UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ÁLLISON PINTO BATISTA

UMA VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE REAL NO PAÍS E UMA PROPOSTA EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA A DISCIPLINA EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Catalão – GO
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor e o orientador firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação   [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Állison Pinto Batista

3. Título do trabalho

Uma Visão Geral Sobre a Análise Real no País e uma Proposta em Sequências Didáticas para a Disciplina em Cursos de Licenciatura em Matemática

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM   [   ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;

- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **ALLISON PINTO BATISTA**, **Discente**, em 06/08/2020, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Roberto Bergamaschi**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2020, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1440967** e o código CRC **63B2BF28**.

ÁLLISON PINTO BATISTA

UMA VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE REAL NO PAÍS E UMA PROPOSTA EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA A DISCIPLINA EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.

Catalão – GO
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Batista, Állison Pinto
Uma visão geral sobre a Análise Real no país e uma proposta em sequências didáticas para a disciplina em cursos de Licenciatura em Matemática [manuscrito] / Állison Pinto Batista. − 2020.
161 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.
Dissertação (Mestrado) − Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT − Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional − Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2020.
Bibliografia.
Inclui quadros, lista de quadros.

1. Análise Real. 2. Análise Matemática. 3. Ensino de Análise. 4. Licenciatura em Matemática. 5. Curso de Matemática. I. Bergamaschi, Paulo Roberto, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **13** da sessão de Defesa de Dissertação de **Állison Pinto Batista**, que confere o título de Mestre em **Matemática**.

Em **06 de agosto de 2020**, às **09 horas**, reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dr. Paulo Roberto Bergamaschi (IMTec/RC/UFG - UFCAT em transição), orientador à distância pelo RNP, Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro (IMTec/RC/UFG - UFCAT em transição), membro titular interno à distância pelo RNP e Dr. Antônio Carlos Nogueira (FAMAT/UFU), membro titular externo à distância pelo RNP** para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Sistema de webconferência da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP), procederem a avaliação da Dissertação intitulada *"UMA VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE REAL NO PAÍS E UMA PROPOSTA EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA A DISCIPLINA EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"*, de autoria de **Állison Pinto Batista**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da "RC/UFG - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada **Aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente. **Seis de agosto de dois mil e vinte**.

Obs.: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Marcio Roberto Rocha Ribeiro**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2020, às 11:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Roberto Bergamaschi**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2020, às 11:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Antonio Carlos Nogueira**, **Usuário Externo**, em 06/08/2020, às 11:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **ALLISON PINTO BATISTA**, **Discente**, em 06/08/2020, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1430776** e o código CRC **7EDB4CA9**.

AGRADECIMENTOS

Considero razoavelmente difícil citar uma a uma as pessoas que fizeram ou fazem parte da minha vida e as instituições que participaram ou participam da minha vida, e me proporcionaram o conhecimento que apreendi e compreendi ao longo do tempo, a sabedoria para tomar as decisões que me tornaram quem sou no presente, a satisfação e o estímulo para atualmente exercer o ofício de professor, e a felicidade que encontro a cada dia com minha família. Mesmo assim, citarei algumas dessas pessoas e instituições.

Agradeço a meu pai, Divino, à minha mãe, Maria (*in memoriam*), à minha madrasta, Lourdes, a meus tios, e em particular Eli e Lázaro, pelo acompanhamento, pelo auxílio, e pelas orientações que se refletem na minha postura perante o conhecimento e as pessoas.

Agradeço às minhas irmãs, e em particular Anna Clara e Anne Karoline, por fazerem parte da minha vida e me mostrarem que sempre tenho algo a aprender, bem como também sempre tenho algo a questionar.

Agradeço aos meus primos e a suas famílias, e em particular Élisson e Heloísa, por me incentivarem a trilhar a carreira de professor e por me auxiliarem no desenvolvimento ao longo deste processo.

Agradeço à minha esposa, Lorena, por me proporcionar, desde que nos enamoramos, cada vez mais felicidade a cada dia de vida, cada vez mais alegrias em nosso convívio, a atenção, o carinho e a simplicidade mais sinceras por mim, e o imenso auxílio ao longo da minha vida, inclusive quando estou abatido e preocupado.

Agradeço a meu sogro, Gilmar, e à minha sogra, Raciná, por serem pais para mim também, pelo convívio, pelo acompanhamento, pelo auxílio, pelas orientações que se refletem na minha postura perante o conhecimento e as pessoas, e serem, com seus filhos, minha segunda família.

Agradeço às diferentes pessoas, dentre estudantes e professores, que conheci ao longo do curso de pós-graduação no polo Catalão, na Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da atual Universidade Federal de Catalão, por todo o convívio, incentivo e auxílio tanto da parte deles quanto da minha.

Agradeço ao corpo docente da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da atual Universidade Federal de Catalão por proporcionar outro olhar para a profissão que atualmente exerço.

Agradeço a meu orientador, professor Paulo, por concordar com o desenvolvimento do ideário inicial que o levou a me orientar e me permitiu produzir o presente texto, e pela valiosa orientação recebida ao longo deste árduo processo.

Agradeço também às diferentes pessoas, dentre estudantes e professores, que conheci ao longo do meu exercício profissional no Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente da Universidade Federal do Amazonas, por todo o convívio, incentivo e auxílio tanto da parte deles quanto da minha, e, enquanto parte do corpo docente da instituição, por ter a oportunidade de tomar decisões para contribuir com efetivas melhorias para a instituição e para os cursos nos quais trabalho.

Finalmente, agradeço à Universidade Federal do Amazonas por conceder o afastamento necessário para a realização deste trabalho como parte do aprimoramento do meu exercício profissional.

RESUMO

A presente abordagem tem por objetivo compreender as dificuldades e as críticas enfrentadas no ensino de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática e apresentar uma proposta voltada à discussão dos conceitos da Análise Real com uma ênfase maior sobre as propriedades de conjuntos e funções abordadas no Ensino Básico. A partir do levantamento bibliográfico de trabalhos voltados à discussão do ensino de Análise Real e do levantamento documental de Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática ofertados por Instituições Federais de Ensino Superior, recorremos a trabalhos e títulos voltados ao estudo da História da Matemática para compreender possíveis razões para as críticas evidenciadas nos trabalhos da atualidade. Analisamos as propostas de disciplinas de Análise Real dos Projetos Pedagógicos com o intuito de discutir os assuntos nelas abordados e os enfoques dados às disciplinas, elaborando categorias a partir das redações neles dispostas para este fim. A partir destas informações, observamos críticas à abordagem das disciplinas de Análise Real e propostas para aprimorar a abordagem das disciplinas de maneira a promover uma compreensão significativa e alinhada à finalidade profissional do licenciado. Observamos como uma noção de rigor permeou o aprimoramento da investigação em Matemática e trouxe consequências para a concepção de disciplina de Análise Real em vigor. A partir das observações levantadas, propomos uma abordagem em forma de sequências didáticas sobre alguns tópicos estudados em disciplinas de Análise Real, com a finalidade de realçar alguns conceitos e questões advindas do próprio Ensino Básico, e esperamos que a abordagem proposta possa motivar transformações na concepção das disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática em um futuro próximo.

Palavras-chave: Análise Real. Análise Matemática. Ensino de Análise. Licenciatura em Matemática. Curso de Matemática.

ABSTRACT

The present approach aims to understand the difficulties and criticisms faced the teaching of Real Analysis in Mathematics Degree courses and to present a proposal aimed at discussing the concepts of Real Analysis with a greater emphasis on the properties of sets and functions addressed in Brazilian Basic Teaching. Based on the bibliographic survey regarding works aimed at discussing the teaching of Real Analysis and the documentary survey of Pedagogical Projects of Mathematics Degree courses offered by Brazilian Federal Institutions of Higher Education, we resort to works and titles aimed at the study of the History of Mathematics to understand possible reasons for the criticisms evidenced in current works. We analyze the proposals for disciplines of Real Analysis of Pedagogical Projects in order to discuss the subjects there covered and the focus given to the disciplines, registering categories based on the wordings there available for this purpose. Based on this information, we observed criticisms of the approach of the Real Analysis disciplines and proposals to improve disciplines' approach in order to promote a meaningful understanding and aligned with the professional purpose of the graduate. We observed how an impression of rigor reached the improvement of research in Mathematics and brought consequences to the discipline conception of Real Analysis discipline in force. From those raised observations, we propose an approach through didactic sequences for some topics studied in Real Analysis, in order to highlight some concepts and issues arising from Basic Education itself, and we hope the proposed approach motivate a change in the conceptions regarding the curricular components of Mathematics teaching courses in the near future.

Keywords: Real Analysis. Mathematical Analysis. Analysis Teaching. Mathematics Teaching. Mathematics Course.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Apesar da consolidação dos cursos de Matemática no país, pode ser considerado recente o movimento de discussão de componentes curriculares considerados específicos aos cursos de Licenciatura em Matemática disponíveis no país, tendo em vista as reformulações recentes efetivadas nos cursos de Instituições Federais de Ensino Superior.

Mesmo com tais reformulações, há ainda uma concepção estrita a respeito de determinados tópicos estudados em um curso de Licenciatura em Matemática, que levanta diversas preocupações quanto à maneira de trabalhá-los e ao aproveitamento dos estudos para os profissionais em formação.

Tal situação é enfrentada, em particular, pelos tópicos considerados pertinentes à *Análise Real*. Mesmo com a manifestação de preocupações, há ainda pouco avanço sobre a discussão de disciplinas referentes à Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática, retratado também com a escassez de trabalhos que se voltem à discussão específica do tema ao longo da realização de uma dessas disciplinas.

Neste ínterim, a ocorrência de poucos trabalhos em torno da temática mostra uma necessidade de abrir algumas vertentes para discussão que possam motivar estudos presentes e futuros sobre o assunto, com a finalidade de elaborar e amadurecer propostas para a atuação com os tópicos da Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Apesar da constatação, os trabalhos que discutem a concepção e a realização de disciplinas de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática trazem consigo algumas vertentes para questionamento:

- que decisões são tomadas para incluir ou excluir tópicos a serem estudados nas disciplinas, que objetivos são traçados para a realização das disciplinas tanto a partir do ementário quanto a partir dos objetivos do curso, e que concepção de disciplina estes fatores determinam;
- como os professores das disciplinas compreendem a necessidade de uma abordagem "*rigorosa*" para as disciplinas, bem como esta abordagem poderia evidenciar um recurso para a atuação profissional;
- que relações podem ser estabelecidas entre os assuntos trabalhados nas disciplinas e assuntos trabalhados ao longo do Ensino Básico;
- e quais as possíveis razões para o desempenho dos estudantes ao longo das

disciplinas de Análise Real em seus cursos.

O presente texto é desenvolvido sob a ótica do levantamento de informações que conduzam às preocupações da atualidade para, através dessas informações, abrir espaço para a formulação de uma proposta para futura implementação ao longo de uma disciplina de Análise Real de um curso de Licenciatura em Matemática.

1.1 A Concepção do Trabalho

A perspectiva desenvolvida ao longo deste texto é estabelecida sobre a esteira de uma pesquisa exploratória construída a partir de levantamento bibliográfico e documental.

O levantamento bibliográfico diz respeito, inicialmente, aos trabalhos referentes a procedimentos adotados ao longo da realização de uma disciplina de Análise Real, e é complementado com obras referentes à investigação de aspectos relevantes para a realização da pesquisa.

O levantamento documental se restringe à obtenção e à avaliação de um corpo documental de Projetos Pedagógicos de Cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Federais de Ensino Superior vigentes em um determinado período, dos quais serão extraídas informações referentes às disciplinas de Análise Real neles previstas.

A avaliação das informações contidas nos documentos seguirá a forma de identificação de informações correlatas e sua consequente categorização, de maneira a evidenciar alguns aspectos destacados nos trabalhos levantados inicialmente para a proposição da pesquisa.

A partir do conjunto de informações obtidas e discutidas, será elaborada uma proposta para atuação ao longo da realização de uma disciplina de Análise Real em um curso de Licenciatura em Matemática, voltada à abordagem de alguns tópicos relevantes.

1.2 Procedimentos Metodológicos

O levantamento bibliográfico preliminar foi provido a partir de uma busca, na Biblioteca Nacional de Teses e Dissertações, de trabalhos referentes à temática *Ensino de Análise* a partir dos seguintes termos de pesquisa: Análise Real, Análise Real na Licenciatura, Disciplina de Análise, Ensino de Análise, e Ensino de Análise Real.

Para delimitar melhor as relações de trabalhos obtidas para cada termo de pesquisa, foram considerados os trabalhos que se voltam a pesquisar a temática selecionada sob o ponto de vista da abordagem de uma disciplina de Análise Real em um curso de Licenciatura em Matemática. O Quadro 1 mostra os textos obtidos a partir das condições definidas para a realização do levantamento bibliográfico preliminar.

Quadro 1 – Resultado do Levantamento Bibliográfico Preliminar.

Ano	Tipo	Trabalho e Autoria
2001	Tese	REIS, Frederico S.. A Tensão Entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didaticos.
2006	Dissertação	BOLOGNEZI, Rosemeire A. L.. A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática Para o Ensino Médio.
2010	Dissertação	BRITO, Alexandre B.. Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em Fundamentos de Análise Real: da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de licenciatura em matemática.
2011	Dissertação	AMORIM, Lilian I. F.. A (Re)Construção do Conceito de Limite do Cálculo Para a Análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática.
2011	Dissertação	OTERO-GARCIA, Sílvio C.. Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento Sobre Seu Ensino.
2012	Dissertação	MARTINES, Paula T.. O Papel da Disciplina de Análise Segundo Professores e Coordenadores.
2013	Dissertação	GOMES, Danilo O.. A disciplina de análise segundo licenciados e professores de matemática da educação básica.
2014	Dissertação	FERNANDES JÚNIOR, Valter C.. Repensando o Ensino de Análise: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais.
2017	Dissertação	OLIVEIRA, Mireli M.. Conceitos de Análise Matemática na Reta Para Bem Compreender os Números Reais no Ensino Médio.

Fonte: elaboração do autor, 2020.

O levantamento documental foi provido a partir da busca por Projetos Pedagógicos de Cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições Federais de Ensino Superior, isto é, de Universidades Federais e de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. Os critérios para a seleção dos documentos foram: o Projeto deve estar disponibilizado em um único arquivo e hospedado no domínio eletrônico da instituição, e deve conter os ementários para todas as disciplinas nele propostas. Foram obtidos, no período de maio a outubro de 2019, 123 documentos nestas condições.

De posse dos trabalhos, foi conduzida uma avaliação com a finalidade de levantar críticas à realização das disciplinas de Análise Real e levantar concepções e propostas para atuação nas referidas disciplinas. A partir desta avaliação, surgiram as preocupações já levantadas anteriormente, que assumem, também, a seguinte feição: a concepção de disciplina que se deseja para os cursos; a necessidade de uma abordagem "*rigorosa*" para os assuntos compreendidos nas disciplinas; o estabelecimento de relações entre os assuntos das disciplinas e assuntos do Ensino Básico; o impacto dos procedimentos adotados para as disciplinas no desempenho e no preparo para a atuação profissional dos estudantes.

De posse dos documentos, foram extraídos os tópicos dos ementários das disciplinas de Análise Real para observar os tópicos predominantes na proposição das disciplinas e possíveis sugestões a partir da frequência desses tópicos em uma perspectiva de reformulação futura. Além disso, foram extraídas as redações dos objetivos propostos para as disciplinas, quando possível, para realizar uma categorização que auxiliasse a perceber pelo menos uma das preocupações levantadas.

A categorização seguiu o procedimento referente à avaliação das redações para decidir que redação de categoria sintetizava melhor a expressão de cada objetivo elencado; neste sentido foi utilizada a proposição de Bardin (2011).

De posse da categorização dos objetivos e das premissas a respeito dos tópicos estudados atualmente nas disciplinas de Análise Real, e dos trabalhos consistentes do levantamento bibliográfico preliminar dos quais emanam as preocupações que motivam as críticas à realização das disciplinas de Análise Real e as proposições de intervenção para a disciplina, a pesquisa passou a se voltar para uma avaliação histórica que possa auxiliar a explicar as preocupações levantadas e à propositura de uma intervenção para aplicação futura.

1.3 A Organização do Presente Texto

Ao longo do presente texto, são levantados aspectos voltados a compreender dificuldades e críticas enfrentadas no ensino de Análise Real em cursos de Licenciatura em

Matemática, e, a partir das constatações levantadas, é enunciada uma proposta para a abordagem de alguns dos conceitos da Análise Real considerando a ênfase em propriedades de conjuntos e de funções como maneira de vincular estes conhecimentos ao Ensino Básico.

Para a realização deste trabalho, partiu-se das premissas de que: a abordagem atualmente dada às disciplinas de Análise Real pressupõe uma compreensão teórica sobre conjuntos e funções e a admite estabelecida em algum momento anterior, mas não parece proporcionada previamente ao longo dos cursos de Licenciatura em Matemática; a ênfase sobre as relações advindas do estudo de subconjuntos de conjuntos numéricos como subsídio para o estudo do conjunto de números reais potencializa relações mais claras com a própria compreensão dos conjuntos de números racionais e números reais no Ensino Básico.

Diante do exposto, a primeira etapa foi estudar como ocorreram os questionamentos que culminaram na concepção atual de Análise Real. A História da Matemática traz, neste ínterim, a necessidade de observar o desenvolvimento conceitual surgido a partir dos questionamentos quanto ao uso desregrado e, por vezes, irresponsável, de propriedades do Cálculo Diferencial e Integral, conduzindo não apenas a conclusões ainda mais questionáveis, mas à necessidade de serem estabelecidos parâmetros relevantes para a propositura de conceitos e propriedades, em particular, para os métodos do Cálculo Diferencial e Integral. A postura adotada caracteriza a compreensão de "*rigor*".

A partir disso, é importante conhecer como este processo foi divulgado e implementado no país como parte de uma proposta para um curso superior. Neste ínterim, é relevante a discussão sobre como surgiu o curso de Matemática no país e as transformações que nele ocorreram para alcançar o patamar atual, inclusive como maneira para compreender como os cursos de Licenciatura em Matemática podem vir a apresentar as características das disciplinas de Análise Real. Em conjunto ao levantamento documental e ao levantamento bibliográfico, o estudo levanta considerações importantes para nortear uma proposta de intervenção.

A proposta de intervenção, por sua vez, segue um formato definido pela elaboração de sequências didáticas, voltadas a instigar tanto o professor quanto o estudante a respeito das relações conceituais passíveis de construção. Nesta seara, as sequências didáticas têm por finalidade estabelecer relações entre tópicos do Ensino Básico referentes à percepção do infinito e de números racionais e irracionais com o estudo de subconjuntos de números racionais e números reais ao longo de alguns tópicos de uma disciplina de Análise Real.

2 BREVE INCURSÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A História da Matemática traz um olhar particular sobre diversos acontecimentos importantes na discussão e no desenvolvimento da Matemática, e faz uma avaliação profunda sobre a evolução de diversos conceitos e propriedades que culminaram nos conhecimentos que hoje são discutidos nos cursos de Licenciatura em Matemática do país.

No que tange à atualidade, as discussões que motivaram diversos dos atuais conceitos sobre a Análise Real surgem com a concepção do Cálculo Diferencial e Integral, no século XVII. Com a sequência de descobertas ocorridas ao longo dos séculos XVII e XVIII, houve um movimento importante no sentido de avaliar os rumos tomados pelas descobertas e pelas conclusões delas tiradas, iniciado ao final do século XVIII e intensamente conduzido ao longo do século XIX. Pode-se dizer que este movimento foi responsável pelo "*rigor*" com que hoje é tratada a Matemática como um todo.

Para melhor examinar os motivos que culminaram na maneira como hoje é trabalhada a Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática do país, é conduzida uma discussão sobre a concepção dada ao Cálculo Diferencial e Integral nos séculos XVIII e XIX, com o intuito de perceber as influências que caracterizaram a profunda investigação sobre os conceitos e propriedades até então tidos como verdadeiros e válidos que culminaram em uma mudança de postura quanto a que conceitos admitir e formular para a fundamentação que é atualmente conhecida como Análise Real.

2.1 A Sistematização de Conhecimentos e o Método Analítico

Tendo em vista o desenvolvimento da Matemática à época, é importante mencionar que, ainda no século XVIII, a principal referência para como a Matemática deveria ser realizada era o texto de Euclides de Alexandria (século IV a. C.), *Os Elementos*. Devido ao intenso desenvolvimento sobre as aplicações ao Cálculo, foram constituídos alguns livros-texto, criticados e cujas críticas passaram a conduzir as discussões sobre *os fundamentos* do Cálculo.

Particularmente, na França do século XVIII, Schubring (2005) aponta que havia intensa discussão sobre o processo de fundamentação dos conceitos matemáticos em uso à época, e, em particular, a discussão sobre dois métodos de elaboração científica: o método de análise e o método de síntese. Havia uma preferência, no tocante às áreas aplicadas, pelo método de síntese, e o método de análise começa a ganhar forma ao final do século XVIII, culminando com a criação da *École Polytechnique* na França, em 1795.

O então florescente método analítico na França traz consigo um embate de natureza teórica quanto aos métodos empregados na época para a discussão em Matemática. Para Schubring (2005), ao longo do século XVIII, surgem as discussões sobre o então chamado *méthode des infiniment petits* (método de infinitésimos) como recurso válido para a fundamentação dos trabalhos em Cálculo Diferencial e Integral da época. Com efeito, conforme aponta Vianna (2009), este método era amplamente utilizado nas discussões científicas das aplicações do Cálculo e era tido como um dos mais importantes e necessários inclusive para a Matemática, devido às facilidades que trazia nas manipulações.

Por outro lado, surgiram muitas críticas ao método de infinitésimos, em virtude de, mesmo com tamanha utilidade, não haver uma apresentação clara do que seriam os infinitésimos. Katz (2009) menciona que as primeiras críticas ao uso do método de infinitésimos partiram de George Berkeley (1685 – 1753), em uma abordagem sobre o *método das fluxões*, ou *método dos fluxos*. Berkeley questiona o uso de uma quantidade volátil para o desenvolvimento algébrico de uma sentença, de maneira que a quantidade se apresenta nos cálculos mas pode ser desprezada em seguida.

Alguns estudiosos procuraram se atentar a uma tal crítica ainda no século XVIII. Katz (2009) destaca as iniciativas de Colin MacLaurin (1698 – 1746) e Leonhard Euler (1707 – 1783) neste processo. Maclaurin procurou trazer uma abordagem através do método de fluxos, concluindo que os infinitésimos nada mais seriam do que uma abordagem natural e mais simplificada deste método, em vez de algo inteiramente novo. Já Schubring (2005) aponta que Euler, por sua vez, considerava os infinitésimos como quantidades voláteis que efetivamente eram iguais a zero, e, portanto, para ele, o Cálculo lidava com cálculos envolvendo zeros. Nesta concepção, os infinitésimos não provocam alterações significativas em valores propriamente ditos.

Com tal discussão, Katz (2009) aponta que Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) reúne as ideias de Maclaurin e de Euler no estudo das razões, observando que tais razões são dadas a partir de quantidades que, efetivamente, podem ser tornadas iguais a zero por *aproximação*. Para Burton (2010), a visão de d'Alembert ainda não permite trazer à tona alguma noção, mesmo que imprecisa, de *limite*, mas traz consigo a abordagem de uma *condição limite* apoiada em recursos geométricos e ideias vagas a respeito de um movimento contínuo.

Neste contexto de discussão sobre o que é conceituável, Schubring (2005) menciona a relevância da abordagem de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813). Lagrange estudava o desenvolvimento de funções em séries de potências, trabalhando com o Cálculo de maneira a se afastar das discussões sobre os métodos de fluxos e de infinitésimos. Ao elaborar seu material textual para as *Lições de Cálculo* que ministrava na *École Polytechnique*, Lagrange fazia menção explícita à noção de *limite* como um método para a fundamentação dos trabalhos desenvolvidos no Cálculo até então.

Ainda na visão de Schubring (2005), a partir de 1800, com a vacância da vaga de Lagrange na *École Polytechnique*, assume Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843). Lacroix trouxe forte influência no tocante à discussão e à adoção do conceito de limite como etapa necessária ao desenvolvimento analítico do Cálculo. Lacroix traz em seu material textual uma compreensão moderna sobre o estado da arte do Cálculo e a apresentação mais consistente do *método de limites*, além de almejar um processo de fundamentação dos métodos do Cálculo dominantes à época. Apesar desta abordagem, Lacroix faz menção aos infinitésimos com a ressalva de tal conceito carecer de "*rigor*". A finalidade de Lacroix com tal menção é a de discutir a aplicabilidade do conceito de concatenação de curvas para fins do estudo de diferenciabilidade de curvas.

Outro pesquisador que trabalhou ativamente com a fundamentação do Cálculo foi Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857). Conforme aponta Schubring (2005), Cauchy lecionou o curso de *Análise Algébrica* da *École Polytechnique* entre 1815 e 1830, quando, por razões políticas, viu-se forçado a se exilar. Seu material textual é elaborado a partir de um princípio de "*rigor*" em que dispõe do método de limites como fundamento para os demais métodos de aplicação do Cálculo Diferencial e Integral.

Logo após os dois primeiros cursos lecionados na *École Polytechnique*, houve, de acordo com Schubring (2005), um forte movimento contra a proposta de Cauchy para o curso de Análise Algébrica. Cauchy teve a oportunidade de reformular integralmente o programa do curso, em 1816, eliminando a menção explícita ao método de infinitésimos, e a condução deste curso foi tormentosa em virtude de Cauchy requerer uma quantidade maior de aulas para lecioná-lo. Cauchy logo foi forçado a recuar, dado que os demais membros da *École Polytechnique* se insurgiram contra a eliminação do método de infinitésimos e exigiram uma intervenção direta na reformulação do programa do curso, determinando a reinclusão do método de infinitésimos no programa, fato que determinou o foco dos cursos para o uso do método de síntese.

É importante trazer considerações sobre os mencionados método de análise e método de síntese. Apesar da dualidade no emprego das palavras *análise* e *síntese*, deve ser dado atenção ao que realmente tais palavras significaram na época em discussão. Para Grattan-Guinness (1990), o processo de análise de uma aplicação busca obter conceitos fundamentais de caráter impecável sobre os quais é possível fundamentar a aplicação e, possivelmente, melhorar seu escopo, enquanto o processo de síntese faz uso destes conceitos para obter as propriedades que permitiram a obtenção da aplicação. Com vistas à discussão em voga, é possível observar que o chamado método de síntese fazia uso de ideias tomadas como fundamentadas para a discussão em Matemática e das aplicações de Matemática, razão pela qual o método de análise ganhou um pequeno espaço para a efetiva fundamentação destas ideias na França.

Ainda nesta seara, Schubring (2005) aponta que, anterior a 1800 havia vários materiais textuais sobre as diferentes seções do Cálculo, e alguns sobre a abordagem de funções. Nestes materiais, é notório que nenhum deles aborda ou recomenda o uso do conceito de infinitésimos, e procuram se alinhar tanto com o desenvolvimento do conceito de limite da época quanto com o desenvolvimento do método analítico. Dentre alguns desses materiais estão as *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* (Lições de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral), de Jacques-Antoine-Joseph Cousin (1739 – 1800), em 1796, os cursos de Gaspard Riche de Prony (1755 – 1839) na *École Polytechnique* desde 1795, *Théorie des Fonctions* (Teoria das Funções), de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), em 1797, e *Traités de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* (Tratados de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral), de Charles Bossut (1730 – 1814), em 1798.

Na transição ocorrida desde 1790 até 1830, anterior aos conflitos de métodos, Schubring (2005) menciona serem elaborados também o *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* (Tratado do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral), de Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843), entre 1797 e 1800, considerado monumental por trazer uma compreensão moderna sobre o estado da arte da Análise e a apresentação mais consistente do método dos limites, além de almejar um processo de fundamentação dos métodos do Cálculo dominantes à época; e o *Cours d'Analyse Algébrique* (Curso de Análise Algébrica), de Cauchy, em 1821, que caracterizou sua metodologia neste material em torno de um princípio de "*rigor*".

2.2 As Primeiras Incursões Conceituais

A preocupação com os conceitos começou a tomar forma com a discussão do mencionado método de análise, em que o conhecimento sobre o Cálculo, em particular, passou a ser questionado no tocante à base teórica necessária para a determinação das propriedades em uso corrente. O início das discussões no sentido do método de análise ocorre ao tentar trazer uma definição clara do que seja um infinitésimo, ou uma quantidade infinitamente pequena, notadamente utilizado no método de síntese, cujo uso corrente à época era frequente em tópicos conhecidos atualmente como Física Matemática. Apesar de haver tentativas anteriores para esta definição, merece atenção a redação de Jean-Pierre Crousaz (1663 – 1750),

> Em uma palavra, uma parte tão pequena quanto alguém deseje e atendendo à condição necessária é dita *infinitamente pequena*, porque a linha com a qual esta se compara a contém tantas vezes que a imaginação se perde ao fazer esta comparação, como se torna perdida no infinito. (CROUSAZ, 1721 apud SCHUBRING, 2005, p. 199, grifo nosso, tradução nossa)[1]

Há nesta redação uma relação expressa com o conceito geométrico de razão, qual seja, o de ser possível medir um segmento a partir de outro, mas, no caso, o segmento de partida parece não ter uma medida mensurável, ou, se tem, é considerada equivalente a zero em determinado contexto. Na prática, concordando com Schubring, esta redação não configura um sentido absoluto para o termo "quantidades infinitamente pequenas".

Considerada também a redação de Bernard le Bouyer de Fontenelle (1657 – 1757), Fontenelle estabelece termos antagônicos neste sentido, referindo-se a quantidades infinitamente pequenas e a quantidades infinitamente grandes. Fontenelle considera quantidades infinitamente grandes como um prelúdio do que hoje se compreende como infinito, inclusive, representando-as pelo símbolo ∞. No tocante às quantidades infinitamente pequenas, tal é a redação de Fontenelle:

> Uma *quantidade infinitamente pequena* é uma parte de uma quantidade finita advinda da divisão conduzida ao infinito, ou um *infinitésimo* de uma quantidade finita. (FONTENELLE, 1727 apud SCHUBRING, 2005, p. 201, grifo nosso, tradução nossa)[2]

---

[1] Texto original: In a word, a part as small as one wishes and meeting the required condition is called *infinitely small*, because the line with which it is compared contains it so many times that the imagination is lost in making this comparison, as it comes to be lost in the infinite.

[2] Texto original: An Infinitely Small Quantity is a part of a Finite Quantity arising from division carried on to

Por outro lado, a Grã-Bretanha se afasta deste conceito e procura, aos poucos, discutir o que pode ser compreendido como prelúdio ao conceito de limite. Schubring (2005) aponta que, neste sentido, Brook Taylor (1685 – 1731) e, consequentemente, Colin MacLaurin (1698 – 1746) se recusam a admitir a existência das quantidades infinitamente pequenas. Entretanto, para MacLaurin, o conceito de limite era subentendido a tal ponto que não necessitava de uma explicação própria. Esta condição trouxe, aos poucos, um conflito entre o método dos infinitésimos e o método de limite, em particular, entre os franceses.

Neste sentido, Schubring (2005) menciona que, na França, d'Alembert também procura se afastar do conceito de quantidades infinitamente pequenas, dizendo que, mesmo que tal conceito abrevie demonstrações, não era "*rigoroso*". Alertava d'Alembert que o método deveria ser rejeitado, para não conduzir iniciantes ao equívoco de que as quantidades infinitamente pequenas sejam reais (concretas, precisas). Além disso, como defensor da concepção de limite, d'Alembert defendia que o Cálculo Diferencial, em particular, fosse reconstruído a partir do conceito de limite, dizendo que, por mais que o valor em estudo se tornasse próximo do valor limite, este nunca era alcançado por aquele, fato predominante na concepção moderna de limite:

> O limite nunca coincide [com a quantidade], ou nunca se torna igual à quantidade da qual é limite; mas esta sempre se torna cada vez mais e mais próxima dele, e difere dele por tão pouco quanto alguém deseje. (D'ALEMBERT, 1765 apud SCHUBRING, 2005, p. 211, tradução nossa)[3]

Contemporâneo a d'Alembert, Jacques-Antoine-Joseph Cousin também recusa o método das quantidades infinitamente pequenas, dando lugar, em seu texto, ao *méthode des limites* (método de limites). Cousin também concebe o limite como uma quantidade arbitrariamente aproximada por uma quantidade variável que nunca se torna igual àquela:

> Diz-se que uma medida tem outra medida como *limite*, quando se imagina que aquela pode se aproximar desta ao ponto em que difere desta apenas por uma quantidade tão pequena quanto se deseje, sempre sem coincidir com esta. (COUSIN, 1777 apud SCHUBRING, 2005, p. 222, grifo nosso, tradução nossa)[4]

Até então ambas as propostas de definição, seja para as quantidades infinitamente

the infinite, or an *infinitieth* of a Finite Quantity.

[3]Texto original: The limit never coincides [with the quantity], or never becomes equal to the quantity of which it is the limit; but the former always approaches it closer and closer, and differs from it by as little as one wishes.

[4]Texto original: One says that a magnitude has another magnitude as a limit, when one imagines that it can approach it to the point where it differs from it only by a quantity as small as one wishes, without ever coinciding with it.

pequenas, seja para os limites, eram estabelecidas de maneira claramente não algébrica. Devido a esta condição, houve intensa discussão sobre que concepção adotar e, para cada concepção, quando adotar para as atividades e textos da época.

Nos termos de Schubring (2005), um marco no sentido de rejeitar a concepção de quantidades infinitamente pequenas em termos de desenvolvimento científico surge com o concurso da Academia de Berlim, de 1786, que tinha como regra uma exposição que justificasse a rejeição ao uso do conceito de quantidades infinitamente pequenas. Este concurso favoreceu, de maneira direta, a incipiente concepção de limite que viria a tomar forma décadas depois. Como premiado, surge o trabalho de Simon L'Huilier (1750 – 1840), explicando que tal conceito não devia ser compreendido como uma espécie de variável, em contraste ao que ele considerava como quantidade. L'Huilier traz em seu texto uma definição de limite bastante peculiar:

> Seja dada uma quantidade variável, sempre menor ou sempre maior do que uma quantidade constante proposta, mas que possa diferir dela por menos do que qualquer quantidade proposta menor do que ela própria: esta quantidade constante é dita o *limite em majoração ou em minoração* da quantidade variável. (L'HUILIER, 1786 apud SCHUBRING, 2005, p. 230, grifo nosso, tradução nossa)[5]

É importante anotar que as noções de majoração e de minoração não eram correntes na discussão sobre o conceito de limite até então. L'Huilier, então, concebe o limite como algo bem diferente das noções anteriores, pois considera apenas uma possibilidade de avaliação: por valores menores do que o limite ou por valores maiores do que o limite. L'Huilier não é capaz de qualificar variáveis cujos valores oscilam por valores ora menores ora maiores do que a proposta de limite, mas procura explicar melhor o que seriam tais noções no uso em razões:

> Seja dada uma razão variável sempre menor do que dada razão, mas que possa ser tornada maior do que qualquer razão atribuída menor do que esta: a razão dada é dita *limite em majoração* da razão variável. Analogamente, seja dada uma razão variável sempre maior do que dada razão, mas que possa ser tornada menor do que qualquer razão atribuída maior do que esta: a razão dada é dita o *limite em minoração* da razão variável. (L'HUILIER, 1786 apud SCHUBRING, 2005, p. 230, grifo nosso, tradução nossa)[6]

---

[5]Texto original: Let there be a variable quantity, always smaller or always greater than a proposed constant quantity; but which can differ from it less than any proposed quantity smaller than itself: this constant *quantity* is said to be the *limit* in greatness or in smallness of the variable quantity.

[6]Texto original: Let a variable ratio be always smaller than a given ratio, but which can be made greater than

L'Huilier não apenas propôs tais concepções sobre o limite para a obtenção do prêmio; Schubring (2005) menciona que ele foi capaz de desenvolver consideravelmente propriedades para o uso de limites, principalmente no que tange às operações com limites e a seus efeitos nas pesquisas envolvendo séries numéricas e de funções. Já no início do século XIX, ganha amplitude a visão de Lacroix sobre os limites, que se mostra ainda mais próxima da concepção de limite da atualidade:

> Chamamos *limite* qualquer quantidade que um valor não possa ultrapassar ao aumentar ou diminuir, ou mesmo uma que este não possa alcançar, mas da qual possa este se aproximar tanto quanto se deseje. (LACROIX, 1797 apud SCHUBRING, 2005, p. 375, grifo nosso, tradução nossa)[7]

Também merece atenção a formulação de Cauchy para a noção de limite e como ele conduz sua explicação em torno do termo *convergência*. Até então, Schubring (2005) aponta que este termo era mais corrente no estudo de séries numéricas e de funções. Cauchy traz uma aproximação com Cousin em sua formulação, inclusive na notação, distanciando-se de L'Huilier e Lacroix:

> Quando sucessivos valores dados a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixado, tal que, no fim, eles diferem um do outro por tão pouco quanto se deseje, este último é chamado o *limite* de todos os outros valores. [...] Quando uma quantidade variável *converge* para um limite fixado, é útil indicar este limite por uma notação especial, que é o que faremos, ao escrever a abreviação lim.. (CAUCHY, 1821 apud SCHUBRING, 2005, p. 452, grifo nosso, tradução nossa)[8,9]

Para Grabiner (1981), Cauchy apresenta uma formulação que mostra certo grau de independência em relação às inspirações correntes à época. Percebemos, na definição de Cauchy, que o limite não atua nem como um piso nem como um teto; não há a condição de que *o limite não pode ser ultrapassado* pelos valores dos quais difere. Tal condição mostra a influência da concepção de movimento, herdada das construções de Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) para o Cálculo.

---

any assigned ratio less than the latter: the given *ratio* is called the *limit in greatness* of the variable ratio. Ditto; let a variable ratio be always greater than a given ratio; but which can be made smaller than any assigned ratio smaller than the latter: the given ratio is called the *limit in smallness* of the variable ratio.

[7]Texto original: we shall call a limit any quantity that a magnitude cannot go beyond when increasing or decreasing, or even one that it cannot reach, but which it can approach as closely as is wished.

[8]Texto original: When the successive values given to the same variable approach indefinitely a fixed value, so that in the end they differ from each other by as little as one wishes, this last is called the *limit* of all the other values.

[9]Texto original: When a variable quantity converges to a fixed limit, it is often useful to indicate this limit by a special notation, which is what we shall do, by placing the abbreviation lim ..

Na atualidade, a continuidade é compreendida como uma condição a partir do conceito de limite. Por outro lado, na transição do século XVIII para o século XIX, ainda se tratava a continuidade como uma "lei", inicialmente como um ponto de partida para Leibniz, e, no século XVIII, com a visão trazida por Johann Bernoulli (1667 – 1748):

> Pode ser chamada como a *Lei da Continuidade*, em virtude da qual tudo o que acontece, acontece através de etapas infinitamente pequenas. Parece que o senso comum dita que nenhuma mudança pode ocorrer em um salto; [...] nada pode passar de um extremo a outro sem passar por todas as etapas entre eles. (BERNOULLI, 1727 apud SCHUBRING, 2005, p. 178, grifo nosso, tradução nossa)[10]

Uma formulação melhor desta compreensão é percebida em Louis François Antoine Arbogast (1759 – 1803). Com efeito, ele foi capaz de propor uma explicação mais razoável, apesar de se valer da mesma noção de etapas intermediárias obrigatórias na mudança de valores:

> A *lei da continuidade* consiste em dizer que uma quantidade não pode passar de um estado para outro sem ter de passar por todos os estados intermediários sujeitos à mesma lei. Funções algébricas são consideradas contínuas, uma vez que os diferentes valores destas funções dependem de uma variável em uma mesma maneira; e supondo que a variável aumente continuamente, a função receberá variações correspondentes; mas não passará de um valor para outro sem também passar por todos os valores intermediários. (ARBOGAST, 1791 apud SCHUBRING, 2005, p. 254, grifo nosso, tradução nossa)[11]

Esta redação se aproxima mais do que dispõe, na atualidade, o chamado Teorema do Valor Intermediário. Além disso, é perceptível a visão que tinham os estudiosos a respeito de funções. Na visão de Schubring (2005), diferentemente da concepção atual, as funções, para eles, deveriam ser redigidas sob uma mesma expressão ao longo de todos os valores a serem tomados pela função. Neste sentido, ganha espaço a observação de Gaspard Riche de Prony (1755 – 1839), para quem a possibilidade da existência de funções era tratada como uma discussão hipotética, mas passível de tratamento matemático como um caso extremo referente à violação da chamada "lei da continuidade".

[10]Texto original: that can be called the *Law of Continuity*, by virtue of which everything that takes place, takes place by infinitely small degrees. It seems that common sense dictates that no change can take place at a jump; *natura non operatur per saltion*; nothing can pass from one extreme to other without passing through all the degrees in between.

[11]Texto original: The *law of continuity* consists in [stating] that a quantity cannot pass from one state to another except having to pass through all the intermediary states subject to the same law. Algebraic functions are regarded as continuous, since the different values of these functions depend in the same way on the variable; and in supposing that the variable increases continually, the function will receive corresponding variations; but it will not pass from one value to another without also passing through all the intermediary values.

