CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RENATA ISABEL DA SILVA FERREIRA DOS REIS
DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A ABORDAGEM DE DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

MARINGÁ-PR,BRASIL
2020

RENATA ISABEL DA SILVA FERREIRA DOS REIS DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A ABORDAGEM DE DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Profª Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria

MARINGÁ
2020

RENATA ISABEL DA SILVA FERREIRA DOS REIS DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A ABORDAGEM DE DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - Universidade Estadual de Maringá - Orientador
Profa. Dra. Olga Harumi Saito - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Curitiba.
Profa. Dra. Sandra Regina D'Antonio Varrengia - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 06 de maio de 2020
Local de defesa: Vídeo-conferência pelo link meet.google.com/ecx-occw-fde

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Oliveira, Renata Isabel da Silva Ferreira dos Reis de

O48o Otimização : uma proposta didática para a abordagem de derivadas no ensino médio / Renata Isabel da Silva Ferreira dos Reis de Oliveira. -- Maringá, PR, 2020.
xiv, 126 f.: il. color., figs., tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria.
Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Mestrado Profissional, 2020.

1. Cálculo. 2. Otimização (Método matemático). 3. Derivadas (Matemática). 4. Matemática (Ensino médio). I. Faria, Josiane Cristina de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Mestrado Profissional. III. Título.

CDD 23.ed. 515.33

Márcia Regina Paiva de Brito - CRB-9/1267

Este trabalho é dedicado a memória de minha mãe Maria de Fátima da Silva, que infelizmente não pode estar presente neste momento, mas que não poderia deixar de dedicar a ela, pois se hoje estou aqui, devo muito a ela. Obrigada por tudo! Saudades eternas!

Agradecimentos

Ao meu Deus, dono da minha vida, por me dar forças e se fazer presente comigo, permitindo a conclusão deste trabalho, um dos sonhos da minha vida.

Ao meu esposo, pela dedicação e auxílio ao longo desta caminhada, por toda a sua compreensão, apoio e carinho presentes em todas as horas.

A minha orientadora, Profª. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria, sem o qual este trabalho não seria possível pela sua dedicação, atenção, ensinos e correções.

A todos os professores do curso, por todas as experiências e conhecimentos construídos ao longo desta caminhada. Em especial ao Prof. Dr Emerson Vitor Castelani, por seus ensinamentos e disposição.

Não posso me esquecer de alguns grandes amigos que eu conquistei no decorrer desta etapa da minha vida, não preciso citar seus nomes, pois eles sabem que são para eles.

"A gravidade explica os movimentos
dos planetas, mas não pode explicar
quem colocou os planetas em movimento.
Deus governa todas as coisas e
sabe tudo que é ou que pode ser feito."
(Isaac Newton)

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo apresentar ao professor do ensino médio ou ao aluno na busca por conhecimento uma sugestão de proposta didática sem a formalização e rigor do ensino superior, de forma intuitiva com base no estudo de funções, através das taxas de variação média e instantânea, da reta tangente e com o auxílio do software Geogebra com foco na resolução de problemas de otimização devido ao seu leque de aplicabilidade. Inicialmente através de uma abordagem histórica do cálculo, buscamos conhecer como este foi surgindo ao longo da história, e os matemáticos que mais contribuíram para tal. Em seguida abordamos os conteúdos considerados como preliminares, essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Em sequência contextualizamos os problemas de máximo e mínimo na atualidade, onde apoiados nas orientações da LDB, PCN+ e BNCC apresentamos uma sequencia didática para os conceitos de limites e derivadas no Ensino Médio. Com base nesta proposta desenvolvemos uma pesquisa de campo de natureza qualitativa e quantitativa, e como instrumentos de pesquisa utilizamos uma proposta constituída de quatorze aulas desenvolvida com nove alunos do 3º ano do Ensino Médio com o intuito de verificar a compreensão dos estudantes a respeito do tema abordado, com exemplos, atividades e problemas escolhidos que representam situações presentes no cotidiano, dando margem a um trabalho mais interativo entre professor – aluno e aluno – aluno bem como, a aplicação de questionário com intenção de coletar a opinião dos estudantes a respeito da proposta desenvolvida. A partir da pesquisa desenvolvida concluímos que o objetivo desta dissertação foi alcançado, sendo possível abordar este tema no Ensino Médio. Deixamos esta sugestão de trabalho aos professores.

Palavras-Chaves: Derivadas, Otimização, Ensino Médio.

Abstract

This dissertation aims to present to the high school teacher or the student in search of knowledge a suggestion of a didactic proposal without the formalization and rigor of higher education, in an intuitive way based on the study of functions, through the rates of average and instantaneous variation , of the tangent line and with the aid of the Geogebra software focused on solving optimization problems due to its range of applicability. Initially through a historical approach to calculus, we seek to know how it has emerged throughout history, and the mathematicians who contributed most to this. Then we approach the contents considered as preliminary, essential for the development of this work. In sequence, we contextualize the problems of maximum and minimum today, where supported by the guidelines of LDB, PCN + and BNCC we present a didactic sequence for the concepts of limits and derivatives in High School. Based on this proposal, we developed a qualitative and quantitative field research, and as research instruments, we used a proposal consisting of fourteen classes developed with nine students from the 3rd year of High School in order to verify the students' understanding of the topic addressed, with examples, activities and chosen problems that represent situations present in everyday life, giving rise to a more interactive work between teacher - student and student - student as well as, the application of a questionnaire with the intention of collecting the students' opinion regarding the developed proposal. From the developed research we concluded that the objective of this dissertation was reached, being possible to approach this theme in High School. We leave this suggestion of work to the teachers.

Keywords: Derivatives, Optimization, High School.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de tópicos do cálculo diferencial esteve presente no currículo escolar desde o final do séc XIX até meados do século XX, no entanto, entre as décadas de 1960 e 1970, o cálculo deixou de fazer parte do cronograma do ensino médio passando a ser ensinado apenas no ensino superior e, desde então, a maior parte dos professores não tem mais ensinado os conceitos básicos de cálculo na rede de ensino regular.

Neste contexto, o objetivo desta dissertação é apresentar ao professor do ensino médio ou àquele aluno digamos mais "curioso" ou "aguçado" na busca por conhecimento uma sugestão de proposta didática sem a formalização e rigor do ensino superior, como ponto de partida para o ensino de derivadas com ênfase na resolução de problemas de otimização.

A escolha dos problemas de otimização como motivação para este estudo justifica-se devido à sua aplicabilidade em diversas áreas, tais como juros, crescimento populacional, lucros, prejuízos entre outras, e ainda a sua presença em provas que visam o pleito de uma vaga no ensino superior.

Observamos que, etimologicamente a palavra "cálculo" vem do latim "calculus" e é o diminutivo de "calx", que significa "pedra calcária", a qual provém de "khalix" um termo grego que significa "pedra pequena". Esta palavra é associada à Matemática devido aos povos antigos utilizarem pequenas pedras para auxiliar os cálculos.

Já segundo o dicionário on-line de português [3] cálculo é o "método específico de certos ramos da Matemática, empregado na resolução de problemas aritméticos ou algébricos”.

O Cálculo é de suma importância no desenvolvimento do conhecimento matemático, e para Kline (1998, p. VIII, apud Rezende [29]), destacam-se quatro pontos que motivaram a “criação” desse conhecimento:

- problemas relacionados a movimentos; determinação de trajetórias e de velocidades instantâneas;
- determinação de tangentes a várias curvas;
- problemas de máximos e mínimos;
- comprimentos de curvas e áreas e volumes de figuras limitadas.

O objeto de estudo do Cálculo para Machado é argumentado como:

> O Cálculo Diferencial e Integral trata de questões relacionadas com a medida de rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou as coisas se transformam. Trata também de questões envolvendo a interpretação de grandezas que variam continuamente como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com número cada vez maior de parcelas cada vez menores. A medida de rapidez de variação conduz a noção de Derivada; o estudo das somas com muitas pequenas parcelas conduz a noção de Integral. Ambas as noções têm que ver, em suma, com aproximação de curvas por retas, ou de fenômenos não-lineares por descrições lineares, recurso fundamental em múltiplas e distintas situações. O processo através do qual uma curva é aproximada por uma reta que lhe é tangente é diferenciação ou derivação; aproximação de curvas por retas com a que tem lugar, por exemplo, no cálculo de áreas, dá origem ao processo de integração. (Machado [20], p.148).

Para Boyer [12], as definições de cálculo são abordadas e retratadas tão claramente que por vezes é passível de se esquecer como estes conceitos foram surgindo e se desenvolvendo ao longo dos anos.

Segundo este mesmo autor [11], as ideias originais relacionadas ao Cálculo têm início em considerações que envolvem noções de grandezas discretas e contínuas, sendo uma área desenvolvida a partir de problemas que envolviam álgebra e geometria. Nessa direção, observamos que as civilizações mais antigas contribuíram com alguns dos principais conceitos do Cálculo pois, em busca da resolução de problemas do cotidiano, os mesmos encontraram respostas acerca do cálculo de áreas e volumes de figuras, por exemplo, em situações envolvendo incomensurabilidade, conceito que significa que dado dois segmentos não é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos.

Ainda no intuito de exemplificar as tentativas para resolver alguns problemas cotidianos, citamos a conhecida diminuição das taxas de impostos dos agricultores às margens do rio Nilo, com base nas perdas territoriais de plantio decorrentes das enchentes anuais.

Consta ainda no papiro de Ahmes[1](1650 a.C) alguns resultados matemáticos utilizados no Egito. Embora os mesmos não tenham demonstrações, já se assumiam sua aplicabilidade: o volume de um pirâmide quadrada era obtido como $\frac{1}{3}$ do volume do prisma retangular; a área de uma figura circular era obtida por um quadrado cujo lado é $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo, obtendo um resultado aproximado do que hoje conhecemos; a área do triângulo isósceles era pensada a partir de dois triângulos retângulos, por exemplo.

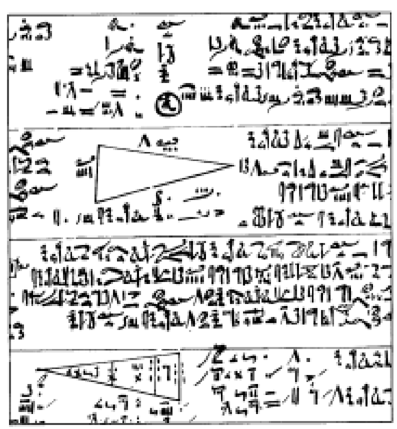


Figura 1: Pairo de Ahmes
(Fonte:RPM.[2])

Conforme mencionado anteriormente, o conceito de incomensurabilidade está ligado ao desenvolvimento do cálculo. De fato, em meados de 425 a.C, os antigos

[1]Papiro de Rhind ou papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1 650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes copilou e detalhou a solução de alguns problemas. Este papiro foi comprado por Henry Rhind e se encontra no museu Britânico atualmente com o nome de Papiro Rhind.

[2]RPM: Revista do Professor de Matemática. Link disponível em: `http://www.rpm.org.br/cdrpm/15/4.htm`. Acesso em 08/2019.

depararam-se com tal conceito ao mostrarem que não era possível comparar o tamanho da diagonal de um quadrado com o lado do mesmo em termos de números exatos da reta numérica e, ainda mais, estas situações não seriam casos isolados.

Situações similares colocaram os matemáticos da época em conflito, pois até então acreditava-se que dadas duas grandezas A e B, onde A é maior que B, era sempre possível subdividir B em um número finito de partes que caibam um número inteiro de vezes em A.

Esta descoberta os remeteu ao processo infinito, pois toda vez que geometricamente procuravam encontrar a maior medida comum entre dois segmentos de reta incomensuráveis, o processo se repetia indefinidamente. Este fato os deixou diante de uma crise, levando por um tempo os matemáticos gregos a evitarem totalmente os processos infinitos.

Posteriormente, observamos a utilização de processos infinitos pelos gregos com Eudoxio de Cnido (408 a.C – 355 a.C)(Fig. 2), no Método da Exaustão, que consistia em obter a área e volume de uma figura pelo método de inscrever e circunscrever polígonos regulares exaustivamente na figura geométrica em estudo, envolvendo também conceitos infinitesimais.

> Tão ou mais importante que sua teoria das proporções foi o tratamento dado por Eudóxio ao chamado Método da Exaustão. Naquela época, os geômetras gregos já haviam conjecturado que imaginar o círculo como sendo o limite ao qual tende uma família de polígonos inscritos (ou circunscritos), cujo número de lados tende ao infinito, era o caminho para a determinação da área e do perímetro daquela figura delimitada por uma linha curva. Tal conjectura já teria sido levantada por Briso, um jovem aluno de Pitágoras e, certamente, o foi pelo filósofo Ântifon (cerca de 430 a. C), contemporâneo e amigo de Sócrates. Dizia-se, então, que, inscrevendo-se um polígono em um círculo, ficaria caracterizada uma diferença entre as áreas das duas figuras e que tal diferença poderia ser sucessivamente diminuída, á medida que o número de lados do polígono fosse sendo aumentado. Mas era preciso prová-lo. Para tanto, Eudóxio, demonstrou, com base em seu postulado (a prova encontra-se na proposição $X-1$, dos elementos de Euclides), que dadas duas grandezas da mesma espécie, A e B, sendo tão pequeno quanto quisermos, se subtrairmos de A uma quantidade não inferior á sua metade, do resto outra quantidade não inferior á metade deste e assim por diante, chegar-se-á, finalmente, a um resto menos do que ϵ. (Garbi [16], p.46).

Figura 2: Eudoxio de Cnido
(Fonte:Matemáticos.[3])

Arquimedes (287-212 A.C)(Fig. 3), considerado um dos maiores matemáticos da sua época, aprimorou e utilizou o método da exaustão para encontrar a área de uma figura curva, cuja soma das áreas da sequência dos polígonos inscritos dentro dela aproximam-se da área da figura inicial.

Ele utilizou esse método para obter a área do círculo, e observou que a medida que o número de lados aumenta tem-se uma convergência para a área real do círculo. Aqui subtende-se que ele utilizava o conceito que hoje denominamos de "limite", por se trabalhar com a manipulação de quantidades muito pequenas. Também não podemos deixar de citar as contribuições fundamentais de Arquimedes para a mecânica e na Álgebra.

Figura 3: Arquimedes
(Fonte:RPM.[4])

[3]Matemáticos. Link disponível em:`https://sites.google.com/site/matematicosbio01/eudoxo-de-cnido` Acesso em 08/2019.

[4]RPM: Revista do Professor de Matemática. Link disponível em:`http://www.rpm.org.br/cdrpm/83/3.html`. Acesso em 08/2019.

Ainda citamos Pierre de Fermat (1601-1665)(Fig. 4), que era jurista e magistrado e dedicava-se no seu tempo livre aos estudos da Matemática. Ele é dito o descobridor do princípio fundamental da geometria analítica, de acordo com Pedroso [27] . Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função: para isso encontrava os pontos de inclinação zero da reta tangente ao gráfico. Este método é basicamente utilizado ainda hoje e foi escrito a Descartes.

O método utilizado por Fermat para encontrar máximos e mínimos de uma função polinomial f parte do pressuposto que:

> Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor de $f(x+E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto, para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x+E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menos o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudoequação de ser uma verdadeira equação; por isso, Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. (Boyer [12], p.240).

Este processo se equivale hoje a encontrar

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} = f'(x),$$

o que justifica para alguns a Fermat o título de verdadeiro inventor do Cálculo.

Figura 4: Pierre de Fermat
(Fonte: RPM.[5])

Isaac Newton (1642-1727)(Fig. 5) também contribuiu para o avanço do cálculo pesquisando sobre problemas de áreas e volumes, sendo atribuído a este o fato de ser o primeiro a arguir as ideias de limite e derivada, explicitando a relação inversa entre estas.

O próprio Isaac Newton afirma que só chegou a tais fatos devido a outros homens, dentre eles Fermat e Barrow[6], sendo dele a frase: "se vejo mais longe é porque estou sobre os ombros de gigantes" .

Algumas das contribuições de Isaac Newton segundo Baron & Bos [10] foram:

> 1. Newton formulou regras e procedimentos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo.
> 2. Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados.
> 3. O uso das séries infinitas foi uma ferramenta importante ao estender-se à classe das curvas "quadráveis", isto é, curvas cuja quadratura podia ser determinada [...].
> 4. Com Newton a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas foi firmemente estabelecida considerando a ordenada móvel proporcional ao momento ou a fluxão de uma área [...].
> 5. A síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação " padrão "com ponto para representar a diferenciação e, aparentemente, não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração.
> 6. Os fundamentos do cálculo foram apresentados por Newton de várias maneiras em épocas diferentes, ele constantemente procurava estabelecer os seus métodos analíticos sobre uma base mais segura. Baron & Bos ([10], p.39).

Durante alguns anos Newton não publicou suas descobertas. Contudo, trocava correspondências sobre estas com amigos particulares, sendo então Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)(Fig. 6) o primeiro a publicar seus estudos. Seus resul-

[5]RPM: Revista do Professor de Matemática. Link disponível em: `http://www.rpm.org.br/cdrpm/38/1.htm`. Acesso em 08/2019.

[6]Isaac Barrow (1630-1677) foi professor de Isaac Newton, foi autor dos livros Lectiones: Ópticas de 1669 e Lectiones: Geometriae de 1670.(arrumar esta citação).

[7]RPM: Revista do Professor de Matemática. Link disponível em: `https://brasilescola.uol.com.br/fisica/um-fisico-chamado-isaac-newton.htm`. Acesso em 20/08/2019.

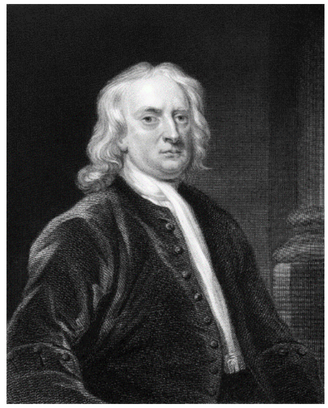


Figura 5: Isaac Newton
(Fonte: RPM.[7])

tados em Cálculo infinitesimal foram escritos em uma série de artigos, fato este que levou Newton a acusar Leibniz de plágio. Leibniz, segundo Mol [23], é o autor das notações dy e f que indicavam diferencial e soma, e ele foi um dos maiores formadores de notações.

Observamos que Newton e Leibniz trilharam linhas diferentes no Cálculo, de fato, enquanto o primeiro trazia a taxa de variação como a base do Cálculo, para o segundo tal base era a diferencial.

Figura 6: Gottfried Wilhelm Leibniz
(Fonte: RPM.[8])

Souza [30] relata que após estes, os matemáticos mais importantes do século seguinte foram:

- Jonhann Bernoulli (1667-1748), em destaque da família Bernoulli;
- Euler(1707-1783);

[8]RPM: Revista do Professor de Matemática. Link disponível em:`https://clube.spm.pt/news/a-vida-e-obra-de-gottfried-leibniz-por-carlos-marinho`. Acesso em 08/2019.

- Lagrange (1736-1813);
- Laplace(1749-1827).

Os próximos anos não trouxeram avanços significativos para o desenvolvimento do Cálculo, somente no século XIX, o assunto seria fundamentado com maior rigor por Cauchy (1789-1857) e Weiertrass (1815-1897), cujos assuntos estudados pelos mesmos fogem do escopo deste trabalho.

Neste trabalho vamos dar ênfase aos problemas de otimização, tendo em vista o claro interesse dos matemáticos em resolver problemas que envolvam valores de máximos e mínimos desde a antiguidade. Tal fato pode ser exemplificado por Euclides (300 a.C) em *Elementos*, livro IV, proposição 27, ao comentar sobre um problema que consistia em procurar o maior produto possível entre dois números cuja soma era dada, e ainda por Zenodorus (200 a.C) que, ao estudar a área de figuras com perímetro definidos e fixos, encontra que área maior é a do polígono regular.

Um outro exemplo é o **problema de Dido**, tido como um dos problemas mais antigos de máximo e mínimo, e isoperimétrico, ou seja, consiste de forma simplificada em se achar em um dado comprimento, a curva ou linha que limita a maior superfície possível.

Diz a lenda que Dido (Elisa ou Ekisha) era uma princesa fenícia que fugiu de navio no século IX a.C. para a África pois seu esposo fora assassinado pelo seu próprio irmão, o rei Pigmalião. Ao chegar no norte da África, o rei local lhe disse que ela poderia tomar para si toda a terra que coubesse numa bolsa feita com a pele de um único animal. Para isso Dido cortou tiras muito finas e as emendou formando assim uma grande corda da qual ela juntamente com seus seguidores limitaram um terreno semicircular. Dessa forma surgiu a cidade de Cartago na costa da África do Norte, próxima a cidade de Túnis, atualmente a Tunísia.

A solução usada por Dido ou algum dos seus seguidores foi puramente intuitiva (Fig. 7). Posteriormente alguns matemáticos publicaram possíveis soluções, entretanto algumas incompletas. Há registros do século III onde Aristósteles afirma ser a circunferência a melhor solução, porém sem demonstrações matemáticas. Posteriormente este foi solucionado fazendo uso de um importante resultado para polígonos, a desigualdade isoperimétrica.

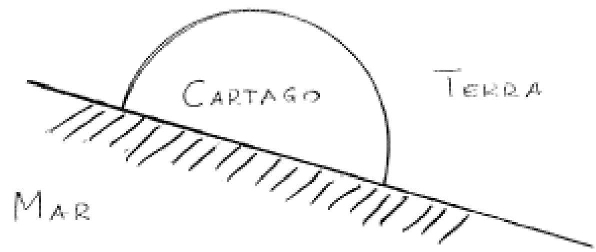


Figura 7: Limitação de Cartago feita por Dido
(Fonte: Francesco. & Pedroso [15].)

Podemos citar ainda os seguintes problemas:

- o problema geométrico de maximização que trata-se em calcular a distância de um homem a um pedestal de uma estátua de forma a vê-la por meio de um ângulo máximo, enunciado do séc XV conhecido como o *Problema de Regiomontanus*, atribuído a Johann Muller(1436-1476), e conhecido como o primeiro problema de extremos formalmente encontrado;

- o problema de minimização de Fermat(1601-1665) proposto a Toricelli(1608-1647): encontrar um ponto no plano cuja soma das distâncias a três pontos dados A,B e C seja mínima;

- o problema de minimização de Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766), conhecido como problema de *Fagnano* ou do *triângulo de Schwarz*, que consiste em inscrever num triângulo acutângulo um triângulo com o menor perímetro possível.

Outro exemplo relevante é o problema dos alvéolos das abelhas que tem despertado a curiosidades dos estudiosos desde a antiguidade. Estes alvéolos tem a função de servir como depósitos para o mel que as abelhas fabricam. Vascocelos arguiu em seu artigo que:

> O primeiro a se interessar por esse estudo parece ter sido Pappus de Alexandria, matemático grego (320 d.C). Ele chegou a estudar alvéolos em forma de prismas de seção hexagonal, triangular e quadrada e deixou transparecer que os prismas hexagonais podiam armazenar mais mel do que os outros dois. Entretanto foi Erasmus Bartholin quem primeiro observou que a hipótese de “economia” nada tinha a ver com o trabalho das abelhas que apenas

> procuravam executar suas células circulares com a maior área possível mas que, devido à pressão exercida pelas companheiras de trabalho, ficavam impedidas de executar paredes que não fossem planas. (Vasconcelos [34], p.01).

As possibilidades apresentadas por Pappus são representadas a seguir(Fig. 1.2):

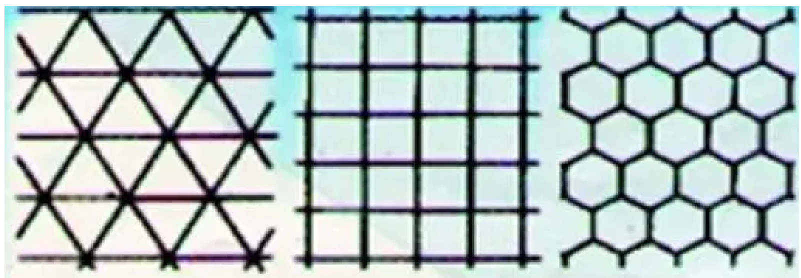


Figura 8: Possibilidades segundo Pappus
(Fonte: A Matemática dos Alvéolos.[9])

Perceba que existem outras possibilidades, veja a Fig. 1.3 abaixo, contudo estas não possibilitam o aproveitamento das paredes contíguas:

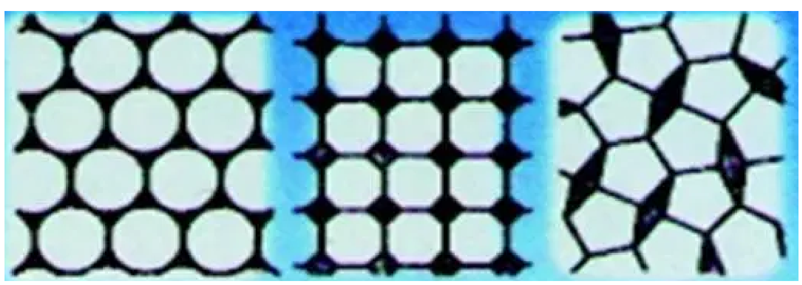


Figura 9: Diversas possibilidades de divisões
(Fonte: A matemática dos Alvéolos.[10])

Em meados de 1700, René Antoine Ferchault[11] afirma que se trata de um problema de máximo e mínimo, com a intenção de minimizar o uso da cera e obter o maior volume possível para armazenar o mel. E para isso as formas geométricas mais beneficiadoras seriam os prismas, já que estes se justapõem sem deixar espaços vazios entre eles, mais especificamente o prisma de forma hexagonal. Note ainda que

[9]Link disponível em:`https://apiariocantodorio.wordpress.com/a-matematica-dos-alveolos/`. Acesso em 11/2019.

[10]Link disponível em:`https://apiariocantodorio.wordpress.com/a-matematica-dos-alveolos/.Acessoem11/11/2019.`

[11]René Antoine Ferchault (1683-1757), físico francês.

ao utilizarem a forma hexagonal ao construírem os favos em redor, automaticamente elas ganham o depósito central sem utilizar nenhum adicional de cera, fator este que gera um impacto grande ao se considerar toda a colméia (Fig. 10).

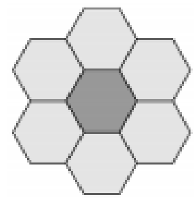


Figura 10: Favo hexagonal
(Fonte: Ferreira [14].)

Diante dos exemplos citados, e de muitos outros que surgiram ao longo do tempo, fomos motivados a desenvolver este trabalho com vistas a apresentar aos alunos do ensino médio um assunto que certamente está presente no cotidiano dos mesmos.

Este trabalho está organizado como segue: na Introdução se destacam os objetivos, justificativas para a elaboração deste e a escolha do tema, bem como apresenta um breve contexto histórico do desenvolvimento e algumas das contribuições do cálculo.

No primeiro capítulo abordaremos alguns conceitos básicos e propriedades relacionados às funções, limites e derivadas que fundamentam este trabalho.

No segundo capítulo relataremos um pouco do contexto dos problemas de otimização na atualidade, e apresentaremos uma proposta didática para a apresentação dos conceitos de limites e derivadas no Ensino Médio.

No terceiro capítulo, apresentaremos a discussão dos resultados da pesquisa por meio da descrição do cenário e dos sujeitos deste trabalho, da análise das atividades propostas e do desempenho de cada aluno.

No último capítulo, apresentaremos as considerações finais da pesquisa.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo iremos abordar alguns conceitos e noções básicas sobre funções, limites e derivadas que configuram como pré-requisitos necessários para o conteúdo deste trabalho. As definições deste capítulo foram baseadas nas referências: Ávila [6], Paiva [26], Stewart [31], Thomas [32] e [33].

1.1 Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e temos indícios do mesmo desde as mais simples operações de contagens, o que é confirmado pelas mais de 400 tábuas de conteúdos matemáticos datadas a 2500 a.C. encontradas na Babilônia. Contudo o seu conceito como conhecemos atualmente é mais recente, surgindo no fim do século XVII.

O termo "função" foi utilizado pela primeira vez em 1673 por Leibniz, ao denotar a dependência de uma curva de quantidades geométricas, e introduziu ainda os termos "constante", "variável" e "parâmetro". Em conversa entre Leibniz e João Bernoulli(1667-1748), o termo "função" é retratado como a representação de quantidades dependentes de alguma variável. Já em 1748 o termo sofreu uma alteração por Euler(1707-1783), um ex aluno de Bernoulli, que substitui-o por expressão analítica. Coube a Giuseppe Peano (1858-1932), matemático italiano, reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca, introduzir alguns símbolos que utilizamos até hoje($\in$, $\cap$, $\cup$,$\subset$), além de contribuir em três conceitos básicos: o zero, o conceito de número (inteiro - não negativo) e a relação de sucessor.

Apenas no século seguinte que o conceito de função se aproximou do significado que temos hoje, a saber, de que os valores de uma variável dependem dos valores de outra(s). O conceito de função passou por várias mudanças e processos de evolução, e tem grande importância em diversas áreas além da Matemática, a saber, a Física, Astronomia, Economia, Geografia e Biologia.

Definição 1.1. *Dados dois conjuntos quaisquer não vazios A e B, uma função de A em B é uma relação binária que todo elemento $x \in A$ corresponde a um único elemento $y \in B$. Essa função pode ser indicada por*

$$f : A \to B, \text{ (lê-se “função } f \text{ de } A \text{ em } B).$$
$$y = f(x), \text{ (lê-se “} y \text{ igual a } f \text{ de } x\text{”)}$$

Para que esta função f fique caracterizada é necessário conhecermos os elementos que a compõem:

i) *Domínio* - $D(f)$: conjunto onde a função é definida e é formado pelos elementos que a variável independente pode assumir, (conjunto A);

ii) *Contradomínio* – $CD(f)$: conjunto onde a função assume valores, a saber as variáveis dependentes (conjunto B);

iii) *Lei de formação ou regra*: consiste em determinar, associar um a um todo o elemento $x \in A$ um único elemento de $f(x) \in B$;

iv) *Imagem* – $Im(f)$: conjunto formados pelos elementos $\in B$ que foram associados pela lei de formação com algum elemento $\in A$, ou seja, é um subconjunto de B.

