SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

APRÍGIO DOS SANTOS VIEIRA FILHO

PROBABILIDADE E SUAS APLICAÇÕES

PORTO VELHO
2020

APRÍGIO DOS SANTOS VIEIRA FILHO

PROBABILIDADES E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT no polo da Universidade Federal de Rondônia - UNIR, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Batista Simão

PORTO VELHO
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fundação Universidade Federal de Rondônia

Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

V658p Vieira Filho, Aprígio Dos Santos .

Probabilidade e suas aplicações / Aprígio Dos Santos Vieira Filho. -- Porto Velho, RO, 2020.

80 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Flávio Batista Simão

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia

1.Probabilidade. 2.Teorema de Bayes. 3.Distribuições de Probabilidade. I. Simão, Flávio Batista. II. Título.

CDU 519.2

Bibliotecário(a) Luã Silva Mendonça CRB 11/905

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 054

ATA DA QUINQUAGÉSSIMA QUARTA SESSÃO DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DO MESTRADO. POLO UNIR/RO.

MESTRANDO: **Aprígio Santos Vieira Filho**

INÍCIO DO CURSO: **março/2018**

Aos trinta dias do mês de julho de 2020, às dez horas, por videoconferência no Google Meet, foi realizada a sessão de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do mestrando **APRÍGIO SANTOS VIEIRA FILHO**, como requisito obrigatório estabelecido nos termos dos artigos 37, 41, 42 do Regimento Interno do PROFMAT/UNIR. A Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa, foi composta pelos membros: Prof. Dr. Flávio Batista Simão (Orientador), Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva (membro interno) e Profª. Drª. Maria das Graças Viana de Sousa (membro externo ao Programa), sob a presidência do primeiro, julgou o trabalho intitulado " PROBABILIDADE E SUAS APLICAÇÕES". Após a defesa apresentada pelo mestrando e arguições pela Comissão, o trabalho foi considerado "APROVADO" e, em razão das recomendações dos membros da Comissão, o Senhor Presidente se comprometeu a orientar a sequência do processo da elaboração da versão final com a inclusão das recomendações realizadas. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, foi lavrada a presente ATA, que vai assinada digitalmente pelos membros da Comissão Examinadora e o Mestrando.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO BATISTA SIMAO**, **Docente**, em 30/07/2020, às 12:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **MARINALDO FELIPE DA SILVA**, **Docente**, em 30/07/2020, às 12:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **MARIA DAS GRACAS VIANA DE SOUSA**, **Docente**, em 30/07/2020, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **APRIGIO DOS SANTOS VIEIRA FILHO**, **Chefe pro Tempore**, em 30/07/2020, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.unir.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0465704** e o código CRC **933E5580**.

Referência: Processo nº 99955373E.000003/2020-36 SEI nº 0465704

DEDICATÓRIA

Aos meus genitores: Maria Rodrigues Vieira dos Santos e Aprígio dos Santos Vieira.
A todos os meus professores do PROFMAT.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao Grande Mestre Deus, por iluminar meu caminho, possibilitar-me superar as dificuldades da vida e dar-me sabedoria para persistir e concluir este mestrado.

Às minhas filhas, Larissa C. dos Santos e Vitoria C. dos Santos, que tanto me fizeram amadurecer e crescer, motivado pela necessidade de ser um bom exemplo de vida a elas. Meus agradecimentos sinceros.

Ao Prof. Dr. Flávio B. Simão, por sua orientação segura, dedicada e atenciosa.

Ao meu grande amigo Sézani M. G. de Carvalho pela dedicação e apoio irrestrito durante todas as etapas do mestrado e pela longa e sincera amizade.

Ao meu amigo e grande professor Jackson Itikawa, pela amizade, ajuda e apoio na defesa deste trabalho.

Ao meu amigo Dalton Carvalho Guimarães, acadêmico de ciências econômicas, pelas contribuições na construção dessa pesquisa.

A todos os professores e técnicos do Departamento de Matemática pelo incentivo gigantesco, sem o qual não seria possível concluir este mestrado, minha eterna gratidão.

Agradeço, pelas contribuições em minha formação, ao corpo docente do Profmat: Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva, Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodrigues (Coordenador do Profmat), Prof. Dr. Flávio Batista Simão (meu orientador), Prof. Me. Ronaldo Chaves Cavalcanti, Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa e Prof. Me. Carlos Maurício de Sousa.

Agradeço aos colegas de turma no mestrado: Walmor, Ivan, Edileuza, Adão, Ana Beatriz, Ângela, Gleice de Assis, Carlos José, Erisvaldo e Josirene, os quais sempre estiveram dispostos a colaborar nos exercícios compartilhados, momentos de estudos e discussões e em todos instantes em que precisei de apoio. Aprendi muito com cada um dos senhores!

A todos os que contribuíram com minha formação, os quais acima enumerei, e aos colaboradores que porventura tenha deixado de mencionar, externo aqui a minha eterna gratidão.

RESUMO

A Teoria da Probabilidade é um importante ramo da Matemática e possui um vasto campo de aplicações, o qual se estende praticamente sobre todos os ramos das ciências naturais, técnicas e sociais. Este estudo apresenta uma revisão bibliográfica com a finalidade de observar o quanto a Teoria da Probabilidade evoluiu em suas aplicações, além de apresentar e explorar algumas dessas aplicações, objetivando demonstrar a importância do ensino dessa teoria. Reconhecendo a grande importância deste conteúdo para vida acadêmica e social, este trabalho traz uma proposta com simulações e aplicações da probabilidade com ênfase na área da saúde, motivada pela ocorrência da pandemia de COVID-19, enfrentada, de maneira global, na atualidade. Destaca-se, no presente trabalho, a importância e utilidade do teorema de Bayes e das distribuições de probabilidade nas simulações relativas ao atual momento pandêmico. Espera-se que este material sirva de apoio para os professores que acreditam que devam ir além dos conteúdos propostos pelo currículo comum e valorizar a formação integral de seus alunos.

Palavras-Chave: Probabilidade. Teorema de Bayes. Distribuições de Probabilidade.

ABSTRACT

The Probability Theory is an important branch of Mathematics and has a wide field of applications, which extends to practically all branches of the natural, technical and social sciences. This study presents a bibliographic review in order to observe how much the Probability Theory has evolved in its applications, in addition to presenting and exploring some of these applications, aiming to demonstrate the importance of teaching this theory. Recognizing the great importance of this content for academic and social life, this work brings a proposal with simulations and applications of probability with emphasis on the health area, motivated by the occurrence of the pandemic of COVID-19, faced, globally, today. In the present work, the importance and usefulness of Bayes' theorem and probability distributions in the simulations related to the current pandemic moment are highlighted. It is hoped that this material will serve as support for teachers who believe that they should go beyond the content proposed by the common curriculum and value the integral education of their students.

Keywords: Probability. Bayes ' theorem. Probability Distributions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática possui importantes papéis no cotidiano: nas atividades individuais e nas relações interpessoais inerentes à vida em sociedade; estando suas aplicações presentes desde as atividades mais elementares como a realização de contagens, comparações, medições e operações quantitativas; até as aplicações mais complexas dentro da própria matemática ou em áreas do conhecimento como engenharias, saúde, entre outras.

A finalidade desta dissertação, do Mestrado Profissional de Matemática em Rede nacional (PROFMAT), é a realização de uma revisão bibliográfica visando observar a evolução da Teoria da Probabilidade em relação às suas aplicações; apresentar simulações presentes no campo da realidade e demonstrar, com isso, que esse ramo da Matemática se dedica a estudar e mensurar as chances de ocorrência, ou não, de determinados fenômenos.

Este trabalho apresenta aplicações à fenômenos da realidade, portanto, poderá servir como referência aos docentes da disciplina de matemática, ao lecionarem o conteúdo curricular de probabilidade, na obtenção de informações e exemplos consubstanciados, servindo, dessa forma, como um material auxiliar com o qual o professor poderá responder à pergunta frequentemente realizada por diversos alunos: “professor, para que serve esse conteúdo”? De maneira simples e rápida os docentes encontrarão neste trabalho, de forma evidenciada, a importância da aplicação da probabilidade na prática diária de seus alunos, possibilitando, com isso, o despertar do interesse do aluno pela disciplina de matemática, em especial a probabilidade.

Os capítulos foram organizados seguindo uma orientação que apresenta os elementos necessários dentro da teoria da probabilidade e suas aplicações.

As aplicações apresentadas nesse trabalho, em sua maioria, envolvem problemas atuais utilizando as ferramentas desenvolvidas nos capítulos dois e três. Os ensaios simulados, desenvolvidos no capítulo quatro, derivaram-se, em parte, da revisão bibliográfica realizada e alguns deles foram elaborados pelo autor deste estudo, motivado por temas atuais apresentados nos noticiários de informações da mídia e de organizações sociais.

No primeiro capítulo deste trabalho, a gênese histórica da probabilidade é apresentada de forma sucinta, com a finalidade de mostrar como se deu a evolução deste conceito em nossa sociedade.

No capítulo dois são apresentados os fundamentos da Teoria da Probabilidade, os conceitos de espaço amostral, evento, definições de probabilidade e modelo equiprobabilístico. Em razão da importância do conceito de probabilidade condicional e do teorema de Bayes, neste capítulo esses temas foram tratados em posição de destaque, portanto, seus desenvolvimentos foram detalhados com maior ênfase.

No capítulo três o estudo da probabilidade prossegue com a introdução dos conceitos de variáveis aleatórias, sendo de maior importância nessas variáveis, as suas distribuições de probabilidade, isto é, as probabilidades dos diversos eventos envolvendo tais variáveis, que podem ser discretas ou contínuas. A ênfase deste capítulo é o estudo das distribuições discretas e distribuições contínuas de probabilidade, definidas por uma função de probabilidade.

No capítulo quatro - objetivo principal deste trabalho – são apresentadas as contribuições da Teoria da Probabilidade, em especial, as aplicações que modelam fenômenos relacionados ao momento pandêmico atual. Este capítulo contém uma série de simulações em que a probabilidade figura como ferramenta essencial, sendo utilizadas as distribuições de probabilidade e o teorema de Bayes.

1 FUNDAMENTOS HISTÓRICOS DA PROBABILIDADE

Atualmente, o estudo relacionado ao cálculo de probabilidade é de grande importância e possui aplicações em diversas áreas, como estatística, economia, saúde, engenharia, física, química, sociologia, psicologia, biologia, entre outros ramos do conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) apresenta o conteúdo curricular de probabilidade não unicamente como uma relação de procedimentos matemáticos de cálculo, mas como um conjunto de ideias aliadas à métodos de cálculos para modelarem fenômenos do dia-a-dia:

> A Probabilidade consiste num ramo da matemática que estuda as possibilidades da ocorrência de um fenômeno. Compreende-se que a probabilidade deve ser vista como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente (BRASIL, 2002).

A probabilidade, no decorrer da História, nem sempre foi como a conhecemos na atualidade, tendo sido longo e árduo o caminho percorrido por matemáticos em diferentes épocas, culminando com a construção de um conjunto de conceitos e ferramentas capazes de modelar diversos fenômenos, portanto, com vasto campo de aplicação.

Neste capítulo são apresentadas algumas etapas históricas da evolução da probabilidade.

Desde os povos mais antigos, polinésios e siberianos, até a idade média, o homem busca o entretenimento em jogos de azar. O nome “jogos de azar” é assim definido em razão de o resultado final não depender somente da habilidade do jogador, mas exclusiva ou predominantemente do acaso. Desse modo surgiu a necessidade de o homem, com o uso da ferramenta de cálculo de probabilidade, tentar entender ou decifrar os jogos de azar para assim buscar curiosamente a possibilidade de levar vantagem sobre os jogadores adversários. “Na antiguidade acreditava-se muito na superstição e atribuía-se aos deuses a vitória ou a derrota diante de um jogo ou fato” (MLODINOW, 2009). Em razão disto o cálculo de probabilidades poderia, talvez, ter sido desenvolvido mais cedo.

O desenvolvimento do cálculo de probabilidades teve início apenas no século XVI. Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos, segundo Viali (2008) “O italiano Girolamo Cardano (1501-1576) é considerado por muitos como o iniciador do estudo matemático das probabilidades”. Foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um evento aleatório e, assim, determinar a probabilidade da ocorrência de um evento como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao experimento.

A obra intitulada “Livro sobre os jogos de azar”, surgido em 1550, pode ser considerado o primeiro trabalho sobre a teoria da probabilística. Esta obra foi escrita pelo matemático e médico Girolamo Cardano, o qual fez um estudo dos jogos em que ele mesmo apostava: dados, gamão, cartas, astrágalos e até xadrez. Cardano tinha vantagens sobre seus oponentes, pois havia adquirido uma compreensão da possibilidade de vencer em diversas situações. O discernimento de Cardano sobre o funcionamento da aleatoriedade representou uma nova ideia e uma nova metodologia, formando a base da descrição matemática da incerteza, pelos séculos que se seguiram.

Os italianos Galileu Galilei (1564- 1642) e Nicolò Fontana Tartaglia (1499-1557) também se dedicaram ao estudo da aleatoriedade. Galileu era físico, astrônomo, matemático e filósofo e chegou a escrever um breve artigo sobre os jogos de azar: “Ideias sobre os jogos de dados”, presumindo que um dado tem probabilidade igual de cair em qualquer um dos seis lados.

O cálculo de probabilidades foi fortalecido com os estudos de Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), ao tentarem resolver o problema proposto por Luca Paccioli:

> Suponha que duas pessoas estão participando de um jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir primeiro uma determinada quantidade de pontos. O jogo, porém, é interrompido, por algum motivo externo, e um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? (BOYER,1995. p. 265).

Pascal e Fermat foram os pioneiros no estudo de problemas não-numéricos de probabilidade. De qualquer modo, para alguns autores, Cardano continua sendo o pai da probabilidade, já que estudos posteriores, apesar de serem mais completos e minuciosos, foram baseados no seu livro e nos seus escritos.

Outro matemático que também se dedicou ao estudo das probabilidades, de acordo com Viali (2008) foi Jacob Bernoulli (1654-1705). Formado em filosofia e teologia, contra a vontade de seus pais, Bernoulli estudou matemática e astronomia, áreas que sempre despertaram seu interesse. Acreditava que, para tomarmos decisões racionais, precisaríamos de um método matemático confiável para determinar probabilidades. Jacob Bernoulli em seu livro “A arte da Conjectura” (1713), publicado postumamente, foi o primeiro a escrever um tratado cientifico sobre a probabilidade e nesse texto apresenta a probabilidade como um assunto tratado matematicamente. Bernoulli aliou à probabilidade, assuntos como: combinações, permutações e classificação binomial.

Os fundamentos do cálculo de probabilidades foram colocados por Laplace, na forma clássica, como é conhecida atualmente e manteve-se inalterada até o início do século XX.

Segundo (GADELHA, 2004) “Laplace (1749 – 1827), físico e matemático francês que publicou Teoria Analítica das Probabilidades, obra que consta dos estudos de Cardano em probabilidade, chamados por ele de princípios”. Foi Laplace quem deu início ao período clássico da teoria probabilística, seguido por matemáticos como Poincaré, Poisson e Gauss, sendo este último o responsável por apresentar o método da distribuição das probabilidades.

No cotidiano usamos o cálculo e probabilidade de uma forma intuitiva: ao consultarmos informações sobre a probabilidade de chover, a probabilidade de um time ser campeão, a probabilidade de passarmos em um concurso público, a probabilidade de ganhar em uma aposta de jogo de loteria, a probabilidade de recuperação de uma enfermidade, entre outras situações. Porém, a probabilidade como conjunto de ideias e procedimentos sistematizados, construídos ao longo da história, deu origem à Teoria da Probabilidade, a qual contém axiomas e definições que serão abordados no capítulo seguinte.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE

A teoria da Probabilidade, muito utilizada como uma das ferramentas responsáveis por subsidiar o desenvolvimento para compreensão de diversos problemas do cotidiano, tem demonstrado a capacidade de motivar muitos pesquisadores a desenvolverem seus estudos nas mais diversas áreas do conhecimento, principalmente com a aplicação dos métodos quantitativos.

Os modelos matemáticos utilizados para estudar certos fenômenos aleatórios, variam em níveis de complexidade matemática, de acordo com o fenômeno a ser pesquisado.

Certos fenômenos aleatórios, relativamente simples e interessantes, podem nos trazer informações que contribuam, através de situações práticas, com o comportamento das nossas intervenções em diversas atividades do ramo cientifico.

> Em 1930 – 1933 A. Kolmogorov lançou as bases formais para a Teoria da Probabilidade, ao considerar: o espaço básico como um conjunto que representa todas as possibilidades do fenômeno a ser estudado; um evento como sendo um subconjunto do espaço básico e uma probabilidade como sendo uma medida positiva em uma álgebra de eventos que atribui o valor um (1) para todo o espaço básico; a variável aleatória como sendo uma função mensurável neste espaço e sua expectativa média como sendo a integral dessa função. Assim, a Teoria da Probabilidades foi incorporada à Teoria da Medida e, assim, entrou na corrente principal da matemática. Por um lado, isso permitiu que a probabilidade se desenvolvesse mais consistentemente, ampliando o seu campo de aplicações em novas direções, desde à estatística até a teoria de potencial da física matemática; enquanto, por outro lado, motivou o estudo de problemas e a utilização de métodos de campos totalmente diferentes. (SION, 2020)

Para a sistematização da Teoria da Probabilidade, não diferentes de outras teorias matemáticas, foram construídas bases conceituais fundamentais, as quais são apresentadas, por meio das seguintes definições:

2.1 Experimento Aleatório

Para Magalhães (2006) “um *experimento aleatório* é qualquer processo que, quando repetido sob as mesmas condições, não necessariamente fornece o mesmo resultado”.

