Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Célio Fernando Santos de Mattos

O conceito de função em livros didáticos

Rio de Janeiro
2019

Célio Fernando Santos de Mattos

O conceito de função em livros didáticos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Carvalho de Fernandes

Coorientadora: Prof. Dr. Gabriela dos Santos Barbosa

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

M444 Mattos, Célio Fernando Santos de.
O conceito de função em livros didáticos/ Célio Fernando Santos de Mattos. – 2019.
74 f. : il.

Orientador: João Bosco Pitombeira Carvalho de Fernandes
Coorientadora: Gabriela dos Santos Barbosa
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Funções (Matemática) – Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino - Teses. 3. Livros didáticos – Avaliação – Teses. I. Fernandes, João Bosco Pitombeira Carvalho de. II. Barbosa, Gabriela dos Santos. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.5

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 -Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Célio Fernando Santos de Mattos

O conceito de função em livros didáticos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Aprovada em 30 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Carvalho de Fernandes (Orientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Dra. Gabriela dos Santos Barbosa (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dra. Lúcia Maria Aversa Villela
Colégio Pedro II - CPII

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, meus familiares, meus amigos e a todas as pessoas que me ajudaram a cumprir esse objetivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa, Fernanda, por todo apoio, incentivo, amor e carinho que foram essenciais.

Aos meus pais, Roberto e Lúcia, por todos os ensinamentos, todo carinho e amor ao longo de uma vida inteira.

Aos meus filhos, Fernando e Isabella, pelo amor, carinho, apoio e compreensão.

Agradeço a minha sogra, Júlia, por todo incentivo e apoio durante a realização deste trabalho.

Aos meus orientadores, João Bosco de Carvalho Pitombeira e Gabriela dos Santos Barbosa, por toda atenção, paciência e ensinamentos.

Aos meus professores e à UERJ pelo apoio e contribuição dispensada para minha formação de Mestre.

A todos os amigos da turma PROFMAT 2016 da UERJ pela amizade, auxílio e companheirismo.

Aos meus familiares, amigos, colegas de trabalho, alunos e professores por todo apoio e carinho.

A Matemática, quando a compreendemos bem,

possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.

Bertrand Russel

RESUMO

MATTOS, Célio Fernando Santos. *O conceito de função em livros didáticos*. 2019. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Esta dissertação tem por objetivo investigar quais são as maiores dificuldades dos alunos em relação ao conceito de função. Através de estudos preliminares (epistemológico, histórico, análise de livro didático e dados coletados de professores e alunos) foi realizada uma análise dos pontos do tópico funções que os alunos apresentam uma deficiência maior para compreensão. Foram analisados oito livros aprovados no PNDL 2018 com o objetivo de averiguar como o conteúdo de funções é abordado, pois muitos professores se apoiam no livro didático. Aplicamos um questionário aos docentes para verificar como o conteúdo é aplicado nas salas de aula, quais materiais são utilizados, quais tipos de representações são ensinadas e quais mudanças de registros são aplicadas. Foi aplicado também uma sequência de exercícios, seguindo uma ordem didática, aos alunos com o propósito de buscar uma evolução qualitativa na maneira que eles concebem a noção de função. A análise subsequente mostrou que o objetivo foi alcançado com a maior parte dos alunos.

Palavras-chave: Análise de livros didáticos. Conceito de função. Evolução Histórica.

ABSTRACT

MATTOS, Célio Fernando Santos. *The concept of function in textbooks*. 2019. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

This dissertation aims to investigate what are the biggest difficulties of students in relation to the concept of function. Through preliminary studies (epistemological, historical, textbook analysis, and data collected from teachers and students), an analysis of the topic points functions that students have a greater disability for comprehension was performed. Eight books approved in PNDL 2018 were analyzed in order to ascertain how the content of functions is approached, as many teachers rely on the textbook. We applied a questionnaire to teachers to check how content is applied in classrooms, what materials are used, what types of representations are taught, what record changes are applied. It was also applied a sequence of exercises, following a didactic order, to the students with the purpose of seeking a qualitative evolution in the way they conceive the notion of function. Subsequent analysis showed that the goal was achieved with most students.

Keywords: Textbook analysis. Function concept. Historic evolution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ensinando em turmas de Ensino Médio o conceito de função encontramos com bastante frequência alunos que apresentam deficiências e dificuldades na aprendizagem desse conteúdo.

Esse problema que se inicia no Ensino Médio não termina por aí, pois os alunos, ao ingressarem no Ensino Superior, na área de exatas, acumulam muitas reprovações na disciplina denominada Cálculo Diferencial e Integral.

De maneira incrível percebemos que, muitas vezes, o motivo dessas reprovações é a falta de conhecimento de um conceito “básico” que é ensinado no Ensino Médio: o conceito de função. A entendimento deste conceito é pré-requisito para compreensão de Limites, Derivadas e Integral. É nesse momento que inicia a grande dificuldade dos alunos.

Essas deficiências residem na determinação do domínio e imagem, em sua representação gráfica, mudança de registros, como, por exemplo, expressão algébrica para gráfico, variação de grandezas, diferenciar a variável dependente da independente, entre outras.

Na discussão com outros professores, vimos que há um consenso em afirmar que os alunos realmente têm dificuldades em assimilar o conteúdo funções.

Com a motivação de melhorar essa situação, pretendemos neste trabalho colaborar com o avanço qualitativo na concepção dos alunos sobre o conceito de função, investigando, coletando dados, analisando esses dados e emitindo opiniões e conclusões.

A metodologia consiste em um estudo histórico e epistemológico, análise de livros didáticos e elaboração, aplicação e análise de questionários para professores e alunos.

Para investigar a origem e evolução do conceito, ou seja, estabelecer uma base para nossa pesquisa, criamos o Capítulo I denominado **Estudo Histórico E Epistemológico Do Conceito De Função**.

Em seguida, foi realizada a análise dos livros didáticos aprovados na PNDL 2018, com o objetivo de averiguar como os livros abordam o conceito de função como contexto histórico, definição, exemplos e exercícios utilizados. Para cumprir esse objetivo, foi elaborado o Capítulo II, cujo título é **Análise Do Conceito De Função Nos Livros Didáticos**.

Após, analisarmos os dados coletados através de um questionário aplicado aos professores (anexo I), cujas perguntas foram propostas com o objetivo de averiguar como o conteúdo de funções é ensinado nas salas de aula. Essa investigação será realizada no Capítulo III denominado **Análise Do Processo Ensino-Aprendizagem Do Conceito De Função Pela Concepção Dos Professores**.

Depois da análise do questionário dos docentes, foram elaboradas cinco listas de exercícios, observando uma determinada sequência didática, para averiguar, com a análise criteriosa dos dados coletados, a concepção dos alunos em relação ao conceito de função, destacando os pontos positivos e negativos. Dessa forma, foi criado o Capítulo IV para julgamento desses dados que se chama **Análise Do Processo Ensino-Aprendizagem Do Conceito De Função Pela Concepção Dos Alunos**.

Para finalizar, apresentamos o Capítulo V denominado **Conclusões** onde foi feita uma análise geral e foram propostas algumas sugestões que possivelmente possam melhorar o processo ensino-aprendizagem do ensino de funções.

1 ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO

Neste capítulo será apresentado, de forma resumida, um estudo histórico sobre o conceito de função, mostrando a trajetória da evolução desse conceito no decorrer dos séculos chegando até a definição que utilizamos atualmente. Além disso, buscaremos a compreensão dos obstáculos epistemológicos relacionados a este conceito.

1.1 Evolução histórica

A evolução do conceito de função pode ser dividida em três etapas principais: Antiguidade, Idade Média e Idade Moderna. Na Antiguidade, apesar da noção de função não ser mostrada de forma explícita, houve diversas manifestações implícitas do conceito. Algumas dessas manifestações ocorreram entre o Povo Babilônico, datadas de 2000 a.C. Neste período, na antiga Babilônia, foram criadas tabelas de raízes, de quadrados, de cubos, entre outras. Essas tabelas estabeleceram uma correspondência entre valores, fato que deixa implícito a “relação funcional”. Segundo Bell, não é muita generosidade creditar aos antigos babilônios o instinto da funcionalidade, porque uma função tem sido sucintamente associada a uma tabela ou correspondência.

Através do registro em Papiros, o povo do antigo Egito também divulgava tabelas que apresentavam determinadas correspondências. Segundo Boyer (1996), eles elaboraram um grande corpo de conhecimento de relações numéricas e espaciais.

Os gregos também desenvolveram um instinto funcional trabalhando com grandezas relacionadas a mudanças físicas. Um exemplo disso é o estudo do movimento do universo. Também podemos destacar a escola de Pitágoras, pois os pitagóricos trabalhavam com diversos problemas que envolviam uma relação funcional como, por exemplo, a descoberta da proporção exata que uma corda deve ser dividida para obter notas musicais.

De acordo com Boyer (1996), houve, no período Alexandrino, o desenvolvimento de uma trigonometria completa de cordas, utilizando teoremas de geometria e a criação de tabelas de cordas que atualmente equivalem a tabelas de seno.

Apesar de todos esses conhecimentos, que apontam para uma presença de relações funcionais, segundo Youschkevicth (1976), os povos da Antiguidade não tinham uma ideia geral sobre funcionalidade. Desse modo, não é possível afirmar que os matemáticos da Antiguidade foram os primeiros a trabalhar com o conceito de função.

O primeiro registro do conceito de função de forma mais genérica é no período que corresponde a Idade Média, pois, o que antes era apenas algo intuitivo, foi amadurecendo de forma gradativa.

Segundo Boyer (1996, p. 180), o matemático Frances Nicole Oresme (1323-1382), através do estudo da latitude e longitude das formas, utilizou os termos que são equivalentes, num sentido amplo, às abscissas e ordenadas utilizadas atualmente. Desse modo, é importante destacar que o matemático Nicole Oresme contribuiu de maneira expressiva para o desenvolvimento do conceito de função.

> Ocorreu-lhe em algum momento antes de 1361 um pensamento brilhante – por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou os pontos instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (BOYER, 1996, p. 180).

No período moderno, Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu de forma bastante significativa para a evolução do conceito de função, pois introduziu quantidades nas representações gráficas. Desse modo, o que estava apenas no campo qualitativo que foi apresentado por Orestes, avança para o quantitativo.

Segundo Boyer (1996, p. 208), François Viete (1540-1603) introduziu uma convenção que simplificou as representações, pois utilizou uma vogal para representar uma quantidade desconhecida e uma consoante para representar uma grandeza ou números conhecidos ou dados. Desta forma, apresentou, pela primeira vez, uma distinção entre variável e parâmetro.

Descartes (1596-1650) apresenta pela primeira vez, de forma bem explícita a relação entre x e y numa equação. A introdução de função em forma de equação revolucionou o desenvolvimento da Matemática em geral, pois essa relação foi estendida para outros ramos.

Segundo Youschkevitch (1976, p. 25), Descartes e Fermat, trabalhando de forma independente, abriram uma nova era na Matemática com a introdução do método analítico das funções.

Foi Leibniz (1646-1746) que utilizou pela primeira vez o termo “função” no manuscrito “Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus”. No entanto, o termo não foi utilizado para designar a relação entre a ordenada e a abscissa, mas apenas para designar a dependência de uma curva de quantidades geométricas com tangentes e normais.

Leibniz também foi o primeiro a utilizar os termos “variáveis”, “constantes”, “parâmetros” e “coordenadas”.

No entanto, é com Jean Bernoulli (1694-1698) que a função é expressa de maneira analítica: “Chamamos de função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e de constantes” (YOUSCHKEVITCH, p. 35).

Bernoulli propõe o uso da letra grega φ para caracterizar uma função de variável x, utilizava a notação φx (sem parênteses).

Um pouco mais tarde, no século XVIII, Euler dá uma importante contribuição para o desenvolvimento do conceito de função. Num primeiro momento, ele começa a definir noções iniciais, fazendo distinção entre constantes e variáveis. Logo em seguida, explica a diferença entre função contínua e descontínua.

De acordo com Ruthing (1984, p. 72), Euler apresenta as seguintes definições:

> Constantes são quantidades que apresentam sempre o mesmo valor e variável é uma quantidade indeterminada ou universal que compreende em si todos os valores determinados”. “Função é uma expressão analítica composta de qualquer forma usando uma quantidade variável e números ou quantidades constantes.

Apesar do matemático Euler não ter definido “expressão analítica”, segundo Boyer (1996), ele tinha ideia de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Euler também introduziu a notação f(x) para representar uma função de variável x.

Outro episódio importante para o amadurecimento do conceito de função foi a discussão sobre o problema das cordas vibrantes. Esse debate (envolvendo os matemáticos Euler, Bernoulli, D'Alembert e Lagrange) provocou um novo entendimento sobre o conceito de função. De acordo com Florisval (2017, p. 25), a discussão ocorreu da seguinte forma:

> D'Alembert entendia esse caso em um contexto algébrico matemático e, para tentar solucioná-lo, restringiu às condições iniciais da corda, obtendo o que seria uma função contínua na concepção de Euler. Por outro lado, Bernoulli entendia tal situação sobre o enfoque físico, propondo que as formas iniciais, bem como as posteriores, poderiam ser representadas por formas infinitas. Euler, por seu turno, enxergava o problema do ponto de vista geométrico, o que o forçou, em 1755, a propor a nova definição para o conceito de função, concebida de forma mais geral e abstrata.

A definição proposta por Euler também foi bastante relevante para a evolução do conceito de função, servindo como base para os matemáticos posteriores. Essa definição, apresentada por Ruthing (1984, p. 73), tem o seguinte enunciado:

> Se algumas quantidades dependem de outras, de forma que quando estas são alteradas as outras também são alteradas, então as quantidades anteriores são chamadas de funções das últimas quantidades. Esta é uma noção bastante abrangente e compreende em si todos os modos pelos quais uma quantidade pode ser determinada por outra. Desse modo, se "x" denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de "x" ou são determinadas por elas são chamadas de sua função.

A partir dos conceitos de Euler e Bernoulli, muitos outros conceitos foram apresentados. No final do século XVIII, mais um importante conceito é apresentado pelo excelente matemático Lagrange cujo enunciado é o seguinte:

> Uma função de uma ou várias quantidades é qualquer expressão de cálculo em que essas quantidades entram de qualquer forma, combinadas ou não com algumas outras quantidades, consideradas como dadas e com valores invariáveis. Enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. Desse modo, nas funções se consideram somente as quantidades que supostamente são variáveis, sem levar em consideração as constantes com as quais podem estar combinadas (RUTHING, 1984, p. 73).