Exemplo 1.1 : Sejam A={0,1,2,3} e $B=\mathbb{Z}$, a relação $f : A \to B$ é definida como cada elemento de A sendo associado com o seu sucessor, e está representada pelo diagrama de Venn,[1] (Fig. 1.1), onde:

i) a lei de formação/regra que a define é $f(x) = x + 1$;

ii) o conjunto dos elementos $x \in A$ é denominado Domínio;

[1]Diagrama de Venn é uma representação gráfica, que nos mostra as relações existentes entre conjuntos, foi desenvolvida por John Venn século XIX, ampliando e formalizando o que já havia sido desenvolvido anteriormente por Leibniz e Euler.

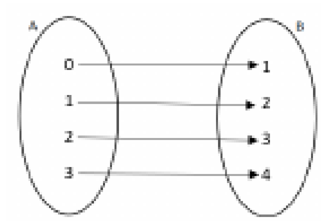


Figura 1.1: Diagrama de Veen
(Fonte: Autora.)

iii) o conjunto dos elementos $y \in B$, nesse caso o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, é denominado Contradomínio;

iv) dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é denominado Imagem de x por f; ou seja, o conjunto de todos os valores assumidos pela função, nesse caso $Im(f) = \{1,2,3,4\}$.

Observe que para que uma função fique caracterizada para todo $x \in A$ sempre existirá um único $f(x) \in B$, e sempre haverá $f(x)$ para todo $x \in A$.

As funções podem ser classificadas quanto as características do seu Contradomínio em: **Função Injetora, Função Sobrejetora e Função Bijetora**. (Fig. 1.2). Vejamos suas caracterizações:

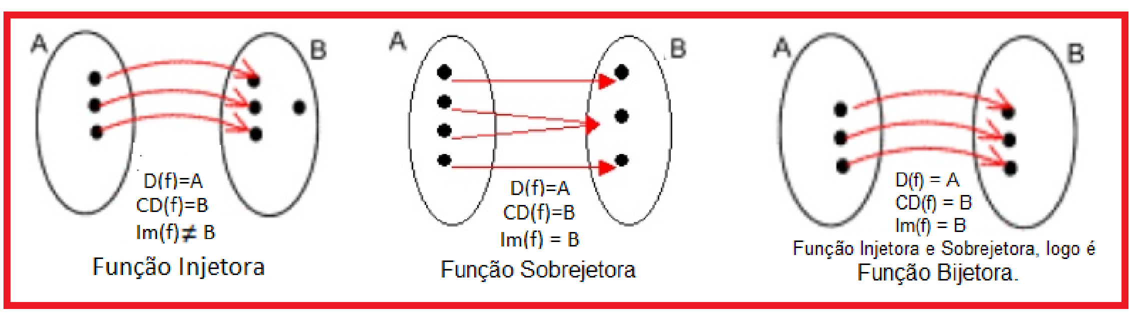


Figura 1.2: Tipos de Funções
(Fonte: Autora.)

Definição 1.2. *Função Injetora: uma função $f : A \to B$ é injetora quando para todos x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, isto é, se não há elementos distintos de A associados a um mesmo elemento em B.*

Definição 1.3. *Função Sobrejetora: uma função $f : A \to B$ é sobrejetora quando para todos $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, ou seja, o conjunto Imagem é igual ao conjunto Contradomínio ($Im(f) = CD(f)$).*

Definição 1.4. *Função Bijetora: uma função $f : A \to B$ é bijetora quando f é sobrejetora e f é injetora simultaneamente.*

1.2 Gráfico

O Plano Cartesiano (Figura 1.3) é a ferramenta que nos fornece a representação gráfica de uma função e portanto nos permite realizar a observação e analise do comportamento das funções. Foi criado por Rene Descartes(1596-1650) com o objetivo de localizar pontos em um plano, sendo constituído por dois eixos perpendiculares que se interceptam na origem das coordenadas e são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais, o eixo horizontal é denominado eixo das abscissas (x), onde os valores relacionados a x constituem o domínio da função e o outro eixo vertical é denominado eixo das ordenadas(y, onde os valores relacionados a y constituem o conjunto imagem da função. Cada ponto ou objeto tem suas coordenadas representas no plano cartesiano por meio de pares ordenados do tipo (x, y).

Não somente a Matemática se beneficia dessa ferramenta , podemos citar dentre outros o GPS, Sistema de Posicionamento Global, que é um sistema de navegação por satélite que geograficamente através da latitude e longitude beneficia as rotas da aviação, marítima ou de automóveis. Atualmente é muito utilizado por meio de um dispositivo móvel auxiliando o descobrimento de trajetos mais rápidos entre duas localizações.

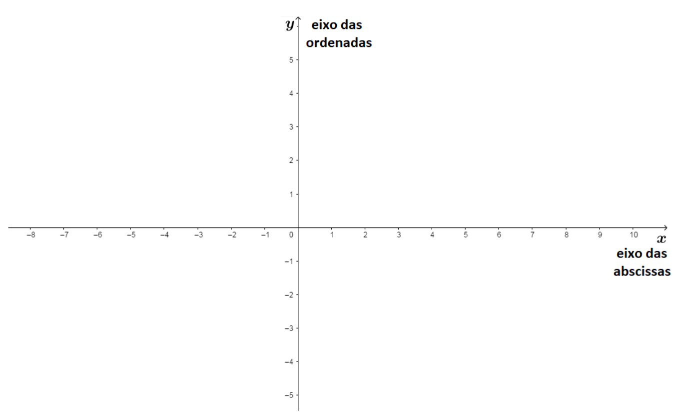


Figura 1.3: Plano Cartesiano
(Fonte Autora.)

Sendo assim a representação do gráfico de uma função nada mais é do que uma tabela criada por uma lista de pontos coordenados que são gerados a partir da lei de formação quando esta é aplicada ao domínio resultando na sua respectiva imagem (Fig. 1.3).

1.3 Propriedades Básicas

1.3.1 Operações

Vejamos algumas das operações possíveis de serem realizadas com funções:

Definição 1.5. *Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$ e sendo k uma constante, as operações de soma, subtração, produto e divisão são definidas por:*

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;

iii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

iv) $(f : g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in A$;

v) $(kg)(x) = kg(x)$.

Definição 1.6. *Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, denominamos função composta de g com f a função $(g \circ f)$:$A \to C$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Assim, $D(g \circ f) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\}$(Fig. 1.4)*

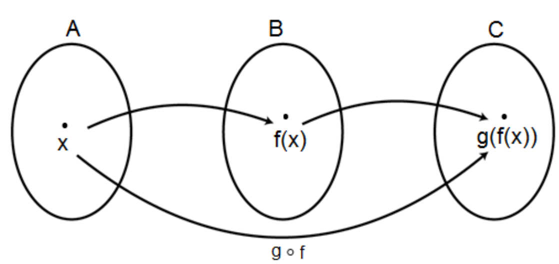


Figura 1.4: Função $(g \circ f)$
(Fonte: Autora.)

1.3.2 Características

Definição 1.7. *Uma função $y = f(x)$, para qualquer $x \in D(f)$, é:*

- ***função par de x*** *se* $f(-x) = f(x)$, *e seu gráfico é simétrico em relação ao eixo* y.

- ***função ímpar de x*** *se* $f(-x) = -f(x)$, *e seu gráfico é simétrico em relação à origem*

Exemplo 1.2 : Função par $f(x) = x^2$ e função ímpar $f(x) = x^5$. (Figura 1.5)

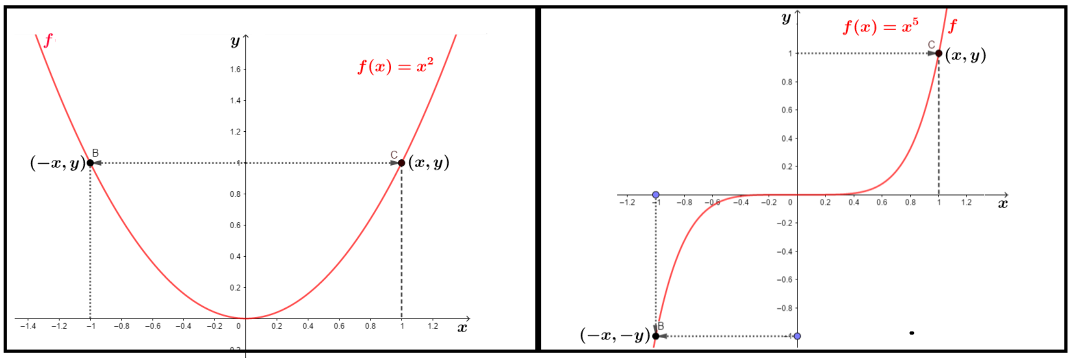


Figura 1.5: Função par e função ímpar
(Fonte: Autora)

Definição 1.8. *Uma função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida em um intervalo* I *contido no* $D(f)$, *é:*

- ***crescente***, *se para todo* x_1 *e* $x_2 \in D$, *com* $x_1 > x_2$, *temos* $f(x_1) > f(x_2)$;

- ***decrescente***, *se para todo* x_1 *e* $x_2 \in D$, *com* $x_1 < x_2$, *temos* $f(x_2) < f(x_1)$.

Exemplo 1.3 : Função crescente $f(x) = 2x + 4$ e função decrescente $f(x) = -2x + 4$.(Figura 1.6)

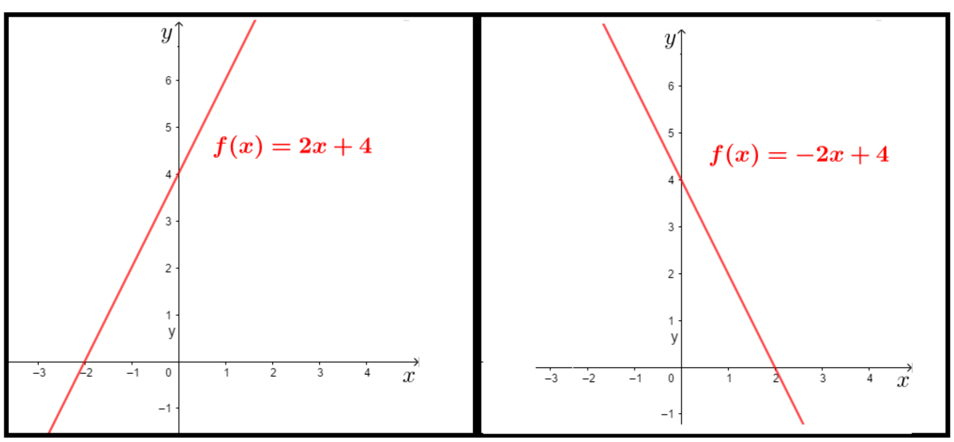


Figura 1.6: Função crescente e função decrescente
(Fonte:Autora)

1.4 Principais Exemplos de Funções

Neste tópico iremos abordar algumas das principais funções que são recorrentes no estudo dos problemas de máximo e mínimo.

1.4.1 Função Constante

Definição 1.9. *É toda função* $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = k$*, onde* k *é uma constante real associada a qualquer número real* x*.*

O gráfico de $f(x) = k$ é representado na Fig. 1.7, onde sempre será uma reta paralela ao eixo das abscissas passando por k, ou seja, $y = k$ e com conjunto imagem unitário $Im(f) = \{k\}$.

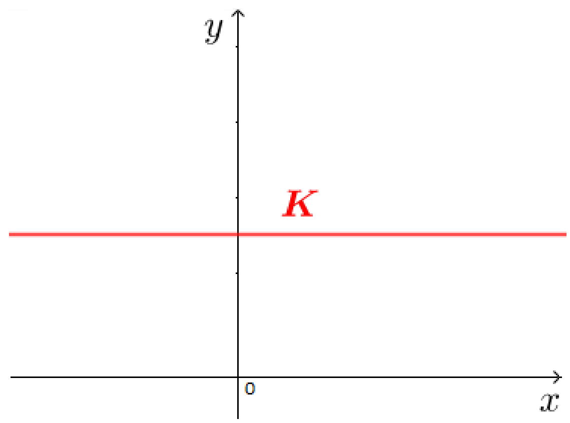


Figura 1.7: Função Constante
(Fonte: Autora.)

1.4.2 Função Polinomial

Definição 1.10. *A Função Polinomial é uma função* $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como:*

$$x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0, n \in \mathbb{N}$$

Os números $a_n, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ *são denominados de coeficientes do polinômio e o grau deste é dado através do maior expoente natural dentre os monômios de sua respectiva formação.*

Nessa classe podemos destacar:

i) **Função Afim**

Definição 1.11. *É toda função $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

onde a e b são denominados respectivamente de coeficiente angular e linear.

Note que:

- se $a > 0$, $f(x) = ax + b$ é uma Função Afim crescente;
- se $a < 0$, $f(x) = -ax + b$ é uma Função Afim decrescente.

O gráfico desta função é uma reta não paralela aos eixos coordenados representada na Fig. 1.8:

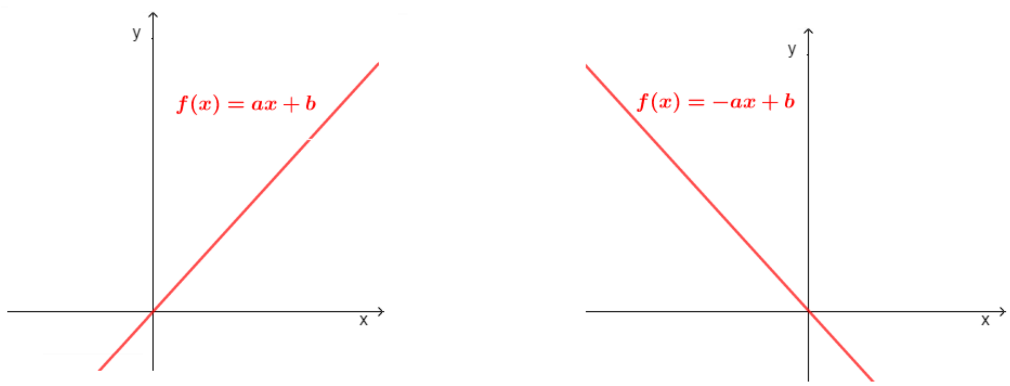


Figura 1.8: Função Afim Crescente e Decrescente
(Fonte: Autora.)

Podemos destacar ainda as funções **identidade** e **linear** que são derivadas das funções afins.

(a) **Função Linear**

Definição 1.12. *É toda função $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \neq 0$ e $b = 0$.*

O gráfico desta função é a reta que passa pela origem dos eixos coordenados representada na Fig. 1.9:

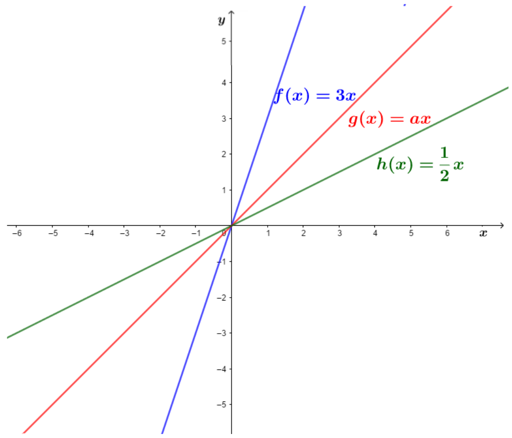


Figura 1.9: Função Linear
(Fonte: Autora.)

(b) **Função Identidade**

Definição 1.13. *É toda função $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, onde $a = 1$ e $b = 0$.*

Seu gráfico (Fig. 1.10) é uma reta que são as bissetrizes dos quadrantes I e III.

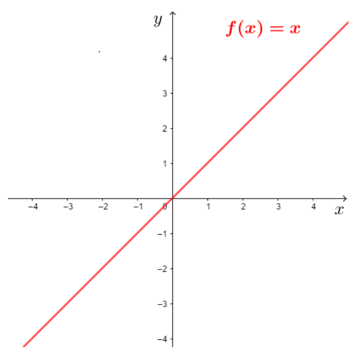


Figura 1.10: Função Identidade
(Fonte: Autora.)

ii) **Função Quadrática**

Definição 1.14. *É toda função $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.

Seu gráfico é uma parábola conforme a Fig. 1.11, onde:

- se $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ a parábola tem concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, $f(x) = -ax^2 + bx + c$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.

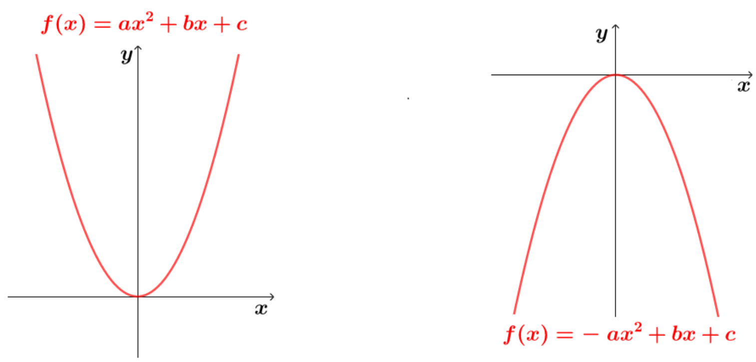


Figura 1.11: Função Quadrática
(Fonte: Autora.)

iii) **Função do Terceiro Grau**

Definição 1.15. *É toda função $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

onde a, b, c e d são constantes e $a \neq 0$.

O gráfico desta função está representado na Fig. 1.12:

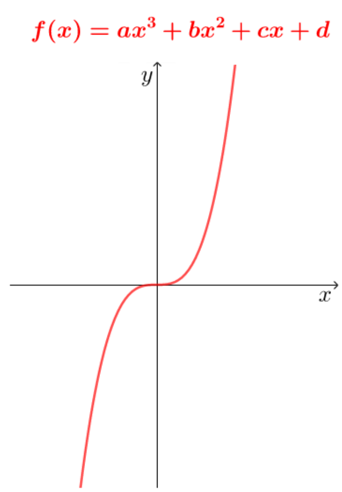


Figura 1.12: Função do Terceiro Grau
(Fonte: Autora.)

1.5 Limites

> "Se as etapas da evolução do homem estivessem embutidas num livro, com certeza o método dos limites seria uma das páginas mais belas, onde a inteligência humana deixou marcas significativas. Mas nem por isso deve ser entendido como fruto de uma cabeça privilegiada, e sim como resultado de muitas incertezas, tentativas, discordâncias e contribuições convincentes." ([4], p.33).

Devido ao foco deste trabalho ser o Ensino Médio trataremos os conceitos do limites de forma simplificada, abordando o estudo de funções "bem comportadas.

No decorrer do texto, faremos uso da simbologia $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ que iremos ler como "o limite da função $f(x)$ quando x tende à a".

1.5.1 Noção Intuitiva de Limites

Dentre as várias ideias que abordam a noção intuitiva do limites, vamos destacar a de **tendência**, onde dizer que x tende a um determinado valor a do domínio de uma função, significa intuitivamente que os valores de x se aproximam de a.

Exemplo 1.4 : Determine o limite, quando x *tende* a 3, na função $f(x) = x + 1$. Através de tabelas vamos obter o valor do limite intuitivamente (tabela 1.1):

x	$f(x) = x + 1$	$f(x)$
$2,5$	$f(2,5)$ = 2,5 + 1	3,5
2,7	$f(2,7)$ = 2,7 + 1	3,7
2,9	$f(2,9)$ = 2,9 + 1	3,9
2,99	$f(2,99)$ = 2,99 + 1	3,99
2,999	$f(2,999)$ = 2,99 + 1	3,999

x	$f(x) = x + 1$	$f(x)$
3,5	$f(3,5)$ = 3,5 + 1	4,5
3,3	$f(3,3)$ = 3,3 + 1	4,3
3,1	$f(3,1)$ = 3,1 + 1	4,1
3,01	$f(3,01)$ = 3,01 + 1	4,01
3,001	$f(3,001)$ = 3,001 + 1	4,001

Tabela 1.1: Aproximações para $f(x) = x + 1$.
(Fonte: Autora.)

Note que, quando x tende a valores próximos de 3, tanto pela esquerda (valores menores do que 3) quanto pela direita (valores maiores do que 3), $f(x)$ aproxima-se de 4, logo, $\lim\limits_{x \to 3}(x + 1) = 4$.

Perceba ainda que, $f(3) = x + 1 = 3 + 1 = 4$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 3}(x + 1) = f(3)$.

Graficamente temos (Fig.1.13):

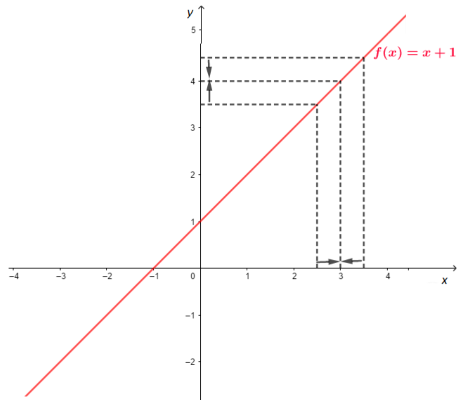


Figura 1.13: Gráfico de $f(x) = x + 1$
(Fonte: Autora).

Exemplo 1.5 : : Determine o limite, quando x *tende* a 1, na função $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

Primeiramente observemos que $1 \notin D(f)$, logo $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, e que a função pode ser reescrita para todo x $\neq 1$, como:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2, x \neq 1,$$

onde para todo valor de x diferente de 1, a função f se comporta como a expressão $y = x - 2$.

Através de tabelas vamos obter o valor do limite intuitivamente (tabela 1.2):

x	$f(x) = x - 2$	$f(x)$
$0,5$	$f(0,5) = 0,5 - 2$	$-1,5$
0,7	$f(0,7) = 0,7 - 2$	$-1,3$
0,9	$f(0,9) = 0,9 - 2$	$-1,1$
0,99	$f(0,99) = 0,99 - 2$	$-1,01$
0,999	$f(0,999) = 0,999 - 2$	$-1,001$

x	$f(x) = x - 2$	$f(x)$
1,5	$f(1,5) = 1,5 - 2$	$-0,5$
1,3	$f(1,3) = 1,3 - 2$	$-0,7$
1,1	$f(1,1) = 1,1 - 2$	$-0,9$
1,01	$f(1,01) = 1,01 - 2$	$-0,99$
1,001	$f(1,001) = 1,001 - 2$	$-0,999$

Tabela 1.2: Aproximações para $f(x) = x - 2$.
(Fonte: autora)

Note que, quando x tende a valores próximos de 1, tanto pela esquerda (valores menores do que 1) quanto pela direita (valores maiores do que 1), $f(x)$ aproxima-se de -1, logo, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = -1$.

Graficamente temos (Fig. 1.14):

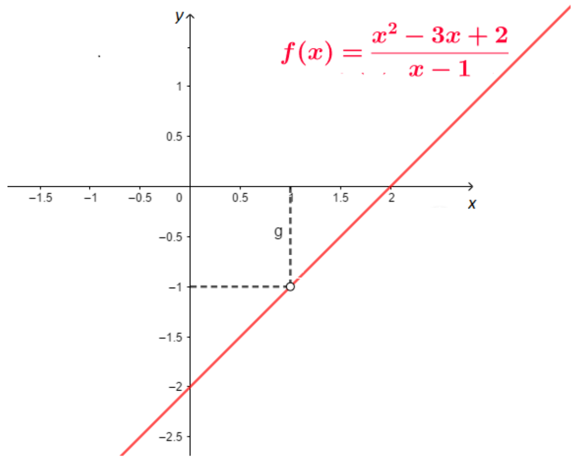


Figura 1.14: Gráfico de $\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
(Fonte: Autora).

Neste caso, perceba que o valor do limite é determinado pelo comportamento da função em valores muito próximos do ponto em questão, isto é, no que denominamos vizinhança do ponto, e nesta situação a função é descontínua. Ao traçar o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ utilizando uma caneta, à medida que essa desliza pelo papel passando pelos pontos da reta ocorre uma falha, isto é, a interrupção de sua tinta quando a mesma chega no ponto $(1, -1)$ e, portanto, esse ponto fica sem registro no gráfico, no entanto, a tinta da caneta volta a registrar todos os demais pontos dessa reta. A reta fica então com um "buraco" por isso essa função não é contínua.

De modo simplório, ao se desenhar o gráfico em dado momento a ponta do lápis se afasta do papel em um certo ponto, e continuarmos a partir de outro. Diferente do exemplo anterior (1.4) no qual o limite ocorre exatamente no ponto, temos portanto uma função contínua. No ensino médio, as funções comumente estudadas são exemplos de funções contínuas.

1.5.2 Noção Formal de Limites

Definição 1.16. *Seja I um intervalo qualquer, $a \in I$ e $f(x)$ uma função definida no intervalo I (exceto eventualmente em a). O limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e denota-se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

se para todo ϵ>0 existe um $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \textit{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta \ ,$$

onde ϵ *e* δ *são constantes tão pequenas quanto se queira.*

Note que:

- o número real a não precisa estar no domínio da função f, mas existem valores do $D(f)$ que estão tão próximos de a quanto necessitarmos;
- o termo $x \to a$ quer dizer que x se aproxima de a, porém x é diferente de a;
- o valor de $f(x)$ se aproxima de L, quando x se aproxima de a, porém nem sempre é verdade que $f(a) = L$.

Geometricamente temos (Fig. 1.15):

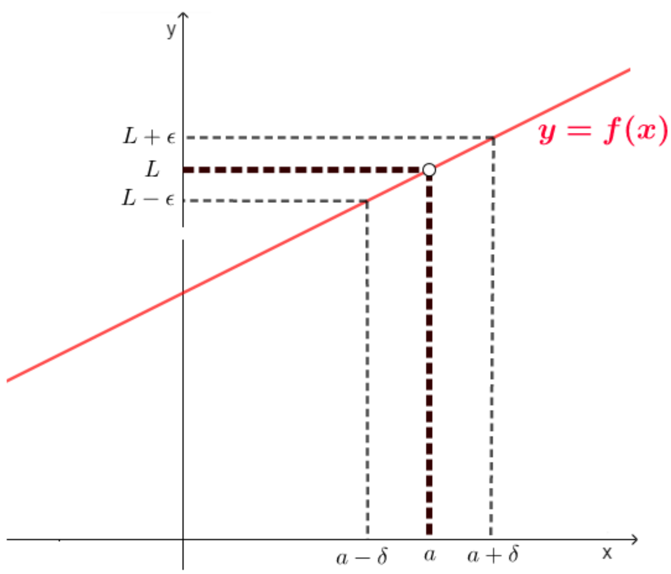


Figura 1.15: Gráfico da definição de limite
(Fonte: Autora).

Retornando ao exemplo (1.4), $\lim_{x \to 3}(x + 1) = 4$, e usando a definição 1.16 temos que dado um $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - 4| < \epsilon \text{ e } 0 < |x - 3| < \delta \ ,$$

assim se $x \neq 3$ pertencer ao intervalo $(3-\delta, 3+\delta)$, logo $f(x)$ pertencerá ao intervalo $(4 - \epsilon, 4 + \epsilon)$, ou seja, se $|(x - 3)| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \epsilon$.

De forma geral temos:

$$x \in D(f) \text{ e } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow |(x+1)-4| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow |(x-3)| < \epsilon$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta \leqslant \epsilon$ temos que

$$x \in D(f) \text{ e } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(x+1)-4| = |x-3| < \delta = \epsilon$$

Veja que tivemos |(x + 1) - 4| $< \epsilon$ sempre que 0 $<$ |x - 3 | $< \delta$, portanto, $\lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 4$.

Teorema 1.17. ***Unicidade do Limite.***

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$, *isto é, o limite quando existe é único.*

Demonstração:

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, teremos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que :

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1| < \tfrac{\epsilon}{2};$$
$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-L_2| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Agora tomando,

$$\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\},$$

teremos que

$$\delta \leqslant \delta_1 \text{ e } \delta \leqslant \delta_2,$$

e se, $0 < |x-a| < \delta$, então

$$|f(x)-L_1| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ e } |f(x)-L_2| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Portando, para $x \in D(f)$ e $0 < |x - a| < \delta$, temos que :

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, isto é $|L_1 - L_2| < \epsilon$.

Contudo, o único número não negativo que é menor ou igual a todo número positivo é o zero, logo:

$$|L_1 - L_2| = 0 \Rightarrow L_1 - L_2 = 0,$$

concluindo assim que

$$L_1 = L_2.$$

■

1.5.3 Limites Laterais

Definição 1.18. ***Limite à direita:*** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_1$**.**

Seja uma função f definida pelo menos em intervalo (a,b), definimos o limite lateral à direita de $f(x)$ no ponto a como sendo L_1, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$.

Definição 1.19. ***Limite à esquerda:*** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_2$**.**

Seja uma função f definida pelo menos em intervalo (c,a), definimos o limite lateral à esquerda de $f(x)$ no ponto a como sendo L_2, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$.

Teorema 1.20. ***Existência do limite finito.***

O limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *existe e é igual a* L *se, e somente se, os limites laterais* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ *existem e ambos forem iguais a* L.

Demonstração:

$\Rightarrow$) Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Mas $0 < |x-a| < \delta$ se e somente se $-\delta < x-a < 0$ ou $0 < x-a < \delta$.

Então, se $-\delta < x-a < 0$, então $|f(x)-L| < \epsilon$, logo $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

Do mesmo modo, $0 < x-a < \delta$, então $|f(x)-L| < \epsilon$, logo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

$\Leftarrow$) Como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ temos que dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que

$0 < x-a < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$ e $-\delta_2 < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que

$-\delta < x-a < 0$ ou $0 < x-a < \delta$, ou seja, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. ■

1.6 Propriedades de Limites

A seguir abordaremos algumas propriedades dos limites de funções reais.

Lema 1.21. ***Limite de uma constante:*** $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|c-c| < \epsilon$.