São exemplos de experimento aleatório:

a) O lançamento de uma moeda, pois esse experimento poderá ser repetido quantas vezes desejarmos, sendo que, antes do lançamento, não poderemos dizer qual será o resultado, mas somos capazes de relatar os possíveis resultados: cara e coroa.
b) O lançamento de um dado não viciado, pois esse experimento poderá ser repetido quantas vezes desejarmos, sendo que, antes do lançamento, não podemos dizer qual será o resultado, mas somos capazes de relatar os possíveis resultados: 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

2.2 Espaço Amostral

Para Magalhães (2006) “Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento e é, para fins de identificação, denotado por S ou Ω”.

Por exemplo: no lançamento de uma moeda, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{cara, coroa\}$ e, se considerarmos o lançamento de um dado, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Se o espaço amostral é constituído por um conjunto numérico enumerável, então ele é chamado de espaço amostral discreto. Caso o espaço amostral seja constituído por um conjunto numérico não-enumerável, então ele é chamado de espaço amostral contínuo.

2.3 Evento

Para Magalhães (2006) “Evento é qualquer conjunto de resultados de um experimento”. Sendo o evento um conjunto, pois trata-se de um subconjunto de Ω, o indicaremos por letras maiúsculas: A, B, C, entre outras.

Por exemplo, no experimento aleatório que consiste no lançamento de um dado, pode-se definir um evento A como sendo a obtenção de um número par, portanto, neste caso, $A = \{2, 4, 6\}$.

O conjunto vazio $\emptyset$ é classificado como sendo evento impossível, uma vez que ao se realizar o experimento aleatório sempre se obtém um resultado. O espaço amostral Ω é classificado como evento certo, uma vez que ao se realizar um experimento aleatório, qualquer resultado obtido pertencerá a Ω. Para todo $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é classificado como evento elementar. O complementar do conjunto A é o evento "A não ocorre", representado por $\bar{A} = \Omega - A$.

Na realização de um experimento, a ocorrência de um evento A implica que o resultado obtido é um elemento pertencente ao conjunto A, por conseguinte, a não ocorrência de uma elemento de A como resultado, implica na ocorrência do evento $\bar{A}$.

Para Magalhães (2006) "Dois eventos A e B, contidos em Ω, são chamados de mutuamente excludentes se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.

2.4 Probabilidade

Segundo Triola (2008) "Há diferentes maneiras de se definir a probabilidade de um evento". A seguir apresentamos três tipos de definição para probabilidade:

a) Probabilidade empírica: nesse tipo de definição, a probabilidade é dada pela frequência relativa do evento, ou seja, o experimento é realizado sucessivas vezes e a probabilidade é determinada pela razão entre o número de ocorrências de evento A e o número de vezes que o experimento foi realizado. É uma probabilidade frequentista. Com base nos resultados efetivos, a probabilidade da ocorrência do evento A, representada por $P(A)$, é estimada como sendo:

$$P(A) = \frac{\text{números de vezes em que ocorre } A}{\text{número de vezes que o experimento foi realizado}}$$

Ao calcularmos probabilidade com abordagem da frequência relativa, obtemos uma estimativa em vez de um valor exato. À medida que o número total de observações aumenta, as estimativas correspondentes tendem a se aproximar da verdadeira probabilidade. Essa propriedade é estabelecida como um teorema comumente conhecido como lei dos grandes números.

b) Probabilidade subjetiva: nesse caso a probabilidade $P(A)$, de um evento A ocorrer, é estimada com base no conhecimento, acumulado, de circunstâncias contribuintes relevantes. Por exemplo: na tentativa de estimar a probabilidade de ocorrer chuva amanhã, os meteorologistas usam seu conhecimento de especialistas em condições de tempo, fundamentados nas experiências acumuladas e em fatores contribuintes, como ventos, umidade do ar, entre outros, para desenvolver uma estimativa de probabilidade. Note que a probabilidade subjetiva é utilizada quando não se pode utilizar outras formas de determinação da probabilidade.

c) Probabilidade clássica ou Probabilidade Laplaciana: depende de técnicas de combinatória e requer resultados igualmente prováveis. Se considerarmos $n(A)$ como sendo o número de maneira em que o evento A pode ocorrer (número de elementos do evento A), e $n(\Omega) \neq 0$ como sendo o número total dos diferentes eventos que podem ocorrer no experimento (número de elementos do espaço amostral) e que cada um desse eventos tenha igual chance de ocorrência, então, a probabilidade $P(A)$, de ocorrência do evento A, é dada por:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ maneira\ em\ que\ A\ pode\ ocorrer}{Número\ de\ diferentes\ eventos} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Independente de como são obtidas, as probabilidades atendem a alguns axiomas.

De maneira formal, considere em experimento aleatório e um espaço amostral Ω associado a ele. A cada evento A associaremos um número real denominado probabilidade de ocorrência de A

Para Magalhães (2006) “Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A, um número $P(A)$ de forma que:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $P(\Omega) = 1$;

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B forem eventos mutuamente excludentes”.

Em decorrência do enunciado acima, aliado às operações elementares com conjuntos, temos as seguintes proposições:

Proposição 1: (Lei do Complemento) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Demonstração: Essa proposição decorre do fato de $A \cap \bar{A} = \emptyset$, ou seja, A e $\bar{A}$ são eventos mutuamente excludentes e, neste caso, tem-se que $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$;

mas, $A \cup \bar{A} = \Omega$, assim, $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, o que implica que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, donde resulta que $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Proposição 2: $P(\emptyset) = 0$, isto é, se um evento é impossível, sua probabilidade de ocorrência é igual a zero.
Demonstração: Sendo Ω o espaço amostral, tem-se que $\overline{\Omega} = \emptyset$, o que acarreta que $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Proposição 3: (Lei da Adição) Dados dois eventos A e B quaisquer, a probabilidade de A ou B ocorrer equivale à probabilidade de ocorrer o evento A somado à probabilidade de ocorrer o evento B, menos a probabilidade de A e B ocorrerem. Ou seja, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Demonstração: Das operações elementares com conjuntos sabe-se que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Como $\Omega \neq \emptyset$, então $n(\Omega) \neq 0$. Dividindo os membros da igualdade anterior por $n(\Omega)$, tem-se $\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$, donde resulta que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

A lei de adição é útil quando estamos interessados em saber qual é a probabilidade de pelo menos um de dois eventos ocorrer. Ou seja, com os eventos A e B, estamos interessados em saber qual é a probabilidade de ocorrência do evento A ou do evento B ou ambos.

2.5 Modelo Equiprobabilístico

Um modelo probabilístico é caracterizado como equiprobabilístico se cada evento unitário tiver a mesma probabilidade de ocorrência.

Para Magalhães (2006) “Um modelo equiprobabilístico num espaço amostral Ω com n elementos, associa, a cada evento elementar, a probabilidade $\frac{1}{n}$”. Se o modelo é equiprobabilístico, então, dado um espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n\}$, a probabilidade de um evento $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_p\}$, com p elementos $(p \leq n)$, é definida por:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots \ldots + \frac{1}{n}}_{p\ parcelas}$$

Como o evento A contém p eventos elementares, logo, $P(A) = \frac{p}{n}$

Portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ a\ A}{número\ de\ casos\ possíveis\ de\ \Omega}$$

Quando associamos a cada ponto amostral a mesma probabilidade de ocorrência, o espaço amostral é dito equiprovável.

2.6 Probabilidade Condicional

A conceito de probabilidade condicional é de suma importância, tanto para aplicabilidade em Processos Estocásticos, quanto para a Estatística. A probabilidade condicional atrela a ocorrência de um evento ao fato de outro evento já ter, anteriormente, ocorrido. Tendo ciência da ocorrência de um evento B, muitas vezes se torna mais fácil avaliar a probabilidade da ocorrência de um evento A.

Para Magalhães (2006) "Dados dois eventos, A e B, de um espaço amostral Ω, denota-se por $P(A|B)$ a probabilidade condicional de ocorrer o evento A quando evento B já tiver ocorrido, assim, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) \neq 0$".

Dessa forma, para avaliar a probabilidade do evento A ocorrer, sabendo que o evento B já ocorreu, basta contar o número de casos favoráveis do evento $(A \cap B)$ e dividir esse número pela quantidade de casos favoráveis do evento B.

A título de exemplo, suponha que, no lançamento de um dado, deseja-se determinar a probabilidade de um evento A que corresponda a ocorrência da face que contenha o número 3. A princípio, essa probabilidade é igual a $\frac{1}{6}$. Suponha ainda que se tome conhecimento que, o dado foi lançado e o resultado obtido tenha sido um número ímpar. Desse modo, pode-se reavaliar a probabilidade de ocorrência do evento A, com base na ocorrência de um evento $B = \{ocorrência\ de\ um\ número\ ímpar\ no\ lançamento\ de\ um\ dado\} = \{1, 3, 5\}$ e, por essa razão, o probabilidade de ocorrência do evento A se reduz a $\frac{1}{3}$.

2.7 Independência

Para Magalhães (2006) “Dois eventos A e B quaisquer são independentes se a ocorrência do evento B não alterar a probabilidade atribuída ao evento A”.

Assim, pode-se dizer que um evento A é considerado independe de um evento B se a probabilidade de ocorrência de A for igual a probabilidade condicional do evento A, dada a ocorrência do evento B, isto é, se:

$$P(A) = P(A|B)$$

Em decorrência da igualdade acima, a independência entre os eventos A e B também pode ser expressa por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2.8 Teorema de Bayes

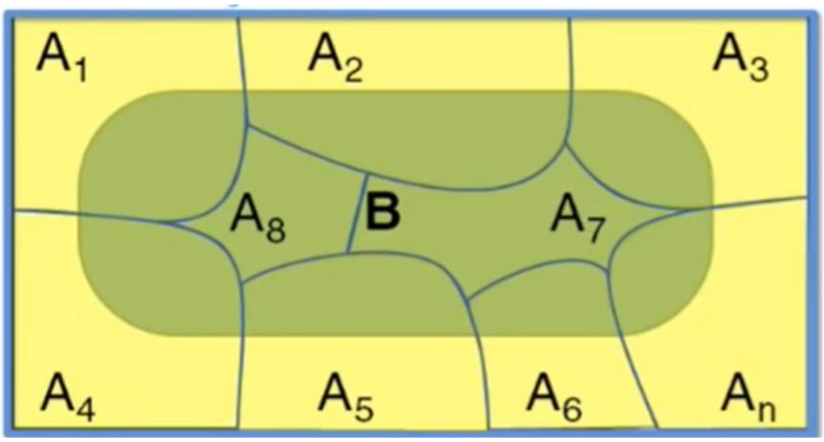
Thomas Bayes (1701 – 1761) foi um pastor presbiteriano e matemático inglês. Bayes estudou na universidade de Edimburgo, no Reino Unido, onde se dedicou à teologia e à lógica. Após sua morte, foi encontrado, dentro dos seus pertences, um manuscrito acerca do estudo de probabilidade, o qual continha o célebre teorema homônimo. O teorema de Bayes revolucionou a probabilidade e a estatística.

Em Teoria da Probabilidades e Estatística, o teorema de Bayes permite calcular a probabilidade de ocorrência de um evento, baseado no conhecimento das probabilidades *a priori* relacionadas a esse evento. O teorema de Bayes demonstra uma alteração dessas probabilidades *a priori*, trazendo novas evidências na obtenção das probabilidades *a posteriori.*

Há diversas aplicabilidades do teorema de Bayes, principalmente na inferência bayesiana, a qual trata-se de uma abordagem particular da inferência estatística. A partir do teorema de Bayes, o estudo da probabilidade passa a ter novas interpretações e com isso fornece melhores informações referentes à probabilidade *a priori*. Esta nova abordagem é chamada de análise bayesiana.

A Figura 1 mostra uma partição de um espaço amostral com uma família de eventos A_i e um evento B neste espaço. O teorema de Bayes permite a realização do cálculo da probabilidade de que tenha ocorrido um evento particular dessa família A_i, dada a informação de que o evento B ocorreu. Em outras palavras, tendo a informação de que o evento B, *a posteriori*, tenha ocorrido, é possível reavaliar a probabilidade da ocorrência de um particular evento A_i, *a priori*.

Figura 1: Partição de um espaço amostral em famílias de eventos



Disponível em: <https://docplayer.com.br/86448601-Prof-joni-fusinato.html>.
Acesso em: 04 mai. 2020

O enunciado do teorema de Bayes diz:

Sejam $A_{1,}A_2, \dots \dots .., A_n$ eventos que formam uma partição de um espaço amostral Ω, e assuma que $P(A_i) > 0$ para todo i. Então, para qualquer evento B tal que $P(B) > 0$, temos que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

Ou ainda:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

Demonstração: Pela definição de probabilidade condicional temos que $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$ e $P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$. Da última igualdade decorre que $P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ e, como $P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i)$, então, podemos substituir esse resultado na primeira igualdade, de modo que $P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$.

Por derradeiro, observe que podemos representar o evento B, da seguinte forma:

$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$, portanto, $P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)]$. Como $(A_i \cap B) \cap \left(A_j \cap B\right) = \emptyset$, para todo $i \neq j$, temos que $P(B) =$

$P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$. Pela probabilidade condicional, sabemos que $P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B|A_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$; logo, $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$, portanto,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

Um exemplo de aplicação do teorema de Bayes:

Considere que uma mulher tenha se submetido ao exame de mamografia, tendo obtido positivo para câncer como resultado.

Temos as seguintes informações prévias:

- Sabe-se que 1% das mulheres desenvolvem o câncer de mama;

- Sabe-se que se uma mulher possui câncer de mama, existe 80% de probabilidade de que o exame de mamografia dê positivo como resultado;

- Quem não possui câncer de mama tem 9,6% de chance de apresentar o resultado positivo no exame de mamografia.

Com base nessas informações, qual a probabilidade de a mulher examinada realmente possuir câncer de mama?

Solução: Suponha o evento A como sendo o evento “ter câncer de mama” e o evento B como sendo “resultado positivo para câncer, no exame de mamografia”. Sendo assim, $\bar{A}$ corresponde ao evento “não ter câncer de mama” (complementar do evento A).

Temos as seguintes situações, para a aplicação no teorema de Bayes:

$P(A|B)$: “probabilidade de ter câncer de mama, dado que o exame de mamografia deu positivo”;

$P(B|A)$: “probabilidade de o exame de mamografia apresentar resultado positivo, dado que uma mulher possua câncer”;

$P(A)$: “probabilidade de uma mulher possuir câncer de mama”;

$P(\bar{A})$: “ probabilidade de uma mulher não possuir câncer de mama”;

$P(B|\bar{A})$: “probabilidade de o resultado do exame de mamografia ser positivo para câncer, dado que uma mulher não possua câncer de mama”.

Com base nos dados fornecidos no problema, temos os seguintes resultados:

$P(A) = 0{,}01$; $P(\bar{A}) = 0{,}99$; $P(B|A) = 0{,}8$ e $P(B|\bar{A}) = 0{,}096$

Assim:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}8}{0{,}01 \cdot 0{,}8 + 0{,}99 \cdot 0{,}096} = \frac{0{,}008}{0{,}10304} \cong 0{,}078$$

Ou seja, a mulher que teve o resultado positivo para câncer, no exame de mamografia, tem, na realidade, aproximadamente 7,8% de chance de estar realmente com câncer de mama.

Tendo conceituado os principais elementos que fundamentam a Teoria da probabilidade, resta-nos aprofundar essa teoria, apresentando os conceitos de variável aleatória e suas classificações, como também as funções de probabilidade, de densidade e de distribuição, além dos modelos utilizados para descrever e interpretar fenômenos probabilísticos. Estes temas serão abordados no capítulo 3.

3 FUNDAMENTOS DAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Neste capítulo continuamos o estudo da probabilidade, introduzindo os conceitos de variáveis aleatórias e de distribuições de probabilidade. O desta parte do trabalho consiste na apresentação das distribuições discretas e as distribuições contínuas de probabilidade.

Serão abordados três tipos de distribuições discretas, a saber, a distribuição de Bernoulli, a distribuição Binomial e a distribuição de Poisson e, posteriormente, três tipos de distribuições continuas: a distribuição Uniforme, a distribuição Exponencial e a distribuição Normal.

Para se realizar o estudo das distribuições de probabilidade, são necessários os conceitos de variável aleatória (discreta e contínua), esperança e variância, conforme veremos na sequência. No decorrer desses tópicos, serão apresentados também as definições de função de probabilidade, função densidade e função de distribuição.

