euclidiana ou do Sistema de números reais, por exemplo), de modo que os axiomas do primeiro são teoremas do segundo, então o resultado é um *modelo* do primeiro sistema axiomático. Neste caso, o primeiro sistema será *relativamente consistente* ao segundo e qualquer inconsistência naquele reflete automaticamente neste último.

De acordo com Martin (1986, p. 35, tradução nossa), a consistência relativa é muitas vezes "tudo que podemos esperar, pois, conforme demonstrado por Gödel, não existe prova interna de consistência para um sistema que envolve conjuntos infinitos".

Num sistema axiomático, um axioma é dito *independente* se ele não é um teorema seguido de outros axiomas, isto é, é impossível prová-lo a partir dos demais.

Modelos de um axioma são ditos *isomorfos* se existir uma correspondência biunívoca entre seus elementos que preserva todas as relações, ou seja, modelos isomorfos são abstratamente iguais e apenas a notação deles é diferente.

Se cada dois modelos de um sistema são isomorfos, então dizemos que ele é *categórico*. Margotti (2007, p. 7, grifo do autor) ratifica o pensamento:

> [...] um certo conjunto de axiomas é *categórico*, se quaisquer dois modelos que satisfaçam esses axiomas forem *isomorfos*, ou seja, se existir uma bijeção entre os pontos de cada um dos modelos de forma que todas as relações que são definidas entre os pontos do primeiro modelo, mantêm-se invariantes em suas imagens no segundo modelo.

A categoricidade de um sistema axiomático nem sempre é apetecida. Na verdade, existe "grande vantagem em provar teoremas em um sistema axiomático não-categórico, pois os teoremas são afirmações verdadeiras para cada modelo do sistema axiomático" (MARTIN, 1986, p. 36, tradução nossa).

Outras definições se fazem importantes (a de colineação, por exemplo), mas trataremos sobre elas adiante.

6.4 Planos de incidência

Se $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$ é uma relação tal que $\mathscr{P}$ e $\mathscr{L}$ são disjuntos, então a relação é um *plano de incidência*. Em seus estudos de planos de incidência, Martin (1986) considera "ponto" e "reta" como termos indefinidos e nos apresenta quatro importantes axiomas: O conjunto $\mathscr{P}$ é a classe de todos os pontos. O conjunto $\mathscr{L}$ é a classe de todas as retas; $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \emptyset$ e $\mathscr{F} \subset \mathscr{P} \times \mathscr{L}$.

Um plano de incidência $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$ possui notação própria para expressar o fato de que um par ordenado está no gráfico $\mathscr{F}$. Segundo Martin (1986), são equivalentes as sentenças a seguir:

a) $(P, r) \in \mathscr{F}$.

b) O ponto P e a reta r são incidentes.

c) O ponto P está sobre a reta r.

d) A reta r está sobre o ponto P.

e) A reta r passa pelo ponto P.

De modo que, "se $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$ é um plano de incidência, $\mathscr{P}$ é o conjunto de pontos, $\mathscr{L}$ é o conjunto de retas e $\mathscr{F}$ define a incidência entre retas e pontos." (MARTIN, 1986, p. 36).

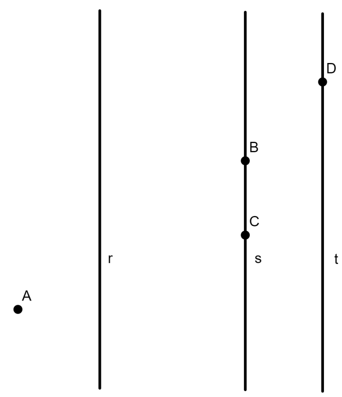
Definição 6.1. Sejam r e s retas tais que não existe ponto incidente comum a ambas às retas ou $r = s$, então r é *paralela* a s. Notação: $r \parallel s$.

Observação: O paralelismo é uma relação simétrica.

A figura a seguir, composta por quatro pontos e três retas paralelas, representa o plano de incidência $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$, onde $\mathscr{P} = \{A, B, C, D\}$, $\mathscr{L} = \{r, s, t\}$ e, por sua vez,

$\mathscr{F} = \{(B, s), (C, s), (D, t)\}$. Note que existe pelo menos um ponto fora de alguma reta e retas que não passam por um ponto.

Figura 15: Plano de incidência de quatro pontos e três retas



Fonte: Elaborada pelo autor

Um célebre plano de incidência é o **Plano de Incidência Cartesiano Real**, que recebe este nome em homenagem ao matemático, físico e filósofo francês René Descartes (1596-1650).

Descreveremos brevemente, a seguir, três tipos de planos de incidência bem como os axiomas a eles correlatos (e suas principais implicações), a saber, os planos afim, projetivo e hiperbólico.