Como $|c-c| = 0 < \epsilon$ é sempre satisfeito pata todo $\epsilon > 0$, tomando qualquer $\delta > 0$, a definição de limite é satisfeita. ■

Lema 1.22. ***Limite da função identidade:*** $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Demonstração: Devemos mostrar que pata todo $\epsilon > 0$ que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \epsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$. Então, fazendo $\delta = \epsilon$ temos a definição de limite satisfeita. ■

Teorema 1.23. *Sejam $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$ funções tais que os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ existam. Nestas condições valem as propriedades a seguir:*

i) $[\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$.

Demonstração: Vamos provar a soma, sendo que para a diferença a demonstração é análoga. Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M) < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Considera-se $\frac{\epsilon}{2}$ para ser utilizado na definição de limite, pois $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Existem δ_1, $\delta_2 > 0$ tais que se

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2};$$
$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, ambas as afirmações acima são satisfeitas. Então, de fato teremos que

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M) &= |(f(x) - L) + (g(x) - M| \\ &\leqslant |(f(x) - L)| + |(g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

ii) $[\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M.$

Demonstração: Primeiramente demonstrar-se-á o lema a seguir:

Lema 1.24. $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0.$

Note que,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0; x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, tem-se que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |(f(x) - L| < \epsilon &\Leftrightarrow |(f(x) - L) - 0| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0. \end{aligned}$$

Assim demonstramos o Lema 1.24, e o utilizando temos que mostrar que

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x) - L \cdot M] = 0.$$

Agora somando e subtraindo $Lg(x)$ a $f(x)g(x) - LM$ obtemos

$$f(x)g(x) - LM = g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M).$$

Por hipótese temos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, logo por meio do Lema 2.24 temos

$$\lim_{x \to a}[f(x) - L] = 0 \textit{ e } \lim_{x \to a}[g(x) - M] = 0.$$

Demonstrando assim esta propriedade. ■

iii) $[C. \lim\limits_{x \to a} f(x)] = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = C \cdot L$

Demonstração: Pela definição 1.21, se $C = 0$, então $C.f(x) = C = 0$. Agora se $C \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, pela hipótese existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|C|} \Rightarrow |Cf(x) - CL| < \epsilon.$$

■

iv) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

Demonstração:

Primeiramente demonstrar-se-á o lema a seguir:

Lema 1.25. *Suponha que* $\lim\limits_{x \to a} h(x) = N$. *Então existem constantes positivas* $K > 0$ *e* $\delta_1 > 0$ *tais que*

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |h(x)| < K.$$

Dado $\epsilon = 1 > 0$, como $\lim\limits_{x \to a} h(x) = N$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\Rightarrow |h(x) - N| < 1 \\ &\Rightarrow |h(x)| - |N| \Leftarrow |h(x) - N| < 1 \\ &\Rightarrow |h(x)| < 1 + |N| = K, \end{aligned}$$

tomando então $k = 1 + |N| > 0$, temos que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |h(x)| < K,$$

provando assim o lema.

Agora suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, e $\forall\ \epsilon > 0$ (por definição), existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \text{ e } |g(x) - M| < \epsilon.$$

Como tais desigualdades valem para todo ϵ, tomemos

$$\frac{\epsilon \cdot |M|}{2} \text{ tal que } |f(x) - L| < \frac{\epsilon \cdot |M|}{2} \text{ e } \frac{\epsilon \cdot |M|^2}{2K} \text{ tal que } |g(x) - M| < \frac{\epsilon \cdot |M|^2}{2}.$$

Ainda pelo Lema 1.25 temos que $|f(x)| < K$, donde segue:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| &= \left|\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{M} - \frac{f(x)}{M} - \frac{L}{M}\right| \\
&= \left|f(x) \cdot (\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}) + \frac{1}{M} \cdot (f(x) - L)\right| \\
&\Leftarrow \left|f(x) \cdot (\frac{1}{g(x)} \frac{1}{M})\right| + \left|\frac{1}{M}.(f(x) - L)\right| \\
&< K.\frac{1}{M^2} \cdot \frac{\epsilon \cdot |M|^2}{2K} + \frac{1}{|M|} \cdot \frac{\epsilon \cdot |M|}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, como $|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}| < \epsilon$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$. ■

Corolário 1.26. ***Limite de uma Função Polinomial:***

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, onde $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

Demonstração: Note que como $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ são constantes podemos reescrever da seguinte forma:

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0.$$

Este corolário é consequência direta das propriedades (i) e (iii) do Teorema 1.23:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0] \\
&= \lim_{x\to a} c_n x^n + \lim_{x\to a} c_{n-1} x^{n-1} + ... + \lim_{x\to a} c_2 x^2 + \lim_{x\to a} c_1 x^1 + \lim_{x\to a} c_0 \\
&= c_n . \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1} . \lim_{x\to a} x^{n-1} + ... + c_2 . \lim_{x\to a} x^2 + c_1 . \lim_{x\to a} x^1 + c_0 \\
&= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + ... + c_2 a^2 + c_1 a^1 + c_0
\end{aligned}$$

Logo $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$. ■

1.7 Limites Infinitos

Definição 1.27. ***Limites infinitos:*** *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente em a. Se os valores de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x tende a a, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. Isso significa que para todo $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 > |x - a| < \delta$, então $f(x) > A$.*

Da mesma forma, seja f uma função definida em um intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente em a, se os valores de $f(x)$ decrescem indefinidamente quando x tende a a, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. Isso significa que para todo $A' < 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 > |x - a| < \delta$, então $f(x) < A'$.

Definição 1.28. ***Limites no infinito:*** *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$, se os valores de $f(x)$ se aproximam de L quando x cresce indefinidamente, escreve-se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Isso significa que para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $A > 0$ tal que se $x > A$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Da mesma forma, seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, a)$, se os valores de $f(x)$ se aproximam de L quando x decresce indefinidamente, escreve-se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$. Isso significa que para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $A' < 0$ tal que se $x < A'$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Observe o gráfico (Fig. 1.16),

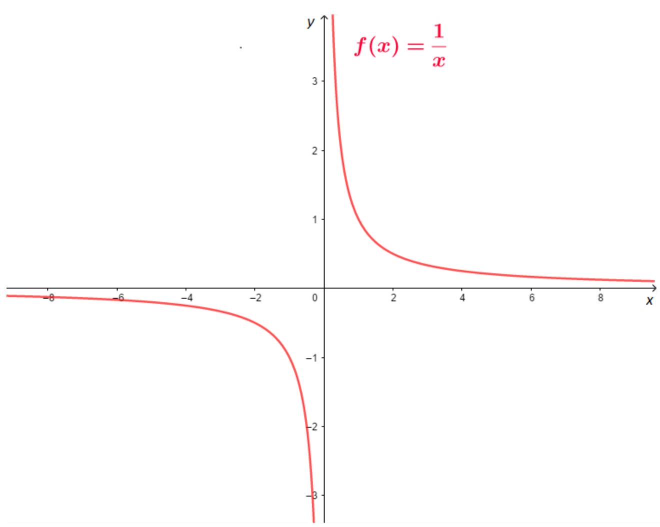


Figura 1.16: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$
(Fonte: Autora.)

- quando x tende a zero pela esquerda temos $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$;

- quando x tende a zero pela direita temos $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;
- quanto mais distante do zero o valor de x negativo se encontra temos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$;
- quanto mais distante do zero o valor de x positivo se encontra temos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1.8 Derivadas

> "Seja o que for que imaginemos, é finito. Portanto não existe qualquer ideia, ou concepção, de algo que denominamos infinito. (...) Quando dizemos que alguma coisa é infinita, queremos apenas dizer que não somos capazes de conceber os limites e fronteiras da coisa designada, não tendo concepção da coisa, mas de nossa própria incapacidade."(Hobbes [17], p.19).

Trataremos do assunto de maneira sutil, de forma a servir como subsídio, fortalecendo a base do Ensino Médio, iniciando com o estudo de Taxa de variação. Devemos fazer uma relação entre as grandezas variáveis, a qual denominaremos de *função* para analisar, interpretar e resolver os problemas. O conceito de derivada está diretamente ligado com a taxa de variação, que por sua vez, é a base de estudo de funções e exprime a razão com que a função varia em um determinando intervalo.

1.8.1 Taxa de Variação

Tome $f(x)$ como sendo a curva de uma função definida em um intervalo real (a, b) e os pontos $P(x_a, y_a)$ e $Q(x_b, y_b)$ pertencentes a curva. A diferença entre o valor final e o inicial da grandeza, dentro do intervalo real, é o que chamamos de variação de uma grandeza.

Sendo assim, se y é uma grandeza, Δy (lê-se: "delta y") é a sua variação dada por $\Delta y = y_{final} - y_{inicial}$, ou seja, a variação de y é igual ao valor final de y_b de Q menos o valor inicial de y_a de P.

Analogamente para a grandeza x temos Δx (lê-se: "delta x") a sua variação é dada por $\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$, ou seja, a variação de x é igual ao valor final de x_b de Q menos o valor inicial de x_a de P.

Definição 1.29. *A taxa média de variação de uma função f, num intervalo* $[x_a, x_b]$ *é dada por*

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}.$$

Geometricamente temos (Fig. 1.17):

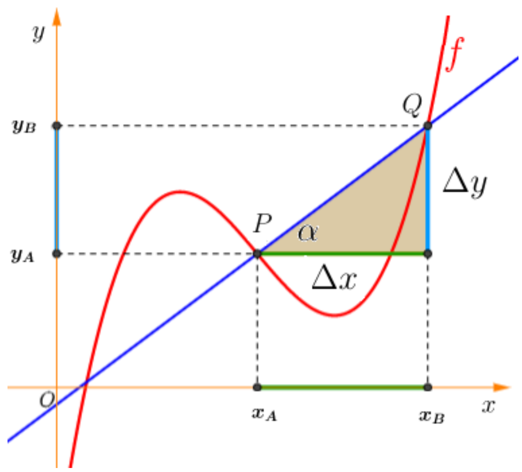


Figura 1.17: Taxa de Variação Média em $f(x)$
(Fonte: Autora).

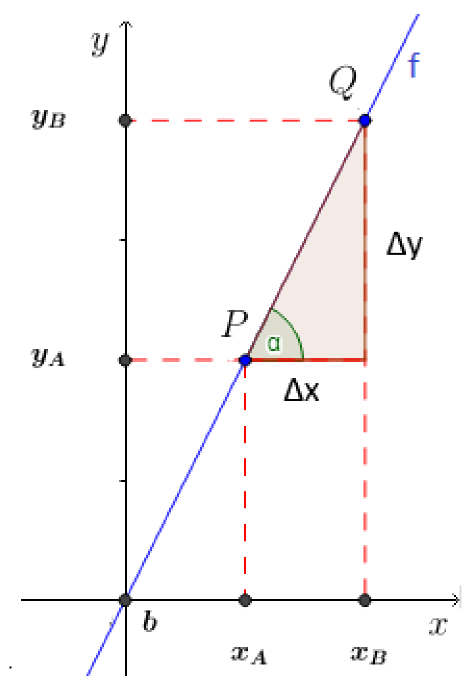


Figura 1.18: Taxa de Variação Média em $f(x) = ax + b$
(Fonte: Autora).

A taxa de variação média mostra com que rapidez a função cresce ou decresce em um determinado intervalo, contudo por se tratar de uma média podem existir intervalos dos quais a função apresente comportamento diferente do mencionado na média, com exceção da função $f(x) = ax + b$ cuja taxa de variação média é sempre constante (Fig. 1.18).

Tome $f(x) = ax + b$, em um intervalo entre x_a e x_b, com $x_a < x_b$:

$$T_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{\mathrm{a}})-f(x_{\mathrm{b}})}{x_{\mathrm{b}}-x_{\mathrm{a}}} = \frac{(ax_b+b)-(ax_a+b)}{x_b-x_a} = \frac{a(x_b-x_a)}{x_b-x_a} = a.$$

Geometricamente, a taxa média de variação de uma função f (observe as Fig. 1.17 e 1.18), representa a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P(x_a, y_a)$ e $Q(x_b, y_b)$ do gráfico de $f(x)$, ou seja, o coeficiente angular da reta e a taxa de variação são iguais:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{\mathrm{b}})-f(x_{\mathrm{a}})}{x_{\mathrm{b}}-x_{\mathrm{a}}}.$$

A taxa de variação média não nos fornece informações precisas em cada ponto do intervalo tomado da função, quanto maior for o intervalo podemos ter valores mais distantes da média em determinados pontos. Contudo conforme formos diminuindo a variação do intervalo em questão, mais significativa será a análise da variação, ou seja, estas informações vão se tornando cada vez mais precisas.

Quando analisamos a taxa de variação da função f em um dado ponto, estamos calculando a sua *taxa de variação instantânea*, o que geometricamente é representado pelo coeficiente angular da reta á curva da função f no ponto x_1.

Definição 1.30. *A Taxa de Variação Instantânea de uma função f no ponto x_0 é dada por*

$$T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

e fazendo $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \Delta\mathrm{x}$, temos

$$T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1.8.2 Interpretação Geométrica e Conceito de Derivada

Para continuarmos este estudo devemos considerar o problema de traçar a reta tangente de uma curva qualquer. Habitualmente, no caso de uma circunferência sabemos que a reta tangente num determinando ponto P é a reta que passa por P perpendicular ao raio, simploriamente é a reta que "toca"a circunferência unicamente neste ponto P (Fig. 1.19).

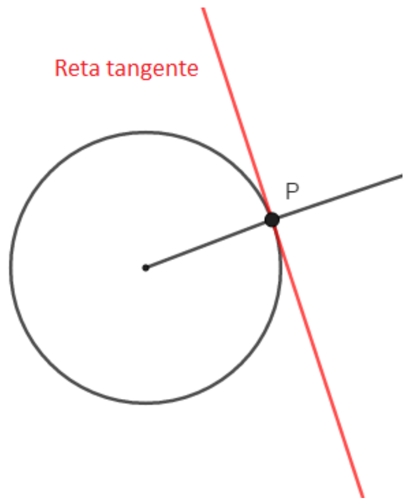


Figura 1.19: Reta tangente a uma circunferência
(Fonte: Autora)

No caso de uma curva qualquer de uma certa função f, seja $P(x_a, f(x_a))$ o ponto pertencente a esta curva da qual desejamos traçar a tangente, consideremos ainda um outro ponto $Q(x_a + h, f(x_a + h))$ também pertencente a esta mesma curva, o declive da reta secante PQ é expresso pelo quociente

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{\mathrm{b}}) - f(x_{\mathrm{a}})}{x_{\mathrm{b}} - x_{\mathrm{a}}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Note que h realmente é um incremento adicionando à abscissa de P para obtermos a abscissa de Q, pois $\Delta x = (x_a + h) - (x_a) = h$. Consequentemente a ordenada $f(a+h)$ é obtida pelo incremento de $f(a+h) - f(a)$ em $f(a)$, ou seja, $f(a+h) = f(a) + [f(a+h) - f(a)]$.

Permanecendo o ponto P fixo e o ponto Q se aproximando cada vez mais deste, passando por sucessivas posições $Q_1, Q_2, Q_3, ...$, a secante PQ passará a assumir as posições $PQ_1, PQ_2, PQ_3, ...$, fazendo com que a razão incremental h que é o declive da secante, se aproxime de um determinando valor m. Chamamos assim de reta tangente a curva no ponto P como sendo a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é o número m mencionado, conforme ilustrado na figura 1.20.

Agora, à medida que Q se aproxima ainda mais de P, com h cada vez menor e mais próximo de zero e a razão incremental se aproxima de um valor finito m, dizemos que m é o limite da razão incremental, com $h = \Delta x \to 0$ obtendo assim não mais a reta secante PQ e sim a reta tangente t em P, o que leva a seguinte definição:

Definição 1.31. *Se $P(x_0, y_0)$ é um ponto da função f, então a reta tangente ao gráfico de f em P é definida como a reta que passa por P com declividade(coeficiente angular) definida por*

$$m_{tg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista.

Sendo assim de acordo com as definições 1.30 e 1.31 chamamos de derivada da função $f(x)$ em x_0 este valor m da inclinação da reta tangente e denotamos por $f'(x_0)$, onde e lê-se: derivada da função $f(x)$ em x_0.

Definição 1.32. *A Taxa de Variação Instantânea, ou **derivada** da função **f** em $x = x_0$, é dada por*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

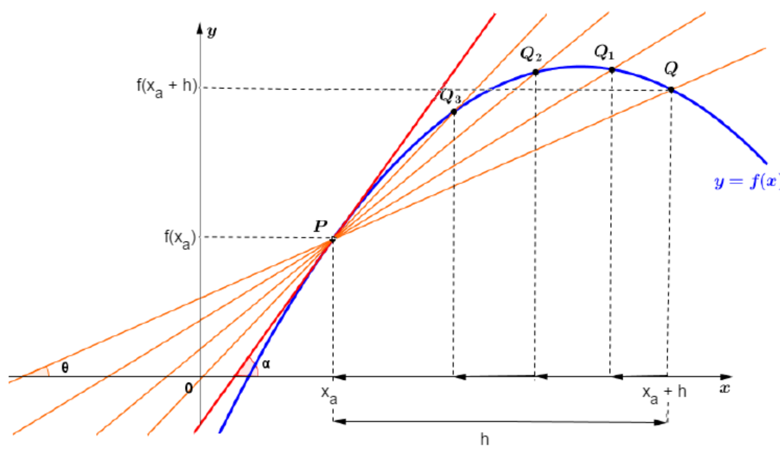


Figura 1.20: Ponto Q se aproximando do ponto P á medida que h tende a zero (Fonte: Autora.)

1.8.3 Regras Básicas Para Derivação

A seguir veremos algumas regras de derivação que auxiliaram nos cálculos de derivadas.

Proposição 1.33. ***Derivada de uma constante:***

Se c é uma constante $\in \mathbb{R}$ e se $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{0} = 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.34. ***Derivada de uma potência:***

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)^n - f(x)^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x^{n-1}.\Delta x + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x^{n-2}.(\Delta x)^2 + ... + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot (\Delta x)^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x^{n-2}.(\Delta x) + ... + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot (\Delta x)^{n-1} \right]}{\Delta x} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.35. ***Derivada da multiplicação por constante:***

Sejam f e g funções, k uma constante tal que $g(x) = kf(x)$. Se $f'(x)$ existir, então $g'(x) = kf'(x)$.

Demonstração: Tome por hipótese que existe $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Logo,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x+\Delta x) - kf(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} k \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
&= kf'(x).
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.36. ***Derivada da soma:***

Sejam f, g e h funções tais que $h(x) = f(x) + g(x)$, para todo x. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração: Assuma por hipótese que existem $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$. Assim,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.37. ***Derivada do produto:***

Sejam f, g e h funções tais que $h(x) = f(x)\ g(x)$, para todo x. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem então $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Demonstração: Assuma por hipótese que existem $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$. Portanto,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Se $f(x+\Delta x).g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 1.38. ***Derivada do quociente:***

Sejam f, g e h funções tais que $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$, para todo x. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem então $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g'(x)]^2}$.

Demonstração: Tome por hipótese que existem $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$. Então

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right]. \end{aligned}$$

Se $f(x)g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x) - f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}\right] \\
&= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.
\end{aligned}$$

■

1.9 Máximos e Mínimos

Diversas situações e/ou problemas do cotidiano procuram encontrar a área máxima, volume máximo, custo mínimo, ou seja, busca-se o maior, menor, máximo, mínimo, melhor, pior valor desta. São os chamados problemas de otimização. Uma forma prática e rápida que auxilia nessa busca é a representação destas situações por meio de funções, e o uso das derivadas constitui uma grande ferramenta que permitem encontrar valores ao evidenciarem as características de máximos e mínimos de funções. Como já mencionado, nos limitaremos a funções contínuas em seus domínios, e nesta seção apresentaremos alguns conceitos relacionados às noções de máximos e mínimos.

Definição 1.39. *Se $f(x)$ é uma função definida, contínua e derivável em um dado intervalo I, temos que:*

i) se $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente neste mesmo intervalo;

ii) se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente neste mesmo intervalo.

Definição 1.40. *Uma função f tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c ($c \in D(f)$) se existir um intervalo aberto I ($c \in I$), tal que $f(c) \leq f(x)$ ou $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$.*

Definição 1.41. *Uma função f tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c ($c \in D(f)$) se existir um intervalo aberto I ($c \in I$), tal que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$.*

Definição 1.42. *O valor f(c) é chamado de valor mínimo absoluto de f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ ou $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio de f.*

Definição 1.43. *O valor f(c) é chamado de valor máximo absoluto de f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio de f.*

Exemplo 1.6 : Na Fig. 1.21 temos a função $y = f(x)$ onde os pontos:

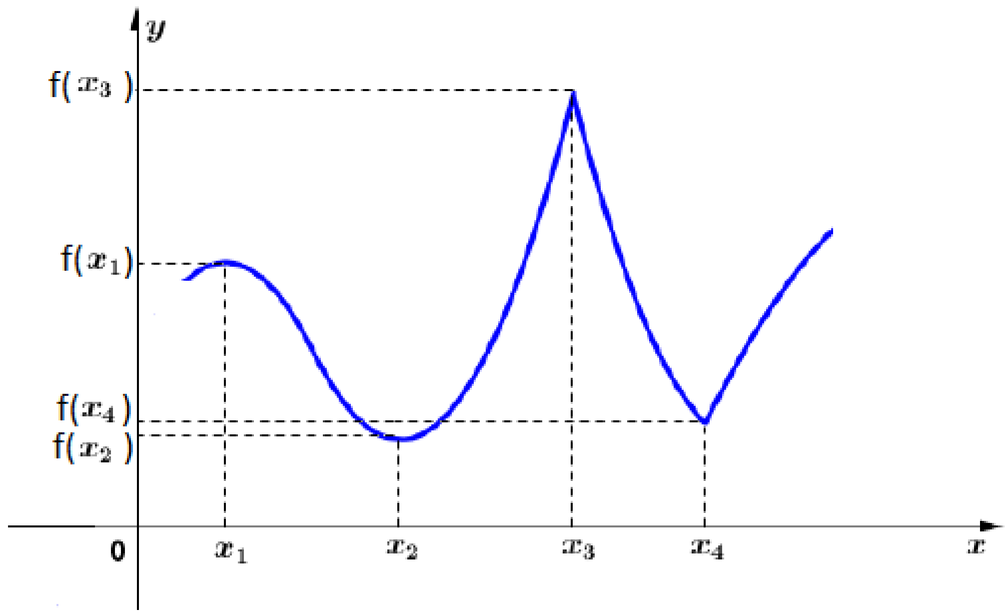


Figura 1.21: Pontos da função $y = f(x)$
(Fonte: Autora.)

- x_1 e x_3 são pontos de máximos relativos;
- x_3 é ponto de máximo absoluto;
- x_2 e x_4 são pontos de mínimo relativos;
- x_2 é ponto de mínimo absoluto.

Teorema 1.44. *Seja $f(x)$ uma função derivável em c, com $c \in D(f)$. Se $f'(c) = 0$ temos que c é ponto de máximo ou mínimo local.*

Definição 1.45. *Um ponto c pertencente ao domínio de uma função f é denominado de ponto crítico se f é derivável em c e $f'(c) = 0$.*

Por meio da definição 1.45 podemos reescrever o teorema 1.44 como: "Se $x = c$ é máximo ou mínimo local de f então c é ponto crítico de f".

Teorema 1.46. ***(Teste da Primeira Derivada).*** *Seja f uma função derivável num intervalo (a, b) e seja c um pronto crítico de f. Temos que:*

i) se f' passa de positiva para negativa em c logo f tem máximo local em c;

ii) se f' passa de negativa para positiva em c logo f tem mínimo local em c;

iii) se f' não muda de sinal em c logo f não tem máximo nem mínimo local em c.

Teorema 1.47. ***(Teste da Segunda Derivada).*** *Seja f uma função derivável num intervalo (a, b) e seja $c \in$ (a,b) um pronto crítico de f. Se f admite a derivada f'' em (a, b) temos que:*

i) se $f"(c) < 0$ então f possui um máximo local em c;

ii) se $f"(c) > 0$ então f possui um mínimo local em c.

Demonstração: Suponha que $f'(c) = 0$ e $f"(c) < 0$, então

$$f"(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Logo, existe um intervalo (a,b), contendo c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Tome A como o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in (a, b)$ tais que $x < c$, logo c é extremo direito do intervalo aberto a e ainda tome B como o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in (a, b)$ tais que $x > c$, logo c é extremo esquerdo do intervalo aberto b. Agora se $x \in A$, implica que $x - c < 0$, logo $f'(x) > f'(c)$, e se $x \in B$, implica que $x - c > 0$, logo $f'(x) < f'(c)$. Como $f'(c) > 0$, concluímos que, se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e, se $x \in b$, $f'(x) < 0$. Portanto, f passa de crescente para decrescente em c, o que pelo teste da primeira derivada, afirma que f tem máximo local em em $x = c$. O outro caso é análogo. ■

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES

2.1 Os Problemas de Máximo e Mínimo na Atualidade

O ramo da Matemática que estuda máximos e mínimos é a Otimização, que aliada ao desenvolvimento do Cálculo contribui para a solução de diversos problemas, o que é confirmado por Neto:

> Desde sua criação, a grande razão para o sucesso do Cálculo como corpo de conhecimento tem sido sua aplicabilidade a um sem número de problemas de vários ramos do conhecimento. De fato,... *Principia* obra prima de Newton, publicado em 1687, deixa claro que a grande motivação de Newton para o desenvolvimento dos métodos do Cálculo residiu nas aplicações dos mesmos à Física. (Neto [24], p.10).

Atualmente, em diversas áreas do conhecimento humano, existem problemas ou situações nas quais a variação de grandezas está presente, e consequentemente busca-se otimizar tais situações ao determinar o ponto que resulta no melhor aproveitamento ou rendimento destas. Reduzir os gastos de material e paralelamente maximizar a distribuição de internet, água, luz e esgoto em uma construção, reaproveitamento de matéria prima em reformas, a confecção de embalagens visando gastar-se menos na produção entre outros casos são alguns exemplos de problemas reais que podem ser solucionados usando estas ferramentas do Cálculo.

Devemos elencar ainda outra contribuição da otimização, não pensando apenas na diminuição dos gastos versus maior lucro, mas também no fato que a utilização de um menor número de matéria-prima traz benefícios ao meio ambiente, um fator predominante e impossível de ser deixado de lado pela atual geração.

Segundo Ávila [8], antes de 1943 este conteúdo já era abordado no cronograma nos dois anos de pré-universitário. Posteriormente, com a Reforma de Capanema o Cálculo continuou fazendo parte do currículo, porém integrando o programa da 3º série do curso científico.

O movimento da Matemática moderna em meados dos anos 60 trouxe algumas mudanças no currículo de Matemática ensinado nas escolas influenciadas por tendências do exterior a saber, a retirada dos conteúdos de Cálculo e Geometria como disciplinas específicas. A reforma sancionada em 1971 conhecida como a segunda Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) mudou a organização do ensino no Brasil criando os níveis de ensino de 1º e 2º grau, onde o 2º grau passa a ter como foco a educação profissionalizante. Segundo a Agência Senado [1], são apontadas como motivação dos reformistas as seguintes situações:

- os idealizadores dessa alteração entendiam que o programa de Matemática já era muito extenso e consequentemente não havia espaço para a inclusão do cálculo, pois queriam um programa inovador e não haveria espaço para o formalismo;

- não haviam vagas para todos os estudantes nos cursos superiores e existia uma cobrança dos mesmos, então era necessário reduzir a procura por estas vagas. O "vestibular"da época não era limitado a um número de vagas ofertadas pelas instituições superiores, mas sim a nota de corte, logo todo estudante que atingisse aquela nota teria em tese direito a uma vaga no ensino superior;

- e o país precisava de "trabalhadores", mão de obra especializada necessitando de técnicos a nível médio.

Destaca-se ainda que este sistema encontrava-se na contramão do sistema educacional de outros países, como os EUA, onde existe uma maior flexibilidade no currículo dos anos finais, na qual o aluno pode escolher estudar mais matemática ou qualquer outra área, o que pode ser aproveitado quando o mesmo adentrar no curso superior.

Estas interpretações e justificativas, segundo Ávila [9], são um grande equívoco, e geraram programas mal estruturados até a atualidade.

Machado [20], que já lecionou no Ensino Médio, salienta com base em sua experiência que este método funciona, que é possível sim incluir e ensinar Cálculo nos programas atuais, mas não da forma como anteriormente era ensinado, iniciando-se por limites, pois trata-se apenas de uma antecipação da formalidade de como seria ensinado no nível superior. Este autor aborda o tema em uma coleção chamada "Matemática por Assunto", na qual escreveu todo o volume de cálculo, sem a formalização do conceito de limites, contudo este livro não é mais publicado.

Em uma entrevista [19], este autor relata de forma sucinta como escreveu a coleção "Matemática por Assunto" afirmando que a melhor forma de se iniciar o ensino de Cálculo é por meio de funções simples, especialmente as polinomiais que justamente são ensinadas no ensino médio, começando pela integração e com as funções de primeiro grau, e depois com a ideia de derivação e por último com a equação diferencial, o que pode ser trabalhado em poucas aulas. Posteriormente o docente deve recomeçar utilizando as funções de segundo grau:

> "Com a ideia de derivada, por exemplo, ele não precisa nunca mais decorar as fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola, pois, quando precisar das coordenadas, pega um pedaço de papel, calcula à mão a derivada de $y = ax^2 + bx + c$, e a iguala a zero; com isso, acha a expressão para x, e com ela, a expressão para y. Fácil, fácil, e sem nenhuma decoreba". (Machado [19], on-line).

Mais especificamente para a noção de derivada:

> "o aluno calcula o valor do polinômio para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. Vai ver que a taxa de variação por unidade não é mais constante, mas a taxa de variação da taxa de variação é constante! E isso ele descobre muito simplesmente, com tabelas". (Machado [19], on-line).