Já, no século XIX, o conceito de função continuou a ser aprimorado e um fato que ajudou bastante esse desenvolvimento foi a "Aritmetização da Análise" (BOYER, 1996, p. 388).

Em 1822 foi publicada pela primeira vez a Teoria Analítica do Calor, que foi estudada por Joseph Fourier. Com essa teoria, Fourier mostrou que as funções poderiam ser representadas pela sua série como outra expressão analítica (Série de Fourier), num dado intervalo.

De acordo com Kleiner (1989, p. 15), o principal resultado matemático da função apresentada por Fourier é o seguinte:

Toda função f(x) definida no intervalo (- k, k) pode ser representada neste intervalo por uma série de senos e cossenos, cuja expressão está representada abaixo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos \frac{n\pi x}{k} + b_n sen \frac{n\pi x}{k} \right),$$

$$com \ \ a_n = \frac{1}{k} \int_{-k}^{k} f(t) \, cos \frac{n\pi t}{k} dt \ e \ b_n = \frac{1}{k} \int_{-k}^{k} f(t) \, sen \frac{n\pi t}{k} dt$$

Com esse resultado, Fourier conseguiu mostrar que diversas funções poderiam ser representadas por sua série e essas funções não precisavam ser necessariamente uma função periódica. Essa generalização para todos os tipos de função, através da série de Fourier, ocasionou uma nova ótica na maneira de desenvolver a Matemática da época. Outro importante avanço foi a segregação de conceitos aparentemente idênticos, os conceitos de “função” e de sua “representação geométrica”.

A definição de função apresentada por Fourier é a seguinte:

> De modo geral, uma função de x representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada um dos quais é arbitrário. Dados uma infinidade de valores para a abscissa x, existe um igual número de ordenadas f(x). Todos têm valores numérico reais positivos, negativos ou nulos. Não supomos que essas coordenadas estão sujeitas a uma lei comum. Elas se sucedem umas às outras de qualquer maneira, seja qual ela for, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única (RUTHING, 1984, p. 73).

É possível observar que a definição apresentada por Fourier é bastante geral, pois inclui as contínuas, não contínuas e as que não possuíam uma representação na forma analítica.

Após a definição de Fourier, as funções não precisavam mais ter um comportamento tão rigoroso e bem adequado. Partindo desse princípio, o matemático Dirichlet (1804-1859), no ano de 1837, sugere uma definição bem ampla para o conceito de função.

> Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se, para cada x corresponde um único y, de maneira que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y = f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas (RUTHING, 1984, p. 74).

Segundo Boyer (1996), esta definição proposta por Dirichlet está próxima do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números, apesar desses conceitos ainda não terem sido estabelecidos.

Dirichlet propôs uma função como uma relação arbitrária entre variáreis. Esta função é geralmente chamada de função de Dirichlet. O interessante nessa função é o seu comportamento, pois ela não apresenta sequer um ponto de continuidade. Vejamos abaixo esta função:

$$f(x) = \begin{cases} c, se\ x \text{ é } racional \\ d, se\ x \text{ é } irracional \end{cases}$$

Este foi o primeiro exemplo de uma função que não era representada por fórmulas (expressões algébricas) ou símbolos matemáticos.

Segundo Ruthing, o matemático G. G. Stokes, acompanhou o raciocínio de Dirichlet e entendeu a importância de pensar em funções independentes de todas as ideias de expressões algébricas.

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), em 1823, definiu função da seguinte maneira:

> Uma quantidade variável que consideramos como podendo sucessivamente tomar muitos valores diferentes entre si[...]. Se quantidades variáveis estão relacionadas entre si de maneira que, dado um valor de uma delas, pode-se achar os valores de todos os outros, ordinariamente concebemos essas diversas quantidades como expressas por meio de uma delas, a qual recebe o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são aqueles que chamamos de funções desta variável (RUTHING, 1984, p. 74).

A definição de Cauchy é baseada na distinção entre variáveis independentes e dependentes. Esta definição é bastante semelhante a que utilizamos atualmente.

Cauchy também não concordava com o critério de continuidade proposto por Euler e prova, através de um contraexemplo, que não era correto classificar as funções em contínuas ou descontínuas apenas pela unicidade de sua expressão analítica. Mas adiante, Cauchy apresenta uma nova definição para continuidade de uma função.

O Matemático George Boole (1815-1864) interpretou o conceito de função como uma "transformação", onde cada elemento x é transformado em f(x):

> Qualquer expressão algébrica que envolve o símbolo x é denominada função de x e pode ser representada, de forma abreviada, por f(x)... Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformamos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma função transformamos x em 0, o resultado será expresso pela forma f(0). (RUTHING, 1984, p. 75).

Muitos matemáticos da época, em suas publicações, propuseram definições para o conceito de função. Em 1851, Riemann apresenta a seguinte definição:

> Vamos supor que z é uma quantidade variável que pode assumir, de forma gradual, um possível valor real; em seguida, se a cada um de seus valores corresponde um valor único da quantidade indeterminada w, w é chamado de função de z. (RUTHING, 1984, p. 74).

Segundo Ruthing, Hankel em 1870 propõe que uma função de x é chamada de f(x), quando para cada valor de x em um determinado intervalo está associado um único valor determinado por f(x). Não importa como o valor da função é determinado, mas sim que a função seja determinada em todos os pontos desse intervalo.

Richard Dedekind (1831-1916), baseado na ideia de aplicação, define função da seguinte forma:

> Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por φ (s); dizemos também que φ (s) corresponde ao elemento s, que φ (s) é originada ou gerada pela aplicação φ, que s é transformado em φ (s) pela aplicação φ ...(RUTHING, 1984, p. 74).

Em 1904, o matemático francês Jules Tannery apresenta uma definição de função que explora a correspondência entre dois conjuntos onde a cada elemento de um conjunto X está associado um único elemento do conjunto Y, definição muito semelhante a utilizada nos livros didáticos da atualidade.

> Uma função é definida neste conjunto quando uma correspondência está definida. O conjunto Y dos valores distintos assumidos por y é determinado pela mesma correspondência: diz-se que b é um elemento de Y, mais uma vez isto significa que um elemento a de X corresponde a um número b. Cada elemento de X corresponde a um único elemento de Y. (RUTHING, 1984, p. 75).

Segundo Silva (1999), G.H. Hardy (1877-1947) enumera três características que devem ser satisfeitas por uma função determinada por uma relação entre duas quantidades variáveis denominadas x e y. Vejamos estas características:

1) y é sempre determinado por um valor de x.
2) para cada valor de x que y é dado, corresponde um único valor de y.
3) a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um valor dado de x pode ser calculado por substituição direta de x.

Já o matemático Peano define função como um caso particular de relação (Ruthing, 1984, p 75).

Outros matemáticos importantes como Carey e Gousart também contribuíram com suas definições de função. Até que, em 1939, uma definição de Hardy, adaptada para a linguagem de conjuntos, que é bastante utilizada nos livros didáticos atuais é apresentada por Bourbaki:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer $x \in E$ existe um único $y \in F$, e apenas um, que está na relação dada por x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações equivalentes determinam a mesma função (RUTHING, 1984, p. 77).

Pela definição de Bourbaki podemos perceber que é justamente desta época a definição de função como subconjunto de um produto cartesiano A X B, ou seja, um conjunto de pares ordenados.

Na análise dos livros didáticos vamos constatar que a definição de Bourbaki, baseada na correspondência entre elementos de dois conjuntos A e B é, disparadamente, a mais utilizada pelos autores.

> Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento de x de A existe, em correspondência, um único elemento de y de B...([4], p 56).

Mais adiante veremos que a definição acima é a atualmente utilizada pelos professores de Matemática do Ensino Médio.

Diante do exposto, percebemos que o conceito de função passou por diversas mudanças e que foi construído de maneira lenta no decorrer dos séculos. Ressaltamos também que houve uma importante evolução na abordagem da sua definição, pois foi definida como uma expressão analítica, como uma transformação, como uma relação entre quantidades variáveis e como uma relação entre dois conjuntos.

1.2 Obstáculos Epistemológicos

A Epistemologia é definida como a ciência que estuda o conhecimento científico. Bachelard afirma que: “é através dos obstáculos epistemológicos que se analisam as condições psicológicas do progresso científico”. Desse modo, podemos concluir que a noção de obstáculo epistemológico é essencial para o desenvolvimento do conhecimento. Esses obstáculos devem ser superados, porém, antes de serem neutralizados, eles devem ser reconhecidos. Isso tudo é de suma importância, pois, a não eliminação de um obstáculo epistemológico, pode comprometer toda pesquisa.

Na análise do obstáculo, o pesquisador não deve se deixar levar apenas pelo que é visível, ou seja, o objeto precisa ser estudado com visão mais inovadora e não da mesma maneira habitual. Resumindo, esse primeiro obstáculo é denominado realidade.

> “É impossível anular, de um só golpe, todos os conhecimentos habituais. Diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber". (BACHELARD, 1996, p.18)

O segundo obstáculo epistemológico é denominado senso comum. Esse obstáculo é relacionado com a dificuldade que o cientista tem de dissociar seu conhecimento, preconceitos e opiniões do conhecimento científico e teórico real, ou seja, aquele que deve verdadeiramente ser alcançado.

Desta forma, percebemos que a realidade social sempre deve ser levada em consideração, e esse fator dificulta mais ainda esta tarefa. Mesmo assim, o conhecimento dever ser construído, se necessário, contrariando o próprio senso comum e a suposta realidade já absorvida.

A matemática e seus diversos conceitos são objetos de pesquisa que, na maioria das vezes, devem ser abordados de várias maneiras diferentes com o objetivo de compreender verdadeiramente o conteúdo. Diante dessa realidade, os obstáculos sempre estão presentes. Em alguns conceitos específicos há muita dificuldade em transpor esses obstáculos, pois a própria origem de tais conceitos já passou por muito debate no decorrer dos anos. Um desses conceitos é o de função, conceito bastante abstrato, que gera muita dúvida no seu modo de apresentação e aplicação. Neste capítulo, será feita uma análise dos obstáculos inerentes a esse conceito que é de suma importância.

De acordo com Sierpinska, estudantes têm dificuldade de associar as diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, representação verbal; na interpretação de gráficos; na manipulação de símbolos relacionados as funções como: f(x), x→y, sen(x+t), etc...

> A linguagem utilizada na conexão com funções não é muito útil, pois “f(x)” significa tanto o nome de uma função como o valor de uma função f. Em situações espontâneas, estudantes utilizam símbolos diferentes para linguagens diferentes. Para dizer que o valor de uma função em 2 é 3, escreveram: x(2) = 3. Isso deve ser lido: “Colocar 2 no lugar de x na fórmula da função. Você encontra 3”. O conceito de função está intimamente relacionado com a atividade de calcular o valor, se a fórmula for dada. Para expressão “f(x)” diriam: “Você coloca 2 na fórmula da função e calcula. Você obtem um número.” (SIERPINSKA, 1992, p. 25).

O objetivo é estabelecer a melhor maneira que o docente deve lidar com todas essas dificuldades dentro da sala de aula. Para cumprir esta tarefa há vários tipos de ferramentas que podem ser utilizadas como resolução de problemas, programas de computadores, entre outros. No entanto, apesar desses experimentos e projetos serem utilizados na sala de aula, de acordo com Sierpinska, qualquer avaliação de um projeto de ensino que supostamente promova a compreensão de funções em estudantes deve basear-se em uma estrutura externa a ele. Deve ser baseado em uma reflexão sobre entendimento e, depois, sobre funções. Temos que responder às perguntas: o que queremos de entendimento? Ou, o que queremos dizer com "entender"? E, depois, o que queremos dizer com entender funções? Para responder tais questionamentos é necessária uma base teórica sobre a compreensão da matemática em geral e sobre o entendimento do conceito de função.

Para a compreensão genuína de um conceito matemático, somente a leitura do próprio conceito não é suficiente. O mesmo deve ser relacionado com outros conceitos, deve ser exemplificado, colocado em prática, além da necessidade de definir onde e como esse conceito será aplicado dentro da teoria que está sendo estudada.

> É somente quando temos visto instâncias e não-instâncias do objeto definido, quando podemos dizer o que este objeto é e o que não é, quando tomamos consciência de suas relações com outros conceitos, quando percebemos que essas relações são análogos às relações com as quais estamos familiarizados, quando apreendemos a posição de que o objeto definido tem dentro de uma teoria e quais são suas possíveis aplicações, que podemos dizer que entendemos algo sobre isso. (SIERPINSKA, 1992, p. 26).

Desse modo, reforçando o que já foi dito, pensamentos inconsistentes e crenças cegas funcionam como obstáculos ao desenvolvimento do conceito. Portanto esses costumes devem ser minimizados, descartados e outros pontos de vistas devem ser considerados.

No entanto, os obstáculos não têm apenas aspectos negativo, contribuem também de forma positiva para a construção do conceito.

> A própria natureza dos obstáculos epistemológicos é tal que eles não podem ser evitados e seu papel em nosso pensamento é importante. Este papel é positivo e negativo ao mesmo tempo. É positivo porque, para entender, é preciso já compreender alguns pré-conceitos, alguns preconceitos. Não podemos prescindir de nossos esquemas de pensamento, crenças e atitudes. Este é o chão em que nos encontramos. Por outro lado, se queremos entender mais, melhor ou ver diferentes aspectos das coisas que estamos considerando, temos que nos tornar conscientes dessas atitudes e esquemas de pensamento e agir contra eles! Nesse sentido, o papel dos obstáculos epistemológicos é negativo (SIERPINSKA, 1992, p. 28).

O sentido lógico do conceito de função delimitado apenas ao que a sua definição diz. Neste momento, já temos um obstáculo a ser transposto, pois a definição de função pode ser feita de forma simbólica, utilizando pouquíssimas palavras. Porém, quando essa noção é aplicada, colocada em um determinado contexto matemático, os significados do conceito transcendem a formalidade apresentada na definição.

Como já vimos anteriormente, o conceito de função pode ser apresentado de várias formas e, cada uma dessas definições, é mais apropriada de acordo com o tipo de função apresentada.