3.1 Variáveis Aleatórias

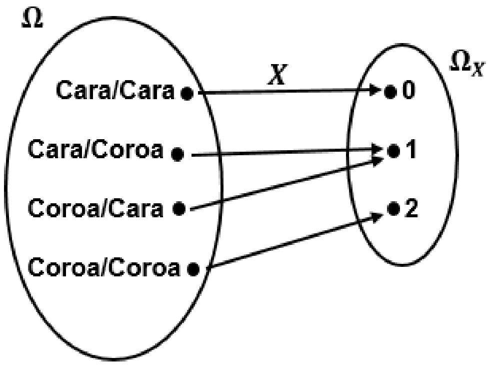
Quando se descreve o espaço amostral associado a um experimento, não necessariamente o resultado desse experimento é expresso numericamente, sendo, em muitos dos casos, expressos por meio de atributos, como é o caso de classificações de estatura como baixo, mediano ou alto; ou ainda as classificações de temperatura ambiente, como frio, ameno ou quente, entre outros casos. Podemos citar, como por exemplo, o experimento do lançamento simultâneo de duas moedas honestas, exemplo este em que o espaço amostral pode ser definido como:

$$\Omega = \{Cara/Cara, Cara/Coroa, Coroa/Cara, Coroa/Coroa\}$$

Como vimos, trata-se de um espaço amostral não-numérico, porém, é possível utilizarmos um artifício, por meio de uma função X, a fim de que se tenha um espaço amostral Ω_{X} associado a X, onde cada elemento $x \in \Omega_{\mathrm{X}}$ é a imagem de um elemento $\omega \in \Omega$ por meio da função X.

Para facilitar a compreensão, apresentamos, na Figura 2, um diagrama que representa a função X de Ω n em Ω_{X}:

Figura 2: Representação da variável X em diagrama



Fonte: Próprio Autor

Note que X é, realmente, uma função de Ω em Ω_X. Nessas condições, diz-se que a função X é uma variável aleatória.

Para Meyer (1995) "Seja ε um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X, que associe a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é denominada *variável aleatória*".

Segundo Magalhães (2006) "após o conhecimento aleatório de um fenômeno, esse passa a ser denominado de variável aleatória, produzindo um valor particular, este fenômeno tem sua devida relevância na Ciência Estatística".

Na Realidade, uma variável aleatória associa um valor numérico a cada resultado experimental possível. O valor numérico da variável aleatória depende do resultado do experimento.

Uma variável aleatória pode ser classificada como discreta ou contínua, dependendo dos valores numéricos que ela assume.

3.1.1 Variável Aleatória Discreta

Uma vez definida o que é variável aleatória, podemos classificá-la, de acordo com os valores que assume, como variável aleatória discreta.

Para Magalhães (2006):

> Diz-se que uma variável é aleatória é discreta se assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito) e a função de probabilidade de uma variável discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores assumidos pela variável. Isto é, sendo $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$, temos, para $i = 1, 2, 3, \cdots$, $p(x_i) = P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega \, ; \mathrm{X}(\omega) = x_i\}$.

A função p de probabilidade de X satisfaz as seguintes condições:

a) $0 \leq p(x_i) = P(X = x_i) \leq 1, para\ todo\ i.$
b) $\sum_i p(x_i) = 1$

O que pode facilmente ser verificado, uma vez que pela própria definição de probabilidade, seus valores ficam restritos ao intervalo $[0,1]$. Além disso, cada valor assumido pela variável, provoca em Ω, um subconjunto disjunto dos demais, cuja união é o próprio Ω, o que implica que $\sum_i p(x_i) = 1$.

Define-se também a função de distribuição F (ou função de distribuição acumulada), como sendo $F(x) = \sum_{i \in A_x} p(x_i)$, com $A_x = \{i; x_i \leq x\}$. Esta função determina a probabilidade da ocorrência de todos os valores da variável X, menores ou iguais a x.

Reavaliando o exemplo do lançamento simultâneo de duas moedas honestas, temos as seguintes informações:

$\Omega = \{\text{Cara/Cara, Cara/Coroa, Coroa/Cara, Coroa/Coroa}\}$;

$\Omega_{\text{X}} = \{0, 1, 2\}$;

Para $x_1 = 0$ temos $p(x_1) = \frac{1}{4}$; para $x_2 = 1$ temos $p(x_2) = \frac{1}{2}$ e para $x_3 = 2$, temos $p(x_3) = \frac{1}{4}$. Assim, a função de distribuição correspondente será:

$$F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0; \\ \dfrac{1}{4}, se\ 0 \leq x < 1; \\ \dfrac{3}{4}, se\ 1 \leq x < 2; \\ 1, se\ x \geq 2. \end{cases};$$

Vimos, pela definição de função de distribuição F, que se pode obtê-la por meio da função de probabilidade p. O contrário também é verdadeiro, pois, se conhecermos a função de distribuição, podemos, a partir dela, obter a função de probabilidade, bastando, para isso, considerar $p(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$, onde $F(x_i^-)$ é o limite de F tendendo à x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores ao valor de x_i.

3.1.1.1 Esperança Matemática, Variância e Desvio Padrão para Variáveis Aleatórias Discretas

Para uma variável aleatória discreta X com função probabilidade $p(x) = P(X = x)$, e x_i para i em certo conjunto de índices I; chama-se esperança matemática, valor esperado ou média de X e representa-se por $E(x)$, μ_X ou simplesmente μ, o seguinte somatório:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i \in I} x_i \cdot p(x_i)$$

com a condição que esta soma esteja determinada.

A variância da variável aleatória discreta X, representada por $Var(X)$, $V(X)$ ou σ_X^2, é definida por:

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_{i \in I} (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i)$$

O desvio padrão de X, representado por σ_X, corresponde à raiz quadrada da variância de X, portanto:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

A esperança matemática é uma medida classificada como uma medida de tendência central, enquanto que a variância e o desvio padrão são medidas de dispersão.

Considerando X e Y, duas variáveis aleatórias discretas, e α uma constante real qualquer; a esperança matemática e a variância possuem as seguintes propriedades:

a) $E(\alpha) = \alpha$;
b) $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$;
c) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
d) $E(X \pm \alpha) = E(X) \pm \alpha$;
e) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, caso X e Y sejam independentes.
f) $V(\alpha) = 0$;
g) $V(\alpha \cdot X) = \alpha^2 . V(X)$;
h) $V(X \pm \alpha) = V(X)$;

Demonstração: Considerando X e Y, duas variáveis aleatórias discretas, e α uma constante real qualquer, temos:

a) $E(\alpha) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i \in I} \alpha \cdot p(\alpha) = \alpha \cdot 1 = \alpha$;

b) $E(\alpha \cdot X) = \sum_{i \in I} \alpha[x_i \cdot p(x_i)] = \alpha \cdot \sum_{i \in I} x_i \cdot p(x_i) = \alpha \cdot E(X)$;

c) $E(X \pm Y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_i \pm y_j) \cdot p(x_i, y_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i \cdot p(x_i, y_j) \pm$

$\pm \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_j \cdot p(x_i, y_j) = \sum_{i \in I} x_i \cdot \sum_{j \in J} p(x_i, y_j) \pm \sum_{j \in J} y_j \cdot \sum_{i \in I} p(x_i, y_j) =$

$= \sum_{i \in I} x_i \cdot p(x_i) \pm \sum_{j \in J} y_j \cdot p(y_j) = E(X) \pm E(Y)$;

d) $E(X \pm \alpha) = E(X) \pm E(\alpha) = E(X) \pm \alpha$;

e) $E(X \cdot Y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i) \cdot p(y_j)$, pois X e Y são independentes. Portanto,

$E(X \cdot Y) = [\sum_{i \in I} x_i \cdot p(x_i)] \cdot [\sum_{j \in J} y_j \cdot p(y_j)] = E(X) \cdot E(Y)$;

f) $V(\alpha) = E[(X - \mu_X)^2] = E[(\alpha - \alpha)^2] = E(0) = 0$;

g) $V(\alpha \cdot X) = E\left[\left(\alpha \cdot X - \mu_{(\alpha \cdot X)}\right)^2\right] = E[[\alpha \cdot (X - \mu_X)]^2] = E[\alpha^2 \cdot (X - \mu_X)^2] =$

$= \alpha^2 \cdot E[(X - \mu_X)^2] = \alpha^2 \cdot V(X)$;

h) $V(X \pm \alpha) = E\left[\left[(X \pm \alpha) - \mu_{(X \pm \alpha)}\right]^2\right] = E[[(X \pm \alpha) - (\mu_X \pm \alpha)]^2] =$

$= E[(X \pm \alpha - \mu_X \mp \alpha)^2] = E[(X - \mu_X)^2] = V(X)$.

Retornando ao exemplo do lançamento simultâneo das duas moedas honestas, temos:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a esperança matemática, a variância e o desvio padrão da variável aleatória X, nas circunstâncias apresentadas, são, respectivamente, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.1.2 Variável Aleatória Contínua

Conforme o apresentado na subseção 3.1.1, uma variável aleatória é classificada como discreta, quando assume somente um número enumerável de valores, finito ou infinito. Resta-nos classificar uma variável aleatória que possa, teoricamente, assumir qualquer valor em um intervalo de números reais.

Para Magalhães (2006):

> "Uma variável aleatória X, com função de distribuição F, será classificada como contínua, se existir uma função f, não negativa, tal que, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é denominada função densidade".

A função densidade possui as seguintes propriedades:

a) $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)dw = 1$.

A primeira propriedade é satisfeita pela própria definição da função densidade, enquanto que a segunda propriedade decorre do fato de $F(\infty) = 1$.

Para se calcular a probabilidade P de um certo intervalo (a, b), basta calcular $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

É importante mencionar que, enquanto na função de probabilidade $p(x)$, das variáveis discretas, podemos calcular a probabilidade de um evento elementar α, apenas tomando $p(\alpha)$; nas variáveis contínuas, não faz sentido determinar a probabilidade de um valor isolado α, pois se assim fizermos, teremos $P(X = \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(\alpha) = 0$. Em decorrência disso, podemos dizer que se X for uma variável aleatória contínua, teremos:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

Para uma variável aleatória contínua X, a função de distribuição (ou função de distribuição acumulada), é definida por $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw$, para todo $x \in \mathbb{R}$. É importante ressaltar que, conhecendo a função de distribuição F de uma variável aleatória contínua, é possível obter a função de densidade f; para tanto, basta tomar $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, para todo x no qual F seja derivável. Essa afirmativa é verdadeira e de fácil comprovação, bastando, para isso, aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo em $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw$, que se obtém $F'(x) = f(x)$.

A título de exemplo do cálculo de probabilidades com variáveis aleatórias contínuas, suponha que a duração, em anos, de uma lâmpada, de um modelo específico, é uma variável aleatória contínua cuja função densidade é dada pelo modelo $f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ k \cdot e^{-3x}, se\ x \geq 0 \end{cases}$, com x em anos. Nessas condições, determine:

a) O valor da constante k;
b) A função de distribuição;
c) A probabilidade dessa lâmpada durar até seis meses;
d) A probabilidade dessa lâmpada durar entre três e quatro meses.

Solução:

a) Da definição de função densidade, sabemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)dw = 1$, assim, temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ou seja, $\int_{-\infty}^{0} 0dx +$ $+ \int_{0}^{+\infty} k \cdot e^{-3x}\, dx = 1$, o que implica que $k = 3$. Portanto, a função densidade, com a constante k determinada, é $f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 3 \cdot e^{-3x}, se\ x \geq 0 \end{cases}$;
b) Para determinar a função distribuição da variável estudada, vamos considerar a variável w na função densidade, para que não haja possibilidade de confusão, uma vez que um dos limites de integração será a variável x. Assim, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw$. Observe que $F(x) = 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$, desse modo, consideraremos a integral para $x \in [0, +\infty)$, donde $F(x) = \int_{0}^{x} f(w)dw = 1 - e^{-3x}$. Portanto, $F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 1 - e^{-3x}, se\ x \geq 0 \end{cases}$.
c) A probabilidade da lâmpada durar até seis meses (meio ano) pode ser determinada calculando-se $F\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 0{,}78$; ou seja, a lâmpada tem aproximadamente 78% de chance de durar até seis meses;
d) A probabilidade de a lâmpada durar entre três e quatro meses, considerando que três meses corresponde a $\frac{1}{4}$ de ano e quatro meses corresponde a $\frac{1}{3}$ de ano, é dada por $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} f(x)dx = F\left(\frac{1}{3}\right) -$ $-F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-3\cdot\frac{1}{3}} - \left(1 - e^{-3\cdot\frac{1}{4}}\right) = e^{-\frac{3}{4}} - e^{-1} \cong 0{,}10$, ou seja, a lâmpada tem aproximadamente 10% de chance de durar entre três e quatro meses.

3.1.2.1 Esperança Matemática, Variância e Desvio Padrão para Variáveis Aleatórias Contínuas

Para uma variável aleatória contínua X, com função densidade $f(x)$, chama-se esperança matemática, valor esperado ou média de X e representa-se por $E(x)$, μ_X ou simplesmente μ, a seguinte integral:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

desde que esta integral esteja bem definida.

A variância da variável aleatória contínua X, representada por $Var(X)$, $V(X)$ ou σ_X^2, é definida por:

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx$$

O desvio padrão de X, representado por σ_X, corresponde à raiz quadrada da variância de X, portanto:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

De maneira análoga ao caso das variáveis aleatórias discretas, Considerando X e Y, duas variáveis aleatórias contínuas, e α uma constante real qualquer; a esperança matemática e a variância, nas variáveis contínuas, possuem as seguintes propriedades:

a) $E(\alpha) = \alpha$;
b) $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$;
c) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
d) $E(X \pm \alpha) = E(X) \pm \alpha$;
e) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, caso X e Y sejam independentes.
f) $V(\alpha) = 0$;
g) $V(\alpha \cdot X) = \alpha^2 . V(X)$;
h) $V(X \pm \alpha) = V(X)$;

Demonstração: Considerando X e Y, duas variáveis aleatórias contínuas, e α uma constante real qualquer, temos:

a) $E(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \alpha \cdot 1 = \alpha$;
b) $E(\alpha \cdot X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot xf(x)dx = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \alpha \cdot E(X)$;

c) $E(X \pm Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x + y)f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx +$
$+\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x,y)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx +$
$+\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = E(X) + E(Y)$, onde $f(x,y)$ representa a função de densidade conjunta de X e Y e $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ as funções de densidade marginais de X e Y respectivamente;

d) $E(X \pm \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x + \alpha)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x)dx = E(X) \pm \alpha$;

e) $E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$. Considerando que X e Y são independentes, então é válido que $f(x,y) = f_x(x,y) \cdot f_y(x,y)$, $f(x,y)$, onde $f(x,y)$ representa a função de densidade conjunta de X e Y e $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ as funções de densidade marginais de X e Y respectivamente; portanto, temos $E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_x(x,y)f_y(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x,y)dx\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(x,y)dy\right) =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy\right) = E(X) \cdot E(Y)$;

f) $V(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha - \alpha)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot f(x)\, dx = 0$;

g) $V(\alpha \cdot X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha \cdot x - \mu_{(\alpha\cdot x)}\right)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \mu_x)^2 f(x)dx =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \cdot (x - \mu_x)^2 f(x)dx = \alpha^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mu_x)^2 f(x)dx = \alpha^2 \cdot V(X)$;

h) $V(X \pm \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x \pm \alpha) - \mu_{(x\pm\alpha)}\right]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}[(x \pm \alpha) - (\mu_x \pm \alpha)]^2 f(x)dx =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}[(x \pm \alpha)^2 - 2 \cdot (x \pm \alpha) \cdot (\mu_x \pm \alpha)^2]f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2 \pm 2\alpha x + \alpha^2 -$
$-2\mu_x x \mp 2\alpha x \mp 2\alpha\mu_x - 2\alpha^2 + \mu_x^2 \pm 2\alpha\mu_x + \alpha^2)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2 - 2\mu_x x +$
$+\mu_x^2)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mu_x)^2 f(x)dx = V(X)$.

Considerando o exemplo anterior, da duração, em anos, de uma lâmpada de um modelo específico, cuja função densidade é dada por $f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 3 \cdot e^{-3x}, se\ x \geq 0 \end{cases}$, com x em anos, temos:

$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} 3xe^{-3x}dx = \frac{1}{3}$,

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mu_X)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3 \cdot e^{-3x}dx = \frac{1}{9}$ e

$\sigma_X = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Portanto, a duração esperada da lâmpada (esperança matemática) é de quatro meses, com variância $\frac{1}{9}$ e desvio padrão $\frac{1}{3}$.

3.2 Distribuições de Probabilidade

Uma distribuição de probabilidade é um modelo matemático que relaciona um determinado valor de uma variável em estudo à sua probabilidade de ocorrência.

De acordo com a natureza da variável em estudo, as distribuições de probabilidade se dividem em modelos discretos ou modelos contínuos de distribuição.

3.2.1 Distribuição Discretas de Probabilidade

Os Modelos Discretos de Probabilidades descrevem o comportamento de uma variável aleatória discreta. Essa variável pode ser descrita por uma distribuição da probabilidade e sua função, que determina as probabilidades para determinados eventos. Assim para um evento qualquer, busca-se compreender o comportamento dessa variável e, posteriormente, adequá-la ao modelo de distribuição para a descrição dos eventos.

Existem vários modelos de distribuição discreta de probabilidade, porém, nesse trabalho, apresentaremos os três modelos mais utilizados.