Ávila [8] também defende a presença do Cálculo no currículo do Ensino Médio, ao afirmar que seria muito mais proveitoso utilizar o tempo disponível no Ensino Médio ensinando formalismo e terminologias sobre funções, com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações, aplicando a matemática a realidade:

> “Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.” (Ávila, [8], on-line).

Por meio de uma nova organização do currículo e das metodologias faz-se possível a inclusão do Cálculo no Ensino Médio:

> “Antes que algum leitor pense que o ensino de derivadas logo na primeira série vai aumentar ainda mais o ensino de funções, apressamo-nos a dizer que é exatamente o contrário. O ensino de funções, como vemos em vários livros, é que está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizada.” (Ávila, [7], on-line).

Salientamos que o objetivo das mudanças propostas nas reformas anteriormente citadas eram trazer modernidade ao ensino da Matemática, porém descartaram uma grande ferramenta, já que o Cálculo é um conteúdo com grande aplicabilidade, conforme exemplificado acima, e uma ferramenta aliada a arte da resolução de problemas, o que é essencial para a formação de um aluno inserido no contexto moderno e atual.

Para Polya:

> Alguns dos mais importantes deveres do professor são o de instigar e o de desafiar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. Atualmente o trabalho docente é marcado pela frustração: os professores têm a sensação de estar forçando os alunos a participarem de ações que visivelmente não os atraem.“Sendo uma excelente forma de causar este estímulo a resolução de problemas interessantes.”(Polya [28],p.15).

Por fim, observamos que a maior parte dos livros de cálculo aborda dentro do estudo das derivadas os problemas aplicados a situações envolvendo máximos e mínimos, as otimizações, o que reafirma a sua importância por serem situações rotineiras, de grande importância no dia a dia. E quando estas situações podem ser expressas em termos de variáveis de funções, o cálculo nos traz ferramentas que nos auxiliaram a compreender e resolver este problema. Sendo assim, justifica-se a apresentação dos problemas de otimização ainda no ensino médio por meio das derivadas.

2.2 Proposta de Apresentação dos Conceitos de Limites e Derivada no Ensino Médio

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) é um dos documentos norteadores da educação e em seu artigo 35 ela retrata que o ensino da Matemática é obrigatório nos três anos do ensino médio, inclusive nas comunidades indígenas, confirmando a preocupação com a disseminação da matemática em nossas instituições de ensino.

Relata ainda que o ensino médio deve reforçar e considerar a formação integral do aluno, promovendo um trabalho voltado para a construção do seu projeto de vida e para a sua formação nos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais, priorizando o desenvolvimento de um cidadão crítico, capaz de aplicar o conteúdo formal aprendido contextualizando-o com outros conhecimentos.

Nesse mesmo sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) das ciências da natureza e matemática retratam fortemente um desenvolvimento da disciplina de Matemática interligado com outras áreas à medida que vivemos em uma sociedade crescentemente globalizada, sendo assim a educação não pode ficar desintegrada, devendo formar cidadãos capazes resolver problemas, se comunicar, tomar decisões e trabalhar em equipe.

Os PCN+ ao estabelecerem um conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no ensino médio, buscam exatamente alcançar os objetivos descritos no paragrafo anterior. Para isso ao aluno não deve ver a matemática apenas como um conjunto de regras e símbolos isolados, e sim conseguir aplica-lá contextualizando em outras áreas do conhecimentos, bem como em sua vida profissional.

Representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sócio-cultural são as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, segundo os PCN+.

Fazendo cumprir a Lei de Diretrizes e Bases da Educação(LDB) de 1996, em seu artigo 9, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento atual que determina quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas em todas as escolas e níveis de ensino no nosso país, visando atingir uma formação integral que tem por objetivo garantir um ensino igualitário no sistema educacional em todo o território nacional, a fim de construir uma sociedade mais justa, inclusiva e democrática.

Este documento “leva em consideração que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações” (BNCC [22], p.266). Sendo assim a BNCC estabelece as 10 competências gerais que devem nortear as áreas de conhecimento e seus componentes curriculares, sendo estas essenciais para assegurar os direitos de aprendizagem de todos os educandos, as quais são:

1. Conhecimento;
2. Pensamento científico, crítico e criativo;
3. Repertório cultural;
4. Comunicação;
5. Cultura digital;
6. Trabalho e projeto de vida;
7. Argumentação;
8. Autoconhecimento e autocuidado;
9. Empatia e cooperação;
10. Responsabilidade e cidadania.

Neste trabalho ao se utilizar:

i. no laboratório de informática o software Geogebra para a interpretação geométrica do conceito de derivação e o esboço gráfico de situações abordando a variação de grandezas;

ii. a resolução de problemas presentes no cotidiano instigando a investigação, troca de informações entre os educandos e formulação de uma estratégia visando a solução destes problemas;

iii. reflexão ambiental ao se utilizar uma situação problema com foco na economia de matéria prima na confecção de uma embalagem;

iv. o uso de material manipulável para verificação e confrontação dos resultados encontrados, tornou-se possível abordar algumas das competências presentes na BNCC:

2. Pensamento científico, crítico e criativo: exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;

4. Comunicação: utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos, além de produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;

5. Cultura digital: compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva;

7. Argumentação: argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

No contexto diário, seja este no ambiente comercial, escolar ou de questões particulares toda pessoa durante o processo de tomada de decisão tem que identificar o problema, definir o objetivo para então formular, analisar e avaliar alternativas para finalmente escolher a melhor dentre as opções disponíveis.

Os alunos deste século têm a informação e a solução de seus problemas com apenas um clique, neste sentido, a BNCC, sugere uma nova vertente para a educação visando deixar a escola mais atraente para o aluno. Para isso a escola deve acompanhar o desenvolvimento global, e um dos caminhos é abordar os conteúdos de maneiras diferentes com foco em situações de aplicabilidade real. A BNCC ainda prevê os itinerários formativos que permitem flexibilizar a organização escolar de acordo com a necessidade e relevância da comunidade na qual a instituição de ensino está inserida.

Diante destes dos argumentos citados acima, a otimização é uma ferramenta que apoia o processo da tomada de decisão, bem como pode ser aplicada para grande parte de diversos problemas presentes no âmbito real, desde a uma simples tomada de decisão sobre qual o melhor caminho a se tomar para ir de sua casa ao colégio ou como maximizar o volume de uma embalagem minimizando o uso de matéria prima, o que interfere no custo final de um produto e na competitividade do mesmo no cenário comercial, podendo ser trabalhada paralelamente com recursos computacionais tais como planilhas eletrônicas ou como neste trabalho por meio do software Geogebra, indo exatamente de encontro com o que é ressaltado pela BNCC:

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.
> Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (BNCC [22], p. 518).

A seguir, apresentamos nossa proposta didática para a abordagem deste conteúdo no Ensino Médio. Os problemas escolhidos representam situações presentes no cotidiano, dando margem a um trabalho mais interativo entre professor – aluno e aluno – aluno. A proposta desenvolvida nesta etapa foi implementada para os alunos do 3° ano do Ensino Médio, visto que estes possuem os conhecimentos básicos necessários: funções, sequências, variação e razão entre grandezas. No entanto, não há empecilhos para que tal proposta seja aplicada para alunos das séries anteriores, caso os mesmos já possuam os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da mesma.

2.2.1 Taxa de Variação

Objetivo: introduzir e definir o conceito de taxa de variação.

Duração: 2h/a.

Pré-requisitos: variação e razão entre grandezas, plano cartesiano.

Material Necessário : software GeoGebra.

Desenvolvimento:

A variação de grandezas está presente no cotidiano, podemos citar algumas destas situações: o tempo gasto para se chegar a escola, a variação de temperatura no decorrer de um dia, a curva de crescimento de uma criança, o rendimento de um determinado capital em certo tempo, a velocidade de deslocamento de uma cidade a outra, a quantidade de remédio administrado depende da idade/peso da pessoa, a conta de luz depende da quantidade de energia gasta, e assim por diante.

Há situações em que uma grandeza varia na dependência de uma, de duas, ou várias outras variáveis, particularmente estudaremos apenas as funções que dependem de uma única variável.

Este conceito de taxa de variação dá embasamento ao estudo de funções expressando o comportamento (rapidez) da qual está função cresce ou decresce em um determinado intervalo.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1 : O crescimento de uma determinada planta é expresso pela lei $h = 2t$, que relaciona a altura em centímetros (h) em função do tempo em dias (t). Neste cenário qual é a variação de h quando t varia:

a) De 1 para 2 dias?

b) De 2 pra 3 dias?

c) De 3 para 6 dias?

d) Represente graficamente os itens anteriores.

Resolução:

a) Note que quando o tempo é:

$$t = 1, \text{ a altura é } h\ (1) = 2\ .\ 1 = 2;$$

$$t = 2, \text{ a altura é } h\ (2) = 2\ .\ 2 = 4.$$

A variação do tempo de 1 dia para 2 dias é representada por $\Delta t = 2$ - $1 = 1$ dia, e quando a altura varia de 2 cm para 4 cm representamos por $\Delta h = 4$ - $2 = 2$ cm.

A razão $= \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2$, é chamada de taxa de variação.

b) Note que quando o tempo é:

$$t = 2, \text{ a altura é } h\ (2) = 2\ .\ 2 = 4;$$
$$t = 3, \text{ a altura é } h\ (3) = 2\ .\ 3 = 6.$$

Então temos,

$$\Delta t = 3 - 2 = 1 \text{ dia};$$
$$\Delta h = 6 - 4 = 2 \text{ cm}.$$

E portanto,

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2.$$

c) Note que quando o tempo é:

$$t = 3 \text{ a altura é } h\ (3) = 2\ .\ 3 = 6;$$
$$t = 6 \text{ a altura é } h\ (6) = 2\ .\ 6 = 12.$$

Então temos,

$$\Delta t = 6 - 3 = 3 \text{ dias};$$
$$\Delta h = 12 - 6 = 6\ cm.$$

E portanto,

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{6}{3} = 2.$$

Definição 2.1. *A taxa média de variação de uma função f, num intervalo* $[x_a,x_b]$ *é dada por*

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_a)-f(x_b)}{x_b-x_a}.$$

Ou seja, dada uma função qualquer $y = f(x)$, a variação de uma grandeza é a diferença entre o valor final e o valor inicial desta grandeza, num determinado intervalo real.

d) Representações gráficas dos itens a (Fig.2.1), b (Fig.2.2) e c (Fig.2.3).

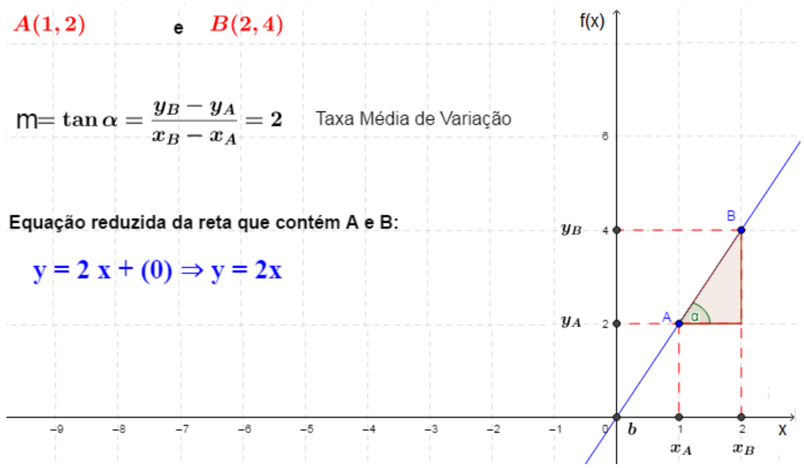


Figura 2.1: Representação Gráfica do item a
(Fonte: Autora.)

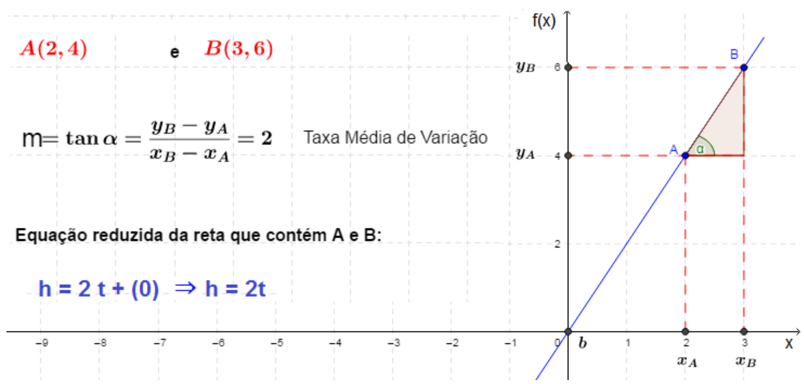


Figura 2.2: Representação Gráfica do item b
(Fonte: Autor)

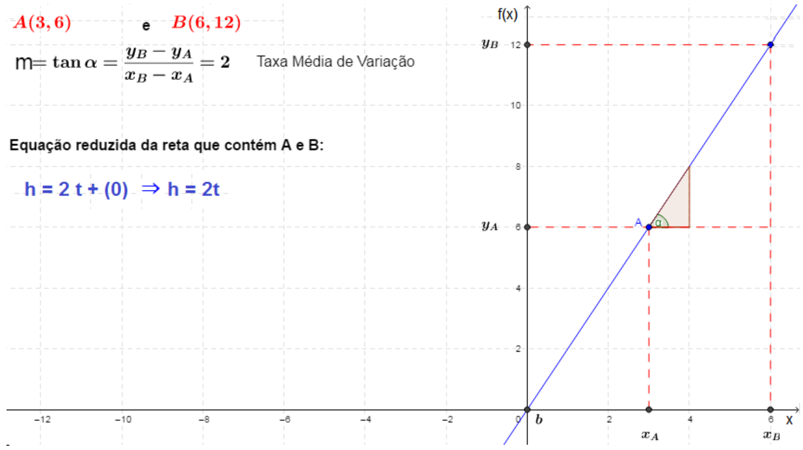


Figura 2.3: Representação Gráfica do item c
(Fonte: Autor)

Interpretação Geométrica. A taxa média de variação de uma função f, em um determinado intervalo [x_a,x_b] pode ser interpretada considerando-se a reta que passa pelos pontos A(x_a,f(x_a)) e B(x_b,f(x_b)). Ou seja o coeficiente angular da reta e a taxa de variação são iguais. (Fig. 2.4).

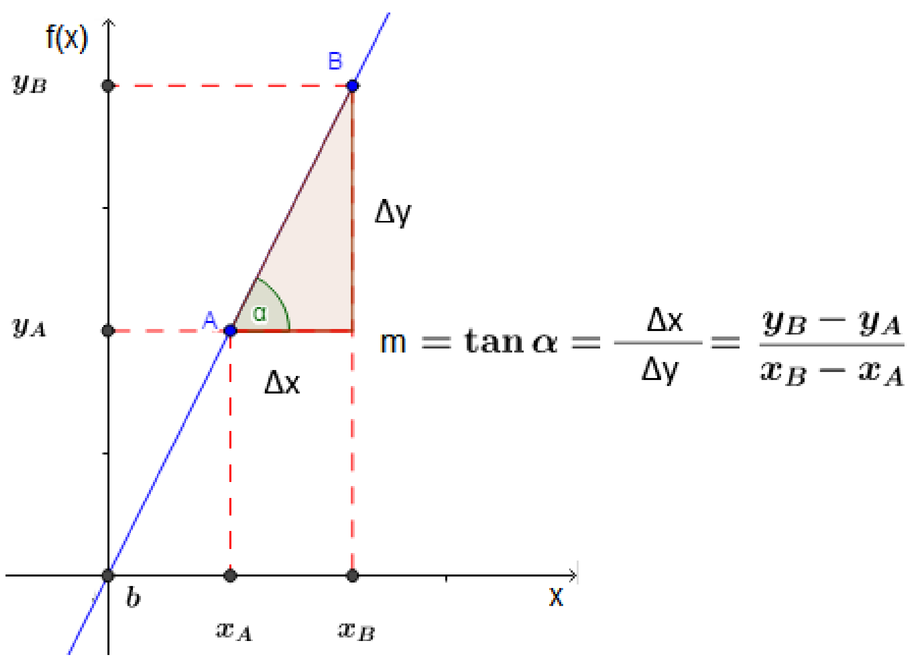


Figura 2.4: Interpretação Geométrica
(Fonte: Autora.)

Exemplo 2.2 : O deslocamento (Δx: espaço percorrido x Δy: tempo decorrido) de um automóvel da cidade A para a cidade B está representado na tabela abaixo (tabela 2.1):

Tempo(segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço(metros)	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Tabela 2.1: Deslocamento
(Fonte: Autora.)

Qual é a variação de e (espaço percorrido) quando t (tempo) varia:

1. De 1 para 2 segundos?

2. De 2 para 3 segundos?

3. De 3 para 7 segundos?

Resolução:

a) $T_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2\ m/s$

b) $T_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{6-4}{3-2} = \frac{2}{1} = 2\ m/s$

c) $T_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{14-6}{7-3} = \frac{8}{4} = 2\ m/s$

Exemplo 2.3 : Um taxista cobra R$ 5,00 como bandeirada, mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.

a) Escreva a lei de formação/relação que descreve esta situação.

b) Calcule o valor a ser pago em um trajeto de 50 Km e em um de 80 Km.

c) Obtenha a taxa de variação com base no item b.

Resolução:

a) $y = 5 + 0,50x$, onde y é o valor final a ser pago (variável dependente) e x representa os quilômetros rodados (variável independente).

b) Tomando $x_1 = 50\ Km$, então:
$y = 5 + 0,50x$
$\Rightarrow y = 5 + 0,50.50$

$\Rightarrow y = 5 + 25$

$\Rightarrow y = 30,$

logo $f(\mathrm{x}_1) = 30$.

Agora tomando $x_2 = 80\ Km$, então:

$y = 5 + 0,50x$

$\Rightarrow y = 5 + 0,50.80$

$\Rightarrow y = 5 + 40$

$\Rightarrow y = 45,$

logo $f(\mathrm{x}_2) = 45$.

c) $T_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{45-30}{80-50} = \frac{15}{30}$ =0, 5.

2.2.2 Noção Intuitiva de Limite

Objetivo: introduzir o conceito de "limites"de maneira informal.

Duração: 1h/a.

Pré-requisitos: Noções de sequências numéricas, frações.

Material Necessário : papel sulfite, lápis de cor.

Desenvolvimento: (Atividade adaptada de Neves [25]).

Abordaremos o assunto de forma mais intuitiva, de modo a facilitar a compreensão, por se tratar de alunos do ensino básico e não superior. Apresentaremos a ideia de limite no intuito de expor o comportamento de uma determinada função quando esta se aproxima de determinados valores. Um engenheiro e/ou mecânico, ao produzirem uma máquina ou equipamento, calculam seu desempenho ideal, mas na prática não se obtêm este patamar idealizado, ou seja, não obtemos 100% da produtividade e sim valores muito próximos ao idealizado. Por exemplo, no manual de fábrica consta que o desempenho em quilometragem de um carro em relação a quantidade de combustível abastecido é de 10Km/l. Todavia na prática percebe-se que o consumo pode variar: 9Km/l, 9,5Km/l, 9,8Km/l, 10,1Km/l tendo como limite a marca de 10Km/l.

Exemplo 2.4 : Pegue uma folha de sulfite, consideremos esta figura retangular como tendo área igual a 1 u^2.

i. Agora dobre ao meio a folha e pinte/preencha metade dessa folha.

ii. Pinte metade da parte que sobrou em branco.

iii. Novamente pinte metade da parte anterior que sobrou em branco

iv. Preencha ainda mais uma vez a metade da parte que restou em branco....
Veja a Fig. 2.5.

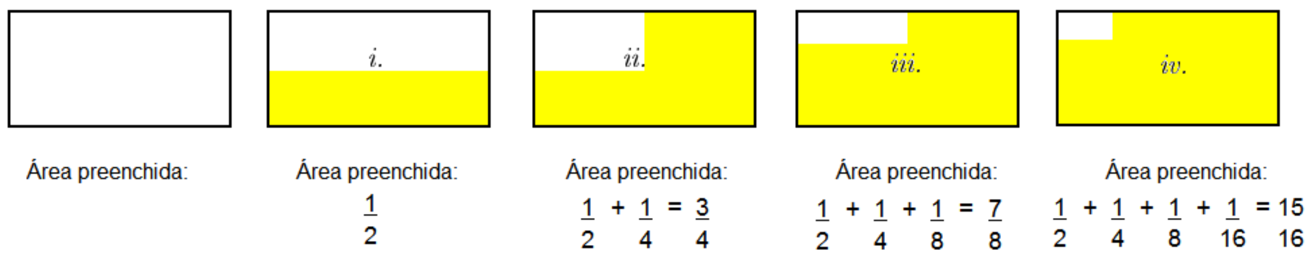


Figura 2.5: Representação dos exemplo 2.4
(Fonte: Autora.)

Continue este processo sucessivamente e indefinidamente e perceba que a área preenchida vai tomando quase todo o papel sulfite inicial, ou seja, vai se aproximando cada vez mais de $1u^2$ ou *tendendo* a $1u^2$, contudo não assume nunca o valor de $1u^2$, conforme representado na Fig. 2.6.

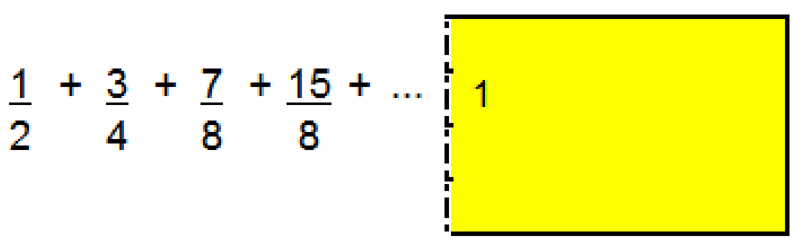


Figura 2.6: Representação da área preenchida tendendo a $1u^2$
(Fonte: Autora.)

Exemplo 2.5 : Dada a sequência $a_n = \frac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Obtenha os os cinco primeiros termos da sequência a_n.

b) Qual é o seu comportamento, quando n cresce indefinidamente, tendendo ao infinito?

Resolução:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{343}$

b) $\frac{1}{3^1}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^5}$, ..., $\frac{1}{310}$, $\frac{1}{311}$, ..., $\frac{1}{3^n}$, ...

Note que:

$\frac{1}{3}$= 0,3333...

$\frac{1}{9}$= 0,1111...

$\frac{1}{27}$= 0,0370370...

$\frac{1}{81}$= 0,012355679...

$\frac{1}{343}$= 0,0029154519

$\frac{1}{310} = \frac{1}{59.049} = 0{,}000016935$

$\frac{1}{311} = \frac{1}{177.147} = 0{,}000005645$,

onde a medida que n cresce, o valor de $\frac{1}{3^n}$ fica cada vez menor e se aproxima de um único valor, o zero.

Podemos concluir então que a medida que n cresce, o valor de a_n tende a zero e indicamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0,$$

e ainda como o limite quando n tende ao infinito, é igual a zero, temos uma sequência **convergente**. Caso a sequência crescesse indefinidamente quando n tendesse a infinito, teríamos uma sequência **divergente**.

2.2.3 Taxa de Variação Instantânea

Objetivo: Inserir e definir o conceito de taxa de variação instantânea.

Duração: 1h/a

Pré-requisitos: funções do 1º e 2º grau.

Material Necessário: calculadora.

Desenvolvimento:

O professor em sala de aula deverá instigar o aluno a calcular a velocidade do móvel variando em um intervalo muito pequeno e cada vez mais próximo daquele instante pedido, reforçando assim a ideia de "tender "ao instante realmente procurado obtendo então, intuitivamente, a velocidade no instante t.

Exemplo 2.6 : Você sabia que a marca de 368 km/h é um recorde da corrida de Fórmula 1? Esta velocidade foi atingida em 2003 pelo piloto Michael Schumacher, na Itália na pista conhecida como "retão de Monza". Já em Interlagos, a velocidade média é de 210 Km/h.

Sabendo que $210Km/h \approx 102,2m/s$, considere um móvel partindo do repouso em A para B, com uma velocidade de 100 m/s[1].

Vamos analisar o comportamento da função $f(t) = 100t$, por meio de duas tabelas atribuindo valores cada vez mais próximos menores que t=3 (tabela 2.2) e cada vez mais próximos maiores que t=3 (tabela 2.3).

Note então que temos:

t	$f(t) = 100 \cdot t$
2	f(2) = 100 · 2 = 200
2,5	f(2,5) = 100 · 2,5 = 250
2,9	f(2,9) = 100 · 2,9= 290
2,99	f(2,99) = 100 · 2,99 = 299
2,999	f(2,999) = 100 · 2,999 = 299,9
2,9999	f(2,9999) = 100 · 2,9999 = 299,99
2,99999	f(2,99999) = 100 · 2,99999 = 299,999

Tabela 2.2: Função $f(t)$ quando os valores se t se aproximam de 3 pela esquerda (Fonte: Autora.)

t	$f(t) = 100 \cdot t$
3,9	f(3,9) = 100 · 3,9 = 390
3,5	f(3,5) = 100 · 3,5 = 350
3,1	f(3,1) = 100 · 3,1= 310
3,01	f(3,01) = 100 · 3,01 = 301
3,001	f(3,001) = 100 · 3,001 = 300,1
3,0001	f(3,0001) = 100 · 3,0001 = 300,01
3,00001	f(3,00001) = 100 · 3,00001 = 300,001

Tabela 2.3: Função $f(t)$ quando os valores se t se aproximam de 3 pela direita (Fonte: Autora.)

[1] o arredondamento foi feito visando facilitar os cálculos

Observando as tabelas percebemos que tomando os valores de t muito próximos de 3 tanto pela direita ou pela esquerda na função $f(t) = 100t$, o valor da função se aproxima do número 300. Então podemos concluir que a função $f(t) = 100t$ tende a 300 m/s quando t se aproxima de 3.

Exemplo 2.7 : Consideremos um móvel que se movimenta em linha reta a partir do ponto A para o ponto B, de modo que em t segundos ele percorre $f(t) = 2t^2$. Determine a velocidade média do móvel após 5 segundos.

Resolução:
Utilizaremos duas tabelas para nos auxiliar nesta atividade, sendo a primeira quando os valores próximos de t se aproximam pela esquerda (tabela 2.4) e a segunda quando os valores próximos de t se aproximam pela direita (tabela 2.5) do instante t desejado:

$t(s)$	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$
4	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5)-f(4)}{5-4} = \frac{50-32}{5-4} = \frac{18}{1} = 18m/s$
4,5	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5)-f(4,5)}{5-4,5} = \frac{50-40,5}{5-4,5} = \frac{9,5}{0,5} = 19m/s$
4,9	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5)-f(4,9)}{5-4,9} = \frac{50-48,02}{5-4,9} = \frac{1,98}{0,1} = 19,8m/s$
4,99	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5)-f(4,99)}{5-4,99} = \frac{50-49,8002}{5-4,99} = \frac{0,1998}{0,01} = 19,98m/s$
4,999	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5)-f(4,999)}{5-4,999} = \frac{50-49,980002}{5-4,999} = \frac{0,019998}{0,001} = 19,998m/s$

Tabela 2.4: Função $f(t) = 2t^2$ quando os valores se t se aproximam de 5 pela esquerda

(Fonte: Autora.)

$t(s)$	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$
6	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(6)-f(5)}{6-5} = \frac{72-50}{6-5} = \frac{22}{1} = 22m/s$
5,5	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5,5)-f(5)}{5,5-5} = \frac{60,5-50}{5,5-5} = \frac{10,5}{0,5} = 21m/s$
5,1	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(6)-f(5,1)}{5,1-5} = \frac{52,02-50}{5,1-5} = \frac{2,02}{0,1} = 20,2m/s$
5,01	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5,01)-f(5)}{5,01-5} = \frac{50,2002-50}{5,01-5} = \frac{0,2002}{0,01} = 20,02m/s$
5,001	$\text{v}_\text{m}= \frac{f(5,001)-f(5)}{5,001-5} = \frac{50,020002-50}{5,001-5} = \frac{0,020002}{0,001} = 20,002m/s$

Tabela 2.5: Função $f(t) = 2t^2$ quando os valores se t se aproximam de 5 pela esquerda

(Fonte: Autora.)

Observando as tabelas percebemos que quando tomamos valores de t muito próximos de 5 tanto pela direita ou pela esquerda os valores da função $f(t) = 2t^2$ se aproximam do número $20m/s$, ou seja, quanto mais próximo infinitamente t estiver de 5 a velocidade do móvel "tende"a se aproximar ainda mais de $20m/s$.

Matematicamente podemos escrever esta situação como $\mathrm{v_m} = 20m/s$, quando $\mathrm{t} \to 5$.

Definição 2.2. *A Taxa de Variação Instantânea de uma função f no ponto x_1 é dada por*

$$T = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

e fazendo $\mathrm{x_2} = \mathrm{x_1} + \Delta\mathrm{x}$, temos

$$T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

2.2.4 A Derivada Como Taxa de Variação

Objetivo: inserir o conceito de derivada como taxa de variação.

Duração: 2h/a

Pré-requisitos: aulas anteriores.

Material Necessário: Software GeoGebra.

Desenvolvimento: (Atividade adaptada de Iezzi [18].)

Como visto na aula anterior, para obter a taxa de variação instantânea no instante $\mathrm{t_0}$, consideramos os intervalos $(\mathrm{t_0}, \mathrm{t_0} + \Delta\mathrm{t})$ cada vez menores a medida que $\Delta\mathrm{t}$ tende para zero, de onde temos que a taxa de variação instantânea no instante $\mathrm{t_0}$, será dada por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

que é chamada de **derivada** da função no ponto $\mathrm{t_0}$

Definição 2.3. *A Taxa de Variação Instantânea, ou* ***derivada*** *da função* ***f*** *em $x = x_0$, é dada por*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Para entendermos a intuição geométrica por trás deste conceito, devemos recordar alguns conceitos da Geometria Plana acerca da posição entre uma circunferência e uma reta:

i. a **reta secante** intercepta a circunferência em dois pontos;

ii. a **reta tangente** intercepta a circunferência em um ponto.

