



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÉCNICAS PARA ANIMAÇÃO DE EQUAÇÕES

THYAGO ROBERTO OLIVEIRA SANTOS

Salvador - Bahia
FEVEREIRO DE 2020

TÉCNICAS PARA ANIMAÇÃO DE EQUAÇÕES

THYAGO ROBERTO OLIVEIRA SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.

Salvador - Bahia

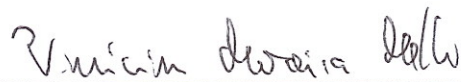
Fevereiro de 2020

Técnicas para Animação de Equações.

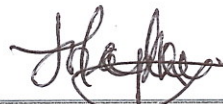
Thyago Roberto Oliveira Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 10/02/2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (orientador)
UFBA



Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
UFBA



Prof. Dr. Cláudia Ribeiro Santana
UESC

*A Deus, a minha família, aos meus professores, aos meus amigos e a todos que torceram
por mim.*

Agradecimentos

Enfim termino esta etapa da minha vida iniciada em 2017, etapa essa tão sonhada de fazer o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, mais conhecido como o PROFMAT.

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado o dom da vida e força para batalhar e conseguir findar esse momento tão esperado em minha vida.

Agradeço muito a minha família, nas figuras da minha mãe Zilda pelo dom da vida, minhas tias Conchita e Tune que são parte fundamental em minha vida, da minha vó Lia por tudo que fez e faz por mim até hoje, minha bisavó Maria de Lourdes e meu bisavô João de Deus que contribuíram muito para que conseguisse concluir esse momento tão único em minha história, me dando uma boa educação, me mostrando o poder da dignidade e honestidade que o ser humano deve ter em sua caminhada. Em especial, agradeço a minha madrinha Jamile, pois sem você não teria chegado onde estou hoje, muito obrigado mesmo, prometo ser fiel a você por toda a minha vida e a palavra que define o que sinto por você é agradecimento eterno e o sentimento é o amor, EU TE AMO!

Agradeço aos meus professores, começando com os do meu ensino médio que, sem sombra de dúvidas, sempre acreditaram em mim e me mostraram como deveria fazer para conquistar o caminho da felicidade deveria me dedicar aos estudos, em especial, agradeço a Israel (Meu Mestre), Vitor pelo grande espelho e lutador que foi, Silvio um grande pai, Hermes o lindão, Balbino um grande sábio e detentor de grandes momentos da minha história e meu queridíssimo Mannulo, hoje um amigo que sempre acreditou em mim e me mostrou que poderia sim chegar onde cheguei, meu muito obrigado do fundo do meu coração. Posteriormente conheci meus grandes espelhos profissionais que foram os meus professores da época da graduação, em especial, agradeço aos professores Antonio, João Maia e Moysés pelos ensinamentos e grande modelo de responsabilidade que me deram e que os sigo sempre em minhas aulas, também agradeço a minha professora Auxiliadora Pires, que também foi minha orientadora da especialização, muito obrigado pelos conselhos e dedicação de sempre e, em especial ao grande trio mais do que espetacular, que me ajudaram e muito a chegar onde estou, formado pelas excepcionais professoras Odete Amanda, Miriam Mascarenhas e Vânia Brito, não existem palavras para mensurar todo o

agradecimento que tenho por terem me ajudado a me tornar o professor que sou hoje, por todos os conselhos, dicas, dedicação, puxões de orelha, por me ajudarem nos conteúdos inerentes as disciplinas que me lecionaram e me preparando grandemente para o mercado de trabalho, muito obrigado por tudo mesmo, espero poder representá-las bem sempre, pois foram o grande pilar para conseguir chegar nesse momento. Por fim, aos meus professores do Profmat, que fizeram de mim um professor melhor, com mais capacidade de abstração sobre os diversos tópicos que aprendi, e meu agradecimento irá a todos, passando pela Mariana Cassol, Simone Moraes, Mathieu, Perfilino, Joilson, Joseph, Evandro, Marco Antonio, Rita e, em especial, ao meu orientador Vinícius Moreira Mello, que me deu a honra e o prazer em ser orientado por ele me dando várias dicas, conselhos e me mostrando o quão bom e instigante seria em ser orientado por ele, sempre sendo muito solícito em todos os momentos, do fundo do coração muito obrigado professor, serei eternamente grato por tudo.

Por fim, a todos os meus amigos, em especial aos do PROFMAT, que mostraram que com união, dedicação e amor por estudar Matemática que conseguiríamos chegar onde chegamos, com a finalização do nosso mestrado. Valeu amigos: Alex, Cláudio, Danilo, Diego, Emerson, Gabriel (o mestre das demonstrações), Guilherme, Isana, Jorge Sales, José Jorge Alfano, Lucas, Luis, Marcelo, Marcus, Rodrigo e a meu xará Thiago Emmanoel que foi um grande amigo e símbolo do nosso curso. Muito obrigado galera.

Meu muito obrigado do fundo do meu coração a todos que participaram direta ou indiretamente de tudo até aqui.

Avante!

*”A educação é a arma mais poderosa
que você pode usar para mudar o
mundo”.*

Nelson Mandela

Resumo

Esta dissertação apresenta uma proposta para o uso de animações no ensino de equações. Abordaremos fatos relevantes sobre sua importância para o ensino e destacaremos duas maneiras para criarmos animações de equações, sendo a primeira através das animações em *Stop Motion* e, posteriormente, através de uma LDE (Linguagem para Domínio Específico) que foi desenvolvida para o trabalho, denominada Anima \TeX . No decorrer da pesquisa e de sua aplicação, observamos que as animações podem ser um pilar primeiramente para os professores pelo fato de poderem construir materiais com qualidade diferenciada e, principalmente, para os alunos que serão parte importante no processo, visto que, além das aulas, a priori, mais “interessantes” pelo uso das animações, também serão criadores das suas através do primeiro método informado acima.

Palavras-chave: Animações; Anima \TeX ; *Stop Motion*.

Abstract

This dissertation features a proposal for the use of animations in the teaching of equations. We will address relevant facts about its importance for teaching and highlight two ways to create equation animations, the first through animations in *Stop Motion* and, later, through an LDE (Language for Specific Domain) that was developed for the work, called Anima \TeX . During the research and its application, we observed that animations can be a mainstay for teachers because they can build materials with differentiated quality and, mainly, for students who will be an important part in the process, since, in addition to classes, a priori, more “interesting” by the use of animations, will also be creators of theirs through the first method informed above.

Key words: Animations; Anima \TeX ; *Stop Motion*.

Sumário

Introdução	1
1 Importância das animações para o ensino	4
1.1 Importância das animações para o ensino de Matemática	4
1.2 Imagens Estáticas X Animações	6
1.3 Por que animar equações?	6
1.4 Técnicas para animações de equações	7
1.4.1 Softwares de Apresentação	7
1.4.2 Aplicativos de Geometria Dinâmica	8
1.4.3 Animações em <i>Stop Motion</i>	8
1.4.4 Linguagem para Domínio Específico - AnimaTeX	11
1.5 Stop Motion Studio ou AnimaTeX?	13
2 A produção da LDE AnimaTeX	15
2.1 A construção da LDE AnimaTeX	15
2.1.1 JavaScript	15
2.1.2 ObservableHQ	16
2.1.3 KaTeX	16
2.1.4 Anime.js	16
2.2 Como utilizar a linguagem AnimaTeX?	16
2.3 Descrição geral dos comandos	16
2.3.1 Estrutura de um comando	16
2.4 Comandos	17
2.5 O Planejamento de uma Animação	18
2.5.1 Exemplo de um Storyboard	18
2.5.2 Exemplo da sequência dos comandos no ObservableHQ da equação do Storyboard anterior	19
2.5.3 Passo-a-passo dos movimentos da animação acima	20
2.5.4 Imagens das Animações	20

3	Aplicações da AnimaTeX para construção de material didático	23
3.1	Quadrado da soma de dois termos	23
3.2	Produto da soma pela diferença de dois termos	24
3.3	Cubo da soma de dois termos	25
3.4	Solução geral de uma equação do primeiro grau	26
3.5	Adição de frações com denominadores diferentes	27
3.6	Solução geral de uma equação do segundo grau (Fórmula de Báscara)	28
3.7	Teorema de Wilson	29
3.8	Pequeno Teorema de Fermat	30
4	Aplicação da técnica de animação em <i>Stop Motion</i> em equações	32
4.1	Importância do conhecimento prévio do conteúdo	32
4.2	Ideia da implantação da atividade	32
4.3	Organização das Equipes	33
4.4	Material utilizado e sua função	33
4.5	Aspectos positivos da atividade	33
4.6	Aspectos negativos da atividade	34
4.7	Alguns relatos de estudantes sobre essa atividade	34
4.8	Imagens dos estudantes construindo as animações	35
5	Conclusão	38
	Referências Bibliográficas	40

Introdução

Neste trabalho investigaremos as possibilidades do uso de animações de equações no ensino de matemática seja para a criação de material didático em forma de vídeos ou como atividades que os próprios alunos possam desenvolver.

Devemos deixar claro que quando usamos animações para “demonstrar” uma determinada propriedade não se trata necessariamente de uma demonstração formal, entretanto, acreditamos que uma demonstração visual bem feita pode ser até mais útil do ponto de vista didático. O ponto importante que tentaremos discutir aqui é que uma demonstração visual depende de instâncias, ou seja, dos casos particulares, escolhidos para a visualização, pois eles devem ser suficientes para capturar o padrão global, como veremos mais a frente em exemplos.

Para delimitar nossas animações, usaremos álgebra básica na forma de equações e de algumas identidades algébricas vistas nos ensino fundamental e/ou médio e os teoremas de Wilson e o Pequeno Teorema de Fermat vistos na disciplina Aritmética do Profmat.

No primeiro capítulo discutiremos inicialmente sobre a importância do ensino através de animações de forma mais geral, podendo ser um grande atrativo no aspecto didático para o ensino e gerar um aprendizado mais significativo.

