



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

JONATHAN LAVOR DA COSTA

**O USO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS NO
SETOR DE FINANÇAS**

TERESINA

2013

JONATHAN LAVOR DA COSTA

**O USO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS NO SETOR DE
FINANÇAS**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Roger Peres de Moura

TERESINA

2013

FICHA CATALOGRAFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitaria Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processamento Técnico

C8376u Costa, Jonathan Lavor da

O uso de exponenciais e logaritmos no setor de finanças /
Jonathan Lavor da Costa .- 2013.

60f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Univesidade
Federal do Piauí, Teresina, 2013.

Orientação: Prof^o. Dr. Roger Peres de Moura

1. Logaritmos. 2. Exponenciais. 3. Capitalização. I. Título.

CDD 512.922

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao Deus todo poderoso, Jeová, pela vida, paz e alegria que provêm de adorá-lo.

Agradeço, em especial, à minha amada esposa, Paula, pelo amor, compreensão, e preciosa ajuda neste trabalho.

Ao professor Dr. Roger Peres Moura, pela orientação, ensinamentos e pela valiosa colaboração durante este trabalho.

Agradeço aos professores, Isaías Pereira de Jesus e Jurandir Oliveira Lopes pelas críticas e sugestões de aperfeiçoamento para este trabalho.

Agradeço a todos os professores que participaram nesta minha formação acadêmica.

Agradeço a meus familiares, em especial a meus pais, Francisco e Evanira, pelo apoio constante e encorajamento nos momentos difíceis. Sou grato a meu irmão e a todos os demais familiares e amigos pelas palavras de conforto e incentivo.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

“Assim disse Jeová, teu Resgatador, o Santo de Israel: Eu, Jeová, sou teu Deus, Aquele que te ensina a tirar proveito, Aquele que te faz pisar no caminho em que deves andar”.

Isaías 48:17.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é, motivar a inserção da educação financeira no currículo das escolas, e para isso apresentamos alguns resultados sobre exponenciais e logaritmos que se aplicam ao regime de capitalização composta, os quais compreendem os juros compostos, taxas de juros, descontos compostos e rendas uniformes postecipadas e antecipadas.

Palavras - chave: exponenciais, logaritmos, capitalização.

Abstract

The main objective of this work is to motivate the inclusion of financial education in the curriculum high schools, and for this we present some results about exponential and logarithms that apply to a funded composed, which comprise the compound interest, interest rates, discounts compounds and rents uniforms postecipadas compounds and anticipated.

Keywords: exponential, logarithmic, capitalization.

Sumário

1	Introdução	1
2	Um pouco da História dos Logaritmos	3
3	Preliminares	6
3.1	Potência de um expoente Natural	6
3.2	Raiz n-ésima	8
3.3	Potência de Expoente Racional	10
3.4	Função Exponencial	10
3.5	Logaritmos	16
4	Juros Compostos	20
4.1	Conceitos básicos	20
4.2	Períodos não Inteiros	23
4.3	Equivalência de Capitais a Juros Compostos	25
5	Taxas de Juros	28
5.1	Tipos de taxas	28
5.2	Capitalização Contínua	33
6	Descontos Compostos	36
6.1	Conceitos Básicos	36
6.2	Desconto Comercial Composto	37
6.3	Desconto Racional Composto	39
6.4	Equivalência de Capitais	40

Sumário	vi
7 Rendas	42
7.1 Conceitos básicos	42
7.2 Rendas uniformes	44
Considerações Finais	48
Referências Bibliográficas	50

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudaremos o uso de exponenciais e logaritmos no setor financeiro utilizando para tanto o fato de as definições e propriedades destas duas funções serem empregadas no regime de capitalização composta, onde um capital (C) empregado a uma taxa (i) dada será transformada após (n) períodos de tempo em um montante baseado na seguinte função:

$$M_n = C_0(1 + i)^n,$$

mostrando assim que no regime de capitalização composta, o montante cresce exponencialmente em progressão geométrica ao longo do tempo, pois os rendimentos de cada período são ajuntados ao saldo devedor e passam, por sua vez, a render juros.

Nosso principal objetivo é do ponto de vista do ensino de matemática mostra que é possível aprender finanças.

Existem várias aplicações do regime de capitalização composta, entre elas mencionaremos as rendas que são uma série de capitais disponíveis ou pagamentos (termos) com vencimentos em datas diferentes a uma taxa de juros fixada. Abordaremos como encontrar o valor atual de uma renda, ou seja, o valor de um bem da data focal zero dada pelo somatório dos valores presentes de cada um dos pagamentos bem como o seu valor futuro, isto é, o somatório dos termos capitalizados após o último pagamento.

Em resumo, o trabalho esta dividido da seguinte forma:

No capítulo 2, faremos um breve histórico sobre logaritmos e matemática financeira, lembrando alguns conceitos e propriedades básicas.

No capítulo 3, apresentamos o conteúdo básico de exponencial e logaritmos através de definições, proposições, lemas e teoremas.

No capítulo 4, faremos uma abordagem sobre o regime de capitalização composta onde a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior, mostrando que o valor dos juros cresce em função do tempo. Em seguida, tratamos de equivalências de capitais que nos permite fazer comparações de valores diferentes referentes a datas diferentes, considerando uma dada taxa de juros. Informações estas de fundamental importância ao discente no ensino básico, pois servirá de incentivo ao considerar uma aplicação financeira.

No capítulo 5, apresentamos os variados tipos de taxas de juros as quais pertencem ao regime de capitalização composta, com o intuito de incentivar o aluno a observar e aprender sobre a importância da homogeneização entre as unidades da taxa e do prazo de capitalização ao realizar uma análise financeira.

No capítulo 6 estudamos os tipos de descontos usados no setor financeiro e novamente tratamos sobre equivalências de capitais mostrando a importância de saber fazer comparações numa aplicação financeira visto que é frequente a necessidade de antecipar ou prorrogar um título. Isto se dá, quando desejamos substituir um título por outro ou por vários, ou temos vários títulos e desejamos trocar por outro título ou por vários.

Finalmente, no capítulo 7 faremos uma breve abordagem sobre rendas uniformes como sequência de capitais disponíveis em datas diferentes. Estes capitais podem referir-se a pagamentos de várias prestações que quitarão uma dívida assumida hoje em forma de empréstimo ou de algum bem adquirido a prazo, bem como a recebimentos com a finalidade de construir um montante futuro. E em todos estes capitais nos mostram como o uso de logaritmos é essencial para tanto facilitar como simplificar os cálculos no setor de finanças.

Capítulo 2

Um pouco da História dos Logaritmos

Com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, tanto a ciência quanto o comércio tornaram-se mais avançados e sofisticados, com isso aumentou tanto o interesse como a necessidade de trabalhar com grandes números, frações e decimais. Os cálculos se tornaram difíceis, cansativos e demorados, e as pessoas buscavam maneiras de torná-los mais objetivos e viáveis. Então, achar um método que permitisse efetuar com rapidez multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema essencial.

A busca pela solução deste "problema" veio com uma grande descoberta científica feita simultaneamente por duas ou mais pessoas trabalhando independentemente. Isto se deu com os logaritmos. Diversos matemáticos contribuíram na construção dos logaritmos que conhecemos hoje, porém, um ficou eternizado por suas publicações: John Napier (1550–1617). Napier um nobre teólogo escocês, não era matemático profissional, mas tinha a matemática como lazer. Seu interesse era por alguns aspectos da computação e trigonometria, especialmente estudos relacionados à simplificação de cálculos. Napier elaborou uma tábua de logaritmos com o objetivo de simplificar as operações, principalmente a de produtos e quocientes.

Além de Napier, o suíço Joost Bürgi (1552–1632), também contribuiu para o surgimento dos logaritmos produzindo trabalhos a respeito desse tema. Napier e Bürgi lançaram suas tábuas de logaritmos em 1614 e 1620, respectivamente. O primeiro fez seu lançamento em Edimburgo e o segundo, em Praga. O uso dos logaritmos, sem dúvida, foi uma invenção extraordinária para a época, chegando ao conhecimento de muitos amantes da Matemática, após a publicação de Napier, em 1614. Muitos matemáticos ficaram

encantados com os trabalhos de Napier, dentre eles Henry Briggs (1561–1631), o responsável pelo aparecimento dos logaritmos decimais. Briggs publicou suas primeiras tábuas em 1617; e depois, em versão bem mais ampliada, em 1624.

Durante o século XVI, as operações eram classificadas em três espécies: 1ª espécie: adição e subtração; 2ª espécie: multiplicação e divisão e; 3ª espécie: potenciação e radiciação. Naquela época, não existiam as calculadoras existentes atualmente, e assim a única maneira de executar cálculos envolvendo adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação de números muito grandes era reduzir as operações de 2ª e 3ª espécies em operações de 1ª espécie.

Durante os quatro séculos que sucederam à descoberta dos logaritmos, sua utilidade revelou-se crucial na Ciência e na Tecnologia. Kepler, por volta de 1620, atestava seu reconhecimento pela nova descoberta que segundo ele "aumentava vastamente o poder computacional do astrônomo". Com o tempo os logaritmos, como comumente eram utilizados, perderam esse lugar de eficiente calculador. Apesar disso, os logaritmos continuam, por motivos bem diversos, a merecer uma posição de destaque no ensino de Matemática, devido a sua posição central que ocupam nesta ciência e em suas aplicações. Esta posição é permanente, pois a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, constituem a única maneira de descrever matematicamente o progresso de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decréscimo) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

Como já mencionado a utilização cada vez mais eficiente e divulgada das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam muito do seu interesse como ferramenta de cálculo, o mesmo acontecendo com outras tabelas matemáticas. Todavia, o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de grande importância. Em decorrência disto, embora eles tenham sido criados como instrumento para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio validar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos, estão intimamente relacionados com esta notável criação - os logaritmos - que tanto enriqueceram quanto "suavizaram" os cálculos aritméticos.

Pensando no uso de logaritmos no setor financeiro e sua aplicação no Ensino Médio é que surgiu a idéia de demonstrar por meio de teoremas as diversas aplicações na área de finanças de maneira fácil e utilitária.

Muitos fenômenos que conhecemos hoje podem ser representados por modelos matemáticos envolvendo logaritmos. As funções exponenciais e logarítmicas são importantes nesse estudo, pois são usadas para descrever muitos fenômenos, sendo aplicado especialmente na matemática financeira.

A Matemática Financeira, dentre várias definições, "é a ciência que estuda o dinheiro no tempo"(Lawrence Jeffrey Gitman). O conhecimento de Matemática Financeira é indispensável para compreender e operar nos mercados financeiro e de capitais, e atuar em administração financeira com baixo tempo e custo de decisão.

Capítulo 3

Preliminares

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre exponenciais e logaritmos, destacando definições, propriedades básicas, gráficos e exemplos que serão usados para simplificar a resolução de cálculos no setor de finanças. Para escrever a teoria exposta neste capítulo consultamos as referências: [1], [4] e [5].