> Quando pensamos em grandezas variáveis em ciências ou economia, preferimos conceber funções como relações entre essas grandezas: diríamos, por exemplo, que "o caminho percorrido por um corpo em movimento é uma função do tempo e da velocidade" ou que "o preço é uma função da quantidade de mercadorias no mercado". Nós falamos sobre leis da física ou leis do mercado. Quando, em matemática, pensamos em curvas representadas em sistemas de coordenadas, também pensamos em relações entre as coordenadas de pontos que pertencem à curva. Em alguns intervalos, esses relacionamentos preenchem a condição de valor único das funções.” (SIERPINSKA, 1992, p. 29).

Isso deixa bem claro que o conceito de função, no momento de sua aplicação, deve ser explorado de diferentes óticas, como as tabelas, a parte algébrica, a gráfica e a escrita. Sempre buscando relacionar essas representações.

Como já vimos, o entendimento do conceito de função está além do formalismo matemático e muito mais voltado para interpretação e aplicação da noção. Desse modo, cuidado e atenção é necessário pois temos diversas formas de representar, falar e raciocionar sobre funções. Assim, temos várias associações entre diferentes perguntas e respostas. Essa forma de pensar foi estudada por Steinbrink(1989), quando afirmou que o significado de um conceito matemático é apresentado como uma relação entre seus lados simbólico e objeto.

É importante sempre se perguntar a que realidade o conceito de função se refere. O objetivo é realizar generalizações e sínteses eficientes. Para cumprir essa tarefa, ferramentas são necessárias, tais como o estudo da evolução do conceito de função e estudos da dificuldade dos estudantes.

> Objetos devem ser identificados, discriminados entre, que tipos de ordens podem ser encontrados que trariam o aumento da realidade por meio de generalizações e sínteses perspicazes. O estudo da história do conceito e das dificuldades dos alunos servirá como ferramenta e inspiração na pesquisa. Exemplos de dificuldades dos estudantes serão tomadas principalmente a partir de um relato de um experimento baseado em uma série de situações didáticas no contexto matemático de funções e pontos fixos atrativos (SIERPINSKA, 1987, 1988a, 1989).

Em resumo, podemos dizer que o entendimento da noção de função está condicionado a percepção das relações e das mudanças com a problemática.

Portanto, após este breve estudo sobre a evolução do conceito histórico e dos obstáculos epistemológicos, faremos uma análise de como esse conceito é passado aos estudantes. Essa investigação será realizada através da aplicação de questionários específicos (tanto para alunos, quanto para professores) e através da análise de livros didáticos.

2 ANÁLISE DO CONCEITO DE FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo será feita a análise dos de alguns livros didáticos selecionados em relação a forma de abordagem sobre o conceito de função. Os aspectos mais importantes do ensino serão levados em consideração. A importância desta análise está no fato que o livro didático é um grande influenciador na prática do docente.

Os critérios utilizados serão evolução do conceito histórico, abordagem do conceito (notação, linguagem, exemplos) e exercícios.

Serão analisadas oito coleções aprovadas no PNDL 2018 que chamaremos de [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] e [8].

2.1 Análise em relação à história da evolução do conceito de função nos livros didáticos

Dentre os livros analisados, poucos não fizeram nenhuma menção à evolução do conceito. Em contrapartida, a maioria deles fez apenas uma pequena menção, citando apenas matemáticos importantes e explicando a origem do nome função. É importante ressaltar que dois livros fizeram um bom resumo da evolução do conceito no decorrer dos séculos. Acredito que esses resumos, com a ajuda dos docentes, possam incentivar os alunos a pesquisarem mais sobre a história do conceito de função. Vejamos, abaixo, alguns desses resumos:

> **1)** “A ideia de função passou por grandes evoluções no decorrer da história, e seu desenvolvimento contribuiu para o progresso da matemática. A palavra função parece ter sido introduzida em 1964 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nos anos seguintes, vários matemáticos contribuíram para consolidar o conceito de função, tais como Isaac Newton (1642-1727), Johan Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Josefh Fourier (1768-1830), Lejeune Dirichlet (1805-1859), entre outros.” ([1], p. 34)

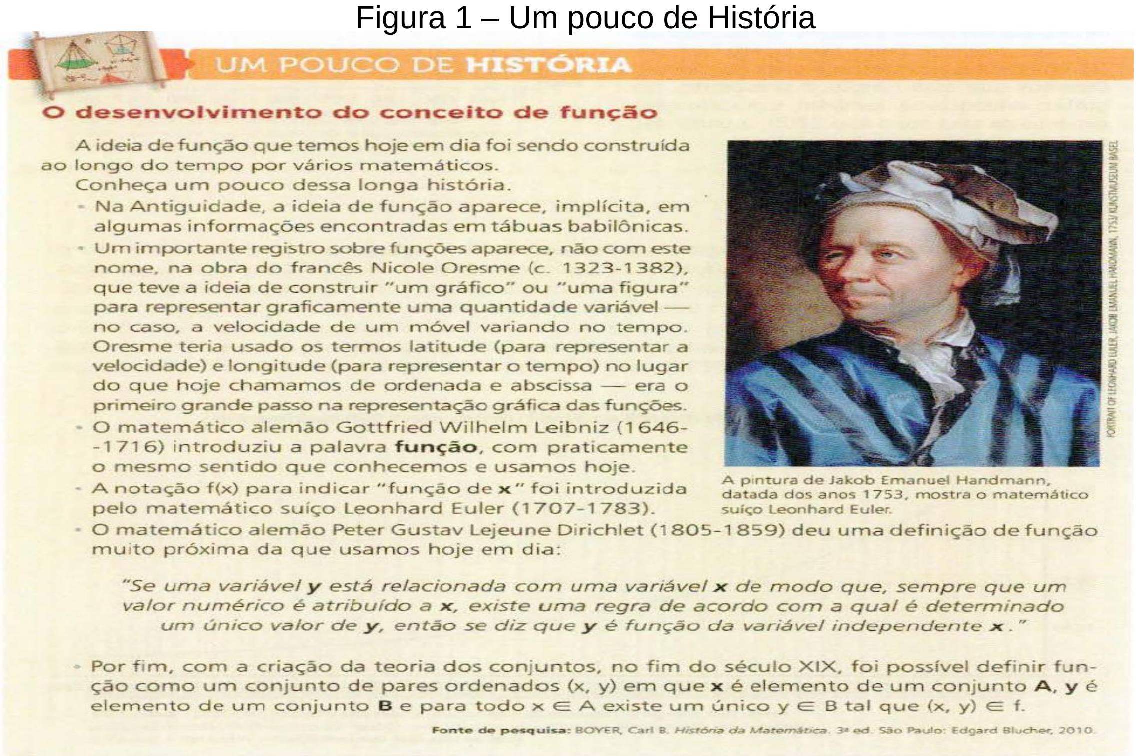
> **2)** “Para estudar algumas dessas relações entre grandezas podemos usar o conceito função que, no decorrer da história, desenvolveu-se com a contribuição de vários estudiosos. Entre eles destaca-se Gottfried Wilhelm

Leibniz, que em 1964 parece ter introduzido a palavra função na sua forma latina equivalente. A ideia de função pode ser utilizada como exemplo da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar conceitos." ([3], p. 39)

3) "Acredita-se que o termo função tenha sido introduzido na Matemática por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) para, incialmente, expressar a associação entre quantidades e curvas. A noção que temos atualmente de função deve-se as considerações feitas posteriormente por Leonhard Euler (1707-1783)." ([8], p. 48)

4) "O termo função para nomear um tipo de relação entre duas variáveis dependentes foi usado pela primeira vez em 1673 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), embora o conceito já fizesse parte das ciências de maneira informal e desorganizada." ([6], p. 49)

Figura 1 – Um pouco de História



UM POUCO DE **HISTÓRIA**

O desenvolvimento do conceito de função

A ideia de função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo do tempo por vários matemáticos.

Conheça um pouco dessa longa história.

- Na Antiguidade, a ideia de função aparece, implícita, em algumas informações encontradas em tábuas babilônicas.
- Um importante registro sobre funções aparece, não com este nome, na obra do francês Nicole Oresme (c. 1323-1382), que teve a ideia de construir "um gráfico" ou "uma figura" para representar graficamente uma quantidade variável — no caso, a velocidade de um móvel variando no tempo. Oresme teria usado os termos latitude (para representar a velocidade) e longitude (para representar o tempo) no lugar do que hoje chamamos de ordenada e abscissa — era o primeiro grande passo na representação gráfica das funções.
- O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduziu a palavra **função**, com praticamente o mesmo sentido que conhecemos e usamos hoje.
- A notação f(x) para indicar "função de **x**" foi introduzida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).
- O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição de função muito próxima da que usamos hoje em dia:

*"Se uma variável **y** está relacionada com uma variável **x** de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a **x**, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de **y**, então se diz que **y** é função da variável independente **x**."*

- Por fim, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, foi possível definir função como um conjunto de pares ordenados (x, y) em que **x** é elemento de um conjunto **A**, **y** é elemento de um conjunto **B** e para todo x ∈ A existe um único y ∈ B tal que (x, y) ∈ f.

A pintura de Jakob Emanuel Handmann, datada dos anos 1753, mostra o matemático suíço Leonhard Euler.

PORTRAIT OF LEONHARD EULER, JAKOB EMANUEL HANDMANN, 1753/ KUNSTMUSEUM BASEL

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Fonte: [4], p. 49

Figura 2 – História do Conceito de função

1 Um pouco da história das funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar **fenômenos** físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções.

Fenômeno: fato ou evento de interesse científico que pode ser descrito e explicado cientificamente.

Os números naturais (inteiros positivos) e as razões entre eles (racionais) eram os únicos tipos de números trabalhados pelos gregos até o século V a.C. Eles acreditavam que esses números fossem suficientes para comparar duas grandezas quaisquer de mesma espécie – comprimentos, áreas, volumes, etc.

Quando apareceram as funções?

O conceito de função aparece, de forma intuitiva, desde a Antiguidade. De fato, qualquer tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis é uma função. Um dos melhores exemplos de uma função no período antigo deve-se a Cláudio Ptolomeu, cientista do século II que viveu em Alexandria durante o período romano. Ptolomeu elaborou a famosa Tabela de Cordas, que foi um instrumento fundamental para cálculos de astronomia e de navegação.

Essa tabela foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e que, para cada ângulo central α, associava o comprimento L da corda correspondente, como na figura a seguir.

Retrato de Cláudio Ptolomeu, cientista grego (90-168).

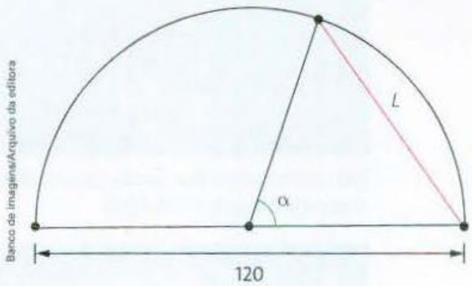


Tabela de cordas

α (°)	L (unidades)
...	...
18,5	19,27
...	...
70	68,86
...	...
114	100,67
...	...

Fonte: Dados experimentais.

Na tabela de cordas de Ptolomeu, os ângulos são expressos em graus, com variação de meio grau de um valor para o seguinte, e o comprimento da corda é determinado na semicircunferência em função de um ângulo entre 0° e 180°. Veja alguns valores na tabela acima.

Hoje, sabemos que existe uma fórmula que permite calcular para cada valor de α o comprimento L da corda, mas naquele tempo não estava bem definido o conceito de "fórmula".

A palavra função, no sentido que usamos hoje, aparece pela primeira vez em correspondências entre dois grandes matemáticos: o suíço Jean Bernoulli e o alemão Gottfried Leibniz. Inicialmente Leibniz dizia, falando de um problema de geometria, que certos elementos devem ter alguma função. As cartas continuaram e, em uma carta de Bernoulli para Leibniz no ano de 1698, aparece a frase:

"... função é uma quantidade que de alguma maneira é formada por quantidades indeterminadas e quantidades constantes".

E Leibniz responde:

"... e eu estou contente em ver que você usou o termo função de acordo com o meu sentido".

Fonte: [7], p. 41

2.2 Análise da abordagem do conceito de função nos livros didáticos

A maioria dos livros inicia o capítulo apresentando a ideia do conceito através exemplos de tabelas que associam grandezas utilizadas no cotidiano das pessoas, como preço e quantidade, dias e temperatura, entre outros. Alguns livros associaram algumas dessas tabelas a equações. Em apenas um dos livros utilizados, a ideia de função foi apresentada através de um gráfico. Após a apresentação da noção em forma de tabelas, grande parte dos livros estabeleceram a relação entre as grandezas através de diagrama de flechas. Em todos os livros analisados os autores apresentam a definição formal de função através da relação entre dois conjuntos, ou seja, seguem a mesma definição apresentada por Bourbaki. Citaremos abaixo as definições apresentadas nesses livros:

1) “Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função de A em B é uma regra que indica como associar $x \in A$ a um único elemento $y \in B$...” ([1], p. 35)

2) “Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único y de B.” ([2], p. 56)

3) “Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B $(f: A \rightarrow B)$ é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento de $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$...” ([3], p. 41)

4) ““Dados dois conjuntos **A** e **B** não vazios, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento de $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.” ([4], p. 43)

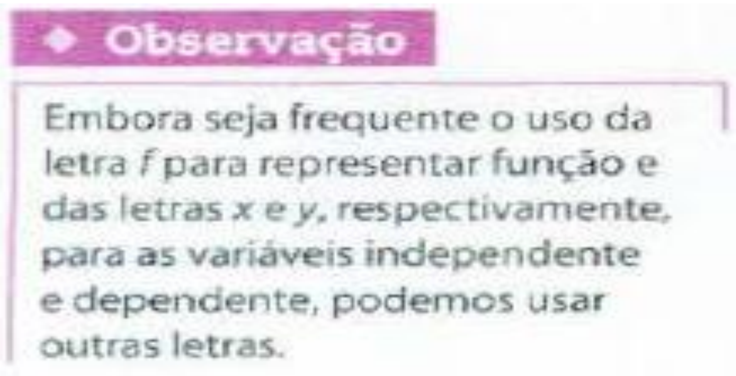
5) “Dizemos que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y.” ([6], p. 123)

6) Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento de $y \in B$." ([7], p. 49)

7) "Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma relação f de A em B é uma **função** quando associa a cada elemento x, do conjunto A, um único elemento de y, de B."