Como [3] bem aborda em seu trabalho cujo título é “O Uso de Animações no Ensino de Matemática”, destacamos que:

Esse trabalho contribuiu muito no meu enriquecimento enquanto docente, pois proporcionou um visão diferente da opinião do aluno. Através desse trabalho, pude ouvir diferentes opiniões de alunos a respeito do ensino da matemática e das suas dificuldades. Muitas dessas opiniões falavam justamente sobre como eles achavam a matéria chata e serviram como choque para buscar algo diferente que despertasse o interesse deles.

A partir disso, o referido trabalho de [3] surgiu como um grande horizonte no que tange a ideia principal do meu trabalho pois, como bem destaca acima, os próprios estudantes concluíram que a matemática pode sim ser uma disciplina atrativa, apesar de complexa, desde que o docente desenvolva atividades diferenciadas.

Investigaremos e destacaremos a importância das animações de equações para a contribuição no ensino de maneira mais significativa e fazer com que o aluno seja parte destacada no processo, pois, como veremos mais a frente os próprios estudantes produzirão animações em *Stop Motion*.

Em seguida será feito um comparativo entre imagens estáticas e animadas, destacando que as animações realmente podem ser eficazes para a aprendizagem. Por fim, informarei quatro possíveis técnicas que podem ser utilizadas para animar equações, sendo elas através de: Softwares de Apresentação, tais como o Power Point ou o Prezi, softwares ou aplicativos de geometria dinâmica, em especial o GeoGebra, ou ainda com as animações em *Stop Motion* através do aplicativo Stop Motion Studio e, por fim, através da linguagem para domínio específico, chamada Anima \TeX . Serão destacadas as duas últimas técnicas de animação citadas acima, pois sua utilização é mais simples e eficaz para o referido trabalho. Finalizaremos o capítulo com um comparativo entre as duas últimas técnicas destacando onde cada uma dessas técnicas pode ser melhor utilizada e informando seus aspectos positivos e negativos.

No segundo capítulo será dado ênfase ao método de animação Anima \TeX , informando primeiramente os quatro pilares de sua construção e como se faz para utilizá-lo. Em seguida será descrito como o utilizaremos de modo mais geral explicitando seus comandos e elementos. Logo após será exemplificado uma animação de uma equação bem simples com o seu passo-a-passo produzido no Anima \TeX e indicando uma maneira prática para ser feito um planejamento prévio para sua construção, essa sendo feita com o auxílio de um *Storyboard*. Por fim, através de imagens, destacarei alguns momentos da animação feita e o que se faz necessário para criar tais movimentos.

No terceiro capítulo será demonstrado algumas propriedades algébricas de maneira mais formal destacando as propriedades utilizadas e, através de casos particulares, ilustraremos o Pequeno Teorema de Fermat e o Teorema de Wilson, de modo a conseguir definir o seu padrão global. A partir das demonstrações construiremos suas respectivas animações onde será descrito os passos de para sua construção no Anima \TeX mostrando, para isso, quais comandos foram utilizados e suas respectivas funções.

No quarto capítulo será descrito uma atividade feita em sala de aula através da técnica de animação em *Stop Motion* com meus alunos de três turmas diferentes de sétimo ano, com os mesmos criando as animações. Destacarei as facilidades e dificuldades que os mesmos tiveram para construí-las, os materiais utilizados para as devidas animações e informarei algumas opiniões dos estudantes sobre essa atividade.

Por fim, no quinto capítulo concluiremos a proposta do ensino de equações através de animações destacando algumas peculiaridades de cada uma das etapas e, mostrando que os dados de aprendizagem foram satisfatórios para um melhor entendimento dos

conteúdos pelos estudantes e mostrar que tanto no meu trabalho quanto no de [3], o que ficou de mais importante é que os estudantes realmente se empenham de uma melhor maneira quando se aprende através de atividades lúdicas.

Capítulo 1

Importância das animações para o ensino

Neste capítulo, abordaremos a importância do uso de animações para o ensino de forma geral destacando as animações de equações no ensino de Matemática. Abordaremos, em especial, as animações feitas em *Stop Motion* e usando uma Linguagem para Domínio Específico, denominada AnimaTEX. Apresentaremos inicialmente quatro técnicas que podem ser utilizadas, dentre as quais, enfatizaremos as duas técnicas citadas acima, onde a primeira também será fruto de uma aplicação em sala de aula para estudantes de sétimo ano e a segunda será nossa técnica principal para construção de material didático para o ensino e, no capítulo posterior será detalhada toda a forma para qualquer docente que se interesse, possa utilizá-la. Por fim, faremos um comparativo entre as mesmas e destacaremos fatores positivos e negativos de cada uma delas.

1.1 Importância das animações para o ensino de Matemática

Segundo [3], “O uso de animações em sala de aula tem como propósito tornar o aprendizado mais agradável e eficiente. As animações também proporcionam um ambiente mais lúdico na sala de aula, proporcionando uma melhora no aprendizado”, ou seja, as animações trazem consigo um atrativo para as aulas, seja animando, estimulando, inspirando ou aticando os estudantes pela sua inovação, e, no caso específico do referido trabalho, as construções serão feitas para tornar as aulas mais atrativas, pensando no aspecto didático e as mesmas serão feitas com o auxílio tecnologia, ferramenta essa muito utilizada pelos adolescentes nos dias de hoje, perfazendo uma aula diferenciada.

Atualmente, o cenário mundial dos produtores de vídeos cresce grandemente, em plataformas como o YouTube, e o número de canais que produzem animações em ma-

temática, seja para demonstrar alguma propriedade matemática, ou para transformar objetos, ou ainda para fazer um determinado ponto se mover em uma curva de maneira a construir determinado gráfico, também vem crescendo bastante, fazendo com que novos materiais sejam construídos e mostrando diferentes formas de se apresentar um determinado material já conhecido. Destacamos três canais importantes para o surgimento da ideia de animar para o ensino de matemática, que foram: [Mathologer](#), [3Blue1Brown](#) e o [Numberphile](#). Na figura 1.1, podemos ver um quadro do vídeo do canal [3Blue1Brown](#) onde o mesmo explica como se calcula a área de um círculo, onde a animação surge como elemento que favorece tanto o entedimento quanto o interesse.

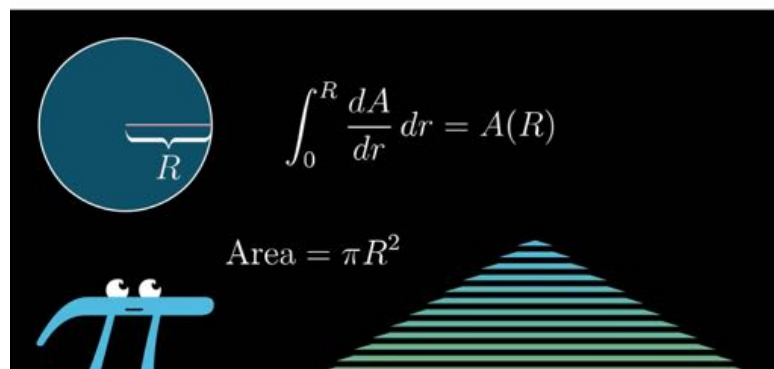


Figura 1.1: Imagem de uma animação mostrando a ideia de como encontrar a área de um círculo através do cálculo de uma integral

Ainda sobre a importância das animações como agentes modificadores no ensino, por assim dizer, [3] afirma que: "Uma das principais vantagens está na possibilidade de os alunos produzirem as animações, deixando o papel passivo na sala de aula para assumir o papel de produtores.", portanto, além de ser algo teoricamente atrativo para a sala de aula, o uso de animações para o ensino será também um mecanismo transformador para que os estudantes produzam algum produto e, conseqüentemente, tenham um melhor entendimento nos conteúdos abordados, visto que o mesmo terá que saber resolver as equações primeiramente para depois conseguir produzir o seu produto.

De acordo com [6], "a animação fornece um modelo externo para uma representação mental", portanto, com o auxílio das animações, entende-se que seu uso será algo fixador na mente dos estudantes, visto que, a partir da lembrança da animação, os passos a serem feitos posteriormente sejam sempre postos em prática sem dificuldade.

Daí conclui-se que as animações servem como auxílio para o melhor aprendizado dos estudantes, sem menosprezar as teorias, definições e resolução de exercícios que são técnicas eficazes de aprendizado, porém não necessariamente dinâmicas. As animações servem essencialmente para tornar mais significativo e concreto os assuntos de modo a

fazer com que o aluno entenda melhor as regras e particularidades do conteúdo exposto e que consiga reproduzi-las posteriormente.

1.2 Imagens Estáticas X Animações

Segundo [6], temos que:

Há várias razões para esperar que os formatos de representação visual, animações e imagens estáticas possam ser úteis para o aprendizado. Quanto às animações, pode-se argumentar que elas ajudam a visualizar mentalmente um processo ou um procedimento, resultando em uma redução da carga cognitiva em comparação a uma situação na qual o processo ou o procedimento precisa ser reconstruído a partir de uma série de quadros estáticos. Além disso, em quadros estáticos, muitas vezes sinais de sinalização mais ou menos abstratos, como setas ou realces, devem ser interpretados e integrados à informação pictórica. Isso impõe ainda mais carga cognitiva e pode levar a erros de interpretação e, portanto, a um modelo mental deficiente (apud, Lewalter, 1997). Por outro lado, uma animação não fornece informações permanentes, mas transitórias[...]

Pode-se perguntar se o uso de animações realmente traz melhorias no aprendizado, visto que, ao menos pelo que pesquisamos, não há estudos científicos que comprovem a eficácia do ensino através desse mecanismo. Entretanto, por ser uma ferramenta aplicável em sala de aula e por sua simplicidade, que serão vistas mais a frente, o uso de animações se apresenta como mais uma ferramenta disponível ao professor para que ele possa atingir seus objetivos, pois seja com o Stop Motion Studio, com o AnimaTeX ou com qualquer outro instrumento, é inegável que as animações trazem um elemento lúdico para o ensino, tornando nossas aulas mais interessantes e melhorando o entendimento dos estudantes.

