UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Bauru

Murilo Fugikava Daniel

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PANORAMA PARA O ENSINO DE FÍSICA

Bauru
2020

Murilo Fugikava Daniel

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PANORAMA PARA O ENSINO DE FÍSICA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Bauru.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Bauru
2020

D184m

Daniel, Murilo Fugikava
A Modelagem Matemática como panorama para o ensino de Física / Murilo Fugikava Daniel. -- Bauru, 2020
63 p. : tabs., fotos

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientadora: Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

1. Modelagem Matemática. 2. Funções. 3. Ensino de Física. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Murilo Fugikava Daniel

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PANORAMA PARA O ENSINO DE FÍSICA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Bauru.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
Orientadora

Profa. Dra. Prescila Glaucia Christianini Buzolin
UNESP – Bauru

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi
UFU – Uberlândia

Bauru
7 de agosto de 2020

Resumo

Este trabalho aborda o ensino de Física através do uso da Modelagem Matemática. O trabalho foi iniciado com a apresentação dos conceitos básicos sobre funções e aquelas que seriam usadas no ensino de Física. Posteriormente, foi feito o estudo sobre Modelagem Matemática e sua importância para o ensino de Matemática e Física. Além disso, foram feitas atividades relacionadas ao movimento retilíneo uniforme e lançamento de projéteis com alunos do Ensino Médio para instigar tais alunos a pensar sobre o tema. O estudo tem características qualitativas sendo norteado pela Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Funções, Modelagem Matemática, Ensino de Física.

Abstract

This work approach Physics teaching through the use of Mathematical Modelling. The work started with the presentation of the basic concepts about functions and those that would be used in the teaching of Physics. Subsequently, a study was made on Mathematical Modelling and its importance for the teaching of Mathematics and Physics. In addition, activities related to uniform rectilinear movement and launching projectiles were carried out with high school students to encourage such students to think about the theme. The study has qualitative characteristics and is guided by Mathematical Modelling.

Keywords: Functions, Mathematical Modeling, Physics Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O processo que utiliza expressões matemáticas que descrevem uma situação real é chamado Modelagem Matemática. Modelar a realidade é o que torna a Matemática uma ciência diferente das demais. Essa definição sugere que modelar é uma atividade cognitiva na qual pensamos e criamos modelos para descrever como os dispositivos ou objetos de interesse se comportam. Existem várias maneiras pelas quais dispositivos e comportamentos podem ser descritos. Podemos usar palavras, desenhos ou esboços, modelos físicos, programas de computador ou fórmulas matemáticas. Em outras palavras, a atividade de modelagem pode ser realizada em vários idiomas.

O mundo externo é o único chamado real; aqui observamos vários fenômenos e comportamentos, de origem natural ou produzidos por artefatos. O mundo conceitual é o mundo da mente - onde vivemos quando tentamos entender o que está acontecendo naquele mundo real e externo. O mundo conceitual pode ser visto como tendo três estágios: observação, modelagem e previsão. Na parte de observação do método científico, medimos o que está acontecendo no mundo real. Aqui reunimos evidências empíricas e "fatos reais". As observações podem ser diretas, como quando usamos nossos sentidos, ou indiretos, caso em que algumas medidas são tomadas para indicar através de outras leituras que um evento ocorreu. Por exemplo, geralmente sabemos que uma reação química ocorreu apenas medindo o produto dessa reação. Nesta visão elementar de como a ciência é feita, a parte da modelagem se preocupa em analisar as observações acima por um de (pelo menos) três ângulos. Essas justificativas são sobre o desenvolvimento: modelos que descrevem o comportamento ou resultados observados, modelos que explicam por que esse comportamento e resultados ocorreram como ocorreram; ou modelos que nos permitem prever comportamentos ou resultados futuros ainda não vistos ou não medidos.