6.4.1 Sistema axiomático I - Plano afim

Um *plano afim* é um plano de incidência em que são válidos os seguintes axiomas:

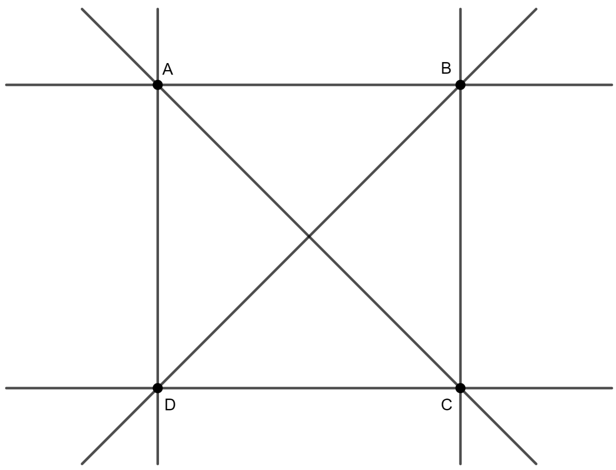
Axioma 1. Se P e Q são dois pontos, então existe uma única reta que passa por P e Q.

Axioma 2. Seja P um ponto qualquer fora da reta l, então existe uma única reta que passa por P e é paralela à l.

Axioma 3. Existem quatro pontos e quaisquer três destes pontos não estão na mesma reta.

De acordo com Martin (1986), o plano euclidiano é um plano afim ou, em outras palavras, o sistema axiomático para planos afins é relativamente consistente com a Geometria Plana Euclidiana. Por um sistema axiomático para planos afins, é possível provar consistência fornecendo um modelo finito - a seguinte geometria, por exemplo.

Figura 16: Geometria de quatro pontos e seis retas



Fonte: Elaborada pelo autor

No modelo finito $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$ da figura acima, com exatamente quatro pontos e seis retas, temos que:

1. $\mathscr{P} = \{A, B, C, D\}$,

2. $\mathscr{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$ e

3. $\mathscr{F}$ é determinado pela inclusão de conjuntos.

Um fato curioso a ser registrado aqui é que nesta geometria as retas $\{A, C\}$ e $\{B, D\}$ são paralelas por definição já que não tem pontos em comum (a despeito do que a figura pode supor). Esta geometria é um plano afim, e como tal, nenhuma inconsistência pode ser deduzida dos seus axiomas (MARTIN, 1986).

Quando queremos nos referir a um isomorfismo entre planos de incidência, usamos o termo "colineação".

Definição 6.2. Uma *colineação* do plano de incidência $(\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, \mathscr{F}_1)$ no plano de incidência $(\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, \mathscr{F}_2)$ consiste nas bijeções $f : \mathscr{P}_1 \longrightarrow \mathscr{P}_2$ e $g : \mathscr{L}_1 \longrightarrow \mathscr{L}_2$ tais que $(P, l) \in \mathscr{F}_1$ se, e somente se, $(f(P), g(l)) \in \mathscr{F}_2$.

O sistema axiomático para planos afins não é categórico e nem todos os modelos de um plano afim são isomorfos. Além disso, cada axioma de um plano afim é independente dos outros dois (MARTIN, 1986).

Segundo Margotti (2007, p. 7):

> Uma maneira de provarmos que um axioma é independente dos demais é exibindo um modelo no qual todos os axiomas são mantidos e outro modelo onde todos os axiomas, com exceção apenas do axioma em questão, são verdadeiros.

Deste modo, para mostrar que o axioma 1 é independente, por exemplo, necessitamos de um Plano de Incidência no qual os axiomas 2 e 3 sejam válidos, mas o axioma 1 não.

Para mostrar que os axiomas para planos afins são independentes, Martin (1986) considera em primeiro lugar o plano de incidência $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$, onde $\mathscr{P}$ é o conjunto de pontos do espaço euclidiano tridimensional, $\mathscr{L}$ o conjunto de todos os planos perpendiculares a um eixo e $\mathscr{F}$, determinado pela incidência usual daquele mesmo espaço euclidiano.

É difícil aceitar que um plano num modelo pode ser uma reta em outro modelo, por isso, é importante verificar se esta geometria possui, de fato, as propriedades que queremos.

O axioma 3 será independente se $\mathscr{P}$ for um conjunto arbitrário, $\mathscr{L} = \{\mathscr{P}\}$ e $\mathscr{F} = \mathscr{P} \times \mathscr{L}$. De acordo com Martin (1986, p. 39, tradução nossa):