3.1 Potência de um expoente Natural

Definição 1. *Sejam a um número real e n um número natural. Chamamos de uma potência de base a e expoente n o número a^n tal que*

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a \cdot a^{n-1}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Proposição 1 (Propriedades de potenciação). *Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então são válidas as seguintes propriedades:*

- i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$.
- iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- iv. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.
- v. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$.

Demonstração. A demonstração das propriedades será feita por indução sobre n .

i. Considerando m fixo, a propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0.$$

Agora, suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ e mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato,

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}.$$

ii. Para m fixo, a propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$a^{m-0} = a^m = \frac{a^m}{1} = \frac{a^m}{a^0}.$$

Agora, suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$ e mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$.

Observemos que,

$$\frac{a^m}{a^{k+1}} = \frac{a^m}{a^k \cdot a} \stackrel{\text{Hip.}}{=} \frac{a^{m-k}}{a} = \frac{a \cdot a^{-1} \cdot a^{m-k}}{a} = a^{m-(k+1)}.$$

iii. Seja m fixo. A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$.

Agora, suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $(a^m)^k = a^{m \cdot k}$ e mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$.

Observe que,

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m) \stackrel{\text{Hip.}}{=} a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m(k+1)}.$$

iv. A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois $(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$.

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $m = k$, isto é, $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$, mostremos que é verdadeira para $m = k + 1$.

De fato,

$$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b) \stackrel{\text{Hip.}}{=} a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

v. A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois $\frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$.

Agora, suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $m = k$, isto é, $\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$, $b \neq 0$.

Observe que,

$$\frac{a^{k+1}}{b^{k+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^k \cdot a}{b^k \cdot b} = \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} \stackrel{\text{Hip.}}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}, \quad b \neq 0$$

□

Proposição 2 (Potência de um Expoente Inteiro Negativo). *Se a um número real não nulo, e n um número natural, então:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Demonstração. Com efeito, sendo que $a^0 = 1$, podemos escrever, em virtude do item i., da Proposição 1,

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Portanto, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

□

3.2 Raiz n-ésima

Definição 2. *Seja a um número real onde $a \geq 0$ e n um número natural. Então existe um número real $b \geq 0$ tal que*

$$b^n = a.$$

Chamaremos b de raiz n -ésima de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, onde a é o radicando e n é o índice. Normalmente, quando o índice é omitido da notação, a raiz é quadrada ($n = 2$). Nos outros casos, ele é expresso claramente.

Obs. 1. *Por definição, temos que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.*

Obs. 2. *A raiz quadrada de um quadrado perfeito é $\sqrt{a^2} = |a|$, onde $|a|$ é o valor absoluto de a , ou seja, $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$.*

Proposição 3 (Propriedades de Radiciação). *Se a, b são números reais não negativos, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}^*$, então são válidas as seguintes propriedades:*

i. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.

ii. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

iii. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

iv. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

v. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a}$.

Demonstração.

i. Fazendo $\sqrt[n]{a^m} = x$, e usando a Obs. 1, temos que:

$$x^{n \cdot k} = (\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot k} = (a^m)^k \Rightarrow x = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}.$$

ii. Fazendo $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, temos que:

$$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

iii. Fazendo $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, segue que:

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} \Rightarrow x^n = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

iv. Considerando n fixo e $m \geq 0$, faremos indução sobre m . A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois $(\sqrt[n]{a})^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}$.

Suponha que a propriedade é verdadeira para $m = k$, isto é $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Mostremos que é verdadeira para $m = k + 1$.

$$\text{De fato, } (\sqrt[n]{a})^{k+1} = (\sqrt[n]{a})^k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^k \cdot a} = \sqrt[n]{a^{k+1}}.$$

Se $m < 0$, façamos $-m = q > 0$. Daí

$$(\sqrt[n]{a})^m = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^q} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

v. Fazendo $x = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$, temos que:

$$x^k = \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^k = \sqrt[n]{a} \Rightarrow (x^k)^n = a \Rightarrow x^{k \cdot n} = a \Rightarrow x = \sqrt[k \cdot n]{a}.$$

□

3.3 Potência de Expoente Racional

Definição 3. Seja $a > 0$ um número real e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$). Chamamos potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ a relação

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Obs. 3. Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, então $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Proposição 4 (Propriedades de potências com expoente racional). *Sejam $a > 0$ e $b > 0$ números reais, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Então são válidas as seguintes propriedades:*

- i. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$.
- ii. $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$.
- iii. $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$.
- iv. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.
- v. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$.

Demonstração.

- i. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s}} \cdot \sqrt[q \cdot s]{a^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s} \cdot a^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s + r \cdot q}} = a^{\frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$.
- ii. $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{\sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s}}}{\sqrt[q \cdot s]{a^{r \cdot q}}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s - r \cdot q}} = a^{\frac{p \cdot s - r \cdot q}{q \cdot s}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$.
- iii. $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$.
- iv. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.
- v. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{p \cdot r}}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot r}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$.

□

3.4 Função Exponencial

Definição 4. *Seja a um número real tal que $0 < a \neq 1$. Chamamos de função exponencial a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada x real o número a^x .*

Notação: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto a^x$.

Os Lemas e os Teoremas a seguir mostrarão que para um número real positivo a , a função exponencial é crescente (decrecente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$).

Lema 1. *Sejam o número real a tal que $a > 1$ e n um número inteiro. Então $a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.*

Demonstração. Faremos indução sobre n , $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$.

A proposição é verdadeira para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$.

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = k$, isto é, $a^k > 1$ e mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$.

Observemos que,

$$a > 1 \Rightarrow a^k \cdot a > a^k \cdot 1 \Rightarrow a^{k+1} > a^k > 1.$$

Provaremos, por absurdo, a proposição: $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$.

Suponhamos que $n \leq 0$. Assim $-n \geq 0$. Observemos que $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$ e por (i) $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$ portanto, $-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \cdot 1 \Rightarrow 1 \geq a^n$ (absurdo), pois contraria a hipótese de $a^n > 1$. Logo, $n > 0$. \square

Lema 2. *Seja a um número real tal que $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$. Então $a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$.*

Demonstração. Provemos primeiramente que $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$.

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}^*$. Então: $a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$. Pelo lema 1, se $(a^{\frac{1}{q}})^q > 1$ e $q > 0$ então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Ainda pelo mesmo lema, se $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$ então $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1$, ou seja, $a^r > 1$.

Provemos agora que: $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$.

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, então $a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Supondo, $q > 0$ e por (i), temos pelo Lema 1: $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1 \Rightarrow p > 0$.

Logo, $q > 0$ e $p > 0 \Rightarrow \frac{p}{q} > 0$.

Suponhamos agora que $q < 0$, isto é, $-q > 0$. Pelo Lema 1 temos:

$$a^{\frac{-1}{q}} > 1 \text{ e } (a^{\frac{1}{q}})^p = (a^{\frac{-1}{q}})^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0.$$

Logo, $q < 0$ e $p < 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$. \square

Lema 3. *Seja a um número real tal que $a > 1$, r e s racionais. Assim $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.*

Demonstração.

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1 \stackrel{\text{Lema 2}}{\Leftrightarrow} s - r > 0 \Leftrightarrow s > r.$$

□

Definição 5. *Sejam a um número real tal que $a > 0$ e α irracional, a^α é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r , com r racional menor que α e cujas aproximações por excesso são as potências a^s , com s racional maior do que α .*

Lema 4. *Sejam a um número real tal que $a > 1$ e α irracional. Então $a^\alpha > 1$ se, e somente se, $\alpha > 0$.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos que definem o número irracional α , $A_1 = \{r \in \mathbb{Q} | r < \alpha\}$ e $A_2 = \{s \in \mathbb{Q} | s > \alpha\}$ e em correspondência os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem a^α : $B_1 = \{a^r | r \in A_1\}$ e $B_2 = \{a^s | s \in A_2\}$.

(i) Provaremos inicialmente que $\alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha > 1$.

Pela definição do número α irracional e positivo, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $0 < r < \alpha < s$.

Pelo Lema 2, como $a > 1$, $r > 0$ e $s > 0$, temos:

$$a^r > 1 \text{ e } a^s > 1.$$

Pelo Lema 3, como $a > 1$ e $r < s$, temos que $1 < a^r < a^s$ e, agora, pela definição de potência de expoente irracional, segue

$$1 < a^r < a^\alpha < a^s \Rightarrow a^\alpha > 1$$

(ii) Provaremos por absurdo que $a^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$.

Suponhamos, $\alpha < 0$, isto é, $-\alpha \geq 0$. Então, por, (i) resulta que

$$a > 1 \text{ e } -\alpha \geq 0 \text{ irracional} \Rightarrow a^{-\alpha} \geq 1.$$

Assim, $1 = a^{-\alpha} \cdot a^\alpha > a^\alpha 1 > a^\alpha$ (absurdo), pois contraria a hipótese. Logo $\alpha > 0$.

□

Lema 5. *Sejam a e b números reais tal que $a > 1$. Então, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.*

Demonstração. Temos que:

$$b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{Q}, & \xLeftrightarrow{\text{Lema 2}} a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0 \\ b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} & \xLeftrightarrow{\text{Lema 4}} a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0 \end{cases}.$$

□

Lema 6. *Sejam a e b números reais tal que $0 < a < 1$. Então,*

$$a^b > 1 \iff b < 0.$$

Demonstração. Se $0 < a < 1$ então $\frac{1}{a} > 1$. Seja $c = \frac{1}{a} > 1$. Pelo Lema 5 temos:

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0.$$

□

Teorema 1. *Sejam a , x_1 e x_2 números reais com $0 < a < 1$. Então,*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \iff x_1 < x_2.$$

Demonstração.

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \xLeftrightarrow{\text{Lema 6}} x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

□

Teorema 2. *Sejam a , x_1 e x_2 números reais tal que $a > 1$. Então $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$.*

Demonstração.

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \xLeftrightarrow{\text{Lema 5}} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

□

Teorema 3. *A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se $a > 1$ ($0 < a < 1$). Assim, dados os reais x_1 e x_2 , temos que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).*

Demonstração. Se $a > 1$, pelo Teorema 2, $a^{x_1 - x_2} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Se $0 < a < 1$, pelo Teorema 1, $a^{x_1 - x_2} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$. \square

Os gráficos das funções exponenciais $f(x) = a^x$, $a > 0$, são de uma das seguintes formas:

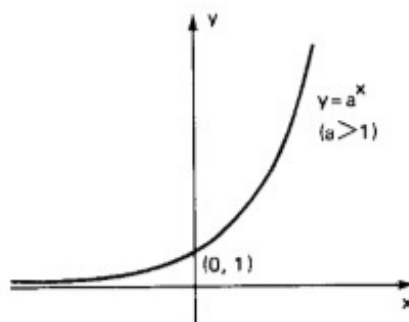


Figura 1

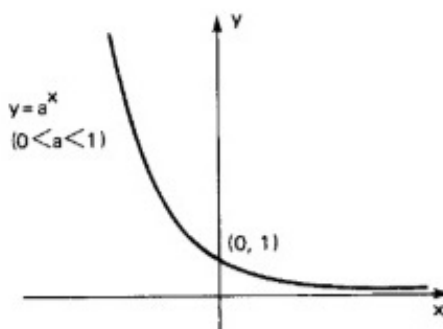


Figura 2

Com relação ao gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, observemos que:

- i) O gráfico está acima do eixo x , pois $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ii) Se $a > 1$, a^x é uma função crescente e se $0 < a < 1$, a^x é uma função decrescente.

