



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Leandro Barbosa do Amaral Guimarães

**Aplicações dos Padrões de Fibonacci no Mercado de  
Ações: Uma Proposta para o Ensino de Educação  
Financeira no Ensino Médio**

Teresina - 2020



**Leandro Barbosa do Amaral Guimarães**

**Dissertação de Mestrado:**

**Aplicações dos Padrões de Fibonacci no Mercado de Ações: Uma Proposta para o Ensino de Educação Financeira no Ensino Médio**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:

Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza.

**Teresina - 2020**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

G693a Guimarães, Leandro Barbosa do Amaral.

Aplicações dos padrões Fibonacci no mercado de ações:  
uma proposta para o ensino de educação financeira no ensino  
médio / Leandro Barbosa do Amaral Guimarães. – Teresina:  
2020.

122 f. il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal  
do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em  
Matemática - PROFMAT, 2020.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza.

1. Matemática Financeira. 2. Educação Financeira. 3.  
Sequência de Fibonacci. 4. Matemática (Ensino Médio). I. Título.

CDD 513.93

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

**Leandro Barbosa do Amaral Guimarães**

**Aplicações dos Padrões de Fibonacci no Mercado de Ações: Uma Proposta para o Ensino de Educação Financeira no Ensino Médio**

Dissertação submetida à banca examinadora  
abaixo discriminada em defesa pública e apro-  
vada em 30/07/2020.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Dr. João Carlos de Oliveira Souza (Orientador)

Universidade Federal do Piauí

---

Dra. Aurineide Castro Fonseca

Universidade Federal do Piauí

---

Dr. Guilherme Luiz de Oliveira Neto

Instituto Federal do Piauí

**Teresina - 2020**

*Dedico esse trabalho a Nosso Senhor Jesus, Nossa Senhora Aparecida e a São José, por todas as graças concedidas na minha vida e na vida da minha família. À minha mãe por toda dedicação e comprometimento com a minha formação, ao meu pai pelo apoio e dedicação, a minha irmã por ser minha fonte de inspiração e a minha esposa pelo companheirismo e motivação de cada dia.*

# Agradecimentos

Quero Agradecer primeiramente a Deus, por sua Infinita Fonte de Amor e Misericórdia. A Nossa Senhora Aparecida, por todas as Graças em minha vida e conforto nos momentos de grande adversidade e a São José por sua Condução e Poderosa Interseção.

Quero agradecer a minha mãe, Maria Gorete, por seu amor, dedicação e compromisso com minha educação. Estou finalizando esse mestrado por causa da sua luta e do seu Amor. Obrigado por sempre olhar muito mais longe do que a gente poderia enxergar, sua força me inspira.

Quero agradecer ao meu pai, Paulo de Tarso, por não nos deixar faltar nada, por nos prover uma boa educação e por ser um exemplo de luta, inteligência e trabalho.

Quero agradecer a minha irmã, Caroline Amaral, por ser o meu exemplo de força, dedicação, perseverança e inteligência. Obrigado por seu apoio, orientação e por seus conselhos sempre positivos.

Agradeço a minha esposa, Iara Jaíne, por sua dedicação, por seu companheirismo e por estar ao meu lado, dando um enorme apoio para que tudo isso fosse realizado, esse foi um período de muitas mudanças, desafios e aprendizagem, obrigado.

Agradeço ao IFMA, pela oportunidade para obter uma maior dedicação a este mestrado, é um grande orgulho fazer parte dessa digníssima instituição.

Agradeço a UFPI, pelas oportunidades, estrutura e o excelente corpo técnico no qual foi possível obter uma excelente formação.

Agradeço aos professores que colaboraram diretamente e indiretamente nessa caminhada, cada conhecimento teórico, prático e conselhos foram essencialmente importantes nessa jornada.

Agradeço ao meu orientador, Professor João Carlos, pelas longas e produtivas conversas, conselhos e paciência, colocando-se sempre a disposição para auxiliar nas minhas dúvidas. Obrigado pela orientação e parceria, foi uma honra.

Agradeço a Professora Aurineide, o Professor Guilherme e o Professor João Carlos pelas observações, apontamentos, críticas e elogios. Foram contribuições que agarrei com carinho e busquei implementar na dissertação, com a certeza da significativa melhora no trabalho.

Agradeço a coordenação do PROFMAT pelo andamento, organização e atendimento prestado durante esse período do mestrado.

Agradeço aos meus colegas do PROFMAT, essa turma fora do comum. As várias horas de estudo, as boas e descontraídas conversas e o apoio mútuo, fizeram desse grupo uma família.

Agradeço aos amigos pelos conselhos, apoio e o encorajamento dessa jornada.

Obrigado a todos os familiares pelos conselhos, ótimas conversas, grandes momentos de descontração, a partilha de bons vinhos e pelo fortalecimento dos laços familiares.

*“Me disseram porém  
Que eu viesse aqui  
Prá pedir de romaria e prece  
Paz nos desaventos  
Como eu não sei rezar  
Só queria mostrar  
Meu olhar, meu olhar,  
Meu olhar...”*

Renato Teixeira.

# Resumo

O presente trabalho teve como objetivo investigar aplicações da Sequência de Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica de ações. Além de elaborar um produto educacional relacionando a Educação Financeira, Matemática e Análise Técnica. Tendo como questionamento inicial: É possível aplicar a matemática para buscar padrões na análise de gráfico e ensinar a matemática para alunos do médio, aliado a Educação Financeira, nesse contexto? A pesquisa foi do tipo aplicada, e do ponto de vista dos objetivos, foi exploratória. Para a coleta de dados, utilizou-se o site [br.tradingview.com](http://br.tradingview.com), para explorar as ferramentas retrações, projeções e extensões de Fibonacci, além de livros, artigos, dissertações e teses. Foi possível obter as relações entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro e as aplicações dos padrões na análise de gráfico, culminando com o estudo de Padrões Harmônicos. Como produto educacional, foi desenvolvida uma oficina, com carga horária de 60 horas, para ser aplicada aos alunos do ensino médio envolvendo a temática Educação Financeira, Matemática e Análise Técnica.

Palavras-chave: Educação Financeira, Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Análise Técnica.

# Abstract

This work aimed to investigate applications of the Fibonacci Sequence and the Gold Number in the Technical Analysis of actions. In addition to developing an educational product relating to Financial Education, Mathematics and Technical Analysis. Having as initial questioning: Is it possible to apply mathematics to look for patterns in the graph analysis and teach mathematics to middle school students, allied to Financial Education, in this context? The research was applied, and from the point of view of objectives, exploratory. For data collection, the website [www.tradingview.com](http://www.tradingview.com) was used to explore the Fibonacci retractions, projections and extensions tools, as well as books, articles, dissertations and theses. It was possible to obtain the relations between the Fibonacci Sequence and the Gold Number and the applications in the patterns in the Graph Analysis, culminating in the study of harmonic patterns. As an educational product, a workshop was developed, with a workload of 60 hours, to be applied to high school students involving the theme Financial Education, Mathematics and Technical Analysis.

Key words : Financial Education, Fibonacci Sequence, Gold Number, Recurrences, Technical Analysis.

# Lista de Figuras

4.1	Gráfico de Candlesticks. Fonte: Lemos (2018, p.47).	21
4.2	Ações preferenciais PCAR4. Fonte: <a href="https://tv.tradezone.com.br/">https://tv.tradezone.com.br/</a> .	22
4.3	Ondas de Elliot. Fonte: Robert Prechter (2005, p.23).	23
4.4	Formação de Pequenas Ondas de Elliot em conjunto com a onda principal de Elliot. Fonte: Prechter (2005, p.24).	24
6.1	Segmento Áureo. Fonte: O Autor.	46
6.2	O Homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci. Fonte: Afeitos (2013, p.67).	48
7.1	Ações PN da Petrobras. Fonte: <a href="http://www.tradingview.com">www.tradingview.com</a> .	63
7.2	Projeção dos preços das ações da Vale. Fonte: <a href="http://www.tradingview.com">www.tradingview.com</a> .	64
7.3	Técnica de Retração Interna ou Externa. Fonte: O autor.	65
7.4	Exemplo, fora de escala, de uma retração de 38,2%. Fonte: O autor.	66
7.5	Exemplo, fora de escala de uma retração de 50%. Fonte: O autor.	66
7.6	Exemplo, fora de escala de uma retração de 68,2%. Fonte: O autor.	67
7.7	Valor do Preço X de uma Ação Fonte. Fonte: O autor.	68
7.8	Ações Preferências da Petrobras. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/">https://br.tradingview.com/</a> .	69
7.9	Ações Preferencias da Itaúsa. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/">https://br.tradingview.com/</a> .	70
7.10	Ações Ordinárias da JBS. <a href="https://br.tradingview.com/">https://br.tradingview.com/</a> .	71
7.11	Projeções de Fibonacci. Fonte: O Autor.	72
7.12	Ações Ordinárias da Hering. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/">https://br.tradingview.com/</a> .	72
7.13	Ações Ordinárias da Hypermarcas. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/">https://br.tradingview.com/</a> .	73
7.14	Ações Ordinárias da Ambev. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/">https://br.tradingview.com/</a> .	74
7.15	Site Tradingview. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/chart">https://br.tradingview.com/chart</a> .	75
7.16	Ferramenta Retração de Fibonacci. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/chart">https://br.tradingview.com/chart</a> .	75

7.17 Ações das Lojas Americanas. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/chart">https://br.tradingview.com/chart</a> . . .	76
7.18 Ações da Gerdau. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/chart">https://br.tradingview.com/chart</a> . . . . .	76
7.19 Retração de Fibonacci. Fonte: O Autor. . . . .	78
7.20 Livro Profits in the Stock Market. Fonte: Amazon.com. . . . .	79
7.21 Padrão AB/CD de Alta. Fonte: O Autor. . . . .	80
7.22 Padrão AB/CD. Fonte: O Autor. . . . .	81
7.23 Padrão Ideal de Gartley. Fonte: Scott Carney (1999). . . . .	82
7.24 Padrão Ideal de Gartley. Fonte: Scott Carney (1999). . . . .	82
7.25 Padrão Bullish Gartley Modificado. Fonte: Dawid Lahutta (2016). . . . .	83
7.26 Padrão Bearish Gartley Modificado. Fonte: Dawid Lahutta (2016). . . . .	84
7.27 Padrão Bullish Bat. Fonte: Dawid Lahutta (2016). . . . .	85
7.28 Padrão Bearish Bat. Fonte: Dawid Lahutta (2016). . . . .	86
7.29 Padrão Bullish Crab. Fonte: Dawid Lahutta (2016). . . . .	87
7.30 Padrão Bearish Crab. Fonte: Dawid Lahutta (2016). . . . .	88
7.31 Padrão Bullish Butterfly. Fonte: Scott Carney (1999). . . . .	89
7.32 Padrão Bearish Butterfly. Fonte: Scott Carney (1999). . . . .	90

# Sumário

<b>Resumo</b>	v
<b>Abstract</b>	vi
<b>Sumário</b>	ix
<b>1 Introdução</b>	2
<b>2 Educação Financeira e Matemática</b>	6
<b>3 Mercado Financeiro e de Ações</b>	12
3.1 Mercado de Ações a Vista e a Bolsa de Valores	13
3.2 Brasil, Bolsa e Balcão - B3	14
<b>4 Análise Técnica de Ações</b>	17
4.1 Teoria de Dow	19
4.2 Gráficos de Candlesticks	20
4.3 Ondas de Elliott	22
<b>5 Sequência de Fibonacci e Recorrências Lineares</b>	26
5.1 Recorrência Lineares	28
5.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem	30
5.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem	33
5.3.1 Recorrências Lineares de Segundo Ordem Homogênea	33
5.3.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Não-Homogêneas	36
<b>6 Proporcionalidade e o Número de Ouro</b>	40
6.1 Grandezas Proporcionais	40

6.2	Número de Ouro	46
6.2.1	Razão Áurea e o Número de Ouro	46
<b>7</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>49</b>
7.1	Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea	49
7.2	Potências de $\varphi$ e a Sequência de Fibonacci	50
7.3	Números de Fibonacci e a Razão Áurea	53
7.4	Funções de Fibonacci	58
7.5	Índices ou Níveis de Fibonacci	60
7.6	Retração e Projeção de Fibonacci	62
7.7	Projeções de Fibonacci	70
7.7.1	Ferramenta Computacional para Traçar os Níveis de Fibonacci	74
7.8	Padrões Harmônicos	77
7.8.1	O Padrão AB/CD	78
7.8.2	Padrão Ideal de um Gartley	81
<b>8</b>	<b>Produto Educacional: Educação Financeira, Matemática e a Análise Técnica</b>	<b>91</b>
8.1	Introdução	91
8.2	Ementa	92
8.3	Conteúdo Programático	92
8.4	Justificativa	93
8.5	Objetivos	93
8.5.1	Objetivo Geral	93
8.5.2	Objetivos Específicos	93
8.6	Metodologia	94
8.6.1	1ª Etapa: Educação Financeira, Investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa de Valores	95
8.6.2	2ª Etapa: Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Funções e Níveis de Fibonacci	95
8.6.3	3ª Etapa: Um breve estudo sobre Análise Técnica	95
8.6.4	4ª Etapa: Aplicações da Sequência de Fibonacci e Número de Ouro na Análise Técnica de Ações	96
8.7	Recursos Necessários	97
8.8	Avaliação	97

---

<b>8.9 Referências Bibliográficas</b> . . . . .	98
<b>8.9.1 Bibliografia Básica</b> . . . . .	98
<b>8.9.2 Bibliografia Complementar</b> . . . . .	98
<b>9 Conclusão</b>	99
<b>I Apêndice</b>	107
<b>A Apêndice</b>	108
<b>A.1 Atividades Para o Desenvolvimento da Oficina</b> . . . . .	108
<b>A.1.1 EIXO 1: Educação Financeira, Investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa</b> <b>de Valores</b> . . . . .	108
<b>A.1.2 EIXO 2: Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Funções</b> <b>e Níveis de Fibonacci</b> . . . . .	108
<b>A.1.3 EIXO 3: Um Breve Estudo sobre Análise Técnica</b> . . . . .	109
<b>A.1.4 EIXO 4: Aplicações da Sequência de Fibonacci e Número de Ouro na</b> <b>Análise Técnica de Ações</b> . . . . .	109

# Capítulo 1

## Introdução

Um importante desafio para ensinar matemática encontra-se no fato de motivar o aluno a aprender, buscando dar sentido ao que está sendo ensinado, sejam em forma de aplicações, construções de jogos, produtos educacionais, atividades práticas entre outros meios didáticos. É requerido que o aluno tenha conhecimento dos conteúdos e ferramentas matemáticas para dar base ao que pode ser aplicado, mesmo que elas não aconteçam no curto prazo.

Uma área no qual exige boa base matemática e é um campo rico em aplicações envolve as finanças, seja no modo como as pessoas, empresas, governos lidam com gastos, investimentos e previsões de orçamento, a matemática será importante. A abordagem matemática não está restrita somente ao estudo da matemática financeira, mas a diversos outros tópicos que são aplicados no mundo das finanças, como por exemplo, a estatística, proporções, funções, geometria, cálculo, entre outros.

Um dos produtos mais populares do mercado de renda variável são as ações, ofertado pela Bolsa de Valores, onde uma ação representa um pedaço de uma empresa que abre capital na bolsa. Por ser um ambiente que envolve números, gráficos e padrões, é possível aplicar a matemática para buscar padrões na análise de gráfico e ensinar a matemática para alunos do ensino médio nesse contexto?

A dissertação teve um duplo objetivo: O primeiro objetivo foi investigar as relações e aplicações da Sequência de Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica de ações. O segundo grande objetivo, foi propor um produto educacional, em forma de oficina, relacionando a Educação Financeira, a matemática e o Mercado Financeiro para o ensino médio. Para tal, foram realizados complementarmente, estudos sobre a temática da Educação Financeira, recorrências e de tópicos da Análise Técnica de ações, tais como a Teoria de Dow e as Ondas de Elliott.

Para atingirmos o objetivo da pesquisa, foram realizado os estudos: Das recorrências e da Sequência de Fibonacci, proporcionalidade e o Número de Ouro, das relações entre a

Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro para então investigar os Padrões Harmônicos na Análise Técnica de ações.

Em relação a metodologia, a dissertação trata-se de pesquisa de natureza aplicada, pois foi gerado um produto educacional, para aplicar no ambiente escolar, a ser desenvolvido com alunos do ensino médio, preferencialmente com alunos do segundo ou terceiro ano. Do ponto de vista dos objetivos, a pesquisa é exploratória, onde foram investigadas informações que relacionassem e explicassem o mecanismo da relação entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro na Análise Técnica de ações.

Para a coleta de dados, foram utilizadas ferramentas computacionais para analisar o comportamento gráfico das ações, tendo como fonte de coleta o site [tradingview.com](http://tradingview.com).

Com a finalidade educacional, foi realizado um estudo sobre Educação Financeira e o Mercado Financeiro. Para, posteriormente, criar uma linearidade entre a Educação Financeira, a Matemática e a Análise Técnica. Investigou-se a relação entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro para mostrar o sentido matemático das projeções, retrações e extensões de Fibonacci e dos Padrões Harmônicos.

Por fim, foi elaborada um produto educacional, em forma de oficina, com uma carga horária de 60 horas, divididas entre explanação teórica, com 40 horas e o desenvolvimento prático, com 20 horas. Construída com o alinhamento, desenvolvido na dissertação, entre a Educação Financeira, a Matemática e a Análise Técnica de ações.

A matemática é uma grande aliada na forma como as pessoas lidam com o dinheiro, seja na forma de planejar, gastar ou investir. Nesse sentido é importante abordar de forma interdisciplinar a matemática e a Educação Financeira como forma obter um bom planejamento, tendo controle e previsão de gastos, objetivando a possibilidade de realizar futuros investimentos. Para analisar ações, existem ferramentas gráficas para indicar os possíveis melhores momentos de comprar ou vender ações, bem como padrões que ocorrem e que costumam se repetir, nesse contexto é que iremos abordar o resultado do presente trabalho.

Foram possíveis obter os seguintes resultados: A obtenção das relações entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, tais como as potências de Fibonacci, Funções de Fibonacci, cálculos de retração, projeção e extensão de Fibonacci e o estudo dos Padrões Harmônicos por meio dos níveis de Fibonacci. Sendo os principais Padrões Harmônicos o Padrão AB/CD, o Padrão Gartley, Bat, Crab e o Padrão Butterfly, todos eles obtidos como uma composição das retrações, projeções e extensões de Fibonacci.

Devido a utilização do Latex, algumas figuras estão longe de sua referência de chamada. Por exemplo, ao chamar a Figura 7.15, o leitor irá observar que a mesma estará a três parágrafos desta chamada, isso se deve as configurações do Latex e do Template utilizado. Porém, no capítulo Padrões Harmônicos, forçou-se a fixação das figuras, para que as características e descrições das mesmas, não ficassem com o entendimento preju-

dicado. A tentativa de 'forçar' a não flutuação da figura, deixou espaços incompletos ao final de algumas folhas.

Em relação ao produto educacional, foi elaborado uma oficina, com carga horária de 60 horas, para ser desenvolvida com alunos do ensino médio envolvendo a temática Educação Financeira, recorrências, Sequência de Fibonacci, Número de Ouro e aplicações da Sequência de Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica de ações. A realização da oficina está como apêndice dessa dissertação e visa aplicar por meio do conhecimento teórico e prático os conteúdos abordados no presente trabalho, possibilitando abordar de forma contextualizada, aplicada e de forma transversal tópicos importantes da matemática.

É importante ressaltar que o objetivo deste trabalho não é ensinar a operar na Bolsa de Valores, mas promover a Educação Financeira, aliado aos estudos da matemática e mostrando como consequência, um cenário que possui aplicabilidade matemática.

No Capítulo 2, foi feita uma abordagem sobre a importância da Educação Financeira, sua definição, conforma a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Apontado pelos dados do PISA de 2017, o Brasil encontra-se nas últimas colocações em relação ao Letramento Financeiro. Destacando assim vários autores sobre a importância da educação financeira na Escola, tais como: Carlo e Carvalho (2019), Bruhn et al. (2013) e Costa (2019), além de uma breve cronologia sobre as estratégias para a implantação da Educação Financeira no Brasil. Foi tratado da relação entre a Educação Financeira e da matemática, por meio dos estudos de Silva(2018) e Veiga(2019).

O Capítulo 3, é baseado em um breve estudo sobre o Mercado Financeiro e a Bolsas de Valores, onde são tratados conceitos que contextualizam o ambiente no qual foi é tratado a Análise Técnica, tais como o Mercado Financeiro e de Ações, a Bolsa de Valores, e a Bolsa, Brasil e Balcão - B3.

O desenvolvimento da temática, Análise Técnica de Ações, é feito no Capítulo 4, onde foram estudados os autores: Lemos (2018), Rockefeller (2016), Debastiani (2008), Chen (2010), entre outros. São tratadas definições importantes relacionados a base da Análise Técnica de Ações, tais como a Teoria das Finanças Comportamentais, a apresentação da Teoria de Dow e das Ondas de Elliot, dando uma visão da movimentação dos preços ao longo do tempo, cujo entendimento é importante para aplicar os Padrões de Fibonacci de forma consciente no estudo dos gráficos.

No Capítulo 5, inicia-se tratamento matemático no trabalho, onde apresentou-se a definição da Sequência de Fibonacci, bem como sua motivação inicial, um tratamento sobre recorrências lineares, até a demonstração do Teorema de Binet.

No Capítulo 6, foi feita uma abordagem sobre a Proporcionalidade, mostrando como obter, por meio da Proporção Áurea o Número de Ouro, tratando brevemente do seu contexto histórico.

No Capítulo 7, temos os resultados e discussões, no qual foi abordado por meio da investigação exploratória, as relações entre Sequencia Fibonacci e a Proporção Áurea, os número de Fibonacci e a Razão Áurea, onde é demonstrado um importante teorema, no qual relaciona a razão entre os números consecutivos de Fibonacci, onde podemos encontrar alguns níveis de Fibonacci. A revisitação dos níveis de Fibonacci é feito com a abordagem das Funções de Fibonacci. Foi explorado matematicamente e computacionalmente as projeções, retrações e expansões de Fibonacci utilizando os índices de Fibonacci, para finalizar com um estudo dos Padrões Harmônicos, que consistem em um conjunto de retrações, projeções e extrações de Fibonacci.

No Capítulo 8, foi abordado o desenvolvimento do produto educacional, construído em forma de oficina, para ser executado com alunos do ensino médio, onde foi estruturado um curso com carga horária de 60 horas. O desenvolvimento é realizado com a divisão em 4 etapas e quatro eixos, com o desenvolvimento teórico e de atividades práticas.

## Capítulo 2

# Educação Financeira e Matemática

As diversas possibilidades de consumo, aquisição de uma variedade de serviços e produtos financeiros, possibilidade de tomada de crédito, compra de uma casa, carro, gastos com viagens, gastos com as necessidades básicas, diversão, entretenimento, ter reservas para imprevistos e ainda guardar uma parcela do dinheiro para poupar ou investir, requer cada vez mais das pessoas um planejamento financeiro.

Como as possibilidades de consumo são diversas, é cada vez mais necessária a aplicação de projetos educacionais voltados para a Educação Financeira das pessoas, onde as mesmas devem ter consciência de suas reais necessidades e possibilidade de consumo. Nesse contexto temos um dos possíveis cenários da importância da Educação Financeira.

A Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) (2005, p.04), lançou um documento no qual define a Educação Financeira como sendo:

O processo pelo qual consumidores/investidores financeiros melhoram a compreensão dos produtos, conceitos e riscos financeiros e, através de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolvem as habilidades e confiança para se tornar mais conscientes dos riscos e oportunidades financeiros, para fazer escolhas informadas, para saber onde procurar ajuda e tomar outras ações eficazes para melhorar seu bem-estar financeiro (OECD, 2005, p.04, tradução nossa).

E complementa que “A Educação Financeira vai além do fornecimento de informações e conselhos financeiros, que deve ser regulamentado, como já é frequentemente o caso, em particular para a dos interesses financeiros” (OECD, 2005, p.04, tradução nossa).

A OCDE (2017) e os estudos do grupo Interdisciplinaridade e Evidências no Debate Educacional (IEDE) (2018) apontam um dado preocupante no resultado do Programa Internacional de Avaliação de Alunos de 2015, onde na competência letramento financeiro, o Brasil ocupou a última posição entre os 15 países avaliados nesse critério, obtendo uma pontuação de 393 em uma média de 489 e abaixo dos 400 pontos mínimos.

O fato do Brasil ocupar a última colocação nesse quesito é tão preocupante quanto ser o único país da lista a não atingir a pontuação mínima nesse quesito. Dessa forma, faz-se necessário focar em projetos e ações para poder levar a conscientização financeira para as famílias, tendo a escola um papel fundamental nesse processo.

Para um bom desenvolvimento do aprendizado da Educação Financeira no âmbito escolar, o aluno deve saber interpretar, realizar cálculos matemáticos, deve tomar decisões apoiado nos dados e no contexto socioeconômico no qual vive. Nesse sentido o ensino das diversas disciplinas, como por exemplo a matemática, pode ser tratado de forma transversal e interdisciplinar com a Educação Financeira.

Nesse sentido, Carlo e Carvalho (2019, p.1), aponta que:

A necessidade da implantação de programas educacionais voltados a preparar os indivíduos para a tomada de decisões envolvendo recursos financeiros. Essa necessidade é reconhecida nas diretrizes educacionais e na legislação que trata dos objetivos das redes de ensino em relação à aprendizagem nas escolas (CARLO; CARVALHO, 2019, p.1).

Assim, conforme Carlo e Carvalho (2009), temos a Lei nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, o Decreto Federal 7.397/2010 que cria a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF).

Em 16 de Maio de 2017, foi deliberado pelo Comitê Nacional de Educação Financeira a Estabelecer (2017) “diretrizes para o Programa Educação Financeira nas Escolas, durante a vigência do programa e ações de Educação Financeira no âmbito da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)”.

No Art. 2º, da deliberação número 19, são colocadas as diretrizes para a execução do programa, sendo eles:

- I - Universalização do tema Educação Financeira nas escolas, por meio de sua progressiva inserção nas ações curriculares da escola e integração à cultura escolar brasileira;
- II - Privilegiar ações com foco no professor, protagonista do processo de disseminação do tema na escola, com ações para formação;
- III - Participação de instituições de ensino superior;
- IV - Estímulo à produção descentralizada de conteúdos educacionais;
- V - Articulação com os sistemas públicos de ensino (BRASIL, 2018, p.1).

Até 2024 devem ser implantação as diretrizes citadas no Art. 2º. E em relação ao estudo da Educação Financeira no currículo escolar, Bruhn *et al.* (2013), afirma que uma equipe do ENEF desenvolveu materiais voltados aos jovens, sendo um material didaticamente inovador. São 72 estudos que integra as disciplinas escolares como por exemplo a matemática, português, ciências, geografia e historia. Para não impactar na

carga horária dos professores e alunos, o estudo contempla a aplicação transversal da Educação Financeira no currículo escolar.

A OCDE (2005, p.5), aponta também que “a Educação Financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras o mais cedo possível em suas vidas”, evidenciando assim a importância da escola na formação do cidadão, englobando o ensino da Educação Financeira no conjunto de ações do ambiente escolar.

No mesmo sentido, Costa (2019) considera que a Educação Financeira é um mecanismo de sobrevivência econômica, devendo ser considerado como integrante da educação escolar e iniciado, na escola, desde os anos iniciais, consolidando no ensino médio, objetivando dar oportunidade para usar as finanças de forma racional e mais independente.

A Educação Financeira pode auxiliar as pessoas a gerir suas dívidas, economizar, planejar gastos e investir, tendo a escola como um apoio importante, onde existe a possibilidade de contornar essa realidade, por meio de projetos transversais, palestras, aplicações em situações práticas e conscientização do uso do dinheiro.

A BNCC estabelece, que a partir de dezembro de 2019, torna-se obrigatório o ensino de Educação Financeira nas escolas. No ensino fundamental, a Educação Financeira é tratado na unidade temática Números, onde:

Podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro (BRASIL, 2018, p.269).

A necessidade de projetos na escola não vem simplesmente da necessidade de obter melhores notas no PISA, mas sim para possibilitar a melhora na qualidade de vida socioeconômica das pessoas, onde a melhora na avaliação internacional seja consequência e reflexo da melhoria do comportamento financeiro dos alunos e conseqüentemente das pessoas que estão a sua volta.