Todas as citações apresentadas definem função como uma associação de x a um único elemento de y. Porém, esta definição não esclarece, na relação entre as grandezas, qual das variáveis seria a dependente e a independente. Este fato pode provocar um obstáculo ao aprendizado, pois quando há permutação ou troca de letras (variáveis), muitos estudantes não conseguem identificar qual é a variável dependente e qual é a independente. No entanto, é importante destacar que o livro [2] apresentou uma observação que outras letras podem ser utilizadas para as variáveis dependentes e independentes, não vinculando apenas x e y.

Figura 3 – Observação importante



Fonte: [2], p. 56

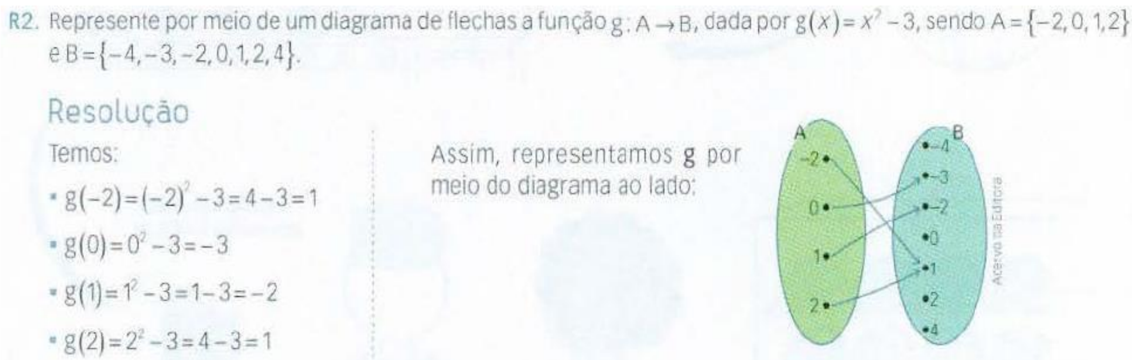
Os autores também explicam, através de exemplos, como reconhecer uma função. O diagrama de flechas é a ferramenta mais utilizada. No entanto, o reconhecimento no gráfico é bastante explorado também. Em relação à análise gráfica, alguns autores explicam da seguinte forma:

"Observe que traçadas as retas paralelas a Oy pelos pontos do domínio de uma relação f, esta será função somente se cada uma dessas paralelas a Oy intersectar o gráfico de f em um, e um só, ponto". ([5], p. 84).

O grande problema deste artifício é que, como já citado anteriormente, é que a maioria dos autores usa "x" para variável independente e "y" para variável dependente e, esse processo prático, só é válido nestes termos. Desta forma, se for utilizada, por exemplo, uma função inversa do tipo x = f(y) = cos y, o aluno pode ser induzido a erro.

Foi percebido também a utilização excessiva do diagrama de flechas e sempre utilizando números inteiros. Entendo que é para facilitar os cálculos, mas pode gerar um obstáculo, pois os gráficos estão relacionados com os números reais, dessa forma, o aluno não consegue comparar o diagrama e a representação gráfica de maneira eficiente. Vejamos um exemplo dos diagramas apresenta

Figura 4 – Diagrama de flechas



Fonte: [2], p. 56

Após a apresentação do conceito de função, a maioria dos autores define domínio, contradomínio e imagem. Esses elementos, na maior parte dos livros analisados, são expostos novamente através do diagrama de flechas e através de gráficos. Destacamos que algumas obras, além das ferramentas citadas anteriormente, exploraram também a parte algébrica. Citamos abaixo uma das definições apresentadas:

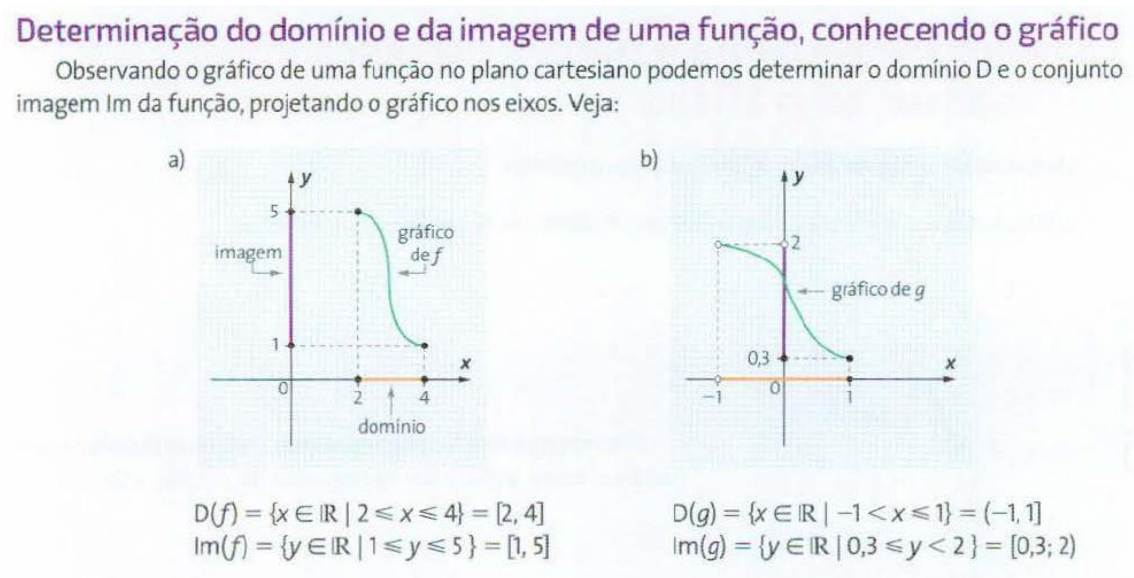
Dada a função $f: A \to B$, temos:

- O conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos CD ou CD(f) (lemos "contradomínio de f");

- Para cada $x \in D(f)$, o elemento f(x) ∈ B é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f"). ([2], p. 58).

É recorrente, nas obras analisadas, a representação gráfica do domínio e da imagem através da projeção ortogonal.

Figura 5 – Domínio e Imagem no gráfico



Fonte: ([7], p. 57).

Em relação à parte algébrica da aplicação no conceito, a maioria dos autores apresentam apenas a restrição para o domínio (denominador, raiz de índice par), ou seja, a imagem acaba ficando em segundo plano.

Algumas obras apresentaram conteúdo adicional, focando na interdicisplinaridade e no uso da tecnologia.

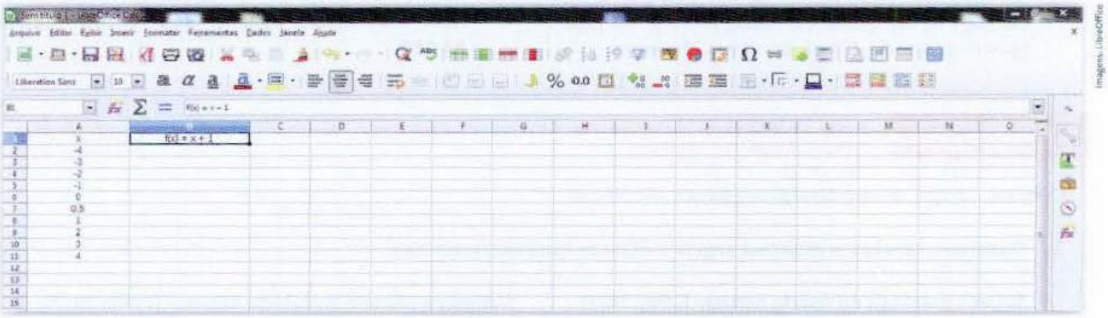
Figura 6 – Foco na tecnologia

FOCO NA TECNOLOGIA **Computador**

Construindo gráficos de funções no computador

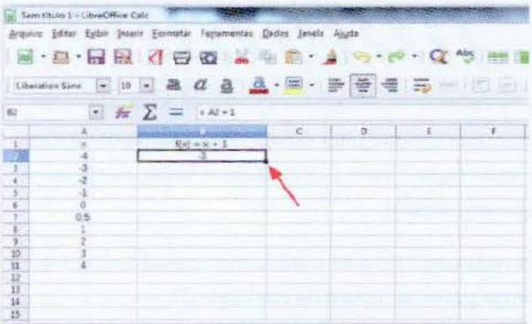
O LibreOffice, *software* apresentado na unidade anterior, também pode ser utilizado para a construção de gráficos de funções usando a opção "Planilha". Veja a seguir as etapas desse processo.

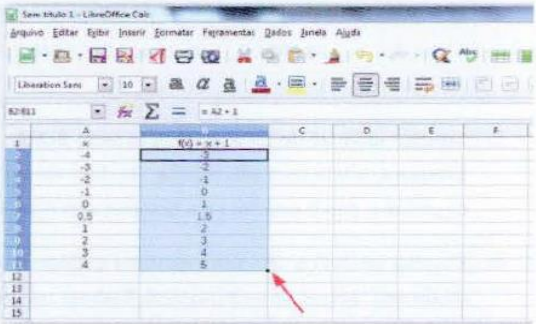
1ª etapa: Considere a função de domínio real $f(x) = x + 1$, onde na coluna **A** estão os valores atribuídos a **x** para determinar f. Faça uma planilha eletrônica semelhante a esta.



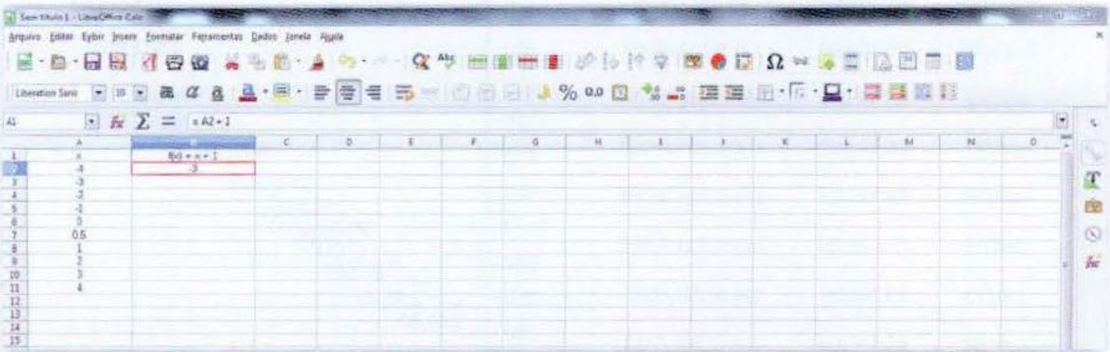
Imagens: LibreOffice

3ª etapa: Em seguida, usando o recurso "Arrastar", clique no canto inferior direito da célula B2 e arraste o cursor até a célula B11. Solte o cursor e veja o que aconteceu. Os valores da coluna **B** foram calculados automaticamente.



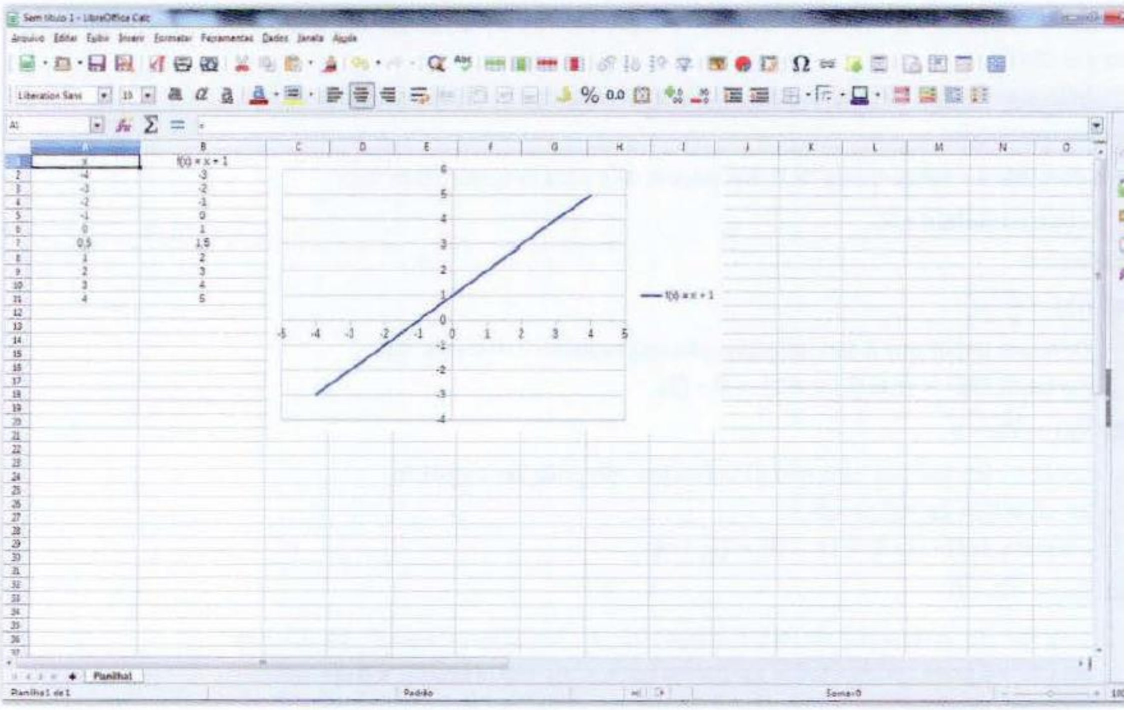


2ª etapa: Na célula B2, digite "= A2 + 1" e clique "Enter", prestando atenção no que ocorre. Que relação tem o número que apareceu com a função dada? O que significa a expressão digitada em B2?