Um caso especial de exponencial, talvez o mais importante, é a exponencial do número irracional e .

Na matemática, o número de Euler (e), denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice sobre logaritmos de John Napier. No

entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$$ke^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

para $r = k = 1$, ou seja, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Enunciaremos por meio de um teorema que a sequência de termo geral

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é convergente e que o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Teorema 4. *Seja n um número natural. A sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Vamos provar que a sequência que define e é crescente e limitada, portanto, tem limite. Pela fórmula do binômio de Newton,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots [n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Uma expressão para a_{n+1} , como essa última, é dada por:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Daí, observemos que cada um dos termos de (3.1) é inferior a cada um dos termos correspondentes a (3.2). Isso prova que $a_n < a_{n+1}$, isto é, a sequência (a_n) é crescente. Para provamos que ela é limitada, basta observarmos que cada parenteses que aparece em (3.1) é menor do que 1, logo segue que

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Sendo crescente e limitada, (a_n) tem limite, que é o número e . □

O valor aproximado para o número de Euler é $e = 2,718281828259045235360287\dots$

Colocando o número e no lugar de $a > 1$, obviamente, seguem todas as propriedades acima para e^x , $x \in \mathbb{R}$

3.5 Logaritmos

Definição 6. *Sejam a , b e x números reais tais que $a > 0$ e $0 < b \neq 1$. Chamamos de logaritmo de b na base a o número real x tal que $a^x = b$.*

NOTAÇÃO: $\log_b a = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Obs. 4. *Quando o valor da base logaritmo é 10, ela será então omitida e chamaremos $\log a$ de logaritmo decimal de a .*

Obs. 5. *Quando o valor da base do logaritmo é o número e , chamaremos $\log_e a$ ou simplesmente $\ln a$ (logaritmo natural de a).*

Obs. 6. *O logaritmo do número real 1 na base b para $0 < b \neq 1$ sempre será 0.*

Obs. 7. *O logaritmo do número real b na base b para $0 < b \neq 1$ sempre será 1.*

Obs. 8. *A potência de base b e expoente $\log_b a$ é igual a a , isto é $b^{\log_b a} = a$. De fato, se chamarmos $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \Rightarrow b^{\log_b a} = a$.*

Proposição 5 (Propriedades dos logaritmos). *Sejam a , b , c números reais tais que $a > 0$, $c > 0$ e $0 < b \neq 1$. Então valem as seguintes propriedades:*

i. $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$

ii. $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

iii. $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$

iv. $\frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

Demonstração. Sejam x , y e z números reais. Então,

i. Fazendo $\log_b a = x$, $\log_b c = y$ e $\log_b(a \cdot c) = z$, podemos ver que

$$\begin{cases} \log_b a = x, & \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_b c = y & \Leftrightarrow b^y = c \implies b^z = b^x \cdot b^y \Rightarrow b^z = b^{x+y} \Rightarrow z = x + y. \\ \log_b (a \cdot c) = z & \Leftrightarrow b^z = (a \cdot c) \end{cases}$$

Portanto, $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$.

ii. Façamos $\log_b a = x$, $\log_b c = y$ e $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = z$.

Tem-se então que

$$\begin{cases} \log_b a = x, & \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_b c = y & \Leftrightarrow b^y = c \implies b^z = \frac{b^x}{b^y} \Rightarrow b^z = b^{x-y} \Rightarrow z = x - y. \\ \log_b \left(\frac{a}{c}\right) = z & \Leftrightarrow b^z = \left(\frac{a}{c}\right) \end{cases}$$

Portanto, $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$.

iii. Façamos $\log_b a = x$. Observemos que $b^x = a \Rightarrow (b^x)^n = a^n \Rightarrow b^{n \cdot x} = a^n \xrightarrow{\text{Definição}} n^x = \log_b a^n$. Então $n \cdot \log_b a = \log_b a^n$.

iv. Fazendo $\log_b a = x$, $\log_c a = y$ e $\log_b c = z$, notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.

Observe que

$$\begin{cases} \log_b a = x, & \Leftrightarrow b^x = a \\ \log_c a = y & \Leftrightarrow c^y = a \implies b^x = c^y = (b^z)^y \Rightarrow x = zy \Rightarrow y = \frac{x}{z}. \\ \log_b c = z & \Leftrightarrow b^z = c \end{cases}$$

Portanto, $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$.

□

Definição 7. Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chamamos de função logarítmica de base a a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$.

Teorema 5. Seja a um número real dado com $0 < a \neq 1$. Então as funções $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração. Com efeito mostremos que $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$ e $g \circ f = I_{\mathbb{R}_+^*}$. Observemos que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x.$$

Logo, segue o resultado. □

Teorema 6. *A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente se, e somente se, $a > 1$.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que se $a > 1 \Rightarrow \forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, x_1 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$.

De fato, quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_2 > x_1$ temos que $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$ e pelo Teorema 2, concluímos que $\log_a x_2 > \log_a x_1$.

Agora mostraremos que $(x_1 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1) \Rightarrow a > 1$.

Fazendo $\begin{cases} \log_a x_1 = y_1, & \Leftrightarrow x_1 = a^{y_1} \\ \log_a x_2 = y_2 & \Leftrightarrow x_2 = a^{y_2} \end{cases}$, temos que: $y_2 > y_1 \Rightarrow a^{y_2} > a^{y_1}$. Pelo fato da função exponencial ser crescente para base maior que 1, concluímos que $a > 1$. □

Teorema 7. *A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que se $0 < a < 1 \Rightarrow (x_1 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 < x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1)$.

De fato, quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_2 < x_1$ temos que $a^{\log_a x_2} < a^{\log_a x_1}$ e pelo Teorema 1, concluímos que $\log_a x_2 > \log_a x_1$.

Agora mostraremos que

$$(x_1 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 < x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1) \Rightarrow 0 < a < 1.$$

Fazendo $\begin{cases} \log_a x_1 = y_1, & \Leftrightarrow x_1 = a^{y_1} \\ \log_a x_2 = y_2 & \Leftrightarrow x_2 = a^{y_2} \end{cases}$ temos que $y_2 > y_1 \Rightarrow a^{y_2} > a^{y_1}$. Pelo fato da função exponencial ser decrescente para base entre 0 e 1, concluímos que $0 < a < 1$. □

Em relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$ com $0 < a < 1$ temos:

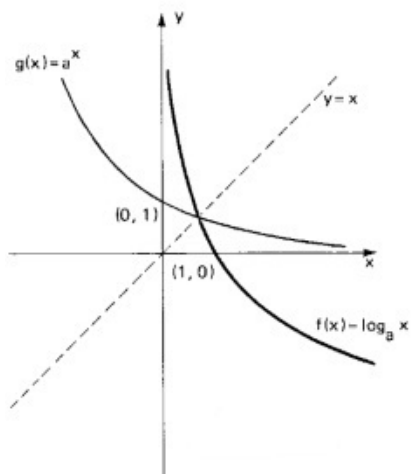


Figura 3

O gráfico é simétrico em relação a reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) do gráfico da função $g(x) = a^x$.

O gráfico da função $f(x) = \log_a x$ com $a > 1$ será:

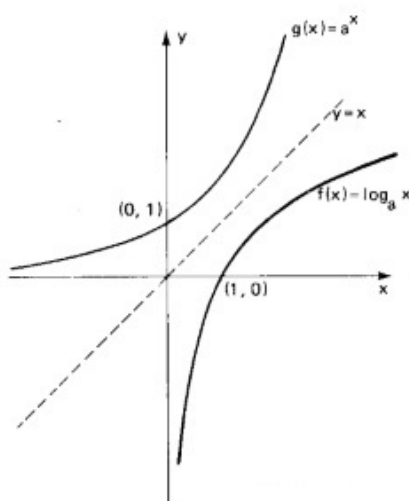


Figura 4

O gráfico também é simétrico em relação a reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) do gráfico da função $g(x) = a^x$.

Capítulo 4

Juros Compostos

Neste capítulo estudaremos o uso de exponenciais e logaritmos como procedimentos utilizados no pagamento de empréstimos e investimentos em geral. Para escrever a teoria exposta neste capítulo consultamos as referências: [2], [14] e [15].

4.1 Conceitos básicos

Quando fazemos um empréstimo, por um determinado período (n), o valor do empréstimo recebe o nome de capital e é indicado por C_0 e a qualquer valor atribuído a esse capital chamamos de juros e é indicado por J . Esse valor pode ser cobrado através de um percentual (taxa) da dívida (i), proporcional ao tempo, ou seja os juros são iguais em todos os períodos, conhecido por juros simples, ou um percentual cumulativo ao longo do tempo, (os juros gerados em cada período agregam-se ao montante do período anterior), conhecido por juros compostos. Finalizado o período (n), liquidamos a dívida ao pagarmos o capital mais o juro relativo ao tempo do empréstimo, chamando esse valor por montante e o indicamos por M_n . Assim,

$$\boxed{M_n = C_0 + J}.$$

Por exemplo, em um empréstimo de R\$ 1.000,00 a ser pago em 5 prestações mensais com uma taxa de juros simples de 10% a.m., Teríamos:

$$J = 1.000 \cdot 0,1 \cdot 5 \Rightarrow J = 500,00.$$

Logo o montante será $M = 1.500,00$ e cada prestação p seria igual a:

$$p = \frac{1.500,00}{5} = 300,00.$$

Portanto em regime de capitalização simples, o juro pode ser calculado através da fórmula:

$$J = C_0 \cdot i \cdot n,$$

e o montante

$$M_n = C_0 + J \Rightarrow M_n = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n \Rightarrow M_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n).$$

Obs. 9. *O período n deve ser expresso na mesma unidade de tempo da taxa.*

Se esse mesmo empréstimo de R\$ 1.000,00 fosse calculado em regime de capitalização composta, os juros seriam cumulativos, e assim para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, temos:

$$M_1 = 1.000 \cdot (1 + 0,1) = 1.100,00,$$

$$M_2 = 1.100 \cdot (1 + 0,1) = 1210,00,$$

$$M_3 = 1.210 \cdot (1 + 0,1) = 1331,00,$$

$$M_4 = 1.331 \cdot (1 + 0,1) = 1.464,10,$$

$$M_5 = 1.464,10 \cdot (1 + 0,1) = 1.610,51.$$

Logo, o juro cobrado seria:

$$J = M_5 - C_0 \Rightarrow J = 1.610,51 - 1.000,00 \Rightarrow J = 610,51.$$

Definição 8. *Chamamos de capitalização ao procedimento de acrescentar juros ao capital. De um modo geral, no regime de capitalização composta o valor inicial deve ser corrigido período a período. Essas correções são agregadas e sucessivas por n períodos em função de uma taxa de juros contratada.*

Teorema 8. *No regime de capitalização composta de taxa i , um capital C transforma-se, após n períodos de tempo, em um montante igual a*

$$M_n = C_0 \cdot (1 + i)^n. \tag{4.1}$$

Demonstração. A proposição é verdadeira para $n = 1$, pois

$$M_1 = C_0 + i \cdot C_0 = C_0 \cdot (1 + i).$$

Suponhamos a proposição válida para $n = k$. Chamaremos de M_k o montante após k períodos de tempo, dado por $M_k = C_0 \cdot (1 + i)^k$. Observemos que:

$$M_{k+1} = M_k + i \cdot M_k \stackrel{\text{Por Hipótese}}{=} C_0 \cdot (1 + i)^k + i \cdot C_0 \cdot (1 + i)^k = C_0 \cdot (1 + i)^{k+1}.$$

Portanto, M_n é uma progressão geométrica de razão $1 + i$ e $M_n = C_0(1 + i)^n$. \square

A figura 6 nos mostra o gráfico do montante no regime de capitalização composta a uma taxa i , aplicado sobre um capital inicial C_0 ao longo do tempo n .