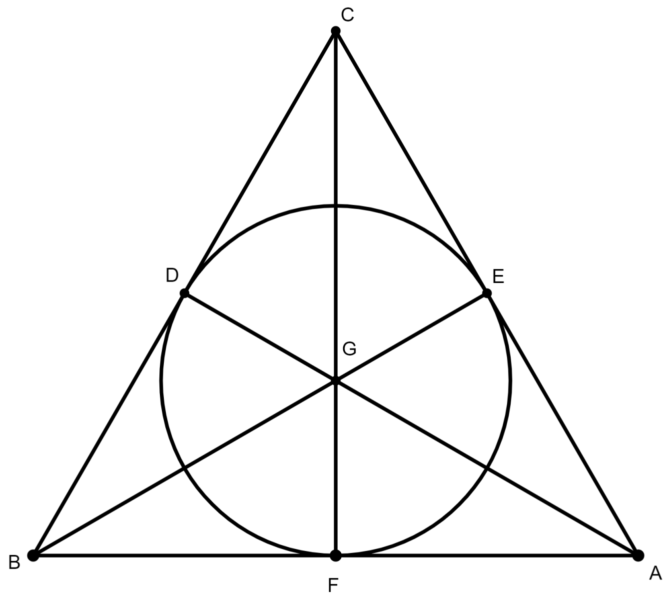
> Como existe uma única reta (que passa por todos os pontos), o axioma 1 continua válido, porém o axioma 3 inevitavelmente falha. O propósito do axioma 3 é omitir planos de incidência triviais. Perceba que o axioma 2 afirma que, se o ponto P está fora da reta l, então algo acontece. Como não existem pontos fora da única reta desta geometria, o axioma 2 nunca é negado.

Por fim, para provar que o axioma 2 é independente, precisamos de um plano de incidência com pelo menos quatro pontos, sendo que quaisquer três destes pontos não podem estar na mesma reta e cada dois pontos deste plano estão em uma única reta, levando à falha deste axioma.

A negação do axioma 2 apenas requer a existência de algum ponto P_0 específico fora de alguma reta l_0 específica, de modo que não exista uma (e apenas uma!) reta que passe por P_0 e seja paralela à l_0. Assim, não deve existir reta ou devem existir pelo menos duas retas que passam por aquele ponto específico e sejam paralelas à l_0. (MARTIN, 1986)

Martin (1986) encerra a sua demonstração de que os três axiomas para planos afins são independentes através do plano de incidência representado pela figura abaixo - uma geometria de sete pontos e sete retas na qual são válidos os axiomas 2 e 3, porém o axioma 2 falha, uma vez que este neste plano não existem retas paralelas.

Figura 17: Geometria dos “sete”



Fonte: Elaborada pelo autor

No plano de incidência $(\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, \mathscr{F}_1)$, representado acima, temos:

1. $\mathscr{P}_1 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,

2. $\mathscr{L}_1 = \{\{A, B, F\}, \{A, C, E\}, \{A, D, G\}, \{B, C, D\}, \{B, E, G\}, \{C, F, G\}, \{D, E, F\}\}$ e

3. $\mathscr{F}$ é determinado através da relação “o ponto P em $\mathscr{P}_1$ está na linha l em $\mathscr{L}_1$ se, e somente se, P está em l.”

Falaremos um pouquinho mais sobre este último plano a seguir.

6.4.2 Sistema axiomático II - Plano projetivo

Um *plano projetivo* é um plano de incidência em que são válidos os seguintes axiomas:

Axioma 1. Se P e Q são dois pontos, então existe uma única reta que passa por P e Q.

Axioma 2'. Se l e m são duas retas, então existe um único ponto em l e m.

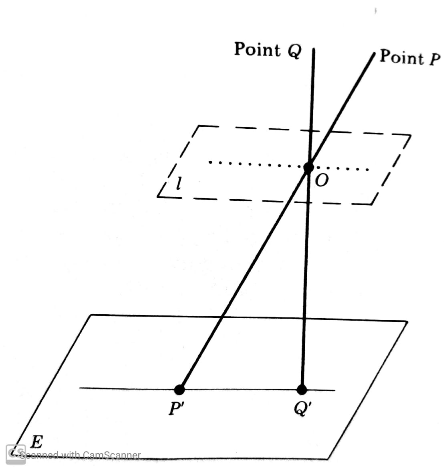
Axioma 3. Existem quatro pontos e quaisquer três destes pontos não estão na mesma reta.

De acordo com Martin (1986, p. 42, tradução nossa), em geral, "um plano de incidência $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$ é dito *finito*, em geral, se ambos $\mathscr{P}$ e $\mathscr{L}$ possuem um número finito de elementos."

O plano $(\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, \mathscr{F}_1)$ que vimos há pouco, por exemplo, é um plano projetivo finito e sua existência mostra que o sistema axiomático para planos projetivos é consistente. Segundo Martin (1986), se quisermos mostrar que esse sistema é não-categórico, temos que considerar um modelo $(\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, \mathscr{F}_2)$ de um plano projetivo que não é isomorfo a um plano projetivo.

Considere O um ponto fixo qualquer do espaço euclidiano tridimensional, $\mathscr{P}_2$ - o conjunto das retas euclidianas que passam por O - e $\mathscr{L}_2$ - o conjunto dos planos euclidianos que passam por O. Sendo $P \in \mathscr{P}_2$ e $l \in \mathscr{L}_2$, define-se $(P, l) \in \mathscr{F}_2$ se, e somente se, no espaço euclidiano tridimensional, P está em l. O plano de incidência $(\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, \mathscr{F}_2)$ é projetivo, pois, se P e Q são dois pontos, então P e Q estão em uma única reta já que, no espaço euclidiano tridimensional, duas retas que passam por O determinam um único plano que passa por O. Além disso, se l e m passam por um único ponto, uma vez que, em espaços euclidianos tridimensionais, dois planos que passam por O determinam uma única reta que passa por O. Qualquer geometria isomorfa a $(\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, \mathscr{F}_2)$ é um *plano projetivo real* (MARTIN, 1986).