A noção de continuidade sob tratamento matemático ganha forma a partir de Cauchy, que a vincula à sua noção de limite, trazendo uma apresentação operacional para o conceito de continuidade, que pode ser considerada como ponto de partida para a formulação atual:

> Seja $f(x)$ uma função da variável x e suponha que, para cada valor de x, intermediário entre dois limites dados, esta função assuma um valor único e finito. Se, começando por um valor de x entre estes limites, deseje-se dar à variável x um incremento infinitamente pequeno α, a própria função passará por um incremento, sendo a diferença
>
> $$f(x+\alpha) - f(x),$$
>
> que depende tanto da nova variável α quanto no valor de x. Dito isto, a função $f(x)$ será, entre os dois limites atribuídos à variável x, uma função *contínua* nesta variável, se, para cada valor de x entre estes limites, o valor numérico da diferença $f(x+\alpha) - f(x)$ diminua indefinidamente com α. (CAUCHY, 1821 apud SCHUBRING, 2005, p. 461 – 462, grifo nosso, tradução nossa)[12,13]

Certa atenção para o termo "incremento infinitamente pequeno" deve ser dada nesta leitura. De início, este termo pode ser compreendido como apenas um incremento sobre o qual possa ser aplicada a noção de limite. Todavia, devido às condições da época da publicação de Cauchy, havia uma expressa determinação quanto ao estudo de infinitésimos por parte da *École Polytechnique* em contraste ao estudo de limites e, de certa maneira, a presença deste termo é uma maneira de acomodar tal determinação. Esta observação se faz presente quando Cauchy faz menção explícita a este termo como uma variável cujo limite é igual a zero:

> Quando valores sucessivos de uma mesma variável decrescem indefinidamente, tais que se tornam menores do que qualquer número dado, esta variável se torna o que é chamada *infinitamente pequena* ou uma *quantidade infinitamente pequena*. *Uma variável deste tipo tem zero como seu limite*. (CAUCHY, 1821 apud SCHUBRING, 2005, p. 453, grifo nosso, tradução nossa)[14]

Retomando, em um estudo mais cuidadoso sobre a continuidade de funções, Cauchy propõe uma definição de continuidade, e, consequentemente, uma de descontinuidade a partir

---

[12]Texto original: Let $f(x)$ be a function of the variable x and suppose that for each value of x, intermediate between two given limits, this function assumes always a unique and finite value.

[13]Texto original: If, starting from a value of x between these limits, one gives to the variable x an infinitely small increase α the function itself will experience an increase, being the difference $f(x+\alpha) - f(x)$, which depends both on the new variable α and on the value of x. Given this, the function $f(x)$ will be, between the two limits assigned to the variable x, a *continuous* function of this variable, if for each value of x intermediate between these limits, the numerical value of the difference $f(x+\alpha) - f(x)$ decreases indefinitely with α.

[14]Texto original: When the succesive numerical values of the same variable decrease indefinitely, such as to become less than any given number, this variable becomes what is called *infinitely small* or an *infinitely small quantity*. A variable of this type has zero as its limit.

de sua visão de limite, que podem ser consideradas próximas às noções da atualidade:

> Pode-se dizer que a função $f(x)$ é, na *vizinhança* de um valor particular dado à variável x, uma função *contínua* nesta variável, sempre que for contínua entre dois limites de x, mesmo quando muito próximos um do outro, que encerrem aquele valor particular. Finalmente, quando uma função $f(x)$ deixa de ser contínua na vizinhança de um valor particular dado à variável x, pode-se dizer que ela se torna *descontínua* e que tem, para este valor particular, uma *solução de continuidade*. (CAUCHY, 1821 apud SCHUBRING, 2005, p. 462, grifo nosso, tradução nossa)[15,16]

Para Schubring (2005), ao contrário da admissão de Prony, Cauchy desvincula a noção de continuidade de funções da visão de continuidade como algo contíguo; apesar disto, Cauchy não considerava o conceito de função como algo mais abrangente, mais geral. O feito de Cauchy com esta abordagem foi discutir propriedades de continuidade de funções que seus predecessores até então não discutiam, apesar de sua abordagem ainda dever ser considerada incompleta.

Fora do contexto francês, Niels Henrik Abel (1802 – 1829) discute continuidade de uma maneira sutilmente diferente, na qual há menos condições para uma possível ambiguidade conceitual com a concepção atual de *continuidade uniforme*:

> Uma função $f(x)$ pode ser chamada uma *função contínua* de x entre os limites $x = 0$ e $x = b$ se, para um valor arbitrário de x entre esses limites, a quantidade $f(x - \beta)$ se aproxima do limite $f(x)$ para valores decrescentes de β. (ABEL, 1826 apud SCHUBRING, 2005, p. 472, grifo nosso, tradução nossa)[17]

Enno Heeren Dirksen (1788 – 1850) teve contato com o material de Cauchy e buscou elaborar um documento a respeito dos estudos de Cauchy à época, conhecido como *Organon*. Dirksen publicou apenas uma parte deste documento, com uma justificativa convincente para o programa de "*rigor*" de Cauchy e por que este deveria ser continuado. Porém, Dirksen faz suas próprias observações sobre as definições de Cauchy, em particular sobre continuidade:

> Se x designa um valor independente, $f(x)$ uma função aproximadamente definida, e x_0 um valor específico para x, diz-se que $f(x)$ é *contínua* para o

[15]Texto original: One says further that the function $f(x)$ is, in the neighborhood of a particular value given to the variable x, a continuous function of that variable, whenever it is continuous between the two limits of x, even when very close to each other, which enclose that particular value.

[16]Texto original: Finally, when a function $f(x)$ ceases to be continuous in the neighbourhood of a particular value of the variable x, one says that it then becomes *discontinuous* and that it has, for this particular value, a *solution of continuity*.

[17]Texto original: A function $f(x)$ should be called a continuous function of x between the limits $x = 0$, $x = b$ if, for an arbitrary value of x between these limits, the quantity $f(x - \beta)$ approaches the limit $f(x)$ for always decreasing values of β.

> valor específico x_0 e se mantém tão distante quanto seu valor especial x_0 de x é completamente determinado por x e é igual ao valor do limite de $f(x)$ para o limite x_0. (DIRKSEN, 1829 apud SCHUBRING, 2005, p. 472, grifo nosso, tradução nossa)[18]

As definições de Abel e de Dirksen trazem um cuidado maior sobre as condições nas quais a continuidade de uma função é definida: Abel trata deste assunto como um recurso particular para séries de funções, e a definição expressa uma noção relacionada à concepção atual de *continuidade pontual*. Schubring (2005) menciona que Dirksen, por sua vez, reinterpreta a definição de Cauchy na mesma esteira de Abel e providencia uma notação particularmente próxima à notação moderna, escrevendo $\mathrm{Gr}^{x=x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainda sobre a definição de continuidade, esta recebe um avanço em termos de compreensão nos estudos de Johann Peter Wilhelm Stein (1796 – 1831):

> Pode-se dizer que uma quantidade variável muda gradualmente ou continuamente quando não pode passar de um valor para outro sem assumir todos os valores que se encontrem entre estes dois valores. Uma função de uma quantidade variável, por exemplo, $f(x)$, é dita *contínua* se, quando a quantidade variável x de que é uma função aumenta gradualmente, a função também muda gradualmente. (STEIN, 1829 apud SCHUBRING, 2005, p. 540, grifo nosso, tradução nossa)[19,20]

Apesar de esta definição parecer fazer referência ao Teorema do Valor Intermediário em sua expressão contemporânea, a compreensão aí trazida permite ler as definições mais precisas de Abel e Dirksen no sentido de que a continuidade de uma função não permite a ocorrência de discrepâncias pontuais ao longo de um intervalo para uma função, discrepâncias estas que caracterizariam a noção atual de *salto*.

Nos séculos XVIII e XIX, houve intensa discussão sobre o comportamento de sequências e séries numéricas e séries de funções, devido à manipulação indiscriminada com os termos destas somas. Cauchy traz uma preocupação com este tema estatuindo o que seja uma *série*:

> Chamamos *série* uma sequência indefinida de quantidades u_0, u_1, u_2, u_3, etc., que sejam derivadas uma da outra de acordo com uma determinada lei.

[18]Texto original: If x designates an independent value, $f(x)$ an approximately defined [function], and x_0 a specific value of x, it is said that $f(x)$ is *continuous* for the specific value x_0 and *remains* so insofar as its special value for x_0 of x is completely determined by x and is equal to the value of the limit of $f(x)$ for the limit x_0.

[19]Texto original: One says that a variable quantity changes *gradually* or *continuously* when it cannot pass from one value to another without taking in turn all the values lying between these two values.

[20]Texto original: A function of a variable quantity, e.g., $f(x)$, is said to be *continuous* if when the variable quantity x of which it is a function gradually increases, the function also changes gradually.

> O termo que corresponde ao índice n, a saber, u_n, é chamado *termo geral* [da série]. (CAUCHY, 1821 apud SCHUBRING, 2005, p. 467, grifo nosso, tradução nossa)[21,22]

Deve ser dada atenção ao fato de a descrição de série dada por Cauchy se referir ao que atualmente é denominado *sequência*. A partir desta definição, Cauchy estabelece também o que seja a *soma de uma série*, referindo-se à concepção atual de *série*:

> Seja $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$ a soma dos primeiros n termos, n sendo um inteiro qualquer. Se, para valores cada vez maiores de n, a soma s_n se aproxima de um certo limite s, a série será chamada *convergente*, e o limite em questão será chamado *soma da série*. (CAUCHY, 1821 apud GRABINER, 1981, p. 99, grifo nosso, tradução nossa)[23]

Sobre a convergência de séries, também é importante observar um critério particular de convergência de séries, inicialmente discutido por Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848), mas atribuído a Cauchy posteriormente:

> Se uma sequência de valores $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., $F_n(x)$, ..., $F_{n+r}(x)$, ..., é sujeita à condição de que a diferença entre seu n-ésimo termo $F_n(x)$ e qualquer membro posterior $F_{n+r}(x)$, não interessa quão distante o n-ésimo termo e este estejam, seja menor do que qualquer valor dado se n é tomado *suficientemente grande*; então, existe um e somente um valor determinado para o qual os membros da sequência se tornam cada vez mais próximos, e ao qual podem se tornar tão próximos quanto desejado, *se a sequência for continuada suficientemente além*. (BOLZANO, 1817 apud GRABINER, 1981, p. 102, grifo nosso, tradução nossa)[24]

A abordagem de Bolzano, por sua vez, não faz referência ao uso da concepção de limite que viria a tomar forma sob Cauchy, Abel e Dirksen. Cauchy, ao estatuir essencialmente o mesmo critério, faz clara referência às diferenças entre termos mencionada por Bolzano:

> Para que a série $\Sigma_{r=0}^{\infty} u_r$ seja convergente, é necessário que, para valores cada vez maiores de n nas diferentes somas $u_n + u_{n+1}$, $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$, etc., termine por alcançar constantemente valores numéricos menores do que qualquer limite atribuível. Reciprocamente, quando estas várias condições

[21]Texto original: We call a *series* an indefinite sequence of quantities u_0, u_1, u_2, u_3, etc.... which are derived from each other according to a determined law.

[22]Texto original: the term which corresponds to the index n, namely u_n, is called the *general term*.

[23]Texto original: Let $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$ be the sum of the first n terms, n being any integer. If, for increasing values of n, the sum s_n approaches a certain limit s, the series will be called convergent, and the limit in question will be called sum of the series.

[24]Texto original: If a sequence [Reihe] of magnitudes $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x) \ldots F_n(x) \ldots F_{n+r}(x) \ldots$ is subject to the condition that the difference between its nth member [Gliede] $F_n(x)$ and every later member $F_{n+r}(x)$, no matter how far beyond the nth term the latter may be, is less than any given magnitude if n is taken large enough; then, there is one and only one determined magnitude to which the members of the sequence approach closer, and to which they can get as close as desired, if the sequence is continued far enough.

> são satisfeitas, a convergência da série é assegurada. (CAUCHY, 1821 apud GRATTAN-GUINNESS, 1970, p. 75, tradução nossa)[25]

Cauchy trabalhou com as séries numéricas e as séries de funções, mas definiu o conceito de convergência levando em consideração apenas as séries numéricas. Esta concepção o levou a enunciar um teorema sobre convergência que gerou controvérsias, por se tratar de uma afirmação sobre séries de funções:

> Quando diferentes termos de uma série são funções de uma mesma variável x, contínua com respeito a esta variável na vizinhança de um valor particular s para o qual a série seja convergente, a soma s da série é, também, na vizinhança deste valor particular, uma função contínua em x. (CAUCHY, 1821 apud SCHUBRING, 2005, p. 469, tradução nossa)[26]

Com efeito, quando se fala em séries de funções neste contexto, não se pode dar outra conclusão a não ser o que se conhece na atualidade como *convergência pontual*, dado que a afirmação faz uma avaliação em uma vizinhança de um ponto previamente fixado. Grattan-Guinness (1970) menciona que um contraexemplo à situação proposta foi dado por Abel, consistente de uma série na forma

$$\text{sen}\,(\phi) - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2\phi) + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(3\phi) + \dots.$$

Grattan-Guinness (1970) e Schubring (2005) afirmam que Abel mostrou que a série mencionada é formada por funções contínuas e tem limite descontínuo para cada valor na forma $\phi = (2m+1)\pi$, em que m é um número inteiro, claramente contrariando as admissões de Cauchy. Outras séries desta natureza foram estudadas, também, por Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768 – 1730), no contexto da equação conhecida como Equação do Calor, razão pela qual as séries trazem seu sobrenome como tipo:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Este contexto prediz uma revolução no que tange à concepção de função. Nos termos

[25]Texto original: For the series $[\Sigma_{r=0}^{\infty} u_r]$ to be convergent ... it is yet necessary that for increasing values of n the different sums $u_n + u_{n+1}$, $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$, &c. ...... finish by constantly achieving numerical values smaller than any assignable limit. Reciprocally, when these various conditions are fulfilled, the convergence of the series is assured.

[26]Texto original: When the different terms of the series (1) are functions of the same variable x, continuous with respect to this variable in the neighborhood of a particular value s for which the series is convergent, the sum s of the series is also, in the neighborhood of that particular value, a continuous function of x.

de Schubring (2005), anterior ao século XIX, a concepção predominante de função tinha um intrínseco valor geométrico, a tal ponto que uma função deveria poder representar uma curva simples, e, posteriormente, poder ser descrita por uma lei de formação descrita por exclusivamente uma expressão em todo o intervalo. Esta noção claramente se perde no estudo de funções contínuas, por ocorrerem situações antes admitidas como exceções graves à "lei", como diria Prony.

O estudo de séries de potências trouxe, também, uma outra peculiaridade. Burton (2010) menciona que Lagrange, procurando se afastar do conceito de infinitésimos, propõe que toda função admita uma representação em séries de potências da forma

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots,$$

em que p, q, r, e as variáveis descritas por esta formulação são funções de x independentes de i. Grabiner (1981), por sua vez, anota que Lagrange propõe, então, uma definição de *derivada* a partir da observação de que

$$f(x+i) = f(x) + pi + Vi,$$

ou melhor,

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = p + V,$$

fazia sentido desde que tanto V quanto i fossem tornados próximos a zero de maneira simultânea, em que fosse possível, para qualquer valor D, obter i de maneira que $-D < V < D$ e, consequentemente, $i(p - D) < f(x+i) - f(x) < i(p + D)$. Lagrange, com isso, estatui derivada escrevendo

$$f'(x) = \frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

razão esta a ser utilizada posteriormente por Cauchy e seus sucessores.

Para Cauchy, a observação de Lagrange corresponde a dizer que a razão é formada por dois valores que tenham zero por limite, e, em virtude disto, Cauchy requer que a função seja contínua para definir derivada:

> Para definir a derivada em termos desta definição de limite, Cauchy considerou o limite da razão das diferenças $(f(x+i) - f(x))/i$ em um

> intervalo de continuidade de $f(x)$. (A continuidade era necessária para que $f(x+i) - f(x)$ e i pudessem ambas "indefinidamente e simultaneamente se aproximar do limite zero", ou, equivalentemente, ambas serem "quantidades infinitamente pequenas". Cauchy definiu "quantidade infinitamente pequena" como uma variável cujo limite fosse zero. Portanto, apesar de Cauchy nunca estabelecer explicitamente isso como um teorema, toda função diferenciável deve ser contínua.) (GRABINER, 1981, p. 114, tradução nossa)[27]

Mesmo com esta admissão, Cauchy obteve uma observação importante sobre a sua própria definição de derivada que pode ser relacionada às condições da atualidade melhor vinculada à sua definição de limite:

> Designe por δ e ε dois números muito pequenos; o primeiro sendo escolhido de maneira que, para valores numéricos de i menores do que δ, e para qualquer valor de x entre x_0 e X, a razão $(f(x+i) - f(x))/i$ sempre se mantém maior do que $f'(x) - \varepsilon$ e menor do que $f'(x) + \varepsilon$. (CAUCHY, 1821 apud GRABINER, 1981, p. 115, tradução nossa)[28]

Apesar de falar da concepção de limite do século XIX, esta formulação pode ser associada à noção de limite da atualidade, dado que a condição mencionada significa que $f'(x)$ atua propriamente como o limite da razão em discussão.

Em relação ao tratamento de integrais, Schubring (2005) anota que a observação predominante até o início do século XIX era a de vincular claramente as integrais a um processo reverso ao processo de derivadas (antiderivação ou, em termos mais atuais, primitivação). A atual abordagem de trabalhar o processo de integração através de uma motivação pelo cálculo de áreas por aproximação passava, então, despercebida.

Ainda na visão de Schubring (2005), a questão da chamada integral definida passava a tomar forma sob André-Marie Ampère (1775 – 1836), em suas lições na *École Polytechnique* de 1815. Cauchy, por seu turno, ao reformular o programa do curso de Análise Algébrica da *École Polytechnique*, menciona claramente a formulação de integral por somas. Cauchy formulou seu processo de integração de maneira bem próxima à concepção atual, servindo de prelúdio para os conceitos modernos. Por outro lado, Cauchy necessariamente assume que as

[27]Texto original: To define the derivative in terms of this definition of limit, Cauchy considered the limit of the ratio of the differences $[f(x+i) - f(x)]/i$ on an interval of continuity of $f(x)$. [The continuity was needed so that $f(x+i) - f(x)$ and i could both "indefinitely and simultaneously approach the limit zero," or equivalently both be "infinitely small quantities." Cauchy defined "infinitely small quantity" as a variable whose limit was zero. Thus, though Cauchy never explicitly stated this as a theorem, every differentiable function must be continuous.

[28]Texto original: Designate by δ and ε two very small numbers; the first being chosen in such a way that, for numerical values of i less than δ, and for any value of x between x_0 and X, the ratio $f(x+i) - f(x)/i$ always remain greater than $f'(x) - \varepsilon$ and less than $f'(x) - \varepsilon$.

funções devem ser contínuas antes de serem integradas. Essencialmente, o processo de Cauchy consiste em considerar um intervalo fechado $[X_0; X]$ e escolher valores, de forma ordenada, $X > X_{n-1} > \ldots > X_2 > X_1 > X_0$, formando subintervalos, e, através deles, a soma

$$S = (X_1 - X_0)f(X_0) + (X_2 - X_1)f(X_1) + \ldots + (X - X_{n-1})f(X_{n-1}).$$

Cauchy percebeu que o valor de S é mais preciso se são escolhidos mais valores entre X_0 e X e de maneira que as diferenças consecutivas $X_i - X_{i-1}$ sejam menores, concluindo que o valor da integral em si não seria afetado:

> Portanto, quando os elementos da diferença $X - X_0$ se tornam infinitamente pequenos, o modo de divisão tem apenas uma influência imperceptível no valor de S; e, se valores numéricos desses elementos podem decrescer indefinidamente ao aumentar seu número, o valor S terminará por ser perceptivelmente constante, ou, em outras palavras, terminará por alcançar um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valores dos extremos X_0 e X dados à variável x. Este limite é o que se chama de *integral definida*. (CAUCHY, 1823 apud SCHUBRING, 2005, p. 479, grifo nosso, tradução nossa)[29]

Esta noção de integral definida viria a ser modificada por Georg Bernhard Riemann (1826 – 1866) para a concepção atual. Tendo em vista o desenvolvimento na Alemanha, Riemann buscava discutir que funções poderiam ser submetidas a este crivo de integrabilidade. Para tanto, Riemann modifica a noção de Cauchy para uma versão mais ampla:

> Portanto, para começar, o que deveríamos entender por $\int_a^b f(x)\,dx$? Para determinar isto, vamos assumir que, entre a e b, uma série de valores x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ordenados de acordo com seu valor crescente, e, para fins de abreviação, escrevamos $x_1 - a$ como δ_1, $x_2 - x_1$ como δ_2, ..., $b - x_{n-1}$ como δ_n, enquanto usamos ε para representar uma verdadeira fração positiva. Então, o valor da soma
>
> $$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \\ + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$
>
> depende da escolha dos intervalos δ e das quantidades ε. Se ela tem esta propriedade, contudo δ e ε podem ser escolhidos, de se aproximar indefinidamente de um limite fixado A, logo que todos os δ se tornem infinitamente pequenos, este valor será chamado $\int_a^b f(x)\,dx$. (RIEMANN,

[29]Texto original: Thus, when the elements of the difference $X - x_0$ become infinitely small, the mode of division has only an imperceptible influence on the value of S; and, if the numerical values of these elements are allowed to decrease indefinitely, by increasing their number, the value S will finish by being perceptibly constant, or in other words, it will finish by attaining a certain limit which will depend uniquely on the form of the function $f(x)$ and the values of the extremes x_0, X given to the variable x. This limit is what is called a finite integral.

1867 apud SCHUBRING, 2005, p. 479, tradução nossa)[30]

É importante mencionar, concordando com Schubring (2005), que Riemann, ao falar sobre valores infinitamente pequenos, vincula seu conceito de integral ao proposto originalmente por Leibniz, e não ao conceito de quantidades infinitamente pequenas persistente na França.

2.3 A Aritmetização da Análise

Ao longo do século XIX, o movimento de discussão das propriedades do Cálculo toma ares mais amplos, com questionamentos a diversas ideias tidas como amplamente aceitas e válidas e do estabelecimento de propriedades cada vez mais fortes sobre tais ideias.

Com a intensidade nas discussões sobre séries de funções, provocada depois que Cauchy considerou uma propriedade sobre a convergência de séries como válida para o estudo de séries de funções, como já mencionado, ocorre a busca por novas condições para determinar quando uma série de funções admite convergência e como tal convergência ocorre. Este movimento ecoaria também em outros campos do Cálculo.

No contexto das séries de funções, merecem destaque as abordagens de Philipp Ludwig von Seidel (1821 – 1896), George Gabriel Stokes (1819 – 1903) e Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897). Seidel apresentou uma concepção de convergência que atua como contraste àquela apresentada por Cauchy, admitindo que a convergência de uma série de funções contínuas possa resultar em uma função descontínua:

> Se uma série convergente representa uma função descontínua de uma quantidade x, cujos termos são funções contínuas, então é possível atribuir um valor a x na vizinhança imediata do ponto onde a função tem um salto, para o qual a série converge *arbitrariamente devagar*. (SEIDEL, 1848 apud GRATTAN-GUINNESS, 1970, p. 112, grifo nosso, tradução nossa)[31]

[30]Texto original: Hence, to start with, what should we understand by $\int_a^b f(x)\,dx$? To determine this, let us assume, between a and b, a series of values $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ranked according to increasing quantity, and for the purpose of abbreviation, label $x_1 - a$ as δ_1, $x_2 - x_1$ as $\delta_2, \ldots$, $b - x_{n-1}$ by δ_n, while using ε to represent a positive true fraction. Then, the value of the sum $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$ depends on the choice of the intervals δ and the quantities ε. If it now has the property, however δ and ε may be chosen, of indefinitely approaching a fixed limit A, as soon as all δ become infinitely small, this value will be called $\int_a^b f(x)\,dx$.

[31]Texto original: If one has a convergent series which develops a discontinuous function of a quantity x, whose individual members are continuous functions, then one must be able to assign a value to x in the immediate vicinity of the point where the function jumps for which the series converges *arbitrarily slowly*.

Stokes, por sua vez, traz um ligeiro aprofundamento sobre a ocorrência da convergência de uma série de funções, relacionando a abordagem sobre a vizinhança de um determinado valor para discutir sobre a convergência da série dada para uma função contínua:

> A convergência da série é dita *infinitamente lenta* quando, se n for o número de termos necessários para tornar a soma dos termos descartados numericamente menor do que uma quantidade dada e que pode ser tão pequena quanto se deseje, n aumenta além de qualquer limite enquanto h diminui além de qualquer limite. (STOKES, 1847 apud GRATTAN-GUINNESS, 1970, p. 116, grifo nosso, tradução nossa)[32]

Stokes faz uso de parâmetros para tomar uma decisão sobre a convergência de uma série de funções, algo que Seidel não apresenta em sua definição. Apesar de a relação entre os parâmetros dada por Stokes não ser de imediata operacionalidade, é necessário reconhecer um esforço no sentido de trabalhar com um recurso algébrico.

Weierstrass, conforme aponta Bottazzini (1986), apresenta uma visão mais elaborada desta conceituação, inclusive no que tange à operacionalidade algébrica, através de parâmetros, de sua conceituação. Ao escrever, para uma série de funções $\Sigma u_r(x)$, que $s(x)$ é a função para a qual a série admite alguma convergência, $s_n(x)$ sendo a soma dos primeiros n termos desta série, e, portanto, $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, em que $r_n(x)$ é a soma dos demais termos desta série, Weierstrass menciona que

> A série $\Sigma u_n(x)$ é dita uniformemente convergente em um intervalo $[a; b]$ quando, para qualquer número positivo arbitrariamente pequeno ε, existe um $n_0(\varepsilon)$ tal que $|r_n(x)| < \varepsilon$ para $n > n_0$ e para todo x, $a \leqslant x \leqslant b$. (WEIERSTRASS apud BOTTAZZINI, 1986, p. 204, tradução nossa)[33]

Ainda sobre o estudo de séries, havia uma ampla acepção a respeito da representação de funções contínuas. Burton (2010) anota que Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859), por sua vez, verificou que a representação de funções por séries de Fourier poderia introduzir problemas de continuidade em até um conjunto infinito de valores; por outro lado, apresentou condições para que a série de Fourier de uma função convergisse para a função nos valores em que a função era contínua.

[32]Texto original: The convergency of the series is here said to become infinitely slow when, if n be the number of terms which must be taken in order to render the sum of the neglected terms numerically less than a given quantity e which may be as small as we please, n increases beyond all limit as h decreases beyond all limit.

[33]Texto original: The series $\Sigma u_n(x)$ is said to be uniformly convergent in an interval $[a, b]$ when, for every arbitrarily small positive ε, there exists an $n_0(\varepsilon)$ such that $|r_n(x)| < \varepsilon$ for $n > n_0$ and for every x, $a \leqslant x \leqslant b$.

Tais observações levaram Dirichlet a enunciar uma nova formulação para o conceito de função, até então profundamente carregado de noções geométricas que não se sustentariam por muito tempo a partir de exemplos como esses:

> Vamos supor que a e b são dois valores dados e seja uma quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores entre a e b. Agora, se a cada x corresponde um único, finito y de modo que, conforme x varia continuamente através do intervalo de a até b, $y = f(x)$ varia do mesmo modo gradualmente, então y é chamado uma função contínua de x para esse intervalo. (DIRICHLET, 1837 apud BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p. 22)

Certa atenção é necessária para a concepção de Dirichlet. Como Dirichlet estudava fortemente as condições para a obtenção de funções contínuas, também tal influência permearia, como percebemos, sua proposta de definição. Apesar de mencionar a continuidade de uma função, Dirichlet apresenta uma concepção desvinculada de qualquer valor geométrico, fato importante para a época, e que viria a influenciar outros espaços no Cálculo.

Weierstrass influenciaria ainda mais ao longo do século XIX no sentido de contrariar outras noções tidas como amplamente aceitas, em particular a relação até então admitida entre funções contínuas e funções deriváveis. Para Kleiner (1991), em virtude de os estudos de funções deriváveis serem realizados, até então, sobre funções contínuas, acreditava-se que funções contínuas seriam deriváveis, exceto por uma certa quantidade de valores. Além disso, Kleiner (1991) e Baroni e Otero-Garcia (2014) mencionam que Weierstrass, na segunda metade do século XIX, apresenta uma função contínua, mas não derivável em ponto algum, contrariando esta acepção.

A preocupação sobre a relação entre continuidade e derivabilidade é, conforme nos traz Bottazzini (1986), compartilhada também por Felice Casorati (1835 – 1890), que questiona Leopold Kronecker (1823 – 1891) sobre a necessidade de a derivada de uma função existir para concluir pela continuidade:

> Continuidade ainda é uma ideia confusa. Em sala, [Kronecker] define uma função real $\phi(x)$ de uma variável x como contínua quando, fixada uma quantidade δ tão pequena quanto se deseje, podemos fazer $\phi(x) - \phi(x') < \delta$, e esta desigualdade persiste quando usamos, no lugar de x', qualquer outro valor que seja mais próximo de x do que este. Mas é realmente necessário, para que uma função seja chamada contínua, que $\lim_{x'=x}(\phi(x) - \phi(x'))/(x - x')$ seja finito? (NEUENSCHWANDER, 1978 apud BOTTAZZINI, 1986, p. 261,

tradução nossa)[34,35]

Sinkevitch (2016) anota que, com vistas à observação de Weierstrass e à preocupação de Casorati, era perceptível que logo deveria ser proposta uma definição de continuidade de forma a resolver este problema, o que foi proposto por Weierstrass. Com efeito, Weierstrass elabora a noção de continuidade em termos de uma relação entre parâmetros:

> Se $f(x)$ é uma função de x, e x é um valor definido, então, na conversão de x em $x+h$, a função mudará e se tornará $f(x+h)$; a diferença $f(x+h)-f(x)$ é usualmente chamada a mudança recebida pela função em virtude do fato de que o argumento fora convertido de x para $x+h$. Se é possível determinar um limitante δ para h, que para todos os valores de h cujo valor absoluto é ainda menor do que δ, $f(x+h)-f(x)$ se torna menor do que qualquer valor arbitrariamente pequeno de ε, então mudanças infinitesimais na função são ditas corresponderem a mudanças infinitesimais no argumento. Porque um valor é dito capaz de se tornar infinitamente pequeno, se seu valor absoluto pode se tornar menor do que qualquer valor arbitrariamente pequeno. Se qualquer função é tal que mudanças infinitesimais na função correspondem a mudanças infinitesimais no argumento, então ela é denominada *função contínua* do argumento ou que muda continuamente conforme seu argumento. (YUSHKEVICH, 1977 apud SINKEVITCH, 2016, p. 197, grifo nosso, tradução nossa)[36]

A preocupação com o fato de a fundamentação estar alicerçada sobre parâmetros geométricos trazia um desconforto na época, quando avaliada em contraste com as condições já discutidas. Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916) expressa esse desconforto mencionando também a necessidade de buscar uma fundamentação em termos de ferramental mais sólido:

> Por mim, este sentimento de insatisfação foi tão avassalador que eu tomei a resolução de meditar na questão até encontrar uma fundamentação puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da análise

[34]Texto original: Continuity is still a confused idea. In class [Kronecker] defines a real function $\phi(x)$ of a variable x to be continuous when, by fixing a quantity δ as small as one wishes, we can make $\phi(x)-\phi(x')<\delta$, and this inequality persists when we set in place of x' any other value that is nearer to x than it.

[35]Texto original: "But is it really necessary," Casorati asks, "in order for a function to be called continuous, that $\lim_{x'=x}[\phi(x)-\phi(x')]/(x-x')$ be finite?"

[36]Texto original: If $f(x)$ is a function of x and x is a defined value, then, on conversion of x into $x+h$, the function will change and will be $f(x+h)$; the difference $f(x+h)-f(x)$ is usually called the change received by the function by virtue of the fact that the argument converts from x to $x+h$. If it is possible to determine such boundary δ for h that for all values of h, whose absolute value whereof is still smaller than δ, $f(x+h)-f(x)$ becomes smaller than any arbitrarily small value of ε, then infinitesimal changes of the function are said to correspond to infinitesimal changes of the argument. Because a value is said to be able to become infinitely small, if its absolute value can become smaller than any arbitrary small value. If any function is such that infinitesimal changes of function correspond to infinitesimal changes of argument, then it is said to be *a continuous function* of argument or that it continuously changes along with its argument.

> infinitesimal. A afirmação de que o Cálculo Diferencial lida com grandezas contínuas é feita tão frequentemente e a explicação sobre esta continuidade ainda não é dada em lugar algum; mesmo as exposições mais rigorosas do Cálculo Diferencial não fundamentam suas provas sobre continuidade, mas, com maior ou menor consciência do fato, ou recorrem a noções geométricas ou sugeridas pela geometria, ou dependem de teoremas que nunca foram estabelecidos de uma maneira puramente aritmética. (DEDEKIND, 1872 apud KLEINER, 1991, p. 300, tradução nossa)[37]

Neste sentido, o processo denominado *Aritmetização da Análise* se ocupava mais em providenciar uma fundamentação aritmético-algébrica para os processos e propriedades desenvolvidos no Cálculo Diferencial e Integral, de forma a dissociar deles qualquer tipo de recurso às intuições geométricas como parte de suas demonstrações.

2.4 Considerações Parciais: o Que Significa o Rigor em Matemática?

Com vistas à discussão ao longo desta etapa, a mudança de postura dos estudiosos em Matemática ocorre, principalmente, no século XIX, quando há a preocupação inicial em fundamentar suas decisões e consolidar todo o avanço que o Cálculo Diferencial e Integral trouxera às investigações de fenômenos da natureza.

As preocupações no século XIX são mais profundas, por envolverem questões não consideradas até então sobre que maneira poderia ser encarada como adequada para proceder à conceituação dos e ao estabelecimento de propriedades sobre os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que o ideário consolidado ao início do século XIX começava a ruir após investigações mais profundas sobre as propriedades e conceitos amplamente disseminados, sobretudo na França e na Alemanha.

Em virtude das investigações que permearam o século XIX, ocorre o surgimento do ideal que caracterizaria a noção de "*rigor*", carregado até o presente e sobre o qual é necessário reflexão. O *rigor* apresentado nas investigações do século XIX é caracterizado pelo *cuidado com as condições necessárias para a tomada de decisões* e pela *precisão operacional de conceitos e propriedades*.

---

[37] Texto original: For myself this feeling of dissatisfaction was so overpowering that I made the fixed resolve to keep meditating on the question till I should find a purely arithmetic and perfectly rigorous foundation for the principles of infinitesimal analysis. The statement is so frequently made that the differential calculus deals with continuous magnitude and yet an explanation of this continuity is nowhere given; even the most rigorous expositions of the differential calculus do not base their proofs upon continuity but, with more or less consciousness of the fact, they either appeal to geometric notions or those suggested by geometry, or depend upon theorems which are never established in a purely arithmetic manner.

A falta do cuidado nas investigações levou aos questionamentos responsáveis pela transformação profunda das noções do Cálculo Diferencial e Integral ao final do século XIX, além de conduzir à busca por uma fundamentação conceitual a partir da abordagem algébrica, para estabelecer propriedades questionadas por serem discutidas na época a partir da abordagem geométrica. A fundamentação em curso requereu ainda mais no quesito *precisão* e determinou a necessidade da fundamentação dos números até então utilizados e aceitos como reais e concretos.

3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE REAL NO PAÍS

As discussões sobre a fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral foram trazidas, ao longo do próprio processo, aos cursos de formação acadêmica em Matemática ou em Ciências Exatas no próprio continente europeu, e trouxeram influências para a criação e o desenvolvimento dos cursos de formação acadêmica em Matemática no Brasil, onde tomaram uma forma própria quando aplicados à formação de professores de Matemática.

O processo de estruturação dos atuais cursos de Licenciatura em Matemática começa a tomar forma na década de 1930, com a implantação do curso de Matemática da Universidade de São Paulo. A esta época, as discussões correntes em Matemática já diziam respeito aos primórdios da Teoria de Conjuntos e Funções, e não mais à discussão das propriedades que culminaram na construção do conjunto de números reais ao final do século XIX.

Neste momento, a discussão se volta a como os cursos de Licenciatura em Matemática propõem suas próprias diretrizes para a abordagem da Análise Real enquanto disciplinas obrigatórias, observando como a disciplina de Análise Real toma forma no processo de implementação de um curso de Matemática no País, como os cursos de Licenciatura em Matemática da atualidade propõem a abordagem de disciplinas obrigatórias de Análise Real, que críticas recebe o Ensino de Análise Real sob a conjuntura atual, e algumas propostas atualmente em discussão no sentido de propor abordagens para a melhoria tanto na concepção quanto na realização das disciplinas de Análise Real dos cursos de Licenciatura em Matemática no País.

3.1 Uma Breve Trajetória da Implantação e da Evolução do Primeiro Curso de Matemática do País

O Ensino Superior brasileiro começou a tomar efetiva forma a partir da década de 1930, com o advento do Estatuto das Universidades, criado a partir do Decreto 19.851, de 11 de abril de 1931. Cavalari (2012) aponta que a partir de Instituições de Ensino previamente existentes nos atuais Estados de São Paulo e Rio de Janeiro, são propostas e fundadas a Universidade de São Paulo, em 1934, e a Universidade do Distrito Federal, em 1935, respectivamente. Estas duas universidades propuseram os dois primeiros cursos de Matemática do País, sendo o primeiro efetivamente criado na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São

Paulo.

O curso em realização na Universidade de São Paulo foi, conforme Otero-Garcia (2015), proposto com três anos de formação, contemplando, em seu início, três disciplinas anuais de Análise Matemática, em que efetivamente tratava-se de um processo de análise sobre os conceitos e propriedades de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra nos dois primeiros anos, com uma abordagem variável, o que sugere ser direcionado conforme o professor que atua na disciplina. Em particular, no primeiro ano do curso eram trabalhados o Cálculo Diferencial e Integral em uma e em mais variáveis reais, em variáveis complexas, e com abordagem de equações diferenciais. Havia ainda a abordagem de números reais sob uma perspectiva topológica. No segundo ano de curso eram trabalhados conceitos e propriedades de funções analíticas, equações diferenciais, teoria de grupos e teoria de Galois, em terminologia atual.

A proposta fazia jus ao desenvolvimento histórico do processo de análise em Matemática, uma vez que, para Otero-Garcia (2015), as disciplinas de Análise Matemática do curso da Universidade de São Paulo refletiam o tratamento detalhado e preciso próprios do processo de análise que determina o *rigor* durante suas abordagens.

Até o final da década de 1930, Cavalari (2012) anota que a proposta de curso sofreria modificações em virtude de vacâncias nas cadeiras da Universidade de São Paulo. Otero-Garcia (2015) aponta que, para o primeiro ano de Análise Matemática, houve, em 1937, um detalhamento maior dos assuntos a serem abordados, contemplando o estudo de funções, de limites de funções, de derivadas de funções em uma e mais variáveis, e integrais de funções em uma e mais variáveis, mas sem uma indicação clara de se tais assuntos eram abordados apenas em variáveis reais ou se ainda incluíam a abordagem em variáveis complexas. Não houve alteração significativa para os outros dois anos de curso, mas houve a inclusão do tratamento de funções elípticas no segundo ano, e houve um direcionamento para o estudo das teorias de funcionais e da relatividade. A proposta do primeiro ano de curso traz a reunião de diversos conceitos estudados atualmente em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, apesar de não ser prevista uma ordem específica de realização do programa da disciplina de Análise Matemática.

Na década de 1940, Otero-Garcia (2015) nos mostra que o primeiro ano de Análise Matemática tem enfoque voltado exclusivamente ao tratamento de variáveis reais, com o mesmo detalhamento vigente até então. No primeiro ano, há o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral em uma variável real a partir de uma abordagem topológica, com alguns tópicos envolvendo funções em mais de uma variável real, e o estudo de equações diferenciais. Para o segundo ano, há a abordagem de integrais de funções de mais de uma variável real, funções de variáveis complexas, sequências e séries numéricas e de funções, funções analíticas e singularidades, um estudo sobre polinômios sob o ponto de vista da Álgebra e o estudo de funções algébricas. Isto sugere a transformação futura desta disciplina no conjunto de disciplinas conhecido como Cálculo Diferencial e Integral.