1.3 Por que animar equações?

Segundo [6], "é razoável esperar que faça diferença se o tópico a ser aprendido é explicitamente representado na animação ou não, ou seja, se a animação tem uma função representacional e não decoracional (apud, Carney & Levin, 2002)", logo, como em diversos conteúdos de matemática, nós docentes, em especial os da educação básica, percebemos as dificuldades inerentes dos estudantes em resolver problemas simples envolvendo as diversas operações e, ainda mais quando a partir do sétimo ano introduzimos o estudo das equações de primeiro grau. Por isso, com o auxílio das equações pretendemos fazer com que o alunado, em sua maioria, consiga abstrair e entender o necessário para

fazer com que os mesmos consigam resolver os problemas inerentes dos referidos assuntos, visto que é de suma importância para sua vida escolar.

Portanto, a partir das animações, pretendemos que os discentes consigam notar as características das animações e, a partir de sua visualização animada através de movimento consigam construir os passos necessários para generalizar seus métodos de resolução.

1.4 Técnicas para animações de equações

Nesta seção destacaremos os métodos propostos para animar equações, mostrando as ferramentas básicas para fazermos as animações e, nas duas últimas, destacaremos todos os detalhes e efeitos que suas funções geram ao serem feitas suas respectivas produções.

1.4.1 Softwares de Apresentação

O Power Point e o Prezi, muito utilizados em apresentação de trabalhos acadêmicos tem, em uma de suas funções, a de Animações, que, com bastante criatividade podemos fazer animações de equações. Entretanto, como a principal ideia do trabalho é de fazer animações em sala de aula, essa ferramenta não é muito atrativa, pois se faz necessário algumas ferramentas que não são muito explícitas para sua utilização, e é mais interessante ser feita usando computadores, o que para uma sala de aula com 25 ou mais alunos é um pouco difícil devido as situações particulares que as escolas públicas evidenciam atualmente.

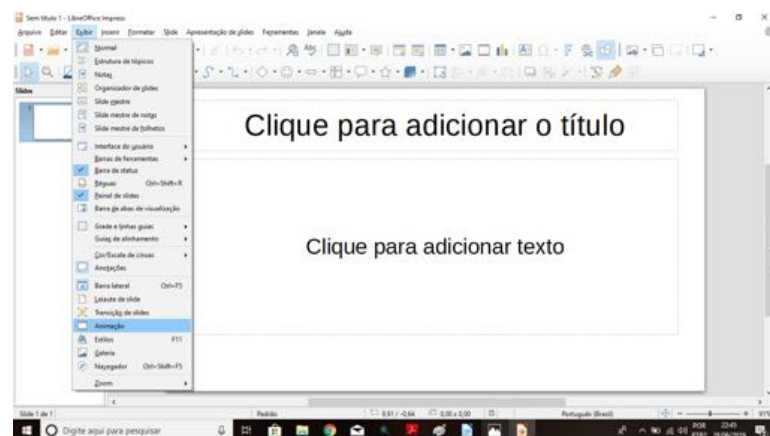


Figura 1.2: Função Animação do Power Point - utilizada para fazer os textos surgirem com alguns efeitos e de forma sequencial.

1.4.2 Aplicativos de Geometria Dinâmica

Existem alguns aplicativos de Geometria Dinâmica, dentre os quais destacaremos o GeoGebra, que é um aplicativo livre muito utilizado em computadores ou tablets para diversas funções de geometria, álgebra, estatística, dentre outras. Pensando em animações para o presente trabalho, o GeoGebra tem algumas funções específicas para animações, dentre as quais, existe o função Controle Deslizante que pode fazer uma circunferência aumentar até um determinado raio e depois diminuir até não aparecer mais, ou ainda fazer os termos de uma equação aparecerem ou desaparecerem em um determinado intervalo de tempo, sendo essa parte relacionada a este trabalho, que é de fazer animações através do movimento para resolvermos equações. Entretanto, esse é um método também trabalhoso comparado com os posteriores e, pensando na construção de material didático, seria necessária muita criatividade para o aplicarmos e, pensando numa aplicação em sala de aula, também seria necessário ter computadores para uma melhor construção, e essa não é uma realidade próxima às escolas públicas como destacamos anteriormente. Ou seja, essa técnica não foi utilizada para fazer animações de equações pela sua complexidade e também pelo fato de ser mais utilizada para demonstrações envolvendo tópicos de Geometria como [3] faz em seu trabalho em alguns momentos.

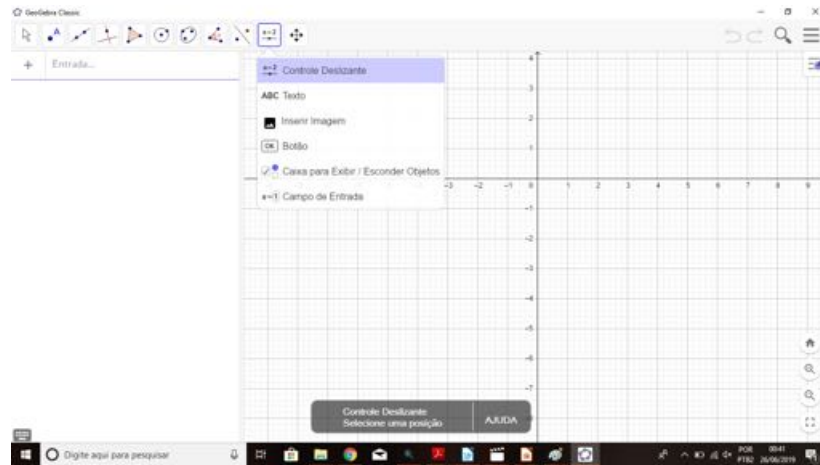


Figura 1.3: Função Controle Deslizante do GeoGebra - utilizado para fazer objetos se moverem ou crescerem/diminuírem de modo sequencial.

1.4.3 Animações em *Stop Motion*

As animações em *Stop Motion* são constituídas de uma sequência de fotos, chamadas de quadros, para construir a noção de movimento. Esses quadros devem ser tiradas de um local fixo de modo que o termo a ser animado sofra pequenas alterações de um quadro ao outro para dar a maior intuição de realidade. Para cada segundo do vídeo é necessário mais ou menos 24 quadros para dar a ideia de movimento.

Pensando em construção de material didático, a técnica de animação em *Stop Motion* faz necessário o uso de outros dois aplicativos, que são: *Team Viewer* e o *Quick Support*, que devem ser baixados tanto no celular quanto no computador. Eles servem para que o computador seja um controlador das ações do celular que, neste caso, é tirar as fotos. Por fim, também se faz necessário que o celular esteja num local rígido para não se mexer. Para isso, utiliza-se um tripé ou algo do tipo.

A seguir, mostraremos através de fotos alguns momentos de algumas animações de equações usando a técnica acima, destacando o material utilizado e, posteriormente, os aspectos positivos dessa técnica para produção de material didático, ou de uma possível aplicação em sala de aula.

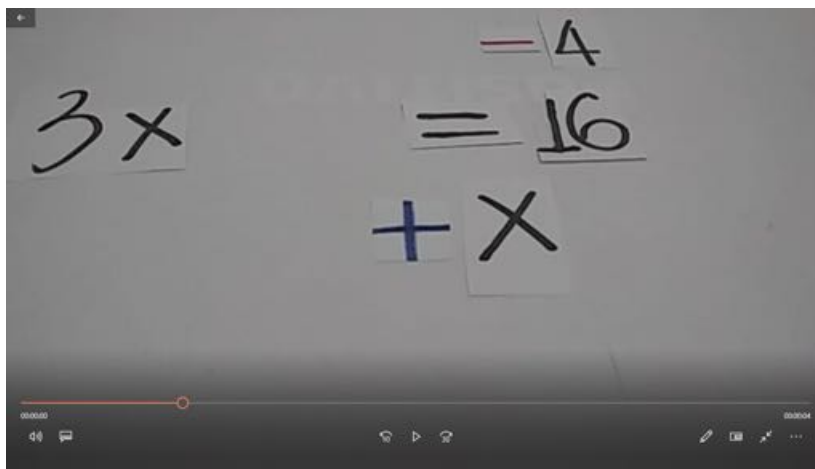


Figura 1.4: Primeiro teste - Técnica do *Stop Motion* ilustrando os termos se movendo até mudar de membro onde muda a cor do sinal para dar destaque.

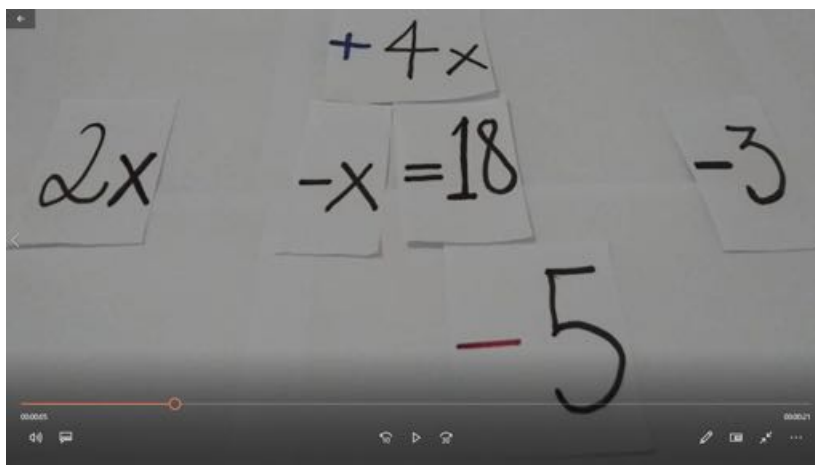


Figura 1.5: Segundo teste - Técnica do *Stop Motion* em situação similar a anterior.

Materiais utilizados no primeiro e segundo testes:

1. Folha de papel ofício;

2. Pilotos de cores diferentes;
3. Material rígido, no caso uma caixa, para por as peças (termos da equação) sobre o mesmo;
4. Celular;
5. Computador;
6. Tripé.