Conforme a BNCC (2018), a Educação Financeira deve tratar de temas amplos e que possam dar uma formação no qual o aluno seja consciente das diversas vertentes relacionados a finanças, sejam elas culturais, sociais, psicológicas, políticas e que impactam direta ou indiretamente a relação com o dinheiro. Dessa forma, será possível formar cidadãos aptos a planejar conscientemente seus gastos, investimentos e projeção do uso do dinheiro para adquirir bens e serviços que lhe traga conforto e melhore sua qualidade de vida.

Assim, apesar da obrigatoriedade para o ensino fundamental a partir de dezembro de 2019, o tema também deve ser tratado com a mesma importância e afincado no ensino médio. Muitos alunos passam pelo ensino médio sem ter uma formação adequada de Educação Financeira e pela BNCC (2018), essa deveria ser de consolidação.

Bruhn *et al.* (2013, p.25), afirma que sua pesquisa contribui, “demonstrando que um programa de Educação Financeira direcionado a jovens do ensino médio pode melhorar o conhecimento e o comportamento, bem como influenciar atitudes e preferências financeiras”.

Corroborando a importância da educação financeira o ensino médio, Costa (2019), coloca que as escolas devem incorporar a educação para o consumo e a Educação Financeira em suas propostas pedagógicas, de forma transversal e integradoras, pois são temas que afeta a vida humana em diversos sentidos.

A matemática tem muito a contribuir para a formação em Educação Financeira, fornecendo subsídios para auxiliar na organização e aplicações financeiras. Mas é preciso que os professores façam o planejamento de aulas e projetos de forma autônoma dos livros didáticos. Pois, de forma geral, o livro didático aborda temas relacionados a matemática financeira, mas não desenvolve a temática Educação Financeira (COSTA, 2019).

Em um primeiro momento, pode-se pensar que ensinar matemática financeira, seria equivalente a ensinar Educação Financeira. Porém, essa são áreas distintas, mas com pontos importantes em comum e que complementam-se, conforme coloca Veiga (2019, p.31):

Ainda, percebe-se que a Matemática Financeira pode proporcionar ferramentas de auxílio para determinados julgamentos financeiros utilizados durante os estudos da Educação Financeira. Dessa forma, a temática Educação Financeira, pode auxiliar na formação de um cidadão crítico que pode utilizar seus recursos financeiros de maneira consciente, por meio dos conhecimentos matemáticos (VEIGA, 2019, p.31).

A matemática financeira não é o único conteúdo da matemática que possibilita subsidiar conhecimentos para o letramento financeiro, muito menos sozinha, pode proporcionar uma boa Educação Financeira.

Outros tópicos da matemática podem auxiliar na tomada de decisão na hora de poupar, investir ou consumir. Além disso, o aluno deve mudar sua postura comportamental e psicológica em relação às finanças, logo uma formação mais abrangente vai além do conhecimento específico somente da matemática financeira.

De acordo com um estudo de Silva (2018, p.5), “as habilidades matemáticas podem afetar o desenvolvimento da Educação Financeira”. Assim, conhecimentos de lógica, probabilidade, funções, estatística e proporções, são importantes para o desenvolvimento do letramento financeiro.

A BNCC (2018), alinha-se com as recomendações apontadas pela OCDE (2018), elencando um conjunto de considerações e recomendações aos países membros, convidando também os não membros, a seguirem os princípios e boas práticas de Educação Financeira.

Em relação aos programas de Educação Financeira a OCDE (2005), coloca que os sistemas devem motivar a promoção do treinamento dos professores e da oferta de materiais e ferramentas para a formação dos docentes, pois para que tenha-se uma formação adequada em Educação Financeira, os professores também devem ser bem treinados.

Ou seja, não basta apenas os países criarem diretrizes em relação ao ensino da Educação Financeira, mas deve-se a formação e treinamento dos professores, incentivando os mesmos a tomarem iniciativas de projetos e ações para serem executados nas escolas e em parceria com outras instituições.

No documento intitulado *Smarter Financial Education* da OCDE (2019, p.5), no tópico relacionado aos benefícios de ideias comportamentais para Educação Financeira, afirma que “certos comportamentos financeiros podem ser influenciado por vieses comportamentais que podem ser a causa de ações que parecem inconsistentes ou irracional, mas são, de fato, previsíveis em grandes porções da população”.

Nesse sentido, OCDE (2019), recomenda algumas abordagens a serem tratadas para criar insights comportamentais relacionados a Educação Financeira, são elas:

- Tornar o fornecimento de conteúdo educacional financeiro focado, direto e simples de entender;
- Tornar os programas de Educação Financeira o mais personalizado possível;
- Vá além da informação - crie programas que ajudem as pessoas a tomar ações;
- Considere usar canais digitais para facilitar a aplicação de intuições comportamentais;
- Considere o uso de estruturas comportamentais existentes, para projetar programas comportamentais.

A Educação Financeira possibilita não só fazer com que as pessoas possam se adequar, comportamentalmente, a forma como gastam o dinheiro, mas também como investem. Nesse sentido, por mais que em um dado momento, o indivíduo não esteja apto a investir, é importante que se conheça as diversas formas de investimento, pois em algum momento, ele irá buscar formas de aumentar a rentabilidade do capital poupado.

Uma opção para dar maior rentabilidade ao dinheiro, é o investimento no mercado de ações, porém com maiores riscos, exigindo uma maior dedicação, estudo e planejamento por parte da pessoa que queria investir nesse produto financeiro.

Em uma pesquisa realizada pelo Banco Central (2017), aplicada em 2015 com 2002 pessoas em todo território nacional, em relação aos produtos e serviços financeiros, afirmando que um dos itens mais utilizados pelos entrevistados são: O cartão de crédito, carnês de lojas e conta poupança com, respectivamente, 45%, 23,4% e 20,3%. Entre todos

os 16 itens pesquisados, o serviço financeiro menos utilizado são as ações, com representatividade de apenas 0,4%. Porém na mesma pesquisa afirma-se que 50,4% das pessoas já ouviram falar nesse produto financeiro.

Em 2015, haviam 557.109 investidores pessoa física na Bolsa de Valores brasileira e no final de dezembro de 2019, a B3 registrou 1.678.754 de pessoas físicas. Esse número envolve a posição dos agentes de custódia e inclui também investidores que possuem ações ou outros ativos passíveis de negociação na BMF&BOVESPA (B3, 2020). Podemos perceber um aumento de, aproximadamente, 201,3% em números de investidores pessoa física que negociam algum ativo na Bolsa de Valores brasileira.

O número de pessoas que investiram em ações ao final de dezembro de 2019 aumentou significativamente em relação aos anos anteriores. Porém, o investimento em ações é considerado de alto risco, devido às oscilações percentuais positivas e negativas em relação ao tempo e por isso, é necessário ter conhecimento do mercado financeiro e do mercado de ações, conhecendo as técnicas para operar com ações.

Assim, pode-se relacionar a Educação Financeira e investimentos na Bolsa de Valores, aplicando a matemática na Análise Técnica de ações, pois ao passo que as pessoas precisam aprender a gastar, poupar e planejar, é necessário também que saibam investir. A matemática, nesse contexto, é útil para a tomada de importantes decisões.

O letramento financeiro é importante também por parte dos docentes, onde os mesmos, devem além de dominar conceitos de matemática financeira, devem também ser letrados financeiramente. As pesquisas apontam que falta letramento financeiro por parte dos educadores (VEIGA, 2019). Essa colocação, fortalece a importância de programas para o incentivo a formação docente em Educação Financeira.

Como a BNCC (2018) determina a obrigatoriedade do ensino de Educação Financeira, sendo tratada de forma transversal, nas disciplinas do ensino fundamental e do ensino médio, estende-se o domínio do letramento financeiro para os demais docentes. Isso não inviabiliza sua aplicação, mas na falta da formação por parte dos educadores, é importante realizar parcerias com órgãos e profissionais que tenham capacitação para ensinar a Educação Financeira.

# Capítulo 3

## Mercado Financeiro e de Ações

Este capítulo tem por base o livro Mercado Financeiro de Alexandre Assaf Neto (2003) e visou abordar sobre as principais características do mercado financeiro e o mercado de ações, para contextualizar, a utilização da Análise Técnica.

As ações constituem na menor parcela do capital social de uma sociedade anônima. Entende-se por sociedade anônima, uma empresa com fins lucrativos e que possui seu capital dividido em ações. As ações são valores caracteristicamente negociáveis e distribuídos aos subscritores (acionistas) de acordo com a participação monetária efetivada.

As ações podem ser classificadas, de acordo com a natureza dos direitos e vantagens que conferem a seus titulares, em três espécies: Ordinárias, preferenciais e de fruição ou gozo.

As ações ordinárias apresentam como principal característica o direito de voto, podendo, assim, influir nas diversas decisões de uma empresa. Os acionistas, detentores de ações ordinárias, deliberam sobre os destinos da sociedade, analisam e votam suas contas patrimoniais, decidem sobre a destinação dos resultados, elegem a diretoria da sociedade e podem promover alterações nos estatutos, além de deliberar sobre outros assuntos de interesse da companhia.

As ações preferenciais possuem o diferencial de terem a prioridade no recebimento de dividendos, devendo ocorrer antes dos acionistas ordinários, entre outras vantagens e preferências acumuladas.

Em razão desses privilégios na distribuição de dividendos, as ações preferenciais não possuem o direito a voto, não participando em consequência, das deliberações da empresa.

As vantagens dos investidores na aquisição de ações podem ser definidas em quatro itens:

Dividendos: É uma parte dos resultados da empresa, determinada em cada exercício social e distribuída aos acionistas sob forma de dinheiro. Todo acionista tem o direito de

receber, no mínimo, o dividendo obrigatório fixado em lei.

**Bonificação:** É a emissão e distribuição gratuita aos acionistas em quantidade proporcional à participação de capital, de novas ações emitidas em função do aumento de capital efetuado por meio de incorporação de reservas.

**Valorização:** Os subscritores de capital podem ainda beneficiar-se das valorizações de suas ações no mercado, ganho esse que dependerá do preço de compra, da quantidade de ações emitidas, da conjuntura de mercado e do desempenho econômico-financeiro da empresa.

**Direito de Subscrição:** Como os atuais acionistas gozam do direito de ser previamente consultados em todo aumento de capital, esse direito pode também constituir-se em outro tipo de remuneração aos investidores. Isso ocorre quando o preço fixado pelo mercado de determinada ação se apresenta valorizado em relação ao preço de lançamento

### 3.1 Mercado de Ações a Vista e a Bolsa de Valores

Baseado em Neto (2003), temos que a promoção da riqueza nacional, por meio da participação dos agentes econômicos, é uma das funções básicas do mercado de capitais. As ações são os principais ativos representativos do capital das empresas.

Quando negociadas na Bolsa de Valores, ao vender ou comprar ações, o tempo de liquidação (pagamento) e de no máximo 2 (dois) dias, é dessa forma que o mercado à vista é geralmente entendido.

No mercado à vista, costuma-se operar com dois lotes de negociação de ações: Lote-padrão e lote fracionado. O lote-padrão estabelece uma quantidade mínima de títulos para negociação no mercado, no mercado brasileiro esse lote-padrão equivale a 100 ações. O mercado fracionário, por outro lado, transaciona volumes inferiores ao padrão, ou frações de lote, por exemplo, compra ou vende até 99 ações, ou qualquer valor que esteja abaixo do lote-padrão, que no caso seriam 100 ações.

Em relação às sociedades anônimas emitentes de ações, temos os tipos: Abertas ou Fechadas. Uma companhia é aberta quando tem suas ações distribuídas entre um número mínimo de acionistas, podendo ser negociada em Bolsa de Valores. As companhias de capital fechado, por seu lado, são tipicamente empresas familiares, com circulação de ações restrita a um grupo identificado de investidores.

O funcionamento do mercado secundário ocorre principalmente nas bolsas de valores, as quais viabilizam aos investidores a oportunidade de realizarem novos negócios com títulos anteriormente emitidos, como por exemplo, por meio da obtenção das ações emitidas pelas sociedades anônimas.

As bolsas de valores tem por objetivo, a preservação dos valores éticos nas negoci-

ações realizadas em seu âmbito, e a divulgação rápida e eficiente dos resultados de todas as transações realizadas.

O pregão é o local onde são realizadas as transações de compra e venda de ações registradas em Bolsa de Valores. Os investidores emitem uma ordem de compra ou venda de determinada ação a uma sociedade corretora membro da Bolsa de Valores. A corretora, em atendimento ao cliente, compromete-se a executar a ordem recebida no pregão da bolsa, as corretoras funcionam como intermediadoras no processo de compra e vendas dos produtos financeiros, nesse caso, das ações.

Existem três modalidades para se operar no mercado: À vista, a termo e opções. A Bolsa de Valores de São Paulo oferece negócios nestes três mercados.

Megalhe Filho e Eshikawa (2003, p.238-239) define o que são opções: “No mercado de opções não são negociadas ações, mas direito sobre elas. Portanto, é o direito de uma parte comprar ou vender a outra parte, até uma determinada data, uma quantidade de ações a um preço preestabelecido”.

Conforme Megalhe Filho e Eshikawa (2003), no mercado a termo é feito a compra ou a venda, no preço de mercado, das ações a um preço fixado para ocorrer liquidação em data futura. Nesse mercado, tem-se a adição de juros, que irá depender do prazo a ser liquidada a operação.

Uma Margem de garantia é necessária para operar-se nesse mercado, ou seja, tem-se a necessidade de depositar valores que possam cobrir eventuais prejuízos obtidos nesse tipo de operação. A B3 pode, se assim desejar, reforçar a margem para garantir os contratos negociados, em função das oscilações do mercado à vista. Todas as margens de garantia depositadas em dinheiro são remuneradas, e seu rendimento repassado ao investidor.

Um exemplo de negociação no mercado à vista é: Compra-se um lote (100 ações) da Petrobras pelo preço de 30,00 reais. No outro dia vende-se esse mesmo lote ao preço negociado de 32,00 reais. Nessa operação, estamos na prática, nos referindo ao mercado à vista, cujo valor, será depositado após dois dias da data da venda das ações.

### 3.2 Brasil, Bolsa e Balcão - B3

Segundo a CVM (2019), em relação ao momento histórico em relação a origem da B3, afirma que o surgimento da B3 ocorreu após a fusão entre a *BMF&BOVESPA* e da CETIP, ocorrendo em maio de 2017.

A B3 é uma das maiores bolsas do mundo. Sua principal função é proporcionar um ambiente transparente e líquido, adequado à realização de negócios com títulos e valores mobiliários. Somente através das corretoras, os investidores têm acesso aos sistemas de negociação para efetuarem suas transações de compra e venda desses valores.

Como principal instituição brasileira de intermediação para operações do mercado de capitais, a companhia desenvolve, implanta e provê sistemas para a negociação de ações, derivativos de ações, títulos de renda fixa, títulos públicos federais, derivativos, financeiros, moedas à vista e commodities agropecuárias.

A CVM (2019, p.242) ainda acrescenta um outro tipo de negociação a prazo que podem ser negociadas na B3, é o chamado mercado futuro, no qual tem-se que:

Assim como no mercado a termo, no mercado futuro são negociados contratos para liquidação em data futura, a preço fixado. O preço é função do valor do ativo no mercado à vista e da taxa de juros esperada para o período. Porém, os dois mercados diferem em aspectos operacionais, especialmente no que diz respeito à garantia e à liquidação.

Os produtos relacionados ao mercado futuro também podem ser analisados por meio do estudo de padrões gráficos, sendo objetos de estudo da Análise Técnica de ações, pois a variação de preço desses produtos oscilam em relação ao tempo, com sua representação gráfica semelhante a que é estudado com as ações.

A CVM (2019, p.267), afirma que: A “intermediação de operações com valores mobiliários em mercados regulamentados é privativa de instituições habilitadas a atuar como integrantes do sistema de distribuição”. As operações financeiras devem ser realizadas por “intermédio de instituições habilitadas, como as corretoras ou distribuidoras de títulos e valores mobiliários” (CVM, 2019).

Os sistemas utilizado pelas corretoras são: O Home Broker e a Mesa de Operações, sendo o primeiro o meio mais popular, pois pode ser acessado do computador ou do próprio celular, sendo definida pela CVM (2019, p.267) como: “Uma ferramenta de acesso aos mercados da bolsa, oferecida por quase todas as corretoras, por meio da qual os investidores podem negociar diretamente pela internet, enviando ordens de compra e venda”.

Em relação a Mesa de Operações, a CVM (2019) afirma que: As instituições financeira, colocam a disposição do cliente, profissionais capacitados para disponibilizar informações sobre produtos financeiros, recomendações, risco de operações e orientações gerais. Executando ordens solicitadas pelos clientes, no qual podem ser realizadas por telefone.

A CVM (2019), também define os tipos de ordens que são executadas ao comprar ou vender uma ação, sendo elas: A ordem a mercado, ordem limitada e ordem on stop.

- Ordem a mercado, é um tipo de ordem que deve ser executada quando é recebida, sendo negociada pelo melhor preço disponível;
- Ordem limitada, é a modalidade mais utilizada e deve ser executada somente a preço igual ou melhor daquela especificada pelo operador;

- Ordem on stop ou, simplesmente, “ordem stop”, é executada a partir do preço definido pelo cliente.

# Capítulo 4

## Análise Técnica de Ações

Ao investir no mercado à vista de ações, o operador ou investidor deverá realizar um estudo das melhores oportunidades no momento, a fim de projetar possíveis ganhos ou perdas. Esse é um dos pontos que diferencia a renda variável da renda fixa, ou seja, ao aplicar na renda fixa, os rendimentos são previstos ao iniciar o investimento. Em relação à renda variável, existe a necessidade, do estudo aprofundado sobre os motivos dos possíveis investimentos a serem realizados, não sendo possível afirmar qual a rentabilidade futura do investimento.

Em renda variável, dependendo da filosofia e do estilo de negociação, vários fatores devem ser analisados e estudados para definir o momento de comprar ou vender, tais como: A economia do país, o setor no qual a empresa está inserida, projeções do PIB, das taxas de juros, os indicadores matemáticos e estatísticos do preço das ações e o gerenciamento do risco das operações. As filosofias de investimentos no mercado de ações são: A análise fundamentalista e a Análise Técnica.

Conforme descreve Lemos (2018, p.4), a análise fundamentalista, “utiliza prioritariamente, modelos matemáticos que usam uma variedade de fatores, como: taxa de juros, balanços contábeis, risco-país, projeção macro e microeconômicas para determinar fluxo de caixa e trazê-lo ao valor presente a fim de projetar o preço-alvo de determinada ação”. A análise fundamentalista cria, portanto, o chamado gap de realidade entre “o que deveria ser” e o “o que deveria estar”. Essa avaliação dos preços futuros pode, inclusive, também estar correta (LEMOS, 2018, p.5).

Uma filosofia de investimentos associada à análise fundamentalista é a chamada Buy and Hold (Comprar e manter) e que envolve a teoria do mercado eficiente que afirma, respectivamente, que o preço das ações sobem conforme a economia geral e que o preço já incorpora todas as informações disponíveis no mercado (ROCKEFELLER, 2016).

Em relação aos Mercados Eficientes, Selan (2015, p.119) coloca “que toda a informação do passado reflete no preço de um produto financeiro hoje, principalmente os preços

das ações“ (SELAN, 2015, p.119). Em relação à Teoria da Eficiência perfeita do Mercado, Lemos (2019, p.14) afirma que “a ação será sempre transacionada ao valor justo, fazendo que seja impossível para os investidores comprar ações desvalorizadas ou vender ações sobrevalorizadas para conseguir lucros significativos”.

Em contraponto a Análise Fundamentalista, Rockefeller (2016), define a Análise Técnica como sendo o estudo dos preços, associado ao volume, buscando identificar o sentimento do mercado, para analisar as possíveis movimentações dos preços dos ativos.

Da mesma forma que a teoria dos mercados eficientes é a base teórica para a análise fundamentalista, a teoria das finanças comportamentais é a base teórica para a Análise Técnica. Na Teoria das finanças comportamentais as decisões automáticas e movidas pela emoção prejudicam a análise e os modelos econômicos que explicam o funcionamento dos mercados (LEMOS, 2019).

Debastiani (2008), divide dois grupos de métodos para a tomada de decisão em relação ao preço: A Análise Técnica empírica e a Análise Técnica estatística e as diferencia da Seguinte forma: A primeira leva em consideração observações de padrões repetidos nos gráficos e com isso são desenvolvidos método para entender o comportamento desses padrões. Já a segunda, é baseado em indicadores matemáticos e estatísticos que são usados para orientar o momento para tomar decisões em relação as operações do mercado.

E complementa que, a diferenciação entre as duas está na utilização dos gráficos: Enquanto a Análise Técnica Empírica utiliza padrões relacionados ao que se encontra observando somente o gráfico de preços e volume. A Análise Técnica Estatística incrementa outros tipos de gráficos para fundamentar a análise do comportamento dos preços (DEBASTIANI, 2008).

Para um melhor entendimento, vamos abordar a definição de Análise Técnica do ponto de vista de três autores diferentes.

Para Rockefeller (2016, p.8), a Análise Técnica estuda como os preços irão se comportar, extraindo e explorando informações para obter as melhores negociações do mercado.

O estudo da Análise Técnica, é um processo contínuo, adaptativo e envolve muito controle emocional. E apesar de todas as técnicas e análises, “a resposta, e a velocidade da resposta que o analista/investidor dará ao mercado é o que importa no final das contas” (LEMOS, 2008, p.6).

E complementando as definições e os apontamentos anteriores, Chen (2010, p.2), em seu livro *Essentials of Technical Analysis for Financial market*, afirma que a Análise Técnica:

É o estudo de como as ações dos preços passado e presente em um determinado mercado financeiro pode ajudar a determinar sua direção futura. Entretanto, ao mesmo tempo, a Análise Técnica não deve ser considerada uma bola de

crystal. Em vez disso, as habilidades de um analista técnico são usadas principalmente para ajudar a determinar as reações de maior probabilidade ao passado e movimento atual de preços, bem como provável movimento futuro de preços (CHEN, 2010, p.2, tradução nossa).

A definição dada por Chen (2010) ajuda a entender que a Análise Técnica não se trata de utilizar gráficos, indicadores e padrões como se fosse um jogo de adivinhação, mas na verdade, utilizar esses elementos para projetar o comportamento dos preços, em razão da forma como eles já ocorreram ou podem acontecer. Lemos (2018) coloca a importância de saber sair de uma operação quando ela atinge seu alvo de entrada ou da saída dos preços, seja ele ganhador ou perdedor.

O objetivo da pesquisa não é ensinar essas técnicas, mas para o leitor é importante ter em mente essas definições, caso tenha o desejo de operar no mercado financeiro, sejam eles em ações, índice futuro, câmbio, forex, bitcoin, commodities, entre outros ativos que se utilizem da Análise Técnica.

Diversos gráficos são utilizados para a Análise Técnica, entre eles podemos citar o gráfico de linha, gráficos de barras e o gráfico de candlestick. Este último será o gráfico adotado para investigar as aplicações do Número de Ouro e da Sequência de Fibonacci nos padrões gráficos de ações e será abordado nas próximas seções.

### 4.1 Teoria de Dow

O estudo a seguir é uma breve abordagem da Teoria de Dow abordada por Lemos (2018), sendo importante para entendermos o porque de ferramentas relacionadas a Sequência de Fibonacci e ao Número de Ouro são importantes para análise gráfica.

Nesse sentido, Lemos (2018, p.23) afirma que a Teoria de Dow:

É a base de todo o estudo da Análise Técnica. Essa teoria não está preocupada com nada além das variações de preços. Por meio da utilização de médias em gráficos de preços do mercado norte-americano, Charles Dow encontrou uma forma bastante eficiente para seguir as oscilações de preços e interpretar os movimentos do mercado (LEMOS, 2018, p.23).

A Teoria de Dow se preocupa com a variação do preço ao longo do tempo e do seu respectivo volume de negociação. Lemos (2018), cita os nove princípios da Teoria de Dow que, sendo que:

1. O mercado tem três tendências;
2. O volume deve acompanhar a tendência;

3. Tendências primárias de alta têm três fases;
4. Tendências primárias de baixa têm três fases;
5. As médias descontam tudo;
6. As duas médias devem-se confirmar;
7. O mercado pode-se desenvolver em linha;
8. As médias devem ser calculadas com preços de fechamento;
9. A tendência está valendo até que haja sinais de reversão.

## 4.2 Gráficos de Candlesticks

Nessa seção, abordaremos o principal gráfico utilizado para Análise Técnica de ações, que também foi usado para analisar as aplicações do Número de Ouro e da Sequência de Fibonacci nos padrões investigados.

O gráfico de Candlesticks, que significa candelabro, pode ser chamado simplesmente de gráfico de vela. O gráfico é assim conhecido por ser representado por uma formação que lembra uma vela, possui elementos bastante representativos para o comportamento dos preços de um determinado ativo ao longo de um intervalo de tempo.

Em resumo, Chen (2010, p. 37), aborda um breve aparato histórico sobre a influência dos Candlesticks, colocando a sua sobreposição em relação ao gráfico de barras.

Candlesticks, como ferramenta de análise financeira, foram introduzidos relativamente recentemente ao mundo ocidental, desde suas origens nos mercados históricos de comércio de arroz no Japão. Steve Nison, um destacado norte-americano analista técnico, foi responsável por levar essa antiga e inovadora técnica japonesa de leitura de cartas aos investidores ocidentais (CHEN, 2010, p. 37, tradução nossa).

O gráfico de Candlesticks é representado na Figura 4.1, sendo um dos gráficos mais populares e utilizados pelos operadores do mercado financeiro e analistas técnicos.

Observe primeiramente, que existe um gráfico com corpo branco e outro com corpo negro. Em relação ao gráfico de corpo branco, o mesmo possui o preço de fechamento, maior que o preço de abertura. A extremidade maior e a extremidade menor representam, respectivamente, o maior e o menor preço do ativo em um determinado período.

Por exemplo, no dia 11 de Fevereiro de 2020, as ações ordinárias do Banco do Brasil (BBAS3), tiveram o preço de abertura no valor de 49,92 reais e o preço de fechamento no valor de 51,65 reais, logo o seu corpo real tem uma cor branca ou verde.



Figura 4.1: Gráfico de Candlesticks. Fonte: Lemos (2018, p.47).

Abaixo do preço de abertura, temos a chamada sombra inferior, ao final dessa sombra temos a representação do preço mínimo desse ativo. Acima do preço de fechamento, temos a sombra superior e ao final dela temos a representação do valor máximo que essa ação chegou a alcançar.

No exemplo listado das ações do Branco do Brasil na data de 11 de Fevereiro, o valor mínimo da ação foi de R\$ 49,68 e o valor máximo foi de R\$ 51,32.

A análise do candlesticks de corpo real negro é inteiramente análogo, diferenciando que ele possui essa cor, quando o preço de abertura é maior do que o preço de fechamento, nesse caso houve uma queda no preço. Esse corpo real, também pode ser representado pela cor vermelha.

Por exemplo, no dia 17 de dezembro de 2019, as ações ordinárias do Banco do Brasil tiveram, respectivamente, os preços de abertura, fechamento, máximo e mínimo com os seguintes valores: R\$ 44,38, R\$ 43,96, R\$ 44,74 e R\$ 43,64. Isso significa dizer que ocorreu uma variação negativa de R\$ 0,42 por ação. E esses valores serão representados por um gráfico de corpo real negro ou vermelho.

Para exemplificar como são representados essas velas em conjunto, a Figura 4.2 mostra um gráfico diário das ações preferenciais da Companhia Brasileira de Distribuição, mais conhecida como Pão de Açúcar, no período de 02 de Outubro de 2019 até o dia 11 de Fevereiro de 2020.

Na Figura 4.2, ocorreu uma variação de preços de, aproximadamente, R\$ 77,50 até uma máxima que ocorreu, aproximadamente, em torno de R\$ 92,50. Note que o corpo real apresentam diversos tamanhos, como também suas respectivas sombras.

Uma delas das informações que podem ser observadas nos gráficos da formação dos preços, é a formação de ondas, no qual os preços variam entre altas e baixas nos preços. Esse comportamento foi alvo de estudos e investigações por parte por analistas gráficos e



Figura 4.2: Ações preferenciais PCAR4. Fonte: <https://tv.tradezone.com.br/>.

serve para observar as tendências dos preços no curto, médio e longo prazo.