Conforme Otero-Garcia (2015), já na década de 1950, o curso de Matemática passa a ser realizado em quatro anos e as disciplinas de Análise Matemática recebem outra reformulação, em virtude da mudança de professores responsáveis pelo curso de Matemática. No primeiro ano, o curso se inicia com a abordagem topológica sobre números reais, prosseguindo para o estudo de limite, continuidade, derivada e integral em uma variável real, em seguida com limite, continuidade, derivada e integral em mais de uma variável real, o estudo de curvas planas, curvatura, torção, evoluta e involuta, superfícies, e equações diferenciais em uma variável real. No segundo ano, o curso traz um panorama mais específico quanto ao estudo das propriedades, refinando o estudo realizado no primeiro ano no detalhamento de propriedades específicas, com o estudo de propriedades e garantias referentes a conjuntos compactos, limites de sequências e séries numéricas e de funções, continuidade uniforme, integrais de funções de mais de uma variável, área e integrais de superfície, condições sobre conjuntos fechados e teoremas de Gauss, Stokes e Green, existência de soluções para equações diferenciais ordinárias, e equações diferenciais parciais. No terceiro ano, são estudadas funções analíticas de uma e mais de uma variável, e no quarto ano, os estudos são voltados para aplicações em Geometria. A disposição apresentada sugere que, no primeiro ano de Análise Matemática, o curso é voltado para o estudo de métodos de abordagem de situações, para depois envolver a cautela necessária ao estudo de propriedades; a partir do segundo ano, porém, há a radicalização para um estudo cautelar sobre condições e propriedades, revisando inclusive tópicos estudados no primeiro ano neste sentido.

Na década de 1960, ocorre uma profunda transformação, que muda o nome das disciplinas de Análise Matemática para Cálculo Infinitesimal e reduz o período de realização para dois anos. Otero-Garcia (2015) nos apresenta que, no primeiro ano, são estudados a axiomatização do conjunto de números reais a partir da definição de corpo, limite e continuidade de funções de uma variável real, cálculo diferencial em uma variável real com aplicações ao estudo de gráficos e funções e de infinitésimos, cálculo integral em uma variável real, aplicações geométricas do cálculo, funções de mais de uma variável real, limite e continuidade de funções de mais de uma variável real, cálculo diferencial em mais de uma variável real, cálculo integral em mais de uma variável real e equações diferenciais ordinárias. No segundo ano, são estudados a topologia do espaço real de n dimensões ($\mathbb{R}^n$), integrais de funções de mais de uma variável real, sequências e séries numéricas e de funções, condições necessárias e suficientes à diferenciabilidade no espaço real de n dimensões. Esta reformulação reforça a sugestão em relação à década de 1950: em virtude de, no segundo ano do curso, a abordagem ser dada sobre a topologia em $\mathbb{R}^n$, parece ocorrer um apelo maior ao estudo cauteloso de conceitos e propriedades já estudadas no primeiro ano do curso.

Na década de 1970, Otero-Garcia (2015) aponta que a Universidade de São Paulo passa por um processo de reformulação interna de sua organização. Isto afeta diretamente a concepção e a oferta de cursos superiores, e, em particular, o próprio curso de Matemática passa a ser ofertado por um departamento próprio, o Instituto de Matemática e Estatística. Com a reformulação na universidade, também há a reformulação do curso, com uma proposta de periodização semestral. Nesta reformulação, há um delineamento claro sobre as disciplinas denominadas Cálculo Diferencial e Integral, Introdução à Análise e Análise Matemática, concretizando a separação do estudo da antiga Análise Matemática em disciplinas de estudo de métodos de abordagem e disciplinas de estudo cautelar sobre condições e propriedades. Esta estrutura se manteve, apesar de reformulações posteriores no curso.

Quanto à concepção da disciplina Introdução à Análise, Otero-Garcia (2011) menciona que, desde a década de 1970, há a clara distinção entre o que deve ser trabalhado em Análise Matemática para o curso de Licenciatura e para o curso de Bacharelado em Matemática ofertados pela Universidade de São Paulo. Para o curso de Licenciatura em Matemática da década de 1970, a disciplina Introdução à Análise consistia em um estudo prioritariamente topológico no conjunto de números reais, no espaço real de n dimensões e em espaços métricos gerais, seguindo para o estudo de propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade onde definível.

Otero-Garcia (2011) anota que, na década de 1980, a reformulação do curso mudou o nome da disciplina para Introdução à Análise Real, contemplando por conteúdo o estudo e a construção do conjunto de números reais, limites de sequências e séries numéricas, limite e continuidade de funções de uma variável real, derivada de funções de uma variável real, integral de Riemann e teorema fundamental do Cálculo. Esta reformulação, em relação à década de

1970, sugere uma profunda mudança de enfoque para o estudo de propriedades envolvendo o próprio conjunto de números reais e seus efeitos em funções reais de uma variável como uma avaliação do estudo anterior do Cálculo Diferencial e Integral em uma variável.

Na década de 2000, a avaliação de Otero-Garcia (2011) nos mostra que a disciplina novamente muda de nome para Introdução à Análise, e contempla o estudo e a construção do conjunto de números reais, limites de sequências e séries numéricas, expansão decimal de números reais e a demonstração dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral em uma variável. É importante anotar que, neste momento, a disciplina sugere um enfoque voltado prioritariamente ao estudo do conjunto de números reais, e percebemos, desde a década de 1980, não haver mais apelo ao caráter topológico, mas um apelo ao caráter algébrico para este estudo.

É perceptível como a transformação do próprio curso de Matemática da Universidade de São Paulo motivou à distinção atual entre disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real, em que as disciplinas de Cálculo assumem a feição de preparação metodológica em Matemática, com o estudo de propriedades e métodos para abordagem de situações, e as disciplinas de Análise Real se ocupam de um estudo mais cauteloso, voltado à fundamentação de conceitos e propriedades anteriormente estudados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e, no curso de Licenciatura em Matemática, aos poucos trazer um enfoque voltado ao próprio conjunto de números reais.

3.2 Um Olhar Sobre os Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática

O País oferece uma quantidade considerável de cursos de Licenciatura em Matemática na atualidade, razão pela qual a avaliação será limitada aos cursos ofertados por Instituições Federais de Ensino Superior, aí compreendidos as Universidades Federais e os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. Há, apenas neste nicho, um total de 248 cursos de Licenciatura em Matemática em atividade[1].

Tendo em vista a expressiva quantidade de cursos obtidas com esse delimitante, procedeu-se à busca pelos Projetos Pedagógicos vigentes dos cursos em questão, disponíveis nos sítios eletrônicos oficiais das Instituições, em arquivo único que contemplasse os

[1]Em levantamento realizado em maio de 2019 junto ao sistema eletrônico e-MEC, foram constatados 244 cursos em atividade; o presente valor foi obtido a partir de levantamento realizado no mesmo sistema em dezembro de 2019.

ementários das disciplinas obrigatórias ofertadas. Neste ínterim, foram obtidos um total de 123 documentos disponíveis nestas condições[2]. Desses, 49 se referem a Universidades Federais e os outros 74, a Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia.

De posse dos documentos, é perceptível uma variação muito alta em relação ao período de vigência de um determinado Projeto Pedagógico em relação aos demais. Quanto às Universidades Federais, os documentos obtidos mostram Projetos ainda vigentes datados de 2006. Nos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, há Projetos ainda vigentes datados de 2009. Estas informações sugerem que ainda há Instituições Federais de Ensino discutindo a reformulação de seus Projetos Pedagógicos de Curso, com possíveis dificuldades quanto a um avanço para implementação de atualizações.

Quadro 2 – Vigência de Projetos Pedagógicos de Cursos de Licenciatura em Matemática no País por ano.

Vigente Desde	**Universidades Federais**	**Institutos Federais**
2006	1	–
2007	3	–
2008	2	–
2009	3	1
2010	1	6
2011	3	2
2012	4	3
2013	2	4
2014	3	5
2015	2	10
2016	3	8
2017	5	13
2018	13	15
2019	4	7

Fonte: elaboração do autor, 2020.

O Quadro 2 mostra, dentro do escopo documental de que dispomos, cursos com a vigência do Projeto Pedagógico de Curso datada ano a ano desde 2006. Tendo em vista que há uma constante atualização das Diretrizes Curriculares para Cursos de Formação de Professores para o Ensino Básico, o fato de alguns cursos ainda disporem de Projetos vigentes desde antes de 2010 é, no mínimo, preocupante.

[2] A pesquisa documental foi realizada entre maio e outubro de 2019.

Como dissemos, as Diretrizes Curriculares para Cursos de Formação de Professores para o Ensino Básico são constantemente atualizadas. A versão vigente é a expressa pela Resolução 2, de 20 de dezembro de 2019, do Conselho Pleno do Conselho Nacional de Educação. Anterior a esta, esteve vigente a Resolução 2, de 1º de julho de 2015, do Conselho Pleno do Conselho Nacional de Educação, que recebeu alterações pontuais. Diante da evolução da regulamentação, a avaliação das condições dos cursos será voltada aos Projetos vigentes desde 2015.

Nas Universidades Federais, apenas 27 dos 49 cursos dispõem de Projetos vigentes desde 2015, e nos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, 53 dos 74 cursos dispõem de Projetos vigentes desde 2015. Com esta observação, percebe-se um esforço das Instituições Federais de Ensino Superior em atualizar seus cursos de acordo com as regulamentações vigentes, ou as mais próximas possíveis das vigentes, e este esforço parece ser mais bem sucedido nos cursos dos Institutos Federais.

Apesar de não se traçar a evolução histórica de todos os Projetos Pedagógicos obtidos dos cursos, é possível recorrer aos dados do Quadro 2 para a avaliação aos Projetos vigentes desde 2015, mostrando como os cursos passaram a contemplar assuntos em disciplinas de Análise Real. Para melhor compreender a realidade vigente, a avaliação será conduzida para cada segmento ofertante de cursos de Licenciatura.

3.2.1 As disciplinas de Análise Real em cursos de Universidades Federais

Dos 49 Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Federais, 18 propõem a realização de mais de uma disciplina de Análise Real. Restringindo o escopo a cursos com Projetos vigentes desde 2015, há 13 em 27 Projetos propondo a realização de mais de uma disciplina de Análise Real. Diante desta informação, serão avaliados separadamente os Projetos que sugerem a realização de apenas uma disciplina de Análise Real daqueles que propõem mais de uma disciplina.

Para os 13 cursos observados a partir do Quadro 3, há uma tendência em apresentar os seguintes assuntos em uma disciplina de Análise Real, levando em consideração em quantos documentos o assunto está presente: números naturais e enumerabilidade, axiomatização do conjunto de números reais, topologia da reta, sequências e séries numéricas, limite e continuidade de funções reais e derivada de funções reais. Os tópicos a seguir ou não são

Quadro 3 – Conteúdos propostos para as disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Federais desde 2015, com a proposta de apenas uma disciplina por curso.

Assunto	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**Total**
Conjuntos e Funções	–	–	–	–	–	–
Números Naturais e Enumerabilidade	1	2	1	2	3	9
Construção de Números Reais	–	–	–	2	1	3
Axiomatização de Números Reais	1	2	2	4	2	11
Topologia da Reta	1	2	1	3	3	10
Sequências e Séries Numéricas	1	2	2	5	3	13
Limite e Continuidade de Funções Reais	–	1	2	5	3	11
Derivada de Funções Reais	–	1	–	4	1	6
Integrais	–	1	–	2	–	3
Sequências e Séries de Funções Reais	–	–	–	–	–	–

Fonte: elaboração do autor, 2020.

trabalhados ou são pouco trabalhados nos cursos: conjuntos e funções, construção do conjunto de números reais, integrais, e sequências e séries de funções reais. Desta maneira, os dados sugerem a possibilidade de estes tópicos deixarem de ser trabalhados nas disciplinas de Análise Real dos cursos em estudo.

Outra questão de análise merecida é a proposta de objetivos para as disciplinas de Análise Real. Dos 14 cursos sob análise, apenas 7 apresentam em seus Projetos Pedagógicos de Curso os objetivos pretendidos para as disciplinas. A partir da relação dos objetivos propostos, segue-se a separação dos mesmos em três categorias, de acordo com as redações neles apresentadas.

Quadro 4 – Categorias de classificação dos objetivos descritos para as disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Federais desde 2015, com a proposta de apenas uma disciplina por curso.

Categoria	**Redações**
Aprimoramento das habilidades com as demonstrações	Analisar as propriedades dos objetos estudados e demonstrar, por meio de argumentação lógica, alguns dos principais resultados de cálculo diferencial e integral. Aplicar técnicas de demonstração matemática em problemas envolvendo funções de uma variável real.

Continua na próxima página.

Categoria	Redações
	Compreender as formulações rigorosas das idéias intuitivas do cálculo, como o estudo dos números reais, funções e algumas noções topológicas. Mostrar ao aluno como o rigor da demonstração matemática deve ser utilizado em conjunto com a intuição matemática. Permitir ao aluno entrar em contato com técnicas rigorosas de demonstração matemática.
Aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral	Apreender noções de Topologia da reta. Aprofundar a compreensão dos conjuntos numéricos, especialmente dos números reais. Aprofundar a compreensão dos conjuntos numéricos. Caracterizar os números reais. Compreender as aplicações das sequências convergentes. Compreender as aplicações das séries convergentes. Compreender e definir, do ponto de vista formal, as noções de limite, continuidade, derivada e integral das funções reais de uma variável. Familiarizar o estudante com as técnicas de análise matemática e apresentar uma formalização dos conceitos estudados no cálculo em uma variável, reescrevendo e demonstrando estes resultados. Formalizar o conceito de função Riemann-integrável. Formalizar o conceito local de limite, continuidade e diferenciabilidade de funções reais definidas em intervalos da reta. Formalizar os conceitos de convergência de sequências e séries de números reais. Possibilitar ao aluno o aprofundamento de conceitos matemáticos desenvolvidos inicialmente no curso de Cálculo.
Abordagem com aplicabilidade dos conceitos e propriedades ao Ensino Básico	Compreender a presença da Análise no ensino da Matemática Elementar, bem como o estudo de séries numéricas e suas convergências.

Continua na próxima página.

Categoria	Redações
	Compreender a presença da Análise no ensino da Matemática Elementar. Compreender as aplicações das sequências e séries à Matemática Elementar.

Fonte: elaboração do autor, 2020.

A categorização proposta no Quadro 4 diz respeito às habilidades esperadas a partir de cada redação apresentada e parece sugerir, como uma visão geral, que a concepção das disciplinas apresenta a tendência de um enfoque maior sobre o aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral, dedicado ao aprimoramento das habilidades com as demonstrações, com ligeira abordagem com aplicabilidade dos conceitos e propriedades ao Ensino Básico.

Observando individualmente os Projetos Pedagógicos dos cursos, é mais perceptível a sugestão enunciada enquanto visão geral, uma vez que as redações obtidas ocorrem, cada uma, em apenas um Projeto Pedagógico de Curso. A observação sugere que os cursos ainda trazem dificuldades para as discussões sobre um enfoque mais voltado às possibilidades de integração entre assuntos da disciplina e assuntos do Ensino Básico.

Observando os cursos que propõem mais de uma disciplina de Análise Real para realização, neles são propostas duas disciplinas, e isto permite fazer uma avaliação sobre como a divisão pode se comportar ao longo do tempo.

No conjunto dos documentos sob análise, os Quadros 5 e 6 mostram a tendência em adotar a divisão dos assuntos nas duas disciplinas nos seguintes grupos: para a primeira, números naturais e enumerabilidade, axiomatização do conjunto de números reais, topologia da reta, e sequências e séries numéricas; para a segunda, limite e continuidade de funções reais, derivada de funções reais, integrais e sequências e séries de funções reais. É possível perceber uma aproximação entre os tópicos da primeira disciplina de Análise Real dos cursos que propõem mais de uma disciplina com os tópicos da disciplina de Análise Real dos cursos que propõem apenas uma disciplina, sendo comuns os tópicos: números naturais e enumerabilidade, axiomatização do conjunto de números reais, topologia da reta, e sequências e séries numéricas.

Ao discutir os objetivos propostos para as disciplinas, é constatado um fato crítico: apesar de haver 13 cursos propondo a realização de duas disciplinas de Análise Real, apenas 2

Quadro 5 – Conteúdos propostos para a primeira das disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Federais desde 2015, com a proposta de mais uma disciplina por curso.

Assunto	2015	2016	2017	2018	2019	Total
Conjuntos e Funções	–	–	–	–	1	1
Números Naturais e Enumerabilidade	1	1	3	4	1	10
Construção de Números Reais	–	–	–	–	–	–
Axiomatização de Números Reais	1	1	3	7	1	13
Topologia da Reta	1	–	3	5	–	9
Sequências e Séries Numéricas	1	1	3	7	1	13
Limite e Continuidade de Funções Reais	–	–	3	2	–	5
Derivada de Funções Reais	–	–	1	1	–	2
Integrais	–	–	–	–	–	–
Sequências e Séries de Funções Reais	–	–	–	–	–	–

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Quadro 6 – Conteúdos propostos para a segunda das disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Federais desde 2015, com a proposta de mais uma disciplina por curso.

Assunto	2015	2016	2017	2018	2019	Total
Conjuntos e Funções	–	–	–	–	–	–
Números Naturais e Enumerabilidade	–	–	–	–	–	–
Construção de Números Reais	–	–	–	–	–	–
Axiomatização de Números Reais	–	–	–	–	–	–
Topologia da Reta	–	1	–	1	1	3
Sequências e Séries Numéricas	–	–	–	–	–	–
Limite e Continuidade de Funções Reais	1	1	2	5	1	10
Derivada de Funções Reais	1	–	2	6	1	10
Integrais	1	–	3	5	–	9
Sequências e Séries de Funções Reais	1	–	3	4	–	7

Fonte: elaboração do autor, 2020.

trazem os objetivos propostos para as disciplinas. Desta maneira, uma avaliação dos objetivos das disciplinas, mesmo que realizada, fica prejudicada em sentido ao procurar discuti-la para o conjunto de cursos.

Quadro 7 – Categorias de classificação dos objetivos descritos para as disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Federais desde 2015, com a proposta de mais de uma disciplina por curso.

Categoria	Redações
Aprimoramento das habilidades com as demonstrações	Desenvolver habilidades no uso da linguagem e demonstrações matemáticas. Habilitar o aluno a organizar axiomaticamente o material apresentado em cálculo diferencial de uma variável, visando tornar os estudantes familiarizados com a linguagem formal e técnicas de demonstração em matemática.
Aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral	Definir rigorosamente e compreender resultados fundamentais dos conceitos de sequência e séries numéricas, limites e continuidade de funções reais de uma variável real. Definir rigorosamente e compreender resultados fundamentais dos conceitos de derivada, integral, sequências e séries de funções reais de uma variável real.

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Conforme exposto no Quadro 7, a concepção das disciplinas nos 2 cursos sob estudo sugere a tendência de uma abordagem voltada ao aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral, dedicado ao aprimoramento das habilidades com as demonstrações. Nas disciplinas analisadas para a construção do referido Quadro, não há menções ao Ensino Básico para as disciplinas propostas nestes cursos. As redações descritas ocorrem, cada uma, em apenas um Projeto Pedagógico de Curso.

3.2.2 *As disciplinas de Análise Real em cursos de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia*

Dos 74 Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, apenas 5 propõem a realização de mais de uma disciplina de Análise Real. Restringindo o escopo a cursos com Projetos vigentes desde 2015, em virtude de regulamentações recentes, há apenas 2 em 53 Projetos propondo a realização de mais de uma disciplina de Análise Real. Assim, apenas a primeira disciplina de Análise Real a ser realizada em cada um desses dois cursos será considerada para efeito de estudo.

Quadro 8 – Conteúdos propostos para as disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, desde 2015.

Assunto	2015	2016	2017	2018	2019	Total
Conjuntos e Funções	1	–	–	1	1	3
Números Naturais e Enumerabilidade	5	1	9	8	6	29
Construção de Números Reais	–	–	3	2	1	6
Axiomatização de Números Reais	10	8	10	12	6	46
Topologia da Reta	7	5	8	12	6	38
Sequências e Séries Numéricas	10	7	13	14	7	51
Limite e Continuidade de Funções Reais	9	7	9	12	6	43
Derivada de Funções Reais	8	7	5	10	4	34
Integrais	5	5	2	5	3	20
Sequências e Séries de Funções Reais	2	1	1	1	–	5

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Há uma tendência, nos documentos em estudo, em apresentar para discussão em uma disciplina de Análise Real, os seguintes tópicos: números naturais e enumerabilidade, axiomatização do conjunto de números reais, sequências e séries numéricas, topologia da reta, limite e continuidade de funções reais, derivada de funções reais e integrais.

Quadro 9 – Categorias de classificação dos objetivos descritos para as disciplinas de Análise Real em Projetos Pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, desde 2015.

Categoria	Redações
Aprimoramento das habilidades com as demonstrações	Adquirir os alicerces básicos para ensinar os princípios fundamentais da Matemática. Ampliar a capacidade de formalização matemática através da análise de conceitos e da aplicação de uma metodologia de construção do conhecimento que possa fundamentar teorias matemáticas como o cálculo diferencial e o cálculo integral.

Continua na próxima página.

Categoria	Redações
	Ampliar o conhecimento sobre os conjuntos numéricos dos naturais, racionais, irracionais e reais, por meio do rigor lógico-matemático. Capacitar o acadêmico na habilidade resolutiva de problemas concretos, viabilizando o estudo de modelos abstratos e sua extensão genérica a novos padrões e técnicas de resoluções. Compreender a importância do rigor matemático, desenvolver a capacidade de abstração e de fazer demonstrações analíticas. Compreender os conceitos básicos de Análise Matemática, estudando teoremas e propriedades, provomendo a construção desses resultados por meio do raciocínio dedutivo. Conhecer a estrutura axiomática do sistema dos números reais e deduzir as consequências mais importantes dessa estrutura. Conhecer a necessidade das hipóteses apresentando e demonstrando os teoremas centrais dos tópicos estudados. Desenvolver a capacidade crítica para a análise e resolução de problemas no contexto da análise real. Desenvolver o senso crítico quanto à verificação de resultados com foco em uma demonstração bem argumentada logicamente. Desmistificar, com o auxílio da história, a matemática, e em particular a análise, como uma ciência essencialmente abstrata, um edifício de estruturas dadas à priori. Enfatizar o encadeamento lógico das proposições e análise das propriedades mais relevantes dos objetos estudados. Enunciar e demonstrar proposições. Estudar de forma demonstrativa conceitos já usados em aplicações como conjuntos, funções e números reais, caracterizando também as sequências e séries dos

Continua na próxima página.

Categoria	Redações
	números reais e construindo conceitos iniciais sobre a topologia da reta. Estudar diferentes construções do conjunto dos números reais, mostrando com o rigor necessário suas propriedades (com atenção para aquelas que diferenciam o corpo dos números reais do corpo dos números racionais). Proporcionar o desenvolvimento da abstração, da capacidade de realizar demonstrações analíticas com rigor matemático bem como entender a fundamentação teórica de conjuntos numéricos, operações com conjuntos, funções e sequências. Proporcionar uma compreensão sólida e um aprofundamento de alguns conceitos básicos da matemática escolar e do cálculo. Redigir definições, propriedades e demonstrações a respeito do conjunto dos números reais, sua construção formal, topologia e enumerabilidade dos seus subconjuntos, representação decimal, sequências e séries reais. Validar e explorar as fronteiras das teorias expostas.
Aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral	Analisar as derivadas de funções e a regra da cadeia. Analisar as séries de potências e a Fórmula de Taylor. Analisar as séries numéricas e testes de convergência. Analisar conjuntos abertos, fechados e conjuntos compactos. Analisar o Criterio de Cauchy. Analisar o limite de funções, continuidade. Aprender noções de Topologia da reta. Apresentar a axiomática da construção dos conjuntos numéricos. Aprofundar a compreensão dos conjuntos numéricos, especialmente dos números reais. Aprofundar o estudo de processos infinitos e retomar questões elementares que até então eram tratadas de forma intuitiva, tais como as diversas manifestações do

Continua na próxima página.

Categoria	Redações
	infinito, área e comprimento do círculo e a definição de π, definições do número e de Euler, assim como sua irracionalidade. Aprofundar o estudo dos números reais, das sequências e séries numéricas. Aprofundar os conceitos já estudados no Cálculo como Limites de funções reais, continuidade e derivadas. Avaliar a convergência de sequências e séries infinitas e a continuidade e a integrabilidade de funções definidas no corpo dos números reais. Compreender as sucessões numéricas, limites superior e inferior. Compreender o conceito de corpo ordenado completo. Compreender o conceito de números naturais e suas propriedades. Compreender o que é uma sequência e uma série, destacando suas propriedades e teoremas relacionados. Compreender os conceitos de supremo, ínfimo, conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. Construir os conceitos básicos de topologia na reta, bem como suas relações com seqüências, aplicados no estudo de limites, continuidade, derivabilidade. Definir o conjunto dos números reais como corpo ordenado completo. Definir sequências de Cauchy. Distinguir séries convergentes, absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes e divergentes. Estabelecer com precisão a diferença entre conjunto finito e conjunto infinito, assim como a distinção entre conjunto enumerável e conjunto não-enumerável. Estudar outras representações para os números reais, agora podendo ser tratadas de forma precisa: como limite de uma sequência convergente, como uma série ou como uma fração contínua. Formalizar com rigor matemático resultados sobre

Continua na próxima página.

Categoria	Redações
	limite, continuidade, diferenciabilidade e integração de funções de uma variável. Formalizar o estudo dos objetos do Cálculo Diferencial e Integral. Formalizar os conceitos do Cálculo através da construção rigorosa da análise matemática partindo da axiomatização do corpo dos números reais. Fornecer ao aluno os elementos necessários à compreensão da estrutura do conjunto dos números reais e ferramentas para tratar problemas de convergência de séries e sequências de números reais. Identificar e diferenciar corpos e corpos ordenados. Introduzir os conceitos básicos de topologia da reta, além de detalhar o estudo do limite de funções, continuidade e derivadas. Operar com limites de sequências e determinar limites infinitos. Perceber a completude do conjunto dos números reais. Possibilitar ao estudante melhor compreensão de técnicas usadas no cálculo diferencial e integral por meio de uma justificativa formal. Reconhecer conceitos básicos de topologia na reta. Reconhecer sequências limitadas e suas propriedades. Refletir sobre a propriedade da completeza do corpo ordenado dos números reais e suas implicações.
Abordagem com aplicabilidade dos conceitos e propriedades ao Ensino Básico	Discutir a importância do estudo de Análise na licenciatura. Discutir e refletir sobre as definições usadas na Educação Básica e os problemas que elas podem acarretar, usando para tal as definições já constantes em livros didáticos. Desenvolver a percepção da matemática como um conjunto de conhecimentos que são úteis para uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza.

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Dos 74 Projetos Pedagógicos de Curso levantados, 39 apresentam os objetivos esperados da realização das disciplinas; dos vigentes desde 2015, ocorre uma condição mais favorável em contraste àquela observada no caso das Universidades Federais, dado que 30 dos 53 documentos contemplam os objetivos para a realização das disciplinas. Com isso, é possível discutir que enfoque é dado nessas disciplinas.

A partir da categorização expressa pelo Quadro 9, as categorias mencionadas parecem sugerir que os cursos sob análise também apresentam uma preocupação extensa com o aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral voltada ao aprimoramento das habilidades com as demonstrações, com ligeira abordagem com aplicabilidade dos conceitos e propriedades ao Ensino Básico.

Na categorização descrita, é surpreendente o fato de cada objetivo descrito fazer parte de apenas um Projeto Pedagógico de curso. Por outro lado, como há 39 cursos nesta descrição, é preocupante o fato de haver apenas 3 cursos com uma preocupação explícita em relação à abordagem de conceitos e propriedades do Ensino Básico durante os estudos em Análise Real.

Os cursos ofertados pelos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia são mais recentes do que os ofertados pelas Universidades Federais. Porém, os dados do Quadro 9 mostram que estes cursos, mesmo recentes, ainda trazem dificuldades para as discussões sobre um enfoque mais voltado às possibilidades de integração entre assuntos da disciplina e assuntos do Ensino Básico.

3.2.3 Uma leitura a respeito dos dados levantados

Observando mais a fundo as informações levantadas a partir dos Projetos Pedagógicos dos cursos já mencionados, os objetivos previstos neles para as disciplinas de Análise Real abrem um espaço amplo para críticas quanto à concepção e à realização dessas disciplinas nos cursos. Mesmo com cada professor podendo trabalhar com uma metodologia diferente, os objetivos propostos para as disciplinas determinam um enfoque e, consequentemente, a metodologia a ser adotada pelos professores.

Neste sentido, as categorias caracterizadas nos Quadros 4, 7 e 9 e as sugestões que surgem dos referidos Quadros mostram a possibilidade de um engessamento momentâneo em relação aos princípios norteadores da concepção dessas disciplinas, voltados a uma abordagem demonstrativa de aspectos relativos à fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral.

A visão a respeito de um engessamento momentâneo diz respeito às necessidades impostas pelas normativas vigentes para a reformulação dos cursos de Matemática. Por outro lado, as críticas levantadas à realização das disciplinas de Análise Real nos cursos de Matemática evidenciam um engessamento mais profundo, mais perceptível na metodologia dos professores que ministram as disciplinas e, com um olhar mais amplo, perceptível também nas propostas feitas por estes professores para a concepção de disciplina que se encontra presente nos cursos de Matemática.

A visão a respeito do caráter de fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral se mostra ainda mais presente quando considerados os Quadros 3, 5, 6 e 8. A distribuição dos tópicos evidencia um olhar voltado ao estudo de limites e derivadas, em particular, de funções reais como um ápice para as disciplinas de Análise Real. Esta é outra particular crítica à abordagem das disciplinas, pois sugere que a disciplina tem um fim em si mesma e não se amplia para uma visão ampla de curso.

Particularmente, tais tópicos podem ser trabalhados em uma perspectiva mais ampla, trazendo um olhar a um ponto muito importante e determinante para a concepção do conjunto de números reais: o comportamento dos subconjuntos de números racionais conforme são trabalhadas propriedades operatórias. Com efeito, é a partir da avaliação deste quesito que surge a necessidade de um conjunto que traga certa estabilidade quanto a tais propriedades e, consequentemente, uma relação mais próxima entre o palpável (números racionais) e o estável (números reais).

3.3 Discussões Correntes Sobre o Ensino de Análise

As pesquisas correntes sobre o Ensino de Análise se voltam a levantar questões a partir da finalidade de um curso de Licenciatura em Matemática, qual seja, a de prover professores qualificados em nível superior para o exercício da docência no Ensino Básico. Os questionamentos se voltam à discussão das condições da realização das disciplinas referentes ao componente curricular destinado ao estudo de Fundamentos de Análise para uma visão integrada à vivência profissional dos estudantes. Como há críticas que podem tomar um tom ácido pela sua própria expressão, a discussão nesta seção é conduzida com cautela.

3.3.1 *Críticas à abordagem e ao enfoque da realização das disciplinas de Análise Real*

Uma vertente necessária à discussão é a de considerar as visões dos professores dos cursos de Licenciatura em Matemática no tocante à realização das disciplinas de Análise Real. Para Martines (2012), os professores se expressam nas pesquisas com as seguintes visões: em uma comparação entre a densidade de assuntos estudada nos cursos de Bacharelado em Matemática, deve ser visto um conjunto de conceitos e propriedades menor nos cursos de Licenciatura em Matemática; voltada à finalidade de um curso de Licenciatura em Matemática, é necessária uma discussão profunda sobre as propostas de disciplinas de Análise Real em termos do conteúdo a ser abordado, da maneira que se fará a abordagem, e das conexões efetivamente realizadas nas disciplinas.

Ao levar em consideração os Quadros 3, 5 e 8, inicialmente se percebe um movimento no primeiro sentido, o de uma restrição a um conjunto de conceitos e propriedades menor do que o presente nos cursos de Bacharelado em Matemática. Concordando com Silva (2015), este aspecto conduz à conclusão de que, mesmo com menos assuntos, a abordagem das disciplinas de Análise Real dos cursos de Licenciatura em Matemática se mantém semelhante à abordagem, nos cursos de Bacharelado.

Porém, as preocupações dos professores também ganham outra forma, menos agressiva. Para Martines (2012), os professores acreditam ser necessário aos estudantes dispor de um conhecimento superior àquele de que efetivamente farão uso em sua carreira profissional. Nesta esteira, a abordagem voltada à discussão da fundamentação teórica presente nas disciplinas de Análise Real recebe o olhar de um conhecimento aparentemente adicional, mas necessário. Apesar disso, há a preocupação com a fundamentação do conjunto de números reais como algo necessário ao futuro professor. Conforme observado nos citados Quadros, parcela significativa das propostas de disciplina de Análise Real contempla um estudo sobre números reais e tende para uma abordagem axiomática deste assunto.

Observando a categorização descrita nos Quadros 4, 7 e 9, há uma extensiva preocupação, nas disciplinas de Análise Real, com uma abordagem voltada à fundamentação de conceitos e propriedades referentes a assuntos estudados em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. A observação é ainda mais significativa ao perceber que a categoria "Aprofundamento de conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral" reúne parcela considerável dos objetivos propostos para as disciplinas que se enquadram nesta categoria.

Tal constatação levanta questões sobre o enfoque dado às disciplinas de Análise Real. Na visão de Martines (2012), enquanto tratada como uma etapa de consolidação dos estudos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, dispõe de métodos e técnicas voltadas ao exercício do raciocínio lógico-dedutivo com a finalidade de fundamentar conceitos e propriedades já estudados em uma etapa anterior, alinhando-se, em parte, ao desenvolvimento histórico do assunto. Esta condição não privilegia uma compreensão mais ampla sobre como este conhecimento sobre fundamentação teórica pode se aliar a outros conhecimentos adquiridos no curso.

Além disso, Silva (2015) aponta que a própria abordagem lógico-dedutiva é encarada como uma persistência da visão que privilegia o domínio dos conhecimentos em Matemática como recurso para uma atuação profissional de excelência. Esta visão pode, nas observações de Pinto (2016), ser encarada como um reflexo de uma visão responsável por privilegiar o acesso ao saber acadêmico como absolutamente necessário, e, dele, proporcionar a abordagem dos assuntos elementares sob uma forma ampla e precisa. Entretanto, como avalia Martines (2012), é considerado um avanço haver professores que compreendam a necessidade de se discutir como as disciplinas de Análise devem ser propostas para um curso de Licenciatura em Matemática, em um caráter mais alinhado às pretensões do curso, mesmo que com divergências sobre como proceder.

Outra vertente para a avaliação diz respeito a como os estudantes compreendem a realização de uma disciplina de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática. A crítica mais contundente diz respeito à falta de vínculos entre os assuntos do Ensino Básico e os assuntos contemplados nas disciplinas de Análise Real, observada em Bolognezi (2006) e Gomes (2013). Gomes (2013) nos permite anotar que, para os estudantes, a abordagem lógico-dedutiva voltada à fundamentação de conceitos e propriedades do Cálculo Diferencial e Integral traz dificuldades à compreensão dos próprios conceitos estudados nas disciplinas de Análise Real.

Ainda na avaliação de Gomes (2013), a abordagem lógico-dedutiva requer uma mudança de postura dos estudantes quanto ao preparo para o estudo, sendo necessário trazer outra finalidade a técnicas de leitura e registro utilizados até a realização de uma disciplina de Análise Real. Como parcela significativa dos estudantes têm dificuldade em mudar sua própria abordagem para a leitura e a escrita, um recurso comumente utilizado é o de memorização, geralmente a partir do momento em que os estudantes não conseguem mais compreender os conceitos para deles se apropriar. A constatação de que isto ocorre muito próximo ao início das disciplinas traz uma certa gravidade à reação.

Não obstante, Gomes (2013) menciona que a preocupação com a fundamentação teórica, na visão dos estudantes, parece deixar de lado possíveis relações que possam ser estabelecidas com os assuntos estudados no Ensino Básico e que serão alvo da atuação profissional dos estudantes ao concluírem o curso. Apesar de constatado que há uma abordagem sobre o conjunto de números reais, Otero-Garcia (2011) alerta para o fato de esta abordagem ser tratada de maneira axiomática ser visto como um entrave à relação entre a visão trazida do Ensino Básico e a visão trazida pelas disciplinas de Análise Real, por desconsiderar as relações que motivam a própria necessidade do conjunto de números reais e as relações a serem estabelecidas com os próprios campos do conhecimento da Matemática.

Um questionamento a respeito da percepção dos estudantes diz respeito à postura de professores durante a realização das disciplinas de Análise Real. Ainda na esteira da preocupação com a fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral, Bolognezi (2006) traz a situação de haver professores que se remetem exatamente às disciplinas voltadas ao estudo do Cálculo como motivadores para as dificuldades presentes que os estudantes demonstram nas disciplinas de Análise, por haver naquelas conceitos e propriedades que precisavam ser bem compreendidos antes do estudo proporcionado por estas. Porém, para Reis (2001), isto se alicerça mais em uma postura de adequação a um sistema de ensino em vez de uma atuação efetiva no sentido de responsabilizar o estudante pelas dificuldades apresentadas.

Neste sentido, é importante discutir o que esta constatação significa: os estudantes atravessam as disciplinas de Análise Real e as consideram um engodo, um entrave, a suas formações. É, portanto, necessário discutir não apenas razões para que os estudantes não compreendam os assuntos da Análise Real, mas razões para uma repulsa às disciplinas. Bolognezi (2006) aponta que, sob o olhar dos estudantes, os professores não assumem a postura de facilitadores de uma aprendizagem significativa, mas a postura de repetidores e transmissores de um conhecimento pronto e acabado. Por aprendizagem significativa, entendemos, concordando com Borssoi e Almeida (2004), um processo em que o assunto em estudo é discutido e compreendido de maneira a trazer algum significado concreto para aquele que o estuda, constituindo, assim, um ambiente de construção do conhecimento. Em outras palavras, trata-se de uma construção de relações entre saberes da própria pessoa e as interações dela com novos conhecimentos.

Perceber a necessidade de uma mudança significativa quanto à proposta de realização das disciplinas não deve ser apenas uma constatação, mas uma ação. Retomando os Quadros 7, 4 e 9, é possível afirmar que esta ação deve nortear a forma de propor a postura docente perante as disciplinas, o que é feito através dos objetivos propostos para as disciplinas. O fato de as disciplinas terem seus objetivos mais voltados a aprofundar conceitos e propriedades estudados no Cálculo Diferencial e Integral e a aprimorar as habilidades com as demonstrações mostra que ainda há uma distância entre as opiniões dos professores e as críticas feitas à realização das disciplinas.

3.3.2 Alcance das propostas de intervenção nas disciplinas de Análise Real

Mesmo com as críticas envolvendo a concepção das disciplinas nos Projetos Pedagógicos de Curso e, consequentemente, a realização destas, há esforços no sentido de trazer um olhar mais cuidadoso levando em consideração as críticas. Podem ser destacados esforços quanto ao estudo do conjunto de números reais, ao estudo de sequências numéricas e ao estudo de limites de sequências e de funções reais.

Iniciando com o estudo de números reais, Cruz (2011) propõe a realização de uma oficina voltada ao estudo da representação decimal de números reais. Nesta proposta, são abordados os conceitos de sequência e de limite de sequência como recurso para a compreensão da representação decimal, dividida em finita, periódica e não periódica. A avaliação de livros didáticos traz à proposta a discussão sobre como tornar a representação infinita mais palpável aos estudantes do Ensino Básico.

Ainda na esteira do conjunto de números reais, Oliveira (2017) traz uma discussão sobre como a abordagem sobre um conjunto completo pode ser realizada para o estudo do conjunto de números reais. O enfoque dado a esta proposta envolve o trato com as relações entre conjuntos e traz uma visualização a respeito do Princípio dos Intervalos Encaixados, através do qual é possível construir uma sequência de intervalos fechados capaz de providenciar um número real, como recurso para a obtenção e a discussão da existência de números irracionais. Neste ínterim, a avaliação de livros didáticos para a elaboração da proposta traz uma discussão sobre a necessidade do conjunto de números reais como forma de suprir dificuldades existentes no conjunto de números racionais.

Sobre o estudo de sequências numéricas, Fernandes Júnior (2014) propõe, em intervenção durante uma disciplina de Análise Real, a discussão de limites a partir das dificuldades de compreensão enfrentadas pelos estudantes. Os estudantes apresentam dificuldades relacionadas à compreensão de noções tidas como elementares, como interpretação e manipulação de desigualdades, funções definidas nos conjuntos de números naturais e números reais, esboço de representação gráfica de funções, e leitura de símbolos e representação de índices. Destas, também surgem as dificuldades relacionadas à conceituação de sequência, sequência limitada e limite de sequência.

Neste escopo, Fernandes Júnior (2014) trabalha com a representação destas desigualdades conforme apresentadas pelos estudantes, propondo atividades prévias às etapas de intervenção voltadas a um diagnóstico de possíveis razões para as dificuldades apresentadas e constatando que houve um conflito de ideias referente às abordagens dadas nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Real sobre o mesmo assunto. No intuito de contornar as dificuldades, as atividades têm a finalidade de trazer a expressão dos estudantes a respeito dos assuntos em discussão, o que os motivou a compreender melhor o estudo de sequências numéricas e das condições estabelecidas pouco a pouco sobre elas para o estudo de limite de sequência.

Em relação ao estudo de limites de funções, Amorim (2011) estuda as dificuldades enfrentadas pelos estudantes de uma disciplina de Análise Real ao longo do estudo de limites de funções. Este estudo traz uma percepção semelhante à de Fernandes Júnior (2014) quanto às dificuldades dos estudantes, que culminam em não compreender os conceitos e as propriedades deles decorrentes. Para contornar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, Amorim (2011) faz uso da construção de imagens conceituais voltadas a relacionar etapas e processos de maneira a tornar a abordagem de limites compreensível, e alcança um resultado positivo ao proporcionar a compreensão do assunto aos estudantes.