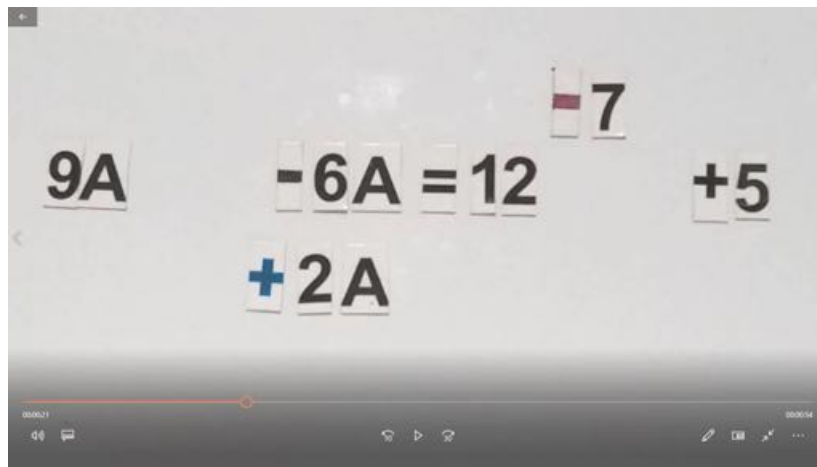


Figura 1.6: Terceiro teste - Técnica do *Stop Motion* em mais um caso similar aos descritos acima, entretanto com outros materiais.

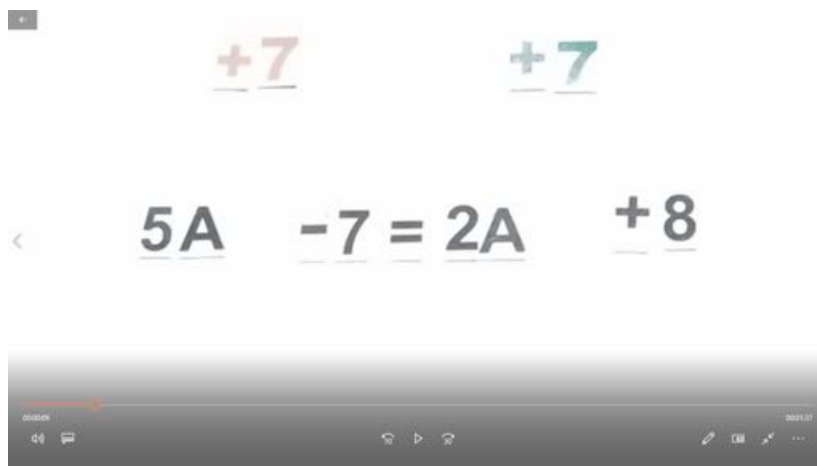


Figura 1.7: Quarto teste - Técnica do *Stop Motion* ilustrando os termos aparecendo simultaneamente em ambos os membros da equação, para dar a ideia da propriedade do Colapso Aditivo, definido mais a frente.

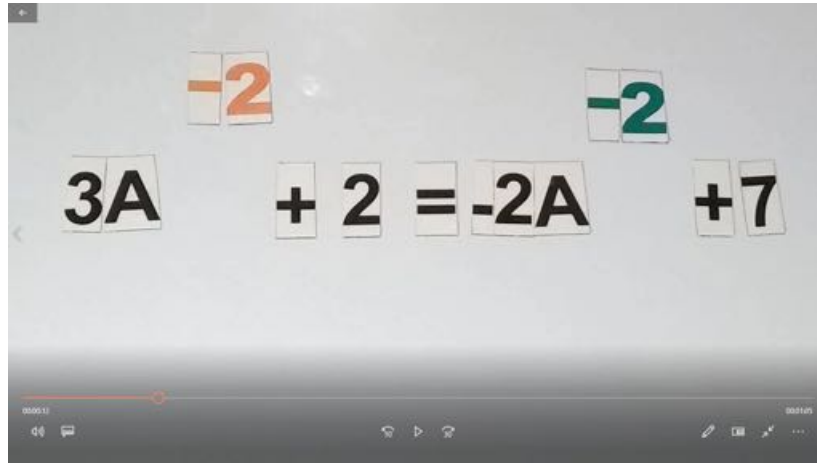


Figura 1.8: Quinto teste - Técnica do *Stop Motion* em caso similar ao caso descrito acima porém com uma iluminação mais aprimorada

Materiais utilizados no terceiro, quarto e quinto testes:

1. Quadro branco magnético;
2. Peças (letras e números) imantadas;
3. Duas luminárias de LED;
4. Celular;
5. Computador;
6. Tripé.

Conclusão da animação em *Stop Motion*

Ao final desses testes, notamos que o uso das animações em *Stop Motion* para construir material didático para utilização em sala de aula é problemático pela necessidade de materiais muito específicos e, ainda assim, as animações não são tão realistas. Os movimentos que foram feitos não geraram um material bom, pois para obtermos maior suavidade no movimento se faz necessário um grande número de passos intermediários e, com os materiais utilizados, isso se torna muito difícil.

1.4.4 Linguagem para Domínio Específico - Anima \TeX

Por fim, apresentaremos a técnica principal de animação que utilizaremos no presente trabalho para construção de material didático o ensino, através da LDE (Linguagem para Domínio Específico) denominada Anima \TeX .

Para usarmos essa técnica de animação, faz-se necessário inicialmente que se crie uma conta no *site* **ObservableHQ** [2], e que, posteriormente, seja importada para sua respectiva conta a LDE.

A referida LDE AnimaTeX foi feita para descrever os passos de uma animação, para isso foi usado o Java Script em sua criação. Para descrever os passos de uma animação foram criados diversos comandos, utilizados para fazer aparecer ou desaparecer números ou expressões, se movimentar, duplicar, mudar de cor, dentre outros.

A seguir, mostraremos uma equação simples e posteriormente seus termos se aparecendo ou se movimentando, informando para isso o comando utilizado.

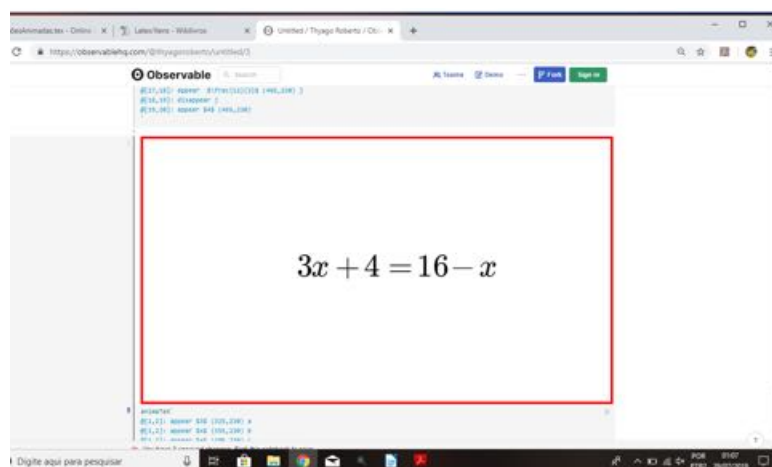


Figura 1.9: Parte inicial da animação com o surgimento da equação através do comando **appear**.

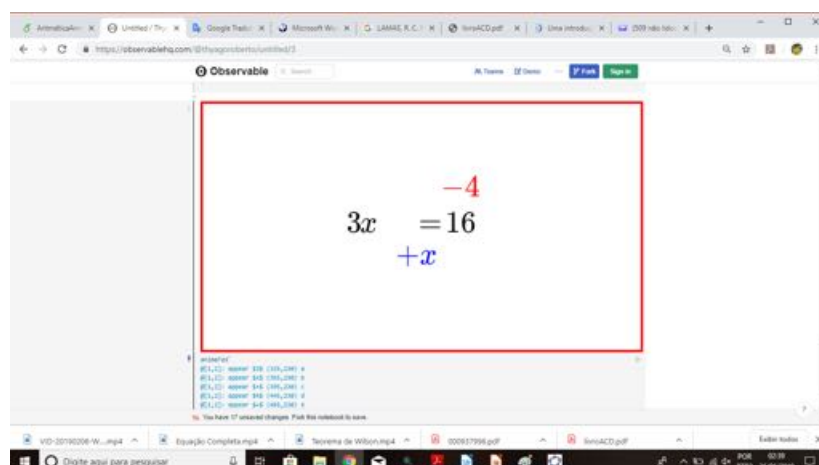


Figura 1.10: Segunda etapa da animação fazendo o movimento dos termos de cada membro e mudando de cor para dar realce para isso, utilizamos os comandos **moveTo** e **disappear** e **color**.

Conclusão da animação com o Anima \TeX

Daí, nota-se que a técnica acima citada será a base para a construção de nosso material didático pela questão da qualidade do material produzido e pela “facilidade” em produzir esses materiais, como veremos no capítulo posterior, onde mostraremos os passos para a construção de uma animação.

1.5 Stop Motion Studio ou Anima \TeX ?

A priori, as duas técnicas são bastante interessantes e relativamente fáceis de serem utilizadas, porém, a questão a ser discutida para tal utilização será: Qual o objetivo da animação?

As animações em *Stop Motion* são, como mostradas anteriormente, bem fáceis de serem produzidas, visto que só se faz necessário o uso de um celular para instalar o aplicativo Stop Motion Studio, um computador (se quiser fazer as animações com mais qualidade, utilizando, no nosso caso, os aplicativos *Team Viewer* e o *Quick Support*, softwares livres para serem baixados, para que o computador comande as ações do celular) e a construção das peças (números e letras). Entretanto, notou-se que a qualidade da produção do material didático não é satisfatório, fazendo um material de baixa qualidade para ser utilizado como apoio em sala de aula como construção de conhecimento. Por outro lado, como um instrumento de aplicação em sala para que o aluno produza pequenos vídeos, a animação em *Stop Motion* se destacou no aspecto pedagógico pela simplicidade do processo, desde a concepção de uma ideia à geração do produto final, sendo também um software livre e de fácil acesso.