Na parte predição do método científico, exercitamos nossos modelos para nos dizer o que acontecerá em um experimento ainda a ser realizado ou em um conjunto antecipado de eventos no mundo real. Essas previsões são seguidas por observações que servem para validar o modelo ou sugerir razões para que o modelo seja inadequado. O último ponto também sugere que a modelagem é central para todas as fases conceituais no modelo elementar do método científico. Modelos são criados e usados para prever eventos que podem confirmar ou negar os mesmo. Além disso, também podemos melhorar nossa coleta de dados empíricos quando usamos um modelo para obter orientação sobre onde procurar.

Por todos esses motivos relatados acima a Modelagem Matemática está se tornando um assunto cada vez mais importante, à medida que os computadores expandem nossa capacidade de traduzir equações e formulaçẽs matemáticas em conclusões concretas sobre o mundo natural e artificial em que vivemos.

A procura por um modo de ensinar que fosse diferenciado, de modo a trazer o interesse dos alunos para a sala de aula, para os conceitos que estão sendo apresentados foi o grande norteador desse trabalho. A ideia foi mostrar aos alunos que eles podem ser exploradores do conhecimento, observando, experimentando, manipulando e analisando os dados que estão sendo obtidos a partir de atividades que são feitas por eles mesmos. Para tanto, esse trabalho será dividido em algumas etapas.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos básicos de Matemática e de Física. Estes conceitos serão usados durante todo o trabalho, inclusise para a realização das atividades.

Para fazermos a relação entre os conceitos matemáticos e físicos usamos como metodologia a Modelagem Matemática, a qual é apresentada no Capítulo 3.

As atividades que foram feitas durante as aulas estão expostas no Capítulo 4 e a conclusão e os trabalhos futuros no Capítulo 5.

2 Conceitos Básicos

Neste capítulo estão os conceitos fundamentais para o ensino de velocidade, aceleração e lançamento de foguetes. Foi usado [8] como livro texto.
Definição de função: Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \longrightarrow Y$ (leia-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou cunjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x").

Notação: $f : X \longrightarrow Y$, onde o conjunto X chama-se o domínio (ou $D(f)$) e Y é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f leva x em $f(x)$. Deve-se ainda observar que uma função consta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$.

Simbolicamente:

$$(\forall x \in X, \exists !\ y \in Y : y = f(x)) \Leftrightarrow (\forall x_1,\ x_2 \in X,\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)).$$

Igualdade: Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$. Dizemos que $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$ e $D(f) = D(g)$.

Definição (Conjunto Imagem): Seja $f : X \longrightarrow Y$. Definimos o conjunto Imagem da função f por

$$Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ com } y = f(x)\}.$$

Definição (Gráfico): Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. O gráfico de f é o conjunto

$$graf(f) = \{(x, f(x) \mid x \in X,\ y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

Exemplo 1: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Isto, é a função que associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, seu quadrado x^2. Observe que os requisitos para uma função estão satisfeitos, uma vez que, a cada $x \in \mathbb{R}$, temos associado um único outro real $f(x)$, qual seja, x^2. Assim, é que, ainda em relação a esse exemplo, temos $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f(3) = 3^2 = 9$ etc.

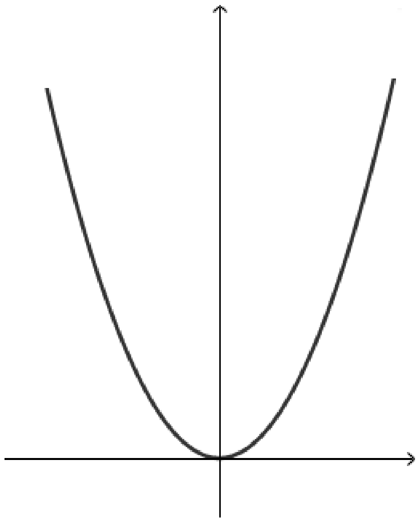

Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = x^2$ (fonte: próprio autor)

Exemplo 2: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5$. Neste caso extremo, temos uma função constante igual a 5, todo $x \in \mathbb{R}$ está associado a um mesmo $y \in \mathbb{R}$, $y = 5$. Contudo, as condições impostas na definição estão plenamente satisfeitas, *i.e.*, todo $x \in \mathbb{R}$ está associado a um único $y \in \mathbb{R}$.