Figura 18: Plano projetivo



Fonte: Martin (1986)

A primeira pergunta que nos vem à mente ao olhar a figura acima é "Uma reta é um ponto?". De fato, entender este e outros modelos exige que abramos mão de algumas das nossas herdadas concepções de ponto, reta e plano.

Note que o plano projetivo real $(\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, \mathscr{F}_2)$ contém uma cópia da estrutura de incidência do plano euclidiano. Considere a geometria representada quando se deixa de lado alguma nova reta fixa l e onde todos os novos pontos que estavam em l (figura 18). A geometria resultante, à primeira vista, não se parece com o plano euclidiano. E é o plano euclidiano paralelo a l que não passa por O. A subgeometria é isomorfa ao plano E. Existe uma correspondência biunívoca entre os novos pontos restantes e todos os pontos euclidianos de E e também entre as novas retas restantes e todas as retas euclidianas de E. Tais correspondências são determinadas pelas interseções dos conjuntos (MARTIN, 1986).

Os axiomas 2, 2' e 2" (este último veremos no sistema a seguir) são chamados *postulados paralelos*. O axioma 2 para um plano afim exige que exista uma e apenas uma reta paralela à reta l que passa pelo ponto P (fora da reta l). O axioma 2' para um plano projetivo exige que não existam retas paralelas à l que passem pelo ponto P e o axioma 2" (a seguir) exige que existam duas retas paralelas à l que passem por P.

6.4.3 Sistema axiomático III - Plano hiperbólico

Um *plano hiperbólico* é um plano de incidência em que são válidos os seguintes axiomas:

Axioma 1. Se P e Q são dois pontos, então existe uma única reta que passa por P e Q.
Axioma 2". Se P é um ponto qualquer fora da reta l, então existem duas retas paralelas à l que passam por P.
Axioma 3'. Existem quatro pontos e quaisquer três destes pontos não estão na mesma reta. Cada reta possui pelo menos um ponto.

Um curioso exemplo de plano $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathscr{F})$ hiperbólico, encontrado em Martin (1986), ocorre quando $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$ e $\mathscr{F}$ são definidos da seguinte maneira:

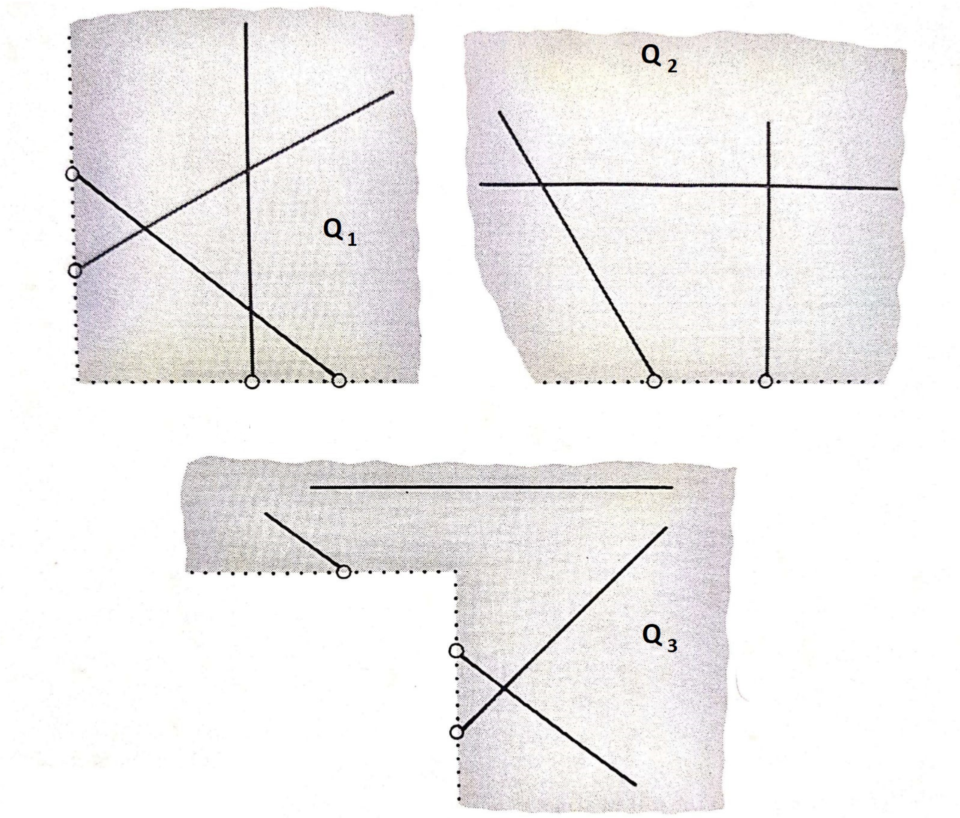
a) O conjunto de pontos é composto pelos algarismos: $\mathscr{P} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

b) O conjunto $\mathscr{L}$ de retas é composto pelos números: 10, 15, 16, 20, 23, 24, 36, 39, 45, 47, 59, 67, 78, 80, 89, 128, 137, 149, 257, 269, 340, 358, 468, 560 e 790;

c) $\mathscr{F}$ é definido pela relação "O ponto P está na reta l se, e somente se, P ocorrer como um dígito de l".