Voltando ao exemplo 2.7 que trata da função[2] $f(x) = 2x^2$, temos que a taxa de variação entre x_1 e $x_2 = x_1 + \Delta x$, com $\Delta x < 0$ ou com $\Delta x > 0$, é:

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2 - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 - 2x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x_1^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x} = 4x_1 + 2\Delta x, \text{ para } \Delta x \neq 0$$

Já sabemos que esta taxa é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $f(x) = 2x^2$ nos pontos $P = (x_1, f(x_1))$ e $Q = (x_2, f(x_2))$ (Fig. 2.7):

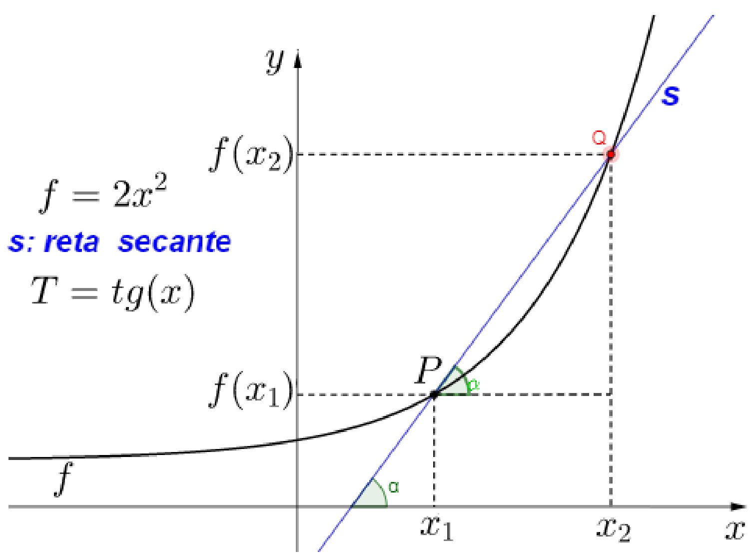


Figura 2.7: Reta secante ao gráfico de $f(x) = 2x^2$ nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ (Fonte: Autora.)

Observando as tabelas 2.4 e 2.5 percebemos que os valores de $\Delta x \to 0$ tanto pela direita ou pela esquerda de $x = 5$ implicam no fato de que a função $f(x) = 2x^2$

[2]Por padronização alteramos a variável t por x

"tende"a se aproximar do número $20m/s$, o que graficamente produz mudanças na reta secante, conforme mostrado nas Fig. 2.8 e 2.9, de tal forma que quando mais Δx se aproxima de zero, a taxa de variação da função também se aproxima de $20m/s$, de modo que esta reta secante se aproxima da reta tangente, ao ponto de se fundirem.

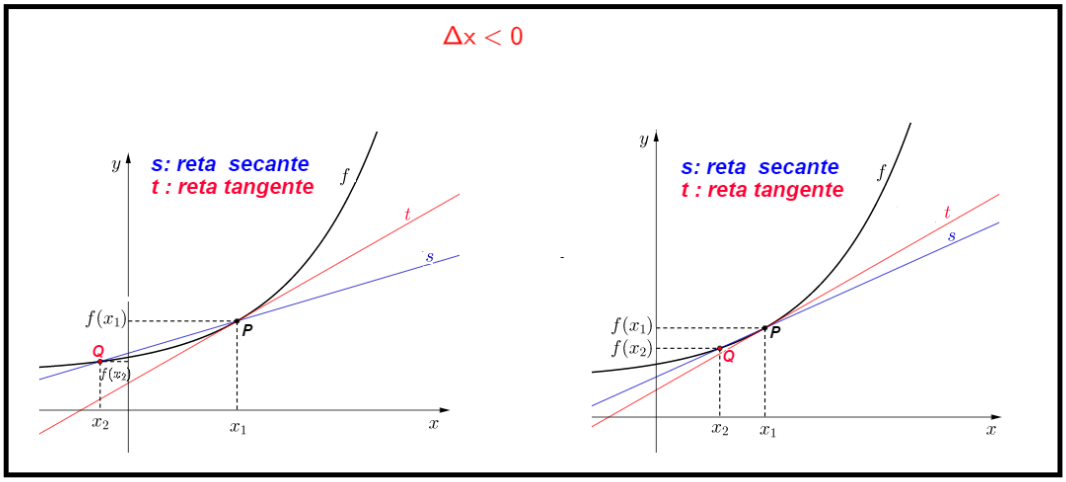


Figura 2.8: Δx → 0
(Fonte: Autora.)

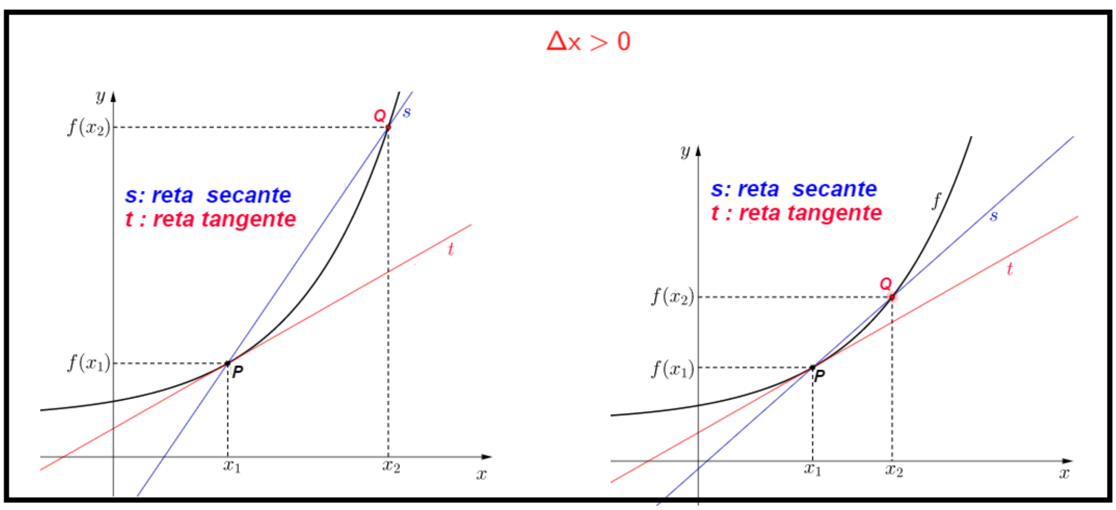


Figura 2.9: Δx → 0
(Fonte: Autora.)

Tabularmente temos (veja a tabela 2.6):

Δ x < 0	T = 4x + 2Δx
0, 1	T= 20,1
0,01	T= 20,01
0,001	T= 20,001
0,0001	T= 20,0001
0,00001	T= 20,00001

Δ x < 0	T = 4x + 2Δx
- 0,1	T= 19,9
- 0,01	T= 19,99
- 0,001	T= 19,999
- 0,0001	T= 19,9999
- 0,00001	T= 19,99999

Tabela 2.6: Função $f(x) = 2x^2$ quando os valores de Δx se aproximam de 0 (Fonte: Autora.)

o que também mostra que à medida que Δx se aproxima de zero, os valores da variação tendem a 20.

Graficamente observa-se que, conforme o ponto $P = (x_1, f(x_1))$ e o ponto $Q = (x_2, f(x_2))$ se aproximam, as respectivas retas secante (s) se aproximam ao ponto de se fundirem com a reta tangente denotada por (t). (Fig. 2.10).

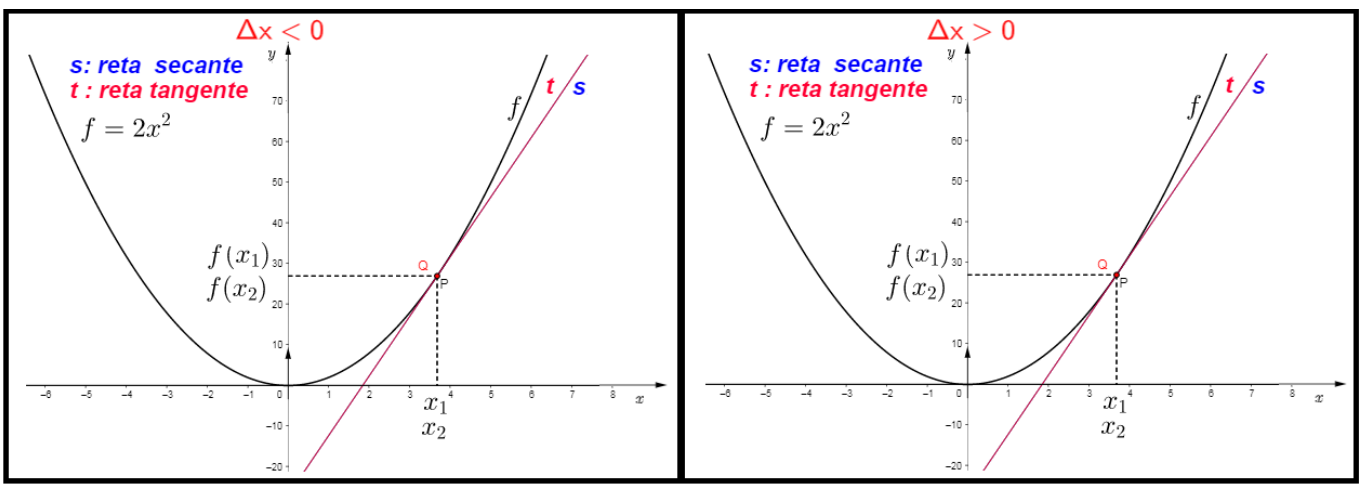


Figura 2.10: Reta tangente ao gráfico de $f(x)$=$2x^2$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ (Fonte: Autora.)

Neste exemplo no ponto (5, 50), a função assume coeficiente angular igual a 20, o que é comprovado graficamente na Fig. 2.11

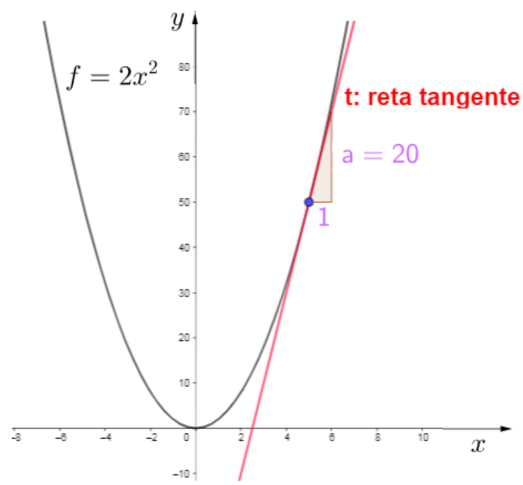


Figura 2.11: Interpretação geométrica da taxa de variação da função $f(x)$=$2x^2$ no ponto $x_1 = 5$

(Fonte: Autora.)

Portanto, geometricamente, a Taxa de Variação Instantânea, ou **derivada** da função **f** em x = x_0, pode ser entendida como segue: dada uma curva $y = f(x)$, onde P e Q são pontos pertencentes a esta curva, t é a reta tangente à curva que passa por P e s é a reta secante que passa por P e Q. Conforme P está cada vez mais próximo de Q, o coeficiente angular r da reta s tem como limite o coeficiente angular m da reta t.

2.2.5 Função Derivada

Objetivo: obter a derivada de uma função.

Duração:2h/a

Pré-requisitos: aulas anteriores.

Desenvolvimento:

Exemplo 2.8 : Mostre que a derivada da função $f(x) = ax + b$ é $f'(x) = a$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}\\
&= \frac{(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}\\
&= \frac{a\Delta x}{\Delta x}, (\Delta x\neq 0)\\
&= a.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.9 : Mostre que a derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f'(x) = 2ax + b$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x}\\
&= \frac{a(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}\\
&= \frac{ax^2+2ax\Delta x+a(\Delta x)^2)+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}\\
&= \frac{2ax\Delta x+a(\Delta x)^2)+b\Delta x}{\Delta x}\\
&= \frac{\Delta x(2ax+a\Delta x+b)}{\Delta x}, (\Delta x\neq 0)\\
&= 2ax+a\Delta x+b\\
&= 2ax+b.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.10 : Com base nos exemplos anteriores calcule a derivada das seguintes funções a seguir:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = -10x^2 + 3x + 8$

d) $f(x) = 15x^3 + 22x^2 + 1$

Resolução:

a) $f'(x) = 3$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = -20x + 3$

d) $f(x) = 45x^2 + 44x$

Nesta aula ainda apresentaremos as derivadas de algumas funções, necessárias para o andamento deste trabalho.

i) **Função Constante $f(x) = c$.**
A função derivada de $f(x) = c$ é dada por $f'(x) = 0$.

ii) **Função $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}*$.**
A função derivada de $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}*$, é dada por $f'(x) = nx^{n-1}$.

2.2.6 Exercícios de Aplicação

Objetivo: Máximos e mínimos: aplicação das derivadas.

Duração: 6h/a.

Pré-requisitos: Função do 2º grau e noções de derivadas presentes nas aulas anteriores deste trabalho.

Material Necessário : material impresso das atividades, data show, papel cartão, tesoura, cola, fita adesiva, régua, areia, lápis preto, borracha, quadro negro e giz.

Desenvolvimento: (Algumas das atividades a seguir foram adaptadas dos seguintes autores: Correa [13], OBMEP [2], U. F. V. [5], ENEM [21].)

Exemplo 2.11 : Atividade 1. Iniciaremos esta aula conversando com os alunos sobre quais são os fatores que influenciam no preço pelo qual um determinado produto é vendido, ou seja, por qual valor ele é repassado ao consumidor para dar lucro ao fabricante. Espera-se como possíveis respostas: preço da matéria prima, água, luz, maquinário, mão-de-obra, transporte, logística, embalagem, entre outros.

Daremos ênfase ao fator embalagem, discutindo sobre como o problema do desperdício e/ou economia de matéria prima na confecção destas é um determinante no custo do produto a ser vendido.

Em sequência cada aluno receberá um papel cartão (todos com as mesmas medidas), com o objetivo de confeccionar uma caixa sem tampa visando obter o maior volume possível. Cada um deverá fazer seus cálculos e construir sua estratégia de resolução, definindo assim a medida do lado dos quadrados a serem recortados nos quatro cantos do papel cartão, de modo que ao dobrá-lo nos vincos formados possam obter uma caixa retangular, conforme a Fig. 2.12 :

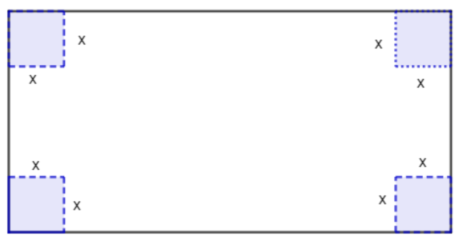


Figura 2.12: Ilustração da Atividade 1
(Fonte: Autor)

Resolução:

O papel cartão oferecido aos alunos tem como medidas 48cm de comprimento por 33 cm de largura. Ao retirar-se um quadrado de lado x de cada canto deste papel, a caixa terá as seguintes novas medidas:

comprimento: $48 - 2x$ largura: $33 - 2x$ altura: x.

Logo, o volume da caixa será expresso por:

$$\begin{aligned} V(x) &= (48 - 2x)(33 - 2x)x \\ &= (1584 - 96x - 66x + 4x^2)x \\ &= (4x^2 - 162x + 1584)x \\ &= 4x^3 - 162x^2 + 1584x. \end{aligned}$$

Se $V(x) = 4x^3 - 162x^2 + 1584x$, então:

$$V'(x) = 12x^2 - 324x + 1584,$$

fazendo $V'(x) = 0$ temos:

$$0 = 12x^2 - 324x + 1584,$$

que resolvendo encontramos:

$$x = \frac{324 \pm \sqrt{4.12.1584}}{2.12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & \cong 6,41 \\ x_2 & \cong 20,59. \end{cases}$$

Note que a medida do lado x do quadrado a ser removido não poder ser maior do que a metade do lado menor do papel, logo $0 \leq$ x $\leq 16,5$ cm, consequentemente a resposta $x_2 \cong 20,59$ deve ser descartada, sendo $x_1 \cong 6,41$ a medida procurada.

A segunda derivada em $V'(x)$ nos traz

$$V"(x) = 24x - 324,$$

então substituindo $x_1 \cong 6,41$ e $x_2 \cong 20,59$, temos:

$$V"(6,41) = 24.6,41 - 324 = -170,16$$
$$V"(20,59) = 24.20,59 - 324 = 170,16,$$

e conforme o teorema 1.47: "se $f"(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c", concluindo que $x = 6,41$ faz $V(x)$ assumir valor máximo no intervalo $0 \leq$ x $\leq 16,5$.

Exemplo 2.12 : Atividade 2.

Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

Resolução:

Seja:

- x : o número de passeiros desse avião,
- $100 - x$: o número de poltronas vagas.

Consequentemente a expressão que fornece o lucro máximo em função de x é dada por:

$$L(x) = [(800 + 10.(100 - x)]x$$
$$L(x) = -10x^2 + 1800x$$

Se $L(x) = -10x^2 + 1800x$, então:

$$L'(x) = -20x + 1800,$$

fazendo $L'(x) = 0$ temos:

$$0 = -20x + 1800,$$

que resolvendo encontramos:

$$x = 90$$

A segunda derivada em $L'(x)$ nos traz

$$L''(x) = -20,$$

e conforme o teorema 1.47: "se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c", concluindo que $x = 90$ faz $L(x)$ assumir valor máximo, ou seja, a excursão deve ter 90 passageiros na excursão, gerando uma rentabilidade de R$ 81.000,00. Logo a rentabilidade máxima ocorrerá com 90 passageiros na excursão.

Exemplo 2.13 : Atividade 3.

Laranjeiras da Califórnia produzem 600 laranjas por ano, se forem plantadas no máximo 20 árvores por acre ($4km^2$). Cada árvore plantada a mais causa decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas por acre para se obter o maior número de laranjas?

Resolução:

Seja:

- x : o número de pés de laranjeiras plantadas a mais,
- $20 + x$: o número total de pés de laranjeiras;

- $15x$: o número de laranjas produzidas a mais por cada pé plantado a mais;

Consequentemente a expressão que fornece a produção máxima total de laranjas em função de x é dada por:

$$P(x) = (20 + x)(600 - (15x))$$
$$P(x) = -15x^2 + 300x + 1200.$$

Se $P(x) = -15x^2 + 300x + 1200$, então:

$$P'(x) = -30x + 300,$$

fazendo $P'(x) = 0$ temos:

$$0 = -30x + 300,$$

que resolvendo encontramos:

$$x = 10.$$

A segunda derivada em $P'(x)$ nos traz

$$P"(x) = -30,$$

e conforme o teorema 1.47: "se $f"(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c", concluindo que $x = 10$ faz $P(x)$ assumir valor máximo, ou seja, devem plantar 30 pés de laranjas por acre gerando a produção de 13.500 laranjas.

Exemplo 2.14 : **Atividade** 4.

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2+22h-85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Figura 2.13: Intervalos de temperatura, em grau Celsius e classificações (Fonte:[21].)

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

a) muito baixa.

b) baixa.

c) média.

d) alta.

e) muito alta.

Resolução:

A função que retrata a temperatura no interior da estufa é fornecida pelo enunciado: $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, então:

$$T'(x) = -2h + 22,$$

fazendo $T'(h) = 0$ temos:

$$0 = -2h + 22,$$

que resolvendo encontramos:

$$h = 11.$$

A segunda derivada em $T'(h)$ nos traz

$$T\text{''}(h) = -2,$$

e conforme o teorema 1.47:"se $f\text{''}(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c", concluindo que $x = 11$ faz $P(h)$ assumir valor máximo.

Sabendo disto, vamos substituir h= 11 na função para obter T:

$$T(h) = -h^2 + 22h - 85$$
$$T(11) = -(11)^2 + 22.11 - 85$$
$$T(11) = 36°C$$

Como o valor encontrado foi de $36°C$, e conforme a tabela 2.13 está no intervalo de 30 $\leq$ x $\leq$ 43 e possui a temperatura classificada como alta, consequentemente a alternativa correta será a alternativa d.

Exemplo 2.15 : Pesquisa de Avaliação

Ao término da aplicação de nossa proposta didática entregaremos um questionário avaliativo aos discentes com o intuito de verificar se os objetivos previstos foram ou não atingidos. Segue abaixo o questionário apresentado.

Questionário

I) Levantamento de dados a respeito dos participantes.

1) Qual a sua idade?

2) Qual o seu sexo?

3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?

( ) Não. Foi a primeira vez. ( ) Sim. Onde?

II) Análise a respeito do trabalho desenvolvido pelo pesquisador.

4) Dê uma nota de 0 a 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir em cada item:

a) As explicações formam claras?

b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?

c) A ideia de taxa de variação ficou clara?

d) O conceito de limite foi compreendido?

e) A ideia de derivadas ficou clara?

f) A representação geométrica da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?

g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?

h) O número de aulas foi suficiente?

i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?

5) Cite os pontos positivos.

6) Cite os pontos negativos.

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.

CAPÍTULO 3

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A proposta didática apresentada neste trabalho foi implementada tendo como alvo os alunos da rede pública estadual do Paraná, mais especificamente nas cidades de Apucarana no Colégio Estadual Padre José de Anchieta - Ensino Fundamental, Médio e Profissionalizante, e na cidade de Arapongas no Colégio Estadual Unidade Polo- Ensino Fundamental e Médio, pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Apucarana, com nove estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

A escolha por estas duas instituições de ensino foram motivadas pela minha proximidade com ambas, o Colégio Estadual Padre José de Anchieta é uma instituição situada na cidade que resido, na qual eu já lecionei em anos anteriores em turmas do Ensino Médio e no projeto "Mais Educação" que tem por foco desenvolver no contraturno um reforço e ao mesmo tempo trabalhar com metodologias diferenciadas os conteúdos matemáticos. No ano de 2019 este colégio constava com duas salas do 3º ano do Ensino Médio no período matutino. Já a escolha pelo Colégio Estadual Unidade Polo deu-se pelo fato de que atualmente leciono neste colégio, e no ano de 2019 este colégio constava com três salas do 3º ano do Ensino Médio no período matutino. Vale salientar que em ambas as instituições de ensino a direção e equipe pedagógica são abertas e receptivas a receber e promover continuadamente projetos e ações complementares visando a melhoria no ensino ofertado aos alunos.

Vale ressaltar que não houve nenhum tipo de pré seleção dos estudantes baseada em nota ou algum outro tipo de característica qualitativa ou quantitativa, eu passei pessoalmente em todas as salas de aula dos 3º ano e apresentei-me aos alunos, explicando sobre o PROFMAT e a sua importância para a minha vida acadêmica e profissional. Falei sobre o objetivo desta proposta e resumidamente abordei como seriam as aulas, convidando os alunos a participarem das mesmas. Os alunos que se voluntariaram a participar das atividades foram motivados pela busca do conhecimento, sem receber nada em contrapartida.

Devido a época em que se encontrava o calendário letivo, alguns fatores interferiram na quantidade de alunos com carga horária disponível para participar deste trabalho. Em ambos os estabelecimentos foram encontradas estas dificuldades: etapa de preparação e revisão para provas Paraná, que é uma avaliação lançada pelo governo estadual no ano de 2019. Posteriormente os alunos entrariam nas avaliações finais referentes a parte diversificada (trabalhos) e em seguida no período das avaliações trimestrais, dificultando assim a disponibilização de aulas em período regular. Além disto, os alunos do Ensino Médio, estavam tendo aulas extras em contra turno visando os vestibulares.

A escolha por alunos do 3º ano do Ensino Médio nesta pesquisa deu-se por dois fatores principais: os mesmo já haviam tido acesso aos conteúdos básicos necessários: funções, sequencias, variação de grandezas e, por estarem perto dos processos seletivos para ingresso no ensino superior, este material possibilita o acesso a mais um conteúdo que agregará maior conhecimento possibilitando um melhor êxito neste processo seletivo.

Estes nove alunos foram nomeados de A1 a A9, sendo cinco do sexo feminino e quatro do sexo masculino, todos com 17 anos de idade, conforme a tabela (3.1) a seguir:

Aluno	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Sexo	F	M	M	F	F	F	F	M	M

Tabela 3.1: Tabela: Características dos alunos participantes
(Fonte: Autora.)

O espaço físico utilizado foi o laboratório de informática, pois este possui as características estruturais básicas e comuns a toda sala de aula: carteira, cadeira e quadro, acrescidos de computadores com o programa Geogebra previamente instalado para uso individual, data-show e acesso a internet. Os equipamentos de informática foram necessários e importantes para os alunos no decorrer das aulas 2.2.1 e 2.2.4, por exemplo.

As aulas foram padronizadas todas com duração de 50 minutos, sendo entregue todos os planos de aulas devidamente impressos para os educandos.

A primeira etapa do trabalho consistiu nas aulas expositivas dos Planos de Aulas 2.2.1 a 2.2.5 elaborados na seção 2.2 onde os educandos, por meio de conhecimentos já adquiridos ao longo do ciclo escolar, tiveram um contato inicial com os conteúdos preliminares básicos e essenciais para trabalharem com as derivadas. O conteúdo foi exposto sempre por meio de exemplos feitos pelo professor e depois com mais exercícios na forma de exemplos, com um tempo de espera para que os mesmos efetuassem a resolução sozinhos finalizando com a correção no quadro.

Com relação ao conteúdo de derivadas, que deu origem a este trabalho, o mesmo teve sua ideia introduzida ao calcular o valor da função $f(x)$ para $x = 1$, $x = 2$, etc, percebendo assim que a taxa de variação é constante por meio de simples tabelas. Abordou-se depois as funções polinomiais de graus 1 e de grau 2, e por último tais ideias forma generalizadas para funções polinomiais de grau n.

A segunda etapa consistiu na aplicação de quatro atividades que constam no Plano de Aula 2.2.6, sendo dividida em dois momentos. A primeira parte englobou as atividades 2.11 e 2.12 da seção 2.2.6 que serviram como situações exemplos e a segunda parte envolveu as atividades 2.13 e 2.14 da seção 2.2.6 utilizadas como parâmetros avaliativos desta proposta.

Salientamos a importância do ato de se fazer uma leitura preliminar com os alunos para um contato inicial antes destes tentarem resolver os problemas, exercícios e exemplos. Esta leitura é justificada pelo autor Stewart, que apresenta alguns passos para a resolução de problemas de otimização:

> 1. Compreendendo o problema - A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte a si mesmo: o que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
> 2. Faça um diagrama - Na maioria dos problemas é útil fazer um diagrama e marcaras quantidades dadas e pedidas no diagrama.
> 3. Introduzindo uma notação - Atribua um simbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada. Selecione também símbolos $(a, b, c, ..., x, y)$ para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajuda-lo - por exem-

plo, A para área, h para altura e t para tempo.(Stewart [31], p.301).

Neste período de resolução foram necessárias algumas intervenções, devido a dificuldade dos alunos em realizar os passos propostos acima, principalmente nas duas primeiras atividades que serviram como situações exemplos. Todas elas foram corrigidas em sala de aula.

Neste trabalho, a metodologia adotada tem por objetivo responder se a proposta apresentada proporciona de fato condições para o ensino do conceito de resolução de problemas na área da otimização por meio de derivadas. Sendo assim, nosso foco será uma análise qualitativa e quantitativa das atividades apresentadas nas seção 2.2.

3.1 Descrições das Aulas

A seguir descreveremos o encaminhamento dado para cada uma aulas dentro das duas etapas definidas.

Primeira Etapa

Nas duas primeiras aulas (2.2.1) o objetivo era introduzir e definir o conceito de taxa de variação. Para isso iniciamos conversando com os alunos sobre situações cotidianas nas quais as variações de grandezas estão presentes e pedimos para os mesmos relacionarem a variável de dependência e a independente em cada situação apresentada, interligando este conceito ao estudo de funções.

Abordamos a ideia de variação de uma função num problema proposto (exemplo 2.1) envolvendo o cálculo numérico e a representação geométrica do mesmo com o auxilio do software Geogebra, o que permitiu apresentar a interpretação geométrica da taxa de variação. Deixamos um tempo para os alunos resolverem os exemplos 2.2 e 2.3, corrigimos e comentamos a atividade, finalizamos a atividade com a relação entre a taxa de variação e o coeficiente angular da reta, corrigindo e comentando a atividade.

Na terceira aula (2.2.2) abordamos o conceito de limites informalmente, por meio de uma atividade com folha de sulfite e lápis de cor proporcionando aos alunos a ideia e o significado de "tender"a um limite. Aplicamos um segundo exemplo 2.5 sobre sequencias para resolução por parte dos alunos, concluímos e corrigimos.

Iniciamos a quarta aula com o exemplo 2.6 analisando o comportamento da função por meio de duas tabelas com valores à direita e à esquerda, que tendem a um número cada vez mais próximo do instante dado. Deixamos para os alunos o exemplo 2.7 com os mesmos parâmetros, e após estes tentarem resolvê-lo, corrigimos no quadro e definimos a taxa de variação instantânea que era o objetivo desta aula (2.2.3). Para facilitar os cálculos, a sala de aula foi divida em dois grupos, onde um grupo ficou responsável por realizar os cálculos por intermédio dos valores a esquerda, e o outro a direita.

Na quinta e sexta aula (2.2.4) tínhamos por objetivo apresentar o conceito de derivada como taxa de variação, para isso iniciamos relacionando o conceito visto na aula anterior sobre variação instantânea em intervalos cada vez mais próximos de zero e definimos a derivada. Recordamos os conceitos de reta secante e tangente para realizarmos geometricamente uma interpretação da derivada como taxa de variação por meio do software Geogebra. Conceituamos e interpretamos geometricamente a derivada como taxa de variação.

Na sétima e oitava aula (2.2.5) mostramos por meio de exemplos como obter a derivada de uma função afim e quadrática em sua forma generalizada. Deixamos para os alunos resolverem o exemplo 3.10 com quatro itens e corrigimos a atividade com os alunos. Em sequência abordamos as derivadas de algumas funções necessárias ao andamento do trabalho: derivada de uma constante e derivada de uma potência, finalizando assim estas duas aulas.