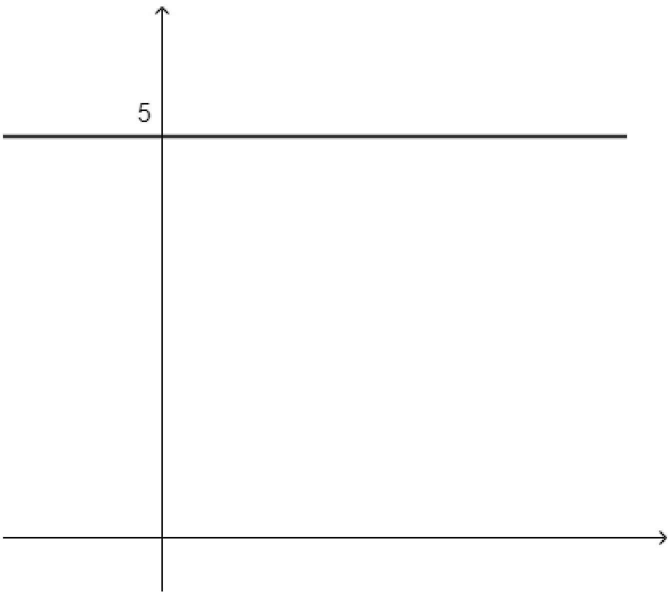

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = 5$ (fonte: próprio autor)

Exemplo 3: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Esta é a função identidade, que associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, seu próprio valor.

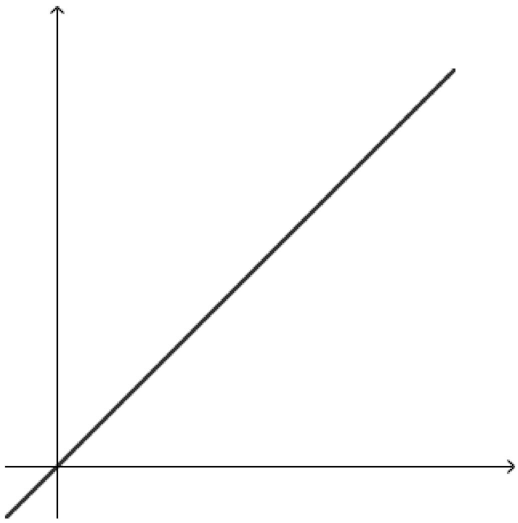

Figura 2.3: Gráfico de $f(x) = x$ (fonte: próprio autor)

Exemplo 4: Considere a relação [1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Isto quer dizer que a relação associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, sua raiz quadrada $\sqrt{x}$. Observe que os requisitos para ser função não estão satisfeitos, uma vez que, para um dado $x < 0$, $\sqrt{x}$ não está definida em $\mathbb{R}$. Entretanto, é possível adequar o domínio da relação para torná-la uma função. Tomando o domínio de f por $\mathbb{R}_+$, f torna-se função. Em relação a esse exemplo, temos $f(4) = 2$, $f(9) = 3$, etc.

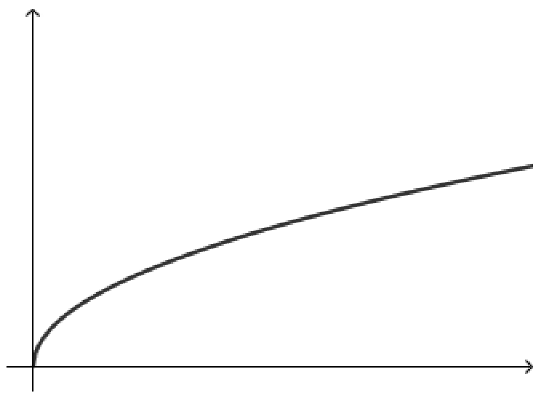

Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ (fonte: próprio autor)

Injetora: Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é injetora (ou injetiva) se associa valores distintos de X a valores distintos de Y, isto é,

$$(\forall x_1,\ x_2 \in X,\ \text{se } x_1 \neq x_2,\ \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow (\forall x_1,\ x_2 \in X,\ \text{se } f(x_1) = f(x_2) \text{ então } x_1 = x_2).$$