Martin (1986) apresenta-nos outros planos de incidência. O plano quadrante (Q_1), o semi-plano (Q_2) e o plano do quadrante ausente (Q_3), por exemplo. Nenhum deles é isomorfo ao outro e somente o primeiro é hiperbólico.

Figura 19: Outros planos de Incidência



Fonte: Martin (1986)

O plano quadrante (Q_1) é a subgeometria do Plano de Incidência Cartesiano Real obtido quando nos restringimos ao primeiro Quadrante, razão pela qual recebe é assim chamado. Neste plano:

a) $\mathscr{P} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x > 0, y > 0\}$;

b) $\mathscr{L} = \{\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathscr{P}, ax + by + c = 0\} \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \setminus \{\emptyset\}$; e

c) $\mathscr{F}$ é definido pela inclusão de conjuntos.

Obtemos Q_2 e Q_3 quando substituímos $\mathscr{P}$ por $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, y > 0\}$ e $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x > 0 \text{ ou } y > 0\}$, respectivamente.

O semi-plano (Q_2), dentre outras razões, não é hiperbólico por causa da existência de pelo menos um ponto P fora da reta l tal que existe uma única reta paralela à l e que passa por este ponto, o que automaticamente fere o axioma 2". O semi-plano também não é um plano afim, já que existe pelo menos um ponto P fora da reta l tal que existem duas retas paralelas à l que passam por este ponto. O plano Q_3 não é um plano afim por razões análogas e ambos - os planos Q_2 e Q_3 - não são planos projetivos também. É fácil concluir isto já que existem retas paralelas em cada um (MARTIN, 1986).

Vale ressaltar que não pode haver colineação entre o semi-plano e o plano de incidência do quadrante ausente. De fato:

> Se existisse uma colineação de Q_3 para Q_2, então P e l deveriam ser traçados, respectivamente, para o ponto P' em Q_2 e a reta l' em Q_2 de maneira tal que existissem exatamente duas retas em Q_2 passando por P' e paralelas à l'. Como já notamos que em Q_2 existe exatamente uma ou um número infinito de retas paralelas a uma reta dada que passam por um ponto fora desta reta, segue que não pode haver colineação de Q_3 para Q_2. (MARTIN, 1986, p. 45, tradução nossa)

Nos capítulos seguintes desta pesquisa, abordaremos um importante resultado na matemática - o Teorema de Incompletude devido a Kürt Gödel. Falaremos ainda sobre a curiosa conjectura de Cantor - a hipótese do contínuo. Tal discussão nos conduzirá a importantes reflexões de caráter filosófico.

7 A INCOMPLETUDE DE GÖDEL

O conhecimento tem limites?

Alguma vez você já se perguntou se existem fronteiras para o conhecimento? Será que existe algum limite para o que podemos saber ou mesmo conhecimentos os quais não nos é permitido possuir?

De acordo com Varão (2020), muitas vezes, para responder uma pergunta matemática, tudo que precisamos é ter conhecimento matemático suficiente. No entanto, adquirir o conhecimento matemático para resolver um problema pode demorar muito tempo e isso acontece porque nem sempre a matemática tem a ferramenta adequada para atacar o problema quando ele foi proposto.

Lembremos, a título de exemplo, o problema da quadratura do círculo: Dado um círculo qualquer, é possível construir um quadrado usando apenas régua e compasso com a mesma área deste círculo? Mais de dois mil anos foi o tempo necessário para que este problema, simples de ser colocado, fosse solucionado. A resposta pode indignar – é impossível fazer tal construção!

A maioria dos matemáticos tende a acreditar que qualquer problema matemático pode ser resolvido. Não necessariamente no momento em que foi proposto, tampouco pela pessoa que o propôs, mas em um tempo em que se tenha matemática suficiente para solucioná-lo. A matemática neste raciocínio pode lembrar uma tecnologia de modo que, a todo instante, parecemos esperar que novas ferramentas sejam desenvolvidas e, unidas às antigas (melhoradas ou não), nos ofereçam condições de resolver este tipo de problema (VARÃO, 2020).

David Hilbert pensava desta forma. O matemático alemão acreditava que qualquer pergunta matemática poderia ser respondida desde que muita ferramenta matemática fosse criada. Foi ele quem propôs a unificação da matemática em um sistema formal, na tentativa de mostrar para o mundo que a matemática é perfeita (VARÃO, 2020).