Deixamos previamente instalados nos computadores o software Geogebra, sendo disponibilizado para os alunos o login e senha necessários para o acesso ao perfil no Geogebra onde se encontravam estas atividades (veja o apêndice).

Segunda Etapa

A segunda etapa tinha por objetivo a aplicação das derivadas em problemas de otimização, correspondeu ao período da nona á decima quarta aula (2.2.6). Nesta fase, durante as atividades os participantes puderam conversar e trocar ideias e informações entre si, o que enriquece e agrega conhecimento.

Iniciamos a nona aula revisando o conceito de máximo e mínimo de uma função e em seguida conversamos com os alunos sobre quais seriam os fatores que poderiam interferir no preço final de um produto. Ouvimos as respostas dos alunos e demos ênfase ao fator da embalagem do produto, discutindo sobre o problema do desperdicio e/ou economia de matéria prima e seu impacto no preço final.

A partir desta conversa introduzimos a atividade 2.11, na qual os alunos foram instigados a construir individualmente uma embalagem a partir de um papel cartão, visando obter o maior volume possível. Todos os alunos receberam o mesmo tipo de papel e com a mesma área. Após a confecção das caixas o volume foi calculado por meio da fórmula tradicionalmente conhecida e/ou também pela quantidade de areia que cada caixa conseguia armazenar. Após esta etapa, os alunos foram indagados sobre existir uma outra opção de medição que poderia levar a uma caixa com um volume maior do que aqueles construídos pelo grupo, e se a metodologia da tentativa e erro seria a melhor opção, já que poderíamos ter inúmeros intervalos dentro das medidas daquele papel cartão que representava nossa matéria prima disponível. Por meio desta indagação procuramos estabelecer um modelo matemático que descreveria a situação, aplicamos o conceito de derivação e analisamos se os resultados obtidos satisfaziam o problema inicial, concluindo esta atividade no término da décima aula.

Na décima primeira aula apresentamos a atividade 2.12, onde propomos uma leitura inicial para entendimento do problema a ser resolvido. Os alunos puderam novamente conversar entre si, trocar ideias e informações. Inicialmente deixamos em aberto a estratégia utilizada na busca pelo lucro máximo, e após um período de tempo cada aluno apresentou aos demais a sua solução. Em seguida eles foram indagados se haviam encontrado realmente a melhor opção, e se haveria outra solução, levando-os a assim mais uma vez a construção de um modelo matemático que descrevesse a situação, permitindo assim colocar em prática o que foi aprendido sobre derivação.

Na décima segunda aula, décima terceira e décima quarta tínhamos por objetivo verificar se os alunos realmente conseguiriam resolver os problemas de otimização por meio da aplicação da derivação, e para tal apresentamos as atividades 2.13 e 2.14 presentes na seção 2.2.6. Após este período concluímos e corrigimos as atividades.

Um relatório mais detalhado sobre o desenvolvimento das atividades da segunda etapa desta pesquisa encontra-se disponível no apêndice deste trabalho.

3.2 Análise das Atividades Propostas

Como já mencionado, os alunos foram nomeado de A1 a A9, e os dados coletados foram organizados em uma quadro (Fig. 3.1) para melhor compreensão dos resultados, os quais estão classificados conforme a resolução apresentada dentro dos parâmetros matemáticos esperados para cada atividade, conforme a legenda:

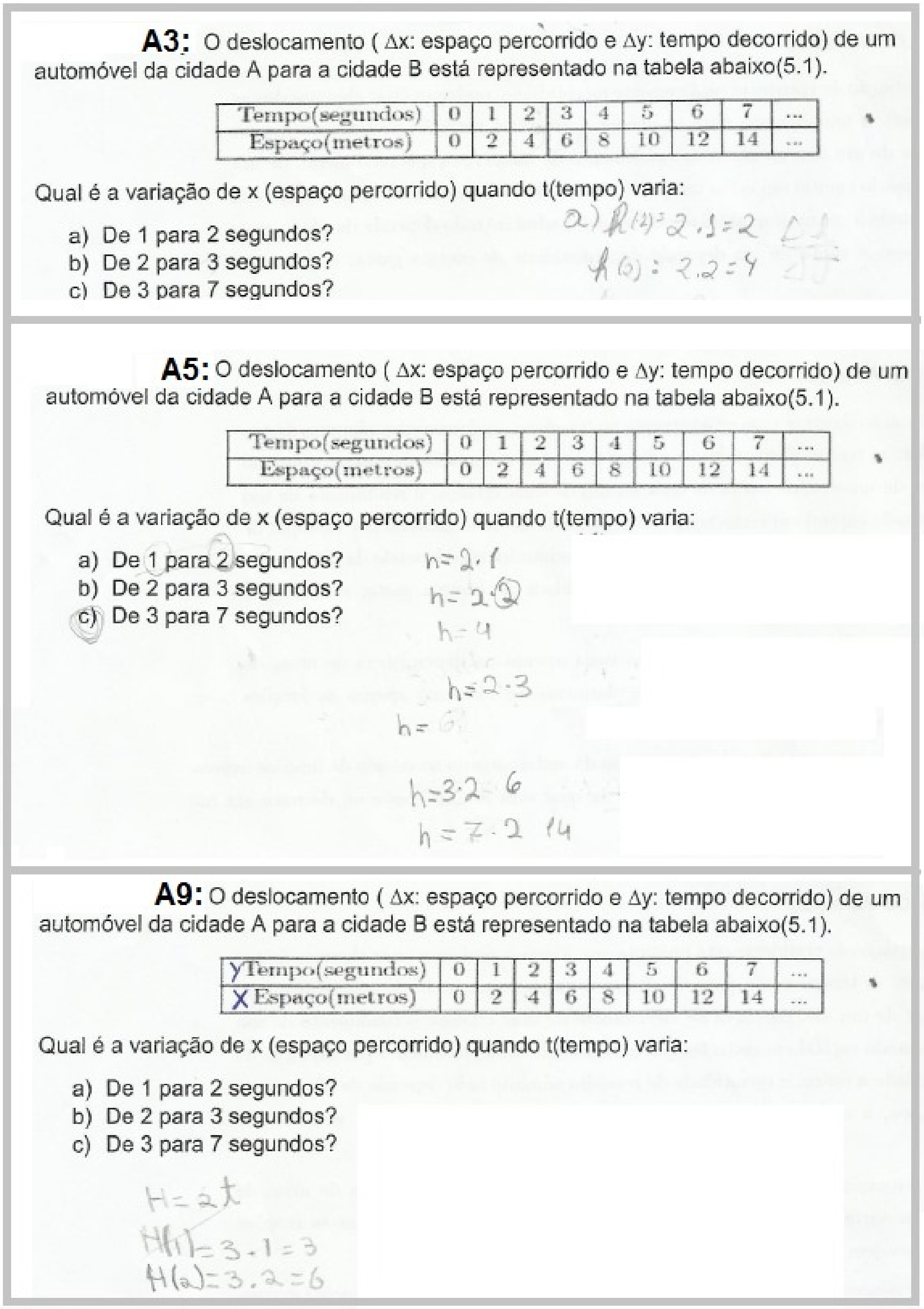
- satisfatória (S), quando a resposta estava de acordo com os parâmetros matemáticos esperados;
- parcialmente satisfatória (PS), quando a resposta dada satisfazia parcialmente o esperado dentro dos parâmetros matemáticos;
- são satisfatório (NS), quando a resposta não estava de acordo com os parâmetros matemáticos esperados.

	ATIVIDADES						
	1ª ETAPA					2ª ETAPA	
ALUNOS	2.2	2.3	2.5	2.7	2.10	213	2.14
A1	S	PS	S	S	S	PS	S
A2	S	PS	S	S	S	PS	S
A3	NS	S	PS	S	NS	PS	S
A4	S	S	S	S	S	S	PS
A5	NS	S	PS	S	S	S	PS
A6	S	S	S	S	S	S	S
A7	S	S	S	S	S	PS	PS
A8	S	S	PS	PS	NS	S	S
A9	NS	S	PS	S	PS	PS	PS

S = satisfeito PS = parcialmente satisfeito NS = não satisfeito

Figura 3.1: Quadro resumo do desempenho dos alunos nas questões avaliativas (Fonte: Autora.)

Nas figuras a seguir, selecionamos as resoluções das questões anteriormente mencionadas que foram apresentadas por alguns dos participantes, e omitimos aquelas cujo raciocínio foi desenvolvido corretamente.



A3: O deslocamento (Δx: espaço percorrido e Δy: tempo decorrido) de um automóvel da cidade A para a cidade B está representado na tabela abaixo(5.1).

Tempo(segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço(metros)	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Qual é a variação de x (espaço percorrido) quando t(tempo) varia:

a) De 1 para 2 segundos?
b) De 2 para 3 segundos?
c) De 3 para 7 segundos?

a) $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$ $\frac{\Delta f}{\Delta t}$

$f(2) : 2 \cdot 2 = 4$

A5: O deslocamento (Δx: espaço percorrido e Δy: tempo decorrido) de um automóvel da cidade A para a cidade B está representado na tabela abaixo(5.1).

Tempo(segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço(metros)	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Qual é a variação de x (espaço percorrido) quando t(tempo) varia:

a) De 1 para 2 segundos?
b) De 2 para 3 segundos?
c) De 3 para 7 segundos?

$h = 2 \cdot 1$

$h = 2 \cdot 2$

$h = 4$

$h = 2 \cdot 3$

$h = 6$

$h = 3 \cdot 2$ 6

$h = 7 \cdot 2$ 14

A9: O deslocamento (Δx: espaço percorrido e Δy: tempo decorrido) de um automóvel da cidade A para a cidade B está representado na tabela abaixo(5.1).

y Tempo(segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
x Espaço(metros)	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Qual é a variação de x (espaço percorrido) quando t(tempo) varia:

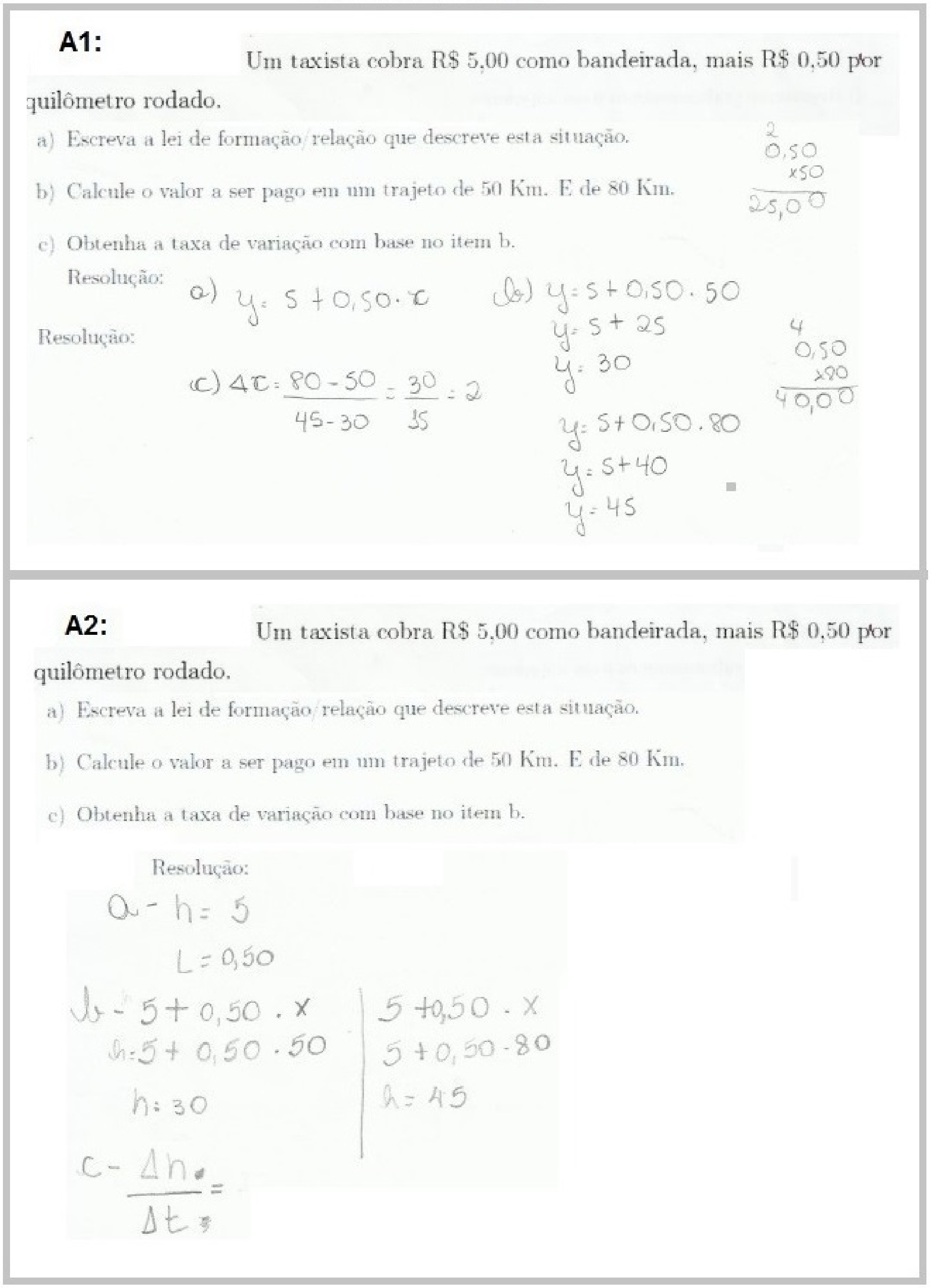
a) De 1 para 2 segundos?
b) De 2 para 3 segundos?
c) De 3 para 7 segundos?

$H = 2t$

$H(1) = 3 \cdot 1 = 3$

$H(2) = 3 \cdot 2 = 6$

Figura 3.2: Respostas de alguns alunos na atividade 2.2



A1: Um taxista cobra R$ 5,00 como bandeirada, mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.

a) Escreva a lei de formação/relação que descreve esta situação.

b) Calcule o valor a ser pago em um trajeto de 50 Km. E de 80 Km.

c) Obtenha a taxa de variação com base no item b.

Resolução:

a) $y = 5 + 0{,}50 \cdot x$

b) $y = 5 + 0{,}50 \cdot 50$
$y = 5 + 25$
$y = 30$

$y = 5 + 0{,}50 \cdot 80$
$y = 5 + 40$
$y = 45$

c) $\Delta x = \frac{80-50}{45-30} = \frac{30}{15} = 2$

$0{,}50 \times 50 = 25{,}00$

$0{,}50 \times 80 = 40{,}00$

A2: Um taxista cobra R$ 5,00 como bandeirada, mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.

a) Escreva a lei de formação/relação que descreve esta situação.

b) Calcule o valor a ser pago em um trajeto de 50 Km. E de 80 Km.

c) Obtenha a taxa de variação com base no item b.

Resolução:

a - $h = 5$
$L = 0{,}50$

b - $5 + 0{,}50 \cdot x$
$h = 5 + 0{,}50 \cdot 50$
$h = 30$

$5 + 0{,}50 \cdot x$
$5 + 0{,}50 \cdot 80$
$h = 45$

c - $\frac{\Delta h}{\Delta t} =$

Figura 3.3: Respostas de alguns alunos na atividade 2.3

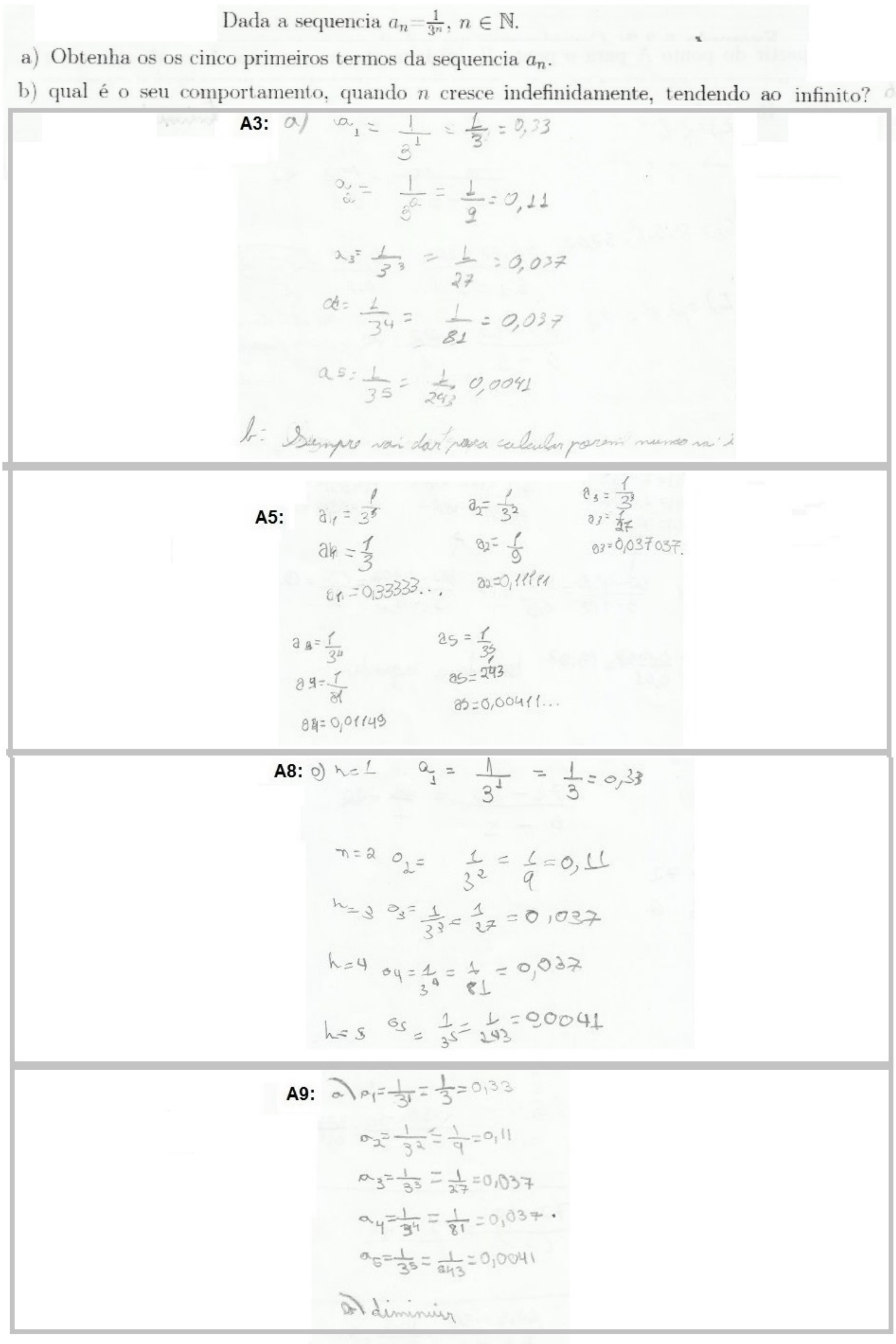
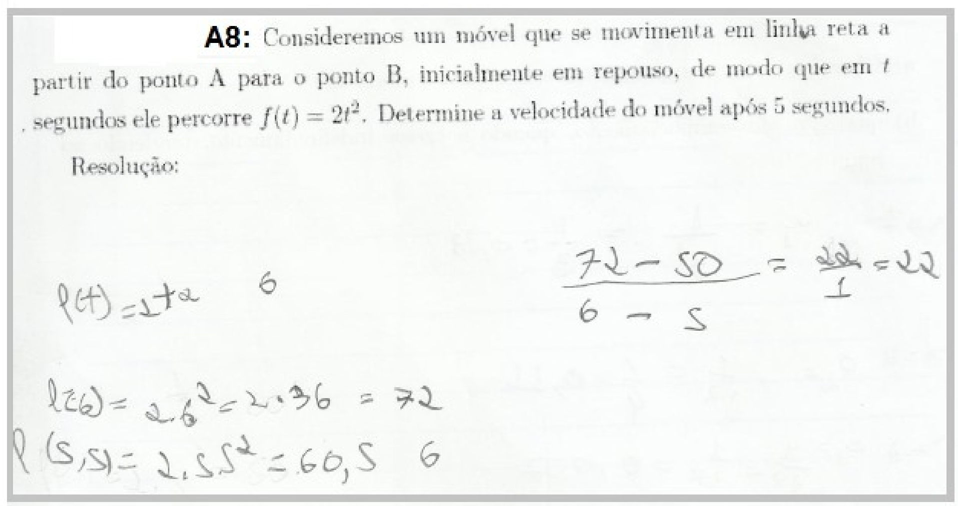


Figura 3.4: Respostas de alguns alunos na atividade 2.5

.



A8: Consideremos um móvel que se movimenta em linha reta a partir do ponto A para o ponto B, inicialmente em repouso, de modo que em t segundos ele percorre $f(t) = 2t^2$. Determine a velocidade do móvel após 5 segundos.

Resolução:

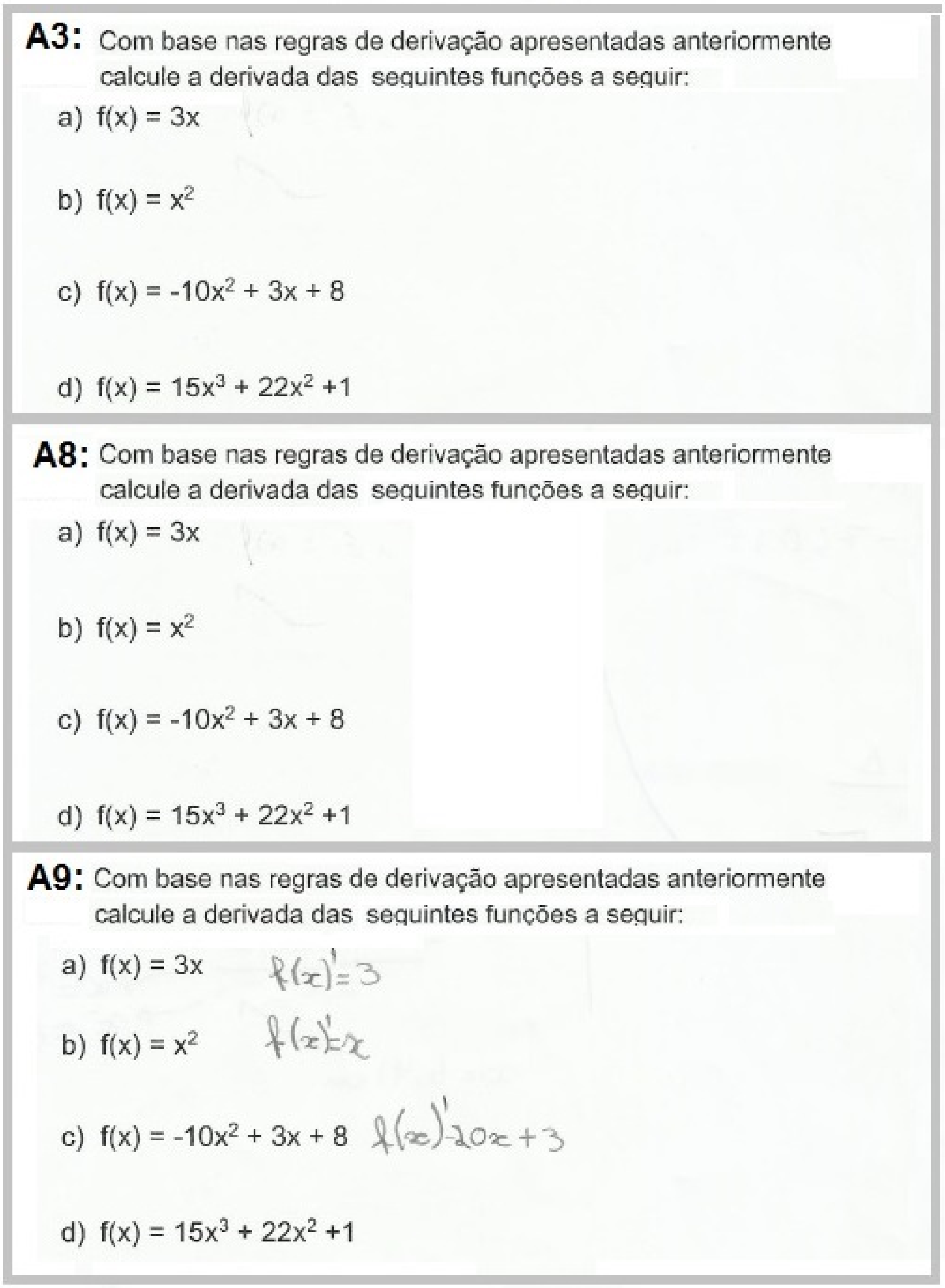
$f(t) = 2t^2$ 6

$\dfrac{72 - 50}{6 - 5} = \dfrac{22}{1} = 22$

$f(6) = 2 \cdot 6^2 = 2 \cdot 36 = 72$

$f(5,5) = 2 \cdot 5,5^2 = 60,5$ 6

Figura 3.5: Resposta de um aluno na atividade 2.7



A3: Com base nas regras de derivação apresentadas anteriormente calcule a derivada das seguintes funções a seguir:

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = -10x^2 + 3x + 8$

d) $f(x) = 15x^3 + 22x^2 + 1$

A8: Com base nas regras de derivação apresentadas anteriormente calcule a derivada das seguintes funções a seguir:

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = -10x^2 + 3x + 8$

d) $f(x) = 15x^3 + 22x^2 + 1$

A9: Com base nas regras de derivação apresentadas anteriormente calcule a derivada das seguintes funções a seguir:

a) $f(x) = 3x$ $\quad f(x)' = 3$

b) $f(x) = x^2$ $\quad f(x)' = x$

c) $f(x) = -10x^2 + 3x + 8$ $\quad f(x)' 20x + 3$

d) $f(x) = 15x^3 + 22x^2 + 1$

Figura 3.6: Respostas de alguns alunos na atividade 2.10

Laranjeiras de um determinado tipo produzem 600 laranjas por ano, se forem plantadas no máximo 20 árvores por acre(4Km^2) cada árvore plantada a mais causa um decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas por acre para se obter o maior número de laranjas?

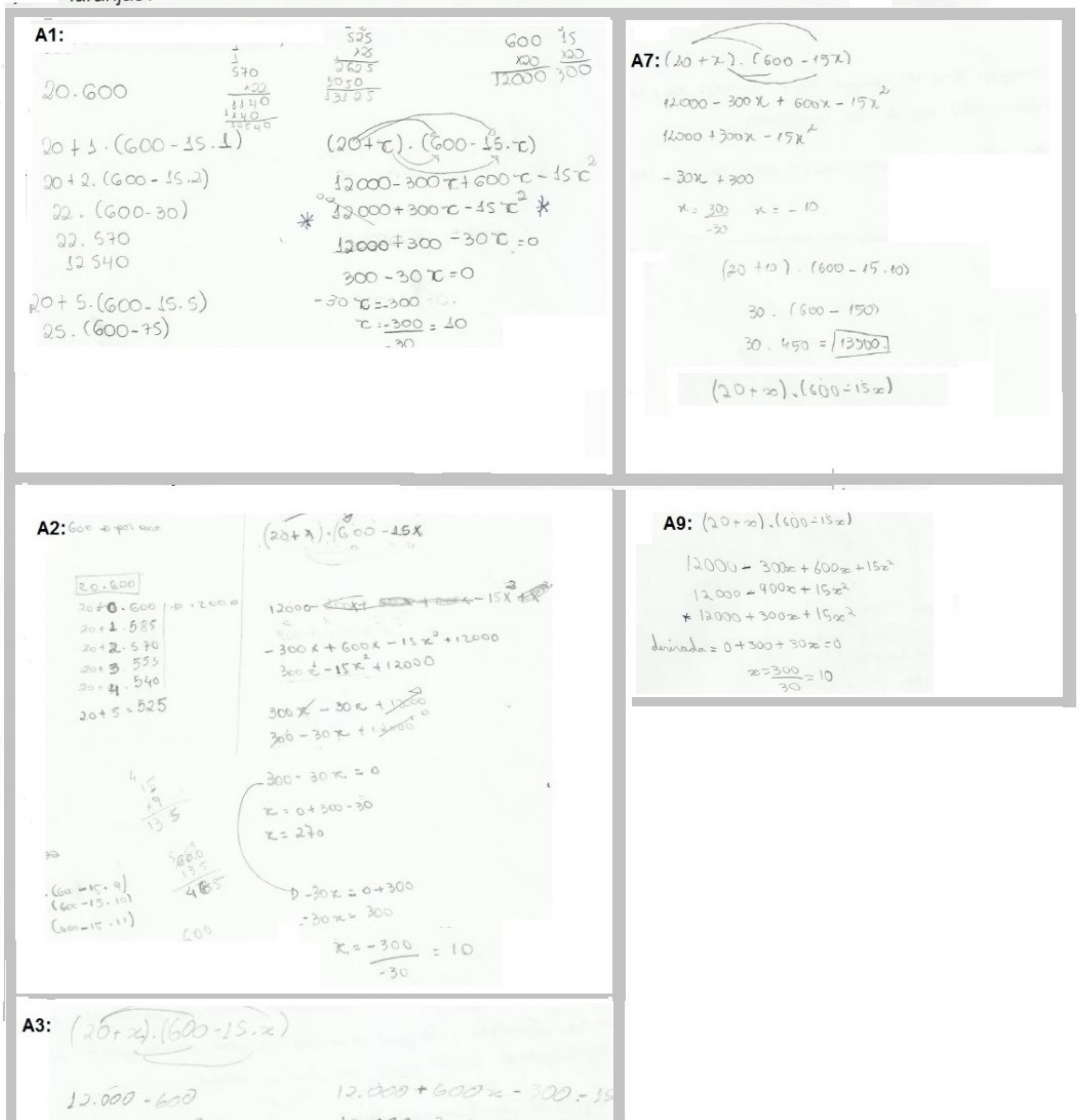


Figura 3.7: Respostas de alguns alunos na atividade 2.13

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão T(h) = – h² + 22h – 85, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta

Intervalo de Temperatura	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Intervalos de temperatura, em grau Celsius e classificações.