### 4.3 Ondas de Elliott

As Ondas de Elliott foi uma teoria desenvolvida por Ralph Nelson Elliott (1871 - 1984), onde foi observado que a variação nos preços podiam ser comparados as ondas do mar. A Teoria das Ondas de Elliott possui uma forte influência da Teoria de Dow. A grande contribuição, foram as observações dos ciclos dos preços dos ativos.

Em relação à Elliott, Chen (2010, p.18), coloca que:

Muitas figuras importantes da indústria após Charles Dow contribuíram muito para o campo da Análise Técnica moderna. Um desses principais inovadores é o criador de um dos modelos mais conhecidos e amplamente adotados no campo da Análise Técnica, Ondas de Elliott. O nome dele era Ralph Nelson Elliott (CHEN, 2010, p.18, tradução nossa).

A Figura [4.3](#), representa a formação das ondas de impulso e corretivas no ciclo de um a cinco e as ondas corretivas ABC que ocorrem após a quinta onda.

Na Teoria das Ondas de Elliott, as cotações do mercado seguem uma quantidade determinada de movimentos em ondas. Assim, existem as ondas de impulso e as ondas de correção. As ondas de impulso ocorrem nas ondas um, três e cinco e as ondas corretivas ocorrem nas ondas dois e quatro. Até a onda 5, ocorre um avanço nos preços dos ativos, após essa quinta onda esse avanço está terminado. Ao término da quinta onda, da-se-á

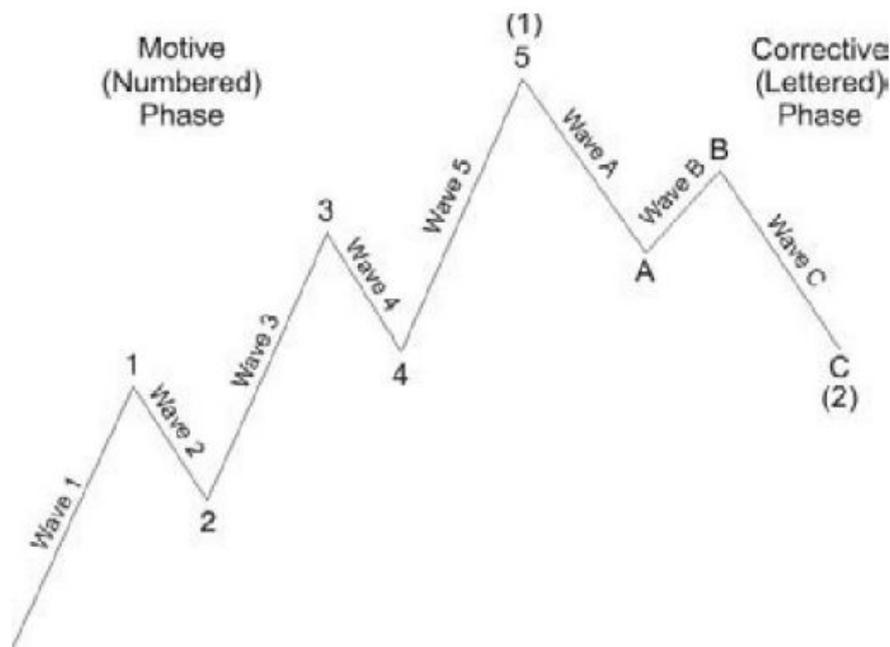


Figura 4.3: Ondas de Elliot. Fonte: Robert Prechter (2005, p.23).

uma correção subdividida em ABC. A onda ABC, é uma subdivisão de três ondas menores, sendo duas na direção da correção e uma na direção oposta a correção (LEMOS, 2018).

Na Figura 4.3, temos a descrição das ondas de impulso, até atingir a quinta onda. As ondas de correção ocorrem a partir da quinta onda, causando o movimento ABC.

Porém, nem sempre é possível identificar facilmente a ocorrência das ondas como formadas na Figura 4.3, podendo ocorrer um conjunto de ondas menores dentro de cada uma das ondas observadas, formando o que conhecemos como fractais. A Figura 4.4 representa a formação da ocorrências de Ondas de Elliott em cada nível de onda de impulso e de correção.

Na Figura 4.4, podemos observar 34 pequenas ondas totais, incluindo as ondas de impulso e de correção. São oito ondas principais de impulso e correção, que corresponderiam, a formação das ondas da Figura 4.3 e duas ondas principais a primeira de impulso e a segunda de correção. Na Figura 4.4, a onda de impulso termina em ① e a onda de correção termina em ②.

A Teoria das Ondas de Elliott foi uma das grandes contribuições para o estudo do comportamento dos preços de ativos. Lemos (2018, p.143), coloca que a Teoria de Elliott está “em conformidade com os princípios e as relações próprias da Sequência de Fibonacci”.

Estudar a Sequência de Fibonacci, suas propriedades e seus níveis é de fundamental importância para o analista técnico, pois essa ferramenta é utilizada como estratégica para determinar possíveis alvos de preço, pontos de entrada ou saída de uma operação.

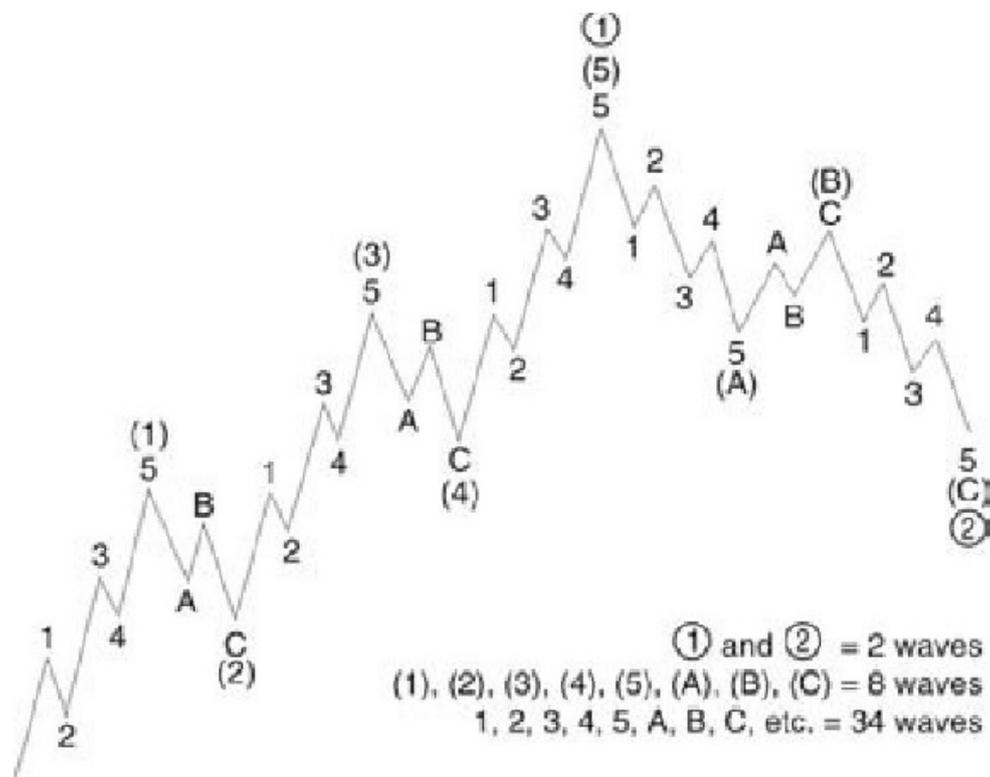


Figura 4.4: Formação de Pequenas Ondas de Elliot em conjunto com a onda principal de Elliot. Fonte: Prechter (2005, p.24).

Nesse sentido, a retração de Fibonacci é utilizada para prever os possíveis pontos que acontecerão uma onda corretiva, conforme preconiza Elliot. Sua importância é dada por Gaucan (2011, p.3), afirmando que “a retração de Fibonacci é uma ferramenta muito popular usada por muitos traders técnicos para ajudar a identificar locais estratégicos para transações, preços-alvo ou stop loss”. Após movimentação dos preços nos níveis de Fibonacci, é provável que essa região sejam próximos pontos de suportes ou resistências (GAUCAN, 2011).

Os níveis de retração dentro da Teoria de Elliot estão relacionados com a Sequência de Fibonacci e cada nível de retração de Fibonacci possuem características ou regras, que descrevem o seu nível de retração. Lemos (2018, p.164) descreve como ocorrem o comportamento das ondas de Elliott em relação aos níveis de Fibonacci em cada parte das ondas.

Uma Onda 1 ou A for completada em qualquer tempo gráfico, você pode projetar retrações de 0,382; 0,50 e 0,618 para objetivos da Onda 2 ou B. Na maior parte do tempo, a Onda 3 é a mais forte e é, aproximadamente, 1,618 vezes a Onda 1. A Onda 4, normalmente, mostra retrações que são menores do que as da Onda 2 - 0,236 ou 0,382. Se a Onda 3 é a maior, a relação entre as ondas 5 e 3 é, frequentemente, de 0,618. O comprimento da Onda 5 também é igual ao da Onda 1, na maioria das vezes. As mesmas relações podem ser encontradas

entre as Ondas A e C. Normalmente, a Onda C é igual à Onda A ou 1,618 maior.

Assim, conforme descreve Lemos (2018), os principais níveis de Fibonacci são os valores de 2,618, 1,618, 1,0, 0,618, 0,382 e 0,236, assim a onda 2 pode ter uma retração de 0,618, 0,382 e ocasionalmente o valor de 0,5 que também pode ser obtido por meio das relações entre os números de Fibonacci. Mas a sua principal influencia da retração de 0,5 é motivada por outra teoria, a chamada Teoria de Grann.

Devido à popularidade da aplicação da Sequência de Fibonacci na Análise Técnica, muitos operadores a utilizam mesmo sem levar em consideração a formação das Ondas de Elliott. Utilizando os níveis de 38% e 62% (mas também incluindo 23.6%, 50% e 100%), buscam expansões e retrações da movimentação dos preços (ROCKEFELLER, 2016).

Os valores 2,618 e 1,618 correspondem as chamadas extensões de Fibonacci, que é onde espera-se atingir um determinado nível de preço por meio do impulso de uma onda.

# Capítulo 5

## Sequência de Fibonacci e Recorrências Lineares

Um dos livros mais importantes de Leonardo Pisano é o livro Liber Abaci, no qual é incorporada a linguagem e o sistema posicional. Sendo um dos primeiros autores a introduzir os números indo-arábicos no ocidente.

No livro Liber Abaci, é descrito o processo da realização de vários tipos de cálculo no sistema indo-arábico, como também propõe e resolve diversos problemas, sendo um dos mais famosos, o problema da reprodução dos coelhos. Temos então, a origem da conhecida Sequência de Fibonacci, ao qual recebeu essa denominação no século XIX, pelo matemático francês Edoardo Lucas.

No livro, traduzido para o inglês por Laurence Singler (2002, p.404), o problema proposto, tem o título: *Quantos pares de coelhos são criados por um par em um ano?* e a resolução é descrito da seguinte forma:

**Exemplo 5.1.** Um certo homem tinha um par de coelhos juntos em um local fechado, e deseja-se saber quantos são criados a partir do par em um ano, quando é da natureza deles, em um único mês, gerar outro par, e no segundo mês, aqueles que nasceram também.

Como o par acima mencionado no primeiro mês geraram um novo par você dobrará, haverá dois pares no mês. Um desses, a saber, o primeiro, também tem peso no segundo mês e, portanto, no segundo mês existem 3 pares, destes, em um mês, dois estão grávidas e no terceiro mês nascem 2 pares de coelhos, e, portanto, existem 5 pares no mês. Neste mês 3 pares estão grávidas e no quarto mês existem 8 pares, dos quais 5 pares têm outros 5 pares, estes são adicionados aos 8 pares, formando 13 pares no quinto mês. Esses 5 pares que nasceram neste mês não acasalam neste mês, mas outros 8 pares estão grávidos e, portanto, existem no sexto mês 21 pares, a estes são adicionados os 13 pares que nascem no sétimo mês, haverá 34 pares neste mês. A isso são adicionados os 21 pares que nascem no oitavo mês, haverá 55 pares neste mês, a estes são adicionados os 34 pares que nascem no nono mês, haverá 89 pares neste mês.

A estes são adicionados novamente os 55 pares que nascem no décimo mês, haverá 144 pares neste mês. A estes são adicionados novamente os 89 pares que nascem no décimo primeiro mês, haverá 233 pares neste mês. A estes ainda são adicionados os 144 pares que nascem no último mês, haverá 377 pares, e esses muitos pares são produzidos a partir do par acima mencionado no local até o final do ano. Você pode realmente ver na margem como operamos, ou seja, adicionamos o primeiro número ao segundo, ou seja, 1 a 2, e o segundo ao terceiro, e o terceiro ao quarto, e o quarto ao quinto, e assim, um após o outro, até adicionarmos o décimo ao décimo primeiro, ou seja, o 144 ao 233, e tivemos a soma escrita de coelhos, ou seja, 377, e assim você pode encontra-lo por um número interminável de meses (SINGLER, 2002, p.404, tradução nossa).

Na tradução do livro Liber Abaci, Leonardo Pisano considera os coelhos iniciais já adultos e conforme a tradução tem-se a Sequência de Fibonacci do primeiro ao décimo segundo como sendo:

$$(2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377).$$

Temos que cada termo da Sequência de Fibonacci é obtido somando dois termos imediatamente anteriores. Porém, a sequência que é mais conhecida e relatada em diversos trabalhos, como por exemplo: Bruno Antonili Silva (2017), Maurício Zahn (2011) e Abramo Hefez (2016) considera que inicialmente os coelhos são filhotes e obedecendo a condição de que os filhotes somente se reproduzem após o segundo mês, os números da Sequência de Fibonacci são:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots).$$

Apresentamos as seguintes definições em relação a Sequência de Fibonacci, que conforme Maurício Zahn (2011, p.6-7), tem-se que:

**Definição 5.1.** (Sequência Fibonacci) Chama-se Sequência de Fibonacci, a sequência definida recursivamente por:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \end{cases} \quad (5.1)$$

para todo  $n \geq 2$ .

Por exemplo, temos os seguintes números de Fibonacci, até o décimo termo:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots).$$

Cada  $F_n$  corresponde ao  $n$ -ésimo termo da Sequência de Fibonacci. Por exemplo, o

$F_4$ , é o quarto termo da Sequência de Fibonacci, e é igual o número 3.

Desse modo, podemos calcular recursivamente qualquer termo da Sequência de Fibonacci e logo, conforme a definição [5.1](#), para calcular o décimo termo da Sequência de Fibonacci, procede-se da seguinte forma:

- $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ ;
- $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$ ;
- $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$ ;
- $F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$ ;
- $F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$ ;
- $F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$ ;
- $F_9 = F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34$ ;
- $F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55$ .

Assim, o décimo termo da Sequência de Fibonacci é o número 55. Como é notado, temos uma maneira exaustiva para calcular termos maiores da Sequência de Fibonacci. Por isso, na próxima seção, iremos construir uma ferramenta bastante útil para obter qualquer número de Fibonacci de forma direta.

## 5.1 Recorrência Lineares

O objetivo dessa seção, é realizar um estudo sobre recorrências lineares e demonstrar o Teorema de Binet, no qual podemos encontrar qualquer número de Fibonacci de forma direta. O desenvolvimento a seguir é baseado no livro Matemática Discreta, de Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho (2016).

**Definição 5.2.** Uma equação de recorrência linear de grau  $k$  é uma expressão da forma:

$$x_{n+1} = r_{k-1}x_n + r_{k-2}x_{n-1} + \dots + r_0x_{n-k+1}, \quad (5.2)$$

com

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde  $r_0, r_1, \dots, r_{k-1}$  são números reais e  $r_0 \neq 0$ .

São equações de recorrências lineares as seguintes equações:

$$x_{n+1} = 2x_n$$

$$2x_{n+1} = x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + n^3.$$

Em relação a equação (5.2), chamamos de equações lineares de primeira ordem e equações lineares de segunda ordem quando temos, respectivamente,  $k = 1$  e  $k = 2$ . Por exemplo:

Para  $k = 1$ , temos:

$$x_{n+1} = 3x_n$$

$$x_{n+1} = 9x_n.$$

Para  $k = 2$ , temos:

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$$

$$x_{n+1} = x_n + 4x_{n-1}.$$

De acordo com Muniz Neto (2014), uma fórmula de recorrência consiste em especificar um ou mais termos iniciais da sequência, bem como uma receita para calcular certo termo, em função dos termos anteriores.

**Exemplo 5.2.** Considere a sequência  $(x_n)_{n \geq 1}$  definida, recursivamente, por  $x_1 = 5$  e

$$x_{n+1} = 10x_n. \tag{5.3}$$

Para  $n = 1$ , na relação acima, temos  $x_2 = 10x_1 = 10 \cdot 5 = 50$ . Para  $n = 2$ , temos  $x_3 = 10x_2 = 10 \cdot 50 = 500$  e assim por diante.

Note que, conhecendo apenas um dos termos anteriores da equação (5.3), somos capazes de construir iteradamente todos os termos da sequência  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

**Exemplo 5.3.** Considere a sequência  $(x_n)_{n \geq 1}$  definida, recursivamente, por  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$  e

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}. \tag{5.4}$$

Para  $n = 2$ , na relação acima, obtemos  $x_3 = 2x_2 - x_1 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$ ; Para,  $n = 3$ , obtemos  $x_4 = 2x_3 - x_2 = 2 \cdot 8 - 5 = 11$  e assim, podemos obter de maneira recursiva os próximos termos da sequência. A equação (5.4) é a relação de recorrência satisfeita pela sequência  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

Note que, para calcular o termo  $x_3$ , além da equação (5.4), foi preciso conhecer os termos  $x_1$  e  $x_2$ , pois uma recorrência linear de segunda ordem depende de dois termos

imediatamente anteriores.

Em resumo, chamamos a recorrência do exemplo 5.2, na forma da equação 5.2 de recorrência linear de primeira ordem. Em outras palavras, uma recorrência linear de primeira ordem expressa o valor de  $x_{n+1}$  em função de  $x_n$ , ou seja, para sabermos o próximo termo da recorrência ( $x_{n+1}$ ), precisamos conhecer somente o termo anterior ( $x_n$ ).

No exemplo 5.6, a equação 5.4 é chamada de recorrência linear de segunda ordem, em outras palavras, para conhecermos o termo  $x_{n+1}$ , precisamos conhecer os dois termos imediatamente inferior a eles, ou seja, devemos conhecer os termos  $x_n$  e  $x_{n-1}$ , que devem ser definidos.

## 5.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem expressa  $x_{n+1}$  em função de  $x_n$ . Ela é dita linear se for da forma 5.2, para  $k = 1$ .

**Definição 5.3.** Uma recorrência linear de primeira ordem é dita homogênea, se não possuir termo independente de  $x_n$ .

Caso contrário, chamamos a recorrência linear de primeira ordem de não-homogênea.

**Exemplo 5.4.** A recorrência  $x_{n+1} = 2x_n$  é dita homogênea, já a recorrência  $x_{n+1} = x_n + 3$  é não-homogênea.

**Exemplo 5.5.** Resolva a recorrência  $x_{n+1} = (n)x_n$ ,  $x_1 = 5$ .

Temos,

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, multiplicando membro a membro, obtemos  $x_n = (n-1)!x_1$ , como  $x_1 = 5$ , obtemos

$$x_n = 5(n-1)!.$$

**Exemplo 5.6.** Resolva a recorrência  $x_{n+1} = 2x_n$ .

Temos,

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_4 &= 2x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 2x_{n-1}.\end{aligned}$$

Daí, multiplicando membro a membro, obtemos:  $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n = 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 \cdot \dots \cdot 2x_{n-1}$ , obtendo:

$$x_n = 2^{n+1}x_1.$$

Vamos agora resolver exemplos de recorrências lineares de primeira ordem da forma  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ .

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}.\end{aligned}$$

Donde, somando membro a membro, obtemos  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ .

**Exemplo 5.7.** Resolva a recorrência  $x_{n+1} = x_n + 2^n$ ,  $x_1 = 1$ .

Temos,

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + 2 \\ x_3 &= x_2 + 2^2 \\ x_4 &= x_3 + 2^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1}.\end{aligned}$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^{n-1}) \\ \Leftrightarrow x_n &= 1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^{n-1}) \\ \Leftrightarrow x_n &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.\end{aligned}$$

O teorema a seguir, mostra que qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma recorrência da forma  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ .

**Teorema 5.1.** Se  $a_n$  é uma solução não-nula da recorrência  $x_{n+1} = g(n)x_n$ , então a substituição  $x_n = a_n y_n$  transforma a recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \text{ em } y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

*Demonstração.* A substituição  $x_n = a_n y_n$  transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \text{ em } a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas,  $a_{n+1} = g(n)a_n$ , pois  $a_n$  é solução de  $x_{n+1} = g(n)x_n$ . Portanto, a equação se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

□

**Exemplo 5.8.** Resolva  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ , sendo que  $x_1 = 2$ .

Uma solução não-nula de  $x_{n+1} = 2x_n$  é, por exemplo,  $a_n = 2^{n-1}$ , conforme vimos no Exemplo 5.6. Fazendo a substituição  $x_n = 2^{n-1}y_n$ , obtemos  $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$ , ou seja,  $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$ . Daí se tem

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro as equações, resulta

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + 2^{-1} \frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como  $x_n = 2^{n-1}y_n$  e  $x_1 = 2$ , temos  $y_1 = 2$  e  $y_n = 3 - 2^{1-n}$ . Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1}y_n \\ &= 2^{n-1}(3 - 2^{1-n}) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

## 5.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Nessa seção, iremos estudar as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e as não-homogêneas. O estudo é baseado em: Augusto César Morgado e Paulo César Pinto Carvalho (2016), Diego Ferreira Gomes (2014) e Fabiano José de Castro (2016).

**Definição 5.4.** Uma recorrências linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo

$$x_{n+2} + g(n)x_{n+1} + f(n)x_n + k(n) = 0, \quad (5.5)$$

onde  $g$ ,  $f$  e  $k$  são funções com  $n \in \mathbb{N}$  e  $f(n) \neq 0$ .

De acordo com a definição 5.4, podemos classificar as recorrências lineares, com coeficientes constantes, de segunda ordem como sendo: Homogêneas e não-homogêneas.

**Definição 5.5.** Seja a recorrência,

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n + k(n) = 0. \quad (5.6)$$

Quando  $k(n) = 0$ , a recorrência da definição 5.6 é chamada de homogênea, caso contrário, chamamos a recorrência de não-homogênea.

### 5.3.1 Recorrências Lineares de Segundo Ordem Homogênea

**Proposição 5.1.** *Seja uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes na forma 5.6, com  $k(n) = 0$ . Associamos uma equação do segundo grau,*

$$r^2 + pr + q = 0, \quad (5.7)$$

a qual é denominada equação característica.

*Demonstração.* Suponha, inicialmente que  $x_n = r_0^n$ , com  $r_0 \neq 0$ , seja solução da recorrência 5.6. Então temos,

$$\begin{aligned} r_0^{n+2} + pr_0^{n+1} + qr_0^n &= 0 \\ \Leftrightarrow r_0^n r_0^2 + pr_0^n r_0^1 + qr_0^n &= 0 \\ \Leftrightarrow r_0^n (r_0^2 + pr_0 + q) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $r_0 \neq 0$ , devemos ter

$$r_0^2 + pr_0 + q = 0,$$

isto é,  $r_0$  é uma solução para a equação do segundo grau  $r_0^2 + pr_0 + q = 0$ . O argumento acima, mostra que  $x_n = r_0^n$  é uma solução de [5.6](#) se, e somente se,  $r_0$  é raiz de

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (5.8)$$

□

Note que  $q \neq 0$  e logo a equação [5.8](#) não possui raiz nula.

**Exemplo 5.9.** A recorrência  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$  tem equação característica  $r^2 = r + 1$ . As raízes da equação característica são:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

O Teorema [5.2](#), mostra que, se as raízes da equação característica são  $r_1$  e  $r_2$ , então qualquer sequência da forma  $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

**Teorema 5.2.** *Se as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$  são  $r_1$  e  $r_2$ , então  $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  é solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , quaisquer que sejam os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .*

*Demonstração.* Substituindo  $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  na recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$c_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + c_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = c_1 r_1^n 0 + c_2 r_2^n 0 = 0.$$

□

O Teorema [5.3](#), mostra que se  $r_1 \neq r_2$ , todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema [5.2](#).

**Teorema 5.3.** *Se as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$  são  $r_1$  e  $r_2$ , com  $r_1 \neq r_2$ , então todas as soluções da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  são da forma  $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ ,  $c_1$  e  $c_2$  constantes.*

*Demonstração.* Seja  $y_n$ , uma solução qualquer de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ . Pelo Teorema [5.2](#), temos que  $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  também é solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ . Portanto, determinemos constantes  $c_1$  e  $c_2$  que sejam soluções do sistemas de equações

$$\begin{cases} c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1 \\ c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$c_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } c_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Isso é possível, pois  $r_1 \neq r_2$  e  $r_1 \neq 0$  e  $r_2 \neq 0$ . Afirmamos que  $y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  para todo  $n$  natural, o que prova o teorema.

Com efeito, seja  $z_n = y_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n$ . Mostraremos que  $z_n = 0$  para todo  $n$ . Temos:

$$z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) - c_1 r_1^n (r_1^2 + p r_1 + q) - c_2 r_2^n (r_2^2 + p r_2 + q).$$

Note que,  $y_n$  é solução de  $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ . Os dois últimos fatores do segundo membro também são iguais a zero, pois  $r_1$  e  $r_2$  são raízes de  $r^2 + p r + q = 0$ . Então  $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ . Além disso, como  $c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1$  e  $c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 = y_2$ , temos  $z_1 = z_2 = 0$ . Mas, se  $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$  e  $z_1 = z_2 = 0$ , então  $z_n = 0$  para todo  $n$ .  $\square$

**Exemplo 5.10.** Vamos determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0.$$

A equação característica é  $r^2 + 3r - 4 = 0$ , que tem raízes 1 e  $-4$ . De acordo com os Teoremas [5.2](#) e [5.3](#), as soluções da recorrência são as sequências da forma  $a_n = c_1 1^n + c_2 (-4)^n$ , isto é,  $a_n = c_1 + c_2 (-4)^n$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

Veremos agora a análise do conjunto solução de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem onde as raízes da equação característica são iguais, ou seja, possui uma raiz real dupla.

**Teorema 5.4.** *Se as raízes de  $r^2 + p r + q = 0$  são iguais,  $r_1 = r_2 = r$ , então,  $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$  é solução da recorrência  $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ , quaisquer que sejam os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .*

*Demonstração.* Se as raízes são iguais, então  $r = -\frac{p}{2}$ . Substituindo  $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$  na recorrência

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0,$$

obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$\begin{aligned} c_1 r^n (r^2 + p r + q) + c_2 n r^n (r^2 + p r + q) + c_2 r^n r (2r + p) &= \\ &= c_1 r^n 0 + c_2 n r^n 0 + c_2 r^n r 0 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 5.5.** *Se as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$  são iguais,  $r_1 = r_2 = r$ , então todas as soluções da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  são da forma  $c_1r^n + c_2nr^n$ ,  $c_1$  e  $c_2$  constantes.*

*Demonstração.* Seja  $y_n$ , uma solução qualquer de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ . Pelo Teorema [5.2](#), temos que  $a_n = c_1r^n + c_2nr^n$  é solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ . Com isso, determine as constantes  $c_1$  e  $c_2$  que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} c_1r + c_2r = y_1 \\ c_1r^2 + 2c_2r^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$c_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \text{ e } c_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Afirmamos que,  $y_n = c_1r^n + c_2nr^n$  para todo  $n$  natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja  $z_n = y_n - c_1r^n - c_2nr^n$ . Mostraremos que  $z_n = 0$  para todo  $n$ .