3.4 Considerações Parciais: Que Rumos Seguir?

Observando a concepção atual das disciplinas de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática ofertados em Instituições Federais de Ensino Superior, é perceptível um alinhamento com a evolução do curso de Matemática da Universidade de São Paulo, e, em particular, uma relação mais próxima com a estrutura nele vigente desde 1980 até a atualidade.

Um olhar mais aguçado sobre as próprias disciplinas mostra um enfoque voltado ao aprofundamento de conceitos e propriedades estudadas no Cálculo Diferencial e Integral e ao aprimoramento das habilidades com as demonstrações. Em poucos cursos há indícios de um enfoque voltado a uma interação propícia com o Ensino Básico, seja para propor um diálogo entre os conceitos trabalhados na disciplina e os conceitos trabalhados no Ensino Básico seja para auxiliar a desenvolver habilidades para a adequação conceitual.

Como levantado nas críticas e nas propostas de atuação para as disciplinas de Análise Real, é necessário um diálogo constante com os conceitos de conjunto e função. Na realidade, é esperada certa compreensão sobre estes conceitos logo ao início da realização da disciplina, mas uma mudança no enfoque pode ser determinada a partir de uma avaliação sobre a compreensão prévia dos estudantes. Neste sentido, é interessante trabalhar com o olhar voltado a explorar conjuntos, objetos e as propriedades das relações entre objetos e conjuntos e entre conjuntos, e isto envolve, em menor ou maior grau, um trabalho com desigualdades e alguns recursos algébricos que podem ser aprimorados a partir da compreensão prévia dos estudantes.

Em virtude das condições levantadas a partir das críticas e das propostas de atuação para as disciplinas de Análise Real, propor uma abordagem levando em consideração a ênfase sobre a definição e o uso de propriedades sobre conjuntos pode se mostrar um instrumento útil e viável para provocar o interesse dos estudantes sobre o assunto e proporcionar um caminho para o elo entre a formação acadêmica e a atuação profissional.

4 UMA PROPOSTA EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA REALIZAÇÃO EM UMA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL

A partir da discussão a respeito da concepção das disciplinas de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática no país, as críticas que tomam sua maior forma na postura adotada pelos professores dizem respeito ao apelo ao rigor e ao formalismo. Apesar de o rigor ter uma motivação no cuidado com o trato de conceitos e propriedades, é tido como exacerbado em conjunto a um princípio formal de redação.

É importante levar em consideração, quanto a este assunto, o fato de as descobertas se darem de uma maneira inicialmente explicativa, com uma larga discussão sobre conceitos e propriedades que decorrem das descobertas, e a formalização aludida pode ser entendida como um processo de síntese de discussão. Mesmo assim, para uma abordagem inicial, é desejável que esta formalização dê espaço para uma postura mais explicativa, onde, em vez de conhecer consequências já demonstradas sob uma forma padrão, haja espaço para redescobrir os conceitos e as propriedades deles decorrentes em uma leitura atual.

Neste sentido, uma maneira para trabalhar pode ser constituída a partir de sequências didáticas. Em síntese, as sequências didáticas são formadas como uma organização de ações a serem realizadas ao longo de apenas uma ou de uma quantidade de aulas. Um certo nível de previsibilidade para as ações componentes das sequências é discutível, em particular, porque pressupõe um amplo conhecimento sobre as dificuldades dos estudantes em relação aos assuntos a serem abordados ao longo da aplicação das sequências didáticas.

Particularmente, em virtude de as disciplinas de Análise Real usualmente serem ministradas por diversos professores, de uma maneira rotativa, tal previsibilidade se torna mais difícil. Esta situação contribui para a dificuldade em encontrar estudos sobre as críticas enfrentadas e a proposição de melhorias quanto à realização das disciplinas. Além disso, contribui para essa dificuldade o fato de alguns professores mudarem suas metodologias a cada atuação com as disciplinas, e isto levanta possibilidades de diferentes dificuldades poderem ser levantadas e associadas a cada metodologia adotada.

Ainda assim, uma possibilidade é o recurso à construção de sequências didáticas voltadas a abordar assuntos centrais à Análise Real, com o condão de trazer conceitos do Ensino Básico como suporte e referência para os assuntos a serem discutidos, preferencialmente como recurso ao início das discussões e com contínuo diálogo ao longo das discussões. Esta postura pode vir a modificar a concepção da disciplina e, consequentemente, o ementário nela discutido, para algo mais próximo à realidade profissional já enfrentada durante o Estágio Supervisionado e, consequentemente, à carreira de professor.

4.1 Sequências Didáticas

A proposição de sequências didáticas como recurso de trabalho surge a partir da Teoria de Sequências Didáticas, um campo de estudo da Didática da Matemática inicialmente proposto por Guy Brousseau em 1986. Na visão de Teixeira e Passos (2013), Brousseau considera importante um olhar diferenciado para as interações na sala de aula e para as relações compreendidas pelo processo de aprendizagem, tornando necessária a análise sobre as condições que determinam a tomada de decisões neste processo, de maneira a fazer dela um recurso para propor uma abordagem diferenciada e voltada a facilitar a compreensão dos assuntos a serem discutidos.

As sequências didáticas, então, devem trazer uma perspectiva de trabalho voltada à facilitação da aprendizagem de um determinado conceito ou um conjunto de conceitos. Assim, concordando com Nunes e Nunes (2019), é importante levantar uma condição prévia à proposição e à realização das atividades em uma sequência didática, constituída a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes como ponto de partida.

Para compreender melhor como estas noções podem ser abarcadas sob uma perspectiva favorável a uma proposta, antes é necessário compreender como uma sequência didática pode ser proposta. Zabala (1998) traz uma visão bastante próxima à elaboração de um planejamento de aula, em que uma sequência didática é constituída a partir de atividades a serem realizadas, sob uma ordem e uma estrutura particulares, onde se torna um instrumento propício para alcançar determinados objetivos conhecidos pelo professor e pelos estudantes. Teixeira e Passos (2013), por sua vez, percebe uma sequência didática enquanto um conjunto de situações a serem discutidas ao longo de uma quantidade previamente determinada de aulas, com a finalidade de facilitar a compreensão de assuntos a serem trabalhados, sem a necessidade de esgotar esses assuntos conforme são desenvolvidos.

Mas também é necessário compreender o papel do professor na propositura de uma sequência didática. Claramente, não pode ser o papel de um mero repetidor de ideias e de ideais, mas de um participante que tem a possibilidade de orientar. Esta interação entre professor e estudantes é, nas palavras de Vidal (2016), necessária para perceber como os conhecimentos prévios dos estudantes se transformam com as interações propostas ao longo da realização das atividades, e, inclusive, determinam como ocorrerá a interação entre os próprios estudantes para a compreensão sobre o assunto em discussão.

É perceptível, ao observar a concepção de Zabala (1998), que há diferenças substanciais de acordo com o papel do professor na proposição e na realização das atividades de uma sequência didática. Neste sentido, Zabala (1998) considera quatro possibilidades, em que é perceptível a necessidade de uma mudança de postura.

Para a primeira, o papel do professor é o de um palestrante, um comunicador de lições. Nesta esteira, a concepção da sequência didática segue, como roteiro de elaboração, a comunicação da lição, o estudo individual, a repetição do conteúdo, um exame e uma avaliação. Neste caso, ocorre um esforço do estudante em compreender o conteúdo a partir de uma visão preestabelecida, e isto motiva uma crítica particular aos cursos de Matemática, porque a postura sob análise é compreendida como um padrão dos professores.

Para a segunda, o papel do professor é o de um orientador. Há uma diferença entre a postura de orientar e a postura de palestrar: a orientação propõe um pensamento sobre caminhos e possibilidades para a realização de um trabalho em vez de considerá-los como prontos e acabados. Para esta possibilidade, a concepção da sequência didática já tem por roteiro de elaboração a apresentação de uma situação a ser estudada, a busca por soluções, a exposição do conceito ou do algoritmo, a generalização ou abstração, a aplicação do conceito ou do algoritmo em diferentes contextos, o exercício do conceito ou do algoritmo, um exame e uma avaliação.

Para a terceira, o papel do professor é o de um orientador e mediador, com um maior alcance sobre a mediação. Neste sentido, o professor passa a participar da discussão em vez de propor caminhos e soluções para a continuidade das atividades. Para esta situação, a concepção de sequência didática difere quanto aos passos iniciais em relação à anterior, trazendo como roteiro de elaboração a apresentação de uma situação a ser estudada, um diálogo entre os participantes a respeito da situação apresentada, a comparação de diferentes pontos de vista, a tomada de conclusões, a generalização ou abstração, a realização de exercícios de memorização, um exame e uma avaliação.

Para a quarta, o papel do professor combina a orientação, a mediação e a participação na atividade. A participação do professor traz como elemento diferenciador a possibilidade de compreender os pontos de vista dos estudantes ao longo da discussão e da realização das atividades. Nesta perspectiva, a sequência didática traz como roteiro de elaboração a apresentação de uma situação a ser estudada, a proposição de problemas ou soluções, a proposição de fontes de informação, a busca da informação, a elaboração das conclusões, a generalização ou abstração e síntese, a realização de exercícios de memorização, um exame e uma avaliação.

A classificação apresentada sugere formas de atuação que possivelmente fazem parte da realidade do professor. Com efeito, três dentre as classificações sugerem uma abordagem inicial através de uma situação a ser estudada, mas a proposição desta situação pode variar com um diagnóstico prévio sobre os conhecimentos dos estudantes. Isto significa que uma condição ideal seria recorrer a menos requisitos conceituais para a proposição de uma sequência didática, o que nem sempre é possível.

Apesar desta dificuldade quanto a uma condição ideal, para Nunes e Nunes (2019), a construção de sequências didáticas não traz, necessariamente, um percurso fixo a ser seguido durante a aplicação dessas sequências, mas traz possibilidades de interação que podem já ser correntes ou passarem a ser percebidas tanto no processo de elaboração quanto durante a aplicação.

Quando as possibilidades de interação são percebidas durante a aplicação, contribuem para a melhoria da proposição inicial. Assim, nem sempre uma proposta de sequência didática será proveniente de um longo período de observação ou de experimentação; uma proposta pode ser apresentada com um conhecimento prévio de condições consideradas existentes como motivação para a elaboração presente e a aplicação futura de uma sequência didática.

4.2 Princípios Norteadores Para a Proposta

As propostas já estudadas no Capítulo 3 para uma atuação com as disciplinas de Análise Real constatam dificuldades com o tratamento de conjuntos e de operações neles estabelecidas, quando se lida com o estudo do próprio conjunto de números reais e no trato com limites de funções, envolvendo as sequências como uma classe particular de funções.

A partir dos trabalhos estudados e considerando os conhecimentos estudados em uma disciplina de Análise Real, a dificuldade com o tratamento das operações é tornada mais clara quando os estudantes passam a lidar com o uso frequente de desigualdades. No estudo da Análise Real, as primeiras dificuldades com essa questão surgem no estudo de mínimos, máximos, limitantes, ínfimo e supremo de subconjuntos, uma vez que estes conceitos são elaborados a partir de uma comparação direta entre dois valores.

Nesta mesma esteira, a dificuldade com o trato de conjuntos e funções é perceptível no estudo do conceito de enumerabilidade, que faz uso do conceito de função de uma maneira muito densa na avaliação de subconjuntos que permitem determinar ou afastar a hipótese de uma bijeção. O trato de conjuntos traz ainda mais dificuldades no estudo dos subconjuntos do próprio conjunto de números reais, e, consequentemente, afeta o estudo dos tópicos de topologia do conjunto de números reais, por serem frequentes as avaliações em termos de uma inclusão de um conjunto em outro ou de uma intersecção de dois conjuntos.

Com as considerações feitas até o momento, a proposta é delineada em torno dos seguintes tópicos: a percepção sobre o infinito e a enumerabilidade do conjunto de números racionais; o estudo de mínimo, máximo, limitantes, ínfimo e supremo de subconjuntos de conjuntos numéricos; razões para a necessidade do conjunto de números reais; axiomatização do conjunto de números reais e nova avaliação sobre a suficiência deste conjunto; a não enumerabilidade do conjunto de números reais; e a introdução à estrutura topológica do conjunto de números reais a partir da avaliação de pontos interiores, pontos aderentes e pontos cumulativos a um subconjunto.

Estas ideias são trabalhadas ao longo de seis sequências didáticas, estruturadas a partir de um aporte teórico mínimo para a proposição de um ponto de partida para as discussões, a propositura de atividades que tenham o condão de compreender alguns aspectos a respeito dos conceitos e dos conjuntos sob estudo, e a abordagem mais ampla dos conceitos e das propriedades inicialmente discutidas nas atividades.

4.2.1 A dinâmica da percepção sobre o infinito

A presente sequência didática aborda as visões sobre o infinito passíveis de desenvolvimento nos conjuntos de números naturais, números inteiros e números racionais.

Quadro 10 – Informações sobre a sequência didática da seção 4.2.1.

Assunto a ser abordado	As projeções da enumerabilidade nos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$
Objetivos da ação	Proporcionar a compreensão sobre o conceito de enumerabilidade e os efeitos das demonstrações usuais a respeito da enumerabilidade de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Compreender como se dá uma possível enumeração para $\mathbb{Z}$. Compreender como se dá uma possível enumeração para $\mathbb{Q}$.
Conhecimentos prévios	Funções. Princípio de Indução. Definição e propriedades de conjuntos finitos, conjuntos infinitos.
Conhecimentos desenvolvidos	Infinitos números em $\mathbb{N}$. Infinitos números em $\mathbb{Z}$ e a condição de enumerabilidade de $\mathbb{Z}$. Infinitos números em $\mathbb{Q}$ e a condição de enumerabilidade de $\mathbb{Q}$.
Competências aprimoradas	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Material necessário	Quadro. Giz. Pincel. Canetas. Papéis.
Duração da atividade	1 hora e 30 minutos.
Referências	Calkin e Wilf (2000), Lima (2017)

Fonte: elaboração do autor, 2020.

O Quadro 10 traz as informações elementares à sequência.

Aporte teórico

Conjuntos infinitos e o conceito de enumerabilidade

Uma maneira de trabalhar a dicotomia entre os termos *finito* e *infinito* em torno da discussão sobre conjuntos diz respeito à possibilidade de quantificar um conjunto, isto é, dizer quantos objetos um conjunto encerra em sua constituição. É possível fazer isto a partir do conjunto de números naturais, fixando um número natural como termo para determinar esta quantidade.

Por outro lado, é possível discutir sob o ponto de vista de funções, de maneira a destacar um subconjunto S de um dado conjunto X sob estudo, de forma que S e X não sejam o mesmo conjunto, formular uma função $f : X \to S$ associando os objetos de X aos objetos de S, e discutir sobre a viabilidade de f ser bijetiva. Neste sentido, X será um conjunto *infinito* quando houver algum subconjunto $S \subset X$, que não coincida com o próprio X, para o qual seja possível formular uma função bijetiva $f : X \to S$. Com esta observação, um conjunto X será *finito* quando a única bijeção possível de X com um subconjunto seu S ocorrer quando S for o próprio conjunto X.

Dito isto, é possível avançar em uma abordagem conceitual mais específica para a finalidade da sequência didática. A compreensão inicial sobre um conjunto infinito se dá com o conjunto de números naturais, de uma forma mais leiga, e não é a mesma advinda da noção de conjunto infinito disposta nesta seção. Mesmo assim, esta compreensão sofre transformações que merecem atenção ao longo do estudo em Matemática, e, particularmente na Análise Real.

Em se tratando de conjuntos numéricos, as referências são voltadas a relacionar todos os conjuntos numéricos a partir do conjunto de números naturais, inclusive por ser o primeiro conjunto numérico que um estudante tem contato ao longo da vida escolar. Particularmente, o conjunto de números naturais é infinito. Uma maneira de concluir esta afirmação é considerar um número natural p, promover a associação $f(1) = p + 1$, $f(2) = p + 2$, $f(3) = p + 3$, e, de maneira mais geral, $f(n) = p + n$, e observar que essa associação determina uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to S$, onde $S = \{p + n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$.

Por outro lado, é interessante que a associação entre outros conjuntos numéricos e o conjunto de números naturais seja estudada a partir do fato de $\mathbb{N}$ ser infinito. Levando isto em consideração, um conjunto infinito é *enumerável* se houver alguma função bijetiva associando o conjunto de números naturais a ele. A partir deste momento, a discussão é voltada a explorar esta relação e a percepção sobre os demais conjuntos numéricos.

Infinito em $\mathbb{N}$

A percepção sobre o fato de $\mathbb{N}$ ser infinito pode ser desenvolvida através do Princípio de Indução. Para tanto, é importante uma redação própria para uma compreensão adequada do Princípio, e uma sugestão de redação é a que se segue.

Considere uma propriedade a ser estudada e, a partir dela, formule um conjunto S sem tentar prever que números naturais possam estar presentes nele. Avalie se a definição dada a S permite concluir que 1 é um objeto de S, ou seja, $1 \in S$. Sob esta condição, a formulação de S permite concluir que o conjunto não é vazio e permite considerar um número z qualquer que esteja presente em S para mostrar que $z + 1 \in S$. Ao mostrar que $z + 1 \in S$ para um número natural z qualquer presente em S, é permitido afirmar que $S = \mathbb{N}$.

A percepção do infinito em $\mathbb{N}$ é exatamente a descrita no processo de indução. A propriedade a ser considerada é a de um número natural sempre dispor de um sucessor. Então, o conjunto S é constituído de números naturais que dispõem de um sucessor. Desta maneira, como 1 admite sucessor, então $1 \in S$, mostrando que S não é vazio. Considerado um número natural z qualquer presente em S, isto é, $z \in S$, é sabido que z dispõe de um sucessor, $z + 1$. Mas $z + 1$, por ser um número natural, também dispõe de um sucessor, $(z + 1) + 1$, ou $z + 2$. Portanto, $z + 1 \in S$.

Para compreender o que isto efetivamente significa, basta exibir este processo iterativo. Como $1 \in S$, isto significa que $1 + 1$, ou seja, 2, é o sucessor de 1. Mas 2 é um número natural e dispõe de um sucessor, $2 + 1$, ou seja, 3, é o sucessor de 2. Mas 3 também é um número natural e dispõe de um sucessor, $3 + 1$, ou seja, 4. Isto significa que aquele número natural z qualquer admite ser substituído por qualquer número natural concreto fornecido, como 1, 2, 3, 4, 1000, dentre outros, e sempre haverá um sucessor para ele. Neste sentido, uma compreensão mais simples ainda em vista desta observação é a de que sempre haverá números naturais cada vez maiores, e isto acabará por fazer do conjunto um conjunto infinito.

Infinito em $\mathbb{Z}$

A percepção sobre $\mathbb{Z}$ permite descrever três subconjuntos peculiares. Um é o próprio $\mathbb{N}$, um outro é o constituído exclusivamente pelo zero, $\{0\}$, e o último é constituído dos números negativos ou simétricos, descrito por $\{-z \; ; \; z \in \mathbb{N}\}$. Neste último subconjunto, em particular, é possível trazer a percepção de infinito já discutida em $\mathbb{N}$ sob outra feição.

Em vez de trabalhar com um conjunto, é mais simples formular uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \{-z \; ; \; z \in \mathbb{N}\}$, descrita por $f(z) = -z$. Então, para cada número natural z fornecido, o fato de se saber que existe um sucessor para z permite concluir que a mesma noção de infinito existente em $\mathbb{N}$ se aplica a este subconjunto de números inteiros negativos.

Com efeito, para cada número natural concreto fornecido, é obtido seu simétrico aditivo. Para 1, vem -1. Para 2, vem -2. Para 3, vem -3. Para 1000, vem -1000. Como sempre há sucessores para os números naturais fornecidos, cada novo número natural tem um simétrico aditivo, que é um número inteiro. Então, uma compreensão mais simples ainda em vista desta observação é a de que sempre haverá números inteiros cada vez menores.

Por outro lado, uma maneira de *enumerar* $\mathbb{Z}$ é considerar os subconjuntos de números pares e de números ímpares naturais e, com eles, alinhar os subconjuntos de números naturais e de números não naturais inteiros:

$$\begin{array}{ll} \{1;3;5;7;9;\ldots\} & \{2;\quad 4;\quad 6;\quad 8;\ldots\} \\ \{1;2;3;4;5;\ldots\} & \{0;-1;-2;-3;\ldots\} \end{array}$$

Através desta proposta de alinhamento, é interessante discutir a viabilidade de construir uma função que permite a associação conforme a proposta. Assim, para os dois primeiros subconjuntos, o interesse é conseguir subsídios para uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de maneira que $f(1) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(9) = 5$, e que esta associação prossiga ao longo da consideração dos demais números ímpares em $\mathbb{N}$ associados aos demais números positivos em $\mathbb{Z}$. Além disso, é também necessário à mesma função f que $f(2) = 0$, $f(4) = -1$, $f(6) = -2$, $f(8) = -3$, e que esta associação prossiga ao longo da consideração dos demais números pares em $\mathbb{N}$ associados aos demais números não positivos em $\mathbb{Z}$.

Através do fato de um número natural ímpar i poder ser escrito como $2z - 1$ para algum número natural z, então é permitido escrever $f(2z - 1) = z$, ou, o que é melhor, $f(i) = (i + 1)/2$. Esta escrita é permitida porque, sendo i ímpar, então $i + 1$ é par e, portanto, divisível por 2.

Para um número natural par p, é possível escrever p como $2z$ para algum número natural z. Assim, é permitido escrever $f(2z) = 1 - z$, ou, o que é melhor, $f(p) = 1 - (p/2)$. Esta escrita é permitida porque p é par e, com isso, divisível por 2.

Desta maneira, é possível construir uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ injetiva, em que $f(z) = (z + 1)/2$ se z for ímpar e $f(z) = 1 - (z/2)$ se z for par. Quanto à sobrejetividade de f, ocorre que, dado um número inteiro não positivo w, então é necessário avaliar as duas regras de formação. Como a primeira só produz números positivos, então w é encerrado na segunda. Logo, é permitido escrever $w = 1 - (z/2)$. Multiplicando por 2, passa-se a

$2w = 2 - z$, de onde, $-z = 2w - 2$, ou melhor, $z = 2 - 2w$. Claramente z é um número par; por outro lado, como $w \leqslant 0$, isto significa que $-2w \geqslant 0$ e, portanto, z é um número natural par. Sendo w um número natural, é encerrado na primeira regra de formação, visto que a segunda só produz 0 e números negativos. Assim, ao escrever $w = (z + 1)/2$, multiplicar por 2 significa $2w = z + 1$, de onde se conclui $z = 2w - 1$, que é um número natural ímpar.

Esta atribuição mostra que o conjunto de números inteiros é, claramente, um conjunto infinito enumerável, e não traz dificuldades maiores quanto à compreensão do que isto significa: que $\mathbb{Z}$ tem a mesma quantidade infinita de objetos que $\mathbb{N}$.

Infinito em $\mathbb{Q}$

A complexidade sobre a percepção do infinito em $\mathbb{Q}$ diz respeito a dois aspectos: o primeiro é a possibilidade de obter infinitos números racionais a partir de dois números racionais diferentes fixados, o segundo é a dificuldade em obter uma função que caracterize a enumeração de um subconjunto de números racionais tido como considerável.

Sejam fixados dois números racionais a e b, com $a < b$, descritos por $a = n/d$ e $b = u/q$. A fim de evitar dificuldades operatórias, considere d e q números naturais. Então, $n/d < u/q$. Ao multiplicar por dq, é obtida a desigualdade $(dq)(n/d) < (dq)(u/q)$, de onde é possível escrever a desigualdade $qn < du$. Por ora, qn e du são números inteiros e a desigualdade expressa significa que $du - qn > 0$, ou melhor, $du - qn \geqslant 1$. Logo, multiplicar esta desigualdade por um número natural $z > 1$ significa $zdu - zqn \geqslant z$, ou seja, é possível considerar ao menos um número inteiro maior do que zqn e menor do que zdu.

Para continuar, considere ou $zqn + 1$ ou $zdu - 1$. No primeiro caso, a desigualdade obtida é $zqn < zqn + 1 < zdu$. Ora, a primeira multiplicação foi por dq seguida pela de z. Então a desigualdade será dividida por zdq, obtendo $n/d < (zqn + 1)/zdq < u/q$. No segundo caso, a desigualdade obtida é $zqn < zdu - 1 < zdu$ e, ao ser dividida por zdq, produz $n/d < (zdu - 1)/zdq < u/q$.

A sequência do processo envolve considerar o número racional obtido nesta primeira etapa e um dos números racionais anteriores para repetir o processo, obtendo outro número racional diferente dos três já existentes. Desta forma, ou são considerados

n/d e o número r_1 obtido na primeira etapa, ou são considerados o número r_1 obtido na primeira etapa e u/q. Dependendo da escolha, a próxima etapa levará em consideração o número r_2 obtido na segunda etapa, mas poderá considerar n/d, r_1 ou u/q, de acordo com a escolha tomada para r_1. Este processo, apesar de árduo, provoca a obtenção de infinitos e diferentes números racionais.

A forma proposta para obtenção de outros números racionais se assemelha à escolha de ramos de uma árvore, mas está restrito ao subconjunto definido pelos dois números racionais inicialmente tomados, o que traz a ideia de infinitos números em infinitos subconjuntos de números racionais, e, com ela, a noção de que o conjunto de números racionais parece dispor de uma infinidade maior de objetos.

Um algoritmo interessante que se utiliza da ideia de árvore foi desenvolvido por Neil Calkin e Herbert Wilf e permite desfazer essa noção de que há uma infinidade maior de números racionais em relação a números inteiros e naturais. O algoritmo se inicia com o número natural 1 e declara que cada número racional dispõe de dois ramos, descrevendo, a partir do número racional n/d, os números racionais $n/(n + d)$ e $(n + d)/d$.

A partir do número natural 1, que pode ser escrito como o número racional $1/1$, os ramos dele obtidos são $1/(1 + 1)$, advindo de $n/(n + d)$, e $(1 + 1)/1$, advindo de $(n + d)/d$, ou seja, $1/2$ e $2/1$. Estes dois números formam o primeiro passo. Para $1/2$, os ramos são $1/(1 + 2)$ e $(1 + 2)/2$, ou seja, $1/3$ e $3/2$. Para $2/1$, os ramos são $2/(2 + 1)$ e $(2 + 1)/1$, ou seja, $2/3$ e $3/1$. Estes quatro números formam o segundo passo. O terceiro passo trará os ramos dos últimos quatro números, na sequência em que foram obtidos e mencionados. Ao concluir o terceiro passo, serão obtidos os seguintes números:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{1}; \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{1}; \frac{1}{4}; \frac{4}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{2}; \frac{2}{5}; \frac{5}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{1}.$$

Observe que cada número racional, a partir do segundo, tem por numerador o denominador do anterior. Então, é possível listar, mesmo com a dificuldade trazida por este algoritmo, a sequência de denominadores, a saber,

$$(1; 2; 1; 3; 2; 3; 1; 4; 3; 5; 2; 5; 3; 4; 1; \ldots).$$

Outra propriedade importante é que cada novo passo z produz 2^z novos números racionais, dentre eles os números racionais $1/(z + 1)$ e $(z + 1)/1$, obtidos como ramos do primeiro e do último números racionais do passo anterior.

As questões que surgem nesta representação se referem à regularidade da mesma, isto é, se sempre serão observadas estas propriedades. Além disso, há a dúvida sobre se nenhum número racional está sendo omitido ou duplicado. Para sanar estas dúvidas, são avaliadas as seguintes propriedades: se as frações obtidas são irredutíveis, se cada número racional positivo ocorre alguma vez na árvore inteira, e se cada número racional obtido ocorre uma única vez na árvore inteira.

Para avaliar se as frações obtidas são irredutíveis a partir do primeiro passo, uma vez que $1/1$ é irredutível, considere que alguma fração na forma r/s não seja irredutível e seja o primeiro ramo onde isso acontece. O fato de r/s não ser irredutível permite a existência de um número natural $z > 1$, de modo que $r = gz$ e $s = wz$, em que g/w é irredutível. Como r/s é ramo de alguma fração anterior, então pode ser fruto ou da formação $n/(n + d)$ ou da formação $(n + d)/d$. Se é da formação $n/(n + d)$, então foi obtido da fração $r/(s - r)$. Como r/s não é irredutível, é possível escrever $s - r = (w - g)z$, mostrando que $r/(s - r)$ também não é irredutível, ou seja, a fração r/s foi obtida como ramo de uma fração não irredutível, o que é absurdo, pois r/s é o primeiro ramo não irredutível. Se r/s é da formação $(n + d)/d$, então é proveniente de $(r - s)/s$. Mas aí, $r - s = (g - w)z$, mostrando que $(r - s)/s$ também não é irredutível, e, portanto, novamente absurdo, pois r/s é o primeiro ramo não irredutível. Isto significa que toda fração construída por este algoritmo é irredutível.

Para constatar se todo número racional positivo ocorre alguma vez na árvore inteira, considere o contrário, ou seja, que um número racional r/s aparentemente não ocorra na árvore, e, de modo que, caso existam outros, é o que tem o menor numerador e o menor denominador, isto é, é o primeiro número ausente a ser notado. Há duas situações: ou $r < s$ ou $r > s$. Olhando a formação a partir de um número racional n/d, são permitidas apenas as formações $n/(n + d)$ e $(n + d)/d$. Se $r < s$, então não foi obtido da segunda formação, e, sim, da primeira. Mas aí, a fração de origem era $r/(s - r)$ e $s - r < s$, mostrando que uma outra fração de denominador menor não foi listada também. Mas isso é absurdo, pois r/s é o primeiro número racional que não foi notado na árvore. Se $r > s$, então não é obtido da primeira formação, e, sim, da segunda. Ora, a fração de origem era $(r - s)/s$ e $r - s < r$, mostrando que uma outra fração de numerador menor não foi listada também. Isso também é absurdo, porque r/s é o primeiro número racional que não foi notado. Isto significa que todo número racional positivo é construído através deste algoritmo.

Para decidir se não existem duas ou mais instâncias de um mesmo número racional, considere que um número racional r/s aparentemente ocorra mais de uma vez na árvore e que, caso existam outros, é o que tem o menor numerador e o menor denominador, isto é, é o primeiro número duplicado a ser notado. Há duas situações: ou $r < s$ ou $r > s$. Olhando a formação a partir de um número racional n/d, são permitidas apenas as formações $n/(n+d)$ e $(n+d)/d$. Se $r < s$, então não foi obtido da segunda formação, e, sim, da primeira. Logo, a fração de origem era $r/(s-r)$ e $s-r < s$. Como r/s é duplicada, isso significa que há duas frações distintas representáveis por $r/(s-r)$, o que é impossível diante da irredutibilidade das frações na árvore e do fato e r/s ser a primeira fração duplicada com o menor denominador possível. Se $r > s$, então não foi obtido da primeira formação, e, sim, da segunda. Com isso, a fração de origem era $(r-s)/s$ e $r-s < r$. Como r/s é duplicada, isso significa que há duas frações distintas representáveis por $(r-s)/s$, o que é impossível dado que todas as frações obtidas são irredutíveis e r/s é a primeira fração duplicada com o menor numerador possível. Diante disto, todo número racional é atingido uma única vez ao longo dessa árvore.

É possível, neste momento, verificar a propriedade de que toda fração gerada por este algoritmo tem por numerador o denominador da fração imediatamente anterior. Se duas frações são ramos de um mesmo número racional n/d, então são $n/(n+d)$ e $(n+d)/d$, e, claramente, o numerador da segunda é igual ao denominador da primeira.

Considere, então, para um determinado passo ao longo da construção, a partir do segundo, duas frações subsequentes, a saber, m/w e k/x. Se elas são provenientes de dois números racionais diferentes, então vieram dos ramos $(m-w)/w$ e $k/(x-k)$ e, além disso, estes números são subsequentes na construção. Se tais frações são provenientes de um mesmo número racional, isto significa que $w = k$. Se não, então vieram dos ramos $(m-2w)/w$ e $k/(x-2k)$ e, além disso, são subsequentes. Logo, ou nesta etapa será constatado que $w = k$, ou o processo se repetirá novamente. Por outro lado, como $m \neq w$ e $k \neq x$, haverá números naturais n e u para o quais $nw > m$ e $uk > x$. Sendo f o menor dentre n e u, tentar escrever $(m-fw)/w$ ou $k/(x-fk)$ resultará em um número negativo, mostrando que $(m-(f-1)w)/w$ e $k/(x-(f-1)k)$ são subsequentes e provenientes de um mesmo número racional. Portanto, será constatado que $w = k$. Assim, retomando as frações m/w e k/x, o numerador da segunda será igual ao denominador da primeira.

Observando a sequência de denominadores construída a cada passo, é interessante tomá-la como uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A partir da primeira fração gerada, é permitido escrevê-la como $f(z)/f(z+1)$, pelas propriedades já estudadas. Para recapitular a ilustração, observe a sequência de frações e a sequência de denominadores:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{1}; \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{1}; \frac{1}{4}; \frac{4}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{2}; \frac{2}{5}; \frac{5}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{1}; \ldots$$

$$1; 2; 1; 3; 2; 3; 1; 4; 3; 5; 2; 5; 3; 4; 1; \ldots$$

Então, é possível descrever propriamente uma função $e : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+^*$, onde $e(1) = 1$ e, para $z > 1$, $e(z) = f(z-1)/f(z)$. A partir das propriedades estudadas, a função e é uma função bijetiva entre o conjunto de números naturais e o conjunto de números racionais positivos, de uma maneira que torna o conjunto de números racionais enumerável à maneira do conjunto de números inteiros.

Esta abordagem traz outra visão além da obtenção de infinitos números racionais restritos à delimitação de dois números racionais. Com efeito, é possível uma leitura sequencial do conjunto de números racionais à maneira do conjunto de números inteiros, permitindo afirmar de uma maneira mais factível que $\mathbb{Q}$ tem a mesma quantidade infinita de objetos que $\mathbb{N}$.

Introdução

A noção de enumerabilidade de conjuntos, apesar de ser levantada a partir de uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to S$ para um conjunto S, traz consigo propriedades que, ao serem aplicadas a alguns conjuntos numéricos, trazem desconfianças sobre suas conclusões.

Com efeito, ainda pode ser percebida uma dificuldade quanto a compreender que conjuntos numéricos não são relacionados apenas quanto à abertura de possibilidades operatórias, trazendo a já conhecida relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, mas a atribuição de funções entre eles traz, ao mesmo tempo, curiosidades e complicações.

As desconfianças e complicações quanto ao conceito de enumerabilidade tomam forma no estudo de $\mathbb{Q}$, por ser mais difícil mostrar uma função que caracteriza a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$, e poder provocar uma mudança sobre a visão de que sempre há cada vez mais números a cada conjunto numérico que é criado.

Diagnóstico inicial

Para o presente estudo, o diagnóstico pode ser realizado através de uma relação de questões a respeito da compreensão sobre o conceito de função, o conceito de enumerabilidade, e o Princípio de Indução. Outra maneira é uma discussão rápida sobre estes três pontos.

No tocante ao conceito de função, a discussão pode levar em consideração a associação individual de objetos em dois conjuntos para a abordagem da injetividade e da sobrejetividade.

Quanto ao conceito de enumerabilidade, é interessante considerar subconjuntos finitos e infinitos de números naturais para a discussão rápida. A associação individual pode ser representada para levantar possíveis dificuldades.

Quanto ao Princípio de Indução, uma noção preliminar pode ser solicitada para discussão, apesar de haver um espaço para tanto nas atividades a serem desenvolvidas.

Fomentando a discussão

Ao trazer os três conjuntos numéricos iniciais, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, deve-se levantar questões sobre que números estão presentes nesses conjuntos e sobre como é percebido o fato de cada um desses conjuntos dispor de infinitos objetos.

Em outras palavras, as questões iniciais são como podem ser descritos os números em cada um dos conjuntos, em torno de que propriedades os conjuntos foram constituídos e algumas maneiras de obter infinitos números em cada um dos conjuntos.

Atividade: discutindo números naturais e inteiros

Quanto à percepção sobre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, a sugestão é que cada estudante descreva o Princípio de Indução com suas palavras, apresentando uma redação para o Princípio.

As sugestões de redação podem ser trocadas entre eles e discutidas entre eles sob o ponto de vista da compreensão das redações uns dos outros como um recurso para a compreensão para o Princípio de Indução.

Conforme as discussões entre eles avançam, é interessante apresentar a sugestão descrita no aporte teórico da sequência didática e trazer um confronto de ideias para uma tomada inicial de conclusões.

Discutido brevemente o Princípio de Indução, o momento se vira para o uso do Princípio de Indução para obter infinitos números naturais, ou melhor, o próprio conjunto de números naturais, evidenciando a obtenção desses números como consequência do referido Princípio. Para tanto, a construção sugerida no aporte teórico da sequência didática é interessante.

Quanto ao conjunto de números inteiros, a sugestão é que sejam propostas associações de números naturais a números inteiros positivos e a números inteiros negativos. Inicialmente, as associações não precisam traduzir leis de formação, mas as discussões devem ser conduzidas para proposta de função.

Conforme se discutem essas propostas, é importante que seja considerado inicialmente $\mathbb{N}$ como ponto de partida para a formulação de funções, e, em seguida, dois subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, a saber, os subconjuntos de números pares e de números ímpares, a partir dos quais poderão ser propostas as leis de formação.

Como o zero não foi discutido, poderá surgir alguma questão sobre a inclusão do zero neste contexto. A discussão do zero pode ser incluída ou na função que traz números negativos ou na função que traz números positivos, evitando a necessidade de trabalhar uma exceção.

É interessante que as propostas de função, depois de definidos os domínios iniciais, sejam ajustadas para obter funções bijetivas, para que seja considerada uma composição de funções que resulte, de forma clara, em um função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Atividade: discutindo números racionais

Quanto à percepção sobre $\mathbb{Q}$, a sugestão inicial é a de que sejam propostas maneiras de obter vários números racionais. Como forma inicial da discussão, é interessante que a liberdade dada permita fixar ao menos um número natural, inteiro ou racional como ponto de partida.

Cada estudante pode vir a propor uma maneira diferente para obter vários números racionais. Em virtude disso, é importante procurar categorizar as possíveis maneiras sob duas modalidades: obtenção a partir de apenas um número, e obtenção a partir de mais de um número.

A obtenção a partir de um número racional previamente fixado pode envolver a adição deste número a si mesmo por várias vezes, pensando em uma restrição ao uso de operações; sem uma restrição, é permitido multiplicá-lo ou dividi-lo por um determinado número natural por várias vezes, por exemplo.

A partir de dois números racionais diferentes, sem uma restrição ao uso de operações, é possível considerar as médias aritméticas ou uma forma ainda mais ampla considerando médias ponderadas, como descrito no aporte teórico da sequência didática.

É importante levantar as dificuldades em cada caso. No caso de obter infinitos números racionais diferentes a partir de mais de um número, é necessário frisar que são formados diferentes subconjuntos, com a possibilidade da formação de infinitos subconjuntos com infinitos números.

No caso de obter infinitos números racionais diferentes a partir de apenas um número, é necessário frisar que há as dificuldades em obter uma quantidade significativa de números racionais manualmente, bem como há dificuldades em se garantir que os números obtidos não são apenas frações diferentes, mas números racionais diferentes.

Atividade: compreendendo a formação da árvore de Calkin-Wilf

Considerado um número racional qualquer, é possível identificar dois números inteiros cujo processo de divisão determinam a obtenção deste número. Normalmente, são nomeados *numerador* e *denominador*. Escrevendo, portanto, um número racional positivo como n/d, é necessário utilizar os valores n e d para considerar os números racionais positivos descritos por $n/(n+d)$ e $(n+d)/d$.

Assim, começando com o número racional 1, que pode ser descrito, dentre outras formas, por $1/1$, a primeira aplicação desta regra produz os números racionais descritos por $1/2$ e $2/1$. Uma nova aplicação, portanto, descreverá os números racionais descritos por $1/3$, $3/2$, $2/3$ e $3/1$. Continue o processo até alcançar a sétima etapa. A visualização parecerá presumir que todos os números descritos serão diferentes entre si e, se continuada, parecerá presumir que não faltará número algum.

Por outro lado, considere um número racional positivo diferente de 1. Claramente, o numerador e o numerador que o descrevem serão diferentes. Sendo u/q o número racional considerado, é possível reverter a obtenção até certo ponto, considerando as duas possibilidades de obtê-lo. Descreva quais são as possibilidades, comparando u/q a $n/(n+d)$ e a $(n+d)/d$, e observe o efeito de suas conclusões na visualização já elaborada.

O algoritmo, ou árvore, de Calkin-Wilf

A discussão levantada a respeito de $\mathbb{Q}$ traz consigo a importância de constatar uma forma de obtenção sequencial de números racionais. A árvore de Calkin-Wilf traz um processo interessante para tal, descrito no aporte teórico da sequência didática.