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

1) muito baixa.
2) baixa.
3) média.
4) alta.
5) muito alta.

A4:
$T(h) = -h^2 + 22h - 85$
$T(h)' = -2h + 22 = 0$
$h = \frac{22}{2}$
$h = 11$
$*(-11^2) + 22 \cdot 11 - 85$
$-121 + 242 - 85$
$363 - 85$
278

A5:
$T' = -h^2 + 22h - 85$
$T' = -2h + 22 = 0$
$h = \frac{22}{2} = 11$
$*(-11^2) + 22 \cdot 11 - 85$
$-121 + 242 - 85$
$363 - 85$
$T = 278.$

A7:
$T(h) = -h^2 + 22h - 85$
$T'(h) = -2h + 22$
$-2h = -22$
$h = \frac{-22}{-2}$ $h = 11$
$T'(11) = (-11^2 + (22 \cdot 11) - 85$
$* \; T'(11) = 121 + 242 - 85$
$= 363 - 85$
$T'(11) = 278.$
$363 - 85 = 278$

A9:
$T(h) = -h^2 + 22h - 85$
$T(h) = -2h + 22$
$T(h) = -2h + 22 = 0$
$T(h) = -2h = -22$
$h = 11$
$T(11) = -11^2 + 22 \cdot 11 - 85$
$* \; T(11) = 121 + 242 - 85$
$T(11) = 278$

Figura 3.8: Respostas de alguns alunos na atividade 2.14

A análise avaliativa dos dados foi organizada em duas etapas:

- 1ª Etapa: correspondendo às atividades 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.10 das seções 2.2.1, 2.2.2. 2.2.3, 2.2.5;
- 2ª Etapa: correspondendo às atividades 2.13 e 2.14 da seção 2.2.6.

Passaremos à análise das respostas referentes às atividades propostas nas duas etapas. Iniciando pela primeira etapa desta pesquisa, na **primeira atividade** 2.2 percebemos que a maioria dos alunos responderam satisfatoriamente a questão, e os três alunos avaliados como NS realmente não entenderam o conceito de taxa de variação.

Na **segunda atividade** 2.3 verifica-se quase a totalidade dos alunos responderam satisfatoriamente a questão, e uma avaliação PS neste caso se deu pelo fato de o aluno por não ter respondido a questão por completo, especificamente a alternativa c e a outra por um erro na relação entre as grandezas também no item c. Diante destes dados podemos então concluir que o objetivo previsto nesta seção 2.2.1 de introduzir o conceito de taxa de variação por meio destas atividades foi alcançado.

Já a análise da **terceira atividade** 2.5, mostra um desempenho satisfatório dos alunos, onde 2 destes tiveram um desempenho PS devido ao fato de terem respondido parcialmente a questão, talvez por falta de atenção os mesmos não concluíram respondendo para qual valor a sequência apresentada estaria "tendendo", e os outros 2 por terem iniciado e não terem terminado este mesmo item b. Podemos então avaliar que o objetivo previsto nesta seção 2.2.2 foi atingido.

Na **quarta atividade** 2.7 passamos a analisar se o objetivos de inserir e definir o conceito de taxa de variação instantânea foi alcançado e podemos concluir que sim, pois novamente a maioria dos alunos alcançou desempenho satisfatório (S), e a avaliação PS deu-se pelo fato de o aluno não ter utilizado valores tão próximo do solicitado.

Na **quinta e última atividade** (2.10) desta primeira etapa os participantes responderam satisfatoriamente, o que nos leva à conclusão de termos alcançado o objetivo desta etapa de obtermos a derivadas de algumas funções. Um aluno foi avaliado com PS devido a erros parciais (a atividade era composta de quatro tarefas) e as avaliações NS foram obtidas por um aluno que fez e apagou seu cálculos impossibilitando a correção dos mesmos, e o outro que não respondeu a questão.

Passamos agora à análise da segunda etapa desta proposta, que tinha por objetivo obter os pontos de otimização de uma função por meio da aplicação das derivadas. A **atividade** 2.13 da seção 2.2.6, recebeu mais avaliações do nível PS. Destas cinco avaliações PS, três ocorreram por questões relacionadas à matemática básica: mudança de sinais no desenvolvimento de uma equação mas não por erros específicos das regras de derivação, e apenas duas avaliações PS foram por erros de derivação.

E por último, na análise da **atividade** 2.14 da seção 2.2.6 observamos quatro avaliações PS, onde em todos os casos ocorreram erros de matemática básica no que diz respeitos às propriedades de potenciação. Tais erros levaram os alunos a soluções equivocadas, mas por se tratarem de erros fora do objetivo destas atividades, consideramos que este foi alcançado e o desempenho satisfatório por parte dos alunos. Destacamos ainda a dificuldade por parte de alguns alunos em relação ao conteúdo de funções, perincipalmente em encontrar um modelo matemático (lei de formação) que expressasse a situação. Um relato mais detalhado e rico do desenvolvimento das atividades pertencentes a segunda etapa se encontra no apêndice deste trabalho, com diálogos e dúvidas surgidas durante as aulas.

3.3 Análise Individual de Cada Aluno

Norteados ainda pelas resoluções observadas nas figuras 3.2 - 3.8 e pelo quadro resumo do desempenho dos alunos apresentados na tabela 3.1, passaremos à análise individual de cada participante.

O aluno **A1** obteve $\frac{5}{7}$ de avaliações classificadas em S e $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em PS. Nas atividades referentes a primeira etapa ele relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções, bem como as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas. No entanto recebeu PS na atividade 2.3 por um erro na relação entre as grandezas no item c. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada, e analisou corretamente o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente, bem como representou sua análise por meio da simbologia correta de limites, incluindo o uso do símbolo de infinito. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea. Também mostrou ter assimilado o conceito de derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas. Nas atividades da segunda etapa, utilizou os conceitos estudados para resolver as atividades, contudo obteve avaliação PS na atividade 2.13 desta etapa por erros nas regras de derivação de uma constante provavelmente por falta de atenção, pois na atividade 2.10 o aluno não apresentou erro. Nesta mesma atividade para desenvolver o modelo matemático que descrevia a situação recorreu a observação do que acontecia quando acrescidos 1, 5 e 9 pés de laranjas para obter a função que expressava aquela situação.

O aluno **A2** obteve $\frac{5}{7}$ de avaliações classificadas em S e $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em PS. Nas atividades referentes a primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas. No entanto recebeu PS na atividade pelo fato de não ter terminado os cálculos de 2.3. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequencia dada, e analisou corretamente o comportamento da sequencia quando n cresce indefinidamente. Representou sua análise por meio da simbologia correta de limites, incluindo o uso do símbolo de infinito. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea, bem como o conceito de derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas. Nas atividades da segunda etapa utilizou os conceitos estudados para resolver as atividades, contudo obteve avaliação PS na atividade 2.13 por erros nas regras de derivação da constante e na regra da potência, provavelmente por falta de atenção, pois na atividade 2.10 o aluno não apresentou erros. Nesta mesma atividade o aluno utilizou o método de tentativa e erro, calculando o acréscimo de 0,1,2,3,4,5,9,10,11, necessitando de ajuda para obter a função que expressava aquela situação.

O aluno **A3** obteve $\frac{3}{7}$ de avaliações classificadas em S, $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em PS e $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em NS . Nas atividades referentes a primeira etapa recebeu classificação NS em sua na atividade 2.2 por não a tê-la concluído, apenas iniciou e não terminou, contudo foi possível perceber o não entendimento correto da questão, talvez por isso não a tenha terminado. Na sequência assimilou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas da atividade 2.3. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada, contudo não analisou corretamente o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea, o conceito de derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Não respondeu a atividade 2.10. Nas atividades da segunda etapa utilizou os conceitos estudados para resolver as atividades, contudo obteve avaliação PS na atividade 2.13 desta etapa por erros de matemática básica, mais especificamente mudança de sinais, no desenvolvimento.

O aluno **A4** obteve $\frac{6}{7}$ de avaliações classificadas em S e $\frac{1}{7}$ de avaliações classificadas em PS. Nas atividades referentes à primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada, e analisou corretamente o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea, derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas. Nas atividades da segunda etapa utilizou os conceitos estudados para resolver as atividades. Para desenvolver o modelo matemático que descrevia a situação na atividade 2.13 desta etapa recorreu à observação do que acontecia quando acrescidos 0, 1 e 2 pés de laranjas para obter a função que expressava aquela situação. Recebeu avaliação PS também na atividade 2.14 por erros de matemática básica, mais especificamente nas propriedades de potenciação.

O aluno **A5** obteve $\frac{4}{7}$ de avaliações classificadas em S, $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em PS e $\frac{1}{7}$ de avaliações classificadas em NS. Nas atividades referentes à primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas apenas na segunda atividade (2.3). Recebeu NS na primeira atividade (2.2) pois demonstrou o não entendimento ao resolver a mesma utilizando a lei de formação do exemplo anterior, necessitando de auxílio do professor para compreensão e continuação do exercício. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada, mas não respondeu sobre o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente. Mostrou, através de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea, a derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas. Nas atividades da segunda etapa utilizou os conceitos estudados para resolver as atividades. Para desenvolver o modelo matemático que descrevia a situação na atividade 2.13 desta etapa recorreu a observação do que acontecia quando acrescidos 0, 1 e 2 pés de laranjas para obter a função que expressava aquela situação. Recebeu avaliação PS também na atividade 2.14 desta etapa por erros de matemática básica, mais especificamente nas propriedades de potenciação.

O aluno **A6** obteve todas as avaliações classificadas em S. Nas atividades referentes à primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequencia dada e analisou corretamente o comportamento da sequencia quando n cresce indefinidamente. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea, derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas. Nas atividades da segunda etapa utilizou e aplicou de forma correta os conceitos estudados para resolver as atividades.

O aluno **A7** obteve $\frac{4}{7}$ de avaliações classificadas em S e $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em PS. Nas atividades referentes à primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada e analisou corretamente o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado corretamente o conceito de taxa de variação instantânea, derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas. Nas atividades da segunda etapa utilizou e aplicou de forma correta os conceitos estudados para resolver as atividades, mas recebeu avaliação PS em ambas por erros de matemática básica no desenvolvimento da questão, em virtudes de mudanças de sinais e propriedades de potenciação.

O aluno **A8** obteve $\frac{5}{7}$ de avaliações classificadas em S e $\frac{3}{7}$ de avaliações classificadas em PS. Nas atividades referentes a primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada, mas não respondeu sobre o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado o conceito de taxa de variação instantânea, contudo não terminou por completo a questão por isso recebeu avaliação PS. Através de suas respostas mostrou ter assimilado o conceito de derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Respondeu e apagou as respostas, impossibilitando a correção da atividade 2.10. Nas atividades da segunda etapa utilizou e aplicou de forma correta os conceitos estudados para resolver as atividades.

O aluno **A9** obteve $\frac{2}{7}$ de avaliações classificadas em S, $\frac{4}{7}$ de avaliações classificadas em PS e $\frac{1}{7}$ de avaliações NS. Nas atividades referentes à primeira etapa relacionou corretamente o conceito da taxa de variação no estudo de funções e relacionou corretamente as variáveis dependentes e independentes na relação entre as grandezas apenas na segunda atividade (2.3). Recebeu NS na primeira atividade (2.2) pois demonstrou o não entendimento ao resolver a mesma utilizando a lei de formação do exemplo anterior, necessitando de auxílio do professor para compreensão e continuação do exercício. Mostrou ter assimilado o conceito de limites apresentado ao obter os primeiros termos da sequência dada, contudo não terminou a análise sobre o comportamento da sequência quando n cresce indefinidamente. Mostrou, por meio de suas respostas, ter assimilado o conceito de taxa de variação instantânea, derivadas e a representação geométrica da taxa de variação instantânea ou derivada da função f. Desenvolveu corretamente o cálculo da derivadas das funções propostas, porém recebeu avaliação PS por não ter respondido todos os itens. Nas atividades da segunda etapa utilizou e aplicou de forma correta os conceitos estudados para resolver as atividades, mas recebeu avaliação PS em ambas por erros de matemática básica no desenvolvimento da questão, particularmente mudanças de sinais e propriedades de potenciação.

3.4 Análise do Desempenho Geral do Grupo de Alunos

A análise dos dados nos mostrou que dentre as dezessete avaliações classificadas como PS, oito se deram pelo fato de os alunos não terem terminado a questão, sete por erros de matemática básica e apenas dois erros no desenvolvimento dos parâmetros matemáticos avaliados na questão; e dentre as quatro avaliadas como NS uma foi pelo fato de o aluno não ter concluído a questão, duas porque os alunos não responderam a questão, e apenas uma pelo não entendimento da atividade.

Verificamos que dois alunos obtiveram menos da metade de questões avaliadas com desempenho satisfatório:

- o aluno A3 obteve apenas 3 classificações satisfatórias S, duas classificações PS que ocorreram por ter respondido corretamente a alternativa a e a alternativa b de uma questão, bem como por ter cometido erros de matemática básica. Duas classificações NS ocorreram por ter apenas iniciado e não ter concluído uma questão e por não ter respondido outra questão;
- aluno A9 obteve apenas 2 classificações satisfatórias S e quatro classificações PS que ocorreram duas vezes por não ter respondido todos os itens de duas questões e duas vezes por erros de matemática básica, e uma classificação NS por demonstrar o não entendimento da questão contudo após o auxílio recebido conseguiu resolver a próxima atividade que abordava o mesmo conteúdo demonstrando ter assimilado o mesmo.

Contudo, estes fatores não nos levam a classificá-los como tenho um desempenho muito abaixo da média dos demais, por se tratar de erros de matemática básica ou mesmo por falta de atenção.

Os resultados desta proposta foram obtidos a partir de uma abordagem pedagógica específica: verificar se a proposta apresentada possibilita o aprendizado e a aplicação do conceito de derivadas na resolução de problemas de otimização. Devemos contudo salientar que as características deste trabalho colaboraram com os resultados obtidos, destes podemos apontar alguns pontos positivos e negativos que podem ter influenciado o resultado final deste trabalho:

i) **pontos positivos**

- bom relacionamento professor-aluno;
- disponibilidade de uso do laboratório de informática tornando o ambiente adequado à pesquisa;
- conhecimento por parte de alguns alunos dos conteúdos considerados como pré-requisitos;
- número de alunos reduzido em sala de aula;
- alunos com interesse em aprender e participar deste trabalho.

ii) **pontos negativos**

- os alunos mostraram-se cansados devido ao horário das aulas;
- o período que ocorreu a aplicação deu-se em uma época do calendário conflitante com várias atividades escolares;
- o material utilizado não pôde ser levado para a casa;
- dificuldades por parte de alguns alunos em conteúdos considerados pré-requisitos, como por exemplo no conteúdo de funções;
- poderíamos ter mais aulas.

Os alunos participantes deste trabalho também apontaram pontos negativos e positivos conforme seu ponto de vista, estes estão presentes no apêndice na seção Resultados da Pesquisa de Avaliação.

Embasados então nas análises dos resultados anteriormente mencionados concluímos que os alunos de forma geral obtiveram desempenho satisfatório, mostrando entendimento inicial do conceito de derivadas e sua aplicação em problemas de otimização, o qual os auxiliará na continuidade dos estudos ou nos processos seletivos em busca de uma vaga no ensino superior. Desta forma concluímos o objetivo proposto inicialmente neste trabalho foi atingido.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Cálculo já esteve presente como disciplina no currículo do ensino médio, sendo retirado da grade de ensino em meados das décadas de 1960 e 1970. Poucos livros didáticos do ensino médio abordam este conteúdo ainda, contudo o mesmo não é desenvolvido em sala de aula pelo fato do professor não ter a obrigação de ensino deste.

Esta dissertação foi desenvolvida no programa de mestrado PROFMAT que tem por objetivo proporcionar possibilidades de aperfeiçoamento e qualificação ao docente do ensino médio por meio de propostas que contribuam para o aprimoramento e enriquecimento do ensino de Matemática.

Diante destes dois contextos, nesta dissertação buscamos trazer uma proposta de apresentação dos conceitos de limites e derivadas, com ênfase em problemas de otimização devido a sua aplicabilidade em diversas áreas. Desenvolvemos uma pesquisa de campo, de natureza qualitativa e quantitativa, através de uma proposta didática com exemplos, atividades e problemas escolhidos que representam situações presentes no cotidiano, dando margem a um trabalho mais interativo entre professor – aluno e aluno – aluno, direcionadas ao desenvolvimento do conteúdo de maneira intuitiva e com o auxílio do software Geogebra.

Procuramos criar uma proposta didática que seja uma ferramenta ao professor, tendo as condições prévias e adequadas permitindo que a abordagem de derivadas se torne possível no Ensino Médio, o que nos é factível afirmar embasados nas análises dos resultados obtidos neste trabalho. Apontamos também, diante dos comentários realizados pelos alunos participantes deste trabalho e que se encontram no Apêndice que, embora um aluno defenda a opinião contrária, diante das respostas e/ou comentários feitos nas perguntas 5, 7 e 8, destacamos que muitos gostaram das atividades, e acharam válido serem apresentados de forma diferenciada a um novo conceito. A opinião contrária, isto é, a que não concordava com a introdução do conteúdo de derivadas no Ensino Médio e que afirmava que (a derivada) "Não poderia ser incluída no ensino médio porque não dá tempo dos professores passarem todos os conteúdos programados pro ano, e essa é uma matéria que exigiria muito tempo", não é de forma alguma um ponto negativo a este trabalho, muito pelo contrário ela reforça a ideia contemplada pela BNCC no tocante à organização e proposição de itinerários formativos. Sendo assim este trabalho pode ser visto também como uma proposta visando implementar na rede ensino um itinerário formativo diferenciado, ou até mesmo ser explorado como proposta de criação de um Clube de Matemática, por exemplo, já que este trabalho não está fechado e pode ser aplicado nestes moldes em outras situações.

Vale frisar, que o professor pode analisar o contexto da sua instituição de ensino e assim definir, visto que a grade curricular do Ensino Médio tem diferenças entre as esferas estaduais e adaptar também as demais séries do Ensino Médio.

Portanto, deixamos esta sugestão aos professores do Ensino Médio, entendendo que o objetivo principal deste trabalho foi alcançado, e esperamos que esta proposta realmente possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA

[1] *Agência Senado: Reforma tornou ensino profissional obrigatório em 1971.* Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2017/03/03/reforma-do-ensino-medio-fracassou-na-ditadura. Acesso em 09/2019.

[2] *Clubes de Matemática da OBMEP.* Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-excursao-em-aviao/. Acesso em 09/2019.

[3] *Dicionário de Português.* Disponível em: https://www.google.com.br/search?biw=951&bih=636&ei=n0lEXfW1Osm_5OUPovqqgAs&q=dicion%C3%A1rio+significado+da+palavra+c%C3%A1lculo&oq=dicion%C3%A1rio+significado+da+palavra+c%C3%A1lculo&gs_l=psy-ab.3..33i160.5820.15092..15797...1.0..0.338.1158.0j4j1j1......0....1j2..gws-wiz.......0i71j0j0i67j0i131i67j0i131j0i70i249j33i22i29i30.YFXqkB9yHgk&ved=0ahUKEwi1gbTjs-TjAhXJH7kGHSK9CrAQ4dUDCAo&uact=5.. Acesso em 08/2019.

[4] *Revista Ciências Hoje.* Rio de Janeiro, volume 14, 79° edição, 1995.

[5] *Departamento de Matemática, MAT 141 - Lista 3 - 2017/2.* Universidade Federal de Viçosa, 2017. Disponível em: http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20141/2017-II/listas/Lista%203%20de%20MAT%20141%20-%20Turma%205%20(noturno)%20-%20MAT%20141%20-%202017-II.pdf. Acesso em 09/2019.

[6] G. ÁVILA and L. C. L. ARAÚJO. *Cálculo: ilustrado, prático e descomplicado.* LTC, Rio de Janeiro, 18° edição, 2012.

[7] G. S. S. ÁVILA. *Limites e Derivadas no Ensino Médio?. RPM 60.* SBM. Disponível em: `http://www.rpm.org.br/cdrpm/60/8.htm`. Acesso em 11/2019.

[8] G. S. S. ÁVILA. *O ensino de Cálculo no 2° grau. RPM 18.* SBM. Disponível em: `http://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm`. Acesso em 11/2019.

[9] G. S. S. ÁVILA. *Revista do Professor de Matemática (RPM).* SBM, Rio de Janeiro, 18° edição, 1991.

[10] M. E. BARON and H. J. M. BOS. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.* Universidade de Brasília, Brasília, 1998.

[11] C. B. BOYER. *Cálculo: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.* Editora Atual, São Paulo, 1° edição, 1974.

[12] C. B. BOYER. *História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide.* Editora Edgard Blucher, São Paulo, 2° edição, 1996.

[13] S. D. CORREA. *O uso de Métodos Numérico em Problemas de otimização: Aplicação no Ensino Médio.* UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2016.

[14] B. S. FERREIRA. *Problemas de máximos e minímos.* Uiversidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

[15] R. H. L. FRANCESCO, M; PEDROSA. *Uma introdução ás desigualdades isoperimétricas.* Rio de Janeiro, 1993. Disponível em: `https://impa.br/wp-content/uploads/\2017/04/19_CBM_93_04.pdf`. Acesso em 11/2019.

[16] G. G. GARBI. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.* Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.

[17] T. HOBBES. *Do Cidadão.* São Paulo, 3° edição, 2002.

[18] G. IEZZI, et al. *Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana.* Atual, São Paulo, 2° edição, 1981.

[19] N. J. MACHADO. *Cálculo no ensino médio: já passou da hora.* Entrevista concedida a Márcio Simões. Disponível em: `https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/`. Acesso em 10/2019.

[20] N. J. MACHADO. *Noções de Cálculo*, volume 9. Editora Scipione, São Paulo, 1998.

[21] MEC. *ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio.* MEC, questão 174, 2015.

[22] MEC. *Base Nacional Curricular. Educação é a Base.* MEC/CONSED/UNDIME, Brasília, 1° edição, 2018.

[23] R. S. MOL. *Introdução a hisória da matemática.* CAED-UFMG, 2013.

[24] A. C. M. NETO. *Fundamentos de Cálculo.* SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[25] P. T. S. NEVES. *Introdução ao Cálculo e Aplicações de derivadas no Ensino Médio.* UFA, Macapá, 2016.

[26] M. PAIVA. *Matemática*, volume 2. São Paulo, 1° edição, 2005.

[27] H. A. PEDROSO. *A hisória da matemática.* Disponível em: `https://issuu.com/joaoe.brito/docs/apostila_hist_mat_prof.hermes_pedro`. Acesso em 08/2019.

[28] G. POLYA. *A arte de resolver problemas.* Interciência, Rio de Janeiro, 2° edição, 2006.

[29] W. M. REZENDE. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epitemológica.* Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

[30] V. C. SOUZA. *A Origem do Cálculo Diferencial e Integral.* Universidade Candido Mendes, Rio de Janeiro, 2001.

[31] J. STEWART. *Cálculo*, volume 14. Cengage Learning, São Paulo, 6° edição, 2011, Tradução: Antônio Carlos Moretti.

[32] G. B. THOMAS. *Cálculo*, volume 1. São Paulo, 10° edição, 2005.

[33] G. B. THOMAS. *Cálculo*, volume 2. São Paulo, 10° edição, 2007.

[34] A. C. VASCONCELOS. *Abelhas: A matemática dos alvéolos.* 2000. Disponível em: http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm. Acesso em 11/2019.

APÊNDICE

Geogebra

As atividades desenvolvidas por meio do software Geogebra nas aulas 2.2.1 e 2.2.4 se encontram no link: `https://www.geogebra.org/u/aderivadacomotaxadevariacao`.

O leitor pode ter acesso a estas atividade através do site:

- `https://www.geogebra.org/`
- guia perfil
- login/usuário: aderivadacomotaxadevariacao
- senha: taxadevariacao2019

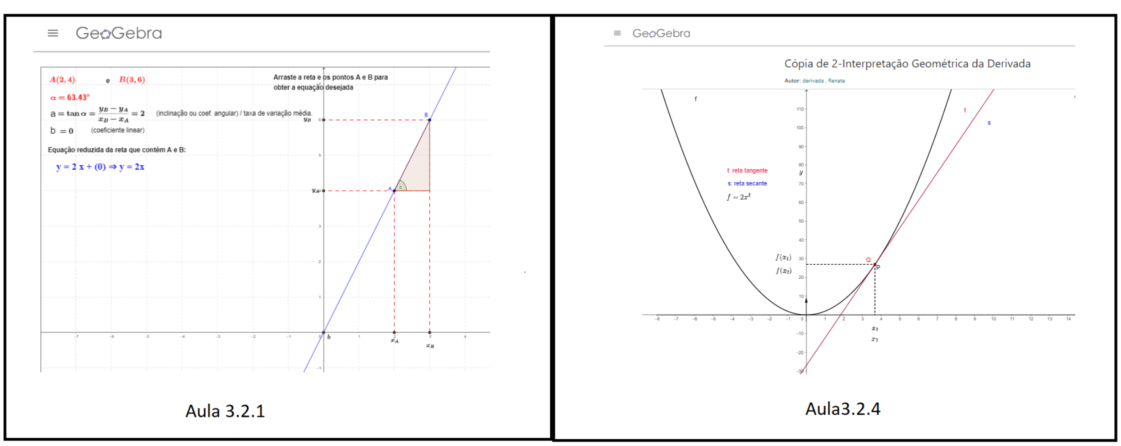


Figura A1: Geogebra: referência para as aulas 2.21 e 2.24
(Fonte: Autora.)

Desenvolvimento da Atividade do Exemplo 2.11

Após a discussão inicial proposta cada aluno iniciou sua tentativa de construir a caixa, alguns alunos começaram a riscar quadrados pequenos e foram aumentando as respectivas medidas de seus lados. Em dado momento um deles indagou[1]:

aluno A6: "Como nós faremos para saber qual das caixas construídas realmente terá o maior volume, pois alguns quadrados podem ter uma diferença muito pequena quanto a medida do seu lado?";

professor: "Você tem alguma ideia de como poderíamos resolver este impasse? Como você solucionaria?";

aluno A6: "Eu me lembro que já "aprendi"este conteúdo na escola, mas não me recordo exatamente, acho que multiplica o tamanho da largura e o do comprimento";

professor: "Realmente você teve contato com este conteúdo por algumas vezes durante o ciclo escolar, mas vamos recordar um pouquinho: vamos tomar por base a nossa sala de aula, como você calcularia o perímetro dela?";

aluno A6: "Multiplico o comprimento e a largura da sala";

aluno A7: "Soma e não multiplica";

professor: "Mas o perímetro é a soma de todos os lados, logo deve-se somar todas as quatro medidas neste caso. O formato da nossa sala é um quadrado ou retângulo?";

aluno A5: "Quadrado";

professor: "Imagine que a nossa sala tem 10 m de comprimento, neste caso o perímetro dela é de 40 m, pois somamos os quatro lados, "$P = 10+10+10+10 = 40$". Agora qual será a sua área?";

aluno A6: "10 vezes 10 é igual a 100";

professor: "Isto mesmo, 100 m^2. E o volume desta sala, imagine que este é o formato de uma piscina, quantos litros de água necessitamos para enche-lá?".

Neste momento alguns alunos começaram a efetuar o cálculo da área novamente como solução, outros apresentaram como resposta a multiplicação 4 vezes da medida lateral, como se fosse um perímetro multiplicado. Constatei que 80% dos alunos não sabiam calcular o volume.

[1] Transcrição do dialogo ocorrido entre alunos e professor no decorrer da atividade.

professor: "Tem uma diferença no volume de água da piscina se ela for enchida por exemplo até a metade ou na sua capacidade máxima?";

aluno A5: "Claro que sim, então a altura também interfere, então seria o comprimento vezes a largura vezes a altura";

aluno A6: "Mas como estamos trabalhando com papel não vamos poder colocar água";

professor: "Mas podemos calcular pela forma tradicional utilizando as medidas de cada caixa, ou podemos colocar areia nas caixas, e assim embora não tenhamos no nosso caso uma balança, mas conseguiremos averiguar qual das construções obteve o maior volume."

Neste momento cada aluno continuou com suas atividades e dois alunos começaram a dialogar entre si,sobre qual estratégia seria melhor: aumentar ou diminuir o lado do quadrado. Outro aluno me disse que estava com um problema, pois ele havia escolhido uma determinada medida e quando foi riscar no lado menor do papel cartão viu que não seria possível cortar esta medida em ambos os lados. Aproveitando este fato questionei aos alunos se haveria uma medida limite da figura a ser retirada, e coloquei o que havia ocorrido com este aluno para todos da sala.

Nem todos os alunos chegaram a uma mesma conclusão, parte deles devido ao fato do papel cartão ter as dimensões de 48cm x 33cm. Em princípio pensaram que a medida máxima à ser retirada seria a de 33 cm que é a largura da folha. Então interferi fazendo uma representação da situação no quadro, observando que a medida escolhida deve ser retirada tanto na parte esquerda quanto direita da folha, e se eu escolhi tirar 33 cm do lago esquerdo por exemplo, eu teria condições de retirar novamente este valor no lado direito? Poderíamos escolher uma dimensão a ser retirada maior que 33 cm?

Estes fatores levaram os alunos a pensarem nas opções para o limite a ser retirado, e os fez chegarem a conclusão que este deveria ser inferior a metade do lado menor, ou seja, $0 \leq \text{x} \leq 16,5\ cm$.

Ao término da confecções das caixas, alguns visualmente tentaram descobrir qual delas teria o mesmo volume, ou tentando colocar uma caixa dentro da outra, outros confeririam em duplas utilizando areia por meio de um utensílio utilizado como medida padrão, enquanto outros realizaram o cálculo utilizando a fórmula matemática do volume.

Após este momento, com os resultados de cada aluno (para padronizar eu solicitei que todos utilizassem a fórmula do volume), verificamos qual deles havia encontrado o maior volume, e então questionei se aquele era realmente o maior volume ou se haveria outra resposta?