Um sistema formal é "um sistema de axiomas (expressos em alguma linguagem formal definida) e regras de inferência usadas para perpetuar a demonstrabilidade dos axiomas para outras sentenças da linguagem" (BORGES, 2019, p. 3).

No entanto, em 1930, com apenas 23 anos, o jovem lógico Kurt Gödel (1906-1978) produziu juntamente com seu grande amigo, o físico Albert Einstein (1879-1955), uma prova extraordinária na lógica matemática de algo hoje conhecido como o Teorema da Incompletude. Na verdade, são dois teoremas da incompletude logicamente interligados que mostram que em um sistema lógico consistente com o mínimo de operações existem afirmações que não podem ser consideradas nem verdadeiras nem falsas, isto é, não podem ser provadas nem refutadas (GOLDSTEIN, 2008).

Goldstein (2008, p. 20) registra os dois teoremas, devidamente expostos clara e diretamente no artigo "Teorema de Gödel" da *Encyclopedia of philosophy*:

> Pelo Teorema de Gödel, entende-se geralmente o seguinte significado: Em qualquer sistema formal adequado à teoria dos números existe uma fórmula indecidível – ou seja, uma fórmula que não pode ser provada e cuja negação também não pode. (Esse enunciado é às vezes chamado de Primeiro Teorema de Gödel.) Um corolário do Teorema é que a consistência de um sistema formal adequado à teoria dos números não pode ser provada dentro do sistema. (Às vezes é esse corolário que é chamado de Teorema de Gödel; também é chamado de Segundo Teorema de Gödel.) Esses enunciados são generalizações formuladas um tanto vagamente a partir de resultados publicados em 1931 por Kurt Gödel, então em Viena. ("Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", aprovado para publicação em 17 de novembro de 1930.)

O que aconteceria se o Pinóquio dissesse "meu nariz vai crescer agora"? Esta pergunta nos remete ao "paradoxo do Pinóquio", nada mais que uma variante do famoso "paradoxo do mentiroso" do filósofo grego Epiménides. O paradoxo surgiu quando ele afirmou que todos em Creta (sua cidade grega natal) "são sempre mentirosos". Se, por um lado, o que ele disse fosse verdade, então ele mesmo também seria um mentiroso e, portanto, estaria mentindo, tornando verdadeira a sua frase (LAZARETTI, 2016).

Figura 20: Paradoxo do pinóquio

Fonte: Revista digital Super Interessante, 2020[15]

[15]Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Suponha agora uma sentença A, análoga ao paradoxo de Epiménides, que afirme que ela mesma não é demonstrável. O Primeiro Teorema de Gödel nos diz precisamente que, se um sistema formal S, que contenha no mínimo a aritmética elementar, for consistente, então S será incompleto, com a sentença A como um exemplo de sentença verdadeira e indemonstrável no sistema. Já o Segundo Teorema de Gödel diz que, se o sistema formal S for consistente, então S não é capaz de provar sua própria consistência por meio dos seus métodos de formalização (BORGES, 2019).

Apesar de ter estudado os sistemas lógicos de forma abstrata, os estudos de Gödel aplicavam-se às intenções de Hilbert. Porém, apesar do forte impacto, o Teorema de Incompletude não refuta, em nenhum sentido, a visão otimista de Hilbert. O Teorema apenas estabelece que tal otimismo não pode ser justificado através da exibição de um único sistema, ainda que enfatizemos apenas os problemas da aritmética (FRANZÉN, 2005 apud BORGES, 2019)

Obviamente, este tema traz inquietações de ordem filosófica muito interessantes. Uma vez que não sabemos se a matemática é consistente, os resultados de Gödel nos permitem concluir que, se a matemática estiver de fato correta, então nunca saberemos que ela de fato está certa. Ela continua, portanto, sendo um mistério (VARÃO, 2020).

Espera-se através desta pesquisa que perguntas como "Será que a própria matemática coloca limitações para o que a gente pode descobrir da natureza?", "A matemática é ou não uma ciência?" e "Qual é o futuro da matemática?" continuem incomodando pesquisadores e motivando estudos cada vez mais aprofundados sobre este tema.

8 A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Quantos pontos tem uma reta?

Um famoso resultado na matemática tem que ver com a cardinalidade dos conjuntos. Entenda cardinal de um conjunto como o seu "tamanho", isto é, o número ou quantidade de elementos que ele possui. O conjunto dos números naturais **N**, por exemplo, possui o cardinal infinito. O conjunto dos números pares (vamos chamar de $\mathbb{P}$), que também é infinito, possui o mesmo cardinal de N, uma vez que é possível estabelecer uma bijeção entre os elementos de $\mathbb{P}$ e de **N**. Poderíamos então concluir que todos os conjuntos infinitos possuem o mesmo cardinal?