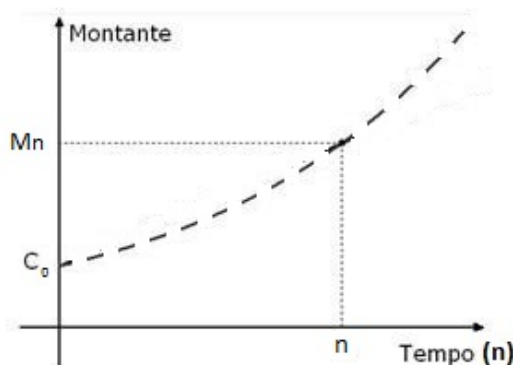


Figura 6

Vemos então que no regime de capitalização composta, o montante cresce exponencialmente em progressão geométrica ao longo do tempo, pois os rendimentos de cada período são ajuntados ao saldo devedor e passam, por sua vez, a render juros.

Como o nosso objetivo é mostrar a utilidade das exponenciais e logaritmos como ferramentas essenciais na resolução de cálculos com números grandes, mostraremos através dos Corolários 1 e 2 que para calcular o período de tempo no regime de capitalização composta será necessária a utilização dos logaritmos, e, para calcular a taxa de juros será necessário a utilização de exponenciais.

Corolário 1. *No regime de capitalização composta de taxa i , temos que o período de tempo n é dado por*

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}, \quad (4.2)$$

onde M_n é o montante após n períodos e C_0 é o capital.

Demonstração. Pelo Teorema 9 temos que $M_n = C_0 \cdot (1+i)^n$. Daí, $(1+i)^n = \frac{M_n}{C_0}$. Observemos que $(1+i)^n > 0$, pois $i > 0$; e como $M_n > C_0$, temos que $\frac{M_n}{C_0} > 0$. Aplicando então logaritmos naturais para calcular n , obtemos:

$$\ln(1+i)^n = \ln\left(\frac{M_n}{C_0}\right).$$

Pela Propriedade iii. da Proposição 5, temos:

$$n \cdot \ln(1+i) = \ln\left(\frac{M_n}{C_0}\right),$$

e portanto

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}.$$

□

Exemplo 1. *Uma aplicação de R\$ 40.000,00 rendeu R\$ 18.564,00 de juros. Determine o tempo que esse capital ficou aplicado à taxa de 10% ao trimestre.*

Resolução: Os dados são: $M = 58.564,00$, $i = 0,1$ ao trimestre.

Pela fórmula (3.2), e com o uso de uma calculadora científica obtemos:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{58.564}{40.000}\right)}{\ln 1,1} = \frac{0,3812}{0,0953} = 4 \text{ trimestres.}$$

Exemplo 2. *Determine o tempo necessário para que um capital duplique o valor a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês.*

Resolução: Pela fórmula (3.2), temos:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{2C}{C}\right)}{\ln 1,02} = \frac{\ln 2}{\ln 1,02} = \frac{0,6931}{0,0198} \cong 35 \text{ meses.}$$

Aqui novamente fizemos uso de uma calculadora.

Exemplo 3. [11] *Um empresário infrator foi penalizado pelo IBAMA com uma multa de R\$ 3.000,00 com vencimento no último dia do ano. Caso o pagamento não fosse efetivado até 31 de dezembro, o valor seria reajustado à taxa de juro composto de 0,05% ao dia. Sabendo que o empresário pagou R\$ 3.019,56 por essa multa, em que dia e mês foi efetuado o pagamento?*

Resolução: Como já enunciado, trata-se de uma questão de regime de capitalização composta, e, pelo Corolário 1, temos que

$$n = \frac{\ln\left(\frac{3019,56}{3000}\right)}{\ln(1,0005)} = \frac{\ln 1,00652}{\ln 1,0005} = \frac{0,006498}{0,000499} = 13 \text{ dias.}$$

Portanto, a multa foi paga com 13 dias de atraso, no dia 13 de janeiro.

4.2 Períodos não Inteiros

Pelo Teorema 9 deste capítulo vimos que no regime de capitalização composta, $M_n = C_0 \cdot (1+i)^n$, quando n não for um número inteiro, são necessárias as seguintes adaptações

quanto à unidade de tempo:

$$n = k \text{ dias} \Rightarrow n = \frac{k}{360} \text{ anos,}$$

$$n = k \text{ meses} \Rightarrow n = \frac{k}{12} \text{ meses.}$$

Obs. 10. O tempo determinado acima refere-se ao ano e ao mês comercial.

Proposição 6. No regime de capitalização composta a taxa i é dada por $i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C_0}} - 1$, onde M_n é o montante acumulado após n períodos e capital C_0 .

Demonstração. Pelo Teorema 9,

$$M_n = C_0 \cdot (1 + i)^n.$$

Daí temos que

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C}.$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{n}$ temos que $[(1 + i)^n]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$. Ou seja, pelo item

iii. da Proposição 1 temos que $1 + i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n}$. Logo,

$$i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C_0}} - 1.$$

□

Exemplo 4. Determine a taxa de juros mensal no regime de capitalização composta para que um investimento de R\$ 2.000,00 em 3 meses tenha um juros de R\$ 315,25.

Resolução: Temos que:

$$i = \sqrt[3]{\left(\frac{2.315,25}{2.000}\right)} - 1 = \sqrt[3]{1,157625} - 1 = 1,05 - 1 = 0,05.$$

Logo a taxa 5% ao mês.

Exemplo 5. Um empréstimo de R\$ 8.000,00 a juros compostos deve ser pago após 32 dias, sendo o montante igual a R\$ 8.500,00. Obtenha as taxas mensal e anual desta operação.

Resolução: Para calcular a taxa mensal temos:

$$n = \frac{32}{30} = \frac{16}{15}$$

meses. Assim

$$i = \sqrt[15]{\left(\frac{8.500}{8.000}\right)^{16}} - 1 = 0,0668.$$

Logo, a taxa mensal é de 6,68%.

Analogamente, para calcular a taxa anual temos:

$$n = \frac{32}{360} = \frac{4}{45}$$

ano. Assim

$$i = \sqrt[45]{\left(\frac{8.500}{8.000}\right)^4} - 1 = 0,0054,$$

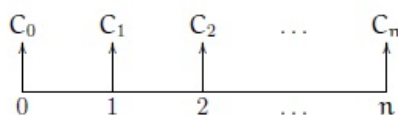
ou seja, a taxa anual é de 54%.

4.3 Equivalência de Capitais a Juros Compostos

Definição 9. *No regime de capitalização composta, dois ou mais capitais são equivalentes, com uma mesma taxa dada, se seus valores calculados em qualquer data (data focal), com essa taxa forem iguais.*

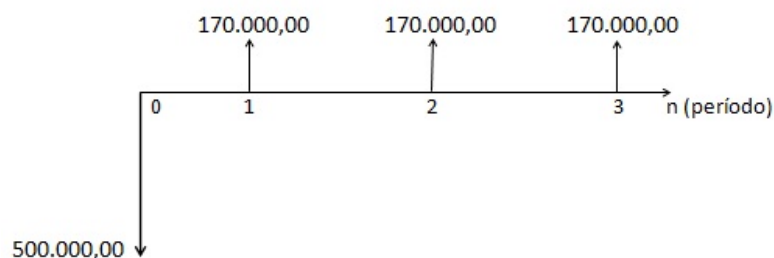
O conceito de equivalência permite transformar formas de pagamentos (ou recebimentos) em outras equivalentes e, conseqüentemente, efetuar comparações entre alternativas de investimentos.

Definição 10. *Consideremos $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ nas datas $0, 1, 2, \dots, n$. Chamamos de valor atual A na data 0 (ou simplesmente valor atual) desse conjunto, a uma taxa de juros i , a soma dos valores equivalentes desses capitais na data 0, ou seja, $A = C_0 + \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$.*



Exemplo 6. *Um apartamento é vendido por R\$ 500.000,00 à vista ou, então, a prazo, em 3 parcelas mensais de R\$ 170.000,00 cada uma, sem entrada. Qual a melhor alternativa para o comprador se ele pode aplicar seu dinheiro a juros compostos e à taxa de 2% ao mês e tem fundos suficientes para pagar à vista?*

Resolução: Faremos esse exemplo por meio do seguinte diagrama de fluxo de caixa:



Observemos que as três parcelas de R\$ 170.000,00 estão capitalizadas a uma taxa de 2% ao mês. Sendo assim, para analisarmos qual a melhor opção vamos descapitalizá-las, ou seja, retirar os juros.

Assim, para a primeira parcela temos $C_1 = \frac{170.000}{1,02} = 166.666,67$.

Para a segunda parcela temos $C_2 = \frac{170.000}{1,02^2} = 163.398,69$.

Para a terceira parcela temos $C_3 = \frac{170.000}{1,02^3} = 160.194,79$.

Logo, a soma dessas parcelas nos daria um valor presente $C = 490.260,15$.

Concluimos que a melhor opção para o comprador seria a forma de pagamento à prazo, pois o valor atual da compra a prazo é menor que o preço do apartamento à vista.