Colocamos no quadro por meio de uma tabela (A.1), e verificamos o que acontecia com o volume conforme a medida aumentava: e

medida do lado(cm)	volume da caixa(cm^3)
2	v = 2,552
3	v = 3,402
4	v = 4,000
5	v = 4,370
6	v = 4,536
7	v = 4,522

Tabela A.1: Possíveis Volumes
(Fonte: Autora.)

Em princípio a melhor opção seria 6 cm, mas apresentei aos alunos outras possibilidades: 6,1 cm, 6,2 cm, ..., 6,9,.... Diante de tantas variações seria a melhor saída acrescentar todos estes intervalos possíveis de valores em uma tabela e efetuar os cálculos um por um? Claro que não!, vamos encontrar um modelo matemático que descreva toda esta situação.

Realizar esta tarefa não foi tão simples, os educandos apresentaram considerável dificuldade, então como sugestão indiquei que observassem como obtiveram o volume já sabendo a medida do lado, e tentassem encontrar um padrão, entre as variáveis dependentes e independentes, e consequentemente encontraríamos a função procurada.

Como nem todos obtiveram êxito, realizei no quadro juntamente com todos as etapas necessárias até chegarmos em $V(x) = (48 - 2x)(33 - 2x)x$, com as devidas manipulações e simplificações obtemos $V(x) = 4x^3 - 162x^2 + 1584x$. Neste momento os alunos aplicaram o que haviam aprendido sobre o conteúdo de derivadas, encontrando $V'(x) = 12x^2 - 324x^2 + 1584$, que igualaram a zero, obtendo uma familiar função do 2º grau $12x^2 - 324x^2 + 1584 = 0$, com $x_1 \cong 6,41$ e $x_2 \cong 20,59$.

Analisando x_1 e x_2 os alunos descartaram x_2, pois já haviam concluído que $0 \leq$ x $\leq 16,5\ cm$, e calcularam o volume com a medida encontrada o que resultou em $V(x) = 4559,66cm^3$.

Percebe-se infelizmente que muitos alunos, embora estejam em fase final escolar, não assimilaram alguns conteúdos básicos da matemática, e que são uteis em atividades cotidianas. Observado foi que dois alunos não sabiam usar a régua: um deles queria cortar um quadrado de 6x6, e usou como medida do 0 ao 5 na régua, e assim seu quadrado ficou com 5 cm de medida e o outro não considerou o início da régua como sendo no 0 e sim no número 1.

Os comentários e questões levantadas pelos estudantes fornecem informações relevantes a respeito das dificuldades encontradas pelos mesmos em conteúdos matemáticos que foram, por eles, ao longo do tempo memorizados e não compreendidos. Tais fatores reforçam as constatações de que os estudantes não tiveram o desempenho esperado por não terem a compreensão de conceitos básicos da matemática.

Desenvolvimento da Atividade do Exemplo 2.12

Após a leitura do enunciado da atividade 2.12, os alunos tiveram um tempo para encontrarem a solução, podendo trocar informações entre si. Depois deste momento, perguntei se já haviam solucionado o problema. A resposta inicial encontrada foi que a maior rentabilidade seria obtida com a excursão acontecendo com sua capacidade máxima, ou seja, com os 100 lugares ocupados, e 44,4% dos alunos chegaram a esta conclusão. Dentre estes, o aluno A3, um escolheu tal por não ter entendido a situação problema, Fig. A2:

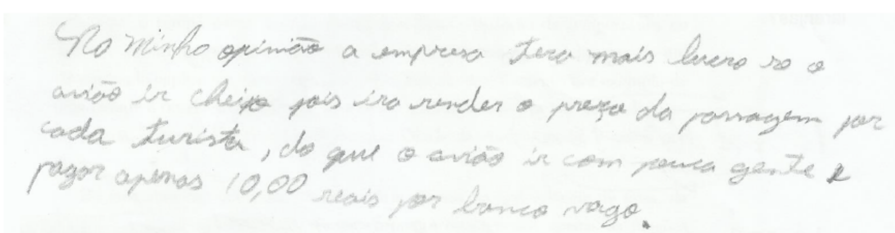
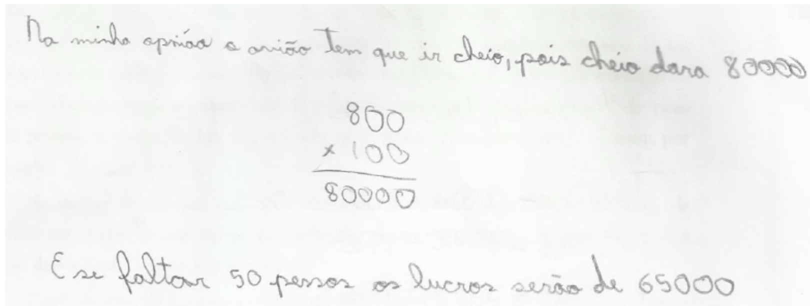

No minha opinião a empresa tera mais lucro se o avião ir cheio pois ira render o preço da passagem por cada turista, do que o avião ir com pouca gente e pagar apenas 10,00 reais por banco vago.

Figura A2: Atividade 2: Resposta do aluno A3

Nesta interpretação, o aluno entendeu que por exemplo se faltassem 5 passageiros, só haveria diferença apenas no preço final, 5 . $R\$ \ 10 = R\$ \ 50$, mas não que aumentariam R$ 50,00 na passagem de todos os demais 95 passageiros.

O aluno A5 efetuou vários cálculos e chegou a conclusão que lotação deveria ter capacidade máxima. Ainda, outros dois alunos A8 e A9 responderam que o avião deveria ir cheio, calcularam apenas a renda para esta situação e decidiram, apenas com este dado. Contudo quando A9 me apresentou como resposta que o avião deveria ir cheio, conforme a Fig. A3, eu o questionei em voz alta e compartilhei a situação com a sala dizendo: você tem certeza? E após este questionamento os alunos começaram a repensar questão.



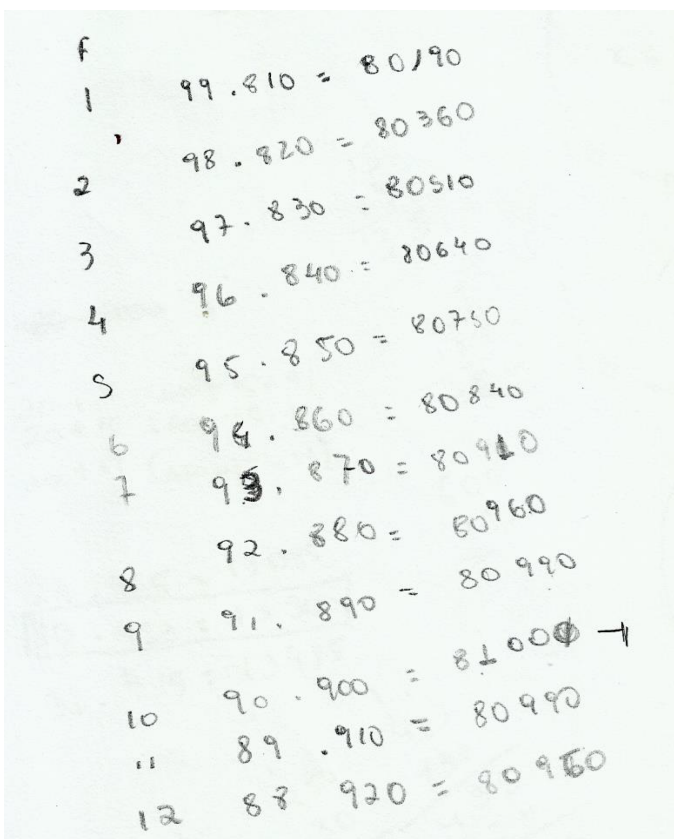
Na minha opinião o avião tem que ir cheio, pois cheio dara 80000

$$\begin{array}{r} 800 \\ \times\ 100 \\ \hline 80000 \end{array}$$

E se faltar 50 pessoas os lucros serão de 65000

Figura A3: Atividade 2: resposta do aluno A9

Outro caso foi o do aluno A2 que iniciou uma tabela (Fig. A4) calculando a falta desde 0 até 12 passageiros e assim decidiu que a resposta correta seriam 10 poltronas vagas:



f
1 99 . 810 = 80190
98 . 820 = 80360
2 97 . 830 = 80510
3 96 . 840 = 80640
4 95 . 850 = 80750
5 94 . 860 = 80840
6 93 . 870 = 80910
7 92 . 880 = 80960
8 91 . 890 = 80990
9 90 . 900 = 81000
10 89 . 910 = 80990
11 88 920 = 80960
12

Figura A4: Atividade 2: resposta do aluno A2

Já os demais também começaram a verificar o que acontecia quando faltavam 1, 2, 3,4,5,...,11,10,50,51 passageiros, contudo não chegaram a uma conclusão final. Aproveitando que um deles começou a tabular faltando de 0 á 12 passageiros, utilizamos estes dados para construirmos uma tabela (A.2), e com isto foi possível que o aluno A3 percebesse o seu erro, tanto que ele mesmo colocou que havia compreendido de forma errônea a situação.

Número de desistentes (cm)	Lucro da Excursão
0	100 . (800. 00) = 80.000
1	99 . (800. 10) = 80.190
2	98 . (800. 20) = 80.360
3	97 . (800. 30) = 80.510
4	96 . (800. 40) = 80.640
5	95 . (800. 50) = 80.750
6	94 . (800. 60) = 80.840
7	93 . (800. 70) = 80.910
8	92 . (800. 80) = 80.960
9	91 . (800. 90) = 80.990
10	90 . (800. 100) = 81.000
11	89 . (800. 110) = 80.990
12	88 . (800. 120) = 80.960

Tabela A.2: Possíveis Lucros da Excursão
(Fonte: Autora.)

Apontei que o aluno A2, com base nesta tabela, concluiu que o número de desistentes deveria ser de 10 pessoas, mas sua tabela não estava completa, e assim sendo, seria possível ter um valor maior que $R\$81.000,00$ de lucro entre o intervalo de 13 a 100 desistentes? Para confirmar teríamos que completar a tabela? Obtive como resposta que seria melhor conferir mas, que daria "muito trabalho", logo deveria ter uma forma mais fácil. Em continuação outro aluno sugeriu encontrar uma função que representasse a situação tal como fizemos na Atividade 3.11.

Novamente alguns alunos apresentaram dificuldades em generalizar matematicamente a situação, e mais uma vez sugeri que observassem a tabela construída à fim de encontrar os padrões e tomar x como o número de passageiros presentes. Entretanto outros conseguiram concluir, conforme a figura A5:

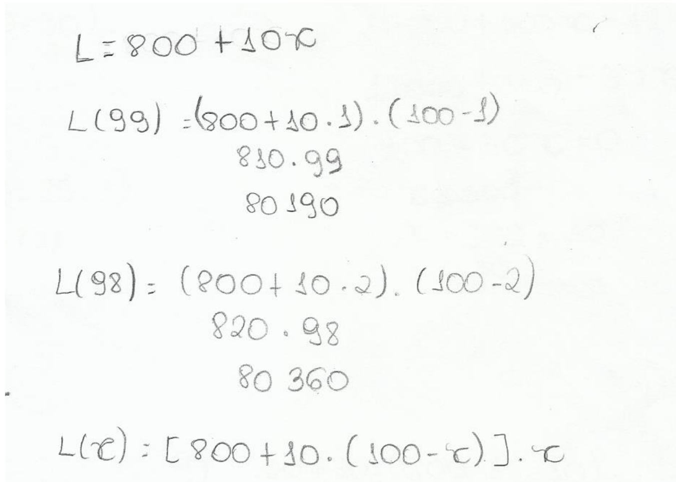


Figura A5: Resposta do aluno A1

Por fim encontraram $L(x) = [(800{+}10.(100{-}x)]x$, e com as devidas manipulações e simplificações obtiveram $L(x) = -10x^2 + 1800x$ e $L'(x) = -20x + 1800$, que igualado a zero implica em $-20x + 1800 = 0$, com $x = 90$.

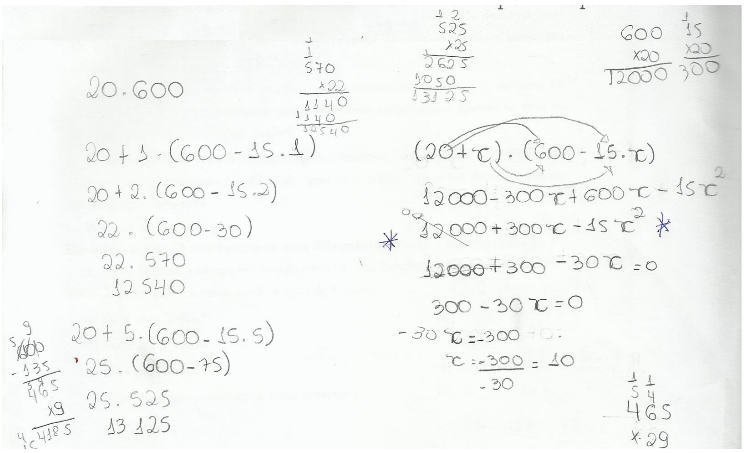
Desenvolvimento da Atividade do Exemplo 2.13

Como já tínhamos realizado duas atividades anteriormente, após a leitura inicial do enunciado os alunos não ficaram utilizando o método de tentativas e nem a construir tabelas enormes com acréscimos unitários, até mesmo porque neste caso não teríamos um limite como na atividade 2, com um numero máximo de passageiros, ou ainda na atividade 1, devido ao tamanho da folha. Neste problema já começaram a tentar encontrar um padrão analisando o que ocorreria se aumentasse 0, 1,2, 3..., pés de laranjas. Este processo de investigação facilitou a escrita do modelo matemático descritor da situação. Um exemplo foi o do aluno A1 (figura A6) que analisou esta situação com o acréscimo de 1 e 5 pés de laranjas e assim efetuou a construção de uma expressão matemática.

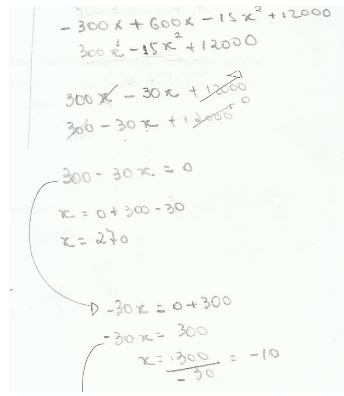
Com posse de $P(x) = -15x^2 + 300x + 1200$, ao obter $P'(x)$, alguns alunos ainda estavam cometendo erros básicos ao aplicar as regras de derivação (veja a figura A6):

- derivada de função constante : $f(x) = 1200 \to f'(x) = 1200$ (aluno A1);
- derivada de função : $f(x) = -300x \to f'(x) = 300x$ (aluno A2).

Ainda nesta mesma figura estão presentes outros erros de matemática básica, que levaram 33, 3% alunos a encontrarem um resultado equivocado de -10, ao fazerem $P'(x)$ =0.



Aluno A1



Aluno A2

Figura A6: Atividade 3: resposta do aluno A1 e aluno A2

Desenvolvimento da Atividade do Exemplo 2.14

No primeiro contato pós leitura, já que o enunciado relata que o "número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima", boa parte dos alunos concluíram que a resposta só poderia ser uma temperatura alta ou muito alta, mas que precisariam dos cálculos para decidir entre as alternativas, ou "chutariam" em uma das duas.

Inicialmente a resolução deste exercício ocorreu com menor grau de dificuldade, pelo fato de já termos a expressão que representava a situação em questão. Realizaram a derivada de T(h) encontrando T'(h) = 2h + 22, que igualando a zero obtiveram $h = 11$, sem maiores dificuldades.

O impasse se deu após encontrarem $h = 11$, pois alguns educandos rapidamente olharam a tabela 2.13 e concluíram que a alternativa correta era a segunda opção: muito baixa. Outros ficaram na dúvida pois a tabela 2.13 tratava de temperatura(T) e eles haviam encontrado o valor de h.

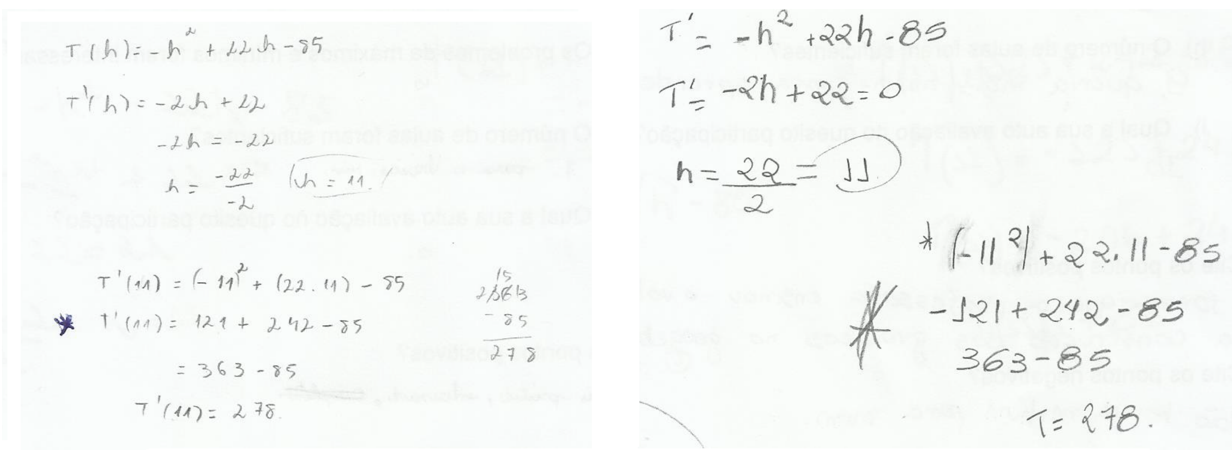
Solicitei que olhassem a expressão dada no enunciado e determinassem qual grandeza estava em função de qual grandeza?

aluno 6: "Fornece a temperatura em função das horas, pois T e h representavam respectivamente a temperatura e as horas";

professor: "Sendo assim, o que deveriam fazer com o valor $h = 11$?";

aluno 6: "substituir em $T(h)$".

Nesta etapa ao proceder a substituição de $h = 11$ em $T(h)$ os alunos encontraram $T = 36$, que está classificada como *alta* conforme a tabela 2.13. Vale salientar que nem todos chegaram a este mesmo valor para a temperatura, e sim $T = 278$ devido a um erro básico das propriedades de potenciação(Fig. A7).



Aluno A7 Aluno A5

Figura A7: Atividade 4: resposta do aluno A7 e aluno A5.

Resultados da Pesquisa de Avaliação

Apresentaremos as informações coletadas neste questionário:

1) Qual a sua idade?
   R: 100% dos alunos tem 17 anos.

2) Qual o seu sexo?
   R: Feminino: 5 alunos Masculino: 4 alunos

3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
   R: Não: 8 alunos Sim: 1 aluno. Onde: livros e internet

4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar

ou sugerir cada item [2]:

a) As explicações formam claras?

R: Nota 10: 8 alunos Nota 9,5: 1 aluno

Comentários: ótima professora.

b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?

R: Nota 10: 7 alunos Nota 9: 1 aluno

Nota 8,5: 1 aluno

Comentários: não iniciar com a atividade 1.

c) A ideia de taxa de variação ficou clara?

R: Nota 10: 6 alunos Nota 7,5: 1 aluno

Nota 7: 2 alunos

d) O conceito de limite foi compreendido?

R: Nota 10: 7 alunos Nota 9: 1 aluno

Nota 8,5: 1 aluno

e) A ideia de derivadas ficou claro?

R: Nota 10: 6 alunos Nota 8,6: 1 aluno

Nota 8: 1 aluno Nota 7: 1 aluno

f) A representação geométrica da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?

R: Nota 10: 2 alunos Nota 9: 3 alunos

Nota 8: 2 alunos Nota 2: 2 alunos

g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?

R: Nota 10: 7 alunos Nota 9: 2 alunos

h) O número de aulas foram suficientes?

R: Nota 10: 2 alunos Nota 9: 4 alunos

Nota 8: 1 aluno Nota 7: 1 aluno

Nota 6: 1 aluno

Comentários:

[2]Observação: as frases escritas entre aspas foram transcritas exatamente como os estudantes responderam no questionário.

- “queria mais aulas, deixou um gostinho de quero mais";
- “queria mais aulas para aprender outros conteúdos";
- “para o básico sim";
- “com mais aulas a compreensão seria melhor".

i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?

R: Nota 10: 5 alunos   Nota 9: 2 alunos

Nota 8: 1 aluno   Nota 7: 1 aluno

5) Cite os pontos positivos.

R:

- “A professora ter paciência com os alunos";
- “Boa explicação, aula interessante";
- “Pra ajudar em uma faculdade, pode também ajudar resolver exercícios do ensino médio";
- “Tudo. Uma ótima Aula";
- “Manipulação do gráfico no Geogebra, atividade proposta no conteúdo de volume, atenção dada pela professora";
- “A forma que a professora ensinou o volume (fazendo uma caixa) e a construção dos gráficos no Geogebra";
- “O conteúdo não conhecia, portanto foi uma novidade que certamente usarei. O conteúdo não é tão difícil assim";
- “As vezes aprender uma conta nova pode ajudar a compreender outra";
- “É mais prático, interessante."

6) Cite os pontos negativos.

R:

- “Deveria ter mais tempo de aula”, foi mencionado por 3 alunos;
- “Não acho que tenha ponto negativo, pelo fato de ser algo acrescentado no nosso aprendizado”;
- “Estudá-la sem aprender a maneira mais complexa”;

- “Nenhum”, foi mencionado por 4 alunos.

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio? R: Um aluno disse que não, e oito alunos afirmaram que sim, e alguns justificaram a resposta:

- “Conteúdo mais complexo, porém ajudaria quem é de exatas”;
- “Sim pois é bem mais fácil resolver questões com derivadas”;
- “Com toda a certeza, ajudaria muito os alunos nos vestibulares”;
- “Sim. Porque o conteúdo é utilizado em várias profissões.”;
- “Com certeza. É necessário aumentar o nível de ensino nas escolas.”

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
R: Sete alunos fizeram comentários:

- “Foram ótimas aulas”;
- “Achei muito legal e interessante a forma de explicação da professora que tornou o conteúdo mais fácil, e a interação dos gráficos no computador”;
- “Perfeita aula, sem palavras!”;
- “Aula divertida! Ótima didática”;
- “Amei as aulas, a professora explicou muito bem. E interagiu bem com todos”;
- “Não poderia ser incluída no ensino médio porque não dá tempo dos professores passarem todos os conteúdos programados pro ano, e essa é uma matéria que exigiria muito tempo”;
- “...seria melhor se aprendesse. É importante saber a necessidade da matemática...”

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? F
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
(X) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde?

4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras?
   10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?
   9
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara?
   7
   d) O conceito de limite foi compreendido?
   10
   e) A ideia de derivadas ficou claro?
   7
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida? 7
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?
   9
   h) O número de aulas foram suficientes?
   7
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?
   8

5) Cite os pontos positivos?
Ás vezes aprender uma conta nova pode ajudar a compreender outra.
6) Cite os pontos negativos?
Muito pouco tempo, precisa de bastante tempo para poder aprender mesmo.
7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
não

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
Não poderia ser incluída no ensino médio porque não da tempo dos professores passarem todos os conteúdos programados pro ano, e essa é uma matéria que exigiria muito tempo.

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? Masculino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
(x) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde? –

4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:

a) As explicações formam claras?

9.5

complemento: ótimo professor :)

b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?

8.5 sim. O conteúdo do começo, colocar mais tarde

c) A ideia de taxa de variação ficou clara?

7.5

d) O conceito de limite foi compreendido?

8.5

e) A ideia de derivadas ficou claro?

8.6

f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?

8

g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?

9

h) O número de aulas foram suficientes?

6 mais aulas a compreenção seria melhor

i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?

7

5) Cite os pontos positivos?

O conteúdo não conhecia, portanto foi um novidade que certamente usarei. O conteúdo não é tão dificil, assim.

6) Cite os pontos negativos?

poucos nº aulas

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?

Sim. Porque o conteúdo é utilizado em várias profissões, ~~[illegible]~~ e detem uma media dificuldade. Todos os alunos do ensino ~~[illegible]~~ médio, é de grande valia que aprendam esse conteúdo

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.

L

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? Masculino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
   (X) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde?______________________________

4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras? 10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem? 10
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara? 7
   d) O conceito de limite foi compreendido? 9
   e) A ideia de derivadas ficou claro? 8
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida? 7
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes? 10
   h) O número de aulas foram suficientes? 10
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação? 9

5) Cite os pontos positivos?
   Boa explicação, aula interessante

6) Cite os pontos negativos?
   nenhum

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
   Conteúdo meio complexo, porem ajudaria quem é de exatas

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? feminino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
(X) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde?
4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras?
      10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?
      10
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara?
      10
   d) O conceito de limite foi compreendido?
      10
   e) A ideia de derivadas ficou claro?
      10
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?
      8
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?
      10
   h) O número de aulas foram suficientes?
      9, as aulas deixam um gostinho de "quero mais"
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?
      10
5) Cite os pontos positivos?
   manibulação do gráfico no geogebra, atividade proposta no conteúdo de volume, atenção dada pela professora
6) Cite os pontos negativos?
7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
   Com toda certeza
8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
   Aula divertida! Ótima didática

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17   2) Qual o seu sexo? feminino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
(X) Não. Foi a primeira.   ( ) Sim. Onde?
4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras?
   10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?
   10
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara?
   10
   d) O conceito de limite foi compreendido?
   10
   e) A ideia de derivadas ficou claro?
   10
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?
   9
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?
   10
   h) O número de aulas foram suficientes?
   9, queria mais aulas para aprender outros conteúdos.
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?
   10

5) Cite os pontos positivos?
A forma que a professora ensinou o volume (fazendo uma caixa) e a construção dos gráficos no geogebra
6) Cite os pontos negativos?
Não houve nenhum para mim.
7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
Com toda certeza, ajudaria muito os alunos nos vestibulares. Deveria.
8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
Amei as aulas, a professora explicou muito bem. E interagiu bem com todos

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? feminino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
(X) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde?
4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras?
   10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?
   10
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara?
   10
   d) O conceito de limite foi compreendido?
   10
   e) A ideia de derivadas ficou claro?
   10
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?
   10
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?
   10
   h) O número de aulas foram suficientes?
   10
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?
   10

5) Cite os pontos positivos?
Tudo. Uma ótima aula.

6) Cite os pontos negativos?
Nenhum

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
Pode.

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
Perfeita aula, sem palavras!

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17. 2) Qual o seu sexo? Feminino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
( ) Não. Foi a primeira. (X) Sim. Onde? Na Internet e em livros.

4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras?

   10

   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?

   10

   c) A ideia de taxa de variação ficou clara?

   10

   d) O conceito de limite foi compreendido?

   10

   e) A ideia de derivadas ficou claro?

   10.

   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?

   9

   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?

   10

   h) O número de aulas foram suficientes?

   8, para o básico, sim.

   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?

   10.

5) Cite os pontos positivos?

É mais prático, interessante, ~~completo~~.

6) Cite os pontos negativos?

Estudá-la sem aprender a ~~parte~~ maneira mais complexa, torna o aluno preguiçoso, que o leva a não querer estudar as outras partes e, por consequência, não compreender totalmente o assunto.

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio? Mas, na matéria em si, é ótima.

Com certeza. É necessário aumentar o nível de ensino nas escolas e formar indivíduos mais competentes e menos ignorantes.

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.

Os alunos possuem a capacidade de aprender o assunto no Ensino Médio, e, seria melhor se aprendesse. É importante ~~[illegible]~~ saber a necessidade da matemática, incitando a estudarem melhor, abrir mais a mente e tornarem-se mais competentes, valorizar as suas capacidades e fazer um futuro melhor.

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? masculino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
(X) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde?
4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras?
   10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem?
   sim 10
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara?
   10
   d) O conceito de limite foi compreendido?
   sim 10
   e) A ideia de derivadas ficou claro?
   sim 10
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida?
   10
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes?
   10
   h) O número de aulas foram suficientes?
   9
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação?
   10

5) Cite os pontos positivos?
o professoro tem paciencio com os alunos
6) Cite os pontos negativos?
derio Ter mais tempo de aula
7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
sim
8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
foram aulas otimas

H

Questionário para os alunos: levantamento de dados sobre os participantes da pesquisa

1) Qual a sua idade? 17 2) Qual o seu sexo? masculino
3) Você já conhecia o conteúdo ministrado: derivadas?
   (X) Não. Foi a primeira. ( ) Sim. Onde?____________________
4) Dê uma nota de 0 á 10 para as perguntas a seguir. Você também pode comentar ou sugerir cada item:
   a) As explicações formam claras? 10
   b) A didática das aulas facilitaram sua aprendizagem? 10
   c) A ideia de taxa de variação ficou clara? 10
   d) O conceito de limite foi compreendido? 10
   e) A ideia de derivadas ficou claro? 10
   f) A representação Geometricamente da Taxa de Variação Instantânea, ou derivada da função f, foi compreendida? 9
   g) Os problemas de máximos e mínimos foram interessantes? 10
   h) O número de aulas foram suficientes? 10
   i) Qual a sua auto avaliação no quesito participação? 9

5) Cite os pontos positivos?
o conhecimento desto conteudo ~~no ensino~~ para ajudar em uma faculdade, pode tambem ajudar resolver exercicios no ensino medio agora e muito mais

6) Cite os pontos negativos?
Não acho que tenha ponto negativo, pelo fato de ser algo acrescentado no nosso aprendizado

7) Você acha que a derivada possa ser incluída no ensino médio?
Sim pois é bem mais facil resolver questões com derivadas

8) Fique livre para expressar suas considerações finais.
Sobre a aula e ~~os~~ conteúdo achei muito legal e interessante, a forma de explicação da professora que tornou o conteúdo mais facil, e a interação dos graficos no computador