Neste momento, é fácil acreditar que

> [...] todos os conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho, mas este não é o caso, por um famoso resultado. O conjunto dos números reais, **R**, também conhecido por contínuo real, o conjunto dos pontos de uma linha recta, são maiores. Isto foi demonstrado por Cantor e constitui seguramente um dos maiores resultados matemáticos de todos os tempos. (OLIVEIRA, 2020, p. 5)

O resultado a que esta citação de Oliveira (2020) se refere é a hipótese do contínuo (do latim *continuum*) - conjectura proposta por George Cantor que consiste na seguinte proposição - extraída de Geloneze e Cardoso (2020, n.p): "Depois do primeiro infinito, a próxima quantidade infinita é a quantidade de pontos de um 'contínuo'- a quantidade dos pontos da reta real".

Era de se imaginar que Oliveira (2020) descrevesse o problema do contínuo de forma mais prosaica: Quantos pontos tem uma reta (euclidiana)? Se não for suficiente, eis outra formulação: saber se existe algum cardinal entre o cardinal de **N** e o cardinal do conjunto **R** dos números reais.

Esta hipótese foi o primeiro da lista de 23 problemas, formulada por Hilbert como desafio para os matemáticos do século XX e apresentada no Congresso Internacional de Matemática de Paris, que ocorreu em 1900. O problema levou estes estudiosos a questionar a independência da hipótese do contínuo em relação aos outros axiomas das teorias de conjuntos. Apesar de Cantor acreditar que a hipótese era verdadeira, em 1938, Kurt Gödel demonstrou que a hipótese não poderia ser refutada a partir dos axiomas de ZFC se estes axiomas forem, por si sós, consistentes (BICUDO, 2003).

Conforme Bicudo (2003, p. 22), "Gödel conjecturou que os axiomas formais, ZFC, eram insuficientes para provar a hipótese do continuum e, assim, que essa proposição seria formalmente indecidível em ZFC.”

Pouco tempo depois, em 1963, Paul Cohen mostrou a independência da hipótese do contínuo (inclusive a generalizada) em relação a ZFC. Cohen percebeu que a noção de conjunto era muito vaga para que a hipótese do contínuo pudesse ser demonstrada como verdadeira ou falsa. Para mostrar que a hipótese do contínuo não pode ser demonstrada com os outros axiomas da teoria, bem como sua negação também não pode, Cohen usou a técnica “forcing”, por ele inventada – técnica esta que lhe rendeu uma medalha Fields em 1966 e que só é possível porque assumimos a incompletude demonstrada por Gödel.

Segundo Lannes (2009, p. 42, grifo do autor):

> O método de Cohen permitiu mostrar a independência relativa da *hipótese do contínuo* e do Axioma da Escolha [...]. Isto é, *a hipótese do contínuo* e o Axioma da Escolha estão para a teoria de conjuntos assim como o postulado das paralelas está para a geometria euclidiana.

Deste modo, conforme afirmam Geloneze e Cardoso (2020, n.p), “podemos impor, ou não, a hipótese do contínuo como um axioma independente dos demais, obtendo assim pelo menos duas matemáticas diferentes e contraditórias.”. Sobre estas “matemáticas diferentes”, os autores completam:

> Sossegue, não há ainda, pelo menos até onde estamos informados, duas físicas, uma para cada matemática. Mas é claro que existem pelo menos duas matemáticas diferentes, por exemplo, por causa do trabalho de Cohen. Uma matemática é determinada por um sistema lógico subjacente e por uma teoria de conjuntos. Logo, como já se sabia antes de Cohen, existem infinitas matemáticas porque existem infinitas lógicas. (GELONEZE; CARDOSO, 2020, n.p)

A mais simples mudança em algum axioma do sistema lógico subjacente, ou em algum axioma de uma teoria de conjuntos, mesmo que seja em apenas um axioma, pode produzir uma matemática totalmente diferente. É o que aconteceu com a matemática difusa, por exemplo, e suas importantes aplicações industriais, tecnológicas e científicas (GELONEZE; CARDOSO, 2020).

Finalmente, segundo Bicudo (2003, p. 25), a pergunta “É verdadeira ou não a hipótese do contínuo?” está longe de possuir uma resposta:

> Muito recentemente (1995/1996), Jacob Zimbarg Sobrinho, atualmente professor aposentado da Universidade de São Paulo, desenvolveu um sistema completo para a lógica plena de segunda ordem e derivou, da correspondente teoria dos conjuntos, a hipótese generalizada do contínuo. Logo, nesse sistema, decide-se a hipótese do contínuo: ela é verdadeira. Mas, caso nos mantenhamos, como é hábito, na linguagem de primeira ordem, a que se considera, por excelência, a linguagem da matemática (é possível ver, nessa atitude, o peso assombroso da tradição) a pergunta: "É verdadeira ou não a hipótese do continuum (do reino do infinito)?" ainda não achou resposta. Por isso, talvez possamos dizer que, mais uma vez, Cantor encarna, à perfeição, a figura de Moisés: o que ele não foi capaz de revelar, seu povo é incapaz de saber.