Já a LDE Anima \TeX é mais complexa, a priori, em ser utilizada, visto que, inicialmente precisa-se saber quais são as ferramentas necessárias para que se possa utilizá-la e, a partir disso saber toda a estrutura da programação e comandos necessários para poder usá-la, como veremos no próximo capítulo detalhadamente. Tendo essas ferramentas e estando conectado à internet, fazer as animações é relativamente tranquilo de ser feito, pois, a partir daí será uma espécie de “jogo de comandos”, fazendo os termos aparecerem ou desaparecerem de tal posição, duplicarem, se moverem, dentre outros, e, como visto acima, o material didático produzido é de excelente qualidade, se comparado com a técnica de animação em *Stop Motion*. Porém, como reiterado anteriormente, para serem construídos esses materiais, é necessário estar conectado a um servidor, ou seja, pensando em aplicar essa técnica em sala de aula para os estudantes produzirem as animações se torna um processo quase inviável pela necessidade da internet, que é quase inexistente em nossas escolas públicas.

Logo, podemos dizer que essas técnicas são “complementares”, pois o método de

animação em *Stop Motion* é mais utilizável para ser utilizado em sala de aula para que os estudantes criem suas animações, como veremos posteriormente em uma aplicação dessa técnica com minhas turmas do sétimo ano como ferramenta para resoluções de equações. Já para construção de material didático para sala de aula, não é suficiente, pela baixa qualidade das animações e trabalho muito longo. Por outro lado, a LDE AnimaTeX é a melhor técnica para construção desse material para apoio as aulas exatamente por sua qualidade, mas não seria aplicável em sala de aula para os estudantes fazerem as respectivas animações pela provável situação da falta de internet e computadores nas escolas públicas.

Capítulo 2

A produção da LDE AnimaTeX

Neste capítulo, abordaremos todos os detalhes da construção da Linguagem para Domínio Específico AnimaTeX, desde como foi concebida até os elementos necessários para sua utilização, destacando a estruturação padrão dos comandos com seus respectivos parâmetros, estes utilizados para movimentar os termos de uma equação, fazendo-os, por exemplo, surgir, desaparecer, duplicar, reaparecer, sumir, dentre outros. A partir dos comandos apresentados, ilustraremos um exemplo bem simples de uma animação pronta no AnimaTeX. Um fator de grande importância é a construção do passo-a-passo de nossas animações, utilizando a técnica de *Storyboards*. Por fim, através de fotos, ilustrarei alguns momentos da animação da equação citada como exemplo.

2.1 A construção da LDE AnimaTeX

Nessa seção destacaremos como a ambiente de animação AnimaTeX foi criado, de modo a destacar os elementos para sua geração, que foram, em ordem de importância o **JavaScript** [4], seguido do **ObservableHQ** [2], do **KaTeX** [1] e, por fim, do **Anime.js** [5].

De modo resumido, foram unidas essas quatro ferramentas acima citadas para a criação da linguagem de domínio específico AnimaTeX.

2.1.1 JavaScript

Por [7], temos que o JavaScript "é uma linguagem de programação que foi desenvolvida por Brendan Eich enquanto trabalhava na Netscape Communications Corporation em 1995. Seu principal objetivo era tornar os sistemas da *web* mais interativos. Ela permite a implementação de itens complexos nas páginas da web e também cria conteúdo que se atualiza dinamicamente, controla multimídias, imagens animadas, dentre outros".

2.1.2 ObservableHQ

A página da internet ObservableHQ [2] é a ferramenta com a qual fizemos a linguagem de programação específica em JavaScript do presente trabalho. É uma plataforma *online* que faz toda a programação através do próprio navegador, por isso, não necessita de um programa específico que necessite ser baixado no computador, ocupando determinado espaço da memória. Se faz necessário que o computador esteja conectado a um servidor para poder utilizar a referida ferramenta.

2.1.3 KaTeX

Desenvolvido inicialmente pela *Khan Academy*, o KaTeX é uma biblioteca de JavaScript utilizada nos navegadores para descrever textos matemáticos do \LaTeX , sendo essa a ferramenta que utilizamos para inserir as fórmulas no Anima \TeX .

2.1.4 Anime.js

O Anime.js é uma biblioteca de animação em JavaScript. Essa foi a ferramenta que inserimos ao Anima \TeX para conseguirmos fazer as animações (termos se moverem, duplicarem, dentre outros).

2.2 Como utilizar a linguagem Anima \TeX ?

Para utilizar a LDE Anima \TeX , é necessário primeiramente que seja aberta uma conta na página <https://observablehq.com/> e, posteriormente, que seja importada para sua página a referida linguagem pois é nela que será disponibilizada todos os comandos de modo que possa ser utilizada a referida linguagem de domínio específico.

2.3 Descrição geral dos comandos

Nesta seção será descrita a estrutura geral de um comando com seus respectivos parâmetros.

2.3.1 Estrutura de um comando

Em geral, um comando Anima \TeX possui a seguinte estrutura:

```
1 @[ti,tf]: comando parametro1 parametro2 ...
```

Cada comando ocorre entre os instantes t_i e t_f e pode depender de um certo número de parâmetros. Por exemplo, o comando

```
1 @[4,6]: appear $$x$ (100,100) a
```

Faz aparecer o texto x , escrito entre símbolos de cifrão por ser uma fórmula matemática, na posição (100,100), num determinado intervalo de tempo que, neste caso, começa a aparecer no quarto segundo até surgir completamente no sexto segundo, e atribui a este texto o nome a para uso posterior. Vejamos a seguir a lista completa de comandos disponíveis.

2.4 Comandos

Nesta seção serão apresentados os comandos criados, qual a função de cada um deles e como utilizá-los.

appear - faz o texto em L^AT_EX aparecer na posição (x, y) , dada em pixels, e dá ao texto o nome n , para referência posterior.

```
1 @[ti,tf]: appear $tex$ (x,y) n
```

disappear - faz o texto de nome n desaparecer.

```
1 @[ti,tf]: disappear n
```

reappear - faz o texto de nome n reaparecer.

```
1 @[ti,tf]: reappear n
```

clone - duplica o texto de nome n , criando uma cópia chamada n' .

```
1 @[ti,tf]: clone n
```

move - faz o texto de nome n se mover kx unidades para a direita e ky unidades para baixo.

```
1 @[ti,tf]: move n (kx,ky)
```

moveTo - faz o texto de nome n se mover para a posição absoluta (x, y) .

```
1 @[ti,tf]: moveTo n (x,y)
```

group - agrupa os textos de nomes a b c , criando um novo texto z

```
1 @[ti,tf]: group a b c
```

swap n m h - troca os textos n e m de posição, subindo h unidades e descendo h unidades durante o movimento.

```
1 @[ti,tf]: swap n m h
```

scale - faz o texto n esticar ou encolher por um fator k .

```
1 @[ti,tf]: scale n k
```

clear all - apaga tudo entre os instantes $[t_i, t_f]$.

```
1 @[ti,tf]: clear all
```

color - muda a cor do texto n .

```
1 @[ti,tf]: color n red|blue|green
```

2.5 O Planejamento de uma Animação

No decorrer da construção das animações ficou claro que se faz necessário um planejamento prévio para a construção da animação e, para isso, usaremos a técnica da construção de Storyboards, como ilustrado abaixo, para auxiliar na construção do passo a passo de uma animação.

2.5.1 Exemplo de um Storyboard

Nesta seção ilustraremos o exemplo de um storyboard de uma equação do primeiro grau com uma variável, feita para termos a ideia do que precisaremos fazer para animar a referida equação.

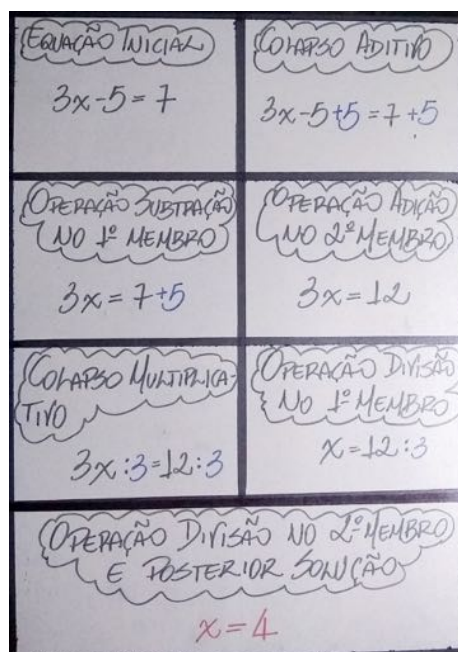


Figura 2.1: Storyboard da equação do primeiro grau: $3x - 5 = 7$

No Storyboard acima, foram “criados” alguns termos para facilitar a operação descritas no passo-a-passo da construção do mesmo, dentre as quais, destacamos:

Colapso Aditivo - é a operação de adição ou subtração feita simultaneamente em membros de uma equação;

Colapso Multiplicativo - é a operação de multiplicação ou divisão feita simultaneamente em ambos os membros de uma equação.

2.5.2 Exemplo da sequência dos comandos no ObservableHQ da equação do Storyboard anterior

A seguir, mostraremos, utilizando a LDE AnimaTeX, o passo-a-passo da utilização dos comandos para animar a referida equação acima e logo abaixo seguirá o link para visualização do vídeo na íntegra.

```

1 animaTeX ‘
2 @[0,2]: appear $3x$ (325,230) a
3 @[0,2]: appear $-5$ (405,230) b
4 @[0,2]: appear $=$ (515,230) c
5 @[0,2]: appear $7$ (585,230) d
6 @[2,3]: appear $+5$ (395,0) e
7 @[2,3]: appear $+5$ (615,0) f
8 @[2,3]: color e red
9 @[2,3]: color f red
10 @[3,4]: moveTo e (405,230)
11 @[3,4]: moveTo f (615,230)
12 @[4,5]: disappear b
13 @[4,5]: disappear e
14 @[5,6]: moveTo a (425,230)
15 @[6,7]: disappear d
16 @[6,7]: disappear f
17 @[6,7]: appear $12$ (585,230) i
18 @[8,9]: appear $:3$ (445,0) g
19 @[8,9]: appear $:3$ (665,0) h
20 @[8,9]: color g green
21 @[8,9]: color h green
22 @[9,10]: moveTo a (355,230)
23 @[9,10]: moveTo g (435,230)
24 @[9,10]: moveTo h (665,230)
25 @[10,11]: disappear a
26 @[10,11]: disappear g
27 @[11,12]: appear $x$ (465,230)
28 @[12,13]: disappear i

```

```

29 @[12,13]: disappear h
30 @[13,14]: appear $4$ (585,230)
31 '

```

Link do vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=Flq4Vl8-6p4&feature=youtu.be>

2.5.3 Passo-a-passo dos movimentos da animação acima

A seguir informaremos em cada intervalo de segundo o quais são os movimentos que estão sendo gerados na animação acima.