Exemplo 7. *Paula está decidida a comprar um celular que custa R\$ 269,00 na loja Cell X, mas logo percebe que não pode comprar à vista e decide financiá-lo. O vendedor propõe a Paula que pague R\$ 105,00 de entrada mais duas parcelas fixas de R\$ 88,20 com 30 e 60 dias. Infelizmente, Paula não conseguiu cumprir seu compromisso e atrasou no pagamento das parcelas, pagando uma parcela de R\$ 100,81, 60 dias após a compra e quitou sua dívida com outra parcela de 92,61. Calculemos a quantidade de tempo que Paula necessitou para quitar sua dívida, sabendo que a taxa de juros cobrada pelo atraso é a mesma do financiamento.*

Resolução: Primeiramente, vamos calcular a taxa de juros cobrada pela loja, por hipótese temos que.

$$269,00 = 105,00 + \frac{88,20}{1+i} + \frac{88,20}{(1+i)^2},$$

que simplificando fornece a igualdade

$$820i^2 + 1199i - 62 = 0 \Rightarrow \begin{cases} i' = 0,05 \\ i'' = -1,512 \end{cases}.$$

Logo, a taxa cobrada pela loja é de 5% ao mês. Para calcularmos a quantidade de tempo necessária, temos que

$$269,00 = 105,00 + \frac{100,81}{(1,05)^2} + \frac{92,61}{(1,05)^n},$$

daí, resulta que

$$1,05^n = 1,2763.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$n = \frac{\ln 1,2763}{\ln 1,05} = \frac{0,24395}{0,04879} \cong 5,$$

ou seja, $n = 5$ meses.

Capítulo 5

Taxas de Juros

É muito comum na Matemática Financeira ouvirmos falar de uma aplicação onde a unidade da taxa não coincide com a unidade do tempo, ou talvez, nos induzimos ao erro por usar uma taxa “falsa” numa aplicação no regime de capitalização composta.

Mostraremos então algumas taxas. Para escrever a teoria exposta neste capítulo consultamos as referências: [2], [3],[6], [8], [14] e [15].

Quando realizamos uma análise financeira, é fundamental a homogeneização entre as unidades da taxa e do prazo de capitalização, quando do uso de uma variável a partir de outra variável, na aplicação de fórmulas matemáticas. Assim concluímos que a taxa deverá estar explicitada na mesma unidade de tempo apresentado pelo prazo de capitalização.

5.1 Tipos de taxas

Definição 11. *Duas taxas são proporcionais quando seus valores são diretamente proporcionais aos seus respectivos tempos, que devem estar na mesma unidade.*

Assim, representaremos por i_a , i_s , i_t , i_b , i_m e i_d taxas, respectivamente, anual, semestral, trimestral, bimestral, mensal e diária.

Como $1 \text{ ano} = 2 \text{ semestres} = 4 \text{ trimestres} = 6 \text{ bimestres} = 12 \text{ meses} = 360 \text{ dias}$ ¹, temos: $i_a = 2i_s = 4i_t = 6i_b = 12i_m = 360i_d$.

Exemplo 8. *12% ao ano e 1% ao mês são taxas proporcionais*

$$\frac{12\%}{12 \text{ meses}} = \frac{1\%}{1 \text{ mês}}$$

¹1 ano comercial = 360 dias, 1 mês comercial = 30 dias

Definição 12. *Taxa nominal é uma taxa referencial em que os juros são capitalizados mais de uma vez no período a que a taxa se refere. Sendo assim a taxa nominal possui prazo de capitalização diferente do período da taxa.*

Exemplo 9. a) *Taxa de juros de 12% ao ano capitalizado bimestralmente.*

b) *Taxa de 5% ao bimestre capitalizado mensalmente.*

Proposição 7. *O montante (M_n) de um capital (C_0) aplicado pelo prazo n a uma taxa nominal j , k vezes durante o período referencial da taxa nominal é dado por,*

$$M_n = C_0 \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times n}. \quad (5.1)$$

Demonstração. Essa proposição é uma aplicação direta da formula (3.1), onde $M_n = C_0(1 + i)^n$. Observemos que a taxa i corresponde a uma taxa nominal j capitalizada k vezes por período. Assim, $i = \frac{j}{k}$ e para cada período a taxa é capitalizada k vezes, ou seja, serão feitas $k \cdot n$ capitalizações. Daí, o resultado. \square

Exemplo 10. *Que montante receberá um aplicador que tenha investido R\$ 2.000,00 aplicados por dois anos a juros nominais de 12% ao ano com capitalização bimestral?*

Resolução: Os dados são: $C = 2.000,00$, $j = 0,12$ ao ano, $n = 2$, $k = 6$.

Lembrando que:

$$M_n = C_0 \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times n},$$

temos,

$$M_n = 2.000 \left(1 + \frac{0,12}{6}\right)^{6 \times 2} = 2.000(1,02)^{12} = 2.000 \cdot 1,2682$$

Logo, o aplicador receberá um montante de R\$ 2.536,40.

Exemplo 11. *Em quantos meses uma aplicação de R\$ 8.000,00 a juros nominais de 12% ao ano com capitalização trimestral, tem um rendimento de R\$ 4.000,00?*

Resolução: Dados: $M = 12.000,00$, $C = 8.000,00$, $j = 0,12$ ao ano.

Observemos que,

$$M_n = C_0 \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times n},$$

e portanto,

$$12.000 = 8.000 \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4 \times n}$$

$$\Leftrightarrow (1,03)^{4n} = 1,5,$$

que aplicando o logaritmo fornece,

$$\ln(1,03)^{4n} = \ln(1,5)$$

$$\Leftrightarrow 4n = \frac{\ln 1,5}{\ln 1,03} = \frac{0,4054}{0,0295} = 13,7423.$$

Logo, $n = 3,4355$ anos.

Portando são necessários 13,7423 trimestres. Contudo, o número de períodos de capitalização deve ser representado por um número inteiro. Logo é necessário um período de 14 trimestres como prazo mínimo para garantir a obtenção do rendimento esperado.

Definição 13. *Taxa efetiva é a taxa a qual o prazo de capitalização dos juros corresponde ao próprio período da taxa.*

Exemplo 12. a) *taxa de juros de 10% ao mês com capitalização mensal.*

b) *taxa de juros de 12% ao ano com capitalização anual.*

É importante observar que é comum nos problemas de juros compostos, onde se dá a taxa efetiva, omitir o período de capitalização, ficando subentendido que este é o mesmo indicado pela taxa.

Definição 14. *Seja j uma taxa de juros nominal, a taxa efetiva i por período de capitalização é determinada pela razão entre a taxa nominal j e a frequência de suas capitalizações, ou seja, $i = \frac{j}{k}$.*

Exemplo 13. *Uma taxa nominal de 24% ao ano com capitalização bimestral resultará numa taxa efetiva $i = \frac{24\%}{6} = 4\%$ ao bimestre.*

Definição 15. *Duas taxas de juros são equivalentes quando incidirem sobre o mesmo capital mesmo que tenham diferentes prazos de capitalização, resultam em montantes iguais, ao fim de um mesmo período financeiro.*

Teorema 9. *Se a taxa de juros equivalente a um determinado período de tempo é igual a i , a taxa de juros equivalente a n períodos de tempo é I tal que $1 + I = (1 + i)^n$.*

Demonstração. Se aplicarmos um capital (C_0) durante um período a uma taxa efetiva I , por, temos que $M_n = C_0(1 + I)$. Agora se o mesmo capital (C_0) for aplicado pelo mesmo

prazo a uma taxa efetiva i , capitalizado n vezes durante o mesmo período da aplicação anterior segue que $M_n = C_0(1+i)^n$. Por se tratarem de taxas equivalentes, resultam no mesmo montante. Assim, $C_0(1+I) = C_0(1+i)^n$ que implica no resultado. \square

Exemplo 14. *Numa pesquisa realizada nos três principais bancos de uma cidade A para a realização de um empréstimo, constatou-se que:*

- *O Banco X cobra uma taxa de 36% ao ano com capitalização mensal.*
- *O Banco Y cobra uma taxa de 36,5% ao ano com capitalização bimestral.*
- *O Banco Z cobra uma taxa de 37% ao ano com capitalização trimestral.*

Qual dessas taxas será a melhor, caso você deseje fazer um empréstimo?

Resolução: A resolução deste exemplo é uma aplicação direta do Teorema 10.

Temos que,

No Banco X,

$$\begin{aligned} 1 + I_x &= \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} \\ \Leftrightarrow I_x &= 42,57\% \text{ ao ano.} \end{aligned}$$

No Banco Y,

$$\begin{aligned} 1 + I_y &= \left(1 + \frac{0,365}{6}\right)^6 \\ \Leftrightarrow I_y &= 42,49\% \text{ ao ano.} \end{aligned}$$

No Banco Z,

$$\begin{aligned} 1 + I_z &= \left(1 + \frac{0,37}{4}\right)^4 \\ \Leftrightarrow I_z &= 42,45\% \text{ ao ano.} \end{aligned}$$

Portanto, não há dúvidas que a melhor taxa para um financiamento é a proposta pelo Banco Z.

Esse exemplo ilustra dois pontos: (1) a taxa nominal mais baixa (Banco X) não é necessariamente a melhor para um empréstimo;

(2) o número de capitalizações durante o ano pode conduzir a uma diferença expressiva entre a taxa nominal e a taxa efetiva. Lembremos que é a taxa efetiva que você recebe ou paga.

Exemplo 15. Quando um banco cobra uma taxa de juros de 8% ao mês no cheque especial de um cliente, ele deve informar a taxa de juros anual.

Como se trata de juros compostos, pelo Teorema 10.

$$I_a = (1 + 0,08)^{12} - 1 = 1,5181.$$

Logo a taxa anual cobrada pelo banco em um cheque especial é 151,81%.

Vemos então que as taxas de juros encontram-se em determinado prazo, contudo podemos convertê-la para outro prazo sem alterar seu valor próprio, facilitando o cálculo dos juros em operações e comparações entre taxas de juros.

Assim, considerando o ano e o mês comercial (360 dias e 30 dias respectivamente), temos que:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_q)^3 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_b)^6 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

Onde:

i_a = taxa efetiva anual,

i_s = taxa efetiva semestral,

i_q = taxa efetiva quadrimestral,

i_t = taxa efetiva trimestral,

i_b = taxa efetiva bimestral,

i_m = taxa efetiva mensal,

i_d = taxa efetiva diária.

Exemplo 16. Qual a taxa efetiva bimestral, equivalente à taxa de 24% ao ano com capitalização mensal?

Resolução: Temos que $i_m = \frac{24\%}{12} = 2\%$ ao mês. (0,02 ao mês) daí,

$$(1 + i_b) = (1 + i_m)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + i_b) = (1,02)^2 = 1,0404 - 1$$

$$i_b = 0,0404.$$

Logo, a taxa efetiva bimestral é 4,04%.

Exemplo 17. Calculemos a taxa efetiva semestral, no sistema de juros compostos, equivalente a uma taxa nominal de 40% ao quadrimestre, capitalizada bimestralmente.

Resolução: Observemos que $i_b = \frac{40\%}{2} = 20\%$ ao bimestre (0,2 ao bimestre).

Daí,

$$1 + i_s = (1 + i_b)^3$$

$$\Leftrightarrow i_s = (1,2)^3 - 1 = 1,728 - 1 = 0,728,$$

ou seja, a taxa efetiva é 72,8%.

5.2 Capitalização Contínua

A capitalização contínua é uma ferramenta muito usada em finanças na avaliação de opções, derivativos, projetos de investimento, geração de lucros da empresa e outras situações em que os fluxos monetários encontram-se distribuídos uniformemente no tempo.