3.2.1.1 Distribuição de Bernoulli

Para Magalhães (2006), “A Distribuição de Bernoulli é a uma distribuição discreta que assume apenas os valores 0 e 1, com probabilidades $P(X=0)=1-p$ e $P(X=1)=p$, com $0 \leq p \leq 1$”.

A distribuição de Bernoulli serve para descrever fenômenos cujos resultados são do tipo sucesso (S) ou fracasso (F) e um experimento com essa característica é classificado como um “ensaio de Bernoulli”. Sua esperança e sua variância são respectivamente:

$E(X)=\mu_X=\sum_{i=0}^{1} x_i \cdot P(x_i)=0 \cdot P(0)+1 \cdot P(1)=0 \cdot (1-p)+1 \cdot p=p$ e

$V(X)=\sigma_X^2=\sum_{i=0}^{1}(x_i-\mu_X)^2 \cdot P(x_i)=(0-p)^2 \cdot P(0)+(1-p)^2 \cdot P(1)=p^2 \cdot (1-p)+$
$+(1-p)^2 \cdot p=p \cdot (1-p)$.

Por consequência, o desvio padrão, na distribuição de Bernoulli, é $\sigma=\sqrt{p \cdot (1-p)}$.

Utiliza-se a notação $X \sim Bernoulli\ (p)$ para indicar que uma variável aleatória discreta X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

Consideremos, como exemplo de distribuição de Bernoulli, o seguinte problema:

Suponha que a probabilidade de óbito de um paciente, ao dar entrada em uma UTI, seja de 20%. Seja X uma variável aleatória indicadora de óbito, caso o paciente entre na UTI. Obtenha a distribuição de probabilidade, a esperança matemática de sobrevivência, a variância e o desvio padrão relativos a esse caso.

Solução: Note que esse experimento possui apenas dois resultados possíveis: “sobreviver” e “falecer”. Se considerarmos o evento “sobreviver” como sucesso e “falecer” como fracasso, vemos claramente que X é uma variável aleatória discreta com distribuição de Bernoulli igual $P(X = 0) = 0{,}2$ e $P(X = 1) = 0{,}8$. Assim, a esperança matemática é $E(X) = 0{,}8$; a variância é $\sigma_X^2 = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$ e o desvio padrão é $\sigma_X = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.

3.2.1.2 Distribuição Binomial

A distribuição de probabilidade discreta Binomial expressa a chance de ocorrência de um número k de sucessos em uma sequência de n tentativas independentes, de modo que cada tentativa represente um ensaio de Bernoulli, ou seja, resulte apenas em duas possibilidades: “sucesso” (S), com probabilidade p de ocorrência, e “fracasso” (F), com probabilidade $q = 1 - p$ de ocorrência.

Considerando X como a variável que representa o número de sucessos nas n tentativas, temos que X pode assumir os valores $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$. Fazendo o “sucesso” corresponder a 1 e o “fracasso” corresponder a 0, temos como resultados, para $X = k$, sequências do tipo $1001..1001$, com n dígitos sendo k dígitos iguais a 1 e $n - k$ dígitos iguais a 0. Como a probabilidade de “sucesso” é igual a p e a probabilidade de fracasso é igual $q = 1 - p$, e esses eventos são independentes, então cada sequência tem probabilidade de ocorrência igual a $p^k \cdot q^{n-k}$. O número de sequência contendo n dígitos, com k dígitos 1 e $n - k$ dígitos 0 pode ser obtida por meio do binomial $\binom{n}{k}$, portanto, a distribuição binomial tem, como modelo matemático, a expressão $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, a qual determina a probabilidade de se obter exatamente k sucessos.

Observe que cada um dos dígitos de uma sequência de n dígitos é obtida por meio de uma variável de Bernoulli. Assim, a variável X pode ser compreendida como a soma de n distribuições de Benoulli, cuja esperança matemática é p. Desse modo, a esperança matemática para uma distribuição binomial é dada por $E(x) = \mu_X = np$. Seguindo a mesma linha de raciocínio, teremos que a variância da distribuição binomial é dada pela expressão $V(X) = \sigma_X^2 = npq$, o que acarreta que o seu desvio padrão é $\sigma_X = \sqrt{npq}$.

Nos experimentos binomiais, quando n é muito grande, o uso da função de probabilidade binomial é impraticável, pois os coeficientes binomiais tornam-se exageradamente grandes, sendo consideravelmente complexos obter seus valores.

Segundo Barbeta (2010):

> Nos casos em que n é grande e p é muito pequeno, podemos usar a distribuição de Poisson para calcular, aproximadamente, as probabilidades de uma distribuição binomial. Quando n é grande e p não é próximo de 0 ou 1, a distribuição normal pode ser usada para calcular, aproximadamente, as probabilidades de uma distribuição binomial.

As aplicações das aproximações de uma distribuição binomial por uma distribuição de Poisson ou por uma distribuição Normal serão vistas no capítulo 4 deste trabalho.

Utiliza-se a notação $X \sim B(n,p)$ para indicar que uma variável aleatória discreta X tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

Consideremos, como exemplo de distribuição binomial, o seguinte problema: Uma moeda, não viciada, é lançada cinco vezes. Determine:

a) A probabilidade de se obter exatamente três caras no resultado;
b) A probabilidade de se obter no máximo 2 caras;
c) A média, a variância e o desvio padrão da distribuição.

Solução: Cada lançamento de uma moeda é modelado como distribuição de Bernoulli. Como temos cinco lançamentos, então o modelo a ser utilizado é de uma distribuição binomial com parâmetros $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$, pois como a moeda é não viciada, a probabilidade de ocorrência da cara é a mesma de ocorrência da coroa e equivale a $\frac{1}{2}$. Assim, temos $P(X = k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Logo:

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = 0{,}3125 \cong 31\%$.

A probabilidade de se obter exatamente três caras é de aproximadamente 31%.

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \cdot \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = 50\%.$

A probabilidade de se obter no máximo duas caras é de 50%.

c) A esperança matemática é $E(X) = \mu_X = np = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$; a Variância e $\sigma_X^2 = npq = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ e p desvio padrão é $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{1{,}25} \cong 1{,}12.$

3.2.1.3 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é utilizada em variáveis do tipo quantitativa discreta, sendo empregada para modelar a ocorrência de eventos raros (eventos com probabilidade de ocorrência muito pequena).

A distribuição de Poisson proporciona as probabilidades de números de "falhas" que acontecem num determinado período de tempo ou espaço. Os eventos de interesse (falhas) ocorrem com alguma taxa média de ocorrência μ, em um determinado intervalo de tempo ou dentro de um espaço delimitado. Por exemplos: o número de ocorrências de entradas de pacientes em um pronto socorro durante a madrugada; o número de pessoas com leucemia em uma cidade; o número de acidentes diários na Ponte Rio–Niterói, durante um período de tempo; o número de metamielócitos[1] no sangue de pessoas sadias; entre outros.

Para Medronho (2006) "A distribuição de Poisson geralmente está associada a um processo aleatório, que objetiva estudar o número de eventos de interesse e o tempo entre a ocorrência de dois eventos seguidos".

Para Lafraia (2014):

> A aplicação da distribuição de Poisson se adéqua a qualquer sequência de eventos que ocorram por unidade de área, de volume ou de tempo, normalmente será modelada para análise de uma variável cujo interesse é mensurar as partes defeituosas em um determinado intervalo. Seu modelo é muito utilizado para predição das probabilidades dessas ocorrências, em intervalo de tempo contínuo ou discreto em quaisquer ciências.

Para se obter uma expressão que determina a probabilidade de $X = k$ sucessos em uma intervalo t, $P(X = k, t)$, necessitamos admitir algumas hipóteses:

---

[1] Células da linhagem granulocítica da medula óssea.

a) $P(X = 1, \Delta t) = \lambda \Delta t$, ou seja, a probabilidade de um sucesso em um intervalo é proporcional à amplitude desse intervalo;
b) $P(X > 1, \Delta t) = 0$, ou seja, a probabilidade de se obter mais que um sucesso no intervalo considerado, é nula;
c) $P(X = 0, t) = 1 - \lambda \Delta t$, ou seja, a probabilidade de se obter fracasso é o complementar da probabilidade de se obter um sucesso;
d) As ocorrências de sucessos em intervalos são independentes, donde resulta que $\Delta t = \frac{t}{n}$, o que implica que $P(X = 1, \Delta t) = \frac{\lambda t}{n}$.

Considerando as hipóteses apresentadas, obtém-se a expressão para $P(X = k, t)$ por meio do cálculo do limite de uma distribuição binomial com parâmetros n e $\frac{\lambda t}{n}$, com n tendendo ao infinito.

$$P(X = k, t) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k)!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{x+1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}\right]}_{1} . \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda t}} . \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Logo, $P(X = k, t) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k}{k!}$, com $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

A esperança de X, pode ser obtida da seguinte forma:

$E(X) = \mu_X = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$, pois para $x = 0$ o somatório se anula.

$E(X) = \mu_X = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x \cdot (x-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}$. Fazendo $y = x - 1$, temos que $E(X) = \mu_X = \lambda t e^{-\lambda t} \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^y}{y!} = \lambda t e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \lambda t$.

A variância de X pode ser obtida da seguinte forma:

$$V(x) = \sigma_X^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} (x^2 - 2x\mu_X + \mu_x^2) \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^x}{x!} - 2\, \mu_X \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^x}{x!} +$$

$$+ \mu_X^2 \cdot e^{-\mu_X} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu_X)^x}{x!} = \mu_X \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^{x-1}}{(x-1)!} - 2\mu_X^2 \cdot e^{-\mu_X} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\mu_X)^{x-1}}{(x-1)!} +$$

$+\mu_X^2 \cdot e^{-\mu_X} \cdot e^{\mu_X}$. Fazendo $y = x - 1$, temos:

$V(X) = \sigma_x^2 = \mu_X \cdot \sum_{y=0}^{\infty}(y+1) \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^y}{y!} - 2\mu_X^2 \cdot e^{-\mu_X} \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\mu_X)^y}{y!} + \mu_X^2 \cdot 1 =$

$= \mu_X \cdot \left[\sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^y}{y!} + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^y}{y!}\right] - 2\mu_X^2 \cdot e^{-\mu_X} \cdot e^{\mu_X} + \mu_X^2$. Perceba que $\sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^y}{y!}$ representa $E(Y)$ com parâmetro μ_X, portanto, $\sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^y}{y!} = \mu_X$, enquanto que $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_X} \cdot (\mu_X)^y}{y!} = 1$, pois trata-se da soma da função de probabilidade de uma variável aleatória de Poisson, para todos os valores da imagem. Logo, $V(X) =$ $= \sigma_X^2 = \mu_X \cdot (\mu_X + 1) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mu_X^2 + \mu_X - \mu_X^2 = \mu_X = \lambda t$.

Observe que nas variável aleatória de Poisson, temos $E(x) = V(X) = \lambda t$

O desvio padrão é dado por $\sigma_X = \sqrt{\lambda t}$.

Como vimos, $\mu_x = \lambda t$ e, sempre que não houver possibilidade de confusão em relação a variável aleatória em estudo, representaremos apenas por $\mu = \lambda t$. Essa notação nos leva a possibilidade de reescrever a expressão $P(X = k, t)$ da seguinte forma:

$$P(X = k, t) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

com $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Utiliza-se a notação $X \sim P(\mu)$ para indicar que uma variável aleatória discreta X tem distribuição de Poisson com parâmetro μ.

Consideremos, como exemplo de distribuição de Poisson, o seguinte problema: Sabe-se que em média há cinco chamadas por horas em um telefone de uma determinada empresa. Calcule a probabilidade de:

a) O telefone receber no máximo três chamadas em duas horas;
b) A probabilidade de o telefone não receber nenhuma chamada em 30 minutos.

Solução:

a) Sabemos que o telefone recebe, em média, cinco chamadas em uma hora. Como desejamos determinar a probabilidade desse telefone receber no máximo três chamadas em duas horas, então vamos tomar, como unidade de tempo, o período de duas horas e, nessa circunstância, a média de ligações em duas horas será $\mu = 10$. Sendo assim, temos:

   $P(X \leq 3{,}2) = P(X = 0{,}2) + P(X = 1{,}2) + P(X = 2{,}2) + P(X = 3{,}2)$

   $P(X \leq 3{,}2) = \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^3}{3!}$

$P(X \leq 3{,}2) = e^{-10} \cdot \left(1 + 10 + 50 + \frac{1000}{3}\right) \cong 0{,}018$, ou seja, a probabilidade de o telefone receber no máximo três ligações é de aproximadamente 1,8%.

b) Consideraremos agora o intervalo de 30 minutos com sendo a unidade de tempo a ser utilizada. Se o telefone recebe, em média, cinco ligações por hora, então, em média receber 2,5 ligações a cada 30 minutos, o que implica que, nessa circunstância, $\mu = 2{,}5$. Assim, devemos calcular:

$P(X = 0{,}30) = \frac{e^{-2{,}5} \cdot 2{,}5^0}{0!} \cong 0{,}082$, ou seja, a probabilidade de o telefone não receber nenhuma ligação em um intervalo de trinta minutos é de aproximadamente 8,2%.

Por fim, é importante salientar que se uma variável aleatória discreta X possui distribuição binomial, com parâmetros n e p, ou seja, $X \sim B(n,p)$, então, para valores de n expressivamente grandes (tendendo ao infinito) e valores de p muito pequenos (se aproximando de zero, sem se anular), $P(X = k)$ converge para o modelo de Poisson, com $\mu = n \cdot p$.

Demonstração: Seja $X \sim B(n,p)$, ou seja a probabilidade de $X = k$, é dada por $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k)!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^k$. Considere $(n)_k = n.(n - -1). \cdots .(n-k+1)$ e $\mu = n \cdot p$, dessa forma, podemos rearranjar a expressão para $P(X = k) = \frac{(n)_x}{k!} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$, que, com algumas operações elementares, resulta em $P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot \frac{(n)_k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$. Considerando que a probabilidade p seja tão pequena que quando n tende para o infinito, μ permaneça praticamente constante, temos os seguintes resultados:

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n)_x}{n^k} = 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} = 1$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$, os quais, a serem substituídos $P(X = k)$, resulta em:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^k}{k!}$$

demonstrando, com isso que, para valores muito grandes de n e valores muito pequenos de p, uma distribuição $X \sim (n,p)$ se aproxima de uma distribuição $X \sim P(\mu)$.

3.2.2 Distribuições Contínuas de Probabilidade

Os modelos de distribuições contínuas de probabilidade são representações matemáticas, por meio de expressões, de variáveis aleatórias contínuas. Esses modelos têm suas aplicações em diversos ramos das ciências.

Em variáveis aleatórias continuas, não existe interesse em atribuir probabilidade a cada valor particular, mas sim, para eventos formados por intervalos de valores. Ao observar a estatura de indivíduo, por exemplo, não importa a probabilidade de ele medir 1,6823333... metros; mas nos interessa, na realidade, poder mensurar a probabilidade de que sua altura esteja em um determinado intervalo como 1,60 metros a 1,80 metros, ou acima de 1,90 metros e assim por diante.

Existem vários modelos de distribuição contínua de probabilidade, porém, nesse trabalho, apresentamos os três modelos mais utilizados, que são: a Distribuição Uniforme, a Distribuição Exponencial e a Distribuição Normal.

3.2.2.1 Distribuição Uniforme

Dizemos que uma variável aleatória X segue um modelo de distribuição uniforme contínuo em um intervalo, não degenerado, $[a.b]$ da reta real, quando todos os subintervalos de $[a.b]$, com o mesmo comprimento, possuírem a mesma probabilidade de ocorrência. Em outras palavras, a probabilidade de se gerar qualquer ponto em um subintervalo contido em $[a.b]$ é proporcional ao tamanho desse subintervalo.

Do ponto de vista da modelagem, a distribuição uniforme não apresenta grande relevância, porém, esse tipo de distribuição é essencial para simulações computacionais, sendo muito empregada na geração de números aleatórios, os quais são frequentemente utilizados em otimização estocástica e aplicações de Monte Carlo[2].

Utiliza-se a notação $X \sim U[a, b]$ para indicar que uma variável aleatória contínua X tem distribuição de uniforme de probabilidade.

A função densidade de uma distribuição uniforme de probabilidade é dada por:

[2] Qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para se obter resultados numéricos.