1. Nos dois primeiros segundos, através do comando **appear**, faço aparecer os termos iniciais da equação em suas posições específicas e as nomeio com letras diferentes para uma referência posterior;
2. Posteriormente, faço aparecer mais acima dois termos idênticos para destacar a ideia do Colapso Aditivo e nesse mesmo tempo, os destaco com uma cor diferente usando, para isso, os comandos **appear** e **color**;
3. Daí, movo os termos inseridos anteriormente em cada um dos membros da equação, e faço as devidas operações usando, para isso, os comandos **moveTo**, **disappear** e **appear**;
4. Por fim, de maneira similar ao passo 2, faço também aparecer mais dois outros termos idênticos agora para destacar a propriedade do colapso multiplicativo e, em seguida, de maneira similar ao passo 3, movo os referidos termos e faço as devidas operações destacadas, usando os mesmos comandos dos passos 2 e 3, finalizando a animação com sua solução.

2.5.4 Imagens das Animações

Por fim, mostraremos como os termos da equação ficam no ObservableHQ através das imagens de alguns momentos, destacando o comando e o que acontece com o mesmo na animação.

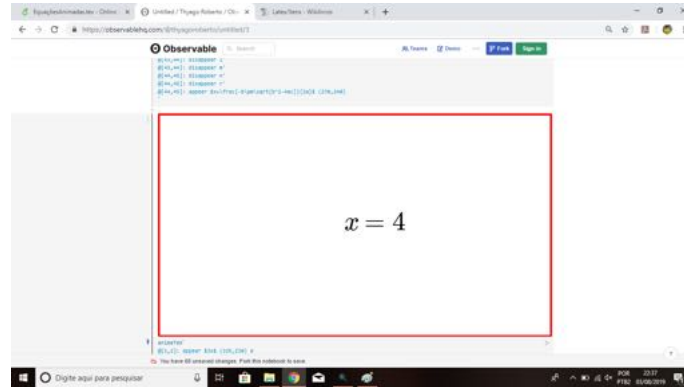


Figura 2.5: Solução Final - após a operação de divisão nos dois membros fiz desaparecer os termos anteriores, através do comando **disappear** e, em seguida, com o comando **appear** fiz surgir os termos finais para solução da equação.

Capítulo 3

Aplicações da Anima \TeX para construção de material didático

Neste capítulo demonstraremos algumas identidades algébricas de modo mais formal e ilustraremos dois teoremas vistos na disciplina Aritmética para valores específicos destacando suas propriedades. Logo abaixo descreveremos como essas propriedades podem ser transformadas em movimento usando o Anima \TeX sendo destacado os comandos utilizados e, por fim, estará o link com a animação produzida e publicada no YouTube.

3.1 Quadrado da soma de dois termos

Sejam a e b números reais. Então

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) \quad (\text{Def. Potência}) \quad (1)$$

$$= a(a + b) + b(a + b) \quad (\text{Distrib. à Esquerda}) \quad (2)$$

$$= aa + ab + ba + bb \quad (\text{Distrib. à Esquerda}) \quad (3)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 \quad (\text{Def. Potência e Comutatividade}) \quad (4)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 \quad (1+1=2) \quad (5)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Introduzimos cada termo separadamente, desde o primeiro parênteses até o último e fazemos os aparecer simultaneamente, através do comando **appear**;
2. Fazemos o expoente desaparecer através do comando **disappear** e, simultaneamente duplicamos o termo $(a+b)$ através do comando **clone** e, em seguida, com o comando **move** para separar os termos, isso sendo feito para enfatizar a primeira propriedade utilizada, que é a definição da potência;

3. Em seguida duplicamos o termo a através do comando **clone** e lhe damos uma cor diferente através do comando **color** para poder movê-lo através do comando **move**, isso feito para destacar a propriedade distributiva que, a partir dela, aparecerão os termos a^2 e $+ab$ logo abaixo através do comando **appear**;
4. Fazemos os termos a^2 e $+ab$ se moverem para a esquerda através do comando **moveTo** organizando o espaço para os próximos termos aparecerem, estes feitos através da distributiva do termo b , feito de maneira análoga ao item anterior, para aparecerem os termos $+ba$ e $+b^2$;
5. Posteriormente movemos os novos termos para a posição com a qual estava o produto $(a + b)(a + b)$, isso feito através do comando **moveTo** e, simultaneamente, fazemos esse produto desaparecer através do comando **disappear** para destacar a equivalência das duas expressões;
6. Logo após fazemos o termo $+ba$ se transformar em $+ab$, para enfatizar a propriedade comutativa feita através dos comandos **appear** e **disappear**;
7. Por fim, movemos os termos através do comando **moveTo** de tal forma a mostrar que $+ab + ab = +2ab$, fazendo desaparecer os dois termos semelhantes e, aparecendo o termo final, feito através dos comandos **appear** e **disappear**;
8. Logo, concluímos que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=P0LxEx0J1Qg>

3.2 Produto da soma pela diferença de dois termos

Sejam a e b números reais. Então

$$(a + b)(a - b) = a(a + b) + (-b)(a + b) \quad (\text{Distrib. à Esquerda}) \quad (1)$$

$$= aa + ab - ba - b^2 \quad (\text{Distrib. à esquerda}) \quad (2)$$

$$= a^2 + ab - ab - b^2 \quad (\text{Comutatividade}) \quad (3)$$

$$= a^2 - b^2 \quad (\text{Elemento Oposto}) \quad (4)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Parte inicial dessa animação é igual a vista anteriormente, sendo a principal diferença o surgimento dos termos $-ab$ e $-b^2$, originado através do movimento do termo a com o termo $-b$ e do termo b com o termo $-b$;

2. Através do comando **moveTo**, movimentaremos os termos $+ab$ e $-ab$ até sumirem através do comando **disappear**, pois, como um elemento é o oposto do outro, essa é a noção feita para destacar essa propriedade;
3. Logo, concluímos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=1lX0leUadrI>

3.3 Cubo da soma de dois termos

Sejam a e b números reais. Então

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) \quad (\text{Def. Potência}) \quad (1)$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \quad (\text{Quad. da Soma de Dois Termos}) \quad (2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \quad (\text{Distrib. à Esquerda}) \quad (3)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \quad (\text{Comut. e Distrib. à Esquerda}) \quad (4)$$

$$= a^3 + 2a^2b + a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3 \quad (\text{Comutatividade}) \quad (5)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (2+1=3) \quad (6)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Parte inicial dessa demonstração é semelhante a primeira, sendo a única diferença a de acrescentarmos dois clones ao termo $(a+b)$ e movimentamo-nos no exato momento em que o expoente desaparece um para a direita e o outro para a esquerda, isso feito para enfatizar a definição de potência. Nesses movimentos, utilizamos o comando **disappear** para sumir o expoente e o comando **clone** seguido do **move** para movimentar os termos clonados simultaneamente;
2. Em seguida, movemos os dois termos $(a + b)$ mais a direita para baixo, através do **moveTo**, e trocamos por $a^2 + 2ab + b^2$, através dos comandos **appear** e **disappear** para destacar a propriedade do quadrado da soma de dois termos em seguida os movemos para cima, através do comando **moveTo**;
3. Em seguida, duplicamos os termos **a** e **b** através do comando **move** e lhe damos uma cor diferente através do comando **color** para destacar a propriedade distributiva e fazemos os termos aparecerem logo abaixo através do comando **appear**, fazendo aparecer os termos a^3 , $+2a^2b$ e $+ab^2$;
4. Fazemos o mesmo com o termo **b**, agora para surgirem os termos $+a^2b$, $+2ab^2$ e $+b^3$;

5. Após criado os novos termos, movemos todos para cima, e, simultaneamente, apagamos a expressão acima usando os comandos **moveTo** e **disappear**;
6. Trocamos os termos $+ab^2$ e a^2b para enfatizar a propriedade comutativa através do comando **swap** e, mais uma vez, trocamos os termos semelhantes e transformamos na sua forma mais simplificada, fazendo surgir os termos $+3a^2b$ e $+3ab^2$, isso feito através dos comandos **appear** e **disappear**;
7. Logo, concluímos que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=op96t1WD7uY>

3.4 Solução geral de uma equação do primeiro grau

Sejam a e b números reais, com a diferente de zero. Então

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b - b = 0 - b \quad (\text{Colapso Aditivo}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow ax = -b \quad (\text{Elem. Oposto e Elem. Neutro}) \quad (2)$$

$$\Rightarrow ax : a = -b : a \quad (\text{Colapso Multiplicativo}) \quad (3)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a} \quad (\text{Operação Divisão}) \quad (4)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Introduzimos cada um dos termos da equação separadamente através do comando **appear**;
2. Fazemos aparecer dois termos **-b** acima com uma cor diferente os destacando através dos comandos **appear** e **color**;
3. Movemos os termos **-b** para baixo através do comando **moveTo** e, simultaneamente, vamos movendo os demais termos da equação para a esquerda de modo que o termo **-b** se encaixe na equação para destacar o que fora definido por colapso aditivo;
4. Posteriormente, fazemos os termos $+b$ e $-b$ desaparecerem através do **disappear** para destacar a existência do elemento oposto e fazemos o mesmo com o **0** para destacar a noção do elemento neutro, e somente ficar o termo **-b**;
5. Em seguida, de maneira análoga, fazemos aparecer dois termos **a** de cor diferente para, em seguida, movermos para baixo enfatizando agora o que foi definido como colapso multiplicativo;

6. Operamos os termos do primeiro membro fazendo aparecer o termo x e, no segundo membro, de maneira similar para aparecer o termo $-\frac{b}{a}$, usando, para isso, os comandos **appear** e o **disappear**;
7. Logo, concluímos que $ax+b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=0AAZNovcleg>