Definição 16. *A capitalização contínua é um regime que se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos - caracteristicamente em intervalo de tempo infinitesimal - promovendo grande frequência de capitalização.[10]*

Teorema 10. *No regime de capitalização composta, um capital C_0 aplicado a taxa nominal δ durante n anos capitalizados k vezes em intervalos infinitesimais produzirá um montante $M_n = C_0 e^{\delta \cdot n}$, onde δ é a taxa instantânea ou contínua.*

Demonstração. Por, temos que

$$M_n = C_0 \left(1 + \frac{\delta}{k}\right)^{k \cdot n} = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{\delta}}\right)^{\frac{k}{\delta}} \right]^{\delta \cdot n}.$$

Como as capitalizações são feitas em intervalos infinitesimais, pelo Teorema 4, segue que

$$M_n = \lim_{k \rightarrow \infty} C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{\delta}}\right)^{\frac{k}{\delta}} \right]^{\delta \cdot n} = C_0 e^{\delta \cdot n}.$$

□

Por exemplo, mostraremos como um capital de R\$ 100,00, aplicado por um ano à taxa nominal de 12% ao ano, resultará nos seguintes montantes, considerando-se diversas hipóteses de frequência das capitalizações da taxa nominal.

Frequência	Capitalização	Montante
Anual ($k = 1$)	$100(1 + 0,12)$	R\$ 112,00
Semestral ($k = 2$)	$100 \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^2$	R\$ 112,36
Trimestral ($k = 3$)	$100 \left(1 + \frac{0,12}{3}\right)^3$	R\$ 112,48
Mensal ($k = 12$)	$100 \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12}$	R\$ 112,68
Diária ($k = 365$)	$100 \left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{365}$	R\$ 112,74
Horária ($k = 8760$)	$100 \left(1 + \frac{0,12}{8760}\right)^{8760}$	R\$ 112,74

Observemos que o montante aumenta à medida que a frequência das capitalizações aumenta, tendendo para um valor limite de R\$ 112,74.

Podemos então calcular o montante, admitindo que a capitalização seja infinitamente grande, ou seja, em intervalos infinitesimais tendendo ao infinito. Através do Teorema 11 obtemos:

$$M_n = 100 \cdot e^{0,12 \cdot 1} = 112,74.$$

Exemplo 18. [17] Considere que o logaritmo natural de 1,8 é igual a 0,6. Aplicando um capital de R\$ 25.000,00 a uma taxa de 4% ao mês, com capitalização contínua, verifica-se que o montante, no momento do resgate, é igual a R\$ 45.000,00. Calculemos o período da aplicação do capital.

Resolução: Os dados são: $M_n = 45000$, $C_0 = 25000$, $i = 0,04$ ao mês e $\ln 1,8 = 0,6$.

Sabemos que $M_n = C_0 \cdot e^{\delta \cdot n}$. Por hipótese,

$$45.000 = 25.000 e^{0,04 \cdot n},$$

que simplificando fornece a igualdade

$$1,8 = e^{0,04 \cdot n}$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da igualdade acima obtemos:

$$0,6 = 0,04 \cdot n$$

Logo, é igual a $n = 15$ meses.

Exemplo 19. [17] Um capital de R\$ 50.000,00 foi aplicado à taxa semestral δ , durante 2 anos, com capitalização contínua, apresentando, no final do período, um montante igual a R\$ 200.000,00. Utilizando $\ln 2 = 0,69$ (\ln é o logaritmo natural). Calculemos o valor de δ .

Resolução: Os dados são: $M_4 = 200000$, $C_0 = 50000$, $n = 4$ semestre e $\ln 2 = 0,69$.
Sabemos que $M_n = C_0 \cdot e^{\delta \cdot n}$. Por hipótese,

$$200.000 = 50.000e^{4\delta},$$

que simplificando fornece a igualdade

$$e^{4\delta} = 4.$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da igualdade acima obtemos:

$$4\delta = 2 \cdot \ln 2 = 1,38.$$

Logo, $\delta = 0,345$ que é igual a 34,5%.

Capítulo 6

Descontos Compostos

Neste capítulo estudaremos as maneiras de calcular o desconto em títulos de crédito e veremos como os logaritmos é uma ferramenta essencial para calcular o prazo de antecipação de um título. Para escrever a teoria exposta neste capítulo consultamos as referências: [2], [3], [8], [14] e [15].

6.1 Conceitos Básicos

Definição 17. *Desconto é qualquer abatimento dado a um título de crédito pago antes do vencimento. É uma operação comum no mercado financeiro e no setor comercial, em títulos de crédito, tais como: cheque, nota promissória, duplicata, letras de câmbio, com vencimentos futuros.*

Definição 18. *O valor nominal também conhecido por valor de face é o valor do título de crédito, ou seja, aquele que está escrito no título e que seria pago na data de vencimento do mesmo. Denotaremos por (N) .*

Definição 19. *O valor atual também conhecido por valor líquido, valor descontado ou valor pago, é o valor pelo qual o título acabou sendo negociado antes do vencimento do mesmo. Denotaremos por (A) .*

Definição 20. *O prazo de antecipação é o intervalo de tempo entre a data em que o título é negociado e a data de seu vencimento. Denotaremos por (n) .*

Por exemplo, quando um banco empresta dinheiro, o tomador do empréstimo emite uma nota promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao

banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada de valor nominal (valor de face) da promissória. O banco então desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe a promissória de valor nominal N e entrega ao cliente uma quantia A (menor que N , naturalmente). A diferença $N - A$ é chamado de desconto. Assim,

$$D = N - A. \quad (6.1)$$

Obs. 11. *Taxa de juros: é a taxa utilizada quando o desconto é racional.*

Obs. 12. *Taxa de desconto: é a taxa utilizada quando o desconto é comercial.*

Denotaremos por ambas as taxas de (i) .

Uma situação envolvendo o conceito de desconto ocorre quando uma empresa vende um produto a prazo. Nesse caso, o vendedor emite uma duplicata que lhe dará direito de receber do comprador o valor combinado na data futura. Caso o vendedor precise de dinheiro, ele poderá ir a um banco e efetuar um desconto na duplicata. Resumidamente, ocorre o seguinte: a empresa cede ao banco o direito do recebimento da duplicata em troca de dinheiro recebido antecipadamente.

De modo análogo ao desconto de duplicatas, uma empresa pode descontar notas promissórias em um banco. As notas promissórias surgem quando, por algum motivo, um devedor assume uma dívida perante um credor; a nota promissória é um papel que representa uma promessa de pagamento ao credor, a qual é feita pelo devedor.

As operações de descontos de duplicatas e promissórias, sendo bastante comum no sistema financeiro, possuem uma sistemática de cálculo bem caracterizada, chamada de desconto comercial ou bancário, a qual passaremos a mencionar [3].

6.2 Desconto Comercial Composto

Definição 21. *O desconto comercial composto, também conhecido como desconto bancário ou desconto "por fora", é calculado sobre o valor nominal do título.*

Teorema 11. *No regime de desconto comercial composto de taxa i , um valor nominal N transforma-se, em n períodos de tempo, em um valor atual $A_n = N(1 - i)^n$.*

Demonstração. Para cada k , seja A_k o valor atual após k períodos de tempo. Temos $A_{k+1} = A_k - iA_k = A_k(1 - i)$. Daí, (A_k) é uma progressão geométrica de razão $1 - i$ e $A_n = N(1 - i)^n$, onde $N = A_0$ (definição 20). \square

Corolário 2. *No regime de desconto comercial composto de taxa i , o valor do desconto após n períodos de tempo sobre um valor nominal N é $d = N[1 - (1 - i)^n]$.*

Demonstração. A demonstração é uma aplicação direta do Teorema 12. Por (5.1), temos que $d = N - A_n$. Daí,

$$d = N - N(1 - i)^n \Rightarrow d = N[1 - (1 - i)^n].$$

□

Exemplo 20. *O valor nominal de uma duplicata é R\$ 2.000,00. Seu portador deseja descontá-lo 3 meses antes do vencimento. Sendo a taxa de desconto de 1,5% ao mês, qual será o valor do resgate?*

Resolução: Os dados são: $N = 2.000,00$, $n = 3$ meses e $i = 0,015$ ao mês.

Pela fórmula acima, temos $A = N(1 - i)^n$. Então,

$$A = 2.000 \cdot (0,985)^3 = 1.911,20.$$

Logo, o valor do resgate é R\$ 1.911,20, ou seja, o portador obteve um desconto de R\$ 88,80.

Corolário 3. *No regime de desconto comercial composto de taxa i , o prazo de antecipação que transforma um valor nominal N , após n períodos de tempo, em um valor atual A_n é $n = \frac{\ln(\frac{A_n}{N})}{\ln(1 - i)^n}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 12, $A_n = N(1 - i)^n$. Daí, pelo item iii. da Proposição 5, temos que $n = \frac{\ln(\frac{A_n}{N})}{\ln(1 - i)^n}$. □

Exemplo 21. *Ao descontar um título antes do vencimento, o cliente recebeu metade do valor nominal do título. Sendo a taxa de desconto 20,63% ao ano, determine o prazo de antecipação do pagamento.*

Resolução: Os dados são: $A = \frac{N}{2}$ e $i = 0,2063$ ao ano.

Pelo Corolário 3, temos:

$$n = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,7937} = \frac{-0,6931}{-0,2310} = 3.$$

Logo o cliente antecipou em 3 meses o pagamento.

Outro tipo de desconto também utilizado no mercado e que analisaremos agora é o desconto racional composto que é uma aplicação direta de juros compostos.

6.3 Desconto Racional Composto

Definição 22. O desconto racional composto também chamado de desconto “por dentro” é o abatimento calculado sobre o valor atual do título.

Teorema 12. No regime de desconto racional composto de taxa i , um valor nominal N transforma-se, em n períodos de tempo, em um valor atual $A_n = \frac{N}{(1+i)^n}$.

Demonstração. Para cada k , seja A_k o valor atual após k períodos de tempo. Pela definição 22, $A_{k+1} = A_k \cdot (1+i)$. Daí, (A_k) é uma progressão geométrica de razão $1+i$ e $A_n = \frac{N}{(1+i)^n}$ onde $N = A_0$ (definição 20). \square

Corolário 4. No regime de desconto racional composto de taxa i , o valor do desconto após n períodos de tempo sobre um valor nominal N é $D = N[1 - (1+i)^{-n}]$.

Demonstração. A demonstração é uma aplicação direta do Teorema 13, pois $d = N - A_n$. Daí,

$$D = N - N(1+i)^{-n} \Rightarrow D = N[1 - (1+i)^{-n}].$$

\square

Corolário 5. No regime de desconto racional composto de taxa i , o prazo de antecipação que transforma um valor nominal N , após n períodos de tempo, em um valor atual A_n é $n = \frac{\ln\left(\frac{A_n}{N}\right)}{\ln(1+i)^n}$.