Temos,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - c_1r^{n+2}(r^2 + pr + q) - c_2nr^{n+2}(r^2 + pr + q) - c_2r^{n+2}r(2r + p).$$

A primeira parcela do segundo membro é igual a zero, pois  $y_n$  é solução de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ . A segunda e terceira parcela do segundo membro são iguais a zero, porque  $r$  é raiz de  $r^2 + pr + q = 0$ . A quarta parcela é igual a zero porque  $2r + p = 0$  já que, quando  $r_1 = r_2 = r$ , tem-se  $r = -\frac{p}{2}$ . Então  $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ . Além disso, como  $c_1r + c_2r = y_1$  e  $c_1r^2 + 2c_2r^2 = y_2$ , temos  $z_1 = z_2 = 0$ . Mas, se  $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$  e  $z_1 = z_2 = 0$ , então  $z_n = 0$ , para todo  $n$ .  $\square$

**Exemplo 5.11.** A recorrência  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$  tem equação característica  $r^2 - 4r + 4 = 0$ . As raízes são iguais a  $r_1 = r_2 = 2$ .

E, pelos Teoremas [5.2](#) e [5.3](#), temos que a solução da recorrência é  $x_n = c_1(2)^n + c_2n(2)^n$ .

### 5.3.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Não-Homogêneas

**Teorema 5.6.** *Se  $a_n$  é uma solução da equação*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n). \tag{5.9}$$

então a substituição  $x_n = a_n + y_n$ , transforma a equação (5.9) em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

*Demonstração.* Substituindo  $x_n$  por  $a_n + y_n$  na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n),$$

mas  $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ , pois  $a_n$  é solução particular da equação (5.9). Logo, a equação se transforma em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

□

De acordo com o Teorema 5.6, a solução de uma recorrência não-homogênea é constituída de duas parcelas: Uma solução qualquer da parte não-homogênea e a solução da parte homogênea. A solução da parte homogênea, sabemos encontrar e a solução da não-homogênea, deve ser procurada por tentativas, buscando ter um formato próximo da equação não-homogênea que estamos comparando.

A Sequência de Fibonacci é definida recursivamente, conforme a definição 5.1, qual seria a fórmula de recorrência para encontrar cada número de Fibonacci? Por meio dos estudos de Augusto César Morgado, Paulo César Ponto Carvalho (2016) e Maurício Zahn (2011), iremos encontrar uma solução para calcular qualquer termo da Sequência de Fibonacci por meio de uma fórmula.

Seja  $F_n = q^n$  e considerando a definição 5.1, temos a seguinte igualdade:

$$q^{n+1} = q^n + q^{n-1}, \forall n \geq 2. \quad (5.10)$$

Dividindo essa igualdade por  $q^n \neq 0$ , obtemos a equação:

$$q^2 = q + 1. \quad (5.11)$$

Com raízes:

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (5.12)$$

**Proposição 5.2.** *Seja  $(F_1, F_2, F_3, \dots)$ , uma Sequência de Fibonacci qualquer. Então existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tais que:*

$$F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \forall n \geq 1. \quad (5.13)$$

*Demonstração.* Faremos a prova utilizando o segundo princípio da indução matemática. Note que para  $n = 1$  e  $n = 2$ , temos que o sistema

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 = F_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = F_2 \end{cases},$$

nas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  possuem solução única. De fato, note que o seguinte determinante é diferente de zero,

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2.$$

Como  $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  e  $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  daí,  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} \neq 0$ .

Portanto, vale a base da indução, ou seja,  $\alpha$  e  $\beta$  são unicamente determinados para  $n = 1$  e  $n = 2$ .

Suponha que a afirmação seja verdadeira  $\forall m \leq n$ , mostraremos que é verdadeiro para  $n + 1$ .

Com efeito, observe que:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1} = \alpha r_1^{n-1}(r_1 + 1) + \beta r_2^{n-1}(r_2 + 1) = \alpha r_1^{n-1} r_1^2 + \beta r_2^{n-1} r_2^2 = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}.$$

Portanto, pelo princípio da indução forte, a afirmação vale para todo  $n \geq 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 5.3.** (Teorema de Binet) O número de Fibonacci  $F_n$ , pode ser obtido pela fórmula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (5.14)$$

*Demonstração.* Defina  $F_n$  o número de Fibonacci por meio de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, ou seja,  $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \Leftrightarrow F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , com  $F_1 = F_2 = 1$ . Pela proposição [5.1](#), a equação característica a ela associada é:  $r^2 = r + 1$ , cujas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Então, garantida a existência de uma forma geral pela proposição 5.2 e como temos uma recorrência linear de segunda ordem, com  $r_1 \neq r_2$ . Pelo Teorema 5.3, sua forma geral é dada por

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (5.15)$$

Daí,

$$F_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Para determinar  $C_1$  e  $C_2$ , use o fato que  $F_1 = F_2 = 1$  e para simplificar os cálculos, usaremos convenientemente  $F_0 = 0$  e  $F_1 = 1$ .

Realizando as devidas substituições, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Da primeira equação temos,  $C_1 = -C_2$  e substituindo esse resultado na segunda equação, obtemos:

$$\begin{aligned} -C_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) &= -\frac{C_2}{2} - C_2 \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{C_2}{2} - C_2 \frac{\sqrt{5}}{2} = -2C_2 \frac{\sqrt{5}}{2} = -C_2 \sqrt{5} = 1 \\ \Leftrightarrow C_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Logo,  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e substituindo  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $C_1$  e  $C_2$  na equação (5.15) obtemos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

□

# Capítulo 6

## Proporcionalidade e o Número de Ouro

### 6.1 Grandezas Proporcionais

Nesse capítulo foi desenvolvido o tema proporcionalidades e, ao final, feito o desenvolvimento do tema Proporção Áurea e o Número de Ouro. As seções são baseadas nos livros Temas de Problemas Elementares, Meu professor de Matemática e Matemática e Ensino (LIMA, 2006; LIMA, 2007; LIMA, 2016).

Sejam duas grandezas  $x$  e  $y$  relacionadas tal que, a cada valor especificado de  $x$  corresponda um valor bem determinado de  $y$ . Nesse caso, diz-se que  $y$  é função de  $x$  e escreve-se  $y = f(x)$ . Os valores  $x_1, x_2$ , corresponde aos  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$ .

Se a desigualdade  $x_1 < x_2$  implicar sempre que  $y_1 < y_2$ , diremos que  $y$  é uma função crescente de  $x$ . Se, entretanto,  $x_1 < x_2$  acarretar  $y_1 > y_2$ , diremos que  $y$  é uma função decrescente de  $x$ . Em qualquer dos dois casos, diz-se que  $y$  é uma função monótona de  $x$ .

**Definição 6.1.** Seja  $x, y \in \mathbb{R}^+$  suponhamos que a grandeza  $y$  seja função da grandeza  $x$ , isto é,  $y = f(x)$ . Diremos que  $y$  é diretamente proporcional a  $x$  quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- $y$  é uma função crescente de  $x$ ;
- Se multiplicarmos  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  também fica multiplicado por  $n$ . Em termos matemáticos:  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Analogamente, diz-se que:

**Definição 6.2.** Diremos que  $y$  é inversamente proporcional a  $x$  quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- $y$  é uma função decrescente de  $x$ ;

- Se multiplicarmos  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  também fica dividido por  $n$ . Em outros termos:  $f(n.x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Note que, limitamos nossa discussão as grandezas cuja medida é um número positivo.

Para provarmos o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, considere inicialmente o seguinte lema.

**Lema 6.1.** *Se  $f(n.x) = n \cdot f(x) \forall x > 0$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então  $f(r.x) = r \cdot f(x)$ ,  $\forall r \in \mathbb{Q}$ , com  $r = \frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Temos:

$$q \cdot f(r.x) = f(q.r.x) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}.x\right) = f(p.x) = p \cdot f(x).$$

Logo,  $f(r.x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$ . □

**Teorema 6.1.** *As seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$  são equivalentes:*

- 1)  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ ;
- 2) Para todo número real  $c > 0$ , tem-se  $f(c.x) = c \cdot f(x)$ ;
- 3) Existe um número  $k$ , chamado de a “constante de proporcionalidade” entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = k \cdot x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .

*Demonstração.* Provaremos que  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ . Para mostrarmos que  $1) \Rightarrow 2)$ , suponhamos, por absurdo, que  $y = f(x)$  seja diretamente proporcional a  $x$ , mas que se consiga achar um número real  $c$  tal que  $f(c.x) \neq c \cdot f(x)$ . Para fixar ideias, seja  $f(c.x) < c \cdot f(x)$ , isto é,  $\frac{f(c.x)}{f(x)} < c$ . Entre dois números reais quaisquer, existe sempre um número racional. Podemos então achar  $r$  racional tal que,  $\frac{f(c.x)}{f(x)} < r < c$ , o que significa  $f(c.x) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$ .

O lema 6.1, nos permite reescrever estas desigualdades como,  $f(c.x) < f(r.x) < c \cdot f(x)$ . Mas a desigualdade  $f(c.x) < f(r.x)$ , juntamente com o fato de ser  $r < c$ , está em contradição com a hipótese de  $y$  ser diretamente proporcional a  $x$ , e ser, portanto uma função crescente de  $x$ .

Analogamente, se prova que não pode ser  $f(c.x) > c \cdot f(x)$ . Logo temos  $f(c.x) = c \cdot f(x)$ , o que mostra que  $1) \Rightarrow 2)$ . Para provarmos  $2) \Rightarrow 3)$ , tomemos  $k = f(1)$ . Então, em virtude da hipótese 2), usada com qualquer  $x$  em lugar de  $c$ , temos  $f(x) = f(x.1) = x \cdot f(1) = x \cdot k$ , logo  $f(x) = k \cdot x$ .

Para completarmos o ciclo da demonstração vamos provar que:  $3) \Rightarrow 1)$ . Primeiro devemos lembrar que nossas grandezas estão no conjunto dos números reais positivos. Logo  $k = f(1) > 0$ . Então  $x < x_1$  implica  $k \cdot x < k \cdot x_1$ , ou seja,  $f(x) < f(x_1)$ . Portanto,

$y = f(x)$  é uma função crescente de  $x$ . Além disso,  $f(n \cdot x) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$ . De sorte que,  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ .  $\square$

**Teorema 6.2.** *As seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$  são equivalentes: 1)  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ ; 2) Para todo número real  $c > 0$ , tem-se  $f(c \cdot x) = \frac{f(x)}{c}$ ; 3) Existe um número  $k$ , chamado de a “constante de proporcionalidade” entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .*

A demonstração do Teorema 6.2 é análoga a demonstração do Teorema 6.1. Podemos observar que, para provarmos que  $y$  é inversamente proporcional a  $x$  se, e somente se, é diretamente proporcional a  $\frac{1}{x}$ .

Dados os números reais  $x, x_1, x_2, y, y_1$  e  $y_2$  e a proporcionalidade  $x \mapsto y$ . Quando  $x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2$ , temos:  $y_1 = k \cdot x_1$  e  $y_2 = k \cdot x_2$ , para um número real  $k$ . Daí, consequentemente:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}. \quad (6.1)$$

**Exemplo 6.1.** Se conhecermos  $x_1, x_2, y_1$ , podemos calcular  $y_2 = k \cdot x_2$ , sem conhecer o fator de proporcionalidade  $k$ , usando a equação (6.1).

**Exemplo 6.2.** Um indicador muito utilizado no mercado financeiro é o chamado lucro por ação (LPA). Sendo um índice utilizado para indicar o quanto uma empresa lucrou, em relação a cada ações emitidas durante um certo período de tempo. Suponha que uma empresa A obteve, no seu último trimestre, um lucro de 1 milhão de reais, com 500 mil ações emitidas no mercado. Deseja-se aumentar o número de ações emitidas para 1,5 milhões de ações. Qual deve ser o lucro da empresa para que ela possa manter o mesmo LPA(Lucro Por Ação).

Utilizando a equação (6.1) e considerando  $x_1 = 1.000.000, x_2 = 500.000, y_1 = x$  e  $y_2 = 1.500.000$ , temos:

$$\frac{1.000.000}{500.000} = \frac{x}{1.500.000}$$

obtemos  $x = 3.000.000$ , ou seja, o lucro da empresa deverá ser de 3 milhões para que seu LPA se mantenha o mesmo, ou seja, um  $LPA = 2,0$ .

Logo, ao aumentar o número de ações, para que o LPA continue constante, o lucro da empresa deve aumentar na mesma proporção. Dentro das nossas considerações, o LPA é o que chamamos de constante de proporcionalidade, em outras palavras é o  $k$  da relação  $y = k \cdot x$ .

**Exemplo 6.3.** Com o  $LPA = 2,0$ , conforme o exemplo anterior, teríamos:  $y = k \cdot x \Leftrightarrow y = 2 \cdot x$ , onde  $y$  é o lucro da empresa e  $x$  é o número de ações emitidas, daí, teríamos  $y = 2 \cdot 1.500.000 = 3.000.000$ .

**Observação:** Ao procurar resolver um problema por regra de três é necessário certificar-se primeiro, que de fato se tem uma proporcionalidade  $x \mapsto y$ . Não basta, que identifique que quando maior for  $x$ , maior será  $y$ , ou no caso de grandezas inversamente proporcionais, quando maior  $x$ , menor será  $y$ . Para tal, devemos ter  $y$  proporcional a  $x$ , pela constante de proporcionalidade  $k$ .

**Definição 6.3.** (Divisão em Partes Proporcionais) Dadas duas sequências  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  e  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ , diz-se que os números  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  são proporcionais aos números  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  quando,

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_n}{a_n} = k, \quad (6.2)$$

onde  $k$  é chamada de constante de proporcionalidade.

Da equação (6.2), temos:

$$b_1 = k \cdot a_1$$

$$b_2 = k \cdot a_2$$

$$b_3 = k \cdot a_3$$

$$\vdots$$

$$b_n = k \cdot a_n.$$

A propriedade das grandezas proporcionais, acima mencionada, é a seguinte:

**Proposição 6.1.** *Seja  $x \mapsto y$  uma proporcionalidade. Se  $x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2, \dots, x_n \mapsto y_n$  então  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \mapsto y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$ .*

*Demonstração.* Com efeito, tendo-se  $y_1 = k \cdot x_1, y_2 = k \cdot x_2, \dots, y_n = k \cdot x_n$ , segue que  $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + k \cdot x_3 + \dots + k \cdot x_n = k \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ . Noutras palavras, se

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y_n}{x_n}$$

,

então,

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

□

Dividir um número  $a$  em partes proporcionais a  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , significa encontrar  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , proporcionais a  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e tais que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ .

Ora, se devemos ter:

$$x_1 = k \cdot a_1$$

$$x_2 = k \cdot a_2$$

$$x_3 = k \cdot a_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = k \cdot a_n,$$

então,

$$a = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n),$$

logo,

$$k = \frac{a}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}.$$

E daí, resulta que:

$$x_1 = \frac{aa_1}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n},$$

$$x_2 = \frac{aa_2}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{aa_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}.$$

**Exemplo 6.4.** (Regra da Sociedade) Três pessoas organizaram um negócio entrando com capitais  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ . No final do ano obtiveram um lucro  $L$ . Quanto desse lucro cabe a cada um dos sócios ?

Conforme visto no desenvolvimento anterior, o problema trata-se de dividir proporcionalmente a  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  o lucro  $L$ . Nesse sentido, as partes que cabem a cada um são:

$$\frac{c_1L}{c_1 + c_2 + c_3}, \frac{c_2L}{c_1 + c_2 + c_3} \text{ e } \frac{c_3L}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

**Exemplo 6.5.** (Regra da Sociedade Composta) No exemplo [6.4](#), suponhamos que os sócios trabalharam durante o mesmo período de tempo, digamos  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ . Nesse novo contexto, como deve ser feita a divisão dos lucros?

Sejam  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  as partes do lucro que cada sócio recebeu. Digamos que  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  sejam os dias. Então por cada dia de trabalho os sócios lucraram, respectivamente:

$$\frac{x_1}{t_1}, \frac{x_2}{t_2} \text{ e } \frac{x_3}{t_3}.$$

Esses lucros diários devem ser proporcionais aos capitais  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , aplicados por cada um. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{t_1} &= k \cdot c_1, \\ \frac{x_2}{t_2} &= k \cdot c_2, \\ \frac{x_3}{t_3} &= k \cdot c_3,\end{aligned}$$

ou seja,

$$x_1 = k \cdot c_1 t_1, \quad (6.3)$$

$$x_2 = k \cdot c_2 t_2, \quad (6.4)$$

$$x_3 = k \cdot c_3 t_3, \quad (6.5)$$

com,

$$x_1 + x_2 + x_3 = L. \quad (6.6)$$

Daí, isolando  $k$  das equações (6.3), (6.4) e (6.5) e substituindo na equação (6.6), obtemos:

$$k = \frac{L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3}. \quad (6.7)$$

Novamente, substituindo  $k$  encontrado na equação (6.7), nas equações (6.3), (6.4) e (6.5), encontramos, respectivamente:

$$x_1 = \frac{c_1 t_1 \cdot L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3},$$

$$x_2 = \frac{c_2 t_2 \cdot L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3},$$

$$x_3 = \frac{c_3 t_3 \cdot L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3}.$$

Que é o lucro  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  no obtido proporcionalmente para cada sócio.

Generalizando: No exemplo 6.5, para  $n$  sócios que aplicaram, respectivamente, os capitais  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , onde trabalharam durante os períodos  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ , obtendo um lucro  $L$ , temos os respectivos lucros proporcionais  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , como sendo:

$$x_1 = \frac{c_1 t_1 \cdot L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \dots + c_n t_n},$$

$$x_2 = \frac{c_2 t_2 \cdot L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \dots + c_n t_n},$$

$$x_3 = \frac{c_3 t_3 \cdot L}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \dots + c_n t_n},$$

$$x_n = \frac{\begin{matrix} \vdots \\ c_n t_n \cdot L \end{matrix}}{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \cdots + c_n t_n}$$

## 6.2 Número de Ouro

Existem diversos números enigmáticos e notáveis na matemática, entre eles estão o Número  $\pi$ , o Número de Euler e o Número de Ouro. Trataremos aqui, em especial, do Número de Ouro, representado pela letra grega  $\varphi$  (Phi), atribuída em homenagem ao escultor grego Fídias (490 - 431 a.C.), um dos escultores mais importantes da Grécia antiga, que esculpiu a estátua da deusa Atena e de Zeus, foi também arquiteto do Partenon, o templo da capital Atenas.

Na seção a seguir, tratou-se da obtenção do número de ouro, por meio da razão áurea. O leitor poderá obter mais detalhes em: Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro de Maurício Zahn (2011).

### 6.2.1 Razão Áurea e o Número de Ouro

**Definição 6.4.** Dizemos que um ponto  $C$  divide um segmento  $\overline{AB}$  na razão áurea se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}. \quad (6.8)$$

De acordo com essa definição, chamando  $\overline{AB} = a$  e  $\overline{BC} = x$ , temos que  $\overline{AC} = a - x$  e queremos obter o número que corresponde a proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a}{a - x}. \quad (6.9)$$

Na Figura 6.1, temos o segmento  $\overline{AB}$  e um ponto  $C$  entre os pontos  $A$  e  $B$ , ilustrando, a título de exemplo, a proporção 6.9.

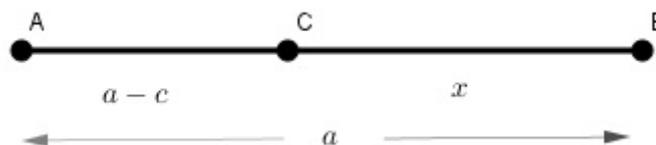


Figura 6.1: Segmento Áureo. Fonte: O Autor.

De acordo com as informações acima, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{x}} = \frac{a}{a-x},$$

donde resulta:

$$\Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0. \quad (6.10)$$

Resolvendo a equação, obtemos as seguintes raízes:

$$x = -a \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ ou } x = a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Como  $x$  é a medida de um segmento, devemos ter um número positivo. Logo, o único valor possível para  $x$  é:

$$x = a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Portanto, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

e finalmente:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045... \quad (6.11)$$

A demonstração da irracionalidade do Número de Ouro, como veremos na proposição [6.2](#). O leitor pode encontrar esse estudo em Fábio Honorato dos Santos (2018).

**Proposição 6.2.** *O número  $\varphi$  é irracional.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $\varphi$  seja racional, ou seja,

$$\varphi = \frac{a}{b}, \quad (6.12)$$

logo, existem  $a, b \in \mathbb{Q}$ , com  $b \neq 0$ , tais que  $(a, b) = 1$ .

Tome  $a = -1$  na equação [\(6.10\)](#), daí:

$$\begin{aligned} x^2 + ax - a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Substituindo a equação [\(6.12\)](#), na equação [\(6.13\)](#), obtemos:

$$\left( \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

isto é,

$$\frac{a^2 - ab}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a(a - b) = b^2.$$

Como  $(a - b)$  é um número inteiro,  $\exists k \in \mathbb{Z}$ , tal que,  $k = (a - b)$ . Daí,

$$ak = b^2.$$

Dessa igualdade, temos que  $a$  divide  $b^2$ , ou seja,  $a|b^2$  e conseqüentemente,  $a$  divide  $b$ . Absurdo, pois por hipótese  $(a, b) = 1$ .

Portanto, concluímos que  $\varphi$  é um número irracional, ou seja,  $\varphi \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ .  $\square$

O número obtido na equação (6.11), dá-se o nome de *Número de Ouro*, que é representado pela letra grega  $\varphi$ , em homenagem a

Um dos primeiros registros, que se tem conhecimento sobre a razão áurea, data de, aproximadamente, 1650 antes de Cristo. É no *Papiro de Rhind*, um documento que consta 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes, de um trabalho mais antigo ainda. Nesse texto, cita-se uma “razão sagrada” que se acredita tratar da razão áurea.

A razão áurea foi utilizada para dar harmonia e “perfeição” às obras de arte. Leonardo da Vinci percebeu, que no corpo humano existem medidas cuja razão é áurea, criando a obra de arte chamada de *O Homem Vitruviano*, ilustrada na Figura 6.2, cujo as proporções do corpo são razões áureas.

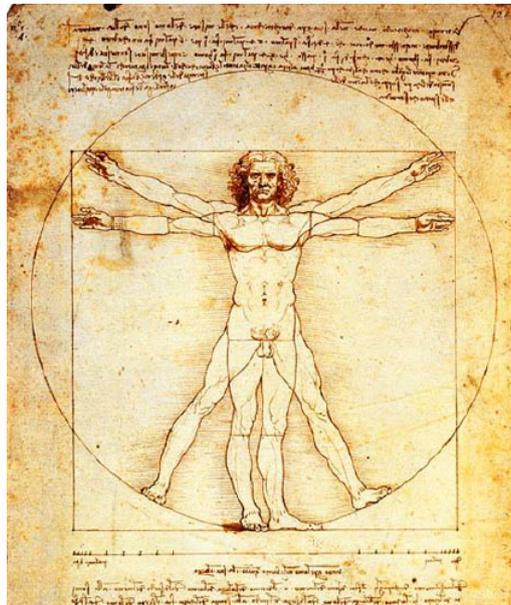


Figura 6.2: O Homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci. Fonte: Afeitos (2013, p.67).

# Capítulo 7

## Resultados e Discussões

### 7.1 Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea

Nesse capítulo, foi explorada as relações entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. O leitor poderá obter mais informações em Maurício Zahn (2011).

**Proposição 7.1.** *Seja  $F_n$  um número de Fibonacci, vale a desigualdade:*

$$F_n \geq \varphi^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

*Demonstração.* Provaremos esta desigualdade aplicando a segunda forma do princípio da indução matemática.

Para  $n = 1$ , temos:

$$F_1 = 1 \text{ e } \varphi^{1-2} = \varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} < \frac{2}{1 + 1} = 1 = F_1,$$

ou seja,

$$F_1 > \varphi^{-1}.$$

Para  $n = 2$ , temos:

$$F_2 = 1 \text{ e } \varphi^{2-2} = \varphi^0 = 1,$$

ou seja,  $F_2 = \varphi_0 = 1$ .

Suponha agora que,  $F_m \geq \varphi^{m-2}$ ,  $\forall m \leq n$ .

Daí, pela definição [5.1](#), temos:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} = \varphi^{n-3}(\varphi + 1). \quad (7.2)$$

Note que,

$$\begin{aligned} 1 + \varphi &= 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{4}{4} + \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \varphi^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$1 + \varphi = \varphi^2.$$

Donde,

$$F_{n+1} \geq \varphi^{n-3}\varphi^2 = \varphi^{n-1}.$$

Portanto, pelo segundo princípio da indução matemática, a proposição é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Como foi observado até o momento, realizamos um estudo separado da Sequência de Fibonacci, por meio do estudo de recorrências e do Número de Ouro. No Teorema [7.1](#), foi estabelecido uma relação de desigualdade entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. Ao observar o Teorema de Binet [\(5.3\)](#) e o Número de Ouro, podemos estabelecer a seguinte relação:

**Proposição 7.2.** *Seja  $F_n$ , um número de Fibonacci e  $\varphi$  o Número de Ouro, então*

$$F_n = \frac{\varphi^n + (1 - \varphi^n)}{\sqrt{5}}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.3)$$

*Demonstração.* Basta observar no Teorema de Binet que  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e que  $(1 - \varphi) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , donde, obtemos o resultado da proposição.  $\square$

Essa observação, mostra que existe uma relação entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. É possível obter os números de Fibonacci por meio de operações que envolvem a potência de  $\varphi$ .

## 7.2 Potências de $\varphi$ e a Sequência de Fibonacci

Nessa seção foram exploradas as relações entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, como por exemplo: As Potências de Fibonacci e consequências. Para mais deta-

lhes o leitor pode consultar ZAHN(2011); SANTOS(2013); BELINI(2015); DIAS(2015); SILVA(2017); SILVA(2017); VIEIRA(2017).

**Teorema 7.1.** *Seja  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x^2 = x + 1$ , então  $\forall n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 1$ , vale que*

$$x^n = F_{n-1} + F_n \cdot x. \quad (7.4)$$

*Demonstração.* Vamos fazer a demonstração por indução em  $n$ . Para  $n = 1$ , temos:  $x = F_0 + F_1 x \Rightarrow x = 0 + 1 \cdot x = x$ , logo vale para  $n = 1$ . Suponha que seja válido para um  $n$  qualquer maior do que 1, ou seja, que vale  $x^n = F_{n-1} + F_n \cdot x$

Vamos provar que o Teorema 7.1, vale para  $n + 1$ .

Com efeito, multiplicando  $x^n = F_{n-1} + F_n \cdot x$  por  $x$  em ambos os membros, obtemos:

$$x^{n+1} = x^2 F_n + x \cdot F_{n-1},$$

e como  $x^2 = x + 1$  obtemos:

$$x^{n+1} = (x + 1)F_n + x \cdot F_{n-1} = xF_n + xF_{n-1} + F_n = x(F_n + F_{n-1}) + F_n.$$

e como  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , temos:

$$x^{n+1} = F_n + xF_n + 1.$$

Logo, vale para  $n + 1$ . Portanto vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 1$ . □

**Corolário 7.1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale*

$$\varphi^n = F_{n-1} + F_n \cdot \varphi. \quad (7.5)$$

*Demonstração.* Basta tomar  $x = \varphi$  no Teorema 7.1. □

**Exemplo 7.1.** Construa as potências de  $\varphi$  para  $n = 2$  até  $n = 10$ .

Sabendo que  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , para:

- Para  $n = 2$ ,  $\varphi^2 = F_1 + F_2 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^2 = 1 + \varphi$ ;
- Para  $n = 3$ ,  $\varphi^3 = F_2 + F_3 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^3 = 1 + 2 \cdot \varphi$ ;
- Para  $n = 4$ ,  $\varphi^4 = F_3 + F_4 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^4 = 2 + 3 \cdot \varphi$ ;

- Para  $n = 5$ ,  $\varphi^5 = F_4 + F_5 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^5 = 3 + 5 \cdot \varphi$ ;
- Para  $n = 6$ ,  $\varphi^6 = F_5 + F_6 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^6 = 5 + 8 \cdot \varphi$ ;
- Para  $n = 7$ ,  $\varphi^7 = F_6 + F_7 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^7 = 8 + 13 \cdot \varphi$ ;
- Para  $n = 8$ ,  $\varphi^8 = F_7 + F_8 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^8 = 13 + 21 \cdot \varphi$ ;
- Para  $n = 9$ ,  $\varphi^9 = F_8 + F_9 \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^9 = 21 + 34 \cdot \varphi$ ;
- Para  $n = 10$ ,  $\varphi^{10} = F_9 + F_{10} \cdot \varphi \Rightarrow \varphi^{10} = 34 + 55 \cdot \varphi$ .