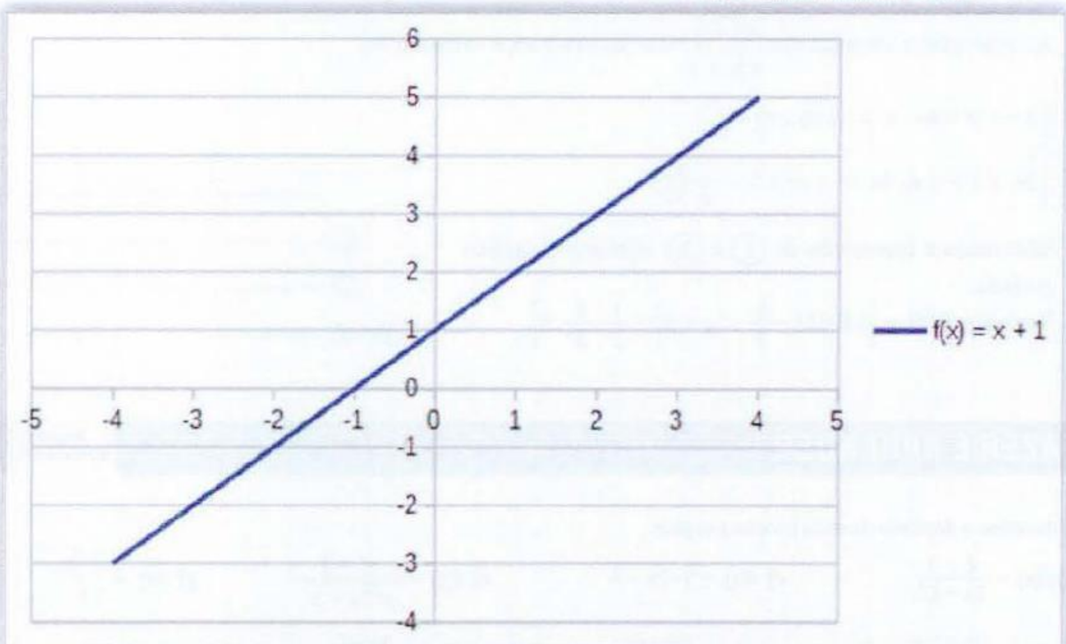
Se quiser verificar a validade dos números que apareceram na coluna **B**, clique sobre qualquer uma das c
las a partir de B3 e observe o que acontece.

4ª etapa: Para construir o gráfico da função, selecione toda a tabela e clique em “Gráfico”. Escolha um modelo
“Dispersão”. Use os recursos disponíveis no LibreOffice para formatar o gráfico.



5ª etapa: Salve o gráfico em um novo documento. Se tiver oportunidade, retorne às atividades de 15 a 18, esco
uma das funções e construa um gráfico para ela na planilha eletrônica.

Se a escola possuir um projetor e computadores, u
essas ferramentas para que os estudantes aprese
os gráficos construídos na 5ª etapa.



FONTE: [5], p. 88

De modo geral foi observado que os conceitos importantes para definição de função (conceitos considerados complexos) muitas vezes são apresentados de maneira muito rápida, às vezes, apenas através de exemplos. Isso gera uma dificuldade do aluno em amadurecer conceitos essenciais ao desenvolvimento do aprendizado.

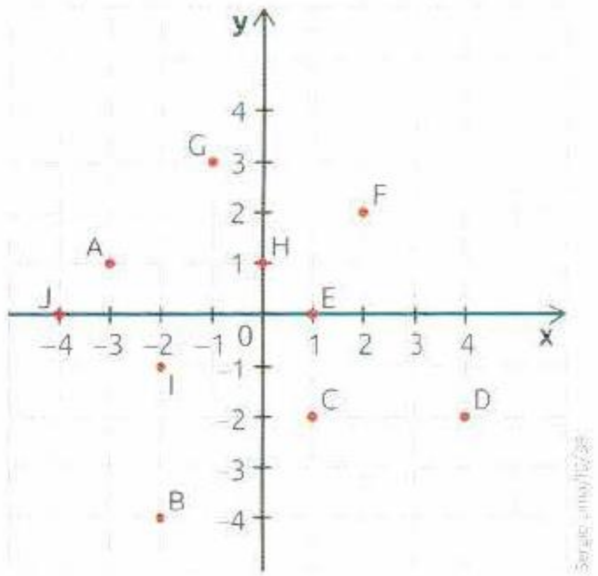
2.3 Análise dos exercícios

De modo geral foi percebido que há muitos exercícios que não estimulam o raciocínio dos alunos (repetições de exemplos e exercícios que envolvem apenas cálculos).

Outra situação que acaba criando obstáculos aos alunos é a pobreza quantitativa de problemas que envolvem a mudança de quadros, principalmente verbal para algébrico e verbal para gráfico.

Figura 7 – Exercício de Plano Cartesiano

15. Sejam os conjuntos:
$M = \{-4, -3, -1, 1\}$ e $N = \{-2, -1, 0\}$.
Quais dos pontos localizados no plano cartesiano a seguir representam elementos de $M \times N$?



FONTE: [3], p. 49

O exercício da figura acima não acrescentou muito para o conceito de função, pois solicita apenas a marcação de alguns pontos no plano cartesiano.

Em relação aos exercícios propostos, alguns livros analisados apresentam exercícios interessantes.

Figura 8 – Exercício da Bomba d'água

19. Uma bomba-d'água despeja 4 m^3 de água por hora em um reservatório com capacidade para 60 m^3, e outra bomba retira 2 m^3 de água por hora desse reservatório. Considerando inicialmente que o reservatório está vazio e que a bomba que retira água é ligada após duas horas de funcionamento da bomba que despeja água, responda.

a) Após quanto tempo de funcionamento simultâneo das bombas a quantidade de água no reservatório chega a 16 m^3? 4 h

b) Escreva a função que expressa a quantidade *q* de litros no reservatório em função do tempo *t* em que as bombas funcionam simultaneamente. $q(t) = 2t + 8$

c) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item b. Resposta nas Orientações para o professor.

FONTE: [8], p. 45

A maioria dos livros apresenta exercícios de vestibulares. Esse tipo de exercício atrai bastante a atenção dos alunos, pois muitos deles irão prestar tentar o Enem ou outro vestibular.

Figura 9 – Exercício de Vestibular

7. (UFG-GO) A seguir, é descrita uma brincadeira popular para se descobrir a idade de alguém. É pedido a uma pessoa, com idade inferior a 100 anos, que multiplique por dois o número do mês de seu aniversário, adicione 5 ao resultado e, em seguida, multiplique por 50 o valor obtido. Depois, ela deve adicionar a própria idade ao número obtido e informar o resultado. Subtraindo-se 250 desse resultado, obtém-se um número *X*, com o qual se descobre facilmente o mês de nascimento e a idade da pessoa.

Nessas condições, se o número do mês de nascimento é *N*, e a idade é *I*:

a) obtenha uma expressão matemática de *X* em função de *N* e de *I*; $X=100N+I$

b) descubra o valor de *N* e de *I*, se o número obtido for *X* = 819. $N=8; I=19$

FONTE: [8], p. 45

Concluimos que a maior parte dos livros didáticos analisados não levam em consideração alguns obstáculos didáticos que os alunos possam ter dificuldade, além de não apresentar muita variação de mudança de quadros e também, algumas vezes, não deixar claro a relação de dependência entre as variáveis.

3 ANÁLISE DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO PELA CONCEPÇÃO DOS PROFESSORES

Foi elaborado um questionário (anexo 1, p. I) com o objetivo de verificar como o conceito de função é transmitido para os alunos, ou seja, como é feita a transposição didática. Vejamos os principais aspectos:

- Tempo de docência/Formação Profissional/ Segmento de atuação.
- Concepção sobre o conceito de função.
- Maiores dificuldade apresentadas pelo aluno.
- Qual tipo de material didático é utilizado.
- Quais métodos de aprendizagem são utilizados em sala de aula.
- Mudanças de quadros utilizadas no ensino de função.
- Vantagens e desvantagens do uso da mudança de quadro.

As questões foram elaboradas com o objetivo de averiguar os itens apontados acima. Para cumprir esse objetivo, foram utilizadas tanto perguntas fechadas como perguntas abertas (que são muito úteis para populações pequenas). Nesse processo participaram 8 professores voluntários, no mês de abril de 2019. Por este motivo, foi utilizada a amostragem por julgamento na coleta de dados.

3.1 Análise do questionário

Todos os itens foram criteriosamente analisados, no entanto, alguns dados obtidos tiveram a resposta/relevância esperada. Desse modo, apenas os itens relevantes serão discriminados a seguir.

3.1.1 Tempo de docência

Dentre os 8 professores, apenas um professor atuava há menos de um ano, dois professores atuavam de 1 a 5 anos, dois professores já trabalham na docência de 6 a 8 anos, um dos professores já leciona de 11 a 20 anos e dois já atuam na área há mais de 20 anos.

3.1.2 Formação Profissional

Dos oito professores entrevistados, cinco têm formação em Matemática (dois deles possuem pós-graduação), dois deles são estudantes de Licenciatura em Matemática e apenas um deles não especificou a formação.

3.1.3 Segmento de atuação

Mais da metade, exatamente seis professores, lecionam no ensino médio. Entre esses docentes, metade atua na rede particular e a outra metade na pública. Desse modo, conclui-se que esses profissionais ensinam o conceito de função em sala de aula para as turmas de 1ª série do ensino médio ou, em alguma revisão, para 2ª ou 3ª séries.

Em uma porcentagem menor, porém bastante relevante para esse estudo, temos dois professores que atuam no ensino superior. Todos os dois na rede particular. Dessa forma, concluímos que, provavelmente, esses professores lecionam o conteúdo de função e abordam seu conceito numa revisão (explicitamente) e no ensino de limites, derivada e integral.

Nenhum dos entrevistados atua no Ensino Fundamental.

Portanto, todos os professores entrevistados puderam responder o questionário de acordo com a sua própria “vivência” em sala de aula, pois todos trabalham com o conteúdo “conceito de função”.

3.1.4 Qual tipo de material didático é utilizado

Metade dos professores entrevistados utiliza o livro didático como base para as suas aulas. Contudo, a outra parte dos docentes utiliza outros recursos como apostilas, o quadro, textos de jornais ou revistas, computador, questões de outras disciplinas que abordam função (Biologia, Física, Química), entre outros.

Portanto, os docentes não se apoiam apenas nos livros didáticos para ensinar o conceito de função. Este fato é excelente, pois há um ganho em qualidade de ensino para os alunos.

3.1.5 Métodos de aprendizagem utilizados em sala de aula

Entre os professores entrevistados, obtivemos as seguintes respostas:

Tabela 1 – Método de Ensino

Método de Ensino	**Quantidade de Respostas**
Resolução de Problemas	6
Aula expositiva	7
Trabalho em grupo	1
Recursos tecnológicos	2
Outros	3

A aula expositiva é o recurso mais utilizado. Em segundo lugar ficou a resolução de problemas, as duas formas de ensinar o conceito de função são bastante utilizadas pelos professores.

Apesar dos docentes utilizarem expressivamente esses dois métodos, eles não foram os únicos. Este fato revela que os professores utilizam diversos métodos para ensinar funções para os seus alunos e isso é importantíssimo.

3.2 Concepção sobre o conceito de função

Na pergunta aberta “defina função”, obtivemos as seguintes respostas dos docentes:

> "Função de A em B é uma relação em que todo elemento de A possui um único correspondente em B".
>
> "É uma relação em que cada elemento do conjunto A está associado a um único elemento do conjunto B."
>
> "É uma associação entre dois conjuntos A e B de forma que cada elemento de A corresponde a um único elemento em B."
>
> "Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A associa cada elemento de A a um único elemento de B."
>
> "Uma relação f de A em B é uma **função** quando associa cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto B".
>
> "Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função de A em B é uma regra que associa $x \in A$ a um único elemento $y \in B$..."
>
> "É uma relação entre dois conjuntos quando é possível variar suas grandezas"
>
> "Função é uma relação de dependência entre dois conjuntos"

É possível observar que a maioria das definições apresentadas pelos docentes refere-se à concepção dada pelos matemáticos algebristas, como a apresentada por Bourbaki.

No entanto, também foram apresentadas definições que levaram em consideração a relação de variação entre duas grandezas (definição mais utilizada em cursos de nível superior, como, por exemplo, engenharia) e relação de dependência.

As definições apresentadas ficaram dentro do esperado nesta pesquisa, pois são bastante utilizadas no meio acadêmico.

3.2.1 Maiores dificuldades apresentadas pelo aluno

Os professores relataram diversas dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao aprendizado do conceito de função. Desta forma, destacamos os principais problemas encontrados:

- As diferentes formas de representar uma função
- Determinar o domínio de determinadas funções
- Estabelecer o conjunto imagem

- Representar uma função graficamente
- Entender a definição abstrata
- Compreender a simbologia utilizada
- Estabelecer a lei de formação
- Fazer a transposição da linguagem escrita para expressão algébrica
- Analisar gráficos
- Associar as grandezas
- Interpretar problemas que expressam a realidade
- Transpor o gráfico para expressão algébrica

A pergunta fechada “O que é mais difícil de ensinar para o aluno” foi respondida da seguinte forma:

Tabela 2 – Mais difícil de ensinar

Mais difícil de ensinar	**Quantidade de Respostas**
Conceito de Função	5
Representação gráfica	3
Representação algébrica	0

Conforme a tabela acima, os professores acham mais difícil de explicar, em primeiro lugar, o conceito de função e, em segundo lugar, a representação gráfica de uma função.

A mudança de quadros é uma ferramenta essencial para compreensão do conceito de função, pois o aluno adquire várias ideias sobre o conceito, compreende melhor a definição, enxerga de maneira mais clara o comportamento das funções e explora melhor o conteúdo estudado.

Vejamos como ficou a resposta dos professores na pergunta sobre mudanças de quadro utilizadas em sala de aula.

Tabela 3 – Mudanças de quadro

Mudanças de quadro	**Quantidade de Respostas**
Gráfica para algébrica	4
Algébrica para gráfica	5
Numérica para gráfica	7
Numérica para algébrica	4
Verbal para algébrica	3
Verbal para gráfica	2

A maioria dos professores utiliza a mudança “numérica para gráfica” e, como a maior parte dos livros didáticos analisados propõe essa mudança (principalmente através de tabelas numéricas), esse resultado já era esperado.

Ressaltamos novamente que a excessiva utilização dessa mudança acaba criando um obstáculo no aprendizado dos discentes, pois há diversos problemas que utilizam outras mudanças de quadro.

A passagem do registro algébrico para o gráfico também é amplamente utilizada pelos professores, porém, o caminho inverso (gráfico para algébrica) é pouco explorado pelos docentes e já havíamos constatado também que quase não é trabalhado nos livros didáticos.

A transformação de problemas escritos (verbal) para outras representações também é minimamente explorado nas salas de aula, gerando uma deficiência na parte interpretativa do aluno.

As mudanças de registro na aplicação do conceito de função trazem diversas vantagens e devem ser mais exploradas dentro da classe.