Demonstração. Pelo Teorema 13, $A_n = \frac{N}{(1+i)^n}$. Daí, pelo item iii. da Proposição 5, temos que $n = \frac{\ln\left(\frac{A_n}{N}\right)}{\ln(1+i)^n}$. \square

O teorema abaixo nos garante que numa aplicação financeira o desconto comercial composto é maior que o desconto racional composto quando eles são operados com a mesma taxa.

Teorema 13. No regime de desconto composto de taxa i , temos que $d > D$ quando aplicados a um mesmo valor nominal N .

Demonstração. Sejam A_c e A_r respectivamente os valores atuais comercial e racional. Pelos Teoremas 12 e 13, temos que

$$\frac{A_c}{A_r} = \frac{N(1-i)^n}{N(1+i)^{-n}} = (1-i)^n(1+i)^n.$$

Daí, resulta em $\frac{A_c}{A_r} = (1 - i^2)^n$. Como a taxa $i > 0$, implica que $(1 - i^2)^n < 1$. Segue daí que $\frac{A_c}{A_r} < 1$. Logo, $A_c < A_r$.

Como $d = N - A_c > N - A_r = D$, temos que, $d > D$. □

6.4 Equivalência de Capitais

Vimos no capítulo 3 que no regime de capitalização composta, dois ou mais capitais são equivalentes, com uma mesma taxa dada, se seus valores calculados em qualquer data (data focal), com essa taxa forem iguais.

Também nesse regime de capitalização podemos ter capitais equivalentes com desconto comercial composto ou capitais equivalentes com juros compostos (ou desconto racional composto), conforme a sistemática de cálculo usada na equivalência.

Assim, se N_1 e N_2 são capitais equivalentes em datas que sucedem a data focal 0 de n_1 e n_2 períodos, respectivamente e A_1 e A_2 são seus valores atuais calculados na data focal com taxa i , então $A_1 = A_2$.

Proposição 8. *No regime de capitalização composta, se dois ou mais capitais são equivalentes na data focal 0, eles serão equivalentes em outra data focal que sucede (ou precede) de n períodos a data focal 0.*

Demonstração. Para capitais equivalentes em desconto comercial composto, temos:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow N_1(1 - i)^{n_1} = N_2(1 - i)^{n_2} \Rightarrow N_1(1 - i)^{n_1}(1 - i)^n = N_2(1 - i)^{n_2}(1 - i)^n \Rightarrow N_1(1 - i)^{n_1+n} = N_2(1 - i)^{n_2+n} \Rightarrow A'_1 = A'_2.$$

Para capitais equivalentes em desconto racional composto a demonstração é feita de modo análogo. □

Exemplo 22. [15] *Um título no valor de R\$ 10.000,00 para 60 dias foi trocado por outro, de R\$ 12.000,00 para 120 dias. Qual a taxa de juros racional composto que foi utilizada para que esses títulos sejam equivalentes?*

Resolução: Para que os títulos sejam equivalentes é necessário que $A_1 = A_2$.

Então

$$\frac{N_1}{(1 + i)^{n_1}} = \frac{N_2}{(1 + i)^{n_2}},$$

Como $N_1 = 10.000,00$ e $n_1 = 2$ meses, $N_2 = 12.000,00$ e $n_2 = 4$ meses, segue que,

$$\frac{10.000}{(1+i)^2} = \frac{12.000,00}{(1+i)^4} \Leftrightarrow \frac{(1+i)^4}{(1+i)^2} = \frac{12}{10}.$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^2 = 1,2 \Rightarrow 1+i = \sqrt{1,2} \Leftrightarrow i = 0,0954.$$

Logo, a taxa de juros mensal cobrada foi 9,54%.

Exemplo 23. [15] Um título de R\$ 700,00 para 21 dias vai ser trocado por outro de R\$ 910,00. Qual será o prazo desse novo título, se a troca será feita com desconto racional composto à taxa de 12% ao mês?

Resolução: Os dados são: $N_1 = 700,00$, $n_1 = 21$ dias, $N_2 = 910,00$ e $i = 0,12$ ao mês, ou seja, $i = \frac{0,12}{30} = 0,004$ ao dia.

Sabemos que $\frac{N_1}{(1+i)^{n_1}} = \frac{N_2}{(1+i)^{n_2}}$. Por hipótese,

$$\frac{700}{1,004^{21}} = \frac{910}{1,004^n},$$

que simplificando fornece a igualdade

$$(1,004)^n = 1,413.$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da igualdade acima obtemos:

$$n = \frac{\ln 1,4136}{\ln 1,004} = 88.$$

Logo, o prazo desse novo título será de 88 dias.

Capítulo 7

Rendas

Neste capítulo abordaremos as operações financeiras que abrangem sequências de capitais disponíveis em datas diferentes. Estes capitais podem referir-se tanto a pagamentos de várias prestações que quitarão uma dívida assumida hoje em forma de empréstimo ou de algum bem adquirido a prazo, como a recebimentos com a finalidade de constituir um montante futuro. Em geral, as rendas são caracterizadas por sua periodicidade, uniformidade e crescimento segundo alguma lei matemática claramente estabelecida.

Como exemplos mais comuns de rendas, podemos citar: salários e aposentadorias, aluguéis e prestações do SFH (Sistema Financeiro de Habitação) e dos consórcios, planos de financiamento, de poupança, de investimento programado e de recomposição de dívidas. Para escrever a teoria exposta neste capítulo consultamos as referências: [2], [8], [9], [14] e [15].

7.1 Conceitos básicos

Definição 23. *Chamamos de renda a uma série de capitais disponíveis ou pagamentos com vencimento em datas diferentes.*

Cada um desses pagamentos da série é denominado termo, prestação ou pagamento da renda.

Os intervalos de tempo entre os vencimentos de dois pagamentos consecutivos são chamados períodos da renda.

As rendas podem ser certas ou aleatórias.

Definição 24. *Rendas certas são aquelas cujos termos possuem vencimentos, valores e números pré-estabelecidos e a taxa de juros fixada.*

Definição 25. *Rendas aleatórias são aquelas cujos termos possuem vencimentos, valores e números aleatórios ou a taxa variável, como acontece com os rendimentos de ações ou prêmios de seguro.*

Nessa nossa abordagem trataremos apenas com as rendas certas.

Definição 26. *Valor futuro ou montante de uma renda é o somatório dos valores futuros de cada um dos termos, calculado em uma data posterior aos seus vencimentos com uma taxa fixada.*

Para facilitar a compreensão, as rendas costumam ser representadas em diagrama de fluxo de caixa como os mostrados a seguir, com uma série de n pagamentos, indicados por T_1, T_2, \dots, T_n , com seus valores atuais A_1, A_2, \dots, A_n e seus valores futuros F_1, F_2, \dots, F_n , onde o valor atual $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_n$ e o valor futuro $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_n$.

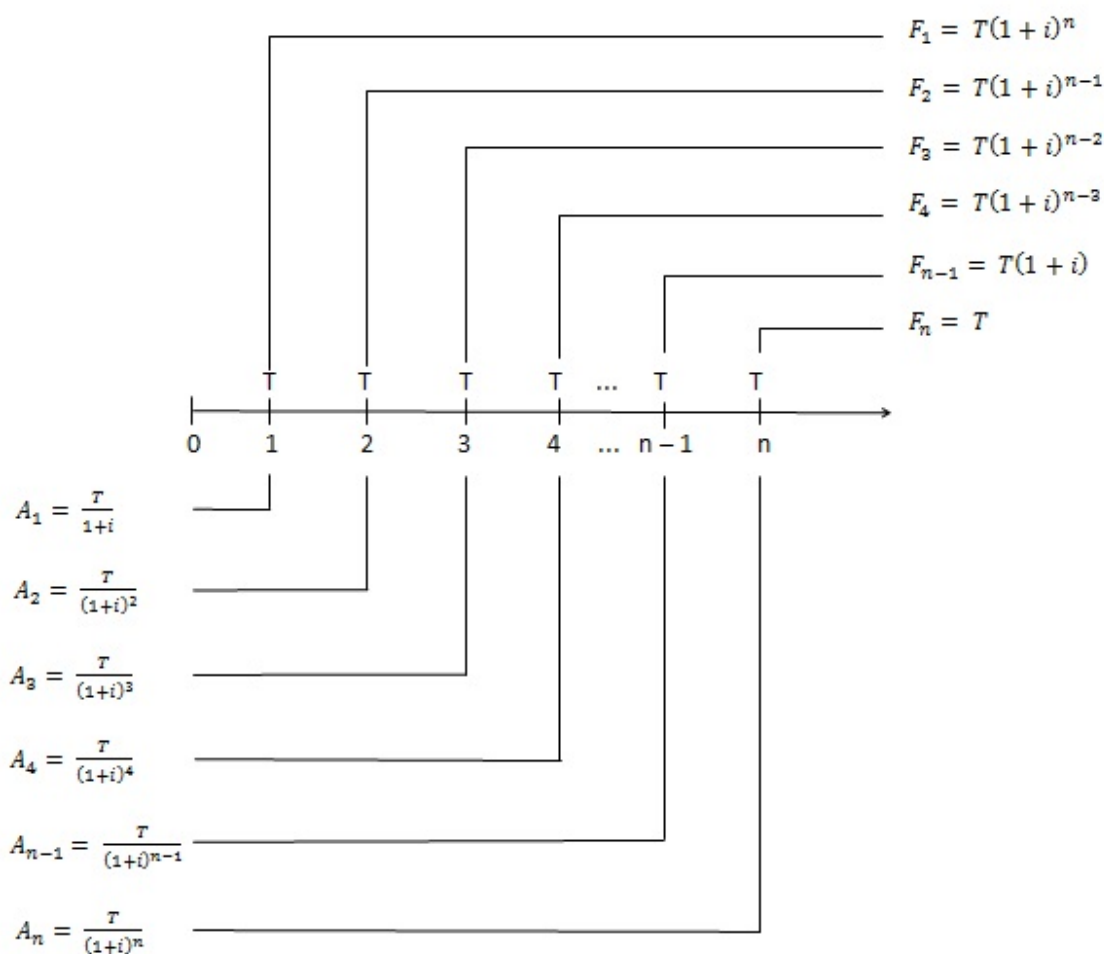


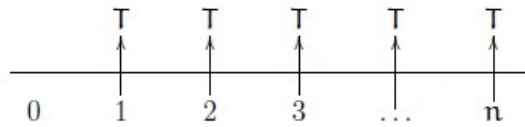
Figura 7

7.2 Rendas uniformes

Definição 27. Chamamos de *seqüência de pagamentos uniformes* a uma situação em que um empréstimo é pago em parcelas iguais e consecutivas, período a período.

Esses pagamentos podem ocorrer da forma postecipada, ou seja, quando o primeiro pagamento ocorre somente no final do primeiro período, ou da forma antecipada, quando o primeiro pagamento é feito no instante inicial (no início do período).