3.5 Adição de frações com denominadores diferentes

Sejam a , b , c e d números reais, com b e d diferentes de zero. Então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot 1 \quad (\text{El. Neutro}) \quad (1)$$

$$= \frac{d}{d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} \quad (\text{El. Neutro}) \quad (2)$$

$$= \frac{da}{db} + \frac{cb}{db} \quad (\text{Mult. de Frações}) \quad (3)$$

$$= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \quad (\text{Comutatividade}) \quad (4)$$

$$= \frac{ad + bc}{bd} \quad (\text{Ad. de Frações}) \quad (5)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Introduzimos cada uma das frações separadamente através do comando **appear**;
2. Fazemos aparecer dois termos **1** com uma cor diferente e os movemos para baixo e, em seguida, transformamos em $\frac{d}{d}$ e em $\frac{b}{b}$ para destacar a questão do elemento neutro, usando, para isso, os comandos **appear**, **disappear**, **moveTo** e **color**;
3. Em seguida multiplicamos as frações usando a definição do produto de frações gerando as frações $\frac{da}{db}$ e $\frac{bc}{bd}$, para esses movimentos utilizamos os comandos **moveTo**, **disappear** e **appear**;
4. Em seguida, para enfatizarmos a propriedade comutativa, através dos comandos **disappear** e **appear** trocamos os termos das frações para seguir uma ordem e, em seguida, ao identificarmos os denominadores iguais, somamos as frações, isso feito através dos comandos **moveTo**, **disappear** e **appear**;
5. Logo, concluímos que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=6bWy6bVFikk>

3.6 Solução geral de uma equação do segundo grau (Fórmula de Báscara)

Sejam a, b e c números reais, com a diferente de zero. Então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c) : a = 0 : a \quad (\text{Colapso Multiplicativo}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (\text{Op. Divisão}) \quad (2)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a} \quad (\text{Colapso Aditivo}) \quad (3)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (\text{El. Oposto e El. Neutro}) \quad (4)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (\text{Com. Quad. e Col. Adit.}) \quad (5)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \quad (\text{Adição de Frações}) \quad (6)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{Fat. Quad. Perf. e Comut.}) \quad (7)$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad (\text{Colapso Radical}) \quad (8)$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{Raiz Quadrada}) \quad (9)$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{Colapso Aditivo}) \quad (10)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{Elem. Oposto e Ad. de Fração}) \quad (11)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Introduzimos cada um dos termos da equação separadamente através do comando

appear;

2. A seguir introduzimos quatro termos **a** com uma cor diferente e movemos para baixo para destacar a propriedade **Colapso Multiplicativo**, para isso, movemos também os termos da equação utilizando os comandos **appear**, **moveTo** e **color**;
3. Posteriormente, vamos dividindo os termos da equação separadamente por **a**, e conseqüentemente substituindo cada termo pelo resultado de sua divisão por **a**, usando os comandos **appear** e **disappear**;
4. Em seguida, movemos a fração $\frac{c}{a}$ para o segundo membro mudando o sinal para destacar a ideia do **Colapso Aditivo** destacando-o com uma cor diferente. Utilizamos os comandos **moveTo** e **color**;
5. A partir do passo anterior, utilizamos a técnica de **Completar Quadrado**, e adicionamos o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os membros da equação, mais uma vez, para destacar a propriedade do **Colapso Aditivo** utilizando os comandos **appear** e **moveTo**;
6. Operamos os termos do segundo membro da equação transformando em uma única fração utilizando os comandos **appear** e **disappear**;
7. Após o completamento de quadrado feito no primeiro membro da equação e a operação feita no segundo membro, fatoramos o trinômio quadrado perfeito do primeiro membro, o transformando em $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ e, em seguida, utilizamos a propriedade do **Colapso Radical** (Se $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$), para isso, utilizamos os comandos **appear** e **disappear**;
8. Por fim, utilizamos o mesmo artifício feito no item 4, para transportar a fração $\frac{b}{2a}$ para a segundo membro e fazemos a operação da adição de frações, utilizando novamente os comandos **appear**, **disappear** e **moveTo**;
9. Logo, concluímos que $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=k0EcrulombU>

3.7 Teorema de Wilson

Se p é um número primo, então

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Para $p = 7$, temos:

$$(7 - 1)! \equiv 6! \pmod{7} \quad (\text{Operação Subtração}) \quad (1)$$

$$\equiv 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \pmod{7} \quad (\text{Def. Fatorial}) \quad (2)$$

$$\equiv (6 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2) \pmod{7} \quad (\text{Comutatividade}) \quad (3)$$

$$\equiv (6) \cdot (20) \cdot (6) \pmod{7} \quad (\text{Op, Multiplicação}) \quad (4)$$

$$\equiv (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \pmod{7} \quad (\text{Op. Divisão mod 7}) \quad (5)$$

$$\equiv -1 \pmod{7} \quad (\text{Op. Multiplicação}) \quad (6)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Introduzimos inicialmente e separadamente a expressão $(7-1)! \equiv 6! \pmod{7}$ através do comando **appear**;
2. Depois destacamos o $6!$ com uma outra cor e o clonamos e movemos através dos comandos **color**, **clone** e **move**;
3. Em seguida desenvolvemos o fatorial usando os comandos **appear** e **disappear**;
4. Posteriormente, usamos uma cor diferente nos pares de números de modo a destacar o inverso de cada um e, em seguida, movemos para ficarmos lado-a-lado e, em seguida, introduzimos entre eles os parênteses para dar destaque usando os comandos **moveTo**, **color** e **appear**;
5. Após fazermos a operação de multiplicação usual entre os mesmos, em seguida, calculamos a congruência desses valores módulo 7, e todos resultam num resultado comum, no caso, o **-1**, usando os comandos **appear** e **disappear**;
6. Por fim, movemos os termos até se unirem e obtermos o resultado final **-1**, usando mais uma vez os comandos **moveTo** e **disappear**;
7. Logo, concluímos que $(7 - 1)! \equiv -1 \pmod{7}$.

Link da animação: https://www.youtube.com/watch?v=wd_TwvfH0fs

3.8 Pequeno Teorema de Fermat

Dado um número primo p e $(a, p) = 1$, tem-se que p divide $a^{p-1} - 1$, para todo $a \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Para $a = 10$ e $p = 7$, temos:

$$10 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{7} \quad (\text{Mult. e Divisão mod } 7) \quad (1)$$

$$10 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{7} \quad (\text{Mult. e Divisão mod } 7) \quad (2)$$

$$10 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7} \quad (\text{Mult. e Divisão mod } 7) \quad (3)$$

$$10 \cdot 4 \equiv 5 \pmod{7} \quad (\text{Mult. e Divisão mod } 7) \quad (4)$$

$$10 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7} \quad (\text{Mult. e Divisão mod } 7) \quad (5)$$

$$10 \cdot 6 \equiv 4 \pmod{7} \quad (\text{Mult. e Divisão mod } 7) \quad (6)$$

$$10^6 \cdot 720 \equiv 720 \pmod{7} \quad (\text{Oper. Multiplicação}) \quad (7)$$

$$10^{7-1} \cdot (-1) \equiv (-1) \pmod{7} \quad (\text{Divisão mod } 7) \quad (8)$$

$$10^{7-1} \cdot (-1) \cdot (-1) \equiv (-1) \cdot (-1) \pmod{7} \quad (\text{Colapso Multiplicativo}) \quad (9)$$

$$10^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \quad (\text{Op. Multiplicação}) \quad (9)$$

Descrição dos passos da animação:

1. Introduzimos cada termo das congruências separadamente e, em seguida, após o surgimento do $\pmod{7}$, fazemos sua divisão $\pmod{7}$ do resultado obtido no segundo membro utilizando para isso os comandos **appear** e **disappear**;
2. Em seguida destacamos os termos **10** mudando-os de cor e os unimos para uma posição mais central multiplicando-os e os transformamos em 10^6 e depois em 10^{7-1} . Posteriormente fazemos o mesmo com os números de 1 a 6, os transformando em 720, em seguida, calcularmos a divisão de 720 por 7 e, substituímos por -1, e unimos os símbolos de congruência em um único usando os comandos **appear**, **disappear**, **moveTo** e **color**;
3. Em seguida, vamos mudando a cor dos termos de 1 a 6, situados no segundo membro da congruência para destacar a permutação dos números e, em seguida, unimos também os trocando por 720, e, em seguida, também trocamos o 720 por -1 e, juntamos os termos $\pmod{7}$ em um único, para isso usamos os comandos **appear**, **disappear**, **moveTo** e **color**;
4. Em seguida, fazemos aparecer **-1** em ambos os membros da congruência para destacar a propriedade do **Colpaso Multiplicativo**;
5. Logo, concluímos que $10^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$.

Link da animação: <https://www.youtube.com/watch?v=Lnoj2r85IpQ>

Capítulo 4

Aplicação da técnica de animação em *Stop Motion* em equações

Neste capítulo será descrito a aplicação de uma atividade usando a técnica de animação em *Stop Motion* que propus aos meus alunos de três turmas do sétimo ano do ensino fundamental dois. Destacamos que os discentes aprovaram esse formato de ensino numa forma mais lúdica onde os mesmos foram os produtores da atividade e será apontando os aspectos positivos e negativos dessa atividade para o seu processo de ensino-aprendizagem. Posteriormente, informaremos os motivos pelos quais aplicamos essa atividade, como organizamos as equipes, alguns relatos dos estudantes sobre essa atividade e quais foram os materiais utilizados para a construção dessa atividade.

4.1 Importância do conhecimento prévio do conteúdo

Antes de propormos essa aula lúdica é necessário que o docente responsável pela turma leccione o conteúdo em que irá se basear para a construção das animações, visto que a álgebra das equações é o primeiro momento em que os estudantes começam a vivenciar a experiência em resolver “contas com letras” e é muito natural que os mesmos tenham dificuldade em interpretá-las e, conseqüentemente, resolvê-las pela questão de sua abstração. Por esse motivo, toda a parte inicial de apresentação do conteúdo seja feita, desde a generalização de um número qualquer até os métodos práticos de como se resolvemos equações para daí propormos a atividade.