3.3 **Conclusão sobre a análise do questionário aplicado aos professores**

De modo geral, os professores utilizam o livro didático como principal recurso para o ensino de função. No entanto, diversos outros recursos também são utilizados.

Percebemos que definição do conceito de função apresentada pelos docentes são muito semelhantes àquelas apresentadas pelos livros didáticos.

Em relação à metodologia utilizada para o ensino de funções, foi constatado que a ferramenta mais utilizada é a aula expositiva, porém, tendo em vista que outros recursos como resolução de problemas e trabalho em grupo são explorados, a situação parece estar evoluindo.

Foi concluído também que a maioria dos professores não utiliza todas as mudanças de registro disponíveis para ensinar funções, pois a maior parte utiliza a mudança de tabela numérica para gráfico.

Finalizando, queremos deixar registrado que os resultados coletados através do questionário aplicado aos professores foram bastante satisfatórios, ou seja, foi observado um grande progresso.

4 ANÁLISE DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO PELA CONCEPÇÃO DOS ALUNOS

Foram elaborados cinco questionários (anexos II a VI), o primeiro (anexo II) é denominado “atividades iniciais” e tem como objetivo verificar quais são as maiores dificuldades sobre o conceito de função, formas de representar uma função, identificação de funções, gráficos e fórmulas.

Os demais questionários são compostos por exercícios, na maioria das vezes contextualizados, denominados atividades grupo 1, atividades grupo 2, atividades grupo 3 e atividades grupo 4, com o objetivo de verificar, respectivamente, as dificuldades que os alunos possuem na análise e interpretação de gráficos, mudança de tabela para representação algébrica, interpretação de um problema verbal (encontrar a equação correspondente) e análise de um problema em forma textual e a sua representação gráfica.

As atividades foram aplicadas no mês de abril de 2019 para um grupo de 15 alunos voluntários de uma turma de 2ª série do ensino médio e 10 alunos voluntários do 2º semestre do curso de Engenharia de uma Universidade. Ressalto que, sem prejuízo ao trabalho, foram selecionados os dados mais relevantes.

Vejamos, então, a análise dos dados coletados com a aplicação do referido questionário.

4.1 Análise do questionário “Atividades Iniciais”

Esse primeiro questionário que foi passado para os alunos, como já foi mencionado anteriormente, tinha o objetivo de verificar as dificuldades em relação às características inerentes ao conceito de função.

Para cumprir esta tarefa foram elaboradas cinco perguntas:

- O que o aluno entende por função.
- De que forma(s) a função pode ser representada.
- Analisar diagrama de flechas e responder quais representam função.
- Identificar quais gráficos representam uma função.
- Identificar quais equações representam uma função.

4.1.1 Pergunta 1: O que você entende por função?

Os alunos responderam essa pergunta com suas próprias palavras, de acordo com a ideia que eles tinham. Por esse motivo, foram apresentadas diversas respostas diferentes, algumas tinham até alguma lógica, outras não. Vejamos, abaixo, algumas das respostas apresentadas:

> "Ligação dos elementos do domínio com os elementos da imagem".
>
> "Função é o conjunto dos elementos de um conjunto que possuem uma única imagem."
>
> "Função são os conjuntos que podem ser representados no plano cartesiano."
>
> "Função são valores que variam em relação a outros, como, por exemplo, tempo e velocidade."
>
> "Entendo função como valores de x que podemos substituir em f(x).
>
> "Função são grandezas que variam na dependência uma da outra"
>
> "Função é um tipo específico de relação que associa o conjunto A com um só elemento do conjunto B"
>
> "Uma função pode ser representada por gráfico, equações, diagramas e tabelas"

As respostas citadas acima demonstram que a maioria dos alunos conhece a "ideia" sobre o conceito, no entanto, não sabem apresentar o conceito de maneira clara.

As citações que associaram conjuntos tiveram origem no questionário aplicado aos alunos do ensino médio e as que envolveram variação entre grandezas foram coletadas dos alunos de curso superior.

Alguns alunos, ao invés de apresentar a definição, mostraram como uma função pode ser representada (podem ter confundido o que foi solicitado ou o conceito não está bem claro em sua mente).

De modo geral, as respostas foram satisfatórias, pois demonstrou que a maioria dos discentes tem noção do conceito de função.

4.1.2 Pergunta 2: De que forma(s) a função pode ser representada?

O objetivo dessa pergunta aberta é verificar se os alunos conhecem as formas de representação de funções, pois a falta de conhecimento pode ocasionar um obstáculo didático em seu aprendizado.

Dos 14 alunos que responderam essa pergunta, foram recolhidos os seguintes dados:

Tabela 4 – Representação

Representação	**Quantidade de Respostas**
Gráfica	9
Numérica	3
Diagrama de flechas	3
Algébrica	12
Verbal	0

A maioria dos alunos escreveu que uma função pode ser representada por uma equação. Com certeza estavam se referindo a representação algébrica por uma fórmula.

Outra representação que é bastante recorrente entre os discentes é a representação gráfica.

Representação numérica/tabelas e por diagrama não foram muito citadas.

Infelizmente, nenhum dos estudantes lembrou (ou não conhece) de responder representação escrita/verbal.

Concluímos que o resultado dessa pergunta está dentro do esperado, pois, conforme a análise anterior, os professores trabalham mais os registros na forma algébrica e gráfica.

4.1.3 Pergunta 3: Analisar diagrama de flechas e responder quais representam função.

Essa questão possuía 3 itens (a, b e c) para serem respondidos com justificativa. O objetivo é averiguar as dificuldades que os alunos apresentam neste tipo de representação.

No item “a” cujo diagrama representava uma função que não era sobrejetora, ou seja, havia elementos do contradomínio que não estavam associados a elementos do domínio, houve 19 acertos e 6 erros. Provavelmente, o motivo dos erros seja pelo fato do aluno confundir a variável dependente e independente ou até mesmo não dominar bem o conceito.

No item “b” cujo diagrama representava uma função bijetora, ou seja, todos os elementos do contradomínio estavam associados aos elementos do domínio e a apenas um desses elementos, houve 24 acertos e 1 erro. O aluno que não acertou, provavelmente não conhece a representação por diagrama.

No item “c” temos um diagrama que não representa função, 21 alunos acertaram e 4 erraram. Novamente, o motivo dos erros pode ser a confusão entre a variável dependente e independente ou o fato de não conhecer a representação por diagrama de flechas (não dominar esse conceito).

De maneira geral, consideramos o resultado bastante positivo, pois o rendimento foi 89,33% (67 acertos em 75).

4.1.4 Pergunta 4: Identificar quais gráficos representam uma função

Tabela 5 – Identificar quais gráficos representam uma função

Questão	Acertos	Erros
4ª	17	8
4b	19	6
4c	20	5

No item “a”, 68 % dos alunos obtiveram êxito. Já, no item “b” houve uma melhora e passamos para 76%. Por fim, temos 80% de acertos no item c”. O motivo dos fracassos podem ser diversos, citamos alguns prováveis:

- Falta de reconhecimento de sua expressão algébrica
- Aplicação incorreta da "regra prática" de traçar retas paralelas ao eixo y
- Nunca ter visto gráficos do tipo apresentado
- Deficiência na representação gráfica

Vimos um acerto maior no item c, possivelmente pelo fato do gráfico parecer bastante com uma parábola (gráfico da função quadrática) amplamente explorada pelos professores em sala de aula.

Portanto, houve um aproveitamento muito satisfatório na investigação sobre o registro da parte gráfica.

4.1.5 Pergunta 5: Identificar quais equações representam uma função.

Para investigar o conhecimento dos alunos ao entendimento que eles têm em relação a essa representação, foram propostos, na questão 5, três itens denominados a, b e c.

Sobre esses itens, foi questionado qual das equações representava função.

- a) y = 2x + 1
- b) $y = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ x - 1, se\ x < 0 \end{cases}$
- c) y = $\sqrt{x - 5}$

Tabela 6 – Identificar quais equações representam uma função

Questão	Acertos	Erros
5ª	25	0
5b	13	12
5c	15	10

Houve 100 % de acerto no item "a" e esta porcentagem não é surpresa, pois a função afim é bastante explorada pelos docentes na sala de aula.

Em relação ao item "b", cujo percentual de acertos ficou apenas um pouco acima de 50%, ficou evidente a dificuldade dos alunos em funções definidas por mais de uma sentença. Porém, já era um fato esperado, pois esse tipo de função não é muito trabalhado pelos professores em classe.

Por fim, a questão “c” teve um número de acertos razoável. Provavelmente, o que ocasionou os erros foi a dificuldade dos alunos em determinar o domínio da função.

Desse modo, podemos concluir, de modo geral, que os alunos tiveram um desempenho razoável na identificação das funções em sua forma algébrica. Destacamos que as dificuldades apareceram nas questões que os alunos não têm muito contato, como, por exemplo, a função definida por duas sentenças apresentada no item b. Cabe uma reflexão para os docentes darem mais ênfase nesses tipos de questões, pois a prática é importante para o amadurecimento do conceito de função.

4.2 **Análise das atividades denominadas grupo 1, grupo 2, grupo 3 e grupo 4**

Essas atividades foram divididas em grupos específicos e cada grupo tem o objetivo de identificar possíveis dificuldades em relação à determinadas mudanças de quadro (registro). Para avaliar essas transposições de registros, foram utilizadas questões atuais e contextualizadas que foram aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio.

Vejamos abaixo como foi o desempenho nesta etapa:

4.2.1 Análise das atividades grupo 1

Tabela 7 – Análise das atividades grupo 1

Questão	**Acertos**	**Erros**
1a)	22	3
1b)	23	2
2a)	11	14
2b)	10	15
3)	18	7
4)	9	16
5)	13	12

O rendimento dos alunos nas questões desse grupo, que tratavam do assunto interpretação de gráficos, foi razoável (aproximadamente 60%). Essa quantidade de acertos pode ser encarada de forma positiva, pois, como vimos anteriormente, não há muitos exercícios de interpretação de gráficos nos livros didáticos analisados e os professores não dão tanta importância ao assunto nas salas de aula.

4.2.2 Análise das atividades grupo 2

Tabela 8 – Análise das atividades grupo 2

Questão	Acertos	Erros
1)	21	4
2)	17	8
3)	11	14
4)	14	11
5)	15	10

O desempenho dos alunos nessa atividade também foi regular (62,4% de acertos). Dessa vez esperávamos um rendimento melhor dos alunos, pois a transposição de tabela para o quadro algébrico é bastante trabalhada nos livros didáticos e pelos professores.

4.2.3 Análise das atividades grupo 3

Tabela 9 – Análise das atividades grupo 3

Questão	Acertos	Erros
1)	11	14
2)	13	12
3)	12	13
4)	15	10
5)	14	11

A porcentagem de acerto neste grupo foi de 51 % aproximadamente. Percebemos que houve uma queda em relação aos grupos anteriores. No entanto, tal resultado já era previsto, pois este grupo é composto por questões que fazem a mudança do quadro verbal (escrito) para o quadro algébrico e essas mudanças de quadro não são muito exploradas em sala.

4.2.4 Análise das atividades grupo 4

Tabela 10 – Análise das atividades grupo 4

Questão	**Acertos**	**Erros**
1)	17	8
2)	14	11
3)	11	14
4)	10	15
5)	7	18

Neste grupo, cujas questões versavam sobre mudança de quadro verbal para gráfico, ocorreu o mais baixo dos rendimentos: foram 59 acertos em 125, ou seja, menos de 50% de rendimento. Tal estatística, revela que os alunos têm bastante dificuldade de interpretação nesse tipo de problema.

De maneira geral, concluímos que o desempenho foi regular. Para melhorar esse quadro, os docentes devem explorar mais as mudanças de quadro em suas aulas.

5 CONCLUSÃO

As análises dos dados coletados previamente em nossa pesquisa, nos permitiu verificar que os alunos, de modo geral, não compreendem funções que possuem mais de uma sentença, muitas vezes definem função como uma equação e confundem exemplos com o conceito de função.

Vimos também que os livros didáticos analisados, com raras exceções, não tratam de maneira adequada “as mudanças de quadro” na representação das funções. Este fato acaba refletindo em sala de aula, pois a maioria dos professores utiliza o livro didático. Desse modo, o processo de aprendizagem do conceito de função fica prejudicado qualitativamente, gerando obstáculos aos discentes.

Além disso, percebemos um grande progresso com a elaboração da sequência didática como a aplicação dos questionários e lista de exercícios, pois muitos alunos identificaram diversos gráficos, tabelas, diagramas e expressões algébricas que representavam funções.

Outro fator importante foi o desempenho dos alunos nos exercícios que contextualizados que envolviam mudança de registros na representação de funções, esses alunos evoluíram bastante e puderam relacionar esses problemas com a realidade.

Sentimos também a necessidade de trabalhar mais profundamente alguns temas importantes do conceito de função, como domínio e imagem, mostrando suas diferenças e associando seus elementos. Esses conteúdos, juntamente com a mudança de registros na representação de função, deveriam demandar mais tempo para ser ensinado, para o aluno amadurecer esses conceitos importantes.

Enfatizamos a necessidade de mudança de postura do professor diante de algumas aplicações importantes do conceito, principalmente o trabalho com questões que envolvam raciocínio dos alunos e trabalham as mudanças de registro na representação das funções.

De modo geral, podemos dizer que a nossa pesquisa cumpriu o objetivo almejado e acredito que o seu conteúdo pode ajudar tanto alunos quanto professores nesse assunto tão complexo e abstrato que é o conceito de função.

REFERÊNCIAS

[1] BALESTRI, R. D. Matemática: Interação e Tecnologia, volume 1, Ensino Médio. 2. ed. São Paulo: Leya Editora, 2016.

[2] LEONARDO, F. M. Conexões com a Matemática, volume 1, Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2016.

[3] CHAVANTE, E. Quadrante Matemática 1, Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

[4] IEZZI, G. Matemática Ciência e Aplicações, volume 1, Ensino médio. 9. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2016.

[5] SMOLE, K. S. Matemática Para Compreender O Mundo - Volume 1, Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2016.

[6] PAIVA, M. Matemática Paiva 1, Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

[7] DANTE, L. R. Matemática - Contexto e Aplicações, Volume 1, Ensino Médio. 3. Ed. São Paulo: Editora Ática, 2016.