A abordagem deve levar em consideração a visualização inicial do processo, já estabelecida em atividade anterior. A partir desta visualização, devem ser levantadas algumas condições a serem confirmadas. Em particular, as condições são: a propriedade de dois números racionais obtidos sequencialmente terem um número natural comum como denominador do primeiro e numerador do segundo; se, partindo de uma fração irredutível, sempre são obtidas frações irredutíveis; se todo número racional positivo é descrito ao longo do processo de obtenção; e se todo número racional positivo só ocorre apenas uma vez ao longo do processo de obtenção. É por essas razões que o algoritmo se inicia com 1.

Para cada uma dessas propriedades, é interessante recorrer à visualização numérica de como ocorreriam os problemas antes de recorrer ao disposto no aporte teórico da sequência didática para discutir a confirmação das propriedades elencadas e, consequentemente, utilizar os recursos construídos ao longo do processo para formular uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+ - \{0\}$. A partir daí, é possível formular uma função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^- - \{0\}$, mostrando dois subconjuntos com infinitos números racionais e apenas deixando de fora 0.

Com isso, é importante perceber que, feito o trabalho árduo de construir funções bijetivas para cada um dos subconjuntos, a discussão final da enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ segue a discussão final da enumerabilidade de $\mathbb{Z}$, onde uma função foi formada a partir de duas leis de formação, considerando dois subconjuntos disjuntos de $\mathbb{Z}$.

Finalização

A discussão proposta visa trazer um caráter mais palpável à enumerabilidade de $\mathbb{Q}$, fato que será utilizado na discussão das primeiras propriedades a respeito de números reais.

A possibilidade de mostrar uma enumerabilidade concreta tem a finalidade de trazer uma percepção sobre diferentes maneiras de um mesmo infinito se apresentar e provocar questionamentos sobre a possibilidade de haver conjuntos infinitos de diferentes quantidades de elementos fora deste contexto.

Avaliação

A avaliação é feita ao longo da realização das atividades em virtude de as mesmas tomarem forma escrita ao longo de sua aplicação, onde o professor pode sugerir que os estudantes troquem escritas entre si para discutirem sobre suas compreensões individuais das atividades.

Além das especifidades das atividades, a avaliação também pode ser conduzida por uma série de questões voltadas a conhecer a compreensão dos estudantes sobre os seguintes tópicos: a compreensão sobre o conceito de enumerabilidade; o comportamento e a percepção do infinito em cada conjunto numérico abordado; como ocorre a constatação de que não há mais números inteiros do que números naturais; e como ocorre a constatação de que não há mais números racionais do que números inteiros e, consequentemente, do que números naturais.

É interessante que o material escrito seja recolhido para uma avaliação mais profunda. A avaliação deve levar em consideração, em primeiro lugar, a coesão e a clareza, devendo seus resultados serem separados. Em segundo lugar, deve ser avaliado o cuidado no uso das propriedades citadas pelos participantes, destacando possíveis equívocos que levem à compreensão expressada por eles ao longo da realização das atividades.

4.2.2 Marcando limites para subconjuntos

A presente sequência didática aborda uma questão particular ao estudo de subconjuntos de números racionais e, em etapa futura, ao estudo de subconjuntos de números reais: a possibilidade de determinar números que atuem como limitantes especiais, de maneira semelhante à fronteira de um espaço físico. O Quadro 11 traz as informações elementares à sequência.

Quadro 11 – Informações sobre a sequência didática da seção 4.2.2.

Assunto a ser abordado	Determinação de limitantes para subconjuntos de números racionais.
Objetivos da ação	Compreender a necessidade de determinar limitações para subconjuntos de números racionais. Discutir e compreender o contraste entre os conceitos de mínimo e ínfimo de um subconjunto e os de máximo e supremo de um subconjunto. Explorar uma situação particular propícia à possibilidade de serem necessários números irracionais como recurso para estudos com situações reais.
Conhecimentos prévios	Operações com inequações. Operações com números racionais.
Conhecimentos desenvolvidos	Mínimo de um subconjunto. Máximo de um subconjunto. Limitante de um subconjunto. Ínfimo de um subconjunto. Supremo de um subconjunto.
Competências aprimoradas	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Material necessário	Quadro. Giz. Pincel. Canetas. Papéis.
Duração da atividade	1 hora e 30 minutos.
Referências	Lima (2017)

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Aporte teórico

Mínimo e máximo de subconjuntos

Em termos de subconjuntos de conjuntos numéricos, há a dificuldade em poder decidir quais poderão ser o menor e o maior dentre os números presentes no subconjunto, ou mais, se é possível tomar tal decisão.

Quanto a subconjuntos de números racionais, o fato de sempre ser possível obter um número racional a partir de dois outros traz consigo uma dificuldade para decidir, quando não estiver explícito, se é possível determinar o menor e o maior números racionais do subconjunto.

A possibilidade de tal determinação é útil no estudo de subconjuntos ainda mais específicos, que trazem consigo propriedades particulares que influenciam na tomada de decisões em outros contextos, como a possibilidade de determinar valores mínimo e máximo em funções.

Dito isto, quando é possível determinar um menor número em um subconjunto de números racionais, este número, i, por ser o menor número presente, é menor do que todos os demais. Como ele está no subconjunto, então isto significa que, para qualquer número z presente no subconjunto, ocorre $i \leqslant z$.

O *mínimo* de um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{Q}$ é um número racional $i \in S$ tal que $i \leqslant z$ para todos os números $z \in S$. Escreve-se o mínimo como $i = \min S$.

Tendo em vista que há subconjuntos de números racionais nos quais é possível determinar um maior número, este número, s, é maior do que todos os demais, e por s fazer parte do subconjunto, ocorre que $z \leqslant s$ para qualquer número z no subconjunto.

Diante disto, o *máximo* de um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{Q}$ é um número racional $s \in S$ tal que $z \leqslant s$ para todos os números $z \in S$. Escreve-se o máximo como $s = \max S$.

Limitantes de subconjuntos

A questão principal diz respeito à impossibilidade de determinar ou um mínimo ou um máximo para um subconjunto de números racionais. Todavia, mesmo não sendo possível tal decisão, seria possível afirmar que todos os números do subconjunto são maiores do que certo número racional, ou são menores do que certo número racional.

Para tanto, o estudo envolve o uso de valores não presentes no subconjunto em estudo como recurso. Se todos os números de um subconjunto $S \subset \mathbb{Q}$ são maiores do que certo número racional l, então sempre se tem $l < z$ para todo número $z \in S$. Esta condição caracteriza um *limitante inferior* para S.

De maneira similar, se todos os números de um subconjunto $S \subset \mathbb{Q}$ são menores do que certo número racional l, então sempre se tem $z < l$ para todo número $z \in S$. Esta condição caracteriza um *limitante superior* para S.

Usualmente, em vez dos nomes limitante inferior e limitante superior, podem ser adotados os nomes *cota inferior* e *cota superior*, respectivamente.

Ínfimo e supremo de subconjuntos

Mesmo sendo possível o uso de limitantes no estudo de subconjuntos de números racionais, às vezes é necessário um ponteiro mais preciso para a possibilidade em estudo, e é neste momento que se busca um valor que atue como um ponto de fronteira física, do qual nenhum número racional presente no subconjunto poderá se tornar menor, no caso de uma limitação inferior, ou maior, no caso de uma limitação superior.

Esta condição traduz a necessidade de um limitante especial para cada caso. Isto significa que o limitante em questão permite afirmar que sempre será possível obter um número racional no subconjunto em estudo de acordo com a limitação exercida: se tal limitante é inferior, então sempre será possível obter um número maior do que ele no subconjunto; se tal limitante é superior, então sempre será possível obter um número menor do que ele no subconjunto.

A condição de uma possibilidade permanente pode ser expressa em termos de um parâmetro em relação ao limitante para obter um novo número do subconjunto. No caso de um limitante inferior i que permita tal análise em um subconjunto S, a condição sobre i é a de que é possível considerar um número racional qualquer $m > i$ e, a partir de i e de m, ser possível obter um certo número racional $z \in S$ onde $i < z < m$.

Como o limitante inferior i tem a finalidade de servir de ponto de fronteira, é interessante abarcar os casos em que os subconjuntos em estudo podem admitir mínimo, pois a determinação de um mínimo para o subconjunto traz consigo a mesma condição. Desta maneira, a desigualdade anterior admite ser reescrita, sob esta condição, como $i \leqslant z < m$.

Para finalizar, m pode ser descrito com relação a i, já que $m > i$. Isto significa que existe um número racional positivo r para o qual $m = i + r$. Enfim, a desigualdade anterior pode ser reescrita como $i \leqslant z < i + r$. A condição descrita traz a i a condição de um limitante inferior para S com uma propriedade particular: se outro limitante inferior x para S fosse maior do que i, não haveria número racional $z \in S$ para o qual $i \leqslant z < x$. Assim, qualquer outro limitante inferior para S será menor do que i.

Diante do exposto, o *ínfimo* de um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{Q}$ é um número racional i para o qual, dado qualquer acréscimo por um número racional positivo r, é possível determinar um número $z \in S$ de maneira que $i \leqslant z < i + r$. Em outras palavras, é o maior dentre os limitantes inferiores possíveis para S, ou o máximo do subconjunto de limitantes inferiores possíveis para S. Escreve-se o ínfimo como $i = \inf S$.

De maneira semelhante, no caso de um limitante superior s que permita tal análise em um subconjunto S, a condição sobre s é a de que é possível considerar um número racional qualquer $w < s$ e, a partir de w e de s, ser possível obter um certo número racional $z \in S$ tal que $w < z < s$. Como também são desejáveis os casos em que s pode assumir a função de máximo de um subconjunto, a desigualdade se torna $w < z \leqslant s$. E, por fim, como $w < s$, é possível escrever $w = s - r$ para certo número racional positivo r, donde a desigualdade se torna $s - r < z \leqslant s$.

Com isso, s é um limitante superior para S e dispõe de uma propriedade peculiar: se outro limitante superior x para S fosse menor do que s, não haveria número racional $z \in S$ para o qual $x < z \leqslant s$. Assim, qualquer outro limitante superior para S será maior do que s.

Assim, o *supremo* de um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{Q}$ é um número racional s para o qual, dada qualquer redução por um número racional positivo r, é possível determinar um número $z \in S$ de maneira que $s - r < z \leqslant s$. Em outras palavras, é o menor dentre os limitantes superiores possíveis para S, ou o mínimo do subconjunto de limitantes superiores possíveis para S. Escreve-se o supremo como $s = \sup S$.

Efeitos de uma situação particular

Em se tratando de números racionais, a definição do ínfimo e do supremo de um subconjunto, quando este admite limitante inferior ou limitante superior para a avaliação, não traz uma garantia sobre a viabilidade de o ínfimo ou o supremo de um subconjunto poder ser um número racional.

Uma situação particular é a avaliação do entorno de $1/2$ quando a abordagem é feita por potências de números racionais. Como a operação de potenciação também assume a ocorrência de uma possibilidade de operação inversa, e o fato de serem estudados polinômios de segundo grau de maneira exaustiva no Ensino Básico motivam o estudo da situação através das desigualdades $z^2 < 1/2$ e $z^2 > 1/2$.

Para tornar as condições menos propensas a novas necessidades de limitação, serão considerados os subconjuntos $E = \{z \in \mathbb{Q}\,;\, z > 0 \text{ e } z^2 < 1/2\}$ e $D = \{z \in \mathbb{Q}\,;\, z > 0 \text{ e } z^2 > 1/2\}$. Em termos de números racionais, as desigualdades mais simples $z < 1/2$ e

$z > 1/2$ já mostram que há infinitos números racionais atendendo a estas propriedades, e os conjuntos E e D trazem um desafio maior por trazer polinômios de grau 2.

É possível perceber que E e D não são conjuntos vazios. De maneira simples, como se sabe que $(1/2)^2 = 1/4$ e $1/4 < 1/2$, então E não é vazio. Já que $1/2 < 1$, também D não é vazio. Esta constatação permite a continuação da avaliação.

A primeira dificuldade é discutir E sob o ponto de vista de dispor de máximo. A partir dos subconjuntos E e D, considerados dois números racionais $n \in E$ e $u \in D$, a propriedade definidora de E permite escrever $n^2 < 1/2$ e a propriedade definidora de D permite escrever $1/2 < u^2$. Assim, $0 < n^2 < 1/2 < u^2$, e como n e u são positivos, é permitido concluir que $n < u$.

A situação se torna intrigante por este último fato, pois todo número presente em E é um limitante inferior para D e todo número presente em D é um limitante superior para E. Isto significa que é necessário procurar uma abordagem com uma variabilidade menor para estes limitantes.

Então, é interessante observar que todo número z presente em E necessariamente é menor do que 1, dado que $z^2 < 1/2$ e $1/2 < 1$. Como $z > 0$, então $z < 1$ a partir daí. Isto permite considerar parte dos limitantes superiores de E a partir dos próprios números presentes em E para procurar por uma condição melhor. Então, dado um número $n \in E$, será considerado o limitante superior $n + 1$.

Como $n + 1 \in D$ por $n + 1$ ser limitante superior de E, então $(n + 1)^2 > 1/2$. Trabalhando esta desigualdade, passa-se a $2(n + 1)^2 > 1$ e, por conseguinte, $2(n^2 + 2n + 1) > 1$, de onde vem $2n^2 + 4n + 2 > 1$.

O olhar deve ser voltado para $2n^2$ pelo fato de $n \in E$. Em virtude de ser $n \in E$, então $n^2 < 1/2$, o que acarreta $2n^2 < 1$. Isto significa que $0 < 1 - 2n^2$, isto é, $1 - 2n^2$ é ainda um número positivo. Diante desta condição, a desigualdade $2n^2 + 4n + 2 > 1$ pode ser escrita como $4n + 2 > 1 - 2n^2$. Como $n > 0$, então $4n + 2$ também é positivo e é permitido dividir a desigualdade por $4n + 2$. Assim, foi obtido um valor de referência ainda menor do que 1, o que é importante para continuar:

$$1 > \frac{1 - 2n^2}{4n + 2}.$$

Então, para poder trabalhar a possibilidade de um máximo em E, este valor de referência é muito útil. A partir do número $n \in E$ já considerado, é interessante considerar ainda mais um número racional positivo r, mas que seja menor do que este valor de referência, isto é,

$$0 < r < \frac{1 - 2n^2}{4n + 2} < 1.$$

Como já se sabe que $n + 1$ não é um número presente em E, a discussão é sobre se $n + r$ também se encontra nessa condição ou se $n + r \in E$. Considerando a desigualdade crucial e multiplicando por $4n + 2$, passa-se a $r(4n + 2) < 1 - 2n^2$. Desta, é permitido escrever $2n^2 + 4rn + 2r < 1$ e, por conseguinte, $n^2 + 2rn + r < 1/2$.

Já que a discussão é a respeito de se ter, ou não, $n + r \in E$, a principal propriedade em estudo é decidir a respeito de $(n + r)^2$ ser menor ou maior do que $1/2$. Mas $(n + r)^2 = n^2 + 2rn + r^2$. Além disso, como o número de referência é menor do que 1, isto faz de r um número menor do que 1, ou seja, $r < 1$. Como, uma vez considerado r, não será alterado, então é permitido multiplicar $r < 1$ por r e obter $r^2 < r$. Como r e n já foram considerados, também o foi $n^2 + 2rn$ através deles. Isto significa que $n^2 + 2rn + r^2 < n^2 + 2rn + r$. Mas $n^2 + 2rn + r^2 = (n + r)^2$. Portanto, a desigualdade se torna $(n + r)^2 < n^2 + 2rn + r$.

Para concluir, como já foi constatado que $n^2 + 2rn + r < 1/2$, o fato de se ter $(n + r)^2 < n^2 + 2rn + r$ permite concluir que $(n + r)^2 < 1/2$. Isto sim é surpreendente, porque não era esperado que a condição imposta sobre r, dependendo claramente de n, pudesse produzir um resultado satisfatório.

Esta conclusão afirma que E é um conjunto sem máximo, porque sempre é possível, a partir de um número presente em E, obter um outro número "ligeiramente" maior do que ele e ainda presente em E.

Voltando a atenção para D, apesar de se ter, para um número racional $z \in D$, o fato de ser $z^2 > 1/2$, não é possível garantir que $z^2 > 1$ sempre. Com efeito, $9/10$ é um bom candidato a objeto de D; como $9^2 = 81$, $10^2 = 100$ e $2 \cdot 50 = 100$, então $1/2 = 50/100$ e $50 < 81$. Assim, $1/2 < 81/100 = (9/10)^2$. Portanto, $9/10 \in D$, e $9/10 < 1$. Isto significa que é necessária uma cautela maior sobre a consideração de um número presente em D.

Apesar disto, como todo número maior do que 1 já faz parte de D, é interessante observar um número $u \in D$ que seja menor do que 1. Como $u < 1$, isto significa que $u - (1/2) < 1 - (1/2) = 1/2$. Com isso, $(u - (1/2))^2 < (1/2)^2 = 1/4 < 1/2$. Sob estas condições, $u - (1/2)$ não está presente em D, sendo, portanto, um limitante inferior para D e, além disso, $u - (1/2) \in E$.

A exemplo da avaliação conduzida para $n + 1 \in D$, o fato de se ter $u - (1/2) \in E$ acarreta $(u - (1/2))^2 < 1/2$, ou seja,

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow u^2 - u + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow 4u^2 - 4u + 1 < 2.$$

Como $u \in D$, então $u^2 > 1/2$. Como a desigualdade principal em estudo traz $4u^2$, é observado que $4u^2 > 2$ e, portanto, $4u^2 - 2 > 0$. Isto significa que, de $4u^2 - 4u + 1 < 2$, é obtida $(4u^2 - 2) - 4u + 1 < 0$, de onde é permitido escrever $4u^2 - 2 < 4u - 1$.

Esta última desigualdade caracteriza $4u - 1 > 0$, pois $4u^2 - 2 > 0$, como já discutido. Mas é interessante, ainda, escrever $4u - 1 < 4u$, o que acarreta $4u^2 - 2 < 4u$ e, enfim, $2u^2 - 1 < 2u$. Isto significa

$$\frac{2u^2 - 1}{2u} < 1.$$

Lembre-se de que a consideração foi feita para avaliar uma situação sobre um número menor do que 1/2 e não apenas menor do que 1. Com efeito, $u - (1/2) < 1/2$. Assim,

$$\frac{2u^2 - 1}{4u} < \frac{1}{2}.$$

Para poder trabalhar a possibilidade de um mínimo em D, este valor de referência é muito útil. A partir do número $u \in D$ já considerado, seja ainda considerado um número racional positivo r menor do que este número de referência, ou seja,

$$0 < r < \frac{2u^2 - 1}{4u} < \frac{1}{2}.$$

Como já se sabe que $u - (1/2)$ não está em D, a avaliação recai sobre se $u - r$ é, ou não, um número racional presente em D. Mas é importante também observar $u - r$ sob a perspectiva em estudo e considerar $(u - r)^2$. Com efeito, $(u - r)^2 = u^2 - 2ru + r^2$.

A partir da desigualdade crucial aí escrita, é permitido escrever $4ru < 2u^2 - 1$. Desta, é permitido escrever $1 < 2u^2 - 4ru$. Dividindo por 2, passa-se a $1/2 < u^2 - 2ru$.

Como $r > 0$, então, com maior razão, $r^2 > 0$, ou melhor, $0 < r^2$. Diante disso, como já foram considerados r e u, o valor $u^2 - 2ru$ não é mais alterado e, portanto, é permitido escrever $u^2 - 2ru < u^2 - 2ru + r^2$. Como $u^2 - 2ru + r^2 = (u - r)^2$, isto significa $u^2 - 2ru < (u - r)^2$.

A partir das conclusões de que $1/2 < u^2 - 2ru$ e $u^2 - 2ru < (u - r)^2$, é permitido escrever $1/2 < (u - r)^2$ e, portanto, $u - r$ se mostra como um número racional presente em D, o que, a exemplo da situação estudada em E, não era esperado. Portanto, D é um conjunto sem mínimo, pois, dado um número racional presente em D, sempre é possível obter um outro número "ligeiramente" menor do que ele ainda presente em D.

Reside ainda uma dificuldade nesta abordagem. Como E não tem máximo, o fato de E admitir limitante superior poderia conduzir à existência de um supremo para E. Porém, sendo s o supremo de E, então s não pode ser um número racional presente em E porque E não tem máximo, e não pode ser um número racional presente em D porque D não tem mínimo.

Do mesmo modo, como D não tem mínimo, o fato de D admitir limitante inferior poderia conduzir à existência de um ínfimo para D. Sendo i o ínfimo de D, então i não pode ser um número racional presente em D porque D não tem mínimo, e não pode ser um número racional presente em E porque E não tem máximo.

O que se pode perceber é que s é tal que $s^2 = 1/2$ por ser maior do que todos os números racionais presentes em E, e i é tal que $i^2 = 1/2$ por ser menor do que todos os números racionais presentes em D. Desta maneira, s e i são o mesmo objeto.

Isto significa que é suficiente decidir se existe algum número racional positivo s tal que $s^2 = 1/2$. O fato é que, sendo s um número racional, ao escrever $s = n/d$ e constatar que n e d não números naturais, então é permitido escrever n e d através de números primos. O problema reside quando são avaliados n^2 e d^2, porque cada número primo usado na escrita de n é duplicado ao avaliar n^2 e o mesmo ocorre em d^2. Logo, não importando quais números primos sejam, sempre existe uma quantidade par de números primos aí.

Ao escrever $n^2/d^2 = 1/2$, é permitido escrever $2n^2 = d^2$, multiplicando a igualdade anterior por $2d^2$. Ora, n^2 dispõe de uma quantidade par de números primos. Logo, se existe algum fator igual a 2 ao escrever n, então n^2 dispõe de, no mínimo, dois fatores iguais a 2.

Assim, $2n^2$ dispõe de uma quantidade ímpar de fatores iguais a 2, sendo, no mínimo, 1. Mas d^2 também dispõe de uma quantidade par de números primos, e, como há ao menos um fator igual a 2 em $2n^2$, é necessário que d também disponha de ao menos um fator igual a 2, o que acarreta uma quantidade par de fatores iguais a 2 em d^2. Desta forma, a igualdade $2n^2 = d^2$ não se sustenta.

Dito isto, para que algum objeto s admita que seja escrito $s^2 = 1/2$, tal objeto não pode ser um número racional, o que faz de E um subconjunto sem supremo e de D um subconjunto sem ínfimo.

A condição estudada mostra subconjuntos de números racionais que admitem limitantes superiores mas não admitem supremo e subconjuntos que admitem limitantes inferiores mas não admitem ínfimo. A constatação se volta à introdução da potenciação em $\mathbb{Q}$, onde seu uso na avaliação de polinômios de grau superior a 1 e em funções de tipo exponencial mostram uma deficiência em $\mathbb{Q}$, que também se torna evidente ao estudar subconjuntos de números racionais relacionados ao uso da potenciação. Estas condições ensejam a necessidade de um novo conjunto numérico que, uma vez obtido, respeite todas as possibilidades de decisão sobre números racionais, mas resolva as condições sobre os subconjuntos mencionados.

Introdução

O estudo de conjuntos numéricos e, em particular o conjunto $\mathbb{Q}$, traz consigo o estudo do comportamento de seus subconjuntos como um recurso para a descrição de propriedades a respeito do conjunto numérico sob análise.

Apesar de ser menos difícil a avaliação de subconjuntos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ constituídos a partir de leis de formação compreendidas como simples, o estudo de subconjuntos em $\mathbb{Q}$ abre possibilidades anteriormente não apresentadas com o uso das mesmas leis.

Estas possibilidades abrem portas para a discussão de importantes propriedades de subconjuntos, que determinam não apenas as necessidades a partir de operações aritméticas, mas determinam a necessidade de um olhar diferenciado para os efeitos provocados por esses subconjuntos enquanto parte de uma estrutura de conjunto.

Diagnóstico inicial

Para o presente estudo, o diagnóstico pode ser realizado através de uma relação de questões a respeito da compreensão sobre operações com e concatenações de desigualdades. Outra maneira é fazer uma breve discussão sobre o tópico.

As operações com desigualdades envolvem a adição de um número racional, a multiplicação por números racionais positivos ou negativos, a adição de desigualdades e a multiplicação de desigualdades. É importante discutir a substituição de valores como uma adição de desigualdades.

A concatenação de desigualdades envolve considerar duas desigualdades que possam compreender uma terceira, pela propriedade transitiva.

Fomentando a discussão

É importante trazer alguns subconjuntos formados através de condições das outras áreas da Matemática. Em virtude de serem mais palpáveis, podem ser trazidas condições da Geometria para serem adaptadas à discussão por trazerem consigo leis de formação mais simples.

A discussão envolve formar subconjuntos de números inteiros e de números racionais a partir de desigualdades e levantar algumas questões sobre eles, por isso a importância de trazer condições palpáveis para formar algumas desigualdades.

Formados subconjuntos para o estudo inicial, é importante provocar uma comparação entre os efeitos das desigualdades sobre os subconjuntos, comparando subconjuntos de números inteiros e subconjuntos de números racionais formados a partir de uma mesma desigualdade.

A comparação tem por finalidade discutir a possibilidade de determinação de números que exerçam uma função de fronteira de um conjunto, como se um conjunto fosse um objeto físico e esses números fizessem a fronteira entre os materiais do objeto físico e o ambiente.

Atividade: determinando um valor mínimo

Para a presente seção, serão consideradas as desigualdades $3z > 5$ e $3z \geqslant 5$ como recurso explicativo. Esta atividade pode ser adaptada para a possibilidade de obtenção de um valor máximo em vez de um valor mínimo.

De posse das desigualdades a serem utilizadas ao longo da discussão, sejam formados os subconjuntos de números inteiros e de números racionais a partir delas, a saber, $\{z \in \mathbb{Z} \ ; \ 3z > 5\}$ e $\{z \in \mathbb{Q} \ ; \ 3z > 5\}$. Em cada subconjunto, a sugestão é a de que a desigualdade seja reescrita de maneira mais evidente, ou seja, $z > 5/3$, e sejam apresentados a partir dela possíveis candidatos a menor número em cada subconjunto.

Neste escopo, os estudantes deverão apresentar diversos candidatos em termos de números racionais, provocando a necessidade de se estudar a possibilidade de ainda haver algum número racional menor e capaz de satisfazer a essa desigualdade. Após algumas tentativas, é interessante compreender que há uma dificuldade em obter um menor número racional.

O mesmo procedimento deve ser repetido ao formar os subconjuntos $\{z \in \mathbb{Z} \ ; \ 3z \geqslant 5\}$ e $\{z \in \mathbb{Q} \ ; \ 3z \geqslant 5\}$. Neste caso, será exibido um menor número racional no próprio tratamento da desigualdade, e este fato deve ser alvo de comparação com o caso anterior, mostrando que a diferença reside em o citado número fazer parte do conjunto.

Atividade: explorando uma projeção de valor mínimo

Ainda de posse do subconjunto $\{z \in \mathbb{Q} \ ; \ 3z > 5\}$ como recurso explicativo, é importante explorar o fato de $5/3$ não fazer parte deste subconjunto como forma de mostrar que este subconjunto não dispõe de um valor mínimo, mas tem $5/3$ como uma projeção. Esta atividade pode ser adaptada para a possibilidade de obtenção de um valor máximo em vez de um valor mínimo.

A situação em estudo conduz à necessidade de mostrar que, não importando o número racional fornecido maior do que $5/3$, sempre será possível mostrar algum número racional menor do que ele e ainda maior do que $5/3$. A média aritmética é uma maneira, mas é possível explorar outras maneiras a partir das desigualdades formadas e é interessante que os estudantes tenham certa liberdade para perceber isso.

Com a abordagem, é importante perceber que $5/3$ exerce, no subconjunto em estudo, uma condição de fronteira, em virtude da percepção de que sempre é possível obter um número racional “ligeiramente” maior do que $5/3$ no subconjunto e do fato de nenhum número racional menor do que $5/3$ fazer parte desse subconjunto. Por tais razões, $5/3$ é um valor importante no estudo desse subconjunto.

Atividade: como propor uma limitação importante

É interessante utilizar um outro subconjunto para discutir este aspecto. Para tanto, é interessante discutir o subconjunto $\{1/z\ ;\ z \in \mathbb{N}\}$. Esta sugestão também terá sua importância em estudos futuros.

A primeira atitude é a de avaliar como as condições determinantes do subconjunto podem se tornar mais visíveis. Para o subconjunto considerado, a primeira observação é que são números positivos, e a observação seguinte é a de que são números cada vez menores considerados números naturais cada vez maiores.

A partir das duas observações, uma sugestão de limitação é usar números negativos e observar que, claramente, todos são menores do que 0. Além disso, como todo número no subconjunto é maior do que 0, estas observações permitem que 0 seja um candidato importante para uma limitação.

Desta forma, o que se pode fazer a respeito de 0 é olhar um número racional positivo. Tal número racional pode ser descrito a partir de dois números naturais como n/d. Se n já for 1, ótimo. Se não, é interessante observar que $n/d > 1/d$ porque $n > 1$. Ora, sendo d um número natural, então $d + 1$ é maior do que d. As observações anteriores permitem concluir que $1/d > 1/(d + 1)$.

Observando o subconjunto considerado e as conclusões tiradas até o momento, decida que relação têm 0, $1/(d + 1)$ e n/d, e, a partir dela, descreva o que 0 pode significar neste contexto para o subconjunto considerado.

A conceituação de ínfimo e supremo

É interessante trazer as atividades desenvolvidas para explicitar os conceitos de mínimo, limitante inferior e ínfimo de um subconjunto. Como condição de analogia, podem ser descritos também os conceitos de máximo, em oposição ao mínimo, limitante superior, em oposição ao limitante inferior, e supremo, em oposição ao ínfimo, de um subconjunto.

É interessante evidenciar quais as consequências imediatas advindas das definições, isto é, o que, por exemplo, uma simples multiplicação por -1 pode provocar enquanto relações entre esses conceitos. A sugestão apresentada no aporte teórico da sequência didática pode ser útil na compreensão destes conceitos.

Explorando efeitos de algumas leis de formação

O que se segue é explicitado em minúcias no aporte teórico da sequência didática. Com a discussão dos conceitos de limitante, ínfimo e supremo, a abordagem deve ser voltada ao estudo de uma espécie particular de entorno do valor $1/2$ (ou do valor 2, caso haja um aporte pronto sobre este à disposição).

O referido entorno de $1/2$ não se refere à consideração de números racionais menores do que $1/2$ ou maiores do que $1/2$, mas de uma condição que envolve potências de números racionais menores do que $1/2$ ou maiores do que $1/2$. A discussão é relevante em virtude dos usos tidos a partir do estudo de polinômios de grau maior do que 1.

A fim de que haja o mínimo de dificuldades possível, é importante restringir as possibilidades ao estudo de números positivos e apenas da potência quadrática, considerando os subconjuntos $E = \{z \in \mathbb{Q} \,;\, z > 0 \text{ e } z^2 < 1/2\}$ e $D = \{z \in \mathbb{Q} \,;\, z > 0 \text{ e } z^2 > 1/2\}$.

De posse desses conjuntos, a primeira medida é constatar que todo número presente em E é um limitante inferior para D e todo número presente em D é um limitante superior para E.

A partir desta constatação, é necessário observar que existem dificuldades de se obter um mínimo em D e um máximo em E. A descrição presente no aporte teórico da sequência didática é útil para mostrar uma maneira de alcançar essa constatação. Isto significa que seria possível obter, portanto, um ínfimo para D e um supremo para E.

A abordagem também deve mostrar que um valor que atue como ínfimo para D necessariamente atua como supremo para E, indagando a viabilidade de um tal valor ser um número racional.

Finalização

A discussão proposta visa conceituar de maneira simples as noções de ínfimo e supremo de subconjuntos e procura trabalhar o uso e a interpretação de desigualdades numéricas para a constatação de um problema de caráter estrutural no conjunto de números racionais.

Avaliação

A avaliação é feita ao longo da realização das atividades em virtude de as mesmas tomarem forma escrita ao longo de sua aplicação, onde o professor pode sugerir que os estudantes troquem escritas entre si para discutirem sobre suas compreensões individuais das atividades.

Além das especifidades das atividades, a avaliação também pode ser conduzida por uma série de questões voltadas a conhecer a compreensão dos estudantes sobre os seguintes tópicos: os conceitos de mínimo, máximo, limitante inferior e limitante superior de um subconjunto; como limitantes inferior e superior de um subconjunto se relacionam com o ínfimo e o supremo de um subconjunto; e a dificuldade com o tratamento de raízes de polinômios enquanto números racionais.

É interessante que o material escrito seja recolhido para uma avaliação mais profunda. A avaliação deve levar em consideração, em primeiro lugar, a coesão e a clareza, devendo seus resultados serem separados. Em segundo lugar, deve ser avaliado o cuidado no uso das propriedades citadas pelos participantes, destacando possíveis equívocos que levem à compreensão expressada por eles ao longo da realização das atividades.

4.2.3 Introdução aos números reais

A presente sequência didática aborda uma forma de transição do conjunto de números racionais para o conjunto de números reais a partir da aplicação do conceito de supremo de um subconjunto. O Quadro 12 traz as informações elementares à sequência.

Quadro 12 – Informações sobre a sequência didática da seção 4.2.3.

Assunto a ser abordado	A existência do conjunto de números reais.
Objetivos da ação	Compreender como o conceito de supremo de um subconjunto é crucial para discutir uma forma de contornar as limitações apreendidas a respeito do conjunto de números racionais. Compreender a formação de subconjuntos como um passo necessário para resolver as limitações verificadas no conjunto de números racionais. Compreender as concepções dos subconjuntos formados a partir dos conhecimentos já existentes sobre números racionais como recurso para a formação de um novo conjunto.
Conhecimentos prévios	Tratamento elementar de conjuntos: pertinência e inclusão. Operações com desigualdades. Operações com números racionais. Mínimo e máximo de um subconjunto. Limitantes, ínfimo e supremo de um subconjunto. Números binomiais.
Conhecimentos desenvolvidos	Introdução à axiomatização do conjunto de números reais. Obtenção de números irracionais.
Competências aprimoradas	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Material necessário	Quadro. Giz. Pincel. Canetas. Papéis.
Duração da atividade	1 hora e 30 minutos.
Referências	Tarski (1994), Ávila (2001), Lima (2017)

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Aporte teórico

Consequências das definições de ínfimo e de supremo de um subconjunto

A abordagem da possibilidade da existência de um supremo para um subconjunto não vazio de números racionais traz dificuldades mesmo em situações constituídas por condições consideradas simples, como o caso da avaliação de $z^2 < 1/2$, por exemplo. Esta dificuldade traz o desafio de propor uma solução para qualquer outro subconjunto de números racionais que recaia na mesma dificuldade.

Diante disto, considere um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{Q}$ que admita um limitante superior. Apesar de a definição de supremo permitir a avaliação de algum limitante superior que possa ser declarado supremo para S, é importante observar que S só vai admitir supremo se tal candidato a supremo for, ainda, um número racional.

Apesar disso, o fato de S admitir um limitante superior permite formar um outro subconjunto $D \subset \mathbb{Q}$ constituído de todos os limitantes superiores de S. Se S admitir supremo, o significado que isto tem é o de existir um número racional s de forma que, dada qualquer redução por um número racional positivo r, é possível obter um número racional $z \in S$ de forma que $s - r < z \leqslant s$.

Observe que, em outras palavras, o supremo de S é, em particular, um limitante superior para S, e isto permite dizer que $s \in D$. Desta maneira, é permitido discutir, também, um ínfimo para D. Se D admite um número racional i como ínfimo, o significado que isto tem é o de, para qualquer acréscimo por um número racional positivo r, ser possível obter um número racional $z \in D$ de forma que $i \leqslant z < i + r$.

Então, é possível discutir que rumo têm s e i. Se $s > i$, então $i - s$ é positivo e, com isso, a condição sobre i permite obter um número racional $z \in D$ de forma que $i \leqslant z < i + (s - i)$, isto é, $i \leqslant z < s$, o que contraria a admissão feita. Portanto, é $i \leqslant s$.

Por outro lado, se fosse $i < s$, então $s - i$ é positivo e, pela condição sobre s, seria possível obter um número racional $x \in S$ de forma que $s - (s - i) < x \leqslant s$, isto é, $i < x \leqslant s$; com isso, o número racional $(i + x)/2$ seria um limitante inferior para D, tirando de i a condição de ínfimo de D, já que $(i + x)/2 > i$.

Estas considerações mostram que $\sup S = \inf D$, e provocam a existência de um objeto que traz o significado de um *valor de transição* de S para D. Como nem sempre é possível que um número racional assuma esta condição, a condição parece se mostrar um bom ponto de partida para propor um novo conjunto capaz de resolver esta dificuldade.

Condições a serem satisfeitas pelo novo conjunto

O novo conjunto formado deve permitir a existência de um supremo para todo subconjunto não vazio S que admita algum limitante superior. Neste sentido, o novo conjunto contém todos os valores de transição de subconjuntos de números racionais que admitam limitante superior. Neste ínterim, o novo conjunto deverá conter o conjunto de números racionais.

Mas isto não é suficiente. O novo conjunto deve respeitar todas as condições já conhecidas para números racionais. Isto significa que, nele, deverão ser possíveis as operações de adição e de multiplicação à maneira feita para números racionais e, além disso, seja possível dizer, dados dois objetos no novo conjunto, qual deles é maior, como uma premissa para caracterizar objetos positivos e objetos negativos.

Sob este panorama, o novo conjunto, portanto, dispõe de uma relação de ordem, de uma adição que tenha elemento neutro, seja associativa, seja comutativa e admita a existência de oposto, de uma multiplicação que tenha elemento neutro, seja associativa, seja comutativa e admita a existência de inverso multiplicativo salvo para o elemento neutro da adição, e seja válida, entre as operações de adição e de multiplicação, a propriedade distributiva da adição relativa à multiplicação.

A definição do conjunto de números reais

Diante destas observações, é *estabelecido* o *conjunto de números reais*, a ser representado por $\mathbb{R}$. É possível promover uma construção para este conjunto, mas a mesma não é abordada no presente texto.

Ao estabelecer o conjunto de números reais, são definidas nele as operações de adição e de multiplicação, a relação de ordem, e a correspondência dos símbolos 0 e 1 de $\mathbb{R}$ aos números racionais conhecidos como 0 e 1, fazendo deles diferentes entre si.

Desta maneira, são válidas em $\mathbb{R}$ as seguintes propriedades de constituição e da relação de ordem, dados números reais n, u e p que atendam às condições em cada propriedade:

- Se $n \neq u$, então ou se tem $n < u$ ou se tem $u < n$.
- Se $n < u$, então não se tem $u < n$.
- Se $n < u$ e $u < p$, então $n < p$.
- Seja $S \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio que admita limitante superior. Então existe um valor de transição de S para o subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ de seus limitantes superiores.

Em outras palavras, S admite supremo em $\mathbb{R}$.

Definida a operação de adição em $\mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades, dados números reais n, u, p e b que atendam às condições em cada propriedade:

- Considerados n e p, sempre existe $u \in \mathbb{R}$ de forma que $n + p = u$.
- Considerados n e b, sempre existe $u \in \mathbb{R}$ de forma que $n = b + u$.
- Uma vez avaliado $n + u$, sempre se tem $n + u = u + n$.
- Uma vez avaliado $(n + u) + p$, sempre se tem $(n + u) + p = n + (u + p)$.
- Constatado que $n < u$, então a condição permanece ao adicionar p, isto é, $p + n < p + u$.
- Sempre se tem $n + 0 = n$.

Definida a operação de multiplicação em $\mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades, dados números reais n, u, p e b que atendam às condições em cada propriedade:

- Considerados n e p, sempre existe $u \in \mathbb{R}$ de forma que $n \cdot p = u$.
- Considerados n e b, com $b \neq 0$, sempre existe $u \in \mathbb{R}$ de forma que $n = b \cdot u$.
- Uma vez avaliado $n \cdot u$, sempre se tem $n \cdot u = u \cdot n$.
- Uma vez avaliado $(n \cdot u) \cdot p$, sempre se tem $(n \cdot u) \cdot p = n \cdot (u \cdot p)$.
- Se $0 < p$ e é constatado que $n < u$, então a condição permanece ao multiplicar por p, isto é, $p \cdot n < p \cdot u$.
- Sempre se tem $n \cdot 1 = n$.
- Uma vez avaliado $n \cdot (u + p)$, sempre se tem $n \cdot (u + p) = (n \cdot u) + (n \cdot p)$.

A admissão de supremo e os números irracionais

Uma das razões pelas quais o conjunto de números reais é necessário, como dito, é o fato de nem todo subconjunto de números racionais admitir como supremo um número racional. Um caso é a avaliação de potências quadráticas de números racionais positivos menores do que $1/2$, isto é, os considerados no conjunto $X = \{z \in \mathbb{Q} \; ; \; z > 0 \text{ e } z^2 < 1/2\}$.

Observe que a definição da operação de multiplicação traz consigo o agravante da definição da operação de *potenciação*. Num primeiro momento, considerados $z \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida a *potência* z^n como a multiplicação de n fatores iguais a z, ou o próprio z, se $n = 1$.