Considerando  $F_0 = 0$ , por meio da Tabela [7.1](#), temos os números de Fibonacci gerados pelas potências de  $\varphi$  para  $n = 2$  até  $n = 10$ .

Tabela 7.1: Potências de Fibonacci com  $n = 2$  até  $n = 10$

$n$	$\varphi^n$
1	$0 + \varphi$
2	$1 + \varphi$
3	$1 + 2\varphi$
4	$2 + 3\varphi$
5	$3 + 5\varphi$
6	$5 + 8\varphi$
7	$8 + 13\varphi$
8	$13 + 21\varphi$
9	$21 + 34\varphi$
10	$34 + 55\varphi$

Observe que, temos exatamente os números de Fibonacci na forma  $F_{n-1} + F_n \cdot \varphi$  e assim temos a relação entre as potências de  $\varphi$  e a Sequência de Fibonacci.

**Exemplo 7.2.** Usando as potências de  $\varphi$ , mostre que:

$$\varphi^n - \varphi^{n-1} = \varphi^{n-2}, \forall n \geq 2.$$

Vamos provar por indução em  $n$ . Para  $n = 2$ , temos:

$$\varphi^2 - \varphi = 1 + \varphi - \varphi = 1,$$

logo vale para  $n = 2$ .

Suponha que,  $\varphi^n - \varphi^{n-1} = \varphi^{n-2}, \forall n \geq 2$ , seja válida para um  $n$  qualquer maior do que 2. Vamos mostrar que a proposição vale para  $n + 1$ .

Com efeito, multiplicando o primeiro membro da relação por  $\varphi$ , obtemos:

$$\varphi^n \cdot \varphi - \varphi^{n-1} \cdot \varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n.$$

E aplicando o Corolário [7.1](#), temos:

$$\begin{aligned}
 & F_n + F_{n+1} \cdot \varphi - (F_{n-1} + F_n \cdot \varphi) \\
 &= F_n - F_{n-1} + F_{n+1} \cdot \varphi - F_n \cdot \varphi \\
 &= F_n - F_{n-1} + \varphi \cdot (F_{n+1} - F_n).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Note que,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  e que  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Daí, substituindo na equação [7.6](#), temos:

$$\begin{aligned}
 & F_{n-1} + F_{n-2} - F_{n-1} + \varphi \cdot (F_n + F_{n-1} - F_n) \\
 &= F_{n-2} + \varphi \cdot F_{n-1} = \varphi^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Logo, vale para  $n + 1$  e portanto  $\varphi^n - \varphi^{n-1} = \varphi^{n-2}$ , vale  $\forall n \geq 2$ .

### 7.3 Números de Fibonacci e a Razão Áurea

Apresentamos, nesse capítulo, as relações entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea, estudando, principalmente, a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos, como também outras relações envolvendo os números de Fibonacci. O leitor poderá obter mais informações consultando Astrolino e Silva (2017).

Na análise gráfica de ações, existem ferramentas que relacionam a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, bem como padrões gráficos que se formam observando essas relações, mas ainda não é possível realizar esse estudo sem antes mostrarmos outra relação entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Observe o exemplo [7.3](#) a seguir, no qual iremos utilizar razões entre os números de Fibonacci e verificar o que acontece.

**Exemplo 7.3.** Sejam  $F_n$ , números de Fibonacci,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja, os números

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots).$$

Vamos dividir os elementos consecutivos da Sequência de Fibonacci, conforme a Tabela [7.2](#), isto é:

Os três primeiros itens, não apresentam os resultados que esperamos, mas ao observar uma sequência maior de razões entre os números consecutivos de Fibonacci, podemos conjecturar que essa razão tende ao Número de Ouro, quando temos  $n$  suficientemente grande.

De fato, de acordo com o próximo teorema, podemos mostrar que a razão entre dois números consecutivos de Fibonacci tendem ao Número de Ouro, quando temos  $n$

Tabela 7.2: Tabela dos Valores das Razões dos números consecutivos de Fibonacci

$$\begin{aligned}
 \frac{F_2}{F_1} &= \frac{1}{1} = 1 \\
 \frac{F_3}{F_2} &= \frac{2}{1} = 2 \\
 \frac{F_4}{F_3} &= \frac{3}{2} = 1,5 \\
 \frac{F_5}{F_4} &= \frac{5}{3} \approx 1,667 \\
 &\vdots \\
 \frac{F_{11}}{F_{10}} &= \frac{89}{55} \approx 1,6181 \\
 \frac{F_{12}}{F_{11}} &= \frac{144}{89} \approx 1,6179.
 \end{aligned}$$

suficientemente grande. O leitor pode consultar esses e outros detalhes em: Sung (2012) e Afeitos (2013):

**Teorema 7.2.** *Seja  $F_n$  um número de Fibonacci, então a razão entre dois quaisquer termos consecutivos da sucessão de Fibonacci tende para o Número de Ouro quando  $n$  tende para infinito, isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi. \tag{7.7}$$

*Demonstração.* Utilizando a fórmula de Binet [5.3](#), temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n} \\
 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}. \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

Pela Fórmula de Binet,  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$ , isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_n = \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right],$$

ou de forma equivalente:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \sqrt{5} \cdot F_n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Assim, a equação (7.8), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left[ \sqrt{5} \cdot F_n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5} \cdot F_n}. \tag{7.9}$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e colocando o termo  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$  em evidencia, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5} \cdot F_n},$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n}. \tag{7.10}$$

Vamos agora estudar o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_n} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Da Sequência de Fibonacci, temos que ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , com  $F_n \geq 1$ , podemos escrever:

$$\left| \frac{1}{F_n} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right| \leq \left| \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right|. \quad (7.11)$$

Note que,

$$\left| \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right| \leq 1,$$

logo, quando  $n \rightarrow \infty$ , segue da equação (7.11) que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_n} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = 0.$$

Donde, da equação (7.2), temos o seguinte resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

□

Como consequência do resultado acima, apresentamos o Corolário (7.2):

**Corolário 7.2.** *Seja  $F_n$ , os elementos da Sequência de Fibonacci, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = (-1)^n \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

*Demonstração.* Seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}},$$

como  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ , obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2} - F_{n+1}}{F_{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}}.$$

Pelo Teorema (7.2), anterior:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} &= (-1) \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi}. \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} &= \frac{1}{\varphi}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

□

**Corolário 7.3.** *Seja  $F_n$ , os elementos da Sequência de Fibonacci, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

*Demonstração.* Seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}},$$

como,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2} - F_{n+1}}{F_{n+2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

Pelo Corolário 7.2, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi}.$$

Donde, aplicando o corolário anterior, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{1}{\varphi^2}. \tag{7.13}$$

□

**Exemplo 7.4.** *Seja  $F_n$ , uma Sequência de Fibonacci com  $n \geq 1$ , calcule o valor de*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+3}}.$$

Como  $F_n$  são os números da Sequência de Fibonacci, temos que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow$

$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ . Daí obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2} - F_{n+1}}{F_{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+3}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+3}}.$$

Donde, pelo Corolário [7.2](#) e [7.3](#), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+3}} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \approx 0,2360679775.$$

Com isso, provou-se, um importante resultado para esta dissertação, pois a relação entre as razões dos números de Fibonacci são importantes para o estudo dos níveis de Fibonacci na Análise Técnica. Outra forma de abordar esses níveis é, por meio, das Funções de Fibonacci.

## 7.4 Funções de Fibonacci

O desenvolvimento a seguir é um tratamento sobre as Funções de Fibonacci. Além de propriedades interessantes, o estudo é aplicado para calcular níveis de Fibonacci. Nessa seção, são vistos a forma de uma Função de Fibonacci, as relações com as potencias de Fibonacci e o calculo dos níveis de Fibonacci (HAN; KIM; NEGGERS (2014); SANTOS(2018)).

**Definição 7.1.** (Função de Fibonacci) Seja uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é dita Função de Fibonacci, quando  $\forall x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$f(x + 2) = f(x + 1) + f(x).$$

**Proposição 7.3.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , uma Função de Fibonacci, ela é da forma*

$$f(x) = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x. \tag{7.14}$$

*Demonstração.* Considere a uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , tal que,  $f(x) = a^x$ , com  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $a \neq 1$ .

Da definição da Sequência de Fibonacci, temos:

$$a^{x+2} = a^{x+1} + a^x,$$

desde que  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Daí,

$$a^{x+2} = a^{x+1} + a^x = a^x(a + 1),$$

logo,  $a^2 = a + 1$  e conseqüentemente  $a^x > 0$ .

Agora, Resolvendo  $a^2 = a + 1$ , obtemos:

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

mas como  $a > 0$ , temos como solução  $a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Portanto, substituindo  $a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  em  $f(x) = a^x$ , obtemos:

$$f(x) = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x. \quad (7.15)$$

□

**Teorema 7.3.** *Seja  $f$  uma Função de Fibonacci e  $F_n$  os número da Sequência de Fibonacci, com  $F_0 = 0$  e  $F_1 = F_2 = 1$ , então  $f(x + n) = F_n f(x + 1) + F_{n-1} f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $n \geq 2$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Pelo princípio da indução finita, vamos demonstrar o Teorema [7.3](#). Para  $n = 2$ , temos:

$$f(x + 2) = F_2 f(x + 1) + F_1 f(x) = f(x + 1) + f(x).$$

Suponha que a proposição seja válida para  $n$ , ou seja,  $f(x + n) = F_n f(x + 1) + F_{n-1} f(x)$ , vamos mostrar que vale para  $n + 1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x + n + 2) &= f(x + n + 1) + f(x + n) = F_{n+1} f(x + 1) + F_n f(x) + F_n f(x + 1) + F_{n+1} f(x) = \\ &= (F_{n+1} + F_n) f(x + 1) + (F_n + F_{n+1}) f(x) = F_{n+2} f(x + 1) + F_{n+1} f(x). \end{aligned}$$

Logo, vale para  $n + 1$  e portanto, vale  $\forall n \geq 2$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . □

**Corolário 7.4.** *(Revisitando as Potências de Fibonacci) Seja  $F_n$ , os números da Sequência de Fibonacci, então:*

$$\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}.$$

*Demonstração.* Seja  $f(x) = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x$ , uma Função de Fibonacci, conforme a equação

[\(7.15\)](#). Como  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , temos:

Daí, pelo Corolário 7.3, temos:

$$\varphi^{x+n} = f(x+n) = F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x) = F_n \varphi^{x+1} + F_{n-1} \varphi^x = \varphi^x (F_n \varphi + F_{n-1}).$$

Donde,

$$\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}.$$

□

**Teorema 7.4.** *Seja  $f$ , uma Função de Fibonacci, então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Demonstração.* Como  $f$  é uma Função de Fibonacci, então  $f(x) > 0$  e  $f(x+1) > 0$ . Seja  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Considere  $\lambda = f(x)$  e  $\mu = f(x+1)$ , então pelo Teorema 7.3, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n+1)}{f(x+n)} = \frac{F_n \lambda + F_{n+1} \mu}{F_{n-1} \lambda + F_n \mu}.$$

Daí, dividindo o numerador e o denominador por  $F_n$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n+1)}{f(x+n)} = \frac{\lambda + \frac{F_{n+1}}{F_n} \mu}{\frac{F_{n-1}}{F_n} + \mu}.$$

De sorte que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n+1)}{f(x+n)} = \frac{\lambda + \varphi \mu}{\frac{\lambda}{\varphi} + \mu} = \varphi.$$

□

## 7.5 Índices ou Níveis de Fibonacci

Conforme coloca Gaucan (2011, p.2), “os Índices de Fibonacci são relações matemáticas, expressas por proporções, derivadas da Sequência de Fibonacci” e complementa que: “Os principais Índices de Fibonacci são: 0%, 23,6%, 38,2%, 50%, 61,8% e 100%”, no mesmo sentido do que coloca Lemos (2018). Por outro lado, Chen (2010), coloca que os principais números de Fibonacci são os de 38,2%, 50%, 61,8%, ao encontro do que afirma Rockefeller (2016).

Nesse sentido, além de abordar os índices de Fibonacci já citados, iremos calcular outros níveis de fibonacci para compor as retrações e os Padrões Harmônicos.

Estudamos, respectivamente, o Teorema 7.2, os Corolários 7.2 e 7.3 e o exemplo 7.4, donde obtemos as seguintes relações:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1,6180339887; \quad (7.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\varphi} \approx 0,618; \quad (7.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{1}{\varphi^2} \approx 0,382; \quad (7.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+3}} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \approx 0,236. \quad (7.19)$$

Ao encontramos os valores para alguns Índices de Fibonacci, sendo eles: 0,236, 0,382, 0,618 e o Número de Ouro 1,618. Em consequências do Teorema 7.2, podemos encontrar outros Índices de Fibonacci. Outra abordagem, seria estudar as Funções de Fibonacci pela proposição 7.4, de fato, podemos encontrar de forma direta os valores dos índices abordados.

Conforme aborda Lahutta (2016), encontramos os valores dos índices de Fibonacci por meio da Função de Fibonacci, utilizando os valores para  $x$ , assim:

- Para  $x = -\infty$ , temos  $f(x) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-\infty} = 0$ ;
- Para  $x = -3$ , temos  $f(-3) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-3} \approx 0,236$ ;
- Para  $x = -2$ , temos  $f(-2) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-2} \approx 0,382$ ;
- Para  $x = -1,44$ , temos  $f(-1,44) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-1,44} \approx 0,5$ ;
- Para  $x = -1$ , temos  $f(-1) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \approx 0,618$ ;
- Para  $x = -0,5$ , temos  $f(-0,5) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-0,5} \approx 0,786$ ;

- Para  $x = 0$ , temos  $f(0) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1$ ;
- Para  $x = 1$ , temos  $f(1) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 \approx 1,618$ .

Para as aplicações, iremos utilizar alguns dos índices acima, como por exemplo: Para estudar as retrações e projeções de Fibonacci, iremos utilizar os valores de 0, 0,382, 0,5, 0,618 e 1.

O valor de 0,5 é uma das retrações de Grann, mas por questões psicológicas de mercado, foi incorporado aos índices de Fibonacci, conforme mencionado anteriormente. Ainda assim, é possível obter o valor de 0,5, por meio da Função de Fibonacci.

## 7.6 Retração e Projeção de Fibonacci

Nessa seção, foram abordadas as retrações e projeções de Fibonacci, bem como mostrar graficamente como ocorrem as retrações e projeções de Fibonacci. A importância de traçar alvo utilizando as ferramentas de Fibonacci é uma técnica usada para definir o momento para entrar ou sair de uma operação, assim como afirma Gunther (2019, p.52) em um dos seus Axiomas de Zurique: “Entre no negócio sabendo quanto quer ganhar; quando chegar lá, caia fora”.

Primeiramente devemos definir o que é uma retração, assim:

**Definição 7.2.** Retração do preço das ações, é a correção do valor das ações quando as mesmas estão em tendência de alta, ou seja, é o movimento, temporariamente, contrário ao movimento em tendência de alta nos preços das ações.

As ações preferenciais na Figura [7.1](#), representa o gráfico de uma ação em tendência de alta, no período de 18 de Março de 2014 à 15 de Setembro de 2014, cujo menor e maior valor, no período foi, respectivamente, de R\$11,31 e R\$23,08.

Os traços em azul representam o movimento de alta das ações, enquanto os traços em vermelho representam as correções dentro desse período, ou seja, o movimento de uma queda no valor das ações, mas que logo é retomado para um novo movimento de alta nos preços.

Entende-se como correção, possíveis quedas no valor das ações ao longo de uma tendência de alta. Esses movimentos de queda são causados, porque existe uma disputa diária entre compradores e vendedores, na terminologia do mercado financeiro, existe uma luta entre touros e ursos. Quando o preço de uma ação sobe, significa que existe uma força compradora movimentando o preço das ações para cima, ou seja, como se fosse a força de um touro que exerce seu movimento de ação debaixo para cima.



Figura 7.1: Ações PN da Petrobras. Fonte: [www.tradingview.com](http://www.tradingview.com).

Por outro lado, quando o valor da ação cai, significa que existe uma força vendedora exercendo maior poder sobre o preço da ação e nesse sentido a cotação cai, sendo assim o urso representa o lado vendedor da ação, pois seu ataque é um movimento de cima para baixo.

Quando a maioria das ações que compõem o índice da Bolsa de Valores, está em uma forte alta durante um longo período de tempo, dar-se o nome para esse evento de *Bull Market*. Caso contrário, chamamos a queda da maioria das ações que compõem um mercado de *Bear Market*.

O Termo correção também pode ser utilizado quando o mercado está em tendência de baixa e por um curto período ele desenvolve movimentos da alta de preço das ações, na presente dissertação, denominaremos esse fato de projeção.

Uma curiosa história é contada por Lemos (2018, p.19-20) sobre o termo bearish (Estar baixista), afirma que:

O termo bearish veio da história de um comerciante inglês de peles de urso que costumava vender seus produtos antes de receber. Funcionava assim: Ele vendia peles, recebia do dinheiro e ficava de entregar depois. Quando o produto chegava, se o preço estivesse abaixo do valor que tinha recebido do cliente ele comprava o produto do fornecedor por um preço mais baixo. Entregava ao cliente e então ficava com a diferença! Ou seja, ele basicamente fazia uma operação de venda a descoberto! Dai surgiu a frase: “Não venda a pele (de urso) sem tê-la”.

Em outras palavras, esse comerciante apostava na queda do preço da pele de urso para poder lucrar com essa venda. Caso a pele do urso tivesse valorização, o comerciante teria que cobrir o valor para poder entregar seu produto e assim sair no prejuízo.

De forma geral, no mercado de renda variável, em particular das ações, ocorrem variações dos preços, tanto para cima, quanto para baixo. E isso ocorre devido a psico-

logia do *players* do mercado em reações de otimismo ou pessimismo em relação a vários fatores que envolvem a economia global e/ou local, como por exemplo, a situação do setor onde a empresa atua ou dos resultados e perspectivas de uma empresa para melhorar a performance e produzir lucros para os acionistas.

Vamos definir agora, o que seria uma projeção nos preços das ações. Essa definição é utilizada no trabalho apenas para diferenciar do tipo de movimento que acontece quando ocorre uma retração de preços.

**Definição 7.3.** Projeção do preço das ações, é o aumento do preço da ação, quando o mercado está em uma tendência de baixa, ou seja, é o movimento, temporariamente, contrário ao movimento de tendência de baixa no preço das ações.

A Figura 7.2, mostra um exemplo de projeção. Esse é o gráfico diário das ações ordinárias da Vale no período de 21 de Fevereiro de 2017 à 04 de Maio de 2017, com preços máximo e mínimos, respectivamente, de R\$33,42 e R\$23,22.



Figura 7.2: Projeção dos preços das ações da Vale. Fonte: [www.tradingview.com](http://www.tradingview.com).

As linhas em vermelho representam a queda do preço das ações da Vale e as linhas em azul representa as projeções.

Para traçar as retrações, Lemos (2018) diferencia esse movimento em duas principais técnicas para calcular o nível de preço de uma retração de Fibonacci sendo elas: As retrações internas e as retrações externas. Para exemplificar como ocorrem essas retrações, observe a Figura 7.19 a seguir.

Para calcularmos o nível da retração externa, fazemos isso em relação ao nível de preço que a ação faz ao variar de B para C em relação ao intervalo de preço da variação de A para B, ou seja, a retração externa representa a proporção da onda  $\overline{BC}$  em relação a onda  $\overline{AB}$ .

Para calcularmos o nível de retração interna, usamos o intervalo de preço no fundo A até o topo B. Após a retração do nível de preço do topo B até o nível de preço em C,

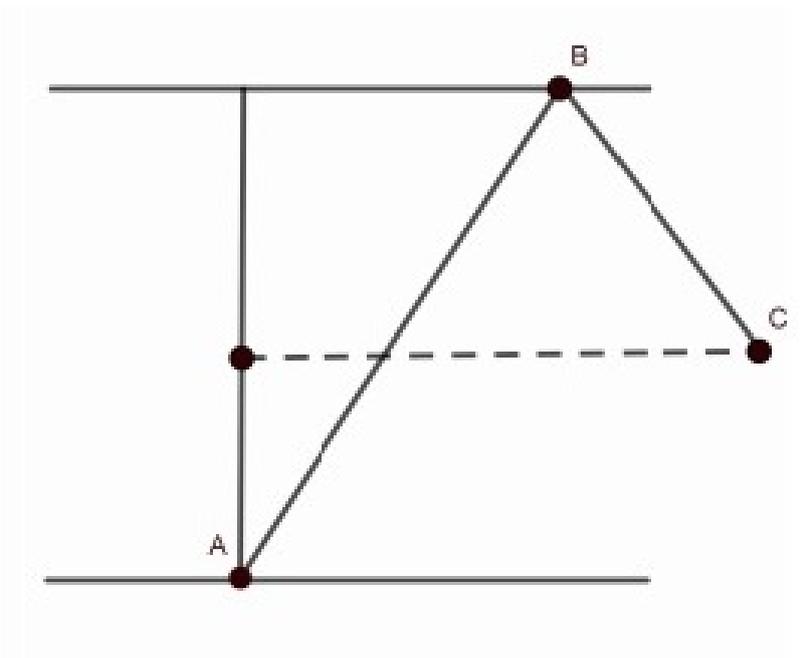


Figura 7.3: Técnica de Retração Interna ou Externa. Fonte: O autor.

a retração interna representa, proporcionalmente, o intervalo de preço do fundo A até o nível de preço em C.

Para o resultado do trabalho, iremos utilizar a técnica de retração interna. Portanto, a partir daqui, ao nos referirmos ao nível de retração, fica implícito, que estamos tratando da técnica de retração interna, até que seja dito o contrário.

Para tanto observe a seguinte definição, eu relaciona o nível de retração externa, como o nível de retração interna.

**Definição 7.4.** Seja  $\varphi'_i$ , com  $i = 38,2\%$ ,  $50\%$  e  $61,8\%$ , o preço da ação, no nível de preço na retração externa, proporcional ao intervalo de preço anteriormente formado. O nível de retração interna  $\varphi_i$  é dado por:

$$100\% - \varphi'_{100-i} = \varphi_i. \quad (7.20)$$

Nesse sentido, o nível de retração interna, é o complemento do nível da retração externa, em relação ao intervalo de preço de A para B, com  $i \in \mathbb{Q}$  e  $i \in (0, 1)$ .

Para a pesquisa, buscou-se analisar os preços que apresentassem valores exatos ou próximos aos níveis de Fibonacci, em relação aos três principais níveis, ou seja, os níveis de  $38,2\%$ ,  $50\%$  e  $61,8\%$ .

Para os preços da retração de Fibonacci, iremos considerar o preço mínimo que foi alcançado, pelo candlestick, no nível de preço  $\varphi_i$ . E para a projeção de Fibonacci, iremos considerar o valor máximo do preço alcançado, pelo candlestick, em cada nível  $\varphi_i$  de Fibonacci. Agora, vamos analisar como funciona e como traçar as três principais linhas

da retração de Fibonacci. Nesse caso observe primeiramente na Figura 7.4 quando ocorre uma retração de Fibonacci de 0,382, isto é, de 38,2%.

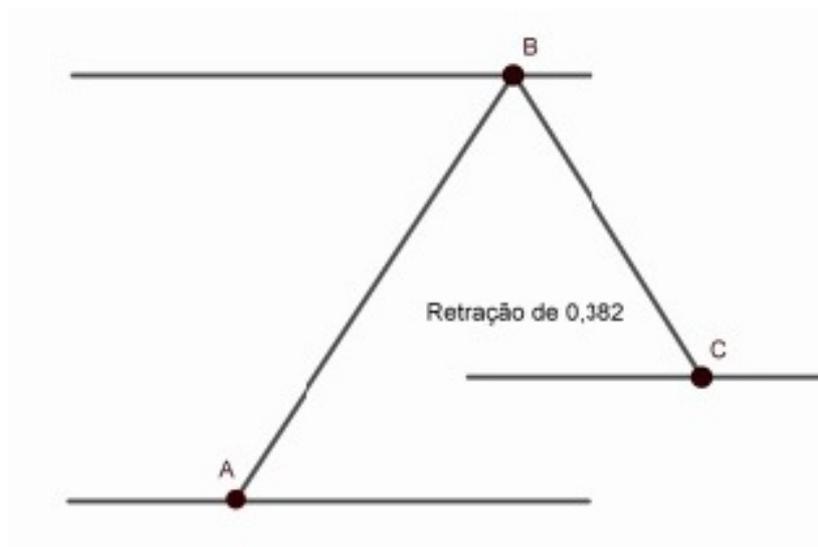


Figura 7.4: Exemplo, fora de escala, de uma retração de 38,2%. Fonte: O autor.

Em relação à Figura 7.4, temos uma retração de 38,2%, ou seja, o nível de preço que a ação atinge quando multiplicamos o valor do preço entre o fundo A e o topo B por 0,382. Assim, o resultado do preço da ação seria um valor no nível de preço no ponto C.

Em relação a Figura 7.5, temos o raciocínio análogo a retração anterior, só que agora estamos em um nível de retração de Fibonacci de 50%.

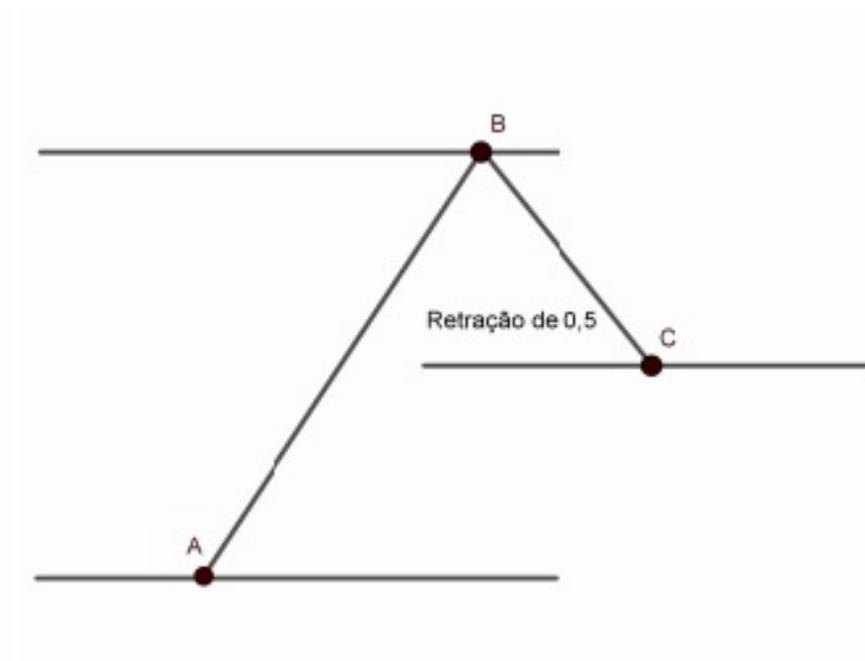


Figura 7.5: Exemplo, fora de escala de uma retração de 50%. Fonte: O autor.

Observe que, o preço atinge um valor de 50% em relação a variação de preço entre o ponto A e o preço que a ação atinge no ponto B.

Na Figura 7.6, temos o nível de retração de 68,2% de Fibonacci.

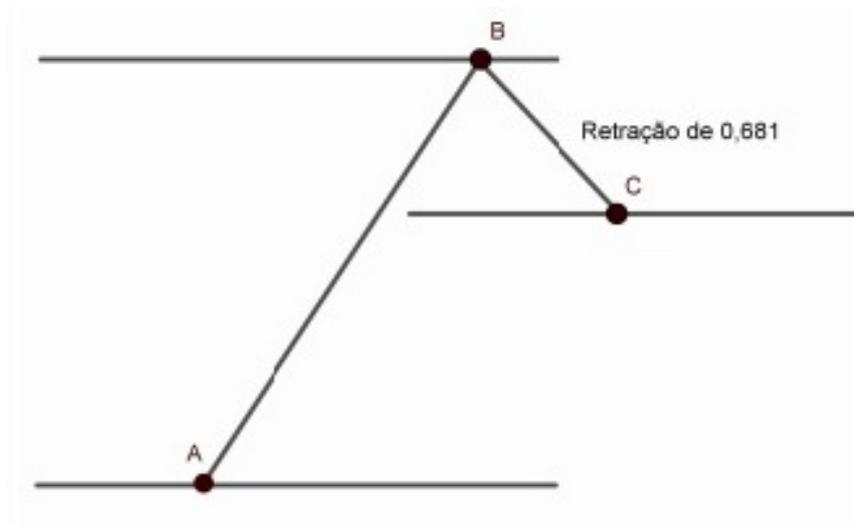


Figura 7.6: Exemplo, fora de escala de uma retração de 68,2%. Fonte: O autor.