[8] SOUZA, J. R. #Contato Matemática, Volume 1, Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Volume 2. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Guia de livros didáticos: PNLD 2015: Matemática: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2014.

HARDY, M. et al. History of the concept function. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_the_function_concept>.

FLOSRIVAL, S. F. Outro olhar sobre a análise de livros didáticos, dissertação de mestrado, Campo Grande, 2017.

RUTHING, D. Some Definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Boubarki. The Mathematical Intelligencer, 6 (4), 1984, p.72-77

YOUSCHKEVlTCH, A. R. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. Archive for history of exact sciences, 16 (1), 1976, p. 37-85.

BOYER, C. B. História da Matemática. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

SIERPISNKA, A. The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy – On Uderstanding the Notion de Function, MAA Notes and Reports Series, United States of America, 1992. p. 25-58.

SILVA, M. H. M. e REZENDE, W. M. Análise histórica do conceito de função. Caderno Dá Licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.2. p. 28-33. Niterói, 1999.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, v.20, n°4, 1989, p. 282-300. 1989.

BACHELARD, GASTON. A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

STEINBRINK, JOHN E. School Science and Mathematics - Using Cooperative Groups in Science Teaching. 1989. p 541 - 551

APÊNDICE A – Questionário aplicado aos Professores

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – UERJ
PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Este instrumento tem como objetivo a obtenção de dados dos professores de Matemática com a finalidade de fornecer subsídios para a Dissertação de Mestrado PROFMAT de Célio Fernando Santos de Mattos. Desse modo, suas respostas são fundamentais para qualificar as informações geradas por este questionário.

PERGUNTAS:

1) Há quanto tempo atua no Ensino da Matemática ?

(   ) Há menos de 1 ano

(   ) de 1 a 5 anos

(   ) de 6 a 10 anos

(   ) de 11 a 20 anos

(   ) há mais de 20 anos

2) Qual a sua formação profissional/acadêmica?

(   ) Graduado em Matemática / (   ) Licenciatura ; (   ) Bacharelado

(   ) Pós Graduado, curso ___________________________

(   ) Estudante, curso ___________________________

(   ) Não Graduado

(   ) Outros, ___________________________

3) Atua como docente em qual segmento de ensino?

(   ) Fundamental

(   ) Médio

(   ) Superior

4) Atua como docente em qual tipo de escola?

(   ) Municipal

(   ) Estadual

(   ) Federal

(   ) Particular

5) Você utiliza livro didático?

( ) Sim. Qual? (autor e título)

____

(   ) Não. Qual é o motivo?

____

6) Você acha que o livro didático é importante para o ensino de funções?   A teoria e os exercícios são adequados? Justifique?

____

____

____

____

7) Quais os métodos, em sala de aula, que você utiliza para ensinar funções?

(   ) Resolução de Problemas

(   ) Aula expositiva

(   ) Trabalho em grupo

(   ) Recursos tecnológicos (computador, data show...)

(   ) Outros. Quais?

8) Você utiliza material didático para ensinar funções? Quais?

____

____

____

9) Defina função?

____

____

10) Na sua opinião, qual é a melhor definição para função? Qual é o motivo?

11) Na sua opinião, qual é a maior dificuldade dos alunos com relação ao aprendizado das funções?

12) O que é mais difícil de ensinar para o aluno?

(   ) Conceito de função

(   ) Representação gráfica de uma função

(   ) Representação algébrica da função

13) Você utiliza quais mudanças na forma de representar funções?

(   ) Gráfica para Algébrica

(   ) Algébrica para Gráfica

(   ) Numérica para Gráfica

(   ) Numérica para Algébrica

(   ) Verbal para algébrica

(   ) Verbal para gráfica

APÊNDICE B – Atividade Inicial para Alunos

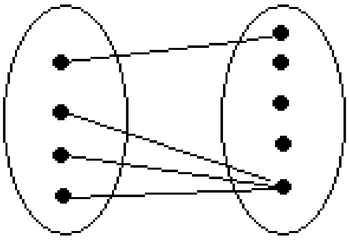
NOME: ____ ,
TURMA:__________ DATA: ____/____/ 2019

1) O que você entende por função? Explique com suas palavras.

2) De que forma(s) podemos representar uma função?

3) Assinale os diagramas abaixo que representam uma função de A em B.

a)

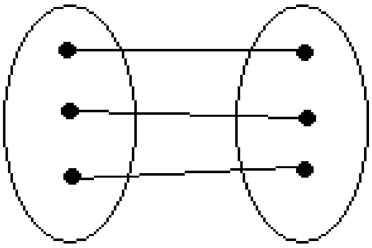


( ) REPRESENTA

( ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:

b)

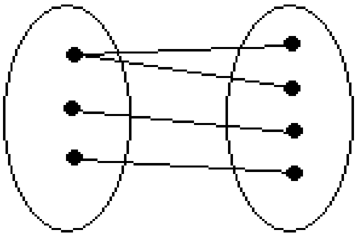


( ) REPRESENTA

( ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:

c)



( ) REPRESENTA

( ) NÃO REPRESENTA

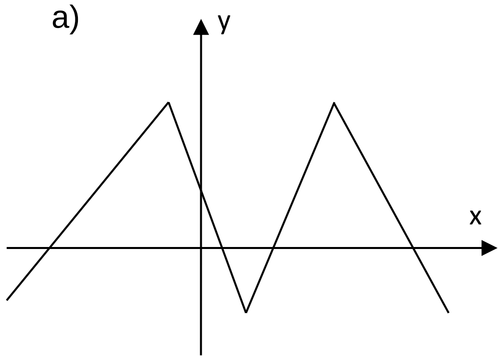
JUSTIFIQUE:____

____

____

4) Verifique quais gráficos abaixo representam y em função de x.

a)



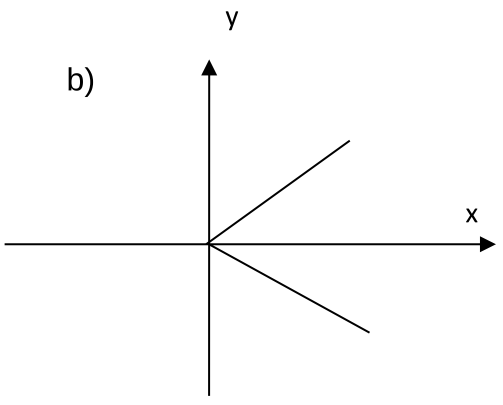
(   ) REPRESENTA

(   ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:____

____

b)



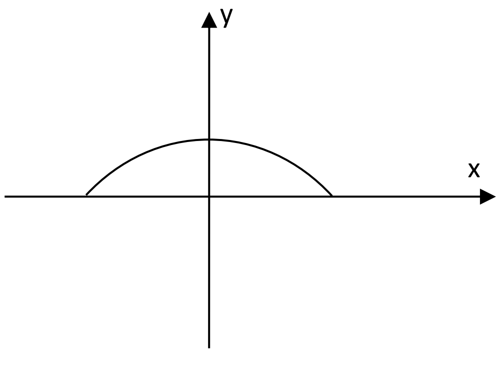
(   ) REPRESENTA

(   ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:____

____

c)



(   ) REPRESENTA

(   ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:____
____
____

5) Indique, sempre justificando, quais das formas abaixo representam uma função.

a) y = 2x + 1 ( ) REPRESENTA

( ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:____
____

b) $y = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ x - 1, se\ x < 0 \end{cases}$ ( ) REPRESENTA

( ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:____
____

c) y = $\sqrt{x - 5}$ ( ) REPRESENTA

( ) NÃO REPRESENTA

JUSTIFIQUE:____
____

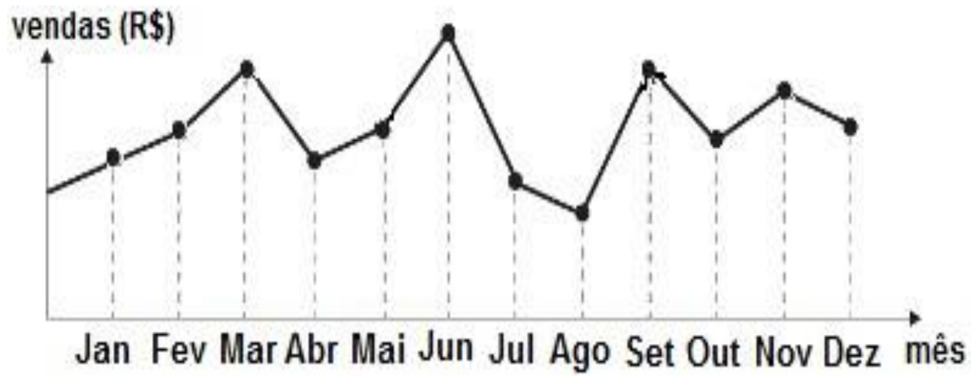
APÊNDICE C – Atividades Grupo 1 (alunos)

NOME: ____ , TURMA:_________ DATA: ____/____/ 2019

ATIVIDADE 1

Questão 01

O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



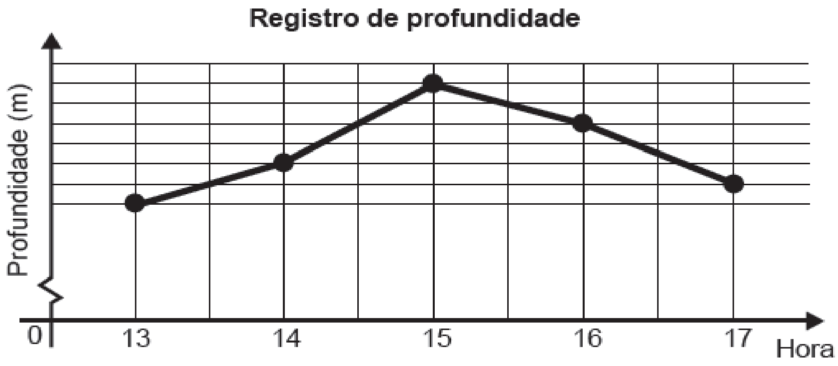
De acordo com o gráfico acima, responda as perguntas abaixo:

a) Em qual mês ocorreu a menor quantidade de vendas desse medicamento?

b) Em qual mês ocorreu a maior quantidade de vendas desse medicamento

Questão 02

Num dia de tempestade, a alteração da profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro. Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu 10%.



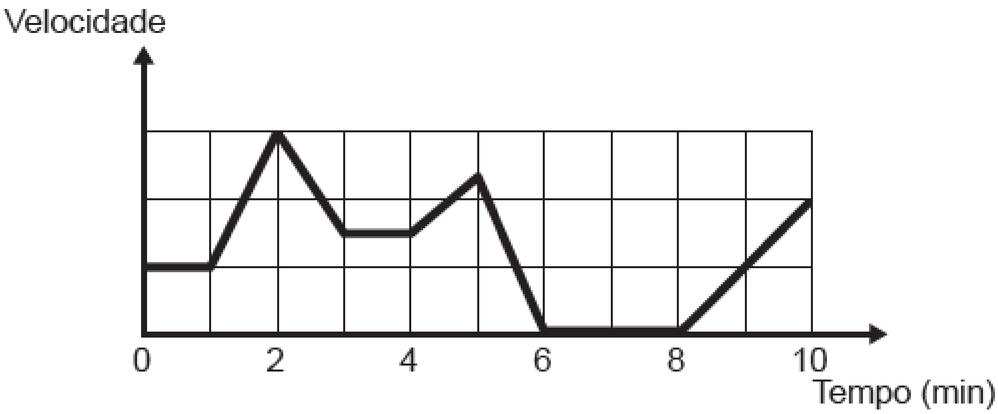
De acordo com as informações acima, responda:

a) Qual é o valor da profundidade h, em metros, registrada ás 13 horas?

b) Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metros, no local onde foi feito os registros?

Questão 03

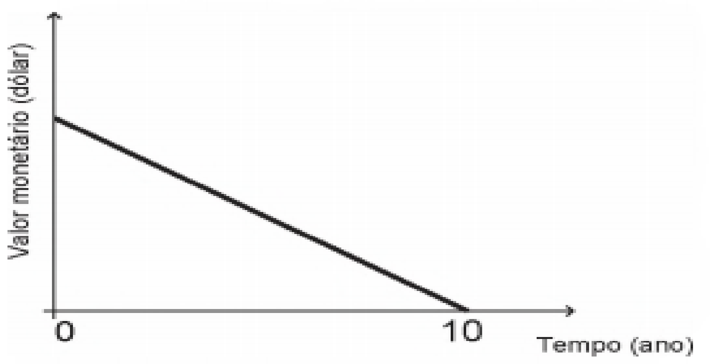
Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo do intervalo de um intervalo de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

Questão 04

Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



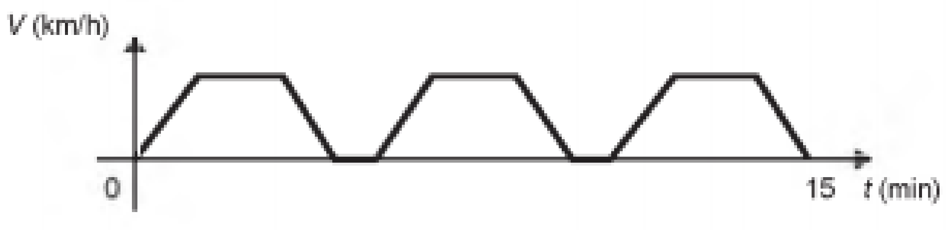
Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente.

Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

QUESTÃO 05

Um semáforo é composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender.

O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto.



Em quantos semáforos ele parou?

APÊNDICE D – Atividades Grupo 2 (alunos)

NOME: ____ ,
TURMA:_________ DATA: ____/____/ 2019

ATIVIDADE 2

Questão 01

Um promotor de eventos foi a um supermercado para comprar refrigerantes para uma festa de aniversário. Ele verificou que os refrigerantes estavam em garrafas de diferentes tamanhos e preços. A quantidade de refrigerante e o preço de cada garrafa, de um mesmo refrigerante, estão na tabela.

Garrafa	Quantidade de refrigerante (litro)	Preço (R$)
Tipo I	0,5	0,68
Tipo II	1,0	0,88
Tipo III	1,5	1,08
Tipo IV	2,0	1,68
Tipo V	3,0	2,58

Para economizar o máximo possível, o promotor de eventos deverá comprar garrafas que tenham o menor preço por litro de refrigerante.