A questão intimamente relacionada entre as potências e os supremos de subconjuntos de números racionais é a impossibilidade de sempre obter um número racional w e um número natural n para os quais seja possível escrever o número racional z como w^n. Como dito, um caso é não existir w racional para o qual $w^2 = 1/2$.

Diante disto, é importante verificar se este efeito persiste em $\mathbb{R}$. Se persistir, então $\mathbb{R}$ não será suficiente para resolver esta dificuldade, em particular, dentre outras. Então, sejam considerados um número racional positivo a e um número natural k. A partir daí, considere os conjuntos $E = \{z \in \mathbb{Q}\ ;\ z > 0 \text{ e } z^k < a\}$ e $D = \{z \in \mathbb{Q}\ ;\ z > 0 \text{ e } z^k > a\}$.

Para começar a discussão, é importante avaliar se E e D correm o risco de ser vazios. Se $a < 1$, então $a^k < a$, mostrando que $a^k \in E$ e $1 \in D$. Neste caso, E e D não são vazios. Se $a > 1$, então $a^k > a$, mostrando que $1 \in E$ e $a^k \in D$. Se $a = 1$, então $E = \{z \in \mathbb{Q}\ ;\ 0 < z < 1\}$ e $D = \{z \in \mathbb{Q}\ ;\ z > 1\}$. Portanto, em qualquer caso, nem E nem D são vazios.

Além disso, observe o seguinte fato. Dados $n \in E$ e $u \in D$, isto significa que $n^k < a$ e que $u^k > a$, ou seja, $n^k < a < u^k$. Nestas condições, como n e u são, ambos, positivos, considerar $n > u$ acarreta $n^k > u^k$ por multiplicações sucessivas. Portanto, como $n^k < u^k$, isto significa que $n < u$. Em outras palavras, todo número racional em D é um limitante superior para E.

Desta maneira, é importante decidir se E é um conjunto que admite máximo e se D é um conjunto que admite mínimo. Estas informações são necessárias para discutir se E admite supremo e se D admite ínfimo. No caso particular de se ter $a = 1$, então 1 é supremo de E e ínfimo de D.

A avaliação deve ser dividida em duas etapas. A primeira leva em consideração os números racionais positivos a menores do que 1. A segunda, os números racionais a maiores do que 1. Isto é necessário em virtude das consequências admitidas pelas desigualdades $a < 1$ e $a > 1$.

Primeiramente, seja a um número racional positivo menor do que 1. Isto significa que, dado um número racional $n \in E$, então $n + 1 > 1$ e, portanto, $n + 1 \in D$. Por outro lado, a avaliação é sobre se é possível, ou não, obter um número racional positivo r de forma que $n + r \in E$. Para tanto, é importante avaliar como $n + r$ se comporta.

Ora, é possível escrever, com o auxílio de algumas informações sobre Análise Combinatória, a seguinte expressão:

$$(n+r)^k = \binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}rn^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k-1}r^{n-1}k + \binom{k}{k}r^n,$$

ou, o que é mais simples para trabalhar,

$$(n+r)^k = n^k + \sum_{x=1}^{k}\binom{k}{x}r^x n^{k-x}.$$

Em termos dos números binomiais, um fato importante a ser levado em consideração é o de que sempre se tem

$$\binom{k}{x} < 2^k.$$

Esta condição permite obter um parâmetro ainda melhor para continuar a discussão. Ao provocar as mudanças sobre todo número binomial, a expressão dada para $(n+r)^k$ admite comparação direta com uma expressão mais simples de avaliar numericamente:

$$(n+r)^k < n^k + \sum_{x=1}^{k} 2^k r^x n^{k-x}.$$

Ora, é possível melhorar isto ainda mais. Como $n \in E$ e $a < 1$, isto significa que é possível escrever $n^{k-x} < 1$ e, portanto, provocar uma simplificação razoável:

$$(n+r)^k < n^k + 2^k \sum_{x=1}^{k} r^x.$$

Avaliando o símbolo de soma em comparação com a expansão direta, é possível perceber que todas as parcelas do somatório têm r por fator comum. Assim, é permitido escrever

$$(n+r)^k < n^k + 2^k r \sum_{x=1}^{k} r^{x-1}.$$

Lembre-se de que r também é positivo, o que permite escrever $1 = r^0$. Neste momento, observando a situação em estudo, não faz sentido considerar que $r > 1$. Com efeito, $n+1 \in D$. Assim, para $r < 1$, é ainda permitido escrever

$$(n+r)^k < n^k + 2^k r \sum_{x=1}^{k} 1.$$

Enfim, é alcançada a condição que permite melhorar a discussão,

$$(n+r)^k < n^k + 2^k kr.$$

Logo, para $r < 1$, é possível fazer uma comparação direta para acréscimos diferentes $r < s$. Com efeito, a discussão é sobre se há um acréscimo r menor do que 1 para o qual $n + r$ esteja ainda presente em E.

Com a condição definida, considere $n \in E$ de forma que $n + (1/2) \in D$. Desta maneira, a condição determinada há pouco permite escrever

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^k < n^k + 2^k k \left(\frac{1}{2}\right).$$

Ora, como $n + (1/2) \in D$, isto significa que, na verdade, a condição é que

$$a < n^k + 2^{k-1}k.$$

Como $n^k < a$, isto significa que $a - n^k$ é positivo. Então, é permitido escrever, envolvendo a divisão por $2^{k-1}k$,

$$\frac{a - n^k}{2^{k-1}k} < 1.$$

Não se esqueça de que esta condição diz respeito a $2^{k-1}k$ e não a $2^k k$, como na condição original. Por esta razão, será considerado um número racional positivo r de forma que $2r$ seja menor do que esta fração, ou seja,

$$0 < 2r < \frac{a - n^k}{2^{k-1}k} < 1.$$

Desta condição, é permitido escrever

$$2^k kr < a - n^k \Rightarrow n^k + 2^k kr < a.$$

É, portanto, possível recorrer à condição original já determinada. Com efeito, já foi discutido que

$$(n+r)^k < n^k + 2^k kr.$$

E isto significa, finalmente, que

$$(n+r)^k < a.$$

Esta condição, em particular, é forte e bastante significativa. Ela mostra que é possível determinar acréscimos a n de maneira que $n + r$ ainda esteja presente em E. Isto significa que E nunca dispõe de máximo, seja qual for o número racional positivo $a < 1$ considerado.

Para avaliar se D admite mínimo, será discutida uma condição diferente. O interesse, neste momento, é avaliar uma condição sobre $u - r$ que permita ser trabalhada sobre duas reduções provocadas por números racionais positivos, um sendo r e outro sendo $s < r$. Como há valores em D que são menores do que 1, a avaliação considerará $r < 1$ para que $u - r$ possa ser um número racional presente em E.

Como se trata de uma redução, as potências de $u - r$ se comportam de duas maneiras diferentes, uma para números naturais pares e outra para números naturais ímpares enquanto expoentes. Por esta razão, como o sinal do último termo depende de qual número natural é adotado, será escrito

$$(u - r)^k = u^k + \sum_{x=1}^{k} (-1)^x \binom{k}{x} r^x u^{k-x}.$$

Como n, r e k são positivos, então é permitido diminuir este valor trocando todas as potências positivas de -1 por potências negativas. Isto significa que

$$(u - r)^k > u^k - \sum_{x=1}^{k} \binom{k}{x} r^x u^{k-x}.$$

Há duas situações a serem analisadas em relação às potências u^{k-x}. Se $u < 1$, então sempre se tem $u^{k-x} < 1$ e, por consequência, $-1 < -u^{k-x}$. Aliado ao fato de se ter $r < 1$, o que acarreta a todas as potências de r que $r^x < r$, e ao fato de se saber que todo número binomial descrito no somatório é menor do que 2^k, então é permitido escrever

$$-\binom{k}{x} r^x u^{k-x} > -2^k r.$$

Desta maneira, é possível avaliar $u - r$ observando que

$$(u - r)^k > u^k - \sum_{x=1}^{k} 2^k r.$$

E, portanto, para $u < 1$, é permitido considerar que

$$(u - r)^k > u^k - 2^k k r.$$

Resta a avaliação do caso em que $u \geqslant 1$. Isto é necessário porque, mesmo com $a < 1$, pode ser possível obter um acréscimo a a de forma que 1 passe a ser um número racional relevante na análise. Observe que, nesta condição, isto acarreta $u^{k-x} \geqslant 1$, mas, ao mesmo tempo, $u^{k-x} \leqslant u^k$, de onde é permitido escrever $-u^k \leqslant -u^{k-x}$.

Com esta constatação, é possível recorrer às conclusões anteriores para escrever

$$-\binom{k}{x} r^x u^{k-x} > -2^k u^k r.$$

Isto significa que, para $u \geqslant 1$, é possível considerar que

$$(u-r)^k > u^k - (2u)^k kr.$$

Diante disto, sejam considerados $u \in D$ e um número racional positivo s de tal maneira que seja possível ter $u-s \in E$. Isto significa que $(u-s)^k < a$. Desta maneira, uma das seguintes possibilidades é atingida:

$$u^k - 2^k ks < a \qquad \text{ou} \qquad u^k - (2u)^k ks < a.$$

Como $u^k > a$, então $u^k - a$ é positivo. Desta forma, as condições anteriores conduzem, envolvendo também processos de divisão, a

$$\frac{u^k - a}{2^k k} < s \qquad \text{ou} \qquad \frac{u^k - a}{(2u)^k k} < s.$$

De acordo com a condição de u, considere um número racional positivo r menor do que uma dessas frações, isto é, se $u < 1$, que r seja menor do que a primeira, e, caso contrário, que seja menor do que a segunda. Daí, virão

$$0 < r < \frac{u^k - a}{2^k k} < s \qquad \text{ou} \qquad 0 < r < \frac{u^k - a}{(2u)^k k} < s.$$

Ora, a primeira condição, se atingida, acarreta

$$(2u)^k kr < u^k - a \Rightarrow -u^k + (2u)^k kr < -a \Rightarrow a < u^k - (2u)^k kr.$$

Em qualquer caso, portanto, é caracterizado que

$$(u - r)^k > a.$$

Esta constatação mostra que D não tem mínimo. Como já se sabe que E não tem máximo, isto significa que a existência de um supremo para E necessariamente acarreta a existência de um ínfimo para D.

Apesar de nem sempre isto ser possível para números racionais, o fato de todo subconjunto de números reais que admita limitante superior admitir supremo força a E a existência de um supremo em $\mathbb{R}$ que atua como ínfimo de D. Em outras palavras, é constatado que existe um número real b para o qual $b^k = a$.

Dispondo do desenvolvimento do caso $a < 1$, é possível considerar que o caso $a > 1$ pode ser resolvido de maneira semelhante a ser deixado como um exercício e não é desenvolvido aqui.

Introdução

O estudo de subconjuntos em $\mathbb{Q}$ traz uma consequência decorrente do estudo de raízes de polinômios e, por consequência, da possibilidade de obter raízes n-ésimas de números racionais positivos. O fato é que nem sempre este processo conduz a um número racional.

Uma maneira para sanar esta dificuldade, em particular, percorre uma maneira de solucionar a dificuldade em obter supremos ou ínfimos em subconjuntos não vazios de números racionais. Nesta esteira é que se torna necessário propor um conjunto que, contemplando os números racionais, seja capaz de suprir a necessidade apontada.

Diagnóstico inicial

O presente estudo é continuação do assunto desenvolvido na sequência didática descrita na seção 4.2.2, razão pela qual não é previsto um diagnóstico inicial para a matéria.

Fomentando a discussão

A discussão envolve a abordagem de propriedades referentes à obtenção de supremos e ínfimos em subconjuntos particulares de números racionais. Todavia, a discussão deve ser levada ao estudo de propriedades em um caráter amplo, podendo se valer de subconjuntos concretos como maneira inicial para perceber as propriedades.

De posse das propriedades, a questão é levá-las a algum confronto possível de maneira a ser concluída uma direção para propor um novo conjunto contemplando os números racionais.

Atividade: constatando um valor de transição

Antes de considerar uma abordagem mais abrangente, é interessante apresentar um exemplo que já deva ter sido discutido. Como sugestão e, levando em consideração que esta sequência descreve uma continuação de um assunto anterior, podem ser discutidos os subconjuntos $E = \{z \in \mathbb{Q}\ ;\ z > 0 \text{ e } z^2 < 1/2\}$ e $D = \{z \in \mathbb{Q}\ ;\ z > 0 \text{ e } z^2 > 1/2\}$.

O fato de já se saber que E não tem máximo, D não tem mínimo, e já ser constatado que a existência de um supremo para E o caracteriza como ínfimo para D deve ser explorado antes de serem propostos subconjuntos mais amplos, até mesmo como uma diretriz para a abordagem das propriedades de supremo e ínfimo.

Constatando a necessidade de um novo conjunto

Partindo de um subconjunto genérico e não vazio de números racionais, a condição de admissão de um limitante superior deve determinar a abordagem literal das propriedades de supremo e de ínfimo, conforme exposto no aporte teórico da sequência didática.

A abordagem das propriedades de supremo e ínfimo, por meio de um confronto sobre as possibilidades travadas na discussão, permite alcançar uma condição fundamental para a solução do problema constatado em $\mathbb{Q}$: a necessidade de que todo subconjunto não vazio de números racionais que admita limitante superior admitir supremo.

É importante ressaltar, na abordagem, o uso constante das desigualdades que definem o supremo e o ínfimo de subconjuntos não vazios, aliadas às condições estabelecidas sobre os conjuntos em estudo.

Por outro lado, não se limitando a isto, é importante enumerar todas as propriedades vigentes para $\mathbb{Q}$ que devem ser mantidas e respeitadas pelo novo conjunto além da condição fundamental já declarada. Isto inclui propriedades operatórias e a questão da relação de ordem.

Constatando que o novo conjunto é útil

Ao admitir o conjunto de números reais conforme exposto no aporte teórico da sequência didática, é importante tornar claro que a construção deste conjunto é possível e poderá ser explorada em momento oportuno, mas que o interesse maior é a discussão sobre se este conjunto é realmente satisfatório.

Como a motivação para a existência de $\mathbb{R}$ foi a necessidade de todo subconjunto não vazio de números racionais que admita limitante superior admitir supremo, então devem ser novamente considerados subconjuntos que descrevam raízes n-ésimas de números racionais positivos.

A discussão presente no aporte teórico da sequência didática providencia um ponto de partida para uma abordagem concreta, isto é, através de números racionais dados, como recurso para a discussão mais ampla sobre os demais números racionais positivos. É interessante discutir um caso diferente de $\sqrt{1/2}$. Por exemplo, com o disposto no aporte teórico da sequência didática, é possível traçar medidas para discutir $\sqrt[5]{1/7}$.

A abordagem deve ser norteada pela exploração das propriedades operatórias vigentes para $\mathbb{R}$, ciente de que já eram válidas em $\mathbb{Q}$, como a expansão binomial, a comparação de valores como recurso para obter valores de referência, e o consequente estudo do comportamento dos subconjuntos formados com valores positivos menores do que $\sqrt[5]{1/7}$ e com valores maiores do que $\sqrt[5]{1/7}$.

É possível, a partir da descrição presente no aporte teórico da sequência didática, discutir, em vez de um número racional menor do que 1, um número racional maior do que 1, como, por exemplo, 3/2, ou mesmo números naturais, como 5. Por outro lado, é necessária uma adaptação das condições lá presentes para refletir a abordagem.

Finalização

A discussão proposta visa trazer elementos que permitam compreender a necessidade do conjunto de números reais e avaliar se uma definição do conjunto de números reais é suficiente para, em um primeiro momento, compreender a utilidade do novo conjunto na solução dos problemas enfrentados em números racionais.

Avaliação

A avaliação é feita ao longo da realização das atividades em virtude de as mesmas tomarem forma escrita ao longo de sua aplicação, onde o professor pode sugerir que os estudantes troquem escritas entre si para discutirem sobre suas compreensões individuais das atividades.

Além das especifidades das atividades, a avaliação também pode ser conduzida por uma série de questões voltadas a conhecer a compreensão dos estudantes sobre os seguintes tópicos: o papel do ínfimo e do supremo de um subconjunto na constatação de uma dificuldade com números racionais; a intenção de superar a dificuldade constatada com a proposição de um novo conjunto numérico; os critérios de compatibilidade com todas as operações anteriores no conjunto de números racionais; e a utilidade e o comportamento do novo conjunto numérico com respeito à dificuldade constatada no conjunto de números racionais.

É interessante que o material escrito seja recolhido para uma avaliação mais profunda. A avaliação deve levar em consideração, em primeiro lugar, a coesão e a clareza, devendo seus resultados serem separados. Em segundo lugar, deve ser avaliado o cuidado no uso das propriedades citadas pelos participantes, destacando possíveis equívocos que levem à compreensão expressada por eles ao longo da realização das atividades.

4.2.4 Um conjunto numérico não enumerável

A presente sequência didática aborda a não enumerabilidade do conjunto de números reais a partir da aplicação dos conceitos de ínfimo e de supremo de um subconjunto. O Quadro 13 traz as informações elementares à sequência.

Aporte teórico

Uma exploração em subconjuntos de números reais

Explorados efeitos causados por subconjuntos de números racionais em $\mathbb{R}$, convém uma abordagem sobre os subconjuntos de $\mathbb{R}$. Evidentemente, não serão abordadas novamente situações sobre subconjuntos de $\mathbb{Q}$ contidos em subconjuntos de $\mathbb{R}$ que pareçam

Quadro 13 – Informações sobre a sequência didática da seção 4.2.4.

Assunto a ser abordado	A não enumerabilidade do conjunto de números reais.
Objetivos da ação	Compreender como o conceito de supremo de um subconjunto é crucial para discutir uma forma de contornar as limitações apreendidas a respeito do conjunto de números racionais. Compreender a formação de subconjuntos como um passo necessário para resolver as limitações verificadas no conjunto de números racionais.
Conhecimentos prévios	Tratamento elementar de conjuntos: pertinência, inclusão, intersecção, reunião e diferença. Operações com desigualdades. Limitantes, ínfimo e supremo de um subconjunto. Operações com números reais.
Conhecimentos desenvolvidos	Não enumerabilidade do conjunto de números reais.
Competências aprimoradas	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Material necessário	Quadro. Giz. Pincel. Canetas. Papéis.
Duração da atividade	1 hora e 30 minutos.
Referências	Ávila (2001), Lima (2017)

Fonte: elaboração do autor, 2020.

equivalentes.

Dados dois números reais $p < q$, é permitido formar um subconjunto dispondo de todos os números reais maiores do que p e menores do que q. Além disso, é possível incluir p e q neste subconjunto. Assim, seja $S = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$ tal subconjunto.

A partir de p e q, pode ser considerado, por exemplo, o número real $(p + q)/2$. Observe que $p = (2/2)p$ e, então, $p = 2(p/2)$. Ora, como $p < q$, isto significa $p/2 < q/2$, ou seja, $(p/2) + (p/2) < (p/2) + (q/2)$. Além disso, $(p/2) + (q/2) < (q/2) + (q/2)$. Desta maneira, é possível concluir que $p < (p + q)/2 < q$, ou seja, $(p + q)/2 \in S$. De p, q e $(p + q)/2$, é possível se valer do mesmo método para obter $(3p + q)/4$ e $(p + 3q)/4$ e observar que $p < (3p + q)/4 < (p + q)/2 < (p + 3q)/4 < q$.

Esta construção significa que, a partir de S, é possível formar um subconjunto $T \subset S$

considerando dois números reais presentes em S, com pelo menos um deles diferente ou de p ou de q. Sendo b e d tais números de forma que $b < d$, então também é um subconjunto de S o subconjunto $T = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; b \leqslant z \leqslant d\}$.

A presente constatação motiva uma abordagem paralela. Ao considerar os números reais p e q e formar o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; p \leqslant z \leqslant q\}$, considere um outro número real qualquer x. Como visto, é possível formar um subconjunto de S através de números reais b e d presentes em S. Mas, com respeito a x, a questão muda ligeiramente de foco.

É interessante provocar uma relação entre o subconjunto formado através de S e o número real x considerado. Discutir se x pode fazer parte deste subconjunto é viável se $x \in S$. Desta maneira, o interessante é discutir se é possível formar um subconjunto $T \subset S$ sem que x faça parte de T.

Se $x \notin S$, o subconjunto T pode ser, inclusive, o próprio S, o que torna a cena aparentemente sem relevância. Mas se $x \in S$, isto significa que se pode ter $x < q$ ou $x = q$. Ora, se $x = q$, então já se sabe que é possível obter um número real d menor do que x e, com isso, formar o subconjunto $T = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; p \leqslant z \leqslant d\}$.

Se $x < q$, então há duas possibilidades para obter um número real d: ou $p < d < x$ ou $x < d < q$, seguindo a maneira já abordada ao início da discussão. Com isso, no primeiro caso é possível formar $T = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; p \leqslant z \leqslant d\}$, e, no segundo caso, $T = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; d \leqslant z \leqslant q\}$.

De toda maneira, é possível obter um subconjunto $T \subset S$ de maneira que $x \notin T$. Esta condição é importante e dá margem à avaliação com mais de um número real x qualquer.

Ampliando a discussão para mais de um número real, sejam x_1 e x_2 números reais presentes no subconjunto S em estudo. Logo, com respeito a x_1, é possível obter dois números reais a_1 e b_1 em S, de maneira que $p \leqslant a_1$, $a_1 < b_1$, $b_1 \leqslant q$ e, além disso, ou $x_1 < a_1$ ou $b_1 < x_1$. Desta maneira, é possível formar o subconjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_1 \leqslant z \leqslant b_1\}$ sem que x_1 esteja em S_1.

Com respeito a x_2, a abordagem pode ser repetida a partir de S_1 em vez de S, o que torna a avaliação mais interessante e com maior potencial. Desta forma, existem a_2 e b_2 em S_1 de maneira que $a_1 \leqslant a_2$, $a_2 < b_2$, $b_2 \leqslant b_1$ e, além disso, ou $x_2 < a_2$ ou $b_2 < x_2$. Assim, é formado o subconjunto $S_2 = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_2 \leqslant z \leqslant b_2\}$ sem que x_2 esteja em S_2.

Como até então foram discutidos conjuntos cuja quantidade de objetos é enumerável, é interessante considerar exatamente uma quantidade dessa de números reais. Isto é possível quando é formada uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Com tal possibilidade, seja $E \subset \mathbb{R}$ o conjunto imagem de f. Claramente, E é enumerável em virtude de f ser injetiva.

Então, escrevendo $E = \{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ como alternativa a $E = \{f(n) \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$, é possível considerar dois números reais p e q distintos de forma que $p < q$, formar o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; p \leqslant z \leqslant q\}$ e avaliar cada número presente em E.

Para x_1 e S, a discussão em curso permite concluir que existem a_1 e b_1 em S, onde $p \leqslant a_1 < b_1 \leqslant q$, onde ou se tem $x_1 < a_1$ ou se tem $b_1 < x_1$. Nestas condições, é formado $S_1 = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_1 \leqslant z \leqslant b_1\}$ sem que x_1 esteja em S_1.

A partir de S_1, existem a_2 e b_2 em S_1, onde $a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1$, onde ou se tem $x_2 < a_2$ ou se tem $b_2 < x_2$. Nestas condições, é formado $S_2 = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_2 \leqslant z \leqslant b_2\}$ sem que x_2 esteja em S_2.

Como este procedimento pode ser repetido para cada número presente em E, é possível o uso do Princípio de Indução de maneira a determinar como este procedimento é continuado ao longo de E. Dado um número natural n e formado o subconjunto $S_n = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_n \leqslant z \leqslant b_n\}$ sem que x_n esteja em S_n, é possível obter a_{n+1} e b_{n+1} em S_n de maneira que $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ e, além disso, ou se tenha $x_{n+1} < a_{n+1}$ ou se tenha $b_{n+1} < x_{n+1}$, formando $S_{n+1} = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_{n+1} \leqslant z \leqslant b_{n+1}\}$ sem que x_{n+1} esteja em S_{n+1}.

Como consequência desta formulação, observe que sempre se tem $a_n \leqslant a_{n+1}$ e $b_{n+1} \leqslant b_n$. Isto significa que, considerando todos esses números reais, ocorrem

$$\begin{gathered} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \\ \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_4 \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \end{gathered}$$

Além disso, $S_{n+1} \subset S_n$, pois a_{n+1} e b_{n+1} estão presentes em S_n, assim como todos os números reais de S_{n+1}. Mas o fato de se ter $a_n < b_n$, nesta condição, provoca a indagação sobre se os números reais a_n são menores do que todos os números reais b_n.

Para tanto, é necessário recorrer ao Princípio de Indução. Considere um número natural fixado u. Pela constatação anterior, é sabido que $b_u \leqslant b_1$, de onde se conclui que $a_u < b_1$. Forme o subconjunto $Q \subset \mathbb{N}$ com os números naturais n para os quais $a_u < b_n$. Desta forma, foi constatado que $1 \in Q$, donde Q não é vazio.

Dado um número natural n de maneira que $n \in Q$, então o fato é que $a_u < b_n$. Se $u > n$, então também é fato que $a_u < b_{n+1}$, pois $a_u < b_u \leqslant b_{n+1}$. Agora, se $u < n$, é necessário observar que $a_u \leqslant a_n$ e $a_n \leqslant a_{n+1}$. Como $a_{n+1} < b_{n+1}$, vem, como consequência, que $a_u < b_{n+1}$. Desta forma, foi constatado que, se $n \in Q$, então $n + 1 \in Q$. Portanto, Q contém todos os números naturais e pode ser identificado com $\mathbb{N}$.

A estratégia é semelhante para verificar, fixado u natural, que sempre se tem $a_n < b_u$, confirmando uma resposta positiva à indagação de se todos os números reais a_n são menores do que todos os números reais b_n. Esta condição permite observar os subconjuntos $A = \{a_n\ ; n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n\ ; n \in \mathbb{N}\}$ e perceber que todo número em B é um limitante superior para A e todo número em A é um limitante inferior para B. Logo, existem $a = \sup A$ e $b = \inf B$.

Resta discutir como tais números reais se comportam, isto é, se $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. Dadas as condições já determinadas sobre A e B, é razoável acreditar que as duas primeiras possibilidades são reais, e impor dúvidas quanto à possibilidade de ser $a > b$.

Nesta esteira, o número real $a - b$ será positivo. Como a é supremo de A, então, para todo número real positivo r, é possível obter um número $a_n \in A$ de forma que $a - r < a_n \leqslant a$. Já que $a - b$ é positivo, então também existirá $a_u \in A$ de maneira que $a - (a - b) < a_u \leqslant a$, ou seja, $b < a_u \leqslant a$.

Com isso, $a_u - b$ será positivo também, e, como b é ínfimo de B, existirá um número $b_x \in B$ para o qual $b \leqslant b_x < b + (a_u - b)$, isto é, $b \leqslant b_x < a_u$. Mas já foi constatado que $b_x < a_u$ é impossível, e isto invalida a possibilidade de se ter $a > b$. Portanto, $a \leqslant b$.

Ora, é possível formar um subconjunto $F = \{z \in \mathbb{R}\ ;\ a \leqslant z \leqslant b\}$. Como a é supremo de A e b é ínfimo de B, então $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$ para todo número natural n. Isto faz de F um subconjunto de *todos* os subconjuntos S_n formados. Além disso, F não contém nenhum número real de E.

Um conjunto numérico não enumerável

A constatação alcançada na discussão em curso é a de que, formado qualquer subconjunto enumerável de números reais, é possível formar um subconjunto que não contenha nenhum deles. Então, a questão a ser levantada é como isto afeta $\mathbb{R}$ de maneira imediata.

Então, ao admitir que $\mathbb{R}$ possa ser enumerável, será possível formular uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de maneira que possa ser adotada, para $\mathbb{R}$, a escrita alternativa $\mathbb{R} = \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Ora, considerando o próprio $\mathbb{R}$ como subconjunto inicial, é possível considerar os números reais x_1 e x_2 para a formação de um subconjunto para a discussão, a saber, $S = \{z \in \mathbb{R} \ ; \ x_1 \leqslant z \leqslant x_2\}$.

Observados a forma enumerável de $\mathbb{R}$ e o subconjunto $S \subset \mathbb{R}$, então a discussão levada a cabo até então permite formar um subconjunto $F \subset S$ de forma que todos os números reais enumerados (x_1, x_2, e assim por diante) são descartados na formação de F.

Um momento! Como $F \subset S$ e $S \subset \mathbb{R}$, então $F \subset \mathbb{R}$. Como a enumeração de $\mathbb{R}$ foi descartada no processo, isto significa que F contém números reais não alcançados pela função f, mostrando que a função f formulada não pode ser sobrejetiva e, portanto, não pode ser bijetiva. Desta maneira, $\mathbb{R}$ não pode ser um conjunto enumerável.

A consequência deste fato é que existem muito mais números irracionais do que números racionais. Em particular, há alguns números irracionais que não são obtidos como uma forma inversa da potenciação, como π e e, o que evidencia ainda mais a realidade desta discrepância.

Além disso, não há apenas uma maneira para definir subconjuntos de números racionais, determinada por uma desigualdade, mas há outras determinadas por leis de formação ou combinações de toda sorte que não são alcançadas apenas pela necessidade de obter uma operação inversa à potenciação. O caso referente a e é um desses.

Uma grave limitação no conjunto de números racionais

É possível perceber que o processo pode ser repetido para um subconjunto de números racionais, isto é, considerar um subconjunto enumerável de números racionais E que admita limitantes inferior e superior, formar com estes um subconjunto S de números racionais e, com isso, formar uma cadeia de subconjuntos S_n tais que excluem, um a um, cada número racional em E.

A questão que se impõe é sobre se a cadeia de subconjuntos sempre vai alcançar algum número racional, e, todavia, nem sempre irá alcançar, devido à necessidade de serem obtidos o supremo do subconjunto formado com os ínfimos de S_n e o ínfimo do subconjunto formado com os supremos de S_n, que nem sempre existirão em $\mathbb{Q}$. Este fato evidencia a principal limitação de $\mathbb{Q}$, que pode ser descrita como a ausência de diversos números importantes entre dois números racionais.

Introdução

A abordagem de subconjuntos de $\mathbb{R}$ admite uma avaliação mais ampla sobre as possibilidades de formação de subconjuntos e evidencia certo contraste com o processo desenvolvido a partir de $\mathbb{Q}$ para mostrar a necessidade de formar $\mathbb{R}$.

O fato de subconjuntos de números reais que admitam algum limitante poderem admitir ou ínfimo ou supremo, de acordo com a condição do limitante, traz uma característica cara a $\mathbb{R}$. A formação de subconjuntos em $\mathbb{R}$ evidencia, através das considerações sobre ínfimos e supremos, a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$.

Diagnóstico inicial

Para o presente estudo, o diagnóstico pode ser realizado através de uma relação de questões a respeito da compreensão sobre operações em conjuntos, operações com e concatenações de desigualdades. Outra maneira é fazer uma breve discussão sobre o tópico.

As operações em conjuntos podem ser discutidas sob o ponto de vista da interação entre os objetos, onde se constatam objetos comuns a dois conjuntos e os efeitos que conduzem à relação de inclusão e às operações de intersecção e diferença de conjuntos.

As operações com desigualdades envolvem a adição de um número racional, a multiplicação por números racionais positivos ou negativos, a adição de desigualdades e a multiplicação de desigualdades. É importante discutir a substituição de valores como uma adição de desigualdades.

A concatenação de desigualdades envolve considerar duas desigualdades que possam compreender uma terceira, pela propriedade transitiva. Além disso, o uso de desigualdades simples pode ser relacionado à detecção de um objeto de um conjunto.

Fomentando a discussão

O ponto de partida deve ser a consideração das possibilidades a respeito de um subconjunto que admita limitantes inferior e superior. Isto significa formar um subconjunto de números reais a partir de dois números reais dados para o começo da conversa.

A partir deste subconjunto, a discussão deve levar em consideração dois aspectos: a livre formação de subconjuntos deste e a possibilidade de exclusão de certo número real do subconjunto para a formação de um novo subconjunto.

A discussão deve ser escalada quanto à possibilidade de este processo poder ser continuado.

Atividade: formando subconjuntos

Para começar, considere quatro números reais, com valores fixados. Ordene esses valores e considere, inicialmente, o menor e o maior deles. O menor deles será designado p e o maior, q. Forme, com isso, o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$.

Dos dois que restaram, o menor deles será designado b e o maior, d. Ao formar o subconjunto $T = \{z \in \mathbb{R} \,;\, b \leqslant z \leqslant d\}$, observe que $T \subset S$.

A partir de b e d, obtenha dois números reais diferentes que sejam maiores do que b e menores do que d. Designados h e μ estes números, onde $h < \mu$, forme o subconjunto $U = \{z \in \mathbb{R} \,;\, h \leqslant z \leqslant \mu\}$, observando que $U \subset T$ e, portanto, $U \subset S$.

Conclua que este processo pode ser continuado a partir de U.

Atividade: explorando a formação de subconjuntos

Considere três números reais com valores fixados e designe-os por x, a e b. Sejam p o menor dentre a e b e q, o maior. Forme, com isso, o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$.

Avalie se x faz parte de S. Se não faz, conclua que S é um subconjunto de si mesmo que exclui x. Se fizer, avalie se $x < q$ ou não. Se $x = q$, obtenha, a partir de p e q, um número real g presente em S. Se $x < q$, obtenha, a partir de x e q, um número real h presente em S. De acordo com cada situação, forme o subconjunto $T = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant g\}$ ou $F = \{z \in \mathbb{R} \,;\, h \leqslant z \leqslant q\}$ e conclua que ou T ou F é um subconjunto de S que exclui x.

Reinicie o processo considerando quatro números reais com valores fixados. Designados x_1, x_2, a e b, sejam p o menor dentre a e b e q, o maior. Forme, com isso, o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$.

Repita o processo anterior formando um subconjunto $T \subset S$ que exclua x_1. A partir de T, repita o processo formando um subconjunto $U \subset T$ que exclua x_2. Conclua que $U \subset S$ também.

Atividade: compreendendo como formar uma cadeia de subconjuntos

É interessante que, nesta atividade, seja considerado um subconjunto de números reais definido por uma função que alterne valores positivos e negativos. Com esta finalidade, considere um subconjunto de números reais definido através da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, descrita pela lei de formação $f(n) = (-1)^n/n^2$.

Avalie $f(1)$ e $f(2)$. Sendo p o menor dentre eles e q, o maior, forme o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$. Para o presente caso, $f(1)$ é negativo e $f(2)$ é positivo, o que acarreta $p = f(1)$ e $q = f(2)$.

Diante disto, calcule a média aritmética de p e q, designada m_1. Neste caso, como $f(1)$ é negativo, então $f(1) < m_1$. Já que a discussão envolve números racionais, então é permitido procurar por um número na forma $-1/u$ ou $1/u$, onde u é o denominador de m_1, de maneira que $f(1) < m_1 < -1/u$. Assim, designe $a_1 = -1/u$ e $b_1 = q$ e forme o subconjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{R} \,;\, a_1 \leqslant z \leqslant b_1\}$. Perceba que $f(1) \notin S_1$.

Repita este procedimento a partir de $f(2)$ e S_1: calcule a média aritmética de a_1 e b_1 e designe-a m_2. Como $b_1 = q$, isto é, $b_1 = f(2)$, então $m_2 < f(2)$, e, portanto, considere $1/u$, onde u é o denominador de m_2, e ocorrerá $1/u < m_2 < f(2)$. Com esta condição, designe $a_2 = a_1$ e $b_2 = 1/u$. Forme o subconjunto $S_2 = \{z \in \mathbb{R} \,;\, a_2 \leqslant z \leqslant b_2\}$ e perceba que $f(2) \notin S_2$.

Continue este processo até a formação de S_{10}. Observe o comportamento dos sinais das médias formadas, m_3 a m_{10}, em relação aos sinais dos valores tomados, $f(3)$ a $f(10)$. Esta informação poderá ser útil na avaliação de possíveis propriedades do processo adotado.

Considere os valores de a_1 até a_{10}. Em virtude da lei de formação fornecida, todos eles são negativos. Do mesmo modo, todos os valores de b_1 até b_{10} são positivos. Além disso, o processo formou um padrão para cada conjunto de valores.

A partir destas informações, compare em que condições estão mudando os valores de a_1 até a_{10} em relação aos valores de $f(1)$ a $f(10)$. Faça a mesma avaliação com os valores de b_1 a b_{10} em relação aos valores de $f(1)$ a $f(10)$. Isto permite discriminar quais comparações devem ser feitas a fim de tirar conclusões sobre a continuação da formação dos subconjuntos S_n, a partir de $n = 11$.

De posse das comparações, possivelmente o Princípio de Indução deverá ser usado para comprovar como é a regularidade dos subconjuntos S_n. De todo modo, será possível obter uma lei de formação que reproduz o conjunto dos valores a_n obtidos a cada etapa e outra, para o conjunto dos valores b_n.

Forme os subconjuntos $A = \{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Com as leis de formação obtidas, é possível decidir quem são $\sup A$ e $\inf B$. Determine estes valores e que relação satisfazem eles, isto é, se $\sup A < \inf B$, se $\sup A = \inf B$ ou se $\sup A > \inf B$.

Avaliando uma condição mais ampla

Compreendida uma maneira de formar uma cadeia de subconjuntos a partir de uma quantidade infinita de números reais fornecidos, é interessante poder generalizar. O processo segue o disposto no aporte teórico da sequência didática.

Considere uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qualquer, desde que seja injetiva. A condição é necessária para dispor de mais de um número real para avaliação. A partir de $f(1)$ e $f(2)$, sejam p o menor dentre eles e q, o maior, e forme o subconjunto $S = \{z \in \mathbb{R} \,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$.

A partir de p e q, é possível obter um número real maior do que p e menor do que q. Se este número for menor do que $f(1)$, então designe $a_1 = p$ e b_1 por este número; se for maior do que $f(1)$, então designe a_1 por este número e $b_1 = q$. Em todo caso, perceba que $a_1 < b_1$. Forme o subconjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{R} \,;\, a_1 \leqslant z \leqslant b_1\}$ e perceba que, além de $S_1 \subset S$, também $f(1) \notin S_1$.

A partir de a_1 e b_1, é possível obter um número real maior do que a_1 e menor do que b_1. Se este número for menor do que $f(2)$, designe $a_2 = a_1$ e b_2 por este número; se for maior do que $f(2)$, designe a_2 por este número e $b_2 = b_1$. Em todo caso, perceba que $a_2 < b_2$. Forme o subconjunto $S_2 = \{z \in \mathbb{R} \,;\, a_2 \leqslant z \leqslant b_2\}$ e perceba que, além de $S_2 \subset S_1$, também $f(2) \notin S_2$.

Como $f(1)$ e $f(2)$ foram usados para formar S, não foi necessário verificar se estavam em S para a formação de S_1 e S_2. Por outro lado, pode ser que $f(3)$ não esteja em S_2. Se for este caso, então o próximo subconjunto, S_3, é o próprio S_2, com $a_3 = a_2$ e $b_3 = b_2$.

Se $f(3) \in S_2$, então ou $f(3) < b_2$ ou $f(3) = b_2$. No primeiro caso, use $f(3)$ e b_2 para obter um número real maior do que $f(3)$ e menor do que b_2; designe-o a_3 e considere $b_3 = b_2$. No segundo caso, obtenha um número real maior do que a_2 e menor do que b_2; adote $a_3 = a_2$ e designe por b_3 o número obtido. Em qualquer caso, observe que $a_3 < b_3$ e forme o subconjunto $S_3 = \{z \in \mathbb{R} \,;\, a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$. Perceba que, além de $S_3 \subset S_2$, também

$f(3) \notin S_3$.

Como esta construção foi permitida uma vez, então pode ser repetida. Desta maneira, é possível considerar que foram obtidos, no passo n, os números reais a_n e b_n de maneira a formar o subconjunto $S_n = \{z \in \mathbb{R} \ ; \ a_n \leqslant z \leqslant b_n\}$, onde $f(n) \notin S_n$. Repita a construção com respeito a $f(n+1)$ e S_n.

Por ora, conforme são obtidos os números reais a_n e b_n, é possível incluir cada valor em um subconjunto particular. Forme os subconjuntos $A = \{a_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$. É interessante discutir como funcionam limitantes a respeito desses conjuntos e, em particular, se os números reais neles presentes podem atuar como limitantes.

Assim, avalie se os números reais de A atuam como limitantes inferiores para B e se os números reais de B atuam como limitantes superiores para A. Como ponto de partida, fixe um número real do conjunto a ser avaliado, conforme disposto no aporte teórico da sequência didática.

Decididas as condições a respeito de A e de B, se A admitir limitante superior, então admitirá supremo. Se este for o caso, decida se algum número real de B pode vir a ser supremo de A. Do mesmo modo, se B admitir limitante inferior, então admitirá ínfimo. Se este for o caso, decida se algum número real de A pode vir a ser ínfimo de B. Faça uso destas informações para decidir que relação têm $\sup A$ e $\inf B$.