Sobrejetora: Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é sobrejetora (ou sobrejetiva) se todo elemento do contra-domínio está associado a algum elemento do

[1]Relação é um conceito mais geral que função

domínio, isto é,

$$(\forall y \in Y,\ \exists x \in X \mid f(x) = y) \Leftrightarrow Im(f) = Y.$$

Bijetora: Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é chamda bijetora se f for injetora e sobrejetora.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$ é sobrejetora, mas não é injetora.
De fato, é sobrejetora pois para todo $y \in \mathbb{R}_+$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.
Porém, f não é injetora, pois, $3 \neq -3$ e $f(-3) = f(3) = 9$.

Composição de funções: Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas funções. A composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in X$.

Exemplo: Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 3$. Temos que $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e é dada por $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 3$. E $f \circ g(x) = f(g(x)) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

Função Identidade: Definimos como função identidade de x como sendo a aplicação $id_X : X \longrightarrow X,\ id_x(x) = x,\ \forall x \in X$.

Função Inversa: Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é invertível se existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que

$$g \circ f = id_X \text{ e } f \circ g = id_Y.$$

ou seja,

$$g \circ f(x) = x, \forall x \in X \text{ e } f \circ g(y) = y,\ \forall y \in Y.$$

Proposição: Quando a inversa existe, ela é única.
De fato, suponha que existam $g_1,\ g_2 : Y \longrightarrow X$ definidas como acima. Então, para todo $y \in Y$:

$$f(g_1(y)) = y = f(g_2(y)).$$

Observe que f é injetora, logo

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g_1(f(x_1)) = g_1(f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Logo, temos que $g_1(y) = g_2(y) \Longrightarrow g_1 = g_2$.

Notação: A inversa de $f : X \longrightarrow Y$ é denotada, quando existe, por f^{-1}.

Teorema: Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Temos que f é invertível se, e somente se, f é bijetora.
Demonstração: (Condição necessária) Se f admite inversa g então $g(f(x)) = x, \forall x \in X$ e $f(g(y)) = y,\ \forall y \in Y$ então

$$f(x) = f(x^{'}) \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x^{'})) \Longrightarrow x = x^{'}.$$

Logo, f é injetora.

Agora, para todo $y \in Y$, $y = f(f^{-1}(y))$ então existe $x = f^{-1}(y) \in X$ com $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetora.
(condição suficiente:) Se $f : X \longrightarrow Y$ é bijetora, dado $y \in Y$, existe um único $x \in X$ com $f(x) = y$.
Vamos definir $g : Y \longrightarrow X$ satisfazendo a condição $g(y) = x$.
Temos que para todo $x \in X$, $g(f(x)) = x$ e para todo $y \in Y$, $f(g(y)) = f(x) = y$. Portanto, $g = f^{-1}$.

2.1 Função afim

Uma **função afim** é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo x real, onde a e b são números reais dados, neste texto será considerado o caso em que $a \neq 0$. Uma **função linear** é uma função afim f como acima, tal que b = 0.

A imagem de uma função afim f como acima pode ser encontrada procurando-se o conjunto dos $y \in \mathbb{R}$ tais que a equação $ax + b = y$ tenha alguma solução $x \in \mathbb{R}$. Mas, como tal equação sempre admite a solução $x = \frac{y-b}{a}$, concluímos que todo $y \in \mathbb{R}$ pertence à imagem de f, de modo que $Im(f) = \mathbb{R}$.

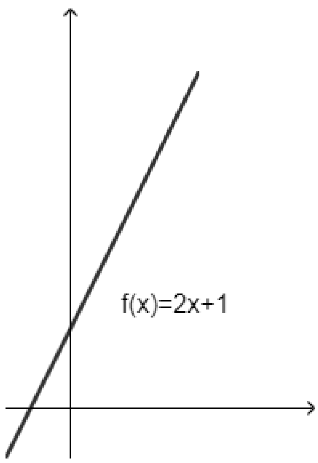

Figura 2.5: Gráfico de função afim (fonte: próprio autor)

2.2 Função quadrática

Uma **função quadrática** ou **de segundo grau** é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$, onde a, b e c são números reais dados, com $a \neq 0$.