Impossível não trazer à memória a célebre frase devida à Russell: "A matemática é a única ciência exata em que nunca se sabe do que se está a falar nem se aquilo que se diz é verdadeiro" (CLEARY, 2013, p. 85, tradução nossa).

Referências

AGUIAR, F. F. P. *Um background na Teoria dos Conjuntos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. 50 f.

ARCARI, I. *Um Texto de Geometria Hiperbólica*. Campinas, São Paulo, 2008. Acesso em: 17/09/2019. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br>.

BICUDO, I. A hipótese do continuum ou o primeiro problema de hilbert. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 15–26, apr 2003. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

BORGES, H. H. *O teorema da incompletude de Gödel*. 2019. Acesso em: 17/04/2020. Disponível em: <http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2019/download/relatorios/CTCH/FIL/FIL-Hugo\%20Hoffmann\%20Borges.pdf>.

CLEARY, J. J. *Studies on Plato, Aristotle and Proclus*: The collected essays on ancient philosophy of john cleary. [S.l.]: Brill, 2013. v. 15.

FAJARDO, R. A. dos S. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo, 2017. Acesso em: 02/05/2020. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf>.

GAMA, L. B. *O paradoxo de Banach-Tarski*. 2016. Monografia (Bacharel em Matemática), UFF (Universidade Federal Fluminense), Volta Redonda - Rio de Janeiro, Brazil.

GELONEZE, A.; CARDOSO, E. A solução da angústia de cantor. *Portal Educativo Só Matemática*, 2020. Acesso em: 21/05/2020. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/coluna/08062001.php>.

GOLDSTEIN, R. *Incompletude: A prova e o paradoxo de Kurt Gödel*. São Paulo: Companhia das letras, 2008. Trad.: Ivo Korytowski.

GONZÁLEZ, C. G. Paradoxos, o infinito e a intuição geométrica. *Educação e filosofia*, v. 25, p. 717–740, jul-dez, 2011. Acesso em: 23/01/2020. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/EducacaoFilosofia/article/view/13374>.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Caderno Cedes*, n. 74, p. 75–96, jan-abr, 2008. Acesso em: 31/10/2019. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a06.pdf>.

HALMOS, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono, 1970. Trad.: Irineu Bicudo.

HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to Set Theory*. third. New York: Marcel Dekker, 1999.

LAGES, L. Cinco paradoxos da lógica e da matemática. *Superinteressante*, 2014. Acesso em: 09/12/2019. Disponível em: <https://super.abril.com.br/blog/superlistas/5-paradoxos-da-logica-e-da-matematica>.

LANNES, W. *A incompletude além da matemática: impactos culturais do Teorema de Gödel no século XX*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

LAZARETTI, B. O que é o paradoxo de pinóquio? *Superinteressante*, 2016. Acesso em: 15/05/2020. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-o-paradoxo-de-pinoquio>.

LEAL, J. de A. *Teoria dos Conjuntos e o axioma da escolha*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, 2016. 79 f.

LIMA, E. L. de. O princípio da indução. *Eureka*, n. 3, p. 26–43, 1998. Acesso em: 28/04/2020. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka3.pdf>.

MARGOTTI, F. *Modelos em geometria: Aspectos axiomáticos e simetrias*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Federal de Santa Catarina, SC, 2007. 136 f.

MARTIN, G. E. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Velag, 1986.

OLIVEIRA, A. J. F. de. *A herança de Cantor e a Hipótese do Contínuo*. 2020. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Pl_FrancoOliveira_4888b83d0af7b.pdf>.

POGGI, M. *Notas de aula*. Rio de Janeiro, 2020. Acesso em: 15/01/2020. Disponível em: <http://www-di.inf.puc-rio.br/~poggi/discrete.pdf>.

RUSSELL, B. *The philosophy of Logical Atomism*. [s.n.], 1985. [1918]. Acesso em: 07/12/2019. Disponível em: <https://sites.ualberta.ca/~francisp/NewPhil448/RussellPhilLogicalAtomismPears.pdf>.

SANTOS, M. C. N. dos. *Principais Axiomas da Matemática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014. 43 f.

SENTONE, F. G. *Paradoxos geométricos em sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, PR, 2017. 98 f.

SILVA, J. J. da. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, S. G. da; JESUS, J. P. C. de. Cem anos do axioma da escolha: Boa ordenação, lema de zorn e o teorema de tychonoff. *Matemática Universitária*, n. 42, p. 16–34, 2007. Acesso em: 02/01/2020. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n42_Artigo02.pdf>.

SINGH, S. L. *O Último Teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Editora Record, 1998.

VARÃO, R. *Teorema da incompletude de Gödel: Ninguém sabe se a matemática está certa*. 2020. Acesso em: 17/04/2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Ienrms--UzY>.

WADE, E. *O que é o paradoxo de Russell?* [S.l.], 2018. Acesso em: 22/12/2019. Disponível em: <https://medium.com/@eltonwade/o-que-\%C3\%A9-o-paradoxo-de-russell-1c525ba44bc3>.