Constatando um conjunto não enumerável

Os conjuntos numéricos estudados até então, a saber, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, são, todos, enumeráveis. Resta decidir se $\mathbb{R}$ também é enumerável, ou não, e que consequências isto traz.

A formação de uma cadeia de subconjuntos é um instrumento útil para tomar uma decisão sobre $\mathbb{R}$, e é usada de uma forma provocativa.

Se $\mathbb{R}$ for enumerável, então existirá uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que caracterize a enumerabilidade. A preocupação não deve ser com a lei de formação da função, mas com a propriedade dela. Como f é bijetiva, então f é injetiva e sobrejetiva.

A existência desta função também permite escrever $\mathbb{R}$ como a imagem de f, ou seja, $\mathbb{R} = \{f(n) \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$. Então é possível fazer a construção da atividade descrita na avaliação da seção anterior para $\mathbb{R}$ sob esta condição.

Isto significa que a construção provocará a formação de uma cadeia de subconjuntos na forma $S_n = \{z \in \mathbb{R} \; ; \; a_n \leqslant z \leqslant b_n\}$ em que $f(n) \notin S_n$ e $S_{n+1} \subset S_n$.

A cadeia de subconjuntos assim formada permite destacar os subconjuntos $A = \{a_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$. Utilize as propriedades descritas sobre A e B na atividade descrita na avaliação da seção anterior para decidir se existem, ou não, $\sup A$ e $\inf B$ e, em caso afirmativo, que propriedade têm esses valores.

Com a avaliação, decida se é possível formar um subconjunto particular que faça parte de todo subconjunto S_n. Se for, então decida que consequência isto traz a respeito do fato admitido de f ser sobrejetiva. Se f deixou de ser sobrejetiva, então não poderia ser admitido que $\mathbb{R}$ seja enumerável.

Finalização

As atividades têm o condão de conduzir à compreensão sobre propriedades particulares do conjunto de números reais, e, em particular, sobre a impossibilidade de este ser enumerável.

Avaliação

A avaliação é feita ao longo da realização das atividades em virtude de as mesmas tomarem forma escrita ao longo de sua aplicação, onde o professor pode sugerir que os estudantes troquem escritas entre si para discutirem sobre suas compreensões individuais das atividades.

Além das especifidades das atividades, a avaliação também pode ser conduzida por uma série de questões voltadas a conhecer a compreensão dos estudantes sobre os seguintes tópicos: a formação de subconjuntos de números reais; a formação de uma cadeia de subconjuntos de números reais; e a relação entre os conceitos de função e de enumerabilidade, a formação de uma cadeia de subconjuntos de números reais, e a constatação de um conjunto numérico não enumerável.

É interessante que o material escrito seja recolhido para uma avaliação mais profunda. A avaliação deve levar em consideração, em primeiro lugar, a coesão e a clareza, devendo seus resultados serem separados. Em segundo lugar, deve ser avaliado o cuidado no uso das propriedades citadas pelos participantes, destacando possíveis equívocos que levem à compreensão expressada por eles ao longo da realização das atividades.

4.2.5 A estrutura intrínseca ao conjunto de números reais

A presente sequência didática abordará tópicos iniciais da topologia do conjunto de números reais, isto é, a estrutura admitida por seus subconjuntos em relação aos números reais neles presentes. O Quadro 14 traz as informações elementares à sequência.

Quadro 14 – Informações sobre a sequência didática da seção 4.2.5.

Assunto a ser abordado	A topologia do conjunto de números reais.
Objetivos da ação	Compreender as consequências das condições definidas sobre a relação entre números reais e subconjuntos de números reais que os contenham.
Conhecimentos prévios	Tratamento elementar de conjuntos: pertinência, inclusão, intersecção, reunião e diferença. Operações com desigualdades. Limitantes, ínfimo e supremo de um subconjunto. Operações com números reais.
Conhecimentos desenvolvidos	Pontos interiores, pontos aderentes e pontos cumulativos. Conjuntos abertos e conjuntos fechados.
Competências aprimoradas	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Material necessário	Quadro. Giz. Pincel. Canetas. Papéis.
Duração da atividade	1 hora e 30 minutos.
Referências	Ávila (2001), Lima (2017)

Fonte: elaboração do autor, 2020.

Aporte teórico

Uma consideração importante no estudo de conjuntos numéricos diz respeito às noções de proximidade e continuidade ao longo de um percurso. Uma forma de expressar o vínculo entre estas noções está ao escrever, na definição de um subconjunto de números reais, a forma $S = \{z \in \mathbb{R}\ ;\ a \leqslant z \leqslant b\}$; em particular, se a e b forem números reais distintos.

O motivo pelo qual esta forma foi introduzida em interações anteriores é o de evidenciar a necessidade do trato direto com subconjuntos como recurso para estudo, mostrando que o estudo de conjuntos em caráter amplo é tão importante e essencial quanto o estudo de funções em caráter amplo.

Por outro lado, o momento é de fazer uma outra abordagem a respeito de subconjuntos, mais voltada ao estudo de uma estrutura interna intrínseca ao conjunto de números reais. Nesta abordagem, o interesse é discutir propriedades particulares à relação entre números reais e subconjuntos de números reais.

Para começar, considere um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e um número real p. Há subconjuntos particulares, razoavelmente específicos, que trazem um outro olhar à relação satisfeita por p e X e que vão um pouco além das condições que definem o ínfimo e o supremo de X. Um destes subconjuntos é $S = \{z \in \mathbb{R}\ ;\ a \leqslant z \leqslant b\}$, onde, além de a e b serem números reais, p faz parte de S e não é nem a e nem b.

Por outro lado, por S admitir um mínimo e um máximo, S é um tanto permissivo. Desta maneira, a exemplo de outras etapas do estudo de subconjuntos de números reais, considere remover a e b de S, formando o subconjunto $I = S - \{a;\ b\} = \{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$, tornando I um subconjunto sem mínimo e sem máximo.

Observando p a partir de I, as relações não envolvem apenas p e X, mas I e X também, abrindo espaço para a avaliação de efeitos a partir de propriedades satisfeitas por I e X, conforme as condições para declarar ou a inclusão de I a X ou a constatação de números reais comuns a I e a X.

A formação de conjuntos abertos

É possível considerar diferentes números reais a e b para formar o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$. Isto significa que pode ser possível obter dois números reais específicos p e q de maneira que o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ p < z < q\}$ seja um subconjunto de X. Se for, o fato de este subconjunto não dispor de mínimo nem de máximo e conter números reais maiores do que p e menores do que q já o torna infinito; assim, por ser um subconjunto de X, isto caracteriza X infinito.

Observando a situação a partir de um número real m presente em X, a possibilidade de obter números reais p e q – para os quais seja constatado que $p < m < q$ – onde o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ p < z < q\}$ seja um subconjunto de X traz um significado particular: um número real presente em um subconjunto de números reais pode determinar a ocorrência de diversos outros neste mesmo subconjunto. Esta observação merece uma atenção especial.

Assim, considerados um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e um número real p, p *é um ponto interior a* X quando existem números reais a e b, com $a < b$, para os quais o subconjunto $I = \{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$ contém p e é parte de X, isto é, $p \in I$ e $I \subset X$.

Observe que esta noção automaticamente faz de todo número real presente em um subconjunto da forma $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$ um ponto interior ao mesmo. Assim, há um caso particular em que um subconjunto de números reais é constituído exclusivamente de pontos interiores a si próprio. Mas como esta condição pode ser possível em outros subconjuntos, ela passa a ser relevante.

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um *conjunto aberto* (ou subconjunto aberto) quando todo número real nele presente é um ponto interior a ele próprio. Isto significa que, em particular, os subconjuntos da forma $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$ são, todos, abertos, o que traz uma relevância ainda maior a eles.

Em virtude destas observações, um subconjunto da forma $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$ é dito um *intervalo real aberto de extremos* a *e* b, ou, simplesmente, intervalo aberto de extremos a e b. A partir de então, é adotada como representação a simbologia $(a;\ b)$.

Com esta representação, a leitura da condição que determina um ponto interior se torna mais simples e melhor praticável. Considerados um número real p e um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, p é um ponto interior se existe um intervalo aberto contendo p que seja parte de X, isto é, se existe algum $(a;\ b)$ para o qual $p \in (a;\ b)$ e $(a;\ b) \subset X$.

Por outro lado, nem todo subconjunto de números reais é um conjunto aberto, como o caso de um conjunto unitário. Não há como incluir um intervalo aberto em um conjunto unitário. Em um salto abrupto, também não há como considerar um subconjunto de números racionais como um conjunto aberto, pois a inclusão de um intervalo nele exigiria a presença de números irracionais nele. Mas podem ocorrer não apenas estes casos.

Em virtude desta constatação, há uma possibilidade para abranger o estudo de conjuntos que não sejam abertos a partir da perspectiva da formação dos conjuntos abertos.

Se um subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ admite pontos interiores a ele, então é possível reunir todos estes pontos interiores em um subconjunto particular de X, denominado *o interior de* X. Uma consequência disto é o fato de todo conjunto aberto ser seu próprio interior.

Dado que um intervalo aberto é uma condição ideal de conjunto aberto, é interessante poder relacionar a formação de conjuntos abertos ao uso de intervalos abertos. Observe que a reunião de dois intervalos abertos pode caracterizar ou a formação de um novo intervalo aberto ou a formação de um conjunto aberto constituído por dois intervalos abertos.

No primeiro caso, os intervalos em questão têm, ao menos, um número real em comum. Sendo $(a;\ b)$ e $(c;\ d)$ tais intervalos, se $(a;\ b) \cap (c;\ d) \neq \varnothing$, então existe $p \in (a;\ b) \cap (c;\ d)$. Isto significa que é possível considerar os intervalos abertos $(a;\ p)$, $(c;\ p)$, $(p;\ b)$ e $(p;\ d)$. Assim, ou é $(a;\ p) \subset (c;\ p)$ ou é $(c;\ p) \subset (a;\ p)$ em relação a números reais menores do que p, e ou é $(p;\ b) \subset (p;\ d)$ ou é $(p;\ d) \subset (p;\ b)$ em relação a números reais maiores do que p. Portanto, é permitido afirmar que $(a;\ b) \cup (c;\ d)$ é um intervalo aberto, cujos extremos são o menor dentre a e c e o maior dentre b e d.

No segundo caso, a formação é clara, pois o novo conjunto aberto é formado por dois intervalos abertos sem intersecção. Logo, a condição que verifica se novo conjunto é aberto é validada em cada um de seus *intervalos componentes*. Com esta observação, o segundo caso permite, portanto, expandir a possibilidade para o estudo de conjuntos abertos mais arbitrários.

Como primeira etapa, é importante observar que o fato de a reunião de dois intervalos abertos que dispõem de um número real em comum resultar em um intervalo aberto pode ser estendida a uma quantidade qualquer de intervalos abertos.

Considerados diversos intervalos abertos $(a_n;\ b_n)$ de forma que haja um número real p que faça parte de todos eles, é importante observar que são formados os intervalos abertos $(a_n;\ p)$, onde são considerados todos os números reais menores do que p presentes em todos os intervalos. Logo, há margem para considerar que haja um menor número real aí para delimitar todos estes intervalos.

Nestas condições, seja A o conjunto dos extremos inferiores dos intervalos $(a_n;\ b_n)$, e, consequentemente, será o mesmo conjunto dos extremos inferiores dos intervalos $(a_n;\ p)$. Observe que A é constituído por números reais previamente determinados, de onde é possível concluir que exista um limitante inferior para A; com efeito, caso não existisse, algum intervalo aberto poderia ser estendido ao infinito negativo, o que não ocorre. Assim, seja

$a = \inf A$.

Do mesmo modo, considerados os números reais maiores do que p, são formados os intervalos abertos $(p;\ b_n)$, e, assim, pode ser considerado o conjunto dos extremos superiores destes intervalos, B. Se B não admitir um limitante superior, então algum intervalo aberto pode ser estendido ao infinito positivo, o que não ocorre. Portanto, seja $b = \sup B$.

Com estas considerações, é de se esperar que o intervalo desejado nada mais é do que $(a;\ b)$. Pela maneira como foi construído, observe que, sendo $a = \inf A$, então sempre é possível obter algum a_n de maneira que $a \leqslant a_n < a + r$, dado qualquer acréscimo positivo r a a; e, sendo $b = \sup B$, sempre é possível obter algum b_n onde $b - r < b_n \leqslant b$, dada qualquer redução positiva r a b. Assim, todo intervalo $(a_n;\ b_n)$ é parte de $(a;\ b)$.

Resta decidir se $(a;\ b)$ não dispõe de números reais que não existiam nos intervalos $(a_n;\ b_n)$. Ora, como p faz parte de todos os intervalos, isto significa que sempre se tem $a_n < p$ e sempre se tem $p < b_n$. Logo, dados $a_n \in A$ e $b_u \in B$, sempre ocorre $a_n < p < b_u$, ou seja, $a_n < b_u$.

Retomando o fato de $a = \inf A$ e $b = \sup B$, considere $z \in (a;\ b)$. Isto significa que $z - a$ é positivo e, portanto, existe algum $a_w \in A$ de forma que $a \leqslant a_w < a + (z - a)$, ou seja, existe $a_w \in A$ de forma que $a_w < z$. Do mesmo modo, $b - z$ é positivo e, com isso, existe algum $b_s \in B$ para o qual $b - (b - z) < b_s \leqslant b$, ou seja, $z < b_s$. Assim, se $z < b_w$, então se tem $z \in (a_w;\ b_w)$; caso contrário se tem $z \in (a_s;\ b_s)$ porque $a_s < b_w$.

Esta abordagem mostra que a reunião de diversos intervalos abertos contendo um mesmo número real resulta em um intervalo aberto. Além disso, o novo intervalo não dispõe de números reais que já não se encontravam nos intervalos abertos originais.

Passando a um patamar maior, é importante observar que um conjunto aberto pode ser constituído de diversos intervalos abertos, mas a ferramenta anterior permite decidir quando tais intervalos abertos podem ser substituídos por um que os contenha ou não.

Ora, dados z e w em um conjunto aberto X, z e w são pontos interiores a X e, portanto, existem os intervalos abertos $(a_z;\ b_z)$ e $(a_w;\ b_w)$ contendo z e w, respectivamente. Ora, se tais intervalos dispõem de um número real em comum, então um único intervalo pode se referir a z e a w; se não, tais intervalos não podem ser reunidos em outro intervalo aberto sem incluir uma infinidade de números reais que não estavam no conjunto aberto X.

Com esta observação, dado um conjunto aberto X, considerar um número real

$z \in X$ levanta não apenas um intervalo aberto que o contenha e seja parte de X, mas, junto com ele, uma infinidade de outros intervalos. Como visto, é possível reunir todos eles em um único intervalo aberto, o qual será nomeado I_z e, além disso, $I_z \subset X$ por não dispor de número real não considerado. Do mesmo modo, é possível considerar um número real $w \in X$ e repetir o processo, obtendo o intervalo aberto I_w com $I_w \subset X$.

Ora, então ou x e w estão no mesmo intervalo, ou x e w estão em intervalos diferentes; em termos mais precisos, a observação anteriormente mencionada traz a seguinte consequência: se $z \in I_w$, então $I_w \subset I_z$, pois é um intervalo aberto que contém z; se não for, então observe que, se $w \in I_z$, então $I_z \subset I_w$ por ser um intervalo aberto que contém w; nestas condições, I_z e I_w têm que ser iguais. Assim, ou $I_z = I_w$ ou não existe número real comum a I_z e I_w.

Esta abordagem significa que é possível obter os intervalos abertos que levaram à construção do conjunto aberto X. Por outro lado, ainda permite que tais intervalos abertos possam ser constituídos de diferentes maneiras. Esta dificuldade pode ser resolvida admitindo que sejam possíveis duas constituições diferentes de intervalos abertos na formação de X.

Pelo já verificado, considere duas constituições diferentes para X, a saber, $X = \cup F_n$ e $X = \cup T_u$, onde serão representados $F_n = (a_n;\ b_n)$ e $T_u = (p_u;\ q_u)$. Ora, cada F_n e cada T_u são intervalos abertos sem intersecção com os demais; assim, nenhum dos seus extremos pode fazer parte de X.

Se, para algum T_u, o extremo p_u fizesse parte de X, existiria um outro intervalo $T_f = (p_f;\ q_f)$ de forma que $p_u \in T_f$. Mas aí, necessariamente existiriam números reais maiores do que p_u tanto em T_u quanto em T_f, e isto mostraria uma intersecção entre T_u e T_f. Portanto, isto não acontece.

A consequência disto é que a reunião dos intervalos T_u obedece à mesma constituição que a reunião dos intervalos F_n, isto é, se $z \in T_u$ e $z \in F_n$, então, por T_u e F_n representarem a reunião dos intervalos abertos que contêm z, necessariamente eles têm que ser iguais. Portanto, cada T_u é identificado com algum dos F_n, mostrando que só existe uma constituição para X através de intervalos abertos sem intersecção.

Em outras palavras, foi mostrado que todo conjunto aberto é constituído de intervalos abertos específicos que levaram à sua construção, ou seja, sempre é possível obter os intervalos abertos que deram origem a um conjunto aberto.

A primeira face de um contraste à existência de conjuntos abertos

Apesar de ser proveitosa a possibilidade de inclusão de um intervalo aberto em um subconjunto arbitrário, há ainda observações sobre a possibilidade de detecção de um número real comum a um intervalo aberto e a um subconjunto arbitrário.

Dados um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e um número real p, considerar um intervalo aberto contendo p, como $(a;\ b)$, pode mostrar algum número real em comum a X e a $(a;\ b)$, e não necessariamente o intervalo. Isto significa que $(a;\ b) \cap X$ pode não ser vazio, mas finito ou, até mesmo, unitário. Esta é outra possibilidade para o uso de subconjuntos como ferramenta no estudo de subconjuntos de números reais mais arbitrários.

Neste sentido, p *é aderente a* X se, para todo intervalo aberto contendo p, é possível obter um número real presente em X. Em outras palavras, dados quaisquer números reais a e b, com $a < p < b$, é possível constatar que $(a;\ b) \cap X$ não é vazio.

Observe que, dados um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e um número real $p \in X$, todo intervalo aberto contendo p tem p como número real comum ao intervalo e a X. Assim, todo número real presente em um subconjunto é um ponto aderente ao subconjunto. Por outro lado, é necessário avaliar se um subconjunto pode dispor de pontos a ele aderentes que dele não façam parte.

O próprio intervalo aberto $(a;\ b)$ é interessante para esta discussão. Observe que a, apesar de não fazer parte do intervalo, é referência para os números reais que fazem parte do intervalo. Com efeito, dado $z \in (a;\ b)$, sempre se tem $z > a$. Ora, $(a;\ b)$ é um conjunto sem mínimo, mas admite a como limitante inferior. Desta forma, o intervalo admite ínfimo.

Sendo i o ínfimo de $(a;\ b)$, dado um número real positivo r, a condição satisfeita por i é a possibilidade de obter um número real $z \in (a;\ b)$ de maneira que $i \leqslant z < i + r$. Como esta condição não depende de qualquer número real menor do que i, isto significa que todo intervalo aberto contendo i tem algum número real em comum a $(a;\ b)$, mostrando que i é ponto aderente a $(a;\ b)$.

Por outro lado, observe que, dado $w \in (a;\ b)$, ocorre que $w > a$. Logo, é possível obter um número real presente em $(a;\ b)$ maior do que a e menor do que w, a saber, z, por exemplo. Além disso, $w - a$ é positivo, o que caracteriza $a < z < a + (w - a)$, ou seja, $a < z < w$. Isto sempre é possível para todo número real presente no intervalo como consequência de o mesmo não admitir mínimo e faz de a perfeito candidato a ínfimo de $(a;\ b)$. Para números reais positivos r em que $a + r$ já não faz parte do intervalo, isto é, $b \leqslant a + r$, basta considerar um número real z qualquer do intervalo e observar que $a < z < a + r$. Como i é ínfimo de $(a;\ b)$ e a também satisfaz às condições para ser declarado ínfimo de $(a;\ b)$, então a é o ínfimo de $(a;\ b)$.

Portanto, o intervalo $(a;\ b)$ é um subconjunto que admite um ponto a ele aderente que não faz parte do conjunto, a saber, a. Isto significa que é possível separar, dentre os subconjuntos que dispõem de pontos a eles aderentes, aqueles constituídos exclusivamente por pontos a eles aderentes, dada a relevância que foi levantada.

Um subconjunto $X \subset R$ é um *conjunto fechado* (ou subconjunto fechado) quando consiste de todos os pontos aderentes a si, isto é, se o número real p é um ponto aderente a X, então $p \in X$. Com esta observação, nenhum intervalo aberto pode ser um conjunto fechado, mesmo que todos os números reais nele presentes sejam pontos aderentes a ele, porque há pelo menos um número real que é ponto aderente a ele mas não faz parte dele.

Dispor de conjuntos abertos e de conjuntos fechados não traz uma representação total de todos os subconjuntos possíveis de números reais, pois há conjuntos que podem não ser abertos e também não ser fechados. A exemplo do que foi constatado no estudo de conjuntos abertos, é possível considerar um subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ e todos os pontos aderentes a X para formar um novo subconjunto, denominado *a aderência de* X. Uma consequência disto é que todo conjunto fechado é sua própria aderência.

A partir desta condição, e sabendo que todo conjunto aberto é determinado por intervalos abertos, é possível discutir uma outra maneira para obter conjuntos fechados, através dos complementares dos subconjuntos abertos perante o conjunto de números reais. O complementar de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é descrito pela diferença $\mathbb{R} - X$.

Observe que esta sugestão é promissora. Com efeito, considere um subconjunto fechado $X \subset \mathbb{R}$. Isto significa que todo número real $p \in X$ é ponto aderente a X. Como o desejo é avaliar o uso do complementar de X perante $\mathbb{R}$, então é necessário discutir o que ocorre com um número real não presente em X.

Se houvesse algum número real $z \notin X$ que fosse ponto aderente a X, então o fato de X ser fechado importaria a inclusão de z a X, pois X tem que dispor de todos os pontos aderentes a si próprio. Logo, nenhum número real fora de X é ponto aderente a X. Feito isto, é interessante observar que propriedades tais números reais satisfazem.

Seja $z \notin X$. Como z não é aderente a X, então para algum dos intervalos abertos que contêm z e foram considerados para avaliar a intersecção com X, resta que tal intersecção não contém número real presente em X. Sendo S tal intervalo, ocorre $S \cap X = \varnothing$. Isto evidencia um intervalo aberto contendo z que é parte de $\mathbb{R} - X$. Ora, como isto é observado para todo número real z não presente em X, isto faz de $\mathbb{R} - X$ um conjunto aberto.

Interessante é o fato de constatar que o complementar de um subconjunto fechado é um subconjunto aberto; considerado um subconjunto aberto X, é possível observar que nenhum número real que não esteja presente nele passa a ser ponto aderente ao complementar dele, $\mathbb{R} - X$, o que faz de $\mathbb{R} - X$ um conjunto fechado.

Desta maneira, um subconjunto é fechado se, e somente se, o complementar dele perante $\mathbb{R}$ é aberto; e um subconjunto é aberto se, e somente se, o complementar dele perante $\mathbb{R}$ é fechado. Eis aí uma forma de obter subconjuntos fechados de números reais.

Até o momento, foi falado em intervalos abertos como subconjuntos da forma $\{z \in \mathbb{R}\,;\ a < z < b\}$. Diante da condição em estudo, que permite formar conjuntos fechados, é interessante estender a noção de intervalo não apenas para compreender um conjunto fechado, mas como recurso para estudo futuro.

Dados números reais a e b, com $a \leqslant b$, os seguintes subconjuntos são denominados *intervalos reais de extremos* a *e* b:

$$(a;\ b) = \{z \in \mathbb{R}\,;\ a < z < b\} \qquad (a;\ b] = \{z \in \mathbb{R}\,;\ a < z \leqslant b\}$$
$$[a;\ b) = \{z \in \mathbb{R}\,;\ a \leqslant z < b\} \qquad [a;\ b] = \{z \in \mathbb{R}\,;\ a \leqslant z \leqslant b\}$$

Como já mencionado, $(a;\ b)$ é o intervalo aberto de extremos a e b. Por ora, $[a;\ b]$ é o *intervalo fechado de extremos* a *e* b. O intervalo $[a;\ b)$ é o *intervalo fechado em* a *e aberto em* b e o intervalo $(a;\ b]$, o *intervalo aberto em* a *e fechado em* b. O nome *fechado* diz respeito ao fato de o extremo ser ponto aderente ao intervalo aberto $(a;\ b)$.

Uma observação importante é o fato de poderem ser considerados intervalos os subconjuntos definidos por números reais menores ou maiores do que certo número real. É possível adaptar as propriedades já descritas até o momento para abarcar esta extensão. Assim, sendo p um número real, serão considerados intervalos os seguintes subconjuntos:

$$(-\infty;\ p) = \{z \in \mathbb{R}\,;\ z < p\} \qquad (p;\ +\infty) = \{z \in \mathbb{R}\,;\ p < z\}$$
$$(-\infty;\ p] = \{z \in \mathbb{R}\,;\ z \leqslant p\} \qquad [p;\ +\infty) = \{z \in \mathbb{R}\,;\ p \leqslant z\}$$
$$(-\infty;\ +\infty) = \mathbb{R}$$

Introdução

As propriedades de subconjuntos de números reais não estão reduzidas às possibilidades de determinar ínfimos ou supremos para tais subconjuntos. Há outro aspecto, também relevante, que caracteriza o comportamento desses subconjuntos no estudo de funções.

Neste sentido, o estudo se volta para constatar propriedades que podem manter a integridade de subconjuntos através do uso de funções, consagrando as propriedades que determinam subconjuntos abertos e subconjuntos fechados de números reais.

Diagnóstico inicial

Para o presente estudo, o diagnóstico pode ser realizado através de uma relação de questões a respeito da compreensão sobre operações em conjuntos, operações com e concatenações de desigualdades, e os conceitos de ínfimo e supremo de subconjuntos. Outra maneira é fazer uma breve discussão sobre o tópico.

As operações em conjuntos podem ser discutidas sob o ponto de vista da interação entre os objetos, onde se constatam objetos comuns a dois conjuntos e os efeitos que conduzem à relação de inclusão e às operações de intersecção e diferença de conjuntos.

As operações com desigualdades envolvem a adição de um número racional, a multiplicação por números racionais positivos ou negativos, a adição de desigualdades e a multiplicação de desigualdades. É importante discutir a substituição de valores como uma adição de desigualdades.

A concatenação de desigualdades envolve considerar duas desigualdades que possam compreender uma terceira, pela propriedade transitiva. Além disso, o uso de desigualdades simples pode ser relacionado à detecção de um objeto de um conjunto.

Os conceitos de ínfimo e supremo de subconjuntos podem ser discutidos a partir das noções de valor mínimo e valor máximo, como um limitante inferior é considerado o ínfimo de um subconjunto, e como um limitante superior é considerado o supremo de um subconjunto.

Fomentando a discussão

A discussão inicial se volta para o uso de subconjuntos da forma $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a \leqslant z \leqslant b\}$ e suas variações como recurso voltado a permitir a extensão do estudo das relações entre objetos e conjuntos através da interação entre conjuntos.

Com vistas aos estudos já conduzidos sobre propriedades específicas de números reais, uma visão particular sobre a forma deste conjunto é a efetivamente conhecida como intervalo, mas é interessante deixar a representação usual de lado e trazer um foco para o conjunto em si.

Dado que, até então, foram estudados os efeitos provocados por subconjuntos com desigualdades permissivas ($\leqslant$), é interessante notar que o caráter expansivo de um subconjunto limitável (que admita limitantes inferior e superior) é proporcionado por subconjuntos com desigualdades estritas ($<$), em particular, e isto faz deles um instrumento ideal para o desenvolvimento deste estudo.

Atividade: constatando um subconjunto aberto ideal

O início das discussões deve conduzir à possibilidade de ponderar sobre qual forma de subconjunto poderá ser adotada, tendendo a concluir por usar a forma $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$.

Com isso, considere dois números reais diferentes entre si. O menor deles será nomeado p e o maior, q. Assim, é formado o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ p < z < q\}$. Observe que, para qualquer número real neste subconjunto, o próprio subconjunto impõe uma certa delimitação ao próprio número real envolvido.

Por outro lado, a partir de um número real x deste subconjunto, é possível determinar outros dois números reais que façam parte deste subconjunto e mantenham esta propriedade. Uma maneira é utilizar a média aritmética. Sendo a e b o menor e o maior destes números, então também ocorre $a < x < b$, de onde é formado o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$, que é parte do subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ p < z < q\}$.

Esta discussão tem a finalidade de trazer outra visão sobre a expansividade em subconjuntos de números reais. Diante disto, subconjuntos na forma $\{z \in \mathbb{R}\ ;\ a < z < b\}$ acabam por se tornar ideais não apenas para o estudo, mas para a observação desta propriedade.

Assim, como o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\,;\, a < z < b\}$ é parte do subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\,;\, p < z < q\}$, o número real x considerado faz parte de uma espécie de *interior*, de onde surge a definição de *ponto interior*. Além disso, o caso em tela traz como informação importante que, a partir de qualquer número real presente em $\{z \in \mathbb{R}\,;\, p < z < q\}$, esta construção é possível, de onde surge a definição de *conjunto aberto*.

Atividade: o impacto do subconjunto apresentado para o estudo

É interessante mostrar o contraste entre os subconjuntos $\{z \in \mathbb{R}\,;\, a < z < b\}$ e $\{z \in \mathbb{R}\,;\, a \leqslant z \leqslant b\}$ através da possibilidade de inclusão do primeiro no segundo.

Continuando com os números reais p e q adotados, ao formar o subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$, é importante notar que a propriedade estudada a respeito da inclusão ainda é pertinente para $p < z < q$, e, portanto, levanta dúvidas sobre como seria o comportamento de p e de q.

Para p e q, observe que pode ser proposto qualquer subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\,;\, a < z < b\}$ contendo p ou q. Então, considere dois números reais a e b para os quais $a < p < b$ e outros dois, c e d para os quais $c < q < d$. Ofereça valores que façam as diferenças $b - a$ e $d - c$ cada vez menores para perceber que os subconjuntos $\{z \in \mathbb{R}\,;\, a < z < b\}$ e $\{z \in \mathbb{R}\,;\, c < z < d\}$ podem ser construídos de toda e qualquer sorte ao ponto de não poderem ser subconjuntos de $\{z \in \mathbb{R}\,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$.

Então, o olhar já deve ser voltado a outra condição: se não é possível formar um subconjunto de $\{z \in \mathbb{R}\,;\, p \leqslant z \leqslant q\}$, então que números reais há em comum com este? No estudo em curso, p faz parte de $\{z \in \mathbb{R}\,;\, a < z < b\}$ e q faz parte de $\{z \in \mathbb{R}\,;\, c < z < d\}$.

Por outro lado, observe que a mesma condição, quando aplicada ao subconjunto $\{z \in \mathbb{R}\,;\, p < z < q\}$, já não têm nem p nem q como números reais comuns aos subconjuntos adotados, mas é possível perceber uma outra situação. Considere um número real x presente no subconjunto e calcule $p_1 = (p + x)/2$ e $q_1 = (x + q)/2$. Em seguida, calcule $p_2 = (p + p_1)/2$ e $q_2 = (q_1 + q)/2$. Repita este processo mais algumas vezes e perceba que, para cada par de números p_n e q_n assim obtidos, as diferenças $p_n - p$ e $q - q_n$ são cada vez menores.

Esta situação mostra que p e q, mesmo não fazendo parte de $\{z \in \mathbb{R} ; p < z < q\}$, parecem ter uma estreita relação com o subconjunto, e a condição traz consigo a percepção de que p e q poderiam ser incluídos ao conjunto e atuar como uma espécie de fronteira. Desta condição, surge a definição de *ponto aderente*.

Perceba que todo subconjunto é formado por pontos a ele aderentes, mas nem todo ponto aderente a um subconjunto faz parte dele. Esta observação permite conduzir à definição de *conjunto fechado*.

Atividade: uma via na formação de subconjuntos abertos

Uma vez compreendido que subconjuntos da forma $\{z \in \mathbb{R} ; a < z < b\}$ são um caso ideal de um conjunto aberto, pode-se passar à nomeação deles como *intervalos abertos* e, então, usar a representação $(a;\ b)$.

Considere quatro números reais. A referência a tais números será descrita, do menor para o maior, como $a < b < g < k$. Forme os intervalos $(a;\ b)$, $(b;\ g)$ e $(g;\ k)$. Avalie se as reuniões $(a;\ b) \cup (b;\ g)$, $(a;\ b) \cup (g;\ k)$ e $(b;\ g) \cup (g;\ k)$ formam conjuntos abertos.

Forme, além dos já formados, os intervalos $(a;\ g)$ e $(b;\ k)$ e avalie se a reunião deles forma, ainda, um conjunto aberto. Aponte as diferenças entre a abordagem das reuniões anteriores e a abordagem desta última reunião.

Atividade: compreendendo a expansão de um intervalo a partir de um número real

Considere um número real, a ser denotado p, e o subconjunto $\{n/(n+1) ; n \in \mathbb{N}\}$. Para cada número natural n, um número do referido subconjunto será usado como parâmetro para formar intervalos abertos contendo p.

Para $n = 1$, escreva os valores $a_1 = p - (n/(n+1))$ e $b_1 = p + (n/(n+1))$ e forme o intervalo aberto $(a_1;\ b_1)$. Perceba que p faz parte deste intervalo. Repita o procedimento até alcançar $n = 10$ e descreva sua observação sobre os valores a_n e b_n a cada etapa, considerando a relação de cada novo intervalo com os anteriores.

Descreva que comportamento esperar dos valores a_n e b_n se forem escritas mais etapas. Procure prever que números reais a e b podem ser alcançados a partir dos diversos números reais a_n e b_n assim descritos.

Procure relacionar o comportamento de a_n e b_n ao comportamento do subconjunto considerado, $\{n/(n+1)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$, observando que, por mais que haja números cada vez maiores no subconjunto, há a possibilidade de um teto a esses valores, e, portanto, a possibilidade de determinar um supremo para este subconjunto.

Uma vez obtido o supremo de $\{n/(n+1)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$, reavalie os recursos usados para obter uma conclusão semelhante para $\{-(n/(n+1))\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ e, através dessa informação, avalie se os valores a e b previstos poderão ser confirmados ou modificados através das informações já reunidas.

Esboce a conclusão a ser tirada a partir deste procedimento sobre as possibilidades a respeito da expansão de um subconjunto através de intervalos abertos, decidindo se é possível haver, ou não, números reais que possam atuar como limitantes para a possível expansão.

Atividade: relacionando subconjuntos abertos e fechados

Considere dois números reais; o menor deles será nomeado p e o maior, q. Forme o intervalo aberto $(p;\ q)$. Como já discutido, o intervalo aberto $(p;\ q)$ é um subconjunto aberto, mas esta condição traz uma situação interessante sobre a avaliação de seu complementar perante $\mathbb{R}$, a saber, $\mathbb{R} - (p;\ q)$.

Observe que, como $(p;\ q)$ é aberto, então todo número real nele presente é um ponto interior a ele. Então, é necessário avaliar o que esperar de um número real não presente nele. Somente p e q têm estreita relação com o intervalo aberto, sendo aderentes a ele. Mas também são aderentes ao complementar dele perante $\mathbb{R}$.

Perceba que é importante avaliar o comportamento dos números reais presentes em $\mathbb{R} - (p;\ q)$ quanto à particular propriedade de aderência. Considere um número real nesta condição e avalie se é um ponto aderente a $\mathbb{R} - (p;\ q)$. Com sua avaliação, decida se é possível concluir que $\mathbb{R} - (p;\ q)$ é um subconjunto fechado.

Um aprofundamento sobre a formação de subconjuntos abertos

Com vistas ao disposto no aporte teórico da sequência didática, é interessante discutir a relação entre intervalos abertos e a formação de conjuntos abertos. Como forma para trabalhar, considere a formação de intervalos abertos $(a_n;\ b_n)$ que contenham um mesmo número real p.

O principal fator a ser utilizado diz respeito a p. Como este faz parte de um intervalo aberto, então ocorre, sempre, $a_n < p < b_n$. Em particular, ocorrem $a_n < p$ e $p < b_n$, independente de que valores sejam a_n e b_n. Esta observação tem relevância, pois não necessariamente precisa se referir a um mesmo índice.

Observe que, como os intervalos abertos foram considerados a partir de números reais previamente fixados, a_n e b_n, não é ainda admitida a possibilidade de tais intervalos poderem ser estendidos indefinidamente. Logo, é possível formar os subconjuntos constituídos pelos números reais a_n, designado A, e pelos números reais b_n, designado B, de maneira que A admite limitante inferior e B admite limitante superior.

A observação anterior é relevante porque permite discutir a existência de ínfimo para A e de supremo para B, e é necessária para decidir que subconjunto é formado com este processo. Com a certeza da existência do ínfimo de A e do supremo de B através da condição anterior, é necessário decidir se tais valores provocam distorções na formação deste subconjunto.

Assim, forme o intervalo aberto $(\inf A; \sup B)$ e considere um número real z presente neste intervalo. Avalie a relação de z com o ínfimo de A e com o supremo de B, decidindo se o processo provocou a obtenção de um número real que não estava previsto nos intervalos $(a_n; \ b_n)$.

Se provocou, então decida como a distorção é relacionada aos intervalos $(a_n; \ b_n)$. Se não, então decida quanto a qual dentre os intervalos $(a_n; \ b_n)$ pode admitir z através das propriedades satisfeitas pelo ínfimo de A e pelo supremo de B.

Todo subconjunto aberto de números reais é constituído de intervalos abertos

O fato de todo subconjunto aberto de números reais dispor apenas de pontos interiores a si próprios traz uma estreita relação com o uso de intervalos abertos como componentes necessários à formação dos subconjuntos abertos.

Para tanto, considere um subconjunto aberto $S \subset \mathbb{R}$. A consequência de S ser aberto é a de que, para qualquer número real $z \in S$, é possível obter um intervalo aberto que contenha z e seja subconjunto de S. O fato de ser possível obter *um* intervalo aberto, como já discutido, permite obter outros e, com a condição discutida sobre a expansão de um intervalo aberto, permite destacar um intervalo em particular para cada número real $z \in S$, a saber, aquele que contenha todos os demais intervalos abertos que admitem z como parte deles.

Com esta consideração, para cada número real z, há um intervalo particular I_z que só pode ser subconjunto de S. Portanto, I_z não pode ser subconjunto de outro intervalo que seja subconjunto de S a não ser ele próprio. Isto levanta a discussão sobre que outros números reais de S I_z pode vir a admitir.

Então, é necessário considerar um número real $x \in S$ diferente de z. Logo, as mesmas observações conduzem à consideração de um intervalo I_x subconjunto apenas de si próprio e de S, isto é, não podendo ser subconjunto de outro intervalo que seja subconjunto de S. Decida o que pode ocorrer quanto a I_x e I_z levando em consideração as possibilidades referentes a x e a z, e que influência esta avaliação exerce sobre a formação de S.

Todo subconjunto aberto de números reais é escrito sob uma única formação de intervalos abertos

Constatado que subconjuntos abertos de números reais são formados por intervalos abertos, há uma particularidade importante a ser observada. Os intervalos abertos determinados na formação de um subconjunto aberto evidentemente podem conter outros, mas, em caráter de precisão, são considerados os *intervalos abertos maximais*, isto é, aqueles que não serão contidos em outros intervalos abertos nesta formação.

Assim, admita serem constatadas duas formações diferentes para um mesmo subconjunto aberto S, descritas por $\cup\ I_n$ e $\cup\ F_u$, onde os intervalos são descritos, respectivamente, como $I_n = (a_n;\ b_n)$ e $F_u = (e_u;\ p_u)$. Se as duas formações representam o mesmo conjunto aberto S, isto significa que algum desses intervalos aberto é sobreposto por, no mínimo, outro intervalo aberto.

Nesta linha, isto significa que, por exemplo, o intervalo F_k é sobreposto por algum I_x. Mas aí, ou I_x e F_k são o mesmo intervalo aberto ou, com referência aos intervalos abertos F_u, tanto e_k quanto p_k fazem parte de intervalos abertos da reunião $\cup\ I_n$, se não de um mesmo intervalo.

Então, ao avaliar esta possibilidade, é necessário olhar a consequência de e_k fazer parte de algum I_x. Isto faz de e_k um número real presente em X; mas aí, o próprio e_k passa a fazer parte de um outro intervalo aberto presente em $\cup F_u$, digamos, F_w. Utilize a condição oferecida para decidir como se comportam os intervalos abertos F_k e F_w com relação a e_k.

Se for possível obter ao menos um número real comum a F_k e F_w, então é obtido, com ele, um problema sério, porque foi constatado que não existe número real comum a dois intervalos abertos de uma mesma formação. Através desta informação, avalie como este problema se reporta às possibilidades iniciais tomadas, e decida sobre como se comportam as formações $\cup I_n$ e $\cup F_u$.