Teorema 14. O valor atual de uma renda uniforme postecipada de n pagamentos iguais a T , sendo i a taxa de juros é igual a $A = T \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$



Demonstração. Assim, por (3.1), temos $T_n = A_n(1+i)^n$. Portanto,

$$A_1 = \frac{T_1}{1+i}, A_2 = \frac{T_2}{(1+i)^2}, \dots, A_n = \frac{T_n}{(1+i)^n}$$

Como $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, então

$$\begin{aligned} A &= \frac{T}{1+i} + \frac{T}{(1+i)^2} + \dots + \frac{T}{(1+i)^n} \\ &= T \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \\ &= T \cdot \left[\frac{1}{1+i} \cdot \frac{(\frac{1}{1+i})^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right] \\ &= T \cdot \left[\frac{1 - (1+i)^n}{-i \cdot (1+i)^n} \right] \\ &= T \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]. \end{aligned}$$

□

Corolário 6. O valor de uma série uniforme na época do último pagamento é $F = T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Demonstração. Por (3.1), temos $F = A \cdot (1+i)^n$, Daí pelo Teorema 15,

$$F = T \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] \cdot (1+i)^n = T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

□

Exemplo 24. Um computador cujo preço à vista é R\$ 1.200,00, é vendido em 10 prestações mensais e iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 4% ao mês, determine o valor das prestações.

Resolução: Igualando os valores na data 0, temos pelo Teorema 15 que

$$1200 = T \cdot \frac{(1,04)^{10} - 1}{(1,04)^{10} \cdot 0,04}$$

que simplificando fornece a igualdade

$$8,1114 \cdot T = 1200 \Leftrightarrow T \cong 147,94.$$

Logo, o valor de cada prestação é R\$ 147,94.

Exemplo 25. Carlos um estudante do ensino médio decidido a economizar seu dinheiro decide fazer um investimento numa aplicação financeira que lhe garante uma renda mensal de 1,4% ao mês. Se Carlos depositar mensalmente a partir do próximo mês um valor de R\$ 50,00, qual será sua renda ao final do último depósito?

Resolução: Esta questão trata de obtermos um valor futuro. Assim igualando os valores à data do último depósito temos pelo Corolário 7, que $F = 50 \cdot \frac{(1,014)^{10} - 1}{0,014}$. Daí, $F = 50 \cdot 10,65 = 532,50$.

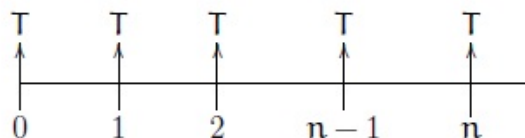
Logo, a renda final de Carlos será R\$ 532,50.

Exemplo 26. Uma apartamento foi comprado com uma entrada de R\$ 90.000,00 e 12 prestações mensais de R\$ 6.314,72. Qual o preço à vista do imóvel se a taxa do mercado imobiliário é 3,8% ao mês?

Resolução: Quanto a parte financiada, igualamos na data 0 as prestações. Daí temos que $A = 6.314,72 \cdot \frac{(1,038)^{12} - 1}{(1,038)^{12} \cdot 0,038} = 60.000,00$.

Portanto, o preço do imóvel é $90.000,00 + 60.000,00 = 150.000,00$.

Teorema 15. O valor atual de uma renda uniforme antecipada de n pagamentos iguais a T , sendo i a taxa de juros é igual a $A = T \cdot \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{(1+i)^n \cdot i} \right]$.



Demonstração. Por (3.1), temos $T_n = A_n(1+i)^n$. Portanto,

$$A_1 = T, A_2 = \frac{T}{(1+i)}, \dots, A_n = \frac{T}{(1+i)^{n-1}}.$$

Como $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, então

$$\begin{aligned} A &= T + \frac{T}{1+i} + \dots + \frac{T}{(1+i)^{n-1}} \\ &= T \cdot \left[1 + \frac{1}{1+i} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] \\ &= T \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right] \\ &= T \cdot \left[\frac{1 - (1+i)^{n+1}}{-i \cdot (1+i)^n} \right] \\ &= T \cdot \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]. \end{aligned}$$

□

Corolário 7. *O valor futuro de uma série uniforme antecipada na data do último pagamento é $F = T \cdot \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$.*

Demonstração. Por (3.1), temos que $F = A \cdot (1+i)^n$. Daí pelo Teorema 16,

$$F = T \cdot \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] \cdot (1+i)^n = T \cdot \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}.$$

□

O uso dos logaritmos é fundamental para calcular o período de tempo n em uma série de pagamentos uniformes de uma taxa i , por exemplo, como podemos calcular a quantidade de tempo necessária para investirmos mensalmente uma quantia T numa aplicação financeira que garante uma taxa i mensal afim de obtermos um valor desejado futuramente?

Exemplo 27. *Um estudante decidido a comprar um notebook decide desde já economizar mensalmente 150,00 numa instituição financeira que lhe garante uma taxa mensal de 2,1%. Qual o tempo mínimo de economia para que seu dinheiro seja suficiente para comprar o notebook que custa R\$ 1.999,90 e não sofre aumento durante este período?*

Resolução: Trata-se de uma renda uniforme antecipada na qual o estudante pretende ter um valor futuro de R\$ 1.999,90. Assim, por hipótese temos

$$1999,90 = 150 \cdot \frac{(1,021)^{n+1} - 1}{0,021},$$

que simplificando fornece a igualdade

$$(1,021)^{n+1} = 1,2799.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade acima obtemos:

$$n + 1 = \frac{0,2467}{0,0207} \Leftrightarrow n = 10,91$$

e portanto serão necessários 11 meses de investimento.

Corolário 8. *O valor atual de uma perpetuidade de termos iguais a T sendo i a taxa de juros é $A = \frac{T}{i}$.*

Demonstração. Basta fazer n tender para infinito no Teorema 15, segue o resultado. \square

Renda uniforme perpétua postecipada é o fluxo efetivo produzido em um período por uma taxa de juros sobre um termo T , em que o número de períodos de capitalização é infinitamente grande e não determinado.

Como exemplo de rendas uniformes perpétuas são locações, quando alugamos um imóvel, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, talvez mensal. Então o conjunto dos aluguéis constitui uma perpetuidade.

Exemplo 28. *Se o dinheiro vale 0,5% ao mês, por quanto deve ser alugado um imóvel que vale R\$ 100.000,00?*

Resolução: Quando você aluga um imóvel, você cede a posse do imóvel em troca de uma renda perpétua cujos termos são iguais ao valor do aluguel. Então, o valor do imóvel deve ser igual ao valor dos alugueis. Assim, de acordo com o Corolário 8,

$$\frac{T}{0,005} = 100.000 \Rightarrow T = 500.$$

Logo, o imóvel deve ser alugado por R\$ 500,00 mensais.

Considerações Finais

Atualmente muitas pessoas têm um conceito distorcido sobre o ensino de finanças, achando que os cálculos são muito complexos, principalmente, porque a maioria dos nossos alunos que concluem o ensino básico não estudou matemática financeira em sua escola, e o resultado é a desinformação. Com isso, muitos destes alunos não são capazes de fazer aplicações financeiras, bem como avaliar um melhor investimento para o seu crédito.

Assim, no que se refere ao papel das escolas quanto às competências e habilidade para lidar com o dinheiro, citamos as seguintes frases:

“A omissão da escola em relação a noções de comércio, economia, de impostos e de finanças tem uma consequência perversa: a maioria das pessoas, quando adulta, continua ignorando esses assuntos e segue sem instrução financeira e sem habilidade para manejar dinheiro”[7].

“Nesse sentido, a realidade do mundo do trabalho deve ser levada em conta no trabalho educacional. Pois, saber lidar com o dinheiro tem sido um desafio enfrentado pelos jovens no ingresso do mundo do trabalho. As empresas procuram valorizar os profissionais que possuem habilidades relacionadas às operações com valores financeiros, dificultando a atuação e ingresso no mercado de trabalho de pessoas que têm dificuldades com procedimentos básicos em finanças. Da mesma forma, ter uma vida financeira equilibrada, que não acarrete problemas pessoais, tem sido uma competência requerida ao ingressante nas organizações empresariais, visando á profícua atuação profissional”[13].

Este trabalho serve de incentivo aos discentes e docentes de ensino básico, pois aborda de uma forma simples e adaptável ao ensino médio um pouco sobre o regime de capitalização composta, podendo assim, ser incluído nas aulas ou até mesmo inserido como disciplina da grade curricular. Para muitos que acreditam que a Matemática Financeira é algo muito complexo, tentamos dissipar essa ideia.

A Matemática Financeira aborda ainda muitos outros assuntos de real importância,

e por isso sugerimos as seguintes referências para um maior aprofundamento no assunto: [2], [3], [8], [14] e [15].

Referências Bibliográficas

- [1] AVILA, G., *Introdução à Análise Matemática*, Segunda Edição, São Paulo, Editora Edgard Bulücher LTDA, 1999.
- [2] GIMENES, C. M., *Matemática Financeira com HP 12C e Excel uma Abordagem Descomplicada*, Segunda Edição, São Paulo, Editora Pearson, 2009.
- [3] HAZZAN, S., Pompeo, J. N., *Matemática Financeira*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Saraiva, 2007.
- [4] IEZZI, G., Murakami C., Dulce O., Mazzan S., *Fundamentos da matemática Elementar*, Volume 3, Terceira Edição, São Paulo, Editora Atual, 1977.
- [5] LIMA, E. L., *Logaritmos*, Quarta Edição, Rio de Janeiro, Editora SBM, 2010.
- [6] LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2, Sexta Edição, Rio de Janeiro, Editora SBM, 2006.
- [7] MARTINS, J. P., *Educação financeira ao alcance de todos*. São Paulo: Fundamentos Educacionais, 2004.
- [8] MILONE, G., *Matemática Financeira*, Primeira Edição, São Paulo, Editora Thomson Learning, 2006.
- [9] MORGADO, A. C., Wagner, E., Zani, S. Z., *Progressões e Matemática Financeira*, Quinta Edição, Rio de Janeiro, Editora SBM, 2001.
- [10] NETO, A. A., *Matemática financeira e suas aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atlas, 2001.
- [11] PAIVA, M., *Matemática*, Volume 1, Primeira Edição, São Paulo, Editora Moderna, 2009.

- [12] ROONEY, A., *A História da Matemática Desde a Criação das Pirâmides até a Exploração do Infinito*, Primeira Edição, São Paulo, Editora M. Books, 2012.
- [13] ROSETTI, H. J., *Educação Matemática e Financeira: um estudo de caso em Cursos Superiores de Tecnologia*. 2010. 242f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2010.
- [14] SAMANEZ, C. P., *Matemática Financeira*, Quinta Edição, São Paulo, Editora Pearson, 2010.
- [15] VERAS, L. L., *Matemática Financeira: Uso de Calculadoras Financeiras, Aplicações ao Mercado Financeiro, Introdução à Engenharia Econômica*, Quinta Edição, São Paulo, Editora Atlas, 2005.
- [16] Disponível em http://site.cesgranrio.org.br/eventos/concursos/caixa0108_provas.html. Acesso em 12/07/2013.
- [17] Disponível em <http://www.forumconcurseiros.com/forum/showthread.php?t=307022>. Acesso em 01/08/2013.