4.2 Ideia da implantação da atividade

Esta atividade diferenciada em sala de aula surge para tentar fazer com que os estudantes imaginem e concretizem melhor as regras que são usadas para resolvermos

equações, e, a partir disso, consigamos organizar mentalmente a sequência de etapas do algoritmo de resolução de equações. Por fim, pretende-se que essa atividade seja algo motivador para o alunado pelo fato de ser uma atividade diferente das normais do dia a dia.

4.3 Organização das Equipes

Com relação a organização das equipes, inicialmente permitimos que os grupos se formassem livremente, deixando claro que cada grupo deveria ter, no máximo, 6 componentes. Entretanto, no decorrer da atividade, ficou claro que a quantidade de estudantes por equipe deve ser de no máximo 3 ou 4 componentes, pois, por ser uma atividade simples é interessante que todos os componentes participem. Então, a quantidade acima citada não foi a ideal, por dois motivos: o primeiro é que sempre dois ou três componentes por equipe ficaram sem função e o segundo é que no decorrer da atividade surgem algumas dúvidas cuja explicação se torna mais fácil em grupos menores.

4.4 Material utilizado e sua função

1. Piloto de três cores diferentes (preto, azul e vermelho) - para escrever os termos da equação de forma mais destacada e modificar sua cor no momento necessário;
2. Folha de papel ofício - para escrever os termos da equação;
3. Tesoura - para recortar os termos da equação;
4. Mesa - para apoiar os termos da equação sobre ela e, posteriormente, movê-las quando necessário;
5. Celular - para baixar o aplicativo que irá tirar as referidas fotos para construção da animação.

4.5 Aspectos positivos da atividade

1. Maior envolvimento dos estudantes para fazer a atividade e para entender o assunto;
2. Melhor entendimento dos estudantes do passo-a-passo da resolução de equações nas atividades posteriores;
3. Utilização da tecnologia como ferramenta ativa e atraente em sala de aula;
4. Notas mais relevantes nas posteriores avaliações escritas.

4.6 Aspectos negativos da atividade

1. Como dito anteriormente, a quantidade de componentes por equipe é fundamental importância para que os estudantes desenvolvam o melhor entendimento para construção das animações e que tenham participação ativa no processo de elaboração do mesmo;
2. Tinha organizado previamente a atividade para dois horários seguidos, porém boa parte das equipes não conseguiu finalizar a atividade em classe, tendo que terminar em casa, ou seja, para inicializar e finalizar a atividade em sala de aula, se faz necessário de, no mínimo, três horários seguidos;
3. No decorrer da atividade, surgiram várias dúvidas com relação a algo para a construção da animação, então, se faz necessário uma melhor introdução do passo-a-passo para a construção da animação ou até mesmo uma pequena construção de uma animação, pois, no meu caso, eu só expliquei no quadro a ideia do que deveriam fazer e, num dia determinado, apliquei a atividade.

4.7 Alguns relatos de estudantes sobre essa atividade

1. Estudante 1 - “Eu achei muito legal porque desenvolveu mais o entendimento para entender mais sobre o assunto. A animação foi muito divertida de ser feita, pois dá a real ideia do que devemos fazer para resolvermos as equações.”;
2. Estudante 2 - “Eu gostei muito, apesar de errar algumas vezes na hora da construção do vídeo, pelo fato de ainda não ter entendido a ideia do trabalho. O aplicativo foi bastante divertido, pois me fez entender ainda mais como se resolve equações, e, realmente esse trabalho me ensinou o passo-a-passo de como devemos fazer.”;
3. Estudante 3 “Eu achei legal, gostei muito, apesar de termos errado muito. Até minha mãe gostou desse trabalho, pois é criativo, e deixa o assunto mais fácil de aprender”
4. Estudante 4 - “Eu achei muito bom e interessante esse trabalho, também foi diferente, pois aprendi e apreciei mais o assunto. Achei que seria complicado, mas com dedicação e responsabilidade demos conta, pois primeiramente tivemos que resolver a equação, e depois tirarmos fotos para construir o vídeo. O trabalho foi bastante prático e educativo, e me diverti bastante com esse trabalho. Foi bacana aprender de um jeito sem ser escrevendo. A aula desse dia foi bem legal.”;

5. Estudante 5 - “Achei muito bom esse trabalho pois aprendemos de um jeito bom e diferente. No começo achei que seria difícil mas com atenção conseguimos resolver primeiramente a equação e depois, de um modo prático, podemos nos divertir também com o aplicativo, pois, a criação da animação foi muito massa. Gostei muito desse trabalho, e tomara que tenham outra assim.”;
6. Estudante 6 - “Além de ser educativo e divertido, aprendi mais facilmente a resolver equações do primeiro grau. Antes olhava para o assunto e não entendia, mais com a construção da animação ficou mais fácil de entender, tanto para mim, quanto para meus colegas resolver equações agora é mais fácil”;
7. Estudante 7 - “Eu achei muito legal e também bem diferente fazer o vídeo, porém muito trabalhoso, pois tivemos que tirar muitas fotos, além de termos que refazer o vídeo algumas vezes. Eu achei diferente pelo fato de estarmos aprendendo equação do primeiro grau de forma prática e divertida”.

4.8 Imagens dos estudantes construindo as animações

Nesta seção ilustraremos alguns momentos dos estudantes criando os vídeos das animações em *Stop Motin*, e darei destaque as estratégias que os mesmos utilizaram para fazer as animações.



Figura 4.1: Momento em que fui esclarecer uma dúvida relacionada a como deveriam fazer para compilar as fotos e, posteriormente, gerar o vídeo.



Figura 4.2: Equipe usou a estratégia de uma única pessoa segurar o celular e tirar as fotos, e um outro estudante mover as peças para construção da animação.



Figura 4.3: Equipe também preferiu somente um aluno tirar as fotos e o mesmo estar com o celular em mãos e um outro aluno para mover as peças para a construção da animação.



Figura 4.4: Equipe usou a estratégia de um estudante segurar o celular, um outro tirar as fotos e um terceiro para mover as peças para construção da animação.

Capítulo 5

Conclusão

No presente trabalho, discutimos a importância da utilização de animações para o ensino, destacando as equações como principal ferramenta a ser utilizada, seja para criar material didático ou seja como atividade proposta em sala de aula com estudantes do ensino fundamental. Ao menos pela nossa avaliação pessoal, os resultados foram bem proveitosos, primeiramente pela maior interação dos estudantes.

Inicialmente, propusemos quatro maneiras para fazer as animações, mas no decorrer da idealização do projeto ficou claro que duas dessas técnicas se tornariam suficientes e complementares para o que estamos propondo, sendo que, como bem visto, para se criar material didático para lecionar, a técnica de animação AnimaTEX é tanto necessária quanto suficiente para construção desse material. Já para aplicação em sala de aula, de modo que os estudantes criem suas próprias animações de modo simples e lúdico, a técnica de animação em *Stop Motion* é, além de super atrativa para os estudantes pela questão da utilização da tecnologia, é bastante simples para ser usada em sala de aula e os próprios estudantes mostraram relativo domínio em seu uso, pois o aplicativo é autoexplicativo e de fácil utilização.

O referido trabalho me mostrou que a utilização da tecnologia em sala de aula é uma das grandes tendências para o ensino, de modo que, a partir dela, pudemos observar que os estudantes mostram realmente um maior interesse e acabam por entender melhor os conteúdos nela abordados, é claro que sempre guiados pelo professor, pois deve-se estruturar sempre o início, meio e conseqüente fim dessas atividades de modo a ter o principal objetivo concluído.

Na aplicação da técnica de animação em *Stop Motion*, ficou claro para mim, enquanto docente, que essa atividade foi muito proveitosa mesmo nas equipes que tiveram 6 componentes, fazendo com que, no momento da construção do vídeo, poucos participassem sua construção, entretanto, no decorrer da parte inicial para resolver a equação proposta e criar os termos da equação, a grande parte se mostrou bastante interessada e

fez o possível para contribuir na resolução de suas equações.

Para construção do material didático através da técnica de animação Anima \TeX , os materiais produzidos foram de excelente qualidade, desde o formato das letras até a introdução das fórmulas.

Fazer animações através do movimento não foi uma tarefa fácil, mas, como dito no trabalho, a criação de *storyboards* é uma excelente maneira para estruturar o que devemos fazer, pois, a partir do domínio dos comandos, tudo se torna uma aplicação de comandos fazendo com que o trabalho seja fácil.

Portanto, deixamos claro que a utilização de animações no ensino de Matemática além de ser uma ferramenta lúdica, passa a ser um instrumento modelador para o ensino e, tanto no presente trabalho que foi baseado em construir técnicas para animar equações, quanto no trabalho de [3], que foi minha principal referência para utilizar animações, os resultados em sua maioria sempre foram satisfatórios mostrando essa nova metodologia de ensino é eficaz e produtiva para utilização em sala de aula.

Referências Bibliográficas

- [1] Khan Academy. Ka_TE_X. <https://katex.org/>. Acessado em 10 de janeiro de 2020.
- [2] Mike Bostock. ObservableHQ. <https://observablehq.com/>. Acessado em 10 de janeiro de 2020.
- [3] Thaís de Barros Silvany de Andrade. Uso de Animações no Ensino de Matemática. Master's thesis, PROFMAT, UFBA, 2018.
- [4] Brendan Eich. JavaScript. <https://tableless.github.io/iniciantes/manual/js/>. Acessado em 10 de janeiro de 2020.
- [5] Julian Garnier. Anime.js. <https://animejs.com/>. Acessado em 10 de janeiro de 2020.
- [6] Tim N. Höffler and Detlev Leutner. Instructional animation versus static pictures: A meta-analysis. *Learning and Instruction*, 17(6):722 – 738, 2007.
- [7] Giancarlo Silva. O que é e como funciona a linguagem JavaScript? <https://canaltech.com.br/internet/0-que-e-e-como-funciona-a-linguagem-JavaScript/>. Acessado em 10 de janeiro de 2020.