Na Figura 7.6, temos o preço da ação quando multiplicamos o valor do preço no intervalo AB por 0,618.

Para calcularmos o valor da ação para o determinado nível de retração, iremos utilizar a definição 7.5.

**Definição 7.5.** Dados A, B e X, respectivamente, o preço de fundo, o preço de topo e o preço no nível de retração. O valor do preço da retração em X, em relação a variação de preços entre os pontos A e B, é dada por:

$$\frac{X - A}{B - A} = \varphi_i, \text{ com } i = 38,2\%, 50\% \text{ e } 61,8\%.$$

Para exemplificar a definição, iremos utilizar a Figura 7.7, assim o ponto A representa o preço de uma ação no respectivo ponto. O ponto  $A_1$ , representa o nível de preço que uma ação atinge ao alcançar o topo B e o ponto X, representa o preço que a ação atinge ao chegar ao fundo C, ou seja, representa o preço da retração em relação ao nível  $\varphi_i$ , com  $i = 38,2\%, 50\% \text{ e } 61,8\%$ .

Para obtermos o valor do preço no ponto X, devemos calcular a seguinte proporção, observando os níveis de preço no segmento vertical  $\overline{AA_1}$ . O preço em relação a B, é o mesmo preço em relação a  $A_1$ , pois encontram-se no mesmo nível. A definição 7.5, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{X - A}{A_1 - A} = \varphi_i, \tag{7.21}$$

com  $i = 38,2\%, 50\% \text{ e } 61,8\%$ .

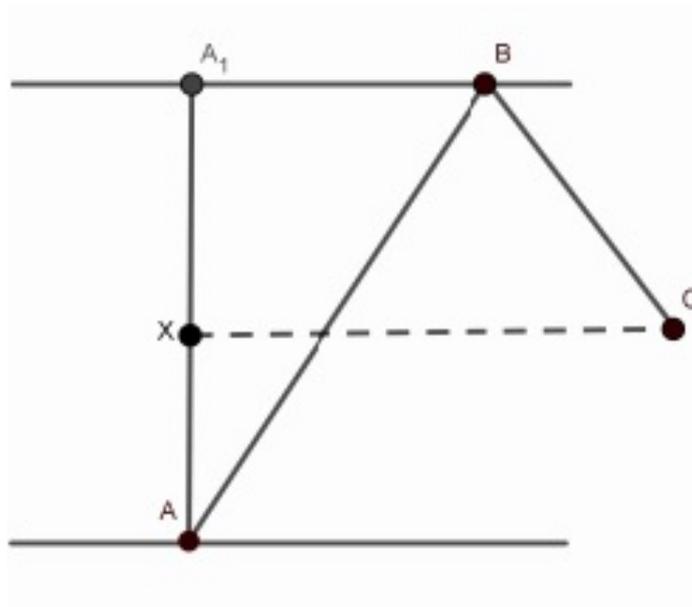


Figura 7.7: Valor do Preço X de uma Ação Fonte. Fonte: O autor.

**Exemplo 7.5.** Suponha que o preço de uma ação esteja com um valor mínimo de fundo em A como sendo R\$ 9,50 e com um preço máximo de topo de R\$ 14,50. Quais seriam os valores das retrações que o preço atingiria dentro dos níveis de Fibonacci de  $\varphi_i$ , com  $i = 38,2\%$ ,  $50\%$  e  $61,8\%$ .

O preço que a ação atinge no ponto B está no mesmo nível de preço de  $A_1$ , logo aplicando a equação (7.21) para cada um dos valores de  $\varphi_i$ , onde  $i = 38,2\%$ ,  $50\%$  e  $61,8\%$ , para calcular o valor do preço X que a ação irá retrair. Temos para  $A = R\$ 9,50$  e para  $B = R\$ 14,50$ .

- Para  $i = 38,2\%$ , temos:

$$\varphi_{38,2\%} = \frac{X - A}{B - A} \Rightarrow 0,382 = \frac{X - 9,50}{14,50 - 9,50} \Rightarrow X = 11,41.$$

Ou seja, para o nível de Fibonacci  $\varphi_{38,2\%}$ , o valor da retração a ser atingido, seria de R\$ 11,41.

- Para  $i = 50\%$ , temos:

$$\varphi_{50\%} = \frac{X - A}{B - A} \Rightarrow 0,5 = \frac{X - 9,50}{14,50 - 9,50} \Rightarrow X = R\$12,00.$$

Ou seja, para o nível de Fibonacci  $\varphi_{50\%}$ , o valor da retração a ser atingido, seria de R\$ 12,00.

- Para  $i = 61,8\%$ , temos:

$$\varphi\% = \frac{X - A}{B - A} \Rightarrow 0,618 = \frac{X - 9,50}{14,50 - 9,50} \Rightarrow X = 12,59.$$

Ou seja, para o nível de Fibonacci  $\varphi_{61,8\%}$ , o valor da retração a ser atingido, seria de R\$ 12,59.

Vamos analisar, como encontrar o nível de preço, que uma determinada ação atinge em relação as três retrações de Fibonacci, ou seja, em relação aos níveis de 38,2%, 50% e 61.8%.

O preço de uma ação é representado pelo eixo vertical do plano cartesiano, assim, a referência que devemos ter para o cálculo do preço em relação a um determinado nível de retração é a reta vertical, onde se encontram os preços das ações.

**Exemplo 7.6.** Observe, na Figura 7.8 as ações preferências da Petrobras no período de 07 de fevereiro até 19 de abril de 2018. O valor mínimo que a ação atinge é de R\$ 17,17, no dia 09 de fevereiro de 2018 e o valor máximo, nesse período, é de R\$ 21,00, em 06 de março de 2018. No dia 04 de março de 2018, as ações preferenciais da Petrobras atinge um valor de retração de R\$ 18,63 equivalendo, aproximadamente, a retração de 38,2% de Fibonacci.



Figura 7.8: Ações Preferências da Petrobras. Fonte: <https://br.tradingview.com/>.

Levando em consideração a aproximação em relação ao nível de  $\varphi_{38,2\%} \approx 0,382$ , teríamos um erro de, aproximadamente, R\$ 0,03.

**Exemplo 7.7.** Na Figura 7.9, temos as ações preferencias da Itaúsa, uma holding da Itaú. No período de 15 de Junho de 2018 até 19 de Setembro de 2018, o preço da ação atingiu um valor mínimo no ponto A de R\$ 7,15, no dia 19 de Junho de 2018. E atingiu o preço máximo no ponto B de R\$ 9,29 no dia 06 de Agosto de 2018.



Figura 7.9: Ações Preferencias da Itaúsa. Fonte: <https://br.tradingview.com/>.

A ação atinge o preço aproximado do nível  $\varphi_{50\%}$  de Fibonacci no dia 13 de setembro de 2018. O preço referente ao nível  $\varphi_{50\%}$  seria de, aproximadamente, R\$ 7,97 e o preço mínimo atingindo no ponto X foi de R\$ 7,98.

**Exemplo 7.8.** Na Figura [7.10](#), temos as ações ordinárias da JBS, no período de 03 de outubro de 2018 até 12 de março de 2019. As ações atingiram o preço mínimo no ponto A de R\$ 8,17, no dia 05 de outubro de 2018 e atingiu o preço máximo no ponto B de R\$ 15,78, no dia 31 de janeiro de 2019.

A ação atinge o preço aproximado do nível  $\varphi_{61,8\%}$  de Fibonacci no dia 08 de março de setembro de 2019. O preço referente ao nível  $\varphi_{61,8\%}$  seria de, aproximadamente, R\$ 12,87. O preço mínimo atingindo no ponto X foi de R\$ 12,80.

## 7.7 Projeções de Fibonacci

**Definição 7.6.** (Projeção de Fibonacci) É um movimento dos preços das ações, que é contrário a tendência de baixa nos preços, respeitando os níveis de Fibonacci.

Uma observação é que a retração de Fibonacci também é um movimento contrário ao movimento do preço das ações. Nesse caso, a tendência dos preços é de baixa, temporariamente, ocorre um movimento de alta nos preços, para posteriormente a tendência de baixa retornar.

Iremos analisar, os mesmos níveis de Fibonacci vistos nas retrações, ou seja, os níveis  $\varphi_i$ , com  $i = 38,2\%, 50\%$  e  $61,8\%$ .



Figura 7.10: Ações Ordinárias da JBS. <https://br.tradingview.com/>.

**Definição 7.7.** Considera  $\varphi'_{100\%-i}$  como sendo a porcentagem da projeção externa. Então,  $\varphi'_{100\%-i}$  representa o tamanho do movimento da projeção em relação ao seu movimento de queda. Ao considerar a projeção interna, temos:

$$\varphi_i = 1 - \varphi'_{100\%-i}. \quad (7.22)$$

Para ilustrar as projeção externas e os níveis da projeção de Fibonacci, observe a Figura 7.11.

O segmento  $\overline{AA_1}$  representa o nível de preço da ação, o segmento  $\overline{AB}$ , representa o movimento do preço da ação em tendência de baixa. E os segmentos  $\overline{BX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{BZ}$ , representam, respectivamente, o movimento contrário a tendência de baixa, nos níveis de 61,8%, 50% e 38,2% de Fibonacci. A seguir, temos o exemplo de uma projeção de 38,2% de Fibonacci das ações ordinárias das Companhia Hering.

**Exemplo 7.9.** A Figura 7.12, representa as ações ordinárias da Companhia Hering, no período de 17 de novembro de 2017 até 21 de dezembro de 2017. O preço das ações atingiu um valor máximo no ponto A de R\$ 26,99 no dia 23 de novembro de 2017. E o preço mínimo no ponto B de R\$ 22,53, no dia 30 de novembro 2017.

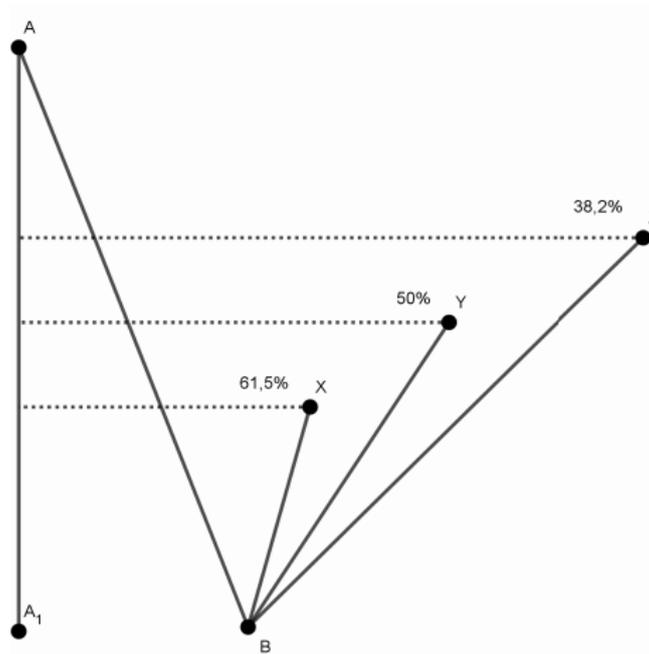


Figura 7.11: Projeções de Fibonacci. Fonte: O Autor.



Figura 7.12: Ações Ordinárias da Hering. Fonte: <https://br.tradingview.com/>.

A ação atinge o preço aproximado do nível  $\varphi_{38,2\%}$  de Fibonacci no dia 11 de dezembro de 2017. O preço referente ao nível  $\varphi_{38,2\%}$  foi de, aproximadamente, R\$ 25,29 e o preço máximo atingindo no ponto X foi de R\$ 25,32.

O próximo exemplo refere-se à projeção de 61,8% de Fibonacci das ações ordinárias da Hypermarcas.

**Exemplo 7.10.** A Figura 7.13, representa uma projeção de  $\varphi_{50\%}$  de Fibonacci das as ações ordinárias da Hypermarcas, no período de 30 de Setembro de 2016 até 11 de novembro 2016. A ação atingiu um preço máximo no ponto A de R\$ 24,90 no dia 05 de outubro de 2016 e atingiu o preço mínimo no ponto B de R\$ 22,21 no dia 26 de outubro 2016.



Figura 7.13: Ações Ordinárias da Hypermarcas. Fonte: <https://br.tradingview.com/>.

A ação atinge o preço aproximado do nível  $\varphi_{50\%}$  de Fibonacci no dia 31 de outubro 2016. O preço referente ao nível  $\varphi_{50\%}$  foi de, aproximadamente, R\$ 23,56 e o preço máximo atingindo no ponto X foi de R\$ 23,53.

O próximo exemplo refere-se a projeção de 61,8% de Fibonacci das ações ordinárias da Cervejaria Ambev.

**Exemplo 7.11.** Na Figura 7.14, temos as ações ordinárias da Cervejaria Ambev, no período de 28 de março de 2017 até 05 de novembro de 2018. A ação atingiu um preço máximo no ponto A de R\$ 23,25 no dia 05 de abril de 2018 e atingiu o preço mínimo no ponto B de R\$ 16,99 no dia 11 de Junho de novembro 2018.

A ação atinge o preço aproximado do nível  $\varphi_{61,8\%}$  de Fibonacci no dia 27 de Setembro de 2018. O preço referente ao nível  $\varphi_{61,8\%}$  foi de, aproximadamente, R\$ 19,38 e o preço máximo atingindo no ponto X foi de R\$ 19,38. Nesse caso tanto o valor no nível de Fibonacci, quanto o preço da ação, tiveram os mesmos valores.



Figura 7.14: Ações Ordinárias da Ambev. Fonte: <https://br.tradingview.com/>.

### 7.7.1 Ferramenta Computacional para Traçar os Níveis de Fibonacci

Nessa seção iremos abordar como plotar computacionalmente os níveis de Fibonacci utilizando o site [br.tradingview.com/chart/](https://br.tradingview.com/chart/). Essa ferramenta insere os níveis de Fibonacci no gráfico das ações e facilita a visualização dos preços nesses níveis. Existem outras plataformas para inserir graficamente os níveis de Fibonacci, como por exemplo o Metatrader, o profitchart, o tryd entre outros.

Na Figura [7.15](#), temos a página inicial do site [br.tradingview.com/chart/](https://br.tradingview.com/chart/), com diversas ferramentas de negociação, apresentando o gráfico diário do Índice Bovespa.

Na Figura [7.16](#), mostra-se o caminho para obter a ferramenta retração de Fibonacci na site <https://br.tradingview.com/chart/>.

Na Figura [7.16](#), na seta azul, temos as ferramentas do site, na vertical. Clicando na ferramenta indicada abre-se um novo menu no qual a ferramenta retração de Fibonacci é indicada pela seta vermelha.

Com essa ferramenta é possível plotar vários níveis de retração de Fibonacci. Mas iremos nos ater, nesse momento, apenas aos níveis de 0%, 38.2%, 50%, 68.2% e 100%. Na Figura [7.17](#), temos as ações preferências das Lojas Americanas traçadas com a ferramenta retração de Fibonacci.

Para inserir a ferramenta conforme a Figura [7.16](#), deve-se procurar um fundo, ou seja, o menor preço dentro de um determinado período. E um topo, ou seja, o maior preço dentro do período analisado.



Figura 7.15: Site Tradingview. Fonte: <https://br.tradingview.com/chart>.

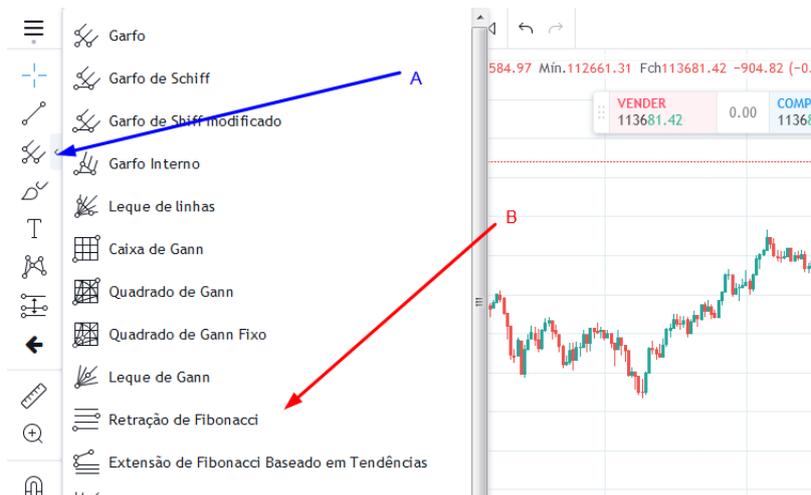


Figura 7.16: Ferramenta Retração de Fibonacci. Fonte: <https://br.tradingview.com/chart>.

Na Figura [7.17](#), o ponto A representa o fundo com um preço mínimo de R\$ 14,41 atingido na data de 17 de Setembro de 2019. O ponto B representa o topo nesse período, atingido na data de 09 de Agosto de 2019, com o preço de R\$ 19,25. O nível de retração de  $\varphi_{38,2\%}$  tem um preço de R\$ 16,26 e na data de 26 de Agosto de 2019, a ação atinge o valor mínimo de R\$ 16,21.

Na Figura [7.18](#), a seguir temos as ações preferências da Gerdau, traçada com a ferramenta retração de Fibonacci no gráfico diário.

Na Figura [7.18](#), o ponto A representa o fundo com um preço mínimo de R\$ 8,27 atingido na data de 28 de Outubro de 2008. O ponto B, representa o topo no período, atingido na data de 11 de dezembro de 2008 o preço de R\$ 13,90. O nível de retração de  $\varphi_{61,8\%}$  tem um preço de R\$ 11,75 e na data de 26 de dezembro de 2019, a ação atinge o



Figura 7.17: Ações das Lojas Americanas. Fonte: <https://br.tradingview.com/chart>.



Figura 7.18: Ações da Gerdau. Fonte: <https://br.tradingview.com/chart>.

valor mínimo de R\$ 11,75.

## 7.8 Padrões Harmônicos

Os Padrões Harmônicos são composições de várias retrações, projeções e extensões de Fibonacci, que formam padrões para compor figuras, formadas no gráfico de preço das ações, durante um determinado intervalo de tempo.

Pasavento e Joufflas (2007, p.25) afirma que o termo harmônico, se refere a “qualquer componente de uma oscilação periódica cuja frequência é um múltiplo inteiro da frequência fundamental” e complementam que “os mercados estão sempre em processo de expansão ou retração” (PASAVENTO; JOUFLAS, 2007, p.25). Em outras palavras, o termo harmônico, refere-se a periodicidade no qual os padrões podem se repetir.

Para o estudo dos Padrões de Fibonacci foram utilizados outros níveis de Fibonacci, sendo eles: 0,786, 0,886, 1,272, 1,618, 2,24, 2,618 e 3,618 (LAHUTTA, 2016; PESAVENTO; JOUFLAS, 2017). Da proposição [7.15](#), obtemos os níveis supracitados. Conforme revisto na função abaixo:

**Proposição 7.4.** *Função de Fibonacci* Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , uma Função de Fibonacci, ela é da forma

$$f(x) = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x. \quad (7.23)$$

Para os seguintes valores de x, temos os respectivos valores de f(x), conforme a Tabela [7.3](#). Nessa tabela temos dois números peculiares para x: São eles 1,68 e o 2,67. Temos também os níveis 2,24 e o nível 3,618, que será utilizado para a formação de um dos Padrões Harmônicos.

Tabela 7.3: Níveis de Fibonacci

x	f(x)
$-\infty$	0
-3	0,236
-2	0,382
-1,44	0,5
-1	0,618
-0,5	0,786
-0,25	0,886
0	1
0,5	1,272
1	1,618
1,68	2,24
2	2,618
2,67	3,618

Apesar da utilização da retração e projeção interna de Fibonacci, conforme explicado na seção anterior, nesse capítulo, utilizou-se a retração externa de Fibonacci. Por exemplo,

se afirmamos que a retração BC é de 38,2%, estamos afirmando que essa onda representa 38,2 % a variação de preço da onda AB, conforme a Figura 7.19.

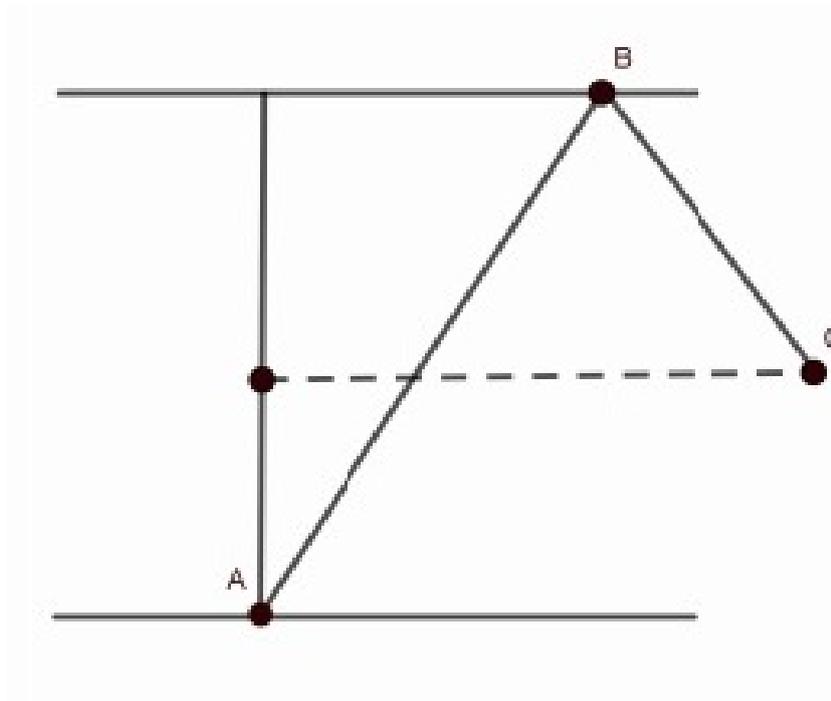


Figura 7.19: Retração de Fibonacci. Fonte: O Autor.

Adotar o uso da retração externa foi realizada para se adaptar a ferramenta computacional XABCD, que é uma das ferramentas de Fibonacci do site <https://br.tradingview.com/chart>. Nesse contexto, essa é a melhor forma de expressar proporcionalmente as variações dos preços.

### 7.8.1 O Padrão AB/CD

Um dos primeiros Padrões Harmônicos, e o mais simples, é o Padrão AB/CD. Ele é utilizado para projetar o preço de uma ação, quando a mesma atinge um nível de Fibonacci, o estudo a seguir tem base em Lahutta (2016), Pensavento e Joufflas (2007).

Em relação a uma breve história do Padrão AB/CD, Pensavento e Joufflas (2007, p.41), coloca que:

Em 1935 foi publicado um livro para venda a investidores a um preço incrível de \$ 1.500. Esse livro era Profits in the Stock Market (Lucros na Bolsa de Valores) de H.M.Gartley. Na página 249, sob o título “Uso prático da Linha de Tendência”, Gartley descreve um Padrão gráfico que hoje chamamos de AB/CD.

A Figura 7.20 é a capa do livro Profits in the Stock Market de Gartley. A maioria dos

Padrões Harmônicos estudados foi descoberta por Gartley. Outros padrões, descobertos posteriormente, foram desenvolvidos e baseadas nas obras de Gartley.

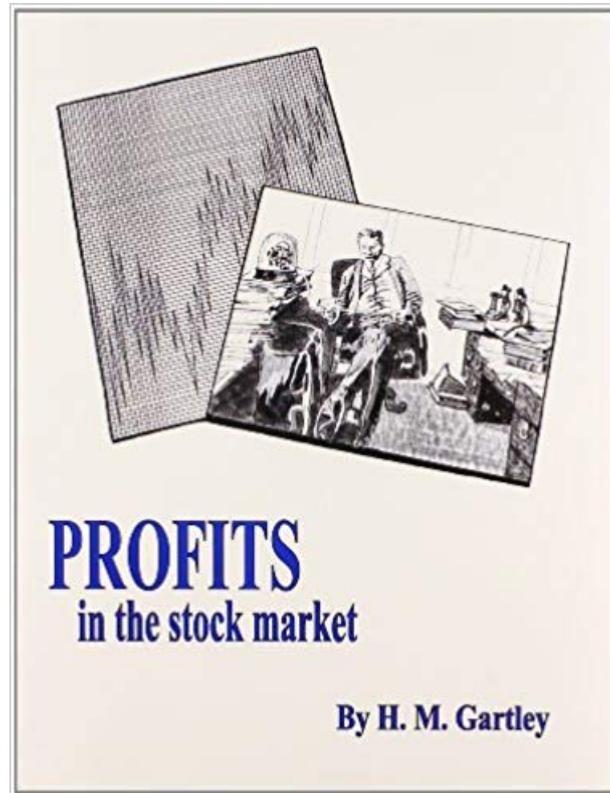


Figura 7.20: Livro Profits in the Stock Market. Fonte: Amazon.com.

A estrutura do Padrão AB/CD é dada pela formação de três ondas, sendo a primeira e a terceira ondas no mesmo sentido. A segunda onda é uma onda de correção, ou seja, no sentido contrário a tendência. Temos duas abordagens para as correções a serem realizadas. De acordo com Lahutta (2016), podem ocorrer correções de 0,618 ou 0,786 e respectivamente, as expansões de 1,618 ou de 1,272.

Pasavento e Joufflas (2007), afirmam que as correções, ou seja, a segunda onda, podem ocorrer nos níveis de 0,382, 0,50, 0,618 ou 0,786 de Fibonacci.

Independentemente das retrações, iremos tratar a terceira onda dentro dos níveis de Fibonacci já abordados conforme a Tabela 7.3. Pasavento e Joufflas (2007) descreve uma série de variações para os padrões AB/CD, mas não serão abordados, por se tratarem de particularidades para cada movimento dentro da tendência.

Na Figura 7.21, temos a representação do Padrão AB/CD, onde temos um mercado em tendência de baixa, onde após ocorrer a primeira onda AB, formou-se uma retração BC e depois uma expansão CD, no mesmo sentido de AB.

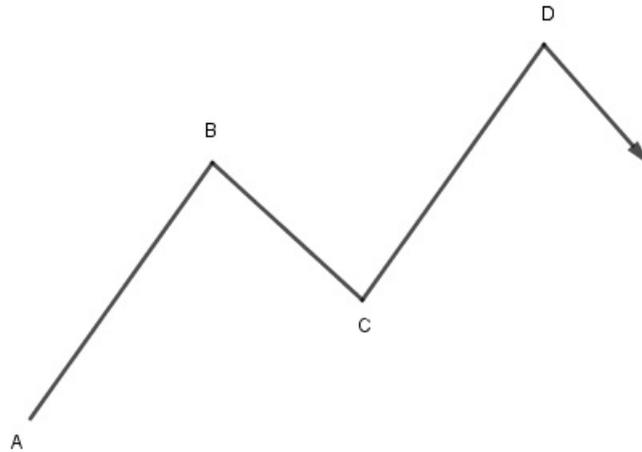


Figura 7.21: Padrão AB/CD de Alta. Fonte: O Autor.

**Exemplo 7.12.** Em relação a Figura [7.21](#), quais devem ser os percentuais de expansão da onda CD, em relação a onda BC, para as respectivas correções de 0,382, 0,5, 0,618 e de 0,782 ?

Para cada valor dos níveis de Fibonacci, temos as seguintes projeções:

- $\frac{1}{0,382} = 2,618$ ;
- $\frac{1}{0,50} = 2$ ;
- $\frac{1}{0,618} = 1,618$ ;
- $\frac{1}{0,782} = 1,272$ .

Após os preços atingirem o valor da expansão no ponto D, a seta no sentido contrário ao movimento indica um bom ponto para venda dos ativos. Pois, espera-se que nesse ponto, o preço da ação comece a cair.

Na Figura [7.22](#), temos um movimento semelhante ao Padrão AB/CD anterior, com a diferença que a tendência do movimento AB e o movimento CD são de baixa nos preços, mas o movimento de projeção BC é contrario a esses dois movimentos.