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, \quad se\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

Observe que $f(x)$ cumpre as condições necessárias para ser classificada como uma função de densidade, pois $f(x) \geq 0$ para todo x, além disso temos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx =$$

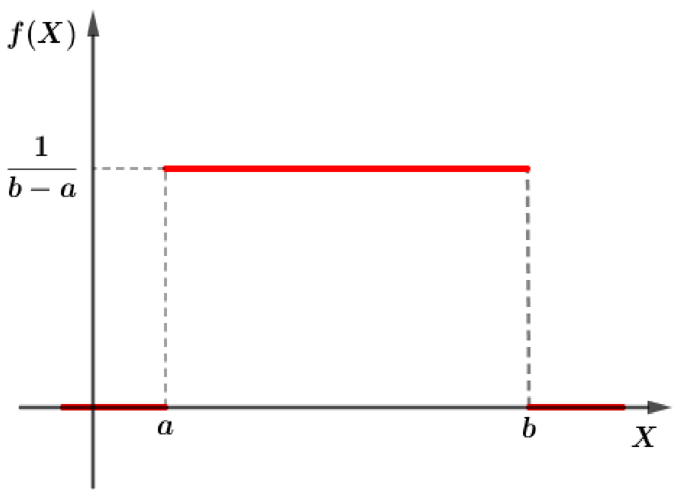
$$= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx = \frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

A função de distribuição acumulada de uma distribuição de probabilidade uniforme pode ser facilmente obtida por meio da integral:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw = \begin{cases} 0, se\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, se\ a \leq x < b \\ 1, se\ x \geq b \end{cases}$$

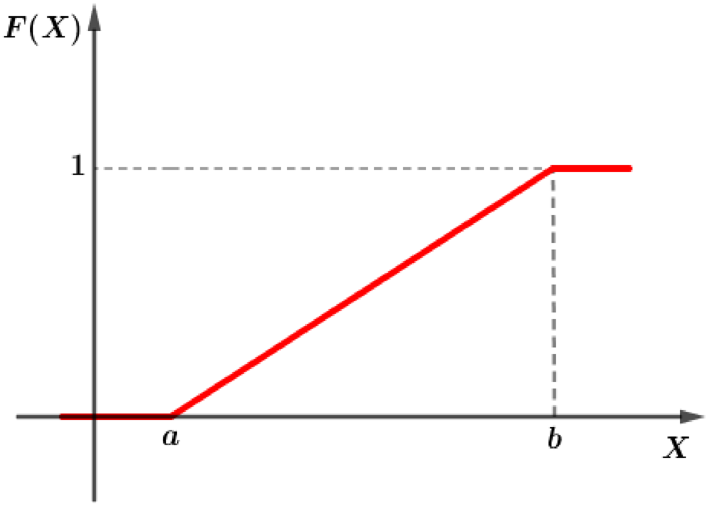
No Gráfico 1 apresentamos a representação da função densidade de uma distribuição uniforme, enquanto que no Gráfico 2, apresentamos a representação da função de distribuição desse modelo.

Gráfico 1: Função densidade de uma distribuição uniforme



Fonte: Próprio autor

Gráfico 2: Função distribuição do modelo uniforme



Fonte: Próprio autor

Uma variável uniformemente distribuída representa o análogo contínuo dos resultados igualmente prováveis, no seguinte sentido: para qualquer intervalo $[c, d]$, em que $a \leq c < d \leq b$, temos:

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

A esperança matemática, a variância e o desvio padrão, em uma distribuição uniforme, são assim determinadas:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_a^b xf(x)dx + \int_b^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx + \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx + \int_b^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b xdx$$

$$E(X) = \mu_X = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx = \int_a^b (x-\mu_X)^2 f(x)dx$$

pois, como vimos, para $x \notin [a, b]$, a integral se anula, assim,

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b (4x^2 - 4ax - 4bx + a^2 + 2ab + b^2)dx$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{4 \cdot (b-a)} \left(\frac{4}{3}x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + a^2x + 2abx + b^2x\right) \Big|_a^b$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{4 \cdot (b-a)} \cdot \frac{(b-a)^3}{3} \quad \Rightarrow \quad V(X) = \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}$$

Consideremos, como exemplo de distribuição uniforme, o seguinte problema: Sabendo que a ocorrência de pane, em cada quilômetro de uma rede elétrica, tem a mesma probabilidade de acontecer e que essa rede possui 12 quilômetros de extensão, determine:

a) A probabilidade de ocorrer pane nos primeiros 600 metros dessa rede;
b) A probabilidade de ocorrer pane nos 2 quilômetros centrais dessa rede;
c) O número de panes esperado (esperança matemática), a variância e o desvio padrão dessa distribuição.

Solução: Como a rede possui 12 quilômetros de extensão e em cada quilômetro a probabilidade de ocorrência de pane é a mesma, então, podemos modelar essa variável como uma distribuição uniforme $U \sim [0,12]$. Nessas circunstância, a função densidade é $f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0,12] \\ \frac{1}{12}, 0 \leq x \leq 12 \end{cases}$. Assim:

a) $P(X \leq 0,6) = \int_0^{0,6} \frac{1}{12} dx = \left[\frac{x}{12}\right] \Big|_0^{0,6} = \frac{0,6-0}{12} = 0,05 = 5\%$. Portanto, há 5% de probabilidade de uma pane ocorrer nos primeiros 600 metros dessa rede elétrica.
b) $P(5 \leq X \leq 7) = \int_5^7 \frac{1}{12} dx = \left[\frac{x}{12}\right] \Big|_5^7 = \frac{7-5}{12} = \frac{2}{12} \cong 0,17 = 17\%$. Portanto, há 17% de probabilidade de ocorrer pane nos dois quilômetros centrais dessa rede elétrica.
c) $E(X) = \mu_X = \frac{0+12}{2} = 6$; $V(X) = \sigma_X^2 = \frac{(12-0)^2}{12} = 12$ e $\sigma_X = \frac{(12-0)\sqrt{3}}{6} \cong 3,46$. Portanto, são esperadas 6 panes, com variância 12 e desvio padrão aproximadamente de $3,46$.

3.2.2.2 Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é muito utilizada na engenharia de qualidade para estudos de confiabilidade. É um modelo contínuo que descreve o tempo de falha, ou tempo entre falhas, de objetos, equipamentos ou sistemas. Nesse modelo considera-se um parâmetro λ, o qual representa o tempo médio até a primeira falha, ou entre duas falhas consecutivas.

Na utilização do modelo exponencial ocorrem alguns inconvenientes pelo fato de que o tempo médio é constante, isto é, esse modelo não leva em consideração outras variáveis como, o desgaste do equipamento ao longo do tempo. Assim, torna-se razoável intuir que é bastante provável que a taxa de falha aumente como o passar do tempo, dado que a utilização do equipamento provoca o seu desgaste e, em razão disso o tempo entre falhas consecutivas diminui, contrariando, o modelo exponencial.

Utiliza-se a notação $X \sim exp(\lambda)$ para indicar que uma variável aleatória contínua X tem distribuição de exponencial de probabilidade, com parâmetro λ.

A função densidade de uma distribuição exponencial de probabilidade, com parâmetro λ, é dada por $f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x},\ se\ x \geq 0, \lambda > 0 \end{cases}$

Observe que $f(x)$ cumpre as condições necessárias para ser classificada como uma função de densidade, pois $f(x) \geq 0$ para todo x, além disso temos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}dx =$$

$$= 0 + \left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_{0}^{+\infty} = 1$$

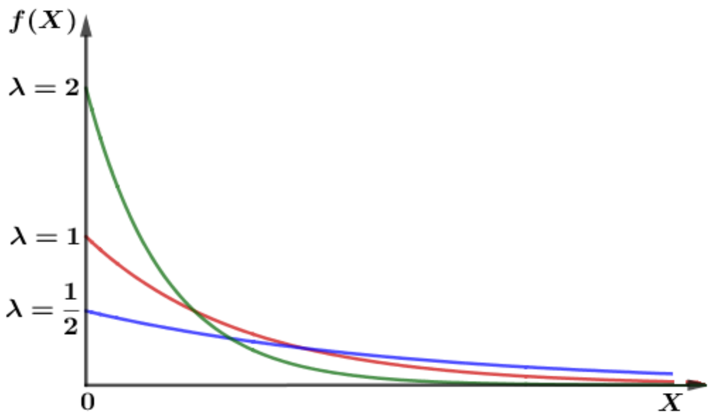
A função de distribuição acumulada de uma distribuição exponencial de probabilidade pode ser facilmente obtida por meio da integral:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw = \int_{-\infty}^{0} f(w)dw + \int_{0}^{x} f(w)dw = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dw + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda w}dw =$$

$$= \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, se\ x \geq 0 \end{cases}$$

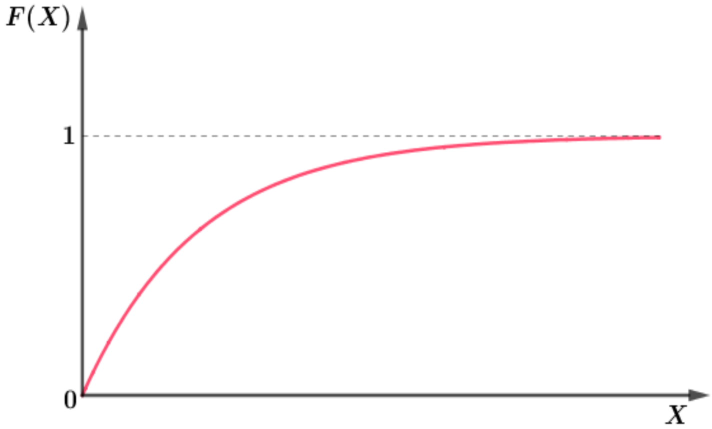
No Gráfico 3 apresentamos a representação da função densidade de uma distribuição exponencial, enquanto que no Gráfico 4, apresentamos a representação da função de distribuição desse modelo.

Gráfico 3: Função densidade de uma distribuição exponencial



Fonte: Próprio autor

Gráfico 4: Função distribuição do modelo exponencial



Fonte: Próprio autor

A esperança matemática, a variância e o desvio padrão, em uma distribuição exponencial, são assim determinadas:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)dx$$

pois, como vimos, para $x < 0$, a integral se anula, assim,

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{0}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = E(X)$$

Consideremos, como exemplo de distribuição exponencial, o seguinte problema:

Um serviço de atendimento ao consumidor, de uma empresa, recebe chamadas telefônicas em um intervalo de tempo, em horas, que segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 10$. O parâmetro λ é interpretado como sendo a taxa de dez chamadas por hora. Determine:

a) A probabilidade de um intervalo entre chamadas ter duração igual ou inferior a 15 minutos;
b) Determine a esperança matemática, a variância e o desvio padrão no caso apresentado.

Solução: Como a variável em estudo apresenta comportamento exponencial com parâmetro $\lambda = 10$, temos que sua função de distribuição é $F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 1 - e^{-10x} \end{cases}$. Em razão da variável em estudo (intervalo de tempo entre chamadas telefônicas) ser expressa somente com números positivos, então, $F(x) = 1 - e^{-10x}$.

a) Note que o intervalo de duração considerado é menor ou igual a 15 minutos, enquanto que λ é expressa em horas. Para fins de cálculo, temos que equiparar as unidades de medida, portanto, consideraremos $x = \frac{1}{4}$ de hora. Logo: $P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-\frac{10}{4}} \cong 0{,}92 = 92\%$. Portanto, há aproximadamente 92% de probabilidade de o intervalo entre as chamadas ser igual ou inferior a 15 minutos.
b) No problema apresentado, temos $\lambda = 10$, portanto, $E(X) = \mu_X = \frac{1}{10}$, o que significa que, em média, o intervalo entre chamadas é de 6 minutos. Temos ainda que $V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ e $\sigma_X = E(X) = \frac{1}{10}$.

Por fim, é importante mencionar a existência de uma relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson, a qual apresentamos a seguir:

Seja X uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ. Suponhamos que X represente o número de ocorrência se um determinado evento em um intervalo de tempo. Ao se variar o intervalo de tempo de interesse, o número de ocorrências do evento ainda se caracteriza como uma variável aleatória de Poisson, porém, com o parâmetro proporcionalmente ajustado, ou seja, $X_t \sim Poisson(\lambda t)$. Suponhamos também, que T seja uma variável aleatória que indique o tempo entre duas ocorrências consecutivas. Temos então, para $t > 0$:

$F_t(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(nenhuma\ ocorrência\ em\ t) =$

$= 1 - P(X_t = 0) = 1 - \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$. Assim, concluímos que T é exponencial com parâmetro λ, ou seja, $T \sim \exp(\lambda)$.

3.2.2.3 Distribuição Normal

A distribuição normal ou modelo de Gauss ou, algumas vezes, modelo de De Moivre, é o modelo mais importante para variáveis aleatórias e por isso, muito utilizada para descrever diversos comportamentos aleatórios. Geralmente o estudo desse modelo de distribuição é, enfaticamente, contemplado nas disciplinas de probabilidade ou de estatística.

Segundo Bittencourt e Viali (2006):

> A importância da distribuição normal reside principalmente no fato de que muitos fenômenos naturais apresentam comportamento que seguem uma distribuição normal ou que se aproximam consideravelmente dela. Além disso, as médias amostrais retiradas de distribuição qualquer tendem a apresentar comportamento normal à medida que o tamanho dessas amostras aumenta.

Considerando X uma variável aleatória contínua, dizemos que X possui distribuição normal quando sua função densidade for assim definida:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

com $-\infty < x < +\infty$. Onde μ representa a média da distribuição (esperança matemática), σ representa o desvio padrão e, consequentemente, σ^2 é a variância.

Note que a função acima apresentada cumpre as condições necessárias para ser classificada como uma função densidade de uma distribuição, pois $f(x) \geq 0$ em todo o seu domínio além disso, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, conforme veremos a seguir:

Em um primeiro momento, ao se tentar integrar a função densidade, veremos que se tratar de uma tarefa impossível (o que será abordado no decorrer desse capítulo), porém, com algumas técnicas de cálculo integral é possível mostrar que a função $f(x)$ cumpre a segunda condição para classificá-la como uma função densidade, pra tanto, suponha que:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}} dx$$

Considerando $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, temos que $dx = \sigma dy$, assim:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, temos:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \right)$$

A variável w foi utilizada apenas por distinção, para que não corramos o risco de confusão no decorrer das operações.

Assim:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y^2+w^2}{2}\right)} dydw$$

Podemos utilizar coordenadas polares para a resolução da integral acima. Se considerarmos $y^2 + w^2 = r^2$, temos que $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $w = r\cos\theta$ e o elemento de área $dydw$, passa a ser (pelo jacobiano), $rdrd\theta$. Além disso, os limites de integração em r serão 0 ao $+\infty$, enquanto que os limites de θ serão 0 e 2π. Assim:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{+\infty}\right]d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 1$$

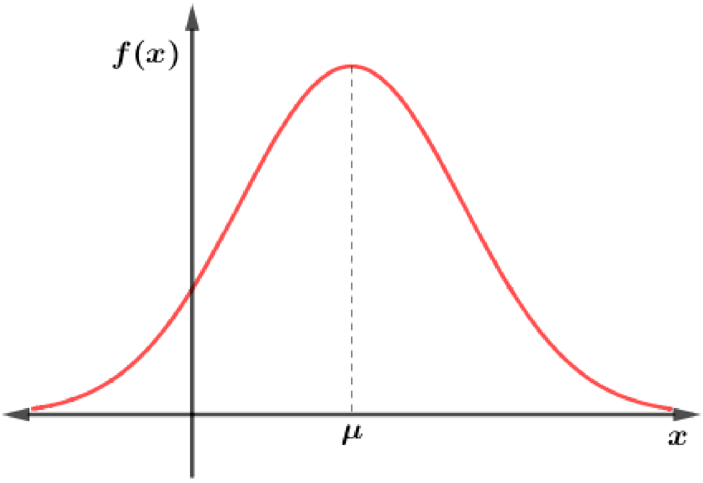
Portanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Quando X for uma variável aleatória com distribuição normal, utilizaremos a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para representar esse fato.

No Gráfico 5 apresentamos a representação da função densidade de uma distribuição normal com parâmetros μ e σ^2.

Gráfico 5: Função densidade de uma distribuição Normal



Fonte: Próprio autor

Em relação a função distribuição acumulada de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, caso utilizemos a definição, por meio de integral, teríamos a seguinte expressão:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]dw$$

Embora o Teorema Fundamental do Cálculo garanta a existência de uma primitiva para $f(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, essa primitiva ($F(x)$) não pode ser apresentada por meio de uma expressão analítica a partir de funções elementares, o que é garantido pelo teorema de Liouville[3]. Dessa forma, em uma distribuição normal, o cálculo de uma probabilidade do tipo $P(a \leq X \leq b)$ (o qual era facilmente resolvido por meio de $F(b) - F(a)$) passa a ser viável somente com a utilização de meios alternativos de aproximações, tais como os métodos numéricos ou a utilização de polinômios de Taylor.

A utilização de meios alternativos para o cálculo de probabilidade da distribuição normal sugere a criação de uma tabela na qual possamos encontrar os valores de probabilidade e, dessa forma, diminuir o custo computacional dos cálculos, porém, como μ e σ^2 podem assumir diversos valores, então teríamos uma tabela distinta para cada par (μ, σ^2), o que consistiria um problema nada prático para se trabalhar com esse modelo de distribuição. Tal problema pode ser contornado por meio da seguinte proposição:

Sendo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a variável $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ é tal que $Z \sim N(0,1)$.

Demonstração:

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq z\sigma + \mu) = \int_{-\infty}^{z\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} dw$$

Fazendo $y = \frac{w-\mu}{\sigma}$, vemos que $dw = \sigma dy$, portanto, temos que:

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Observe que o integrando acima é uma função densidade de uma distribuição normal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, portanto, $Z \sim N(0,1)$, como queríamos demonstrar.