Para fazermos um estudo mais aprofundado sobre a função quadrática vamos reescrevê-la:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^a}\right)-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right].$$

Representando b^2-4ac por Δ, também chamado de **discriminante** do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Raízes ou zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ são os valores de x reais tais que $f(x)=0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Utilizando a forma canônica acima, temos:

$$ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Longleftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Número de Raízes

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

Caso 1: Para $\Delta>0$, a equação apresentará duas raízes reais e distintas, que são:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Caso 2: Para $\Delta=0$, a equação apresentará duas raízes reais e iguais, que são:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}.$$

Caso 3: Para $\Delta<0$, temos que $\sqrt{\Delta}\notin\mathbb{R}$, a equação terá duas raízes complexas, uma conjugada da outra, que são:

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Em relação à função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, temos que:

(a) Se $a>0$, então Im(f)= $\left[-\dfrac{\Delta}{4a},+\infty\right)$;

(b) Se $a<0$, então Im(f)= $\left(-\infty,-\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

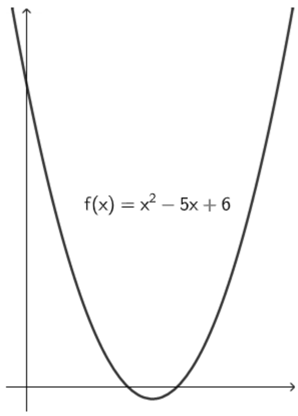

Figura 2.6: Gráfico de função quadrática (fonte: próprio autor)

2.3 Gráfico de uma função do 2^o grau

Definição: Dados um ponto F no plano e uma reta d que não contém F, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a mesma distância de F e de d. O ponto F é chamado de foco da parábola e d é a reta diretriz.

Uma parábola é então uma curva no plano, que é simétrica, sendo o eixo de simetria a reta que contém o foco F e que é perpendicular à reta diretriz.

O ponto V da parábola $\wp$ que pertence à reta focal é o **vértice** de $\wp$. Se A é o ponto onde d instersecta o eixo de simetria l, então V é o ponto médio do segmento AF.

O número $2p = d(F, L)$ é o **parâmetro** da parábola $\wp$. Note que $d(V, F) = d(V, L) = p$.

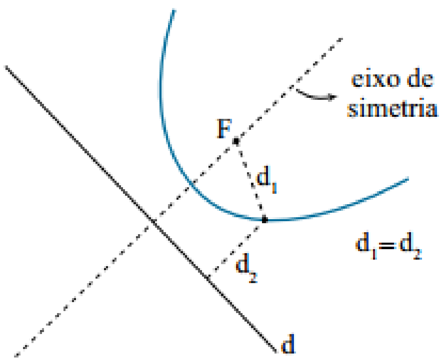

Figura 2.7: Parábola (fonte: próprio autor)

Para determinar as coordenadas do vértice da parábola, observemos que o mesmo também pertence ao eixo de simetria da parábola e, portanto, a abscissa do vértice será igual ao ponto médio entre as raízes.

Caso 1: Para $\Delta \geq 0$ temos que

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Logo,

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}.$$

Agora, para obter a ordenada do vértice basta substituir x_V na equação $y = ax^2+bx+c$, isto é,

$$y_V = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$
$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Caso 2: Para $\Delta < 0$ então as raízes são complexas e temos

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Assim,

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+i\sqrt{\Delta}-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ independentemente da existência ou não de raízes reais.

2.4 Máximo e Mínimo

Definições: Dizemos que o número $y_M \in Im(f)$ é o valor máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado ponto de máximo da função.

Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado ponto de mínimo da função.

Teorema: (a) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor de máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

(b) Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2+bx+c$ admite o valor de mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

Demonstração: item (a) (o item (b) será feito de modo análogo), consideremos a função quadrática na forma canônica:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \qquad (1)$$

Sendo $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x, só depende de a, b, c e $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo x real.

Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Para $x = -\dfrac{b