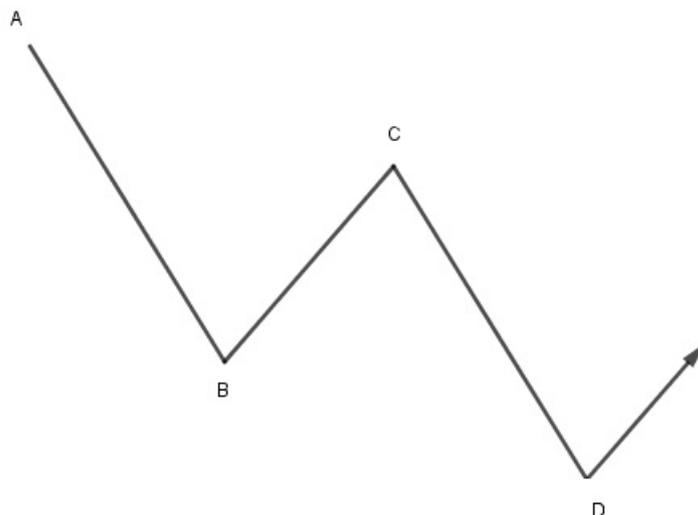


Figura 7.22: Padrão AB/CD. Fonte: O Autor.

Em relação a frequência da simetria do Padrão AB/CD, Pasavento e Jouffas (2007), afirmam que: “Cerca de 40 por cento do tempo, o Padrão AB/CD será perfeitamente simétrico, ou seja, AB é igual a CD. Os outros 60 por cento do tempo, variações do padrão estarão presentes”.

### 7.8.2 Padrão Ideal de um Gartley

O Padrão ideal de um Gartley são composições mais complexas do Padrão AB/CD, cada uma com suas retrações e projeções de Fibonacci, que caracterizam os movimentos da formação desse padrão. Variações no padrão ideal de um Gartley podem ser obtidas, ao variar alguma das retrações, projeções e/ou extensões de Fibonacci.

Em relação ao Padrão Gartley, Pasavento e Jouffas (2007, p.56), apontam que:

Das quase 500 páginas no livro de H.M. Gartley, nenhuma é mais importante do que as páginas 221 e 222. Este é o lugar onde o autor descreveu esse padrão específico com mais detalhes do que qualquer dos outros padrões em seu livro. Gartley refere-se a ela como uma das melhores oportunidades de negociação.

Conforme coloca Lahutta (2016), os níveis de retração, projeção e extensões de Fibonacci utilizados são os de 0,618, 0,786, 1,272 e 1,618.

Na descrição do padrão, temos as ondas XA, AB, BC e CD onde temos os seguintes movimentos:

- A retração da onda AB é de 0618 da onda XA.
- A Projeção da onda BC deve estar no intervalo de 0,618 a 0,786 da onda AB

- A extensão onda CD deve estar no intervalo de 1,272 a 1,618 da onda AB
- Por fim ,a retração do movimento AD deve ser de 0,786 da onda XA.

A descrição anterior forma o Padrão Gartley Ideal conforme a Figura 7.23.

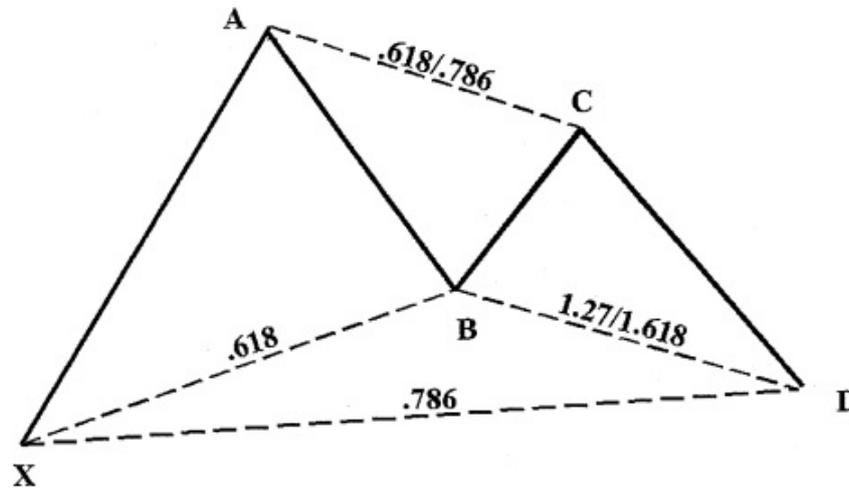


Figura 7.23: Padrão Ideal de Gartley. Fonte: Scott Carney (1999).

Após esses movimentos, podemos ter uma projeção DT de, aproximadamente, 0,618 do movimento CD, ou seja, pode acontecer um movimento de alta após a formação XABCD de Gartley, por isso também esse padrão é de alta ou bullish.

O padrão simetricamente oposto ao Gartley Ideal é representado na Figura 7.24, possuindo descrições análogas a formação do Padrão Gartley Ideal de alta.

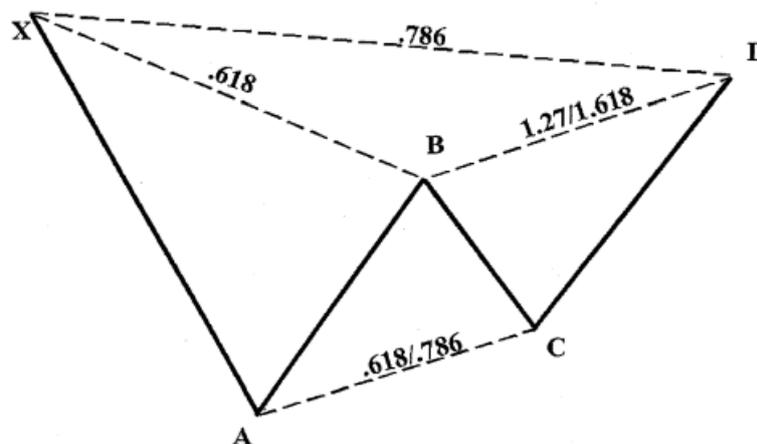


Figura 7.24: Padrão Ideal de Gartley. Fonte: Scott Carney (1999).

Na Figura 7.25, temos um Padrão Bullish Gartley modificado, com quatro ondas e apresentando as seguintes características:

- A retração da onda AB é de 0,618 da onda XA.

- A Projeção da onda BC deve estar no intervalo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD deve estar no intervalo de 1,272 a 1,618 da onda AB.
- Por fim, a retração do movimento AD deve ser de 0,786 da onda XA, não podendo esse movimento passar do ponto X.

Nesse sentido, espera-se que o próximo movimento a partir do ponto D seja de uma projeção no preço, ou seja, um movimento de alta.

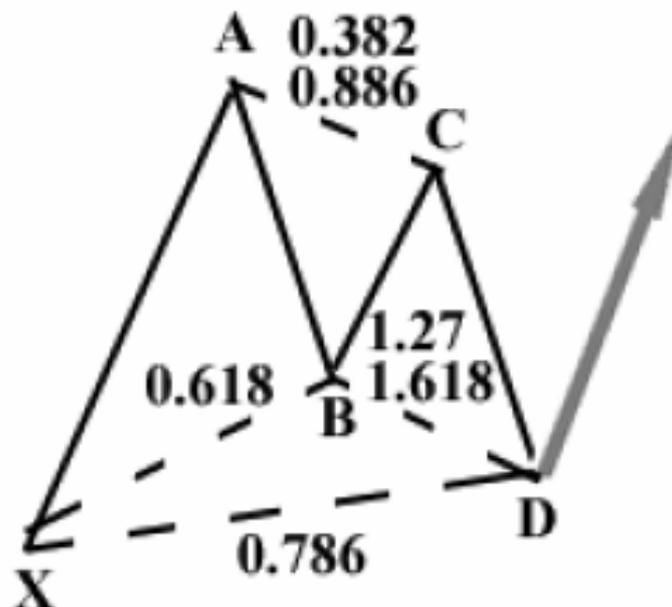


Figura 7.25: Padrão Bullish Gartley Modificado. Fonte: Dawid Lahutta (2016).

No próximo padrão modificado de Gartley, temos o padrão baixista ou Bearish Gartley, apresentando as seguintes características:

- A projeção da onda AB é de 0,618 da onda XA.
- A retração da onda BC deve estar no intervalo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD deve estar no intervalo de 1,272 a 1,618 da onda AB.
- A projeção do movimento AD deve ser de 0,786 em relação a onda XA, não podendo esse movimento passar do ponto X.

A representação dos movimentos de preços, conforme os padrões de um Gartley modificado, é apresentado na Figura [7.26](#).

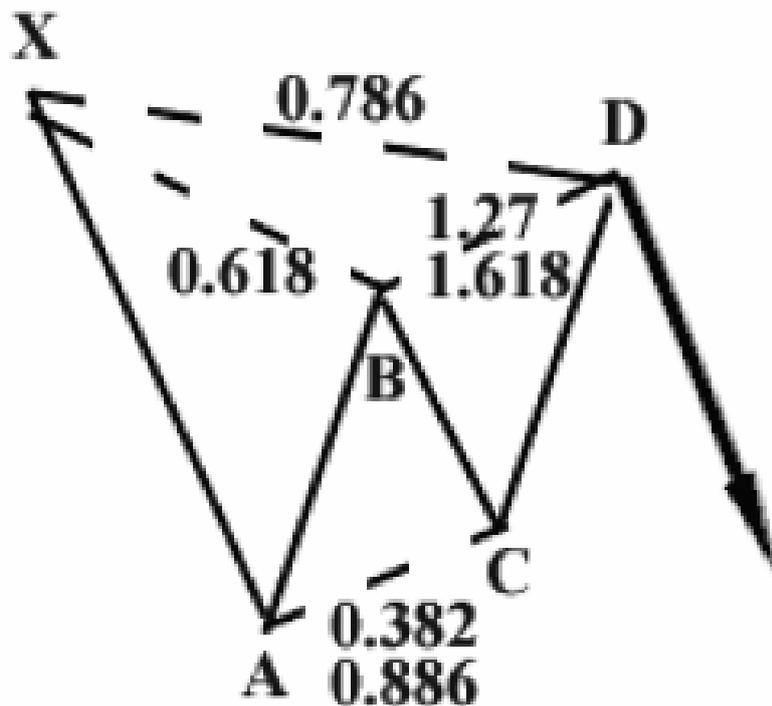


Figura 7.26: Padrão Bearish Gartley Modificado. Fonte: Dawid Lahutta (2016).

O próximo movimento, após o ponto D, deve ser um movimento de baixa nos preços, daí o nome do padrão. A sequência de padrões a seguir, representam formações que lembram animais. Todas são derivadas do padrão ideal de um Gartley, onde a primeira formação apresentada, se chama Padrão Bat ou Morcego.

Conforme afirma Dawid Lahutta (2016), “a formação de morcegos foi publicada pela primeira vez em 2001 por Scott Carney (1999)”.

O Padrão Bullish Bat apresenta as seguintes características:

- A retração da onda AB está no intervalo de 0,382 a 0,5 da onda XA, devendo de forma geral ser menor que
- A Projeção da onda BC deve estar no intervalo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD deve estar no intervalo de 1,618 a 2,618 da onda AB.
- Por fim, a retração do movimento AD deve ser de 0,886 da onda XA, não podendo esse movimento passar do ponto X.

A representação do Padrão Bullish Bat, é apresentado na Figura [7.27](#).

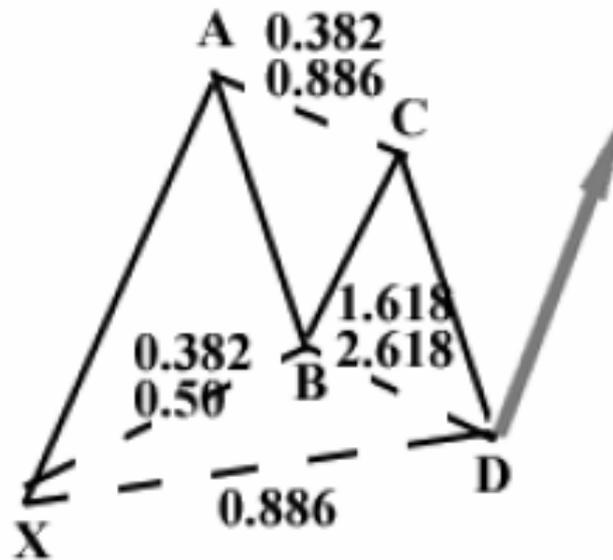


Figura 7.27: Padrão Bullish Bat. Fonte: Dawid Lahutta (2016).

Após o movimento da onda CD, poderá ocorrer uma alta no preço das ações.

Analogamente, o Padrão Bearish Bat, possui uma estrutura semelhante ao padrão da Figura 7.25, mas apresentando as seguintes características:

- A projecção da onda AB está no intervalo de 0,382 a 0,5 da onda XA, devendo de forma geral ser menor que 0,618.
- A retracção da onda BC deve estar no intervalo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD deve estar no intervalo de 1,618 a 2,618 da onda AB.
- Por fim, a projecção do movimento AD deve ser de 0,886 da onda XA, não podendo esse movimento passar do ponto X.

O Padrão Bearish Bat, é simétrico ao Padrão Bullish Bat e é representado na Figura 7.28, conforme as características citadas anteriormente.

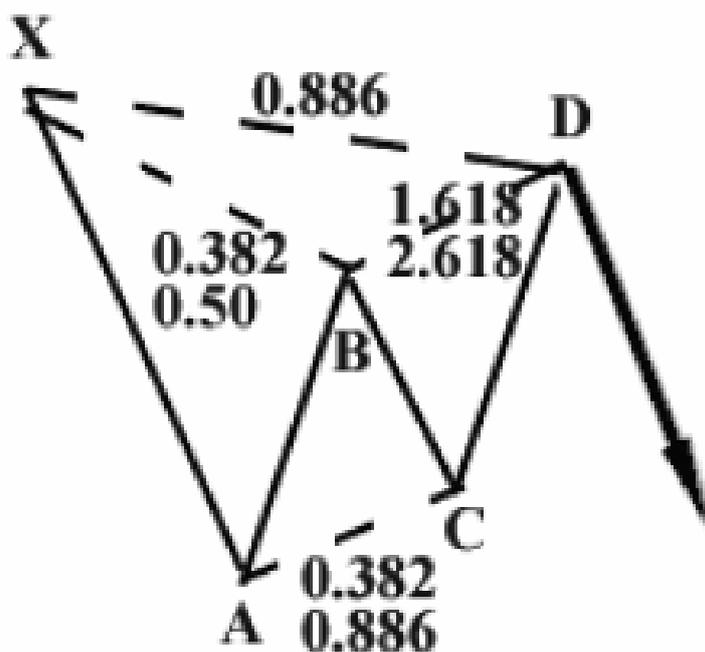


Figura 7.28: Padrão Bearish Bat. Fonte: Dawid Lahutta (2016).

Após o movimento da onda CD, espera-se que o próximo movimento seja de baixa nos preços, caracterizando o Padrão Bearish Bat.

Conforme Lahutta (2016), outro padrão descoberto por Carney (1999), é o chamado Padrão Crab ou Caranguejo. Apresenta os padrões de alta e de baixa após o fim da quarta onda e com estrutura semelhante aos padrões anteriores.

O Padrão Bullish Crab, apresenta as seguintes características:

- A retração da onda AB está no intervalo de 0,382 a 0,618 da onda XA.
- A Projeção da onda BC deve estar no intervalo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD, é uma das mais longas dos padrões estudados e deve estar no intervalo de 2,236 a 3,618 da onda AB.
- Por fim, a retração do movimento AD deve ser de 1,618 da onda XA e nesse caso a onda AD deve passar do ponto X.

As características citadas, são representadas na Figura [7.29](#).

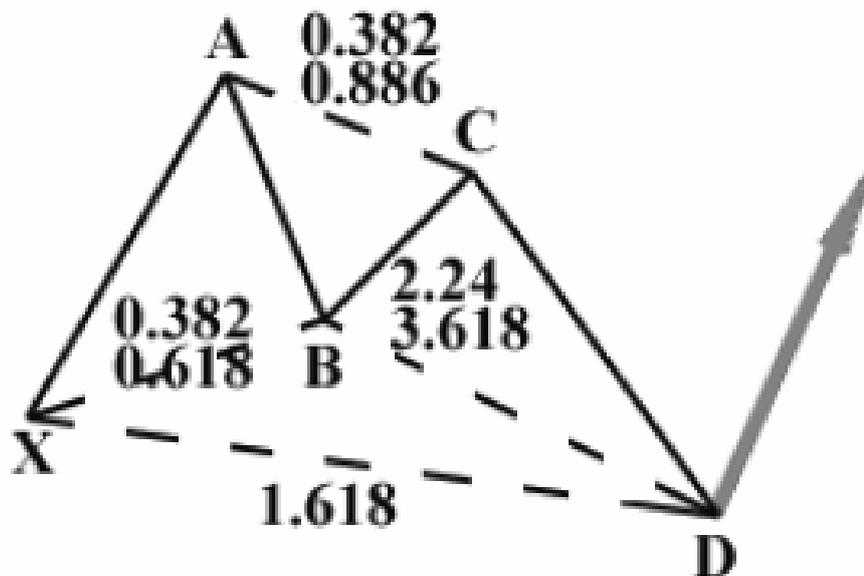


Figura 7.29: Padrão Bullish Crab. Fonte: Dawid Lahutta (2016).

Após o movimento da onda CD, espera-se que o próximo movimento seja de alta nos preços dos ativos, caracterizando assim o Padrão Bullish Crab.

O Padrão Bearish Crab ou Padrão caranguejo, é um padrão com característica baixista, analogamente, contem a mesma estrutura interna de um Padrão Gartley de baixa, mas com as seguintes composições:

- A projeção da onda AB está no intervalo de 0,382 a 0,618 da onda XA.
- A retração da onda BC deve estar no intervalo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD deve estar no intervalo de 2,236 a 3,618 da onda AB.
- Por fim a projeção do movimento AD deve ser de 1,618 da onda XA, nesse caso a onda CD deve passar o valor do ponto X.

A Figura [7.30](#), representa as composições e as características de um Padrão Crab baixista.

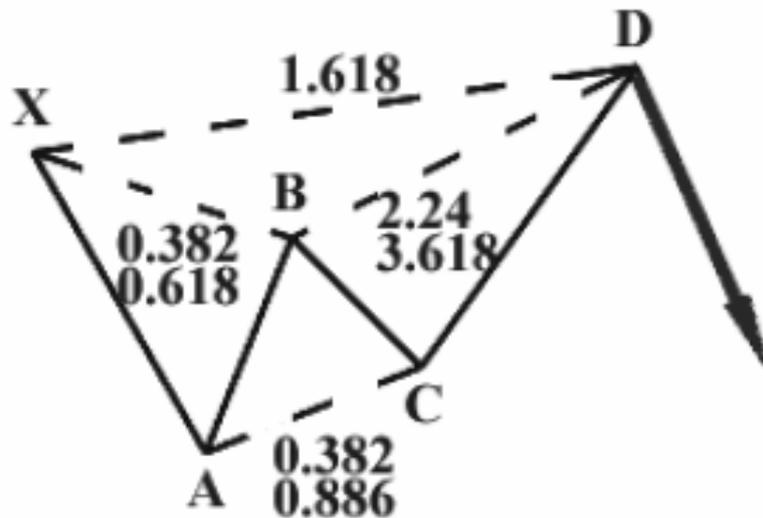


Figura 7.30: Padrão Bearish Crab. Fonte: Dawid Lahutta (2016).

Após o movimento CD, espera-se que o movimento do preço dos ativos comecem a cair, caracterizando assim o Padrão Bearish Crab.

O próximo padrão é o chamado Padrão Borboleta, ele foi descoberto por Bryce Gilmore e por Pesavento, conforme relato de Pensavento e Joufflas (2007, p.68).

O Padrão Borboleta veio à existência, em 1992, em um dia de negociação, quando Larry estava sentado com Bryce observando uma forma de padrão Wave 10 (onda 10). Ele apareceu em muitas cores diferentes, e como dois triângulos retângulos coloridos vieram juntos, Larry comentou que parecia uma borboleta, Bryce respondeu que era um bom nome para o padrão como qualquer outro e foi assim que o nome foi inventado para esse padrão.

A seguir, é descrito a representação do Padrão borboleta altista, conforme apontam Carney (1999), Pensavento e Joufflas (2007) e Lahutta (2016):

- A retração da onda AB é de 0,786 da onda XA.
- A Projeção da onda BC deve estar no intervalo de 0,618 a 0,786. Por outro lado, Lahutta(2016) coloca esse intervalo como sendo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD, deve ser de 1,618 em relação a BC. Lahutta (2016), coloca que essa extensão pode estar no intervalo de 1,618 a 2,618 em relação a onda BC.
- Por fim a extensão do movimento AD deve ser de 1,27 a 1,618 da onda XA.

Na Figura [7.31](#), Pensavento e Joufflas (2007), validam ambas as retracções, projeções e extensões, no qual descrevem Carney (1999) e Lahutta (2016), no tópico Estrutura do Padrão Borboleta, no livro *Trade What You See: How To Profit from Pattern Recognition*. As características desse padrão é representado na Figura [7.31](#).

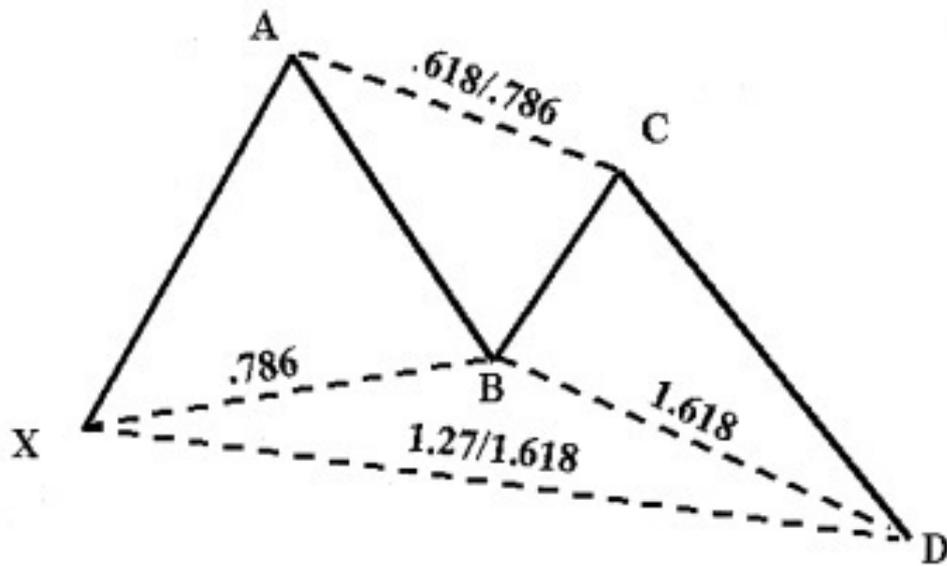


Figura 7.31: Padrão Bullish Butterfly. Fonte: Scott Carney (1999).

Após o movimento CD, o preço dos ativo podem começar a subir. A expansão do movimento CD, é a maior de todo o movimento, mas ela tem um tamanho limite, descrito por Pensavento e Jouffas (2007), afirmando que: “Além de 2,618 o padrão é considerado negado e a tendência provavelmente continuará. Na maioria dos casos, o risco máximo fica no nível 1,618” referindo-se, respectivamente, ao movimento CD e AD.

Analogamente, temos a descrição do Padrão Borboleta baixista como sendo:

- A projeção da onda AB é de 0,786 da onda XA.
- A retração da onda BC, deve estar no intervalo de 0,618 a 0,786. Lahutta (2016) coloca esse intervalo como sendo de 0,382 a 0,886 da onda AB.
- A extensão onda CD, deve ser de 1,618 em relação a BC. Lahutta (2016), coloca que essa extensão pode estar no intervalo de 1,618 a 2,618 em relação a onda BC.
- Por fim, a extensão do movimento AD deve ser de 1,27 a 1,618 da onda XA.

A Figura [7.32](#), ilustra as características do Padrão Bearish Butterfly.

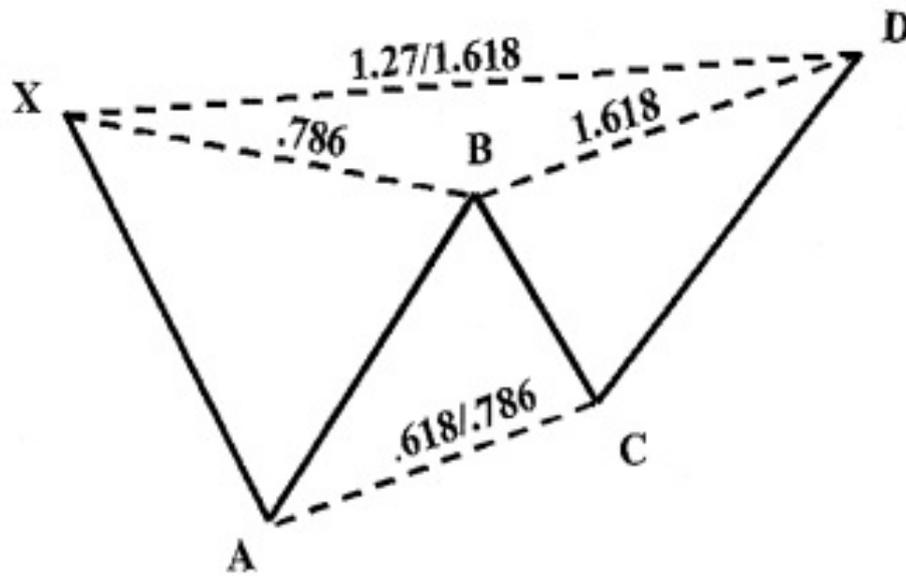


Figura 7.32: Padrão Bearish Butterfly. Fonte: Scott Carney (1999).

Após o movimento CD, pode ocorrer uma queda no preço dos ativos, caracterizando o Padrão Bearish Butterfly.

Em todos os padrões, caso o movimento de CD não esteja conforme as descrições, o Padrão Harmônico falha, ou seja, o padrão é totalmente descaracterizado, levando em consideração possíveis operações nesse intervalo de preços.

# Capítulo 8

## Produto Educacional: Educação Financeira, Matemática e a Análise Técnica

### 8.1 Introdução

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo da oficina não é ensinar a operar na Bolsa de Valores, mas por meio da Educação Financeira, mostrar as possibilidades para alocação de capital e mostrar possibilidades ao aluno, para quando for possível, o mesmo saiba que o mercado de ações é uma possibilidade de investimento. Com essa proposta o discente tem contato com uma das formas de análise do movimento dos preços das ações.

Da mesma forma, é importante contextualizar o estudo da Análise Técnica com os principais conceitos da Bolsa de Valores e do mercado de ações para que o aluno tenha noção dos movimentos de alta e baixa no mercado acionário, colocando o aluno em um contato inicial com a Bolsa de Valores.

Para a aplicação efetiva do conjunto de ações foi proposto a realização de uma oficina com uma abordagem inicialmente teórica e com o desenvolvimento de atividades práticas para aplicações dos conteúdos abordados na dissertação de mestrado.

O nível de ensino para ser aplicado a oficina, são aluno do ensino médio, preferencialmente a aluno do segundo ou terceiro ano, devendo ser observados os objetivos específicos dos seguintes tópicos: Educação Financeira, Bolsa de Valores, Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências e aplicações da ferramentas de Fibonacci nos gráficos de ações da Bolsa de Valores.

O número de alunos para a execução da oficina seria de 20 a 30 alunos, podendo ser adaptado em relação a quantidade de computadores disponíveis para cada aluno ou grupo de alunos.

A carga horária total da oficina é de 60 horas. Sendo distribuídas entre os eixos: Educação Financeira, Investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa de Valores; Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Funções e Níveis de Fibonacci; Um breve estudo sobre Análise Técnica; E Aplicações da Sequência de Fibonacci e Número de Ouro na Análise Técnica de Ações.

## 8.2 Ementa

Educação Financeira, Sequência Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Noções Básicas de Análise Técnica, aplicações da Sequência Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica de Ações.

## 8.3 Conteúdo Programático

- Princípios de Educação Financeira.
- Controle de Gastos.
- Tipos de Investimentos.
- Mercado Financeiro.
- Bolsa de Valores.
- Mercado de Ações.
- Recorrências Lineares de Primeira e Segunda Ordem.
- Teorema de Binet.
- Sequência Fibonacci.
- Número de Ouro.
- Relação Entre a Sequência Fibonacci e o Número de Ouro.
- Funções de Fibonacci.
- Gráfico de Candlestick.
- Análise Técnica de Ações.
- Aplicações de Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica.