Esta proposição é de suma importância no cálculo de probabilidades de uma distribuição normal, pois ela nos permite relacionar qualquer distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ à distribuição $Z \sim N(0,1)$. Com isso, basta que tenhamos uma tabela de probabilidades para a distribuição $Z \sim N(0,1)$ que, por meio de algumas manipulações algébricas elementares, poderemos determinar a probabilidade de X estar entre duas constantes a e b, da seguinte forma:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

[3] Teorema, formulado por Joseph Liouville, que afirma certas integrais não podem ser expressas em termos elementares.

Onde $\Phi(z)$ representa a função distribuição de $Z \sim N(0,1)$, a qual encontraremos os valores de probabilidade tabelados, no anexo, ao fim desse trabalho. A distribuição $Z \sim N(0,1)$ é denominada “normal padrão” ou “padrão reduzida”.

Consideremos, como exemplo de cálculo de probabilidade com uma distribuição normal, o seguinte problema:

A estatura de um grupo de atletas de um clube desportivo é normalmente distribuída, sendo a estatura média de 1,78 metros, com desvio padrão de 15 centímetros. Determine:

c) A probabilidade de um atleta desse grupo possuir menos de 1,85 m de estatura;
d) A probabilidade de um atleta desse grupo ter a estatura entre 1,65 m e 1,70 m.

Solução: Pelas informações do problema, sabemos que $\mu = 1{,}78\, m$, $\sigma = 0{,}15\, m$.

a) Para determinar a probabilidade de uma atleta ter menos de 1,85 m de altura, basta determinar $P(X \leq 1{,}78) = P\left(Z \leq \frac{1{,}85-1{,}78}{0{,}15}\right) = P(Z \leq 0{,}47)$. Consultando a tabela da distribuição normal padrão, anexada a esse trabalho, temos: $P(Z \leq 0{,}47) = 0{,}6808$. Ou seja, a probabilidade de um atleta ter menos que 1,78 metros de estatura é de cerca de 68%.

b) $P(1{,}65 \leq X \leq 1{,}70) = P\left(\frac{1{,}65-1{,}78}{0{,}15} \leq Z \leq \frac{1{,}70-1{,}78}{0{,}15}\right) = \Phi(-0{,}53) - \Phi(-0{,}87)$.

Consultando a tabela da distribuição normal padrão, anexada a esse trabalho, temos:

$\Phi(-0{,}53) - \Phi(-0{,}87) = 0{,}2981 - 0{,}1922 = 0{,}1059$. Portanto, a probabilidade de um atleta ter estatura entre 1,65 m e 1,70 m é de cerca de 11%.

Por fim, é relevante apresentar a relação existente entre uma distribuição binomial e a distribuição normal. Para tanto, considere X uma variável aleatória discreta com distribuição binomial, ou seja, $X \sim B(n,p)$. Assim, temos:

$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$, com média (esperança matemática) $\mu = np$ e variância $\sigma = npq$.

Essa probabilidade depende de n e esse parâmetro, à medida que cresce, inviabiliza os cálculos, uma vez que o crescimento fatorial é demasiadamente veloz. Para valores de n muito grandes ($n \to +\infty$), podemos utilizar a fórmula de Stirling[4] para obter uma aproximação para os fatoriais presentes no desenvolvimento de $P(X = x)$. A fórmula

---

[4] Formula que fornece aproximações para fatoriais, cujo enunciado e demonstração podem ser obtidos em trabalhos acerca de cálculo avançado.

de Stirling diz que quando $n \to +\infty$, temos a seguinte aproximação: $n! \cong n^n e^- n\sqrt{2\pi n}$. Sendo assim, para n muito grande, temos:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \cong$$

$$\cong \frac{ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x} \cdot (n-x)^{n-x} e^{-(n-x)}\sqrt{2\pi(n-x)}} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}} \cdot \frac{n}{x^x (n-x)^{n-x}} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}} \cdot \frac{n^x \cdot n^{n-x}}{x^x (n-x)^{n-x}} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi n x\left(1 - \frac{x}{n}\right)}} \cdot \left(\frac{np}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi n \cdot \frac{x}{n} \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)}} \cdot \left(\frac{np}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x}$$

Para n muito grande, temos que $p \cong \frac{k}{n}$ e, como $q = 1 - p$, temos:

$$P(X = x) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} \cdot \left(\frac{np}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left\{\ln\left[\left(\frac{np}{x}\right)^x\right] + \ln\left[\left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x}\right]\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left[-x \cdot \ln\left(\frac{x}{np}\right) + (x-n) \cdot \ln\left(\frac{n-x}{nq}\right)\right]}$$

Se tomarmos (convenientemente) $y = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$, teremos $x = np + y\sqrt{npq}$. Substituindo x nos logaritmandos da expressão, temos:

$$P(X = x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left[-x \cdot \ln\left(\frac{np + y\sqrt{npq}}{np}\right) + (x-n) \cdot \ln\left(\frac{n - np - y\sqrt{npq}}{nq}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left[-x \cdot \ln\left(1 + y\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (x-n) \cdot \ln\left(1 - y\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right]}$$

Utilizando aproximações por série de Taylor nos logaritmos, reescrevemos a expressão como:

$$P(X = x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left[-x \cdot \left(y \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} - y^2 \cdot \frac{q}{2np} + \cdots\right) + (x-n) \cdot \left(-y \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} - y^2 \cdot \frac{p}{2nq} - \cdots\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left[(-np - y\sqrt{npq}) \cdot \left(y \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} - y^2 \cdot \frac{q}{2np} + \cdots\right) + (np + y\sqrt{npq} - n) \cdot \left(-y \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} - y^2 \cdot \frac{p}{2nq} - \cdots\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left[\left(-y\cdot\sqrt{npq}+\frac{1}{2}y^2q-y^2q+\cdots\right)+\left(y\cdot\sqrt{npq}+\frac{1}{2}y^2p-y^2p-\cdots\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}y^2q-\frac{1}{2}y^2p-\cdots\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}y^2\cdot(p+q)-\cdots\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Substituindo $y = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$, temos:

$$P(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Que é uma função densidade de uma distribuição normal de parâmetros $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq$.

Decorre da relação anteriormente mostrada que, para valores muito grandes de n, ou seja, $n \to \infty$, que se $X \sim B(n, p)$ e $Y = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$, então Y terá uma distribuição consideravelmente aproximada da distribuição normal padrão, o que quer dizer que, $\lim_{n\to\infty} P(Y \leq y) = \Phi(y)$. Esse resultado é de extrema importância, nos permite obter probabilidades de distribuições binomiais por meio da tabela da distribuição normal padrão.

Uma vez apresentados os modelos mais comumente utilizados para as variáveis quantitativas discretas e as variáveis quantitativas contínuas; serão vistas, no capítulo seguinte, as aplicações desses modelos em fenômenos reais presentes no cotidiano.

4 PROBABILIDADE E APLICAÇÕES

Os Parâmetros curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998, p. 56) estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos.

A probabilidade é o ramo da matemática que serve para orientar ações cotidianas que demandam a utilização dos dados, bem como a interpretação para tomada de decisões.

Um grande desafio para a efetiva aprendizagem de probabilidade é a superação de procedimentos mecânicos e repetitivos. Faz-se necessário então, explorar as diferentes estratégias de ensino que possam auxiliar de forma significativa a aprendizagem dos conceitos e processos associados ao tema.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCNEM) incentivam as práticas de simulação e orientam sobre a necessidade de que os alunos tenham a oportunidade de visualizar os modelos de probabilidade em ação, para que assim tenham uma visão apropriada da importância desses modelos.

O currículo comum do Ensino Médio, praticado nas escolas desse nível de ensino, em especial nas escolas públicas, desenvolve o conteúdo de probabilidade em sua grande maioria, na concepção Laplaciana, limitando-se ao estudo de casos nos quais se supõe a equiprobabilidade.

Em alguns livros didáticos para o Ensino Médio, o conceito de probabilidade não é explorado de forma consubstanciada, pois, geralmente os problemas apresentados se encerram com o cálculo de alguma probabilidade, quase sempre carecendo de um significado mais prático aos discentes. A introdução de exercícios com modelos de probabilidade que aproximem esse conteúdo à realidade cotidiana do aluno; envolvendo temas com os quais o discente esteja familiarizado, ou pelo menos tenha algum conhecimento informal adquirido por meio de convivência social, dos noticiários televisivos ou em rede de computadores; pode representar um fator motivacional para o aprendizado, pelo desejo de conhecer o tema e de poder aplica-lo na tomada de decisão. Dessa forma, é importante ao aluno saber, por meio do cálculo, chegar a uma probabilidade, porém, consideramos que o aprendizado sólido desse conteúdo vai além da resolução das operações matemáticas envolvidas e a obtenção do resultado, sendo de grande relevância que o discente, com o resultado obtido, seja capaz de utilizá-lo na realização de julgamentos e tomadas de decisão.

O presente trabalho, além de ter enumerado, nos capítulos anteriores, os conceitos teóricos sobre os temas que fundamentam os conteúdos de probabilidade, apresenta, neste capítulo, aplicações desses conteúdos em fenômenos (simples ou mais elaborados), dando ênfase à problemas relacionados à área da saúde, pois, tais temas são sempre atuais e fazem parte do cotidiano dos professores e alunos, portanto, consideramos que possam ser explorados com a finalidade de motivar o aprendizado. Sendo assim, apresentamos, na sequência, várias aplicações e simulações envolvendo os temas abordados neste trabalho.

4.1 Aplicação envolvendo o lançamento de moedas

Em três lançamentos consecutivos de uma moeda não viciada, qual a probabilidade de ocorrerem duas caras e uma coroa?

Solução: Trata-se de um problema de probabilidade clássica (ou Laplaciana).

O primeiro passo, quando temos um problema dessa ordem, é buscar entender onde se encontra o experimento aleatório. No problema em questão, tal experimento consiste nos “três lançamentos consecutivos de uma moeda”. Outro fator importante é o fato de ter sido mencionado que a moeda é não viciada. Com isso, podemos afirmar que a probabilidade da ocorrência de cara é, teoricamente, a mesma da ocorrência de coroa.

Por questão de praticidade, representaremos por c o evento “cara” e por k, o evento “coroa”. Desse modo, podemos definir o espaço amostral como sendo o conjunto formado por todos os elementos que caracterizam todos os possíveis resultados obtidos em três lançamentos consecutivos da moeda:

$$\Omega = \{ccc, cck, ckc, kcc, ckk, kck, kkc, kkk\}$$

Para calcular a probabilidade desse evento; deve-se encontrar o conjunto, que satisfaz a condição da linguagem corrente do problema acima. Assim o evento E pedido é o conjunto formado por todas os possíveis resultados em que apareçam duas caras e uma coroa:

$$E = \{cck, ckc, kcc\}$$

Portanto a probabilidade procurada é dada por:

$$P(E) = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Ou seja, em três lançamentos consecutivos de uma moeda não viciada, a probabilidade da ocorrência de duas caras e uma coroa é de $37{,}5\%$.

4.2 Aplicação envolvendo o lançamento de dados

No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos seja igual a 6?

Solução: Trata-se de um problema de probabilidade clássica (ou Laplaciana). O experimento aleatório nesse problema é o "lançamento de dois dados" e o espaço amostral desse experimento e o conjunto formado pelos pares ordenados constituídos pelos valores das faces obtidas no lançamento dos dois dados. Como para cada face do primeiro dado existem seis possíveis faces do segundo dado, com as quais se podem formar pares ordenados, então de antemão sabemos que esse espaço amostral conterá 36 elementos. Por serem dados não viciados, a probabilidade de se obter qualquer uma das faces é a mesma. Assim:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}\right\}$$

Seja E o evento "soma dos resultados é igual a 6". Devemos então verificar, de todos os possíveis resultados, quais os que são favoráveis, ou seja, em quais deles a soma das faces resultará em 6. Assim, o evento será expresso da seguinte forma:

$$E = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

portanto a probabilidade procurada é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36} = 0{,}138 \cong 14\%$$

ou seja, no lançamento de dois dados não viciados, a probabilidade de que o resultados das faces tenha a soma igual a 6 é de aproximadamente 14%.

4.3 Aplicações da probabilidade condicional e do Teorema de Bayes

Os problemas e simulações a seguir, são exemplos da utilização dos conceitos de independência, da probabilidade condicional e do Teorema de Bayes na busca pela solução. Como visto no capítulo 2, estas são ferramentas essenciais na Teoria da Probabilidade.

4.3.1 Simulação em Vacinação Contra Gripe Suína (H1N1)

(ENEM/2011- Modificado) Todo o país passa pela primeira fase da campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. Sabe-se que as taxas de óbitos, de pessoas imunizadas com a vacina, nos grupos, são as seguintes: 0,02% trabalhadores da saúde e indígenas, 1% portadores de doenças crônicas, 0,005% de adultos saudáveis entre 20 e 29 anos, 0,03% população como mais de 60 anos, 0,012% adultos saudáveis entre 30 e 39 anos. A Tabela 1 apresenta dados específicos da campanha de vacinação de um único posto de saúde:

Tabela 1: Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 13 abr. 2020

Sabe-se que houve óbito, entre as pessoas vacinadas nesse posto, qual a probabilidade do óbito ocorrido ser de um indivíduo portador de doença crônica?

Solução: Neste caso busca-se a probabilidade da pessoa que faleceu, ser portadora de doença crônica. Na busca por esse resultado é sabido que temos informações *a priori*. Portanto, trata-se de uma aplicação do teorema de Bayes.

Note que o espaço amostral, é um grupo composto por 200 pessoas que foram vacinadas, portanto, $n(\Omega) = 200$.

Consideremos os eventos, *a priori*, $A_i,\ i = 1,2,\ldots,5$, tais que:

$A_1 = \{trabalhadores\ da\ saúde\ e\ indígenas\}$, com $n(A_1) = 42$, portanto:

$$P(A_1) = \frac{42}{200} = 0{,}21$$

$A_2 = \{portadores\ de\ doenças\ crônicas\}$, com $n(A_2) = 22$, portanto:

$$P(A_2) = \frac{22}{200} = 0{,}11$$

$A_3 = \{adultos\ saudáveis\ entre\ 20\ e\ 29\ anos\}$, com $n(A_3) = 56$, portanto:

$$P(A_3) = \frac{56}{200} = 0{,}28$$

$A_4 = \{população\ com\ mais\ de\ 60\ anos\}$, com $n(A_4) = 30$, portanto:

$$P(A_4) = \frac{30}{200} = 0{,}15$$

$A_5 = \{adultos\ saudáveis\ entre\ 30\ e\ 39\ anos\}$, com $n(A_4) = 50$, portanto:

$$P(A_5) = \frac{50}{200} = 0{,}25$$

Considerando o evento $B = \{indivíduos\ que\ foram\ a\ óbito\ após\ a\ vacinação\}$, temos as seguintes probabilidades condicionais referentes a cada grupo:

$P(B|A_1) = 0{,}02\% = 0{,}0002$;

$P(B|A_2) = 1\% = 0{,}01$;

$P(B|A_3) = 0{,}005\% = 0{,}00005$;

$P(B|A_4) = 0{,}03\% = 0{,}0003$;

$P(B|A_5) = 0{,}012\% = 0{,}00012$.

Assim, pelo teorema de Bayes, determinamos $P(A_2|B)$, a qual representa a probabilidade de, sabendo que houve óbito, o falecido pertencer ao grupo de portadores de doenças crônicas:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_5) \cdot P(B|A_5)}$$

$$P(A_2|B) = \frac{0{,}11 \cdot 0{,}01}{0{,}21 \cdot 0{,}0002 + 0{,}11 \cdot 0{,}01 + 0{,}28 \cdot 0{,}00005 + 0{,}15 \cdot 0{,}0003 + 0{,}25 \cdot 0{,}00012}$$

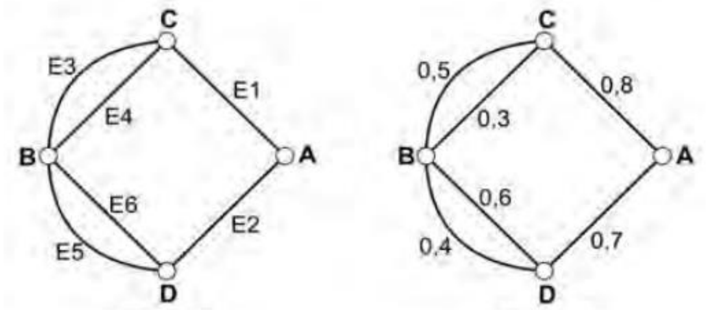
$P(A_2|B) \cong 0{,}893 \cong 89\%$

Portanto, sabendo que houve óbito entre os vacinados, a probabilidade do indivíduo falecido pertencer ao grupo de pessoas com doenças crônicas é de cerca de 89%.

4.3.2 Simulação no Transito

(ENEM, 2010) A Figura 3 mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado nessa ilustração representa a probabilidade de um condutor encontrar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada $E4$, e de 50%, quando se passa por $E3$. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

Figura 3: Principais vias que interligam a cidade A à cidade B



Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>
Acesso em: 13 abr. 2020

Paulo deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. Qual o melhor trajeto para Paulo?