O promotor de eventos deve comprar garrafas do tipo I, II, III, IV ou V?

Questão 02

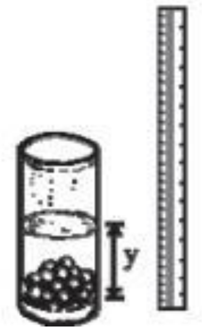
O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:
"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".
Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

Massa da embalagem (g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é?

Questão 03

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

Questão 04

Numa caminhada, os participantes A e B desenvolveram os seguintes ritmos:

Intervalo de tempo (minutos)	Distância percorrida em cada intervalo (metros)	
	Participante A	Participante B
De 0 a 10	700	600
De 10 a 20	680	570
De 20 a 30	660	540
De 30 a 40	640	510
. . .	. . .	. . .

Sabendo-se que A e B iniciaram a caminhada juntos e de um mesmo ponto, e que as sequências estabelecidas foram mantidas, por ambos, até o final do passeio, a distância, em metros, entre o participante A e o B, no exato momento em que B parou de caminhar é?

Questão 05

As fábricas de pneus utilizam-se de modelos matemáticos próprios em sua produção, para a adaptação dos vários tipos de pneus aos veículos: de bicicletas a caminhões, tratores e aviões. Um dos conceitos utilizados pela indústria é o de "índice de carga", que está relacionado à carga máxima que pode ser suportada por um pneu. Uma empresa fabricante de pneus apresenta o seguinte quadro, relativo às cargas máximas suportadas por pneus cujos índices variam de 70 a 80. Há um comportamento regular em alguns intervalos, como se observa entre os índices de 70 a 74.

ÍNDICE DE CARGA	CARGA MÁXIMA (kg)
70	335
71	345
72	355
73	365
74	375
75	387
76	400
77	412
78	425
79	437
80	450

Disponível em: http://www.goodyear.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Determine a equação que representa a dependência entre o índice de carga (I) e a carga máxima (C), em kg, no intervalo de 70 a 74.

APÊNDICE E – Atividades Grupo 3 (alunos)

NOME: ____ ,
TURMA:_________ DATA: ____/____/ 2019

ATIVIDADE 3

Questão 01

Em uma cidade, os impostos que incidem sobre o consumo de energia elétrica residencial são de 30% sobre o custo do consumo mensal. O valor total da conta a ser paga no mês é o valor cobrado pelo consumo acrescido dos impostos. Considerando *x* o valor total da conta mensal de uma determinada residência e *y* o valor dos impostos, qual é a expressão algébrica que relaciona *x* e *y*?

Questão 02

Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado.

Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km.

Determine o custo da corrida em cada cidade.

Questão 03

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde- amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

Questão 04

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880605 trabalhadores com carteira assinada.
Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é?

Questão 05

Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é?

APÊNDICE F – Atividades Grupo 4 (alunos)

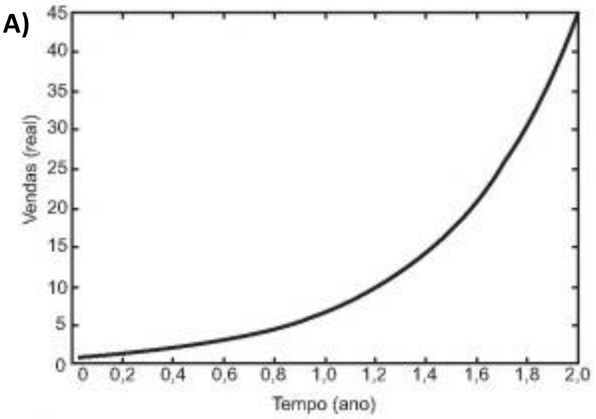
NOME: ____ ,
TURMA:_________ DATA: ____/____/ 2019

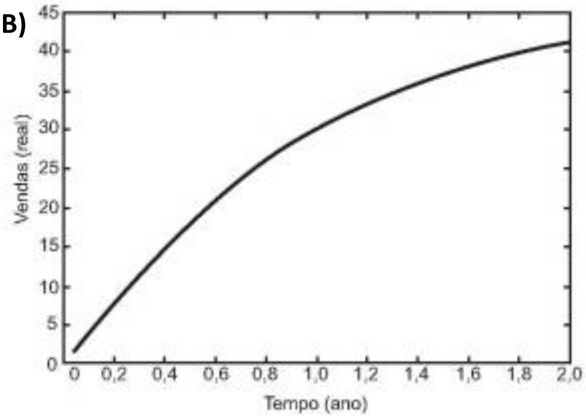
ATIVIDADE 4

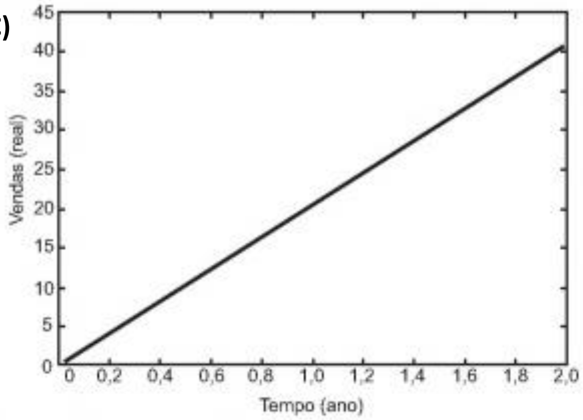
Questão 01

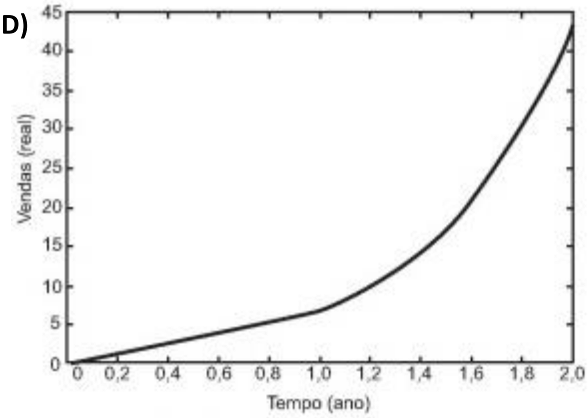
Ao abrir um negócio, um microempresário descreveu suas vendas, em milhares de reais (unidade monetária brasileira), durante os dois primeiros anos. No primeiro ano, suas vendas cresceram de modo linear. Posteriormente, ele decidiu investir em propaganda, o que fez suas vendas crescerem de modo exponencial.

Qual é o gráfico que melhor descreve as vendas em função do tempo?

A)


B)


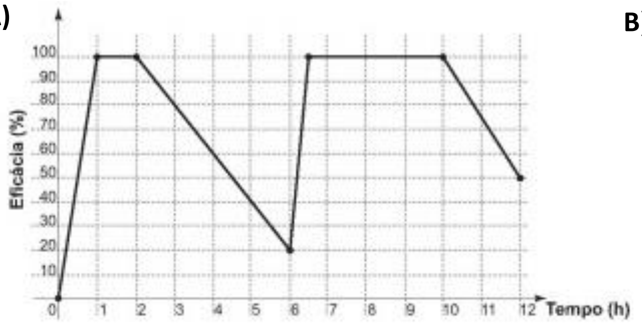
C)


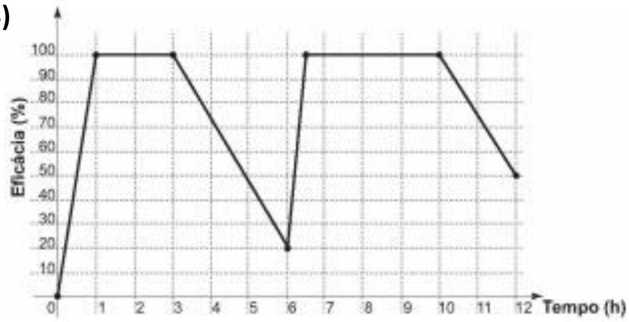
D)


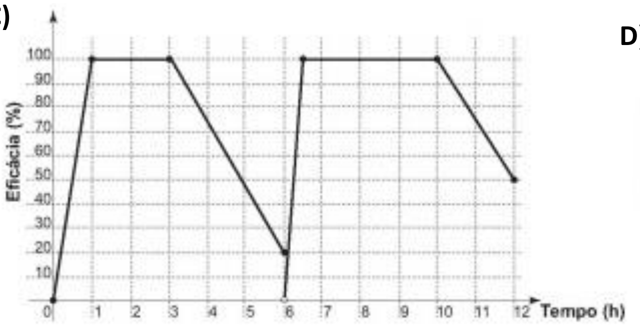
Questão 02

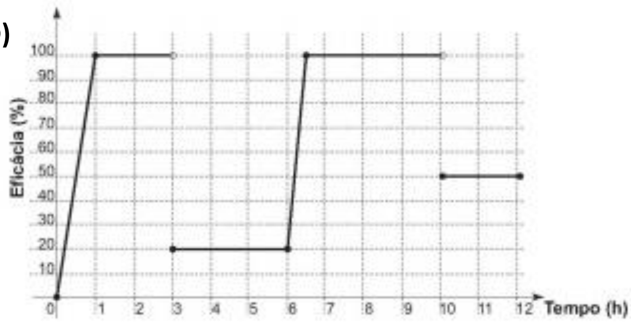
Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2 h. Após essas 2 h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?

A)


B)


C)


D)


Questão 03

O equilíbrio na conta dos saltos

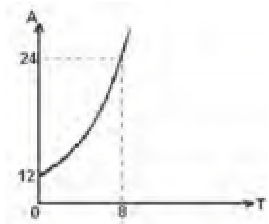
A expressão desenvolvida por cientistas ingleses relaciona as variáveis que influem na altura dos sapatos femininos.

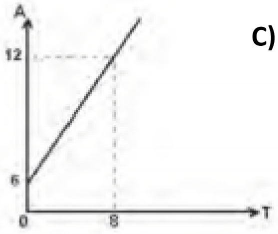
Tal expressão é dada por $A = Q \times \left(12 + \frac{3T}{8}\right)$, onde *A* é a altura do salto, *Q* é um coeficiente e *T* o tamanho do sapato. O coeficiente Q depende de diversas variáveis, entre as quais, o impacto que o salto deve provocar nas pessoas que o vejam em uso, que pode valer de zero a 1.

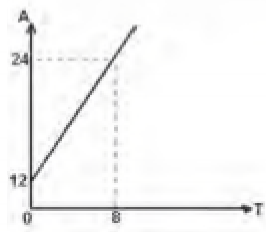
Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

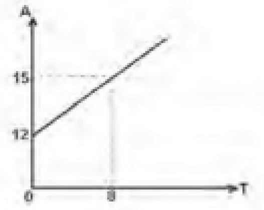
Júlia construiu corretamente o gráfico que revela o desenvolvimento da função citada no texto, considerando o coeficiente $Q = 1$.

Dos gráficos apresentados, fora de escala, qual foi o construído por Júlia?

A)


B)


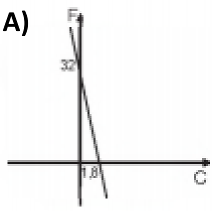
C)


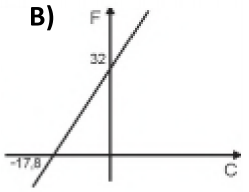
D)


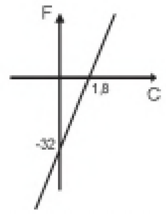
Questão 04

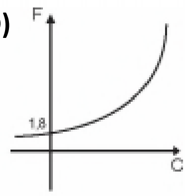
o Brasil, costumamos medir temperaturas utilizando a escala Celsius. Os países de língua inglesa utilizam a escala Farenheit. A relação entre essas duas escalas é dada pela expressão $F = 1{,}8 \cdot C + 32$, em que F representa a medida da temperatura na escala Farenheit e C a medida da temperatura na escala Celsius.

O gráfico que representa a relação entre essas duas grandezas é

A)


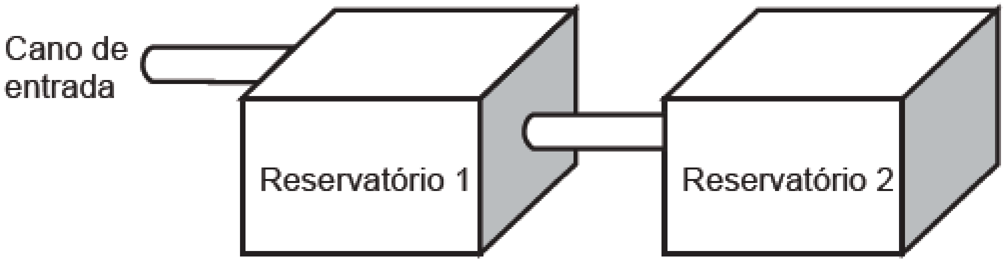
B)


C)


D)


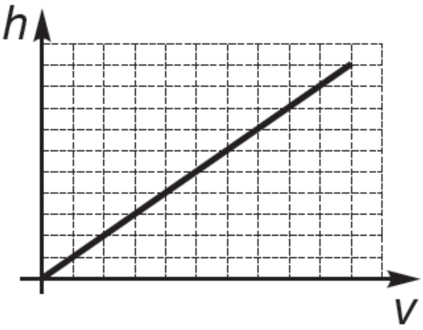
Questão 05

A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de um bloco retangular, ligados entre si por um cano de entrada, conforme ilustra a figura

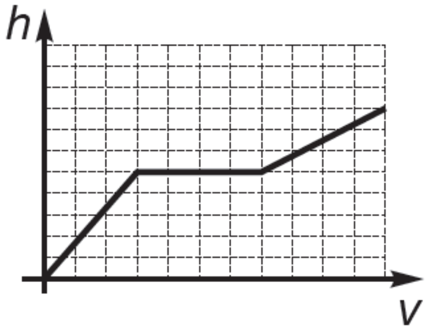


A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.
Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V de água no sistema?

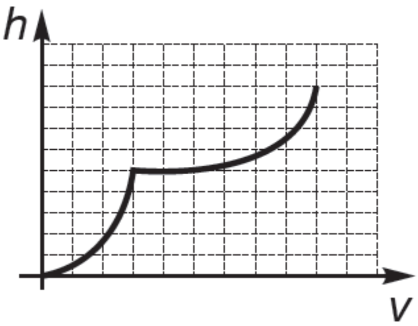
A)



B)



C)



D)