Uma relação propícia entre subconjuntos abertos e fechados

Discutida a forma de apresentação de um subconjunto aberto qualquer, uma possível maneira para obter um conjunto fechado é avaliar o complementar de tal subconjunto aberto perante $\mathbb{R}$, posto que o caso particular de um intervalo aberto permite tal avaliação.

Se, em vez de ser considerado um intervalo aberto, é considerado um subconjunto aberto S, o próprio fato de S ser aberto faz de todo número real nele presente ponto interior a ele. Isto significa que devem ser avaliados os números reais não presentes em S.

Dado um número real não presente em S, há uma consequência imediata de tal número real não ser ponto interior a S, já que S é constituído de todos os pontos interiores a si: nenhum intervalo aberto que contenha tal número real estará contido em S. Esta condição permite uma avaliação com $\mathbb{R} - S$.

Observando $\mathbb{R} - S$, decida a situação que efetivamente ocorre para um intervalo aberto que contenha um número real não presente em S e avalie se a situação é confirmada para qualquer número real não presente em S. Desta avaliação, decida se $\mathbb{R} - S$ é fechado, ou não.

Finalização

As atividades desenvolvidas levam à constatação de uma estrutura interna particular ao conjunto de números reais a partir de uma forma específica de subconjunto. O estudo de subconjuntos abertos e fechados traz, com isso, propriedades relevantes para o estudo de números reais sob a perspectiva do subconjunto, a exemplo da constatação da necessidade de um supremo para todo subconjunto que admita limitante superior.

Avaliação

A avaliação é feita ao longo da realização das atividades em virtude de as mesmas tomarem forma escrita ao longo de sua aplicação, onde o professor pode sugerir que os estudantes troquem escritas entre si para discutirem sobre suas compreensões individuais das atividades.

Além das especifidades das atividades, a avaliação também pode ser conduzida por uma série de questões voltadas a conhecer a compreensão dos estudantes sobre os seguintes tópicos: a concepção de ponto interior a um subconjunto; a concepção de ponto aderente a um subconjunto; conjuntos abertos; conjuntos fechados; formação e descrição de conjuntos abertos; formação de conjuntos fechados.

É interessante que o material escrito seja recolhido para uma avaliação mais profunda. A avaliação deve levar em consideração, em primeiro lugar, a coesão e a clareza, devendo seus resultados serem separados. Em segundo lugar, deve ser avaliado o cuidado no uso das propriedades citadas pelos participantes, destacando possíveis equívocos que levem à compreensão expressada por eles ao longo da realização das atividades.

4.2.6 A influência marcante das considerações sobre os números reais

A presente sequência didática abordará tópicos da topologia do conjunto de números reais, isto é, a estrutura admitida por seus subconjuntos em relação aos números reais neles presentes. O Quadro 15 traz as informações elementares à sequência.

Aporte teórico

Estendendo as concepções a respeito de subconjuntos fechados

Tendo em vista que a formação de subconjuntos fechados envolve a consideração dos pontos aderentes a eles em sua totalidade, é importante observar algumas situações particulares onde a condição é determinante para a avaliação de um subconjunto.

Com efeito, ao retomar a condição determinante de um ponto aderente a um subconjunto, um número real p é ponto aderente ao subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ se qualquer

Quadro 15 – Informações sobre a sequência didática da seção 4.2.6.

Assunto a ser abordado	A topologia do conjunto de números reais.
Objetivos da ação	Compreender as consequências das condições definidas sobre a relação entre números reais e subconjuntos de números reais que os contenham.
Conhecimentos prévios	Tratamento elementar de conjuntos: pertinência, inclusão, intersecção, reunião e diferença. Operações com desigualdades. Limitantes, ínfimo e supremo de um subconjunto. Operações com números reais. Ponto interior e ponto aderente a um subconjunto.
Conhecimentos desenvolvidos	Pontos cumulativos. Influência dos pontos cumulativos nos conjuntos fechados. Densidade.
Competências aprimoradas	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Material necessário	Quadro. Giz. Pincel. Canetas. Papéis.
Duração da atividade	1 hora e 30 minutos.
Referências	Ávila (2001), Lima (2017)

Fonte: elaboração do autor, 2020.

intervalo aberto $(a;\ b)$ contendo p dispõe de algum número real em comum com S, isto é, $(a;\ b) \cap S \neq \varnothing$.

Sobre a aderência ao subconjunto S, é determinada quando o próprio p é um número real que está presente tanto em S quanto em qualquer intervalo aberto $(a;\ b)$ que o contenha, ou quando p não está presente em S, mas há, para todo intervalo aberto $(a;\ b)$ que contenha p, algum número real presente tanto em S como no intervalo aberto considerado.

Uma situação particular é avaliar a condição de aderência dos extremos de um intervalo aberto $(z;\ w)$. Para todo intervalo aberto $(a;\ b)$ que contenha z, ocorre $z < b$, mas pode ocorrer também $b \geqslant w$. Se $b < w$, então um número real que permite validar a condição de ponto aderente a $(z;\ w)$ para z é $(b + z)/2$; se $b \geqslant w$, então $(z + w)/2$ permitirá validar a condição de ponto aderente a $(z;\ w)$ para z. Assim, z é um ponto aderente a $(z;\ w)$ sem fazer parte de $(z;\ w)$.

Esta observação determina uma condição particular de pontos aderentes a subconjuntos que se torna relevante. Assim, um número real p é um *ponto cumulativo a* S, ou ponto de acumulação de S, quando qualquer intervalo aberto $(a;\ b)$ que o contenha dispõe de algum número real diferente de p em comum com S, isto é, além de se ter $(a;\ b) \cap S \neq \varnothing$, existe algum número real $z \neq p$ tal que $z \in (a;\ b) \cap S$.

Observe que a condição determinante de um ponto cumulativo a um subconjunto é um caso particular de um ponto aderente a um subconjunto. Portanto, é possível perceber que todo ponto cumulativo a um subconjunto é ponto aderente ao subconjunto. Por outro lado, a relevância ocorre por outra razão: todo ponto aderente a um subconjunto que dele não faça parte necessariamente é um ponto cumulativo ao subconjunto.

Diante do fato que traz a relevância do estudo de pontos cumulativos a subconjuntos, e ao saber que um subconjunto fechado é constituído de pontos a ele aderentes, é interessante discutir a possibilidade de obter um subconjunto formado apenas por pontos a ele cumulativos.

Um subconjunto formado apenas por pontos a ele cumulativos

Já foram estudadas as possibilidades de um subconjunto ser formado apenas por pontos a ele interiores e um subconjunto ser formado apenas por pontos a ele aderentes. Mas o caso dos pontos cumulativos a um subconjunto é uma extensão a respeito de pontos aderentes que deve ser tratada com maior cuidado quanto a tal possibilidade.

É interessante provocar uma possibilidade de formação de um subconjunto e avaliar o que ocorre ao longo do processo de tal formação. Um subconjunto particular é conhecido como *o conjunto de Cantor*, e pode ser reproduzido através da consideração de intervalos fechados a partir de um dado intervalo fechado.

O processo é feito a partir da consideração do intervalo fechado $[g;\ f]$, com $g < f$. Observando tal intervalo sob a feição geométrica de um segmento de reta, é feita a tripartição dele, marcando sobre o segmento os pontos resultantes da tripartição. Retomando a feição de intervalo, isso significa marcar os números reais $g + (f - g)/3$ e $f - (f - g)/3$.

O processo é repetido considerando os intervalos fechados $[g;\ \ g + (f - g)/3]$ e $[f - (f - g)/3;\ f]$. Com isso, serão marcados os números reais

$$g + \frac{1}{3}\left(\left(g + \frac{f-g}{3}\right) - g\right) = g + \frac{1}{9}(f - g),$$

$$\left(g+\frac{f-g}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\left(g+\frac{f-g}{3}\right)-g\right)=g+\frac{2}{9}(f-g),$$
$$\left(f-\frac{f-g}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(f-\left(f-\frac{f-g}{3}\right)\right)=f-\frac{2}{9}(f-g),$$
$$f-\frac{1}{3}\left(f-\left(f-\frac{f-g}{3}\right)\right)=f-\frac{1}{9}(f-g).$$

E o processo continua considerando quatro outros intervalos fechados, a saber, $[g;\ g+(1/9)(f-g)]$, $[g+(2/9)(f-g);\ g+(1/3)(f-g)]$, $[f-(1/3)(f-g);\ f-(2/9)(f-g)]$ e $[f-(2/9)(f-g);\ f]$. Nesta etapa, serão marcados outros oito números e, para continuar o processo, basta observar a alternância na consideração dos intervalos fechados: com os dois primeiros números ao final da terceira marcação, depois os próximos dois, depois os próximos dois, até que se alcancem os dois últimos.

Cada número marcado ao longo deste processo fará parte do chamado conjunto de Cantor. Na realidade, esta é uma maneira de formar tal subconjunto. Por outro lado, o processo envolve uma tripartição que não precisa ser, em termos geométricos, com segmentos congruentes, de iguais medidas. Por outro lado, é menos difícil compreender o processo com segmentos congruentes.

Como todos os números marcados fazem parte do subconjunto em formação, eles são aderentes ao mesmo. Mas a maneira como o subconjunto é formado acende uma outra via para discussão, e esta será explorada.

Dado um dos intervalos fechados considerados, representado por $[a;\ b]$, o processo leva à marcação dos números reais $a+(b-a)/3$ e $b-(b-a)/3$. Observando apenas o primeiro destes números, passa-se ao intervalo fechado $[a;\ a+(b-a)/3]$, que, ao continuar o processo, marca, em particular, o número real $a+(b-a)/9$. Considerando o intervalo fechado $[a;\ a+(b-a)/9]$, é obtido o número real $a+(b-a)/27$, e assim por diante.

Observando tais números, é possível descrevê-los sob a feição de um subconjunto. Escrevendo $c_n = a+(b-a)/3^n$, é formado o subconjunto $L=\{c_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\}$. Pela evolução dos valores obtidos a cada número natural, o fato de se ter $1/3^n > 1/3^{n+1}$ mostra que $c_n > c_{n+1}$. Como sempre se tem $c_n > a$, isto significa que a é candidato a ínfimo para L.

É importante observar que 0 é ínfimo do subconjunto $P=\{1/3^n\ ;\ n\in\mathbb{N}\}$. Isto significa que, dado qualquer número real positivo x, é possível obter o número real $1/3^w$

presente em P de forma que $0 < 1/3^w < x$, para certo número natural w.

Esta observação conduz a concluir que $0 < (b-a)/3^w < (b-a)x$, de onde é possível escrever $a < a + (b-a)/3^w < a + (b-a)x$. Mas $a + (b-a)/3^w = c_w$, ou seja, $a < c_w < a + (b-a)x$. Esta condição é suficiente para afirmar que a é ínfimo de L. Caso se deseje um rigor maior, basta considerar um número real positivo r tal que $x/(b-a) < r$ e reavaliar o processo para obter $a < c_w < a + r$.

Perceba que este fato garante que, em qualquer intervalo aberto contendo a, é possível obter um dentre os números reais marcados ao longo das etapas subsequentes. Como todos são diferentes de a, isto significa que a é ponto cumulativo ao subconjunto em formação. Além disso, este fato ocorre para qualquer dentre os intervalos fechados considerados ao longo do processo, mostrando que *todos* os extremos inferiores considerados são pontos aderentes ao conjunto de Cantor.

Mas esta conversa continua. A partir do intervalo fechado $[a; b]$, pode ser considerado o intervalo fechado $[b-(b-a)/3; b]$, que determina a marcação, em particular, de $b - (b - a)/9$. Considerado o intervalo fechado $[b-(b-a)/9; b]$, é marcado, em particular, $b-(b-a)/27$, e assim por diante.

Também é possível descrever tais números escrevendo $q_n = b-(b-a)/3^n$ e formando o subconjunto $R = \{q_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Novamente usando o fato de se ter $1/3^n > 1/3^{n+1}$, é possível concluir que $q_n < q_{n+1}$. Como todos os números presentes em R são menores do que b, isto faz de b um candidato a supremo para R.

Ora, de maneira similar à consideração de a, novamente é importante fazer uso do fato de 0 ser ínfimo do conjunto já descrito como P e, portanto, dado um número real positivo x, é possível obter algum número real em P onde $0 < 1/3^w < x$. Multiplicando por $-(b-a)$, isto significa $-(b-a)x < -(b-a)/3^w < 0$. Somando b, finalmente, passa-se a $b-(b-a)x < b-(b-a)/3^w < b$. Como $b-(b-a)/3^w = q_w$, então $b-(b-a)x < c_w < b$, mostrando que b é supremo de R.

Em conjunto à constatação anterior, todos os números marcados ao longo do processo, por serem ou extremos inferiores ou extremos superiores de intervalos fechados a serem considerados, são pontos cumulativos ao conjunto de Cantor.

É importante observar que, ao longo do processo, qualquer dos intervalos fechados considerados na construção será tripartido. Isto significa que nenhum intervalo fechado com extremos diferentes faz parte do conjunto de Cantor e, por consequência, nenhum intervalo aberto faz parte do conjunto de Cantor, mostrando que não há ponto interior algum ao subconjunto.

Estas constatações permitem, finalmente, afirmar que é possível formar um subconjunto constituído apenas de pontos a ele cumulativos. Como já mencionado, todo ponto cumulativo a um subconjunto necessariamente é um ponto aderente ao subconjunto, o que faz do conjunto de Cantor um subconjunto fechado de números reais.

Há números racionais e irracionais em qualquer subconjunto de números reais?

A discussão sobre um subconjunto formado apenas por pontos a ele cumulativos acende uma luz sobre como os números racionais e os números irracionais podem coexistir harmoniosamente no conjunto de números reais.

É interessante observar uma relação ligeiramente diferente em termos de subconjuntos. Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$, até então a preocupação era voltada a detectar e observar números reais que se comportassem como pontos aderentes a S. Considere, todavia, $X \subset S$. Também é possível avaliar que números reais seriam pontos aderentes a X, o que, aparentemente, não faria tamanha diferença. Mas, dentre eles, é interessante discutir o caso em que tais números estão presentes em S, caracterizando uma relação entre X e S bastante particular.

Em termos do contraste entre números racionais e números reais, observando o fato de se ter $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, considere dois números reais p e q, com $p < q$. Então, é interessante analisar como obter um número racional maior do que p e menor do que q considerando ora p racional ora p irracional, e ora q racional ora q irracional.

Como já considerado no aporte teórico descrito no aporte teórico da sequência didática descrita na seção 4.2.3, todo subconjunto não vazio de números reais que admita limitante superior deve admitir supremo. Portanto, todo número real é, em particular, supremo do subconjunto de todos os números reais menores do que ele e ínfimo do subconjunto de todos os números reais maiores do que ele. A partir desta observação, um número irracional pode ser visto tanto como supremo do subconjunto de números racionais menores do que ele quanto ínfimo do subconjunto de números racionais maiores do que ele.

Se p e q já são racionais, um número racional particular é $(p + q)/2$, e, portanto, $p < (p + q)/2 < q$.

Se p é irracional e q é racional, então p é ínfimo de um subconjunto de números racionais maiores do que p. Logo, considerando um número real positivo r onde $r < q - p$, existe um número racional z de forma que $p < z < p + r < q$.

De maneira similar, se for p um número racional e q um número irracional, então q será supremo de um subconjunto de números racionais menores do que q. Assim, considerando um número real positivo r onde $r < q - p$, existe um número racional z de forma que $p < q - r < z < q$.

Por fim, se p e q são irracionais, então p, por ser ínfimo de um subconjunto de números racionais, e q, por ser supremo de outro subconjunto de números racionais, admitem, considerado um número real positivo r onde $r < q - p$, que existam números racionais z e x onde $p < z < p + r < q$ e $p < q - r < x < q$, logo, qualquer deles é útil.

Isto significa que sempre é possível obter um número racional em um intervalo aberto determinado por dois números reais. Desta maneira, se for considerado, em particular, um número real u, então, para cada intervalo aberto contendo u, é possível obter um número racional diferente de u, inclusive. Assim, todo número real é ponto aderente, ou, de maneira mais específica, ponto cumulativo ao conjunto de números racionais.

Esta constatação traz uma noção importante para o estudo e que deve ser tratada com cautela ao ser ampliada, por isso a constatação inicial sobre a possibilidade de obter um ponto aderente em vez de imediatamente obter um ponto cumulativo ao conjunto de números racionais.

Ora, esta discussão também levanta uma questão sobre números irracionais, isto é, se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também seria denso em $\mathbb{R}$. Considerando dois números reais $p < q$, é necessário reavaliar como obter números irracionais a cada caso definido para p e q.

É importante, nesta reavaliação, observar que tanto a adição e a multiplicação envolvendo um número racional e um número irracional, apenas, acaba por produzirem números irracionais em diferentes condições. Com efeito, se i é um número irracional e r, um número racional, então $i + r$ é irracional, pois, se não fosse, obrigaria i a ser racional. Agora, se $r \neq 0$, então $i \cdot r$ também é irracional. Se não fosse, obrigaria i a ser racional. Esta propriedade será determinante para a reavaliação.

É sabido que existem números irracionais positivos menores do que 1. O número $\sqrt{1/2}$ é um exemplo desta possibilidade. Então, é permitido considerar um número irracional i com $0 < i < 1$. Dados dois números racionais p e q, com $p < q$, então

$q - p > i(q-p)$. Como $i(q-p) > 0$, isto significa que $p + i(q-p) > p$. Como $q - p > i(q-p)$, isto significa que $p + (q-p) > p + i(q-p)$, ou seja, $q > p + i(q-p)$. Assim, é obtido o número irracional $p + i(q-p)$ no intervalo aberto $(p;\ q)$.

A situação é mais simples nos casos em que p é racional e q é irracional e em que p é irracional e q é racional. Em ambos os casos, o número real $(p+q)/2$ é irracional. Como $p < (p+q)/2 < q$, é obtido um número irracional no intervalo aberto $(p;\ q)$.

Por fim, quando p e q são irracionais, já foi mostrado que é possível obter um número racional z no intervalo aberto $(p;\ q)$. Logo, tanto $(p+z)/2$ quanto $(z+q)/2$ são irracionais, mostrando dois números irracionais no intervalo aberto $(p;\ q)$.

Ora, isto significa que todo intervalo aberto de números reais também dispõe de números irracionais. Logo, considerado um número real u, isto significa que, para cada intervalo aberto contendo u, já havia um número racional e foi constatado que há nele um número irracional também. Isto faz de u um ponto aderente a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, mostrando que também números irracionais são densos em subconjuntos de números reais, ou melhor, que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também é denso em $\mathbb{R}$.

Mostrar a densidade dos números racionais e dos números irracionais no conjunto de números reais permite perceber que o conjunto de números reais consolida uma coexistência harmoniosa entre números racionais e números irracionais, posto que sempre é possível obter números racionais e números irracionais uma vez fixados dois números reais diferentes quaisquer.

Introdução

Uma das questões menos compreendidas no escopo dos números reais é a possibilidade de serem obtidos números racionais e irracionais em qualquer subconjunto aberto de números reais, o que caracteriza a frequente fala de "estarem espalhados números racionais e irracionais no conjunto de números reais".

A noção preliminar de ponto aderente a um subconjunto permite discutir um caso particular necessário para compreender que, ao mesmo tempo em que se considera um número racional, é possível a um ligeiro acréscimo ou a uma ligeira redução não mais ter um número racional como resultado.

Diagnóstico inicial

O presente estudo é continuação do assunto desenvolvido na sequência didática descrita na seção 4.2.5, razão pela qual não é previsto um diagnóstico inicial para a matéria.

Fomentando a discussão

O estudo de pontos aderentes a um subconjunto deve ser recordado com a ressalva de considerar um intervalo aberto como ponto de partida. Com efeito, os extremos do intervalo podem ser estudados para perceber um comportamento particular que determina dois pontos aderentes a ele que não estão presentes nele.

Atividade: constatando um ponto cumulativo a um subconjunto

Considere dois números reais diferentes, como, por exemplo, $1/4$ e 2. O menor deles será nomeado p e o maior, q. Forme o intervalo aberto $(p;\ q)$. Observando a partir de p, considere um número real x presente no intervalo aberto $(p;\ q)$ e calcule $x_1 = (p + x)/2$. Calcule $x_2 = (p + x_1)/2$, $x_3 = (p + x_2)/2$ e $x_4 = (p + x_3)/2$. Escrevendo tais números com respeito a p e x, é possível perceber uma maneira para escrever uma regra que respeita a continuação deste processo, determinando, portanto, um número x_n.

Perceba que, a cada número natural n, a diferença $x_n - p$ é cada vez mais reduzida e pode ser escrita como um múltiplo de $1/2^n$, como, aliás, já deve ter sido detectado para a escrita de x_n. Observe o fato de o subconjunto $P = \{1/2^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ ter 0 como ínfimo, o que permite considerar, para um número real positivo r, a ocorrência de certo número presente em P para o qual $0 < 1/2^w < r$, onde w é algum número natural.

Com esta informação, compare a escrita da regra de x_n com $1/2^w$ e decida que número deve ser multiplicado para que, em vez de $1/2^w$, seja obtido $x_w - p$ na desigualdade. Sendo F tal número, isto significa que $0 < F/2^w < Fr$ pode ser traduzido como $0 < x_w - p < Fr$. Daí, decida se p atua como ínfimo para o subconjunto $L = \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

A partir da decisão tomada, perceba que o impacto dela na formação de intervalos abertos contendo p pode trazer uma propriedade peculiar. Decida, portanto, se p é um ponto aderente ao intervalo aberto $(p;\ q)$.

Se decidido que p é ponto aderente ao intervalo aberto $(p;\ \ q)$, a condição que o determina traz consigo o fato de nenhum dos números detectados para cada intervalo aberto contendo p poder ser igual a p, o que conduz à definição de ponto cumulativo a um subconjunto.

Atividade: construindo um dentre vários subconjuntos de Cantor

Considere o intervalo fechado [0; 1]. Observe que $(1-0)/3 = 1/3$. Considere, portanto, os números $0 + 1/3 = 1/3$ e $1 - 1/3 = 2/3$. Para o segundo passo, considere os intervalos fechados [0; 1/3] e [2/3; 1]. Observe que $1/3 - 0 = 1/3$ e $1 - 2/3 = 1/3$. Logo, $(1/3 - 0)/3 = (1 - 2/3)/3 = 1/9$. Assim, devem ser considerados os números $0 + 1/9$, $1/3 - 1/9$, $2/3 + 1/9$ e $1 - 1/9$. Até o momento, foram considerados 0, 1/9, 2/9, 1/3, 2/3, 7/9, 8/9 e 1.

Para o terceiro passo, forme os intervalos fechados [0; 1/9], [2/9; 1/3], [2/3; 7/9], e [8/9; 1]. Calcule, para cada intervalo fechado $[a;\ b]$ aí considerado o valor $(b - a)/3$. Determinados todos eles, se forem todos iguais a um mesmo número r, calcule $0 + r$, $1/9 - r$, $2/9 + r$, $1/3 - r$, $2/3 + r$, $7/9 - r$, $8/9 + r$ e $1 - r$.

Avalie como seria proceder ao quarto e ao quinto passo e quais números deveriam ser calculados neste processo. Até então, perceba que, considerando 0 e 1, os números obtidos são potências de 1/3 que diminuem cada vez mais, levando, para cada potência $1/3^p$, aos números $0 + 1/3^p$ e $1 - 1/3^p$. Descreva como este comportamento se repetiria para cada subconjunto fechado considerado ao longo da construção.

É possível formar um subconjunto a partir dos números 0, 1 e os determinados ao longo desta construção. Tal conjunto será nomeado K e é conhecido como um conjunto de Cantor.

Atividade: constatando um subconjunto formado apenas por pontos cumulativos a si próprio

Considere qualquer um dentre os intervalos fechados já determinados ao longo da construção de K. Para fins de referência, o intervalo fechado escolhido será descrito por $[a;\ b]$. Calcule $r_1 = (b - a)/3$ e os números $c_1 = a + r_1$ e $g_1 = b - r_1$. Com os intervalos fechados $[a;\ c_1]$ e $[g_1;\ b]$, calcule $r_2 = (c_1 - a)/3$ e $s_2 = (b - g_1)/3$. Com eles, calcule

$c_2 = a + r_2$ e $g_2 = b - s_2$. Repita o processo para os intervalos $[a;\ c_2]$ e $[g_2; b]$, determinando, como feito até o momento, os números c_3 e g_3. Repita o processo até obter c_5 e g_5.

Com a evolução do processo, é possível formar leis de formação para determinar quais números c_n e g_n seriam obtidos com a continuação do processo e formando os intervalos $[a;\ c_n]$ e $[g_n;\ b]$. Considerado um número natural n, avalie como são as relações entre c_n e c_{n+1} e entre g_n e g_{n+1}. Decida, com esta avaliação e com relação a a e b, se o subconjunto $L = \{c_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ pode admitir a como ínfimo e se o subconjunto $R = \{g_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ pode admitir b como supremo.

Se as relações determinadas sobre a, c_n, g_n e b permitirem que a seja candidato a ínfimo de L e b seja candidato a supremo de R, um recurso a ser utilizado e claramente necessário é o fato de, ao considerar o subconjunto $P = \{1/3^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ admitir 0 como ínfimo. Procure, através desta condição, maneiras para decidir se, por multiplicação de um valor que corresponda à obtenção de c_n e g_n, e a consequente adição de a ou b, será possível determinar se, de fato, a é ínfimo de L e b é supremo de R.

Se foi constatado que a é ínfimo de L e b é supremo de R, então decida se a e b são pontos cumulativos a K. Além disso, reavalie as condições levando em consideração um intervalo fechado qualquer $[p;\ q]$ além do que foi considerado para a atividade.

Constatando que há infinitos números racionais e irracionais em intervalos abertos arbitrários

Observado como é o comportamento de um ponto cumulativo a um subconjunto, é interessante trazer uma realidade particular ao conjunto de números reais. Com efeito, o interesse é discutir que propriedade adicional relacionada ao conceito de ponto cumulativo a um subconjunto é satisfeita tanto por números racionais quanto por números irracionais.

Neste sentido, a intenção é decidir se números reais podem ser pontos aderentes tanto ao conjunto de números racionais quanto ao seu complementar perante o conjunto de números reais, isto é, se dado $z \in \mathbb{R}$, z é aderente tanto a $\mathbb{Q}$ quanto a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Para tanto, conforme descrito no aporte teórico da sequência didática, é necessário considerar dois números reais diferentes entre si, denominados p e q, com $p < q$, e avaliar a presença de um número racional e de um número irracional no intervalo aberto $(p;\ q)$, de maneira que p e q oscilam entre serem números racionais, um deles ser racional e o outro ser irracional e, por fim, ambos irracionais.

Para a determinação de números racionais, é interessante relacionar a condição que determina um número irracional, a saber, que é ou supremo ou ínfimo de algum subconjunto de números racionais. Valha-se desta condição para quando ou p ou q ou ambos são irracionais para obter um número racional no intervalo aberto $(p;\ q)$.

No caso da obtenção de um número irracional no intervalo aberto $(p;\ q)$, a estratégia leva em consideração uma propriedade particular aos números reais diferentes de zero: a soma de um número racional e um número irracional resulta em um número irracional; o produto de um número racional e um número irracional também resulta em um número irracional. Para a soma, o número racional também pode ser zero.

Um recurso importante e que pode ser útil é o cálculo da média aritmética de dois números reais. Combinado aos recursos anteriores, permite determinar ora números racionais ora números irracionais no intervalo aberto $(p;\ q)$. A partir daí, decida, dado um número real z qualquer, se todo intervalo aberto contendo z irá dispor de um número racional e de um número irracional.

Enfim, após a tomada de decisão, perceba que o processo de constatação não foi considerar o subconjunto em relação ao conjunto original, mas a consideração contrária. A partir desta constatação, é interessante mostrar o conceito de densidade.

Finalização

As atividades desenvolvidas levam à constatação de uma estrutura interna particular ao conjunto de números reais, a tal ponto que números racionais e irracionais coexistem no conjunto de maneira harmoniosa, em que sempre estarão presentes em intervalos abertos.

Avaliação

A avaliação é feita ao longo da realização das atividades em virtude de as mesmas tomarem forma escrita ao longo de sua aplicação, onde o professor pode sugerir que os estudantes troquem escritas entre si para discutirem sobre suas compreensões individuais das atividades.

Além das especifidades das atividades, a avaliação também pode ser conduzida por uma série de questões voltadas a conhecer a compreensão dos estudantes sobre os seguintes tópicos: a concepção de ponto cumulativo a um subconjunto; contraste entre pontos aderentes e pontos cumulativos a um subconjunto; a possibilidade de formar conjuntos fechados a partir de pontos cumulativos a um subconjunto; a concepção de densidade de um conjunto em outro; as densidades de números racionais e irracionais em números reais.

É interessante que o material escrito seja recolhido para uma avaliação mais profunda. A avaliação deve levar em consideração, em primeiro lugar, a coesão e a clareza, devendo seus resultados serem separados. Em segundo lugar, deve ser avaliado o cuidado no uso das propriedades citadas pelos participantes, destacando possíveis equívocos que levem à compreensão expressada por eles ao longo da realização das atividades.

4.3 Considerações Parciais: Adequação e Viabilidade da Proposta

As sequências didáticas propostas trazem como perspectiva a possibilidade de serem utilizadas como parte de um planejamento inicial para a atuação nas disciplinas de Análise Real. A formulação proposta visa permitir ao professor adequações necessárias para o estudo das interações que ocorrerem ao longo da aplicação durante a disciplina.

O realce dado à abordagem das relações envolvendo os subconjuntos sob estudo com maior profundidade procura desenvolver relações entre o estudo de conjuntos e propriedades específicas dos conjuntos de números racionais e números reais, observar como as influências do estudo das propriedades desses conjuntos se voltam a conceitos estudados no Ensino Básico, e trazer um ponto de partida para a abordagem de curiosidades acerca dos conjuntos numéricos no Ensino Básico.

A aplicação desta proposta requer uma habilidade particular com a adequação conceitual. Para tanto, as demonstrações não devem ser encaradas como o passo metodológico mais necessário, corrente na abordagem das disciplinas de Análise Real; é necessário que as demonstrações sejam reflexo do desenvolvimento de noções simples, o que pode ser alcançado admitindo como demonstração o encadeamento de ideias de uma maneira explicativa em vez de uma maneira sintética.

Uma das finalidades da aplicação desta proposta é proporcionar aos estudantes a compreensão dos conceitos mais simples e importantes para a atuação no Ensino Básico, e dar um caráter de curiosidade ao aprofundamento dado a esses tópicos ao longo das sequências. Desta maneira, a proposta visa trazer os estudantes ao contato com propriedades importantes sobre relações entre números racionais e números reais, a partir de tópicos que podem ser encarados como curiosidades despertadas no estudo de conjuntos e funções no Ensino Básico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem de temas em uma disciplina de Análise Real em um curso de Licenciatura em Matemática é, ainda, um processo muito árduo e demanda reflexão sobre três aspectos: a amplitude temática desejada à disciplina, a densidade conceitual a ser explorada na disciplina, e a postura do professor ao planejar e executar uma abordagem para a disciplina.

Quanto à amplitude temática desejada à disciplina, ainda deve ser considerada importante uma abordagem sobre conjuntos e funções voltada à demanda dos tópicos de Análise Real a serem explorados ao longo da disciplina. Todavia, os temas devem guardar, em sua essência, uma relação direta e propícia com tópicos correlatos já estudados no Ensino Básico, e, particularmente, voltados para o exercício da adequação conceitual ao público que receberá os profissionais em formação.

O levantamento dos tópicos presentes nos Projetos Pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática ofertados por Instituições Federais de Ensino Superior mostra uma tentativa de aproximar as disciplinas de Análise Real com a finalidade profissional, mas ainda não se mostra suficiente quando são recolhidos os objetivos nelas elencados.

Neste sentido, a categorização dos objetivos elencados para as disciplinas, ao assemelhá-los pelas redações e pelos significados advindos destas redações, traz uma preocupação que justifica a crítica de a disciplina ser um fim em si mesma, bem como a crítica à opinião de que a Análise Real é o ápice de um processo de construção matemática, pois os objetivos ainda se mostram voltados à fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral e ao domínio de técnicas e habilidades com demonstrações.

Quanto à densidade conceitual a ser explorada na disciplina, a menção feita aos objetivos das referidas disciplinas evidencia a busca pela validação de todas as propriedades possíveis e imagináveis para cada conceito estudado ao longo das disciplinas. Mas, novamente, isto favorece a crítica dada à disciplina como um fim em si mesma, por privilegiar uma série de relações estreitas entre seus próprios tópicos, não os expandindo a um alcance mais amplo.

Um outro aspecto da densidade conceitual diz respeito a como a ordenação de informações deve ser proposta, ao longo de uma sequência de assuntos dependentes entre si. Apesar de os tópicos da Análise Real serem centrados no estudo de números reais e propriedades que eles satisfazem em subconjuntos e funções, a sequência de assuntos depende do realce a ser dado ao longo dos estudos, razão pela qual a proposta em sequências didáticas apresentada leva em consideração o realce dado ao estudo de conjuntos e subconjuntos em vez de um realce dado às concepções algébricas das quais derivam o Cálculo Diferencial e Integral.

Quanto à postura do professor ao planejar e executar uma abordagem para a disciplina, o máximo que se pode discutir no contexto do presente trabalho é sobre a crítica feita ao "uso excessivo do rigor e do formalismo". Com efeito, a discussão feita a respeito do surgimento do rigor mostra o quanto o mesmo é confundido com o formalismo, onde a busca pela precisão conceitual diria respeito a uma apresentação única e fundamental dos conceitos e propriedades em Matemática e, em particular, na Análise Real.

Por outro lado, o movimento caracterizador do rigor pregava a precisão nos conceitos, de maneira que não permitissem múltiplas interpretações quando fossem aplicados a situações reais. Além disso, o mesmo movimento requeria um cuidado com o uso de conceitos para a derivação de propriedades exatamente pelas dificuldades causadas com conceitos considerados dúbios. Ao apelar para o recurso à Álgebra em vez do recurso à Geometria, o movimento estabeleceu uma forma de discussão dos conceitos, de maneira que, mesmo que um conceito se remetesse a alguma interpretação geométrica, esta deveria ser trazida em termos não dúbios e, se possível, ser traduzida em uma abordagem algébrica.

O formalismo, por sua vez, não leva à discussão sobre os recursos para a abordagem de conceitos e propriedades, mas para uma maneira de apresentar resultados obtidos a partir de conceitos e propriedades. A principal crítica ao formalismo diz respeito ao seu processo de síntese de etapas e argumentos, processo esse que nem sempre leva em consideração a maneira como os argumentos são construídos para a obtenção de uma informação e, além disso, cria entrelinhas que acabam por afastar qualquer curiosidade em como reconstruir aquela conclusão.

Neste sentido, o aspecto formal deve ser transformado para uma apresentação que evidencie entrelinhas onde a curiosidade se perde e dá espaço a uma intensa preocupação, que culmina na frustração com o assunto e, por fim, em críticas referentes não apenas ao apelo formal, mas em como o mesmo é enrijecido durante a realização da disciplina por diversos professores.

Levando em consideração esta reflexão, os três aspectos mencionados conduzem à necessidade de propor uma maneira de abordar as disciplinas de Análise Real sob um outro realce. Neste sentido, a proposta apresentada no presente trabalho em forma de um conjunto de sequências didáticas, ao discutir alguns tópicos sob o ponto de vista da formação de conjuntos, privilegia um realce diferente à própria sequência de tópicos prevista nas disciplinas, e procura mostrar uma conexão entre os conceitos estudados nas disciplinas e a abordagem de conjuntos e funções no Ensino Básico, com maior ênfase aos conjuntos.

A referida proposta tem a finalidade de motivar uma discussão sobre que rumos devem ser dados à concepção das disciplinas de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática. Com isso, também devem ser colocados em discussão a finalidade da abordagem dos tópicos escolhidos para a disciplina em cada curso e a proposta de relação de tópicos a serem estudados ao longo da disciplina. Mesmo que o alcance desta proposta seja limitado, a mesma ainda oferece a possibilidade de ser tratada como uma relação de curiosidades, algo normalmente explorado em atividades práticas dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Diversas críticas à abordagem dos tópicos e à realização das disciplinas de Análise Real, em virtude de a considerarem um fim em si mesma de acordo com a postura dos professores e o consequente desinteresse por parte dos estudantes, sugerem que a Análise Real deva ser descartada dos cursos de Licenciatura em Matemática. As críticas, porém, deveriam sugerir que os cursos se ocupassem de propor aos professores uma metodologia e uma concepção diferentes para a Análise Real.

Com efeito, o estudo das propriedades referentes à concepção dos números reais e à relação entre eles e os números racionais é o cerne dos estudos em Análise Real, e, em particular, para um curso de Licenciatura em Matemática. Outrossim, não apenas o assunto é relevante para o estudante quanto é necessário aos professores discutirem nessa disciplina sobre a adequação conceitual a ser realizada no Ensino Básico pelo profissional em formação.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Lílian I. F. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise**: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora–MG, 2011.

ÁVILA, Geraldo S. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo–SP: Edgard Blücher, 2001.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo–SP: Edições 70, 2011.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo–SP: Cultura Acadêmica, 2014.

BOLOGNEZI, Rosemeire A. L. **A disciplina de Análise Matemática na formação de professores de Matemática para o Ensino Médio**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) — Escola de Humanidades, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba–PR, 2006.

BORSSOI, Adriana H.; ALMEIDA, Lourdes M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Antiquitates Mathematicae**, v. 6, n. 2, p. 91 – 121, 2004.

BOTTAZZINI, Umberto. **The Higher Calculus**: a history of complex analysis from Euler to Weierstrass. New York, Estados Unidos da América: Springer-Verlag, 1986.

BURTON, David M. **The History of Mathematics**: an introduction. 7. ed. New York, Estados Unidos da América: Mc-Graw Hill, 2010.

CALKIN, Neil; WILF, Herbert S. Recounting the Rationals. **The American Mathematical Monthly**, v. 107, n. 4, p. 360 – 363, 2000.

CAVALARI, Mariana F. Um Histórico do curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP). **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 12, n. 25, p. 15 – 30, 2012.

CRUZ, Willian J. da. **"Os números reais"**: um convite ao professor de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora–MG, 2011.

FERNANDES JÚNIOR, Valter C. **Repensando o ensino de Análise**: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora–MG, 2014.

GOMES, Danilo O. **A disciplina de análise segundo licenciados e professores de Matemática da Educação Básica**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro–SP, 2013.

GRABINER, Judith V. **The origins of Cauchy's rigorous calculus**. Massachussets, Estados Unidos da América: MIT Press, 1981.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor O. **The Development of Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann**. Massachussets, Estados Unidos da América: MIT Press, 1970.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor O. **Convolutions in French Mathematics, 1800–1840**: From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics. Basel, Suíça: Birhäuser Verlag, 1990.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics**: an introduction. 3. ed. Boston, Estados Unidos da América: Pearson, 2009.

KLEINER, Israel. Rigor and Proof in Mathematics: a historical perspective. **Mathematics Magazine**, v. 64, n. 5, p. 291 – 314, 1991.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro–RJ: IMPA, 2017. v. 1.

MARTINES, Paula T. **O papel da disciplina de Análise segundo professores e coordenadores**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro–SP, 2012.

NUNES, Roberto S.; NUNES, José M. V. Modelos Constitutivos de Sequências Didáticas: enfoque na Teoria das Situações Didáticas. **Exitus**, v. 9, n. 5, p. 148 – 174, 2019.

OLIVEIRA, Mireli M. de. **Conceitos de análise matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande–PB, 2017.

OTERO-GARCIA, Sílvio C. **Uma trajetória da disciplina de Análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro–SP, 2011.

OTERO-GARCIA, Sílvio C. Disciplinas de Análise na História de seu Ensino: uma trajetória no curso de licenciatura em matemática da USP de São Paulo. **História da Ciência e Ensino**, v. 11, p. 56 – 90, 2015.

PINTO, Diego M. **A cultura matemática mobilizada por licenciados no contexto de uma disciplina de Análise Real**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro–RJ, 2016.

REIS, Frederico S. **A tensão entre intuição e rigor no ensino de Análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas–SP, 2001.

SCHUBRING, Gert. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition**: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany. New York, Estados Unidos da América: Springer, 2005.

SILVA, Luciano D. da. **Conhecimentos presentes na disciplina de Análise nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro–SP, 2015.

SINKEVITCH, Galina I. On history of epsilontics. **Antiquitates Mathematicae**, v. 10, n. 1, p. 183 – 204, 2016.

TARSKI, Alfred. **Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences**. 4. ed. New York, Estados Unidos da América: Oxford University Press, 1994.

TEIXEIRA, Paulo J. M.; PASSOS, Cláudio C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, v. 21, n. 39, p. 155 – 168, 2013.

VIANNA, Rubem N. G. **Um estudo do Cours d'Analyse Algébrique de Cauchy em face das demandas do Ensino Superior**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro–RJ, 2009.

VIDAL, Eliane C. R. G. **Projetos didáticos em salas de alfabetização**: desafios da transposição didática. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo–SP, 2016.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre–RS: Artmed, 1998.