Solução: O deslocamento de Paulo, ao sair da cidade A para cidade B usando exatamente duas vias indicadas, tem quatro opções de caminhos: $E1 \rightarrow E3$, $E1 \rightarrow E4$, $E2 \rightarrow E5$ e $E2 \rightarrow E6$. O enunciado do problema afirma que as probabilidades são todas independentes, desse modo, podemos utilizar a expressão da probabilidade de dois eventos independentes, conforme visto no capítulo 2, assim, temos:

$$P(E1 \cap E3) = P(E1) \cdot P(E3) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}40 = 40\%$$

$$P(E1 \cap E4) = P(E1) \cdot P(E4) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24 = 24\%$$

$$P(E2 \cap E5) = P(E2) \cdot P(E5) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 = 28\%$$

$$P(E2 \cap E6) = P(E3) \cdot P(E6) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 = 42\%$$

Portanto, a opção saindo da cidade A pela estrada $E1$ e passando por pela estrada $E4$ para chegar à cidade B, é a que apresenta a menor probabilidade de ocorrência de engarrafamento, com cerca de 24% de chance.

4.3.3 Simulação em pesquisa com adictos

(MORGADO; TEIXEIRA, 2011) Algumas pesquisas estatísticas podem causar constrangimentos aos entrevistados em razão de, em alguns casos, surgirem perguntas do tipo “você usa drogas?”. Nesses casos o entrevistador correr o risco de não obter respostas sinceras ou não obter respostas de espécie alguma.

Para estimar a proporção p de usuários de entorpecentes em certa comunidade, pode-se utilizar a seguinte estratégia: pede-se ao entrevistado que, longe das vistas do entrevistador, jogue uma moeda e, se o resultado for coroa, responda a pergunta “você usa drogas?”, a qual pode ter uma resposta afirmativa ou negativa; caso o resultado for cara, responda: “sim”. Assim, caso o entrevistado diga “sim”, o entrevistador não saberá se ele é um usuário de drogas ou se a moeda deu cara. Se considerarmos s como sendo a probabilidade de um entrevistado responder “sim”, s é facilmente estimado pela proporção de respostas “sim” obtidas nas entrevistas. Nessas condições, estime p a partir de s.

Solução: Seja D o evento “o entrevistado respondeu que usa drogas” e C o evento “a moeda deu cara como resultado”. Com isso, podemos representar como $\bar{D}$ o evento “o entrevistado respondeu que não usa drogas” e $\bar{C}$ o evento “a moeda não deu cara como resultado (deu coroa)”. Na Tabela 2 apresentamos os dados conhecidos relativos aos eventos considerados:

Tabela 2: Apresentação dos eventos, proporções e probabilidades conhecidas

Eventos	D	$\bar{D}$	Σ
C			$0{,}5$
$\bar{C}$			$0{,}5$
Σ	p	$1-p$	1

Fonte: Próprio autor.

Como C e D são eventos independentes, podemos completar os dados ausentes da tabela anterior, por meio da multiplicação das probabilidades conhecidas:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = 0{,}5 \cdot p$$

$$P(\bar{C} \cap D) = P(\bar{C}) \cdot P(D) = 0{,}5 \cdot p$$

$$P(C \cap \bar{D}) = P(C) \cdot P(\bar{D}) = 0{,}5 \cdot (1 - p)$$

$$P(\bar{C} \cap \bar{D}) = P(\bar{C}) \cdot P(\bar{D}) = 0{,}5 \cdot (1 - p)$$

Com isso, obtemos a Tabela 3, na qual são apresentados os eventos e suas respectivas proporções e probabilidades:

Tabela 3: Apresentação dos eventos, suas proporções e probabilidades

Eventos	D	$\bar{D}$	Σ
C	$0{,}5 \cdot p$	$0{,}5 \cdot (1 - p)$	$0{,}5$
$\bar{C}$	$0{,}5 \cdot p$	$0{,}5 \cdot (1 - p)$	$0{,}5$
Σ	p	$1 - p$	1

Fonte: Próprio autor.

Observe que os entrevistados que disseram "sim" estão em três células da Tabela 3, a saber: $C \cap D$, $\bar{C} \cap D$ e $C \cap \bar{D}$. Assim:

$$s = 0{,}5 \cdot p + 0{,}5 \cdot p + 0{,}5 \cdot (1 - p) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot p$$

o que implica que $p = 2s - 1$.

Por exemplo, se 60% dos entrevistados respondem "sim" na pesquisa, podemos estimar em $p = 2 \cdot 0{,}6 - 1 = 0{,}2 = 20\%$ a proporção de adictos.

4.3.4 Simulação em Teste Elisa para AIDS

(MORGARDO; TEIXEIRA, 2011) Para uma pessoa saber se é portadora ou não do vírus HIV, ao fazer o teste, este pode indicar positivo (P) ou negativo (N). No entanto, nenhum teste é 100% confiável, pois, em algumas ocasiões, o teste pode ser positivo mesmo que esta pessoa não tenha a doença (o chamado falso positivo); em outras, apesar da pessoa estar infectada com o vírus, o teste apresenta resultado negativo (um falso negativo). Digamos que você tem em mãos os seguintes dados a respeito do teste Elisa para AIDS:

• Apenas 0,5% das pessoas no seu país têm AIDS (diz-se que a prevalência da doença é 0,5%)

• O teste Elisa identifica corretamente como (P), 98% das pessoas que têm o vírus (diz-se que a sensitividade do teste é de 98%);

• O teste Elisa identifica corretamente como (N) 93% das pessoas que não têm o vírus (diz-se que a especificidade do teste é de 93%).

Na Tabela 4 apresentamos os dados, em taxas unitárias, sobre as incidências de resultados do teste Elisa:

Tabela 4: Taxas de incidência de resultados para o teste Elisa para AIDS

Doença AIDS	Taxa unitária de resultados do teste Elisa para AIDS		
	Negativo (N)	Positivo (P)	Total
Não infectados (B)	0,93	0,07	1
Infectados (D)	0,02	0,98	1

Fonte: Dados do problema

Uma pessoa, aleatoriamente escolhida no país realiza o exame, para saber se está contaminada com o vírus HIV, por meio do teste Elisa e o resultado é positivo (P) para HIV. Qual a probabilidade dessa pessoa realmente estar infectada (D) com o vírus?

Solução: Este tipo de problema pode ser facilmente resolvido usando uma tabela com uma população "Simulada". Comece a tabela supondo que t seja o número de pessoas da população do país. O problema informou que, nesse país, 0,5% das pessoas têm AIDS, ou seja, $0{,}005t$ representa o número de pessoas que possuem AIDS. Logo, $0{,}995t$ representa as pessoas, do país, que não possuem AIDS. A partir dessas informações, juntamente com os dados da tabela anterior, é possível construir a Tabela 5, na qual constam o número de pessoas, em função de t, para cada um dos casos:

Tabela 5: Resultados do teste Elisa de uma população com t elementos

Doença AIDS	Valores absolutos dos resultados do teste Elisa para AIDS		
	Negativo (N)	Positivo (P)	Total
Não infectados (B)	$0{,}92535t$	$0{,}06965t$	$0{,}995t$
Infectados (D)	$0{,}0001t$	$0{,}0049t$	$0{,}005t$
Total	$0{,}92545t$	$0{,}07455t$	t

Fonte: Dados do problema

A partir das informações apresentadas na Tabela 5, basta aplicar o conceito de probabilidade condicional:

$$P(D|P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}0049t}{0{,}07455t} \cong 0{,}0657 \cong 6{,}6\%$$

Então a probabilidade de um paciente testado positivo estar realmente infectado com o vírus é de cerca de 6,6%.

Na aplicação acima utilizamos uma população com uma quantidade genérica t de elementos, porém, para fins de resolução desse e de outros problemas similares, poder-se-ia ser utilizada qualquer quantidade numérica pois o que na verdade era de interesse no problema não era a quantidade de elementos e sim as proporções.

4.3.5 Simulação em Teste Rápido para COVID-19

(Elaborado pelo autor) Em época de pandemia o teorema de Bayes é uma ferramenta que pode ser utilizada para a verificação da eficácia dos testes da virose COVID-19. Em uma matéria jornalística, apresentada no Jornal Nacional da Rede Globo de televisão, um pesquisador da área da saúde informou que um teste rápido, que pode ser utilizado para a realização de testagem em massa de uma população, tem 1% de probabilidade de apresentar resultado falso positivo para COVID-19, ou seja, 1% das pessoas testadas podem apresentar o resultado positivo sem nunca terem tido contato com o vírus SARS-CoV-2 (vírus causador da doença). Por outro lado, o referido teste apresenta 15% de chance de resultado falso negativo, o que significa que as pessoas podem apresentar o resultado negativo para o teste rápido de COVID-19, mesmo sendo portadoras da doença.

Na Tabela 6 apresentamos os dados, em taxas unitárias, sobre as incidências de resultados do teste rápido para COVID-19:

Tabela 6: Taxas de incidência de resultados do teste rápido para COVID-19

Doença COVID-19	Taxa unitária de resultados do teste		
	Negativo (N)	Positivo (P)	Total
Não infectados (B)	0,99	0,01	1
Infectados (D)	0,15	0,85	1

Fonte: Dados do problema

No dia 05 de maio de 2020, o Boletim Diário nº 50 da Secretaria do Estado de Saúde de Rondônia informou que 861 pessoas foram testadas positivas para a COVID 19. Também temos visto nos noticiários, informações que o número de infectados pode ser até 12 vezes maior que o número de diagnosticados por meio dos testes. Se considerarmos que o número real de infectados seja doze vezes maior que o número de testados positivos, então, para uma população estimada de 1,7 milhão de habitantes no Estado de Rondônia, o percentual de infectados, na data de 05 de maio de 2020, poderia ser, na realidade, de $\frac{12 \cdot 861}{1700000} \cong 0{,}006 = 0{,}6\%$ da população, o que acarreta que, nesta data, cerca de 99,4% da população não estava contaminada com o vírus.

Levando em consideração os dados acima, sabendo que uma pessoa que foi aleatoriamente escolhida, no dia 05 de maio de 2020, no Estado de Rondônia, teve o resultado positivo para o teste rápido de COVID-19, qual a probabilidade de ela não estar, de fato, doente?

Solução: Para obtermos a resposta do problema, basta aplicarmos o teorema de Bayes, da seguinte forma:

$$P(B|P) = \frac{P(B) \cdot P(P|B)}{P(B) \cdot P(B|P) + P(D).P(P|D)}$$

$$P(B|P) \cong \frac{0{,}994 \cdot 0{,}01}{0{,}094 \cdot 0{,}01 + 0{,}006 \cdot 0{,}85} = \frac{0{,}00994}{0{,}01504} \cong 0{,}6609 \cong 66\%$$

Portanto, no período considerado, a probabilidade de uma pessoa, que testou positivo para COVID-19, não estar doente é de aproximadamente 66%.

4.4 Aplicações de Modelos de Distribuição de Probabilidade Discreta

Os problemas e simulações a seguir, são exemplos da utilização dos conceitos de distribuição de probabilidade em variáveis aleatórias discretas. Para tanto, serão utilizados, nestas simulações, os modelos de distribuição binomial e de distribuição de Poisson, bem como a aproximação de uma distribuição binomial por uma distribuição de Poisson, como ferramentas para o cálculo de probabilidades.

4.4.1 Simulação em Seguros de Saúde – Aplicação da Distribuição Binomial

(BUSSAB; MORETTIN, 2002) Uma companhia de seguros vendeu apólices a cinco pessoas, todas da mesma idade e com boa saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa daquela idade esteja viva daqui a trinta anos é de $\frac{2}{3}$. Calcular a probabilidade de que, daqui a trinta anos, exatamente duas pessoas estejam vivas.

Solução: Observe que, ao se considerar o evento “a pessoa estar viva daqui a trinta anos” como sucesso e o evento “a pessoa não estar viva daqui a trinta anos” como fracasso, vemos que a variável X, que contém todos os possíveis resultados, é caracterizada por uma distribuição binomial de parâmetros $n = 5$ e $p = \frac{2}{3}$, pois a probabilidade de uma pessoa estar viva daqui a trinta anos, conforme foi apresentada, é na realidade um ensaio de Bernoulli. Assim, utilizando o modelo da distribuição binomial, temos:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-2} = 10 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27} \cong 0{,}164 = 16{,}4\%$$

Portanto, a probabilidade de exatamente duas pessoas desse grupo estarem vivas daqui a 30 anos é de aproximadamente 16%.

Note que esta mesma aplicação pode ser estendida com a finalidade de se calcular a probabilidade de todos estarem vivos daqui a trinta anos ou a probabilidade de pelo menos três dessas pessoas estarem vivas.

4.4.2 Simulação de transmissão hereditária de um gene – Aplicação da Distribuição Binomial

(ANTONIO, 2020) Suponha que a probabilidade de se transmitir um gene responsável por certa patologia seja de $\frac{1}{4}$. Qual a probabilidade de que, em uma família de quatro crianças, haja exatamente dois filhos portadores desse gene?

Solução: Observe que, ao se considerar o evento “ser portador do gene responsável pela patologia” como sucesso e o evento “não ser portador do gene responsável pela patologia” como fracasso, vemos que a variável X, que contém todos os possíveis resultados, é caracterizada por uma distribuição binomial de parâmetros $n = 4$ e $p = \frac{1}{4}$, pois a probabilidade de uma criança ter o gene responsável pela patologia, conforme foi apresentada, caracteriza um ensaio de Bernoulli. Assim, utilizando o modelo da distribuição binomial, temos:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-2}=6\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{9}{16}\cong 0{,}21=21\%$$

Portanto, a probabilidade de exatamente duas crianças possuírem o gene responsável pela patologia é de aproximadamente 21%.

4.4.3 Simulação em Seguro Saúde – Aplicação da Distribuição de Poisson

(CASTANHEIRA, 2012) A probabilidade da ocorrência de óbito por AIDS, entre os habitantes de determinada comunidade, é de 0,002 por ano. Uma empresa de seguros firma um contrato coletivo com essa comunidade que tem 5.000 habitantes. Nesse contexto, qual a probabilidade de cinco habitantes desse grupo virem a óbito, em decorrência da AIDS, no primeiro ano de existência da apólice?

Solução: Observe que a variável X considerada segue o modelo de distribuição binomial, porém, para um valor de n muito grande, portanto, como visto anteriormente, podemos utilizar, nessa situação, uma aproximação por distribuição de Poisson. Ou seja, se $X \sim B(n,p)$ então, para n muito grande, temos $X \sim P(\mu)$, com $\mu = n \cdot p$.

Pelos dados do problema, temos que $n = 5000$, $k = 5$ e $p = 0{,}002$. Desse modo, podemos determinar a mortalidade média $\mu = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}002 = 10$. Assim:

$$P(X=k)\cong\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^k}{k!}$$

$$P(X=5)\cong\frac{e^{-10}\cdot 10^5}{5!}\cong\frac{2{,}718282^{-10}\cdot 100000}{120}\cong 0{,}038=38\%$$

Portanto, a probabilidade de que cinco habitantes desse grupo faleçam em decorrência da AIDS, no primeiro ano de existência da apólice, é de aproximadamente 3,8%.

4.4.4 Simulação em Sinais de um Transmissor – Aplicação da Distribuição de Poisson

(CASTANHEIRA, 2012) Considerando que nos sinais de um transmissor ocorrem distorções aleatórias a uma taxa média de uma por minuto, e as mensagens têm, em média, três minutos, ou seja, a ocorrência de distorção é de três por mensagem. Qual a probabilidade de o número de distorções, em uma mensagem de três minutos, ser igual a dois?

Solução: Considere X como sendo a variável "número de distorções em mensagens". O problema informa que, em média, ocorre uma distorção a cada minuto, o que implica que se $t = 3$ minutos (tempo da mensagem) então deverão ocorrer três distorções, o que acarreta que $\mu = 3$. Portanto, a variável X pode ser modelada como uma distribuição de Poisson, ou seja, $X \sim P(3)$. Logo, para $X = 2$ distorções em uma mensagem, temos:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu}. \mu^{k}}{k!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3}.\ 3^{2}}{2!} \cong 0{,}224$$

Logo, a probabilidade de ocorrerem duas distorções em uma mensagem de três minutos é de cerca de 22,4%.

4.5 Aplicações de Modelos de Distribuição de Probabilidade Contínua

Os problemas e simulações a seguir, são exemplos da utilização dos conceitos de distribuição de probabilidade em variáveis aleatórias contínuas. Para tanto, serão utilizados, nas simulações a seguir, os modelos de distribuição uniforme, exponencial e de distribuição normal; além da aproximação de uma distribuição binomial (variável discreta) por meio de uma distribuição normal (variável contínua); como ferramentas para o cálculo de probabilidades.

4.5.1 Simulação do tempo decorrido de um programa de TV – Aplicação da Distribuição Uniforme

(Magalhães, 2006) Um programa de TV tem duração de 1 hora e um telespectador impaciente irá trocar de canal a qualquer momento durante o programa. Qual a probabilidade de ele assistir à maior parte do programa? Se ele assistiu a maior parte do programa, qual seria a probabilidade de ele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos?

Solução: Vamos denotar por X o instante em que o telespectador troca de canal. Pelas informações disponíveis $X \sim U[0{,}1]$ e, portanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ x, se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, se\ x \geq 1 \end{cases}$$

O evento “assistir à maior parte do programa” implica que $X > \frac{1}{2}$. Temos então, $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, ou seja, há 50% de chance de o telespectador assistir à maior parte do programa.