## 8.4 Justificativa

A matemática contribui para o estudo e reconhecimento de padrões em diversas situações, com ela podemos modelar situações-problemas, estimar, equacionar e desenvolver técnicas para a tomada de decisão. A matemática é uma ferramenta que apoia o estudo de diversas áreas como por exemplo: Economia, Ecologia, química, física, geografia, geoprocessamento e diversas outras áreas.

Na Educação Financeira o aluno aprende noções sobre a conscientização em relação ao consumo, possibilidade de controle de gastos, alocação de capital, possibilidades de investimentos. Com isso os alunos começam a ter contato com formas de lidar com o dinheiro e com isso ter noção e consciência que ela pode guardar ou investir seu capital, sabendo quais formas de investimento estudar para poder obter melhores rendimentos.

A Educação Financeira é um processo onde o aluno obter o conhecimento sobre como lidar com o dinheiro, formas de consumo, proteção do dinheiro e formas de investimentos. Como todo processo, cada etapa deve ser bem assimilada e quanto antes obtiver noções relacionados a Educação Financeira, mais consciente ele estará sobre a tomada de decisão relacionados a movimentação do dinheiro.

Ao ter conhecimento sobre a Bolsa de Valores e sobre a Análise Técnica, não espera-se e nem recomenda-se que o aluno vá aplicar algum dinheiro nessa modalidade de investimentos, mas sim que ele tenha noção da existência de outras formas de alocação de capital, para que futuramente ele possa tomar a decisão de investir.

E no intuito de motivar a aplicabilidade da matemática e mostrar sua importância, temos o desenvolvimento dos tópicos de recorrências, Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, as relações entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, as funções de Fibonacci e a aplicação na Análise Técnica de ações, sendo um tópico importante para a tomada de decisão dentro da perspectiva de operar no mercado financeiro.

## 8.5 Objetivos

### 8.5.1 Objetivo Geral

Aplicar a Sequência de Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica do mercado de ações.

### 8.5.2 Objetivos Específicos

- Aprender os princípios de Educação Financeira.

- Entender o funcionamento de uma planilha de controle de Controle de Gastos.
- Aprender noções de Mercado Financeiro, investimentos e Bolsa de Valores
- Compreender os conceitos da Análise Técnica de ações.
- Utilizar os gráficos de candlestick na Análise Técnica.
- Aprender sobre Recorrências Lineares de Primeira e Segunda Ordem.
- Calcular os termos da Sequência Fibonacci utilizando o Teorema de Binet.
- Calcular o Número de Ouro utilizando o segmento áureo.
- Entender a Relação Entre a Sequência Fibonacci e o Número de Ouro.
- Calcular os números de Fibonacci utilizando as Funções de Fibonacci.
- Aplicações de Fibonacci e do Número de Ouro na Análise Técnica.

## 8.6 Metodologia

A oficina é dividida em quatro etapas e a dinâmica para a execução deve ser realizada da seguinte forma: Nas duas primeiras etapas, são realizadas as exposições teóricas com a realização das atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 sendo realizadas de forma individual.

Na atividade 8 em diante, devem ser formados duplas para a realização das atividades, visto que, cada aluno realizou as atividades individuais anteriores e teriam, em dupla, a possibilidade de desenvolver as atividades propostas, com mutua cooperação. A partir da décima atividade em diante os alunos devem ser levados para o laboratório de informática para acompanhar a realização da oficina.

A Carga Horária da oficina totaliza 60 horas e pode ser realizada integralmente no laboratório de informática caso se tenha disponibilidade, não sendo impeditivo o uso do laboratório apenas para a realização das atividades que necessite o uso do computador para os alunos, ou seja, a partir da décima atividade.

A distribuição da carga horária foi feita em relação as seguintes temáticas: Educação Financeira, Investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa de Valores; Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Funções e Níveis de Fibonacci; Um breve estudo sobre Análise Técnica; E Aplicações da Sequência de Fibonacci e Número de Ouro na Análise Técnica de Ações. A distribuição, em cada temática, foi de, respectivamente, 12 horas, 16 horas, 6 horas e 6 horas, totalizando uma carga horária de 40 horas. A carga horária das atividades do eixo 1, eixo 2, eixo 3 e eixo 4 são de, respectivamente, 4 horas, 6 horas, 4 horas e 6 horas, totalizando 20 horas. A integralidade do curso, somando a carga horária teórica e a carga horária das atividades práticas, totalizam 60 horas.

### **8.6.1 1ª Etapa: Educação Financeira, Investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa de Valores**

Nessa etapa pode-se ter a colaboração de profissionais de outras áreas e que tenham o conhecimento necessários para abordar os tópicos de Educação Financeira, investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa de Valores de tal forma que sejam passados os conhecimentos básicos relacionados a cada tópico. Essa etapa pode ser feita como uma mesa redonda, um painel ou uma exposição tradicional dos conteúdos.

O conjunto de atividade para este tópico estão no Anexo. A atividade 1, consiste em anotar os gastos para que se possa ter um panorama geral do que está sendo gasto e de suas reais necessidades, dentro de um possível orçamento.

O objetivo da atividade inicialmente não é controlar os gastos e sim ter uma disciplina no registro dos mesmos, para que no momento de socialização, se possa discutir o que poderia ter sido poupado e sobre a necessidade de cada gasto descrito, pois para poder ter a possibilidade poupar, devemos ter consciência do que está sendo gastos e da possibilidade de alocar ou cortar gastos que podem ser desnecessários.

Para completar a primeira etapa, serão realizadas as atividades 2 e 3 relacionadas aos tipos de investimentos e os caminhos para aplicação de dinheiro na Bolsa de Valores.

### **8.6.2 2ª Etapa: Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Funções e Níveis de Fibonacci**

Para essa etapa inicia-se com a apresentação da Sequência Fibonacci e da obtenção de cada termo da Sequência Fibonacci recursivamente, como motivação para o estudo de recorrências.

Será então, realizado um estudo teórico sobre recorrências de primeira e segunda ordem até concluir com a demonstração do Teorema de Binet, no qual podem ser determinados os termos de uma Sequência de Fibonacci por meio de uma fórmula.

Será exposto como obter o Número de Ouro por meio do segmento áureo e as principais relações entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, finalizando com a apresentação da Função de Fibonacci e dos respectivos níveis de Fibonacci.

Nessa etapa serão realizadas as atividades 4, 5, 6, 7 e 8 do Anexo.

### **8.6.3 3ª Etapa: Um breve estudo sobre Análise Técnica**

Para essa etapa inicia-se por meio do estudo dos gráficos de candlestick, sua formação, características e exemplos nos gráficos de ações, com o apoio da ferramenta gráfica

disponível no site <https://br.tradingview.com/chart/>.

Serão estudados os principais conceitos da Análise Técnica de ações, tais como: Conceitos e definições, um panorama geral da abordagem da Análise Técnica, as Ondas de Elliot, conceitos básicos de suporte e resistências em gráficos diários das ações negociadas na B3.

Nesse tópico os alunos serão instigados a inserir no gráfico de ações o código de negociações das empresas listadas na Bolsa de Valores brasileira e acompanha no movimento dos preços ao longo do tempo, buscando acompanhar as tendências dos preços das ações, dentro do intervalo de tempo predeterminando pelo professor.

Nessa etapa serão realizadas as atividades 9 e 10, onde na atividade 10, os alunos terão os primeiros contatos com os recursos tecnológicos para apresentação de gráficos.

#### **8.6.4 4ª Etapa: Aplicações da Sequência de Fibonacci e Número de Ouro na Análise Técnica de Ações**

Nessa etapa o professor vai explorar a aplicabilidade da relação da Sequência Fibonacci e do Número de Ouro para obter os níveis de Fibonacci e como eles podem ser obtidos nos gráficos das ações, explorando tanto as retrações de Fibonacci, as projeções e as extensões de Fibonacci na Análise Técnica, explicando e mostrando exemplos de como que elas podem ocorrer na movimentação dos preços.

Com isso o professor pode discorrer sobre os Padrões Harmônicos AB/CD, Gartley, Bat, Butterfly e Crab, explicando as características e a composição de cada uma desses padrões. Nesse caso o professor pode utilizar, como exemplo, gráficos com tempos menores do que o diário, podendo utilizar como exemplo gráficos de forex, commodities, entre outros.

Para essa etapa serão realizadas as atividades 11, 12 e 13. Assim, nessa etapa cada grupo dos alunos irão calcular quais valores corresponderiam aos níveis 23.6%, 38.2%, 50.0%, 61.8%, 78.6%, 1.618% e 2.618% de Fibonacci dada um determinado intervalo específico de preço, podendo o mesmo ser fictício, de acordo com a atividade 11.

Após a realização da atividade 9, os alunos podem ser encaminhados ao laboratório de informática, para que os discentes possam ter contato com o gráfico de ações por meio da ferramenta gráfica disponibilizada no site <https://br.tradingview.com/chart/>, utilizando as ferramentas gráficas retração de Fibonacci e a ferramenta XABCD.

Caso o laboratório de informática tenha estrutura para conciliar o movimento dos alunos no decorrer da realização das atividades, toda oficina pode ser realizada no mesmo.

## 8.7 Recursos Necessários

Quadro branco, pincel, datashow, 30 cópias das planilhas de controle de gastos, laboratório de informática com internet, trena, lápis, canetas, caderno de anotações e software computacionais.

## 8.8 Avaliação

A avaliação do rendimento de todos os participantes da oficina, será do tipo qualitativa, sendo predominantemente a avaliação qualitativa como norteador do desempenho dos alunos.

A avaliação qualitativa será realizada durante toda a oficina e serão levados em consideração a assiduidade, a participação, o compromisso com a realização das atividades, sendo observados a qualidade na execução de cada atividade proposta.

Na avaliação quantitativa serão pontuados as atividades propostas em um total de 10,0 pontos. Logo, para compor a nota final do aluno, teremos:

$$\frac{N1 + N2}{2}.$$

Sendo N1 referente a nota qualitativa e N2 referente a nota quantitativa.

O aluno deve atingir a nota mínima de 7,0 pontos para obter a certificação da oficina, não havendo possibilidades de reposição ou recuperação de nota, pois as duas notas dependem da participação em todo o processo, sendo a assiduidade requerida de no mínimo 75% para obter a aprovação na oficina.

## 8.9 Referências Bibliográficas

### 8.9.1 Bibliografia Básica

ABRAMO, Hefez. **Aritmética**. 2<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROF-MAT).

ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**. 5<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

ROCKEFELLER, Barbara. **Análise Técnica Para Leigos**. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Alta Books, 2016.

### 8.9.2 Bibliografia Complementar

CARLO, Mônica Ingrid da Silva; CARVALHO, Flávio Leonel de. **Competências Financeira do estudantes brasileiros: Análise do Pisa 2015**. In: 3<sup>o</sup> Congresso da Universidade Federal de Uberlândia de Contabilidade. Uberlândia: UFU, 2019. Disponível em: <[http://www.eventos.ufu.br/sites/eventos.ufu.br/files/documentos/110\\_artigo\\_completo.pdf](http://www.eventos.ufu.br/sites/eventos.ufu.br/files/documentos/110_artigo_completo.pdf)>. Acesso em: 13 jan. 2020.

CARNEY, Scott. **The Harmonic Trader**. Nevada: HarmonicTrader.com, 1999.

COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS. **Mercado de Valores Mobiliários Brasileiro**. 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Comissão de Valores Mobiliários, 2019.

(Série TOP Programa de Treinamento de Professores). Disponível em:<[https://www.investidor.gov.br/portaldoinvestidor/export/sites/portaldoinvestidor/publicacao/Livro/livro\\_TOP\\_mercado\\_de\\_valores\\_mobiliarios\\_brasileiro\\_4ed.pdf](https://www.investidor.gov.br/portaldoinvestidor/export/sites/portaldoinvestidor/publicacao/Livro/livro_TOP_mercado_de_valores_mobiliarios_brasileiro_4ed.pdf)>. Acesso em: 28 jan. 2020.

LEMOS, Flávio. **Análise Técnica dos Mercados Financeiros: Um Guia Completo e Definitivo dos Métodos de Negociação de Ativos**. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

# Capítulo 9

## Conclusão

Diante do exposto, por meio do alinhamento entre os assuntos Educação Financeira, recorrências, Sequência Fibonacci, proporcionalidade, Número de Ouro e funções de Fibonacci foram feitas as relações entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci, obtendo-se por meio dessas relações e das funções de Fibonacci, os chamados níveis de Fibonacci para com isso obter aplicações na Análise Técnica de ações.

Dentro da temática Educação Financeira tratou-se também de temas relacionados a mercado financeiro e investimentos, para contextualizar o entendimento da Análise Técnica de ações da Bolsa de Valores brasileira. Observando que, os conhecimentos apresentados, não são um guia para operar no mercado financeiro, mas sim, para mostrar uma das possibilidades da aplicação da matemática na Bolsa de Valores e com temáticas que podem ser utilizadas no ensino básico.

Em relação as ferramentas de Fibonacci, ou seja, as retrações, projeções e extensões foi possível encontrar movimentos dos preços de ações que atingem os níveis de Fibonacci estudados, ou seja, os níveis de 38,2%, 50% e 61,8%. E foi possível realizar um estudo das composições desses movimentos, incluindo outros níveis de Fibonacci, para encontrar padrões gráficos chamados de Padrões Harmônicos.

Um estudo gráfico dos Padrões Harmônicos com ações é mais viável, se o tempo gráfico for menor do que um dia, ou seja, com a utilização de intervalos de tempo de 1min, 5min, 15min ou 30min, pois dentro de um dia de negociação, podemos ter uma grande variação nos preços, fazendo com que ocorram varias retrações, projeções e extensões de Fibonacci em poucos dias. Notou-se que utilizando o tempo gráfico diário, houve uma grande dificuldade em definir, conforme as descrições apresentadas, a ocorrência dos Padrões Harmônicos.

Portanto, utilizando de ferramentas matemáticas e das ferramentas gráficas pode-se calcular e plotar as retrações, projeções e extensões de Fibonacci. Foi também, realizado um estudo bibliográfico das composições desses movimentos no preço das ações, onde

podem-se obter as formações gráficas tais como os padrões AB/CD, Gartley, Bat, Crab e Butterfly, descritas conforme os níveis de Fibonacci e estudados por meio dos seus autores consagrados. Enquanto a formação no preço das ações, existiu a dificuldade para encontrar os Padrões Harmônicos, visto que a ocorrência de projeções e retrações, em alguns exemplos, levaram meses para acontecerem. Porém, é possível que esses padrões sejam encontrados, utilizando tempos gráficos menores do que o tempo gráfico diário.

# Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMO, Hefez. **Aritmética**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROF-MAT)
- [2] AFEITOS, Carlos Domingues dos. **O Número de Ouro**. Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2013. Disponível em: <<https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/1872/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Carlos%20Afeitos.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2020.
- [3] ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2003.
- [4] B3. **Histórico Pessoas Físicas**. Disponível em: <[http://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/historico-pessoas-fisicas/](http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/historico-pessoas-fisicas/)>. Acesso em: 22 jan. 2020.
- [5] BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Série Cidadania Financeira: Estudos sobre Educação, Proteção e Inclusão**. 5ª ed. Brasília, 2005. Disponível em: <[https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos\\_cidadania/serie\\_cidadania/serie\\_cidadania\\_financeira\\_pesquisa\\_infe\\_br\\_%200443\\_2017.pdf](https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/serie_cidadania/serie_cidadania_financeira_pesquisa_infe_br_%200443_2017.pdf)> Acesso em: 25 jan. 2020.
- [6] BELILI, Marcelo Manechini. **A Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2015. Disponível em: <[https://sca.profmt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=1055](https://sca.profmt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1055)>. Acesso em: 21 jan. 2020.
- [7] BRASIL. **Deliberação N° 19, de 16 de Maio de 2017**. Diário Oficial [da] República. Disponível em: <[http://www.in.gov.br/materia/-/asset\\_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/4707275/do1-2018-02-28-deliberacao-n-19-de-16-de-maio-de-2017-4707271](http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/4707275/do1-2018-02-28-deliberacao-n-19-de-16-de-maio-de-2017-4707271)>. Acesso em: 05 fev. 2020.
- [8] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 20 jan. 2020.

- [9] BRUHN, Miriam *et al.* **The Impact of High School Financial Education: Experimental Evidence from Brazil**. 2013. World Bank Policy Research Working Paper No. 6723. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2367083>. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/6723.pdf?abstractid=2367083&mirid=1>>. Acesso em: 10 jan. 2020.
- [10] CARLO, Mônica Ingrid da Silva; CARVALLHO, Flávio Leonel de **Competências Financeira do Estudantes Brasileiros: Análise do Pisa 2015**. In: 3º Congresso da Universidade Federal de Uberlândia de Contabilidade. Uberlândia: UFU, 2019. Disponível em: <[http://www.eventos.ufu.br/sites/eventos.ufu.br/files/documentos/110\\_artigo\\_completo.pdf](http://www.eventos.ufu.br/sites/eventos.ufu.br/files/documentos/110_artigo_completo.pdf)>. Acesso em: 13 jan. 2020.
- [11] CARNEY, Scott. **The Harmonic Trader**. Nevada: HarmonicTrader.com, 1999.
- [12] CASTRO, Fabiano José. **Matemática Discreta: Tópicos de Recorrências Lineares e Suas Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2016. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=95602](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95602)>. Acesso em: 19 jan. 2020.
- [13] CHEN, James. **Essentials of Technical Analysis for Financial Markets**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.
- [14] COSTA, Eliane Alonso da Silva. **Educação Financeira: Uma Experiência no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2019. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150480797](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150480797)>. Acesso em: 18 jan. 2020.
- [15] COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS. **Mercado de Valores Mobiliários Brasileiro**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Comissão de Valores Mobiliários, 2019. (Série TOP Programa de Treinamento de Professores). Disponível em: <<https://www.investidor.gov.br/portaldoinvestidor/export/sites/portaldoinvestidor/publicacao/Livro/LivroTOP-CVM.pdf>>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- [16] DEBASTIANI, Carlos Alberto. **Análise Técnica de Ações Identificando Oportunidades de Compra e Venda** São Paulo: Novatec, 2008.
- [17] DIAS, Alberto Faustino. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro: Modelos Variacionais**. Dissertação (Mestrado em Matemática aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2015. Disponível em:

- <[http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306455/1/Dias\\_Alberto\\_Faustino\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306455/1/Dias_Alberto_Faustino_M.pdf)>. Acesso em: 23 jan. 2020. Federativa do Brasil, Poder Executivo, Brasília, DF, 28 fev. 2017. Seção 1, p.5-10.
- [18] FIBONACCI, Leonardo. **Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation**. New York: Springer, 2002. Traduzido por Laurence Singler.
- [19] GAUCAN, Violeta *et al.* **How to Use Fibonacci Retracement to Predict Forex Market**. Journal of Knowledge Management, Economics and Information Technology, v. 1, n. 2, p. 1-1, 2011. Disponível em:<<https://pdfs.semanticscholar.org/a320/cbfec461211e5e572487b1a99996ccea03909.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2020.
- [20] GOMES, Diego Ferreira. **Equações Diferenciais e Alguns Modelos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, PI, 2014. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=382](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=382)>. Acesso em: 18 jan. 2020.
- [21] GUNTHER, Max. **Os Axiomas de Zurique Os Conselhos dos Branqueiros Suíços para Orientar Seus Investimentos** 13<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: BestBusiness, 2019. Tradução de: Isaac Piltcher
- [22] HAN, Jeong Soon; KIM, Hee Sik; NEGGERS, Joseph. **On Fibonacci Functions With Fibonacci Numbers**. Advances in Difference Equations, v. 2012, n. 1, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-126>> Acesso em: 04 fev. 2020
- [23] INTERDISCIPLINARIDADE E EVIDÊNCIAS NO DEBATE EDUCACIONAL. **O Que os Dados do Pisa Mostram Sobre Educação Financeira no Brasil? Uma Análise a Partir dos Microdados da Avaliação de Competência Financeira do Pisa 2015**. São Paulo, 2018. Disponível em:<[http://www.portaliede.com.br/wp-content/uploads/2018/09/Estudo\\_Iede\\_-Compet%C3%Aancia\\_Financeira-1.pdf](http://www.portaliede.com.br/wp-content/uploads/2018/09/Estudo_Iede_-Compet%C3%Aancia_Financeira-1.pdf)>. Acesso em: 22 jan. 2020.
- [24] LAHUTA, Dawid. **Technical Analysis of Price Formations with Fibonacci Sequence on Warsaw Stock Exchange**. World Scientific News, v. 57, p. 381-396, 2016. Disponível em: <<http://psjd.icm.edu.pl/psjd/element/bwmeta1.element.psjd-85aa8564-388d-409c-8d9b-ce5316614b68;jsessionid=35A4A64C9E15DE0DD35B675A6D40E113>>. Acesso em: 20 jan. 2020.
- [25] LEMOS, Flávio. **Análise Técnica dos Mercados Financeiros: Um Guia Completo e Definitivo dos Métodos de Negociação de Ativos**. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

- [26] LIMA, Elon Lages. *et al.* **Temas e Problemas Elementares**. 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática)
- [27] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática)
- [28] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática: E Outras Histórias**. 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática)
- [29] MELLAGI FILHO, Armando; ISHIKAWA, Sérgio. **Mercado Financeiro e de Capitais**. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Atlas, 2003.
- [30] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT)
- [31] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais**. v.2 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção do Professor de Matemática)
- [32] OECD. **Smarter Financial Education: Key Lessons From Behavioural Insights for Financial Literacy Initiatives**. Paris, 2019. Disponível em: <<http://www.oecd.org/financial/education/smarter-financial-education-behavioural-insights.pdf>>. Acesso em: 22 jan. 2020.
- [33] OECD. **Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness**. Paris: OECD Publishing, 2005. Disponível em: <<https://www.oecd.org/finance/financial-education/35108560.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2020.
- [34] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação a Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções**. 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção Olimpíadas de Matemática)
- [35] PENSAVENTO, Larry.; JOUFLAS, Leslie. **Trade What You See: How To Profit from Pattern Recognition**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- [36] PRECHTER, Robert Rougelot; FROST, Alfred John. **Elliott Wave Principle: Key to Market Behavior**. 10<sup>a</sup> ed. Georgia: New Classic Library, 2005.
- [37] ROCKEFELLER, Barbara. **Análise Técnica Para Leigos**. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Alta Books, 2016.
- [38] SANTOS, Fábio Honorato dos. **Funções de Fibonacci: Um Estudo Sobre a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, PB, 2018. Disponível em: <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150092691](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150092691)>. Acesso em: 19 jan. 2020.

- [39] SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a Matemática do Número  $\varphi$ : O Número de Ouro**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2013. Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=27683](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27683)>. Acesso em: 23 jan. 2020.
- [40] SELAN, Beatriz. **Mercado Financeiro**. Universidade Estácio de Sá, 2015. Disponível em: <[https://www.academia.edu/17153250/LIVRO\\_PROPRIETARIO\\_Mercado\\_financeiro](https://www.academia.edu/17153250/LIVRO_PROPRIETARIO_Mercado_financeiro)> Acesso em: 27 jan. 2020.
- [41] SILVA, Bruno Astrolino da. **Números de Fibonacci e Números de Lucas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2017. Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=73922](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=73922)>. Acesso em: 21 jan. 2020.
- [42] SILVA, Marcella Alves da; LEAL, Edvalda Araujo; ARAUJO, Tamires Sousa. **Habilidades Matemáticas e o Conhecimento Financeiro no Ensino Médio**. Revista de Contabilidade e Organizações, v. 12, p. e147269, 28 dez. 2018. Disponível em: <<https://www.revistas.usp.br/rco/article/view/147269/149848>>. Acesso em: 22 jan. 2020.
- [43] SILVA, Reginaldo Leoncio. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro: Contexto Histórico, Propriedades, Aplicações e Propostas de Atividades Didáticas para Alunos do Primeiro Ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, BA, 2017. Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=89387](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=89387)>. Acesso em: 21 jan. 2020
- [44] SUNG, Victor Sae Hon. **Sequência de Fibonacci e suas Aplicações**. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos: São Carlos, 2012.
- [45] VEIGA, Alexandre Menezes. **Educação Financeira do Ensino Médio: Uma Proposta de Curso de Extensão para os Acadêmicos de Licenciatura em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - ULBRA, Canoas, RS, 2019. Disponível em: <<http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/349/344>>. Acesso em: 18 jan. 2020.
- [46] VIEIRA, Igor Leandro. **Números de Fibonacci e Aplicações em Análise Técnica**. In: XXV Seminário de Iniciação Científica da PUC-RJ. Rio de Janeiro, PUC-RJ, 2017. Disponível em: <[http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio\\_resumo2017/relatorios\\_pdf/ctc/MAT/MAT-Igor%20Leandro%20Vieira.pdf](http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2017/relatorios_pdf/ctc/MAT/MAT-Igor%20Leandro%20Vieira.pdf)>. Acesso em: 23 jan. 2020.

- [47] ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

Parte I

Apêndice

# Apêndice A

## Apêndice

### A.1 Atividades Para o Desenvolvimento da Oficina

#### A.1.1 EIXO 1: Educação Financeira, Investimentos, Mercado Financeiro e Bolsa de Valores

**Atividade 1** - Cada aluno ou aluna, irá receber uma planilha de gastos, onde será anotado, durante o período do curso, os gastos que foram realizados pela família, especificando o produto, o valor e uma breve justificativa para o motivo do consumo.

**Atividade 2** - Quais passos financeiros, deve-se, preferencialmente, se seguir, para chegar a investir no mercado financeiro ?

**Atividade 3** - Como a matemática pode ser relacionada com a Educação Financeira?

#### A.1.2 EIXO 2: Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Recorrências, Funções e Níveis de Fibonacci

**Atividade 4** - Encontre o quinto, o oitavo, o décimo e o décimo segundo termo da Sequência de Fibonacci utilizando a relação de recorrência.

**Atividade 5** - Calcular alguns termos de Fibonacci utilizando a fórmula de Binet.

**Atividade 6** - Encontre o Número de Ouro utilizando o segmento áureo.

**Atividade 7** - Quais os expoentes da Função de Fibonacci para que tenhamos os níveis 23.6%, 38.2%, 50.0%, 61.8%, 78.6%, 1.618%, 2.618% e 3.618% de Fibonacci.

**Atividade 8** - Essa atividade, pode ser realizada com a formação de duplas, onde cada aluno irá calcular as alturas entre si e irá identificar qual parte de seus corpos correspondem aos níveis de 38.2%, 50.0% e 61.8% de Fibonacci.

### A.1.3 EIXO 3: Um Breve Estudo sobre Análise Técnica

**Atividade 9** - Os alunos irão construir um gráfico diário de candlesticks, em um histórico de preço fictício, baseado nos preços passados pelo professor, para a formação de 6 candlesticks, nesse sentido o professor deve passar os preços de abertura, fechamento, máximo e mínimos do dia.

**Atividade 10** - Por meio do estudo gráfico de algumas ações, os alunos devem identificar alguns pontos de suporte e resistência e as possíveis tendências do preço das ações em um período de tempo.

### A.1.4 EIXO 4: Aplicações da Sequência de Fibonacci e Número de Ouro na Análise Técnica de Ações

**Atividade 11** - Dados, respectivamente, os preços de fundo e topos de R\$ 2,0 e R\$ 4,0, R\$ 10,0 e R\$ 15,0, R\$ 8,50 e R\$ 12,20, identifique quais os preços encontram-se nos níveis de 23.6%, 38.2%, 50.0%, 61.8%, 78.6%, 1.618% e 2.618% de Fibonacci em cada um dos casos.

**Atividade 12** - Cada aluno ou grupo de aluno irá localizar os níveis 23.6%, 38.2%, 50.0%, 61.8%, 78.6%, 1.618% e 2.618% de Fibonacci no gráfico, das ações apontados pelo professor, por meio da ferramenta gráfica retração de Fibonacci.

**Atividade 13** - Os alunos devem identificar algum Padrão Harmônico no gráfico de ações, sejam eles, o Padrão AB/CD, Gartley, Bat, Butterfly e Crab nos gráficos dada pelo site <https://br.tradingview.com/chart>, por meio da ferramenta XABCD. Caso não seja possível identificar algum, busque algum padrão que se aproxime dos Padrões Harmônicos estudados.