Para calcular a probabilidade de ele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos, dado que ele assistiu a maior parte do programa, temos:

$$P\left(\frac{5}{6} < X < 1 | X > \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left[\left(\frac{5}{6} < X < 1\right) \cap \left(X > \frac{1}{2}\right)\right]}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{5}{6} < X < 1\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)}$$

Temos que $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e, $P\left(\frac{5}{6} < X < 1\right) = F(1^-) - F\left(\frac{5}{6}\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$, portanto:

$P\left(\frac{5}{6} < X < 1 | X > \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\frac{5}{6}<X<1\right)}{P\left(X>\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, ou seja, há cerca de 33% de probabilidade de o telespectador desligar a TV ou trocar de canal nos últimos 10 minutos do programa.

4.5.2 Simulação do tempo de vida de um equipamento – Aplicação da Distribuição Exponencial

(Elaborado pelo autor) O tempo médio de duração de um respirador artificial, até apresentar o primeiro defeito, é de cerca de 20000 horas. Sabendo que o tempo até ocorrer a primeira falha, nesse equipamento, é modelado por uma distribuição exponencial com parâmetro λ, determine a probabilidade de ocorrer algum defeito no primeiro ano de funcionamento do aparelho.

Solução: Se o tempo médio de duração, até ocorrer o primeiro defeito, é de 20000 horas, então, temos $\mu = 20000$. Sabemos ainda que, em uma distribuição exponencial, a esperança matemática (média) é dada por $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Desse modo, o parâmetro λ será:

$\frac{1}{\lambda} = 20000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20000}$

Queremos determinar a probabilidade desse aparelho adquirir algum defeito no primeiro ano de utilização. Devemos, portanto, converter esse tempo em horas para que haja a compatibilização com o tempo médio de duração, o qual fora expresso em horas. Assim: $1\ ano = 365\ dias \times 24\ horas = 8760\ horas$.

Aplicando a função distribuição exponencial de probabilidade, temos:

$$P(X \leq x) = F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X \leq 8760) = F(8760) = 1 - e^{-\frac{1}{20000} \cdot 8760} \cong 0{,}354 = 35{,}4\%$$

Nas condições apresentadas, o respirador artificial tem cerca de 35,4% de probabilidade de apresentar algum defeito no primeiro ano de uso.

4.5.3 Simulação em economia – Aplicação da Distribuição Exponencial

(MEYER, 1995) Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1.000 horas) e que possa ser considerado uma variável contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = e^{-x}, x > 0$$

Suponha que o custo de fabricação de um item seja de 2,00 reais e o preço de venda desse item seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

Solução: Comparando a função densidade $f(x) = e^{-x}$, com o modelo exponencial $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, temos que $\lambda = 1$. Assim, a probabilidade de ocorrer defeito com 900 horas ou menos de uso, pela função distribuição, será:

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X \leq 0{,}9) = F(0{,}9) = 1 - e^{-1 \cdot 0{,}9} \cong 0{,}5934$$

Assim, o item será devolvido ao fabricante (implicando em uma perda de 2 reais) com a probabilidade de 0,5934; ou permanecerá com o cliente (implicando em um ganho de $5 - 2 = 3$ reais) com probabilidade de $1 - 0{,}5934 = 0{,}4066$.

O lucro líquido será $-2 \cdot 0{,}5934 + 3 \cdot 0{,}4066 = 0{,}033$, ou seja, aproximadamente três centavos por item.

4.5.4 Simulação em tempo de garantia – Aplicação da Distribuição Normal

(BUSSAB; MORETTIN, 2002) Uma empresa produz televisores de dois tipos, tipo A (comum) e tipo B (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo A, com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo B, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo A e B são produzidos com lucro de 1200 unidades monetárias e 2100 unidades monetárias, respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 unidades monetárias e 7000 unidades monetárias, respectivamente. Considerando as informações dadas no problema:

a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B;
b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e para os televisores do tipo B.

Solução: Considere a variável X_A como sendo o tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo A e, de maneira análoga, X_B como sendo o tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo B. Assim, $X_A \sim N(10,2^2)$ e $X_B \sim N(11,3^2)$.

a) Pelo enunciado do problema, sabemos que as restituições ocorrem caso os televisores apresentem algum defeito grave no prazo de 6 meses. Portanto:

$$P(X_A \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-10}{2}\right) = P(Z \leq -2) = 0{,}0228 = 2{,}28\%$$

$$P(X_B \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-11}{3}\right) \cong P(Z \leq -1{,}67) = 0{,}0475 = 4{,}75\%$$

Assim, a probabilidade de haver restituições das quantias pagas pelos clientes é de 2,28% para os televisores do tipo A e de 4,75% para os televisores do tipo B.

Os valores de probabilidade para $Z \leq -2$ e $Z \leq -1{,}67$ foram obtidos na tabela da distribuição normal padrão, anexada a este trabalho.

b) Considerando L_A e L_B como sendo os lucros referentes às vendas dos televisores do tipo A e do tipo B, respectivamente, temos:

$$L_A = \begin{cases} 1200, se\ não\ houver\ restituição \\ -2500, \ \ se\ houver\ restituição \end{cases} \text{ e } L_B = \begin{cases} 2100, se\ não\ houver\ restituição \\ -7000, \ \ se\ houver\ restituição \end{cases}$$

Denotando por μ_{L_A} e μ_{L_B} os lucros médios para os televisores do tipo A e do tipo B, respectivamente, temos:

$$\mu_{L_A} = 1200 \cdot P(\overline{X_A}) - 2500 \cdot P(X_A) = 1200 \cdot (1 - 0{,}0228) - 2500 \cdot 0{,}0228 =$$
$$= 1200 \cdot 0{,}9772 - 2500 \cdot 0{,}0228 = 1172{,}64 - 57 = 1115{,}64$$

$$\mu_{L_B} = 2100 \cdot P(\overline{X_B}) - 7000 \cdot P(X_B) = 2100 \cdot (1 - 0{,}0476) - 7000 \cdot 0{,}0475 =$$
$$= 2100 \cdot 0{,}9525 - 7000 \cdot 0{,}0475 = 2000{,}25 - 332{,}5 = 1667{,}75$$

Portanto, os lucros médios para os televisores do tipo A e do tipo B são, respectivamente, de $1115{,}64$ e $1667{,}75$ unidades monetárias.

4.5.5 Simulação de incubação de uma doença – Aplicação da Distribuição Normal

(Desenvolvido pelo autor) Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS/2020), a doença COVID-19 possui período de incubação de cerca de cinco a seis dias, podendo variar de 1 a 14 dias desde a infecção pelo vírus e, há registros de casos em que os sintomas da doença somente se manifestaram no décimo oitavo dia após o contato com o vírus.

Considerando que o tempo médio de incubação seja de 14 dias, com uma variância igual a 5. Determine:

a) A probabilidade de que em um indivíduo qualquer, que tenha se contaminado com o vírus, o período de incubação seja igual ou superior a 18 dias;
b) A probabilidade de que em um indivíduo qualquer, que tenha se contaminado com o vírus, o período de incubação seja entre 9 e 15 dias.

Solução: Seja X a variável aleatória que representa o tempo de incubação da doença. Note que X possui distribuição normal com parâmetros $\mu = 14$ e $\sigma^2 = 5$, ou seja, $X \sim N(14{,}5)$. Assim:

a) Devemos determinar $P(X \geq 18)$, o que será feito com o auxílio da variável Z e a tabela da distribuição normal padrão (anexada e esse trabalho):

$$P(X \geq 18) = 1 - P(X < 18) = 1 - P\left(Z < \frac{18-14}{\sqrt{5}}\right) \cong 1 - P(Z < 1{,}79) =$$

$$= 1 - 0{,}9633 = 0{,}0367 = 3{,}67\%$$

Ou seja, um indivíduo qualquer que se infecte com o vírus tem a probabilidade de cerca de 3,67% de apresentar os sintomas a partir do décimo oitavo dia.

b) Devemos determinar $P(9 < X < 15)$, o que será feito com auxílio da variável Z e da tabela de distribuição normal padrão (anexada a esse trabalho):

$$P(9 < X < 15) = P\left(\frac{9-14}{\sqrt{5}} < Z < \frac{15-14}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{15-14}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{9-14}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(-0{,}45) - \Phi(-2{,}24) =$$

$$= 0{,}3264 - 0{,}0125 = 0{,}3139 = 31{,}4\%$$

Existe cerca de 31,4% de probabilidade de um indivíduo infectado pelo vírus apresentar os sintomas entre o nono e o décimo quinto dia desde o contágio.

4.5.6 Simulação taxa de letalidade – Aplicação da Distribuição Normal

Elaborado pelo Autor) A Organização Mundial de Saúde indica que a taxa de letalidade por COVID-19 é de cerca de 2,3%, considerando o grupo de pessoas que contraíram a doença, independentemente da faixa etária ou da existência de comorbidades, uma vez que se considerarmos esses fatores, a taxa de letalidade é variável entre grupos distintos de doentes. Em 03 de março de 2020, a Folha de São Paulo publicou dados acerca da pandemia de COVID-19, informando que, nessa data, eram 8 mil infectados pela doença, distribuídos em cinquenta e um países, com um total de 2856 mortes.

Admitindo-se que entre os infectados recolhe-se uma amostra de 2000 indivíduos com situações clínicas semelhantes, qual será a probabilidade de pelo menos 50 deles irem a óbito em razão dessa doença?

Solução: Consideremos que cada um dos indivíduos dessa amostra, em razão das semelhantes situações clínicas, tenha a mesma probabilidade de ir a óbito por COVID-19, teremos, para $p = 0{,}023$, que determinar $P(X \geq 50)$. Note que, nas condições dadas, temos $X \sim B(2000; 0{,}023)$, ou seja, X é uma variável aleatória com distribuição binomial. Portanto:

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49)$$

$$P(X \geq 50) = 1 - \sum_{k=0}^{49} P(X = k) = \sum_{k=0}^{49} \binom{2000}{k} \cdot 0{,}023^k \cdot (1 - 0{,}023)^{49-k}$$

o que nos mostra o quão difícil será realizar o cálculo dessa probabilidade. Porém, na subseção 3.2.2.3, vimos que para valores grandes de n temos que $X \sim B(n, p)$ se aproxima de $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, com $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq$. Como $n = 2000$, $p = 0{,}023$ e $q = 1 - 0{,}023 = 0{,}977$, temos que $\mu = 46$ e $\sigma^2 \cong 44{,}9$. Dessa forma, resolveremos o problema por uma aproximação de uma variável $Y \sim N(46; 44{,}9)$. Assim:

$$P(X \geq 50) = P(Y \geq 50) = 1 - P(Y < 50) = 1 - P\left(Z < \frac{50 - 46}{\sqrt{44{,}9}}\right) \cong$$

$$\cong 1 - P(Z < 0{,}59) = 1 - 0{,}7224 = 0{,}2776 \cong 27{,}8\%$$

Portanto, a probabilidade de que haja pelo menos 50 mortes dentre os 2000 doentes é de cerca de 27,8%.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando o exposto neste trabalho e ponderando sobre os resultados apresentados, os quais são frutos da revisão bibliográfica realizada, concluímos que o presente material atendeu aos objetivos propostos, pois apresentou tópicos do desenvolvimento da probabilidade o longo do tempo, os fundamentos dessa área da matemática, várias das definições e teoremas que a embasam, bem como os principais modelos de distribuição para as variáveis discretas e variáveis contínuas; e, ao final, problemas e simulações cuja finalidade foi a de apresentar aos leitores (professores e alunos) a utilidade dos conceitos enunciados e das ferramentas matemáticas apresentadas, na tomada de decisões, aproximando, com isso, a teoria e a prática na atualidade.

O presente trabalho apresenta aplicações em fenômenos atuais que permeiam diversas áreas de conhecimento, desde aplicações elementares envolvendo moedas e dados, até aplicações mais complexas, frequentemente presentes na área da saúde, da economia, entre outras.

Além da aplicação dos conceitos elementares da probabilidade laplaciana, foram também incluídos problemas que envolvem o teorema de Bayes, as distribuições com variáveis discretas: binomial e de Poisson; além das aplicações de distribuições com variáveis contínuas: uniforme, exponencial e normal. Além disso, em duas dessas aplicações, o trabalho apresentou o cálculo de probabilidades por meio de aproximações de uma variável com distribuição binomial por uma variável com distribuição de Poisson e também de uma variável com distribuição binomial por uma variável com distribuição normal. Não foi incluída nenhuma aplicação específica da distribuição de Bernoulli, por esta ser demasiadamente elementar e por estar presente e fundamentar a distribuição binomial, uma vez que ao se trabalhar com a distribuição binomial estamos, implicitamente, desenvolvendo vários ensaios de Bernoulli.

Os principais modelos de distribuição de probabilidade, aqui aplicados, demonstraram que diversos dos fenômenos cotidianos, os quais conhecemos ou vivenciamos, podem ser modelados por uma ferramenta matemática e, a partir dessa prática, trazerem resultados importantes para a compreensão destes e a previsão de comportamentos futuros, bem como a tomada de decisões, seja de caráter pessoal, em investimentos ou na elaboração de políticas públicas.

Espera-se que este trabalho contribua como auxiliar às práticas docentes e, por conseguinte, com o aprendizado dos alunos, atuando como uma ferramenta pedagógica a mais, na qual são encontradas uma linguagem simples aliada ao rigor matemático nos enunciados e nas demonstrações, bem como a aproximação da matemática (com toda a sua abstração) à fenômenos reais e concretos; pois acreditamos que, ao se aproximar a matemática de fenômenos da realidade, possibilitamos aos discentes o despertar pelo desenvolvimento científico o qual deve ser prestigiado em nosso modelo de ensino atual.

REFERÊNCIAS

ANTONIO, R. **Probabilidade e Estatística – Aula 19**. Disponível em: http://doczz.com.br/doc/359368/a-distribui%C3%A7%C3%A3o-binomial-muitas-aplica%C3%A7%C3%B5es-de-probabilidad.... Acesso em: 10 jun. 2020.

APOSTOL, T. M. **Calculus** (volume II). 2 Ed. New York: John Wiley & Sons.

BARBETTA, P. A; REIS, P. A; BORNIA, A. C. **Estatística para Cursos de Engenharia e Informática.** 3 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

BITTENCOURT, H. R.; VIALI, L. **Contribuições para o Ensino da Distribuição Normal ou Curva de Gauss em Cursos de Graduação**. ResearchGate. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280444871_Contribuicoes_para_o_ensino_da_distribuicao_normal_ou_curva_de_Gauss_em_cursos_de_Graduacao. Acesso em 03 abr. 2020.

BOYER, C. B; MERZBACH, U. C**. História da Matemática**. 1 ed. São Paulo: Blucher, 1995.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+):** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 03 mar. 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: **terceiro e quarto ciclos**. Brasília: MEC,1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 08 de mar. 2020.

BUSSAB, W. O; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica.** 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

CASTANHEIRA, N. P. **Estatística Aplicada a Todos os Níveis.** Curitiba: InterSaberes, 2012.

DAVID, R. A.; DENNIS, J. S.; THOMAS, A. W. **Estatística Aplicada à Administração e Economia.** 3 ed. São Paulo: CENAGE, 2017.

ELON, L. L. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

ENEM 2010 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. MEC. Disponível em:** http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno5_amarelo_com_gab.pdf. Acesso em: 05 abr. 2020.

ENEM 2011 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. MEC. Disponível em:**

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf. Acesso em: 05 abr. 2020.

GADELHA, A. **Uma pequena história da probabilidade**. 2004. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf. Acesso em: 04 jun. 2020.

GRINSTEAD, C. M.; Snell, J. L. **Introduction to Probability**. 2 ed. American Mathematical Society, 2003.

LAFRAIA, J. R. **Manual de Confiabilidade, Mantenabilidade e Disponibilidade**. Rio de Janeiro: Petrobrás, 2014.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 2 ed. São Paulo: EDUSP, 2006.

MEDRONHO, R. A. **Epidemiologia**. 2 ed. Rio de Janeiro: Atheneu, 2006.

MEYER, Paul. L. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado, rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

MORGADO, A. C; TEIXEIRA, R. C. **Introdução a Teoria da Probabilidade**. II Colóquio de Matemática do Centro. Disponível em: http://emis.impa.br/EMIS/journals/em/docs/coloquios/CO-2.01.pdf. Acesso em: 03 fev. 2020.

RONDÔNIA. **Edição 50 - Boletim diário sobre o coronavírus em Rondônia**, 05 de maio 2020. Disponível em: http://www.rondonia.ro.gov.br/edicao-50-boletim-diario-sobre-coronavirus-em-rondonia/. Acesso em: 18 abr. 2020.

SION, M. **História da Teoria da Medida no Século XX**. Disponível em: http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/historia-da-teoria-da-medida-no-seculo-xx/. Acesso em: 19 abr. 2020.

TRIOLA, M. F. **Introdução à Estatística**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

VIALI, L. Algumas Considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, 2008. v. 8, n. 16, p. 143-153.

ANEXO

Tabela da Distribuição Normal Padrão
P(Z<z)

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Disponível em: <http://wiki.icmc.usp.br/images/f/f9/Tabela_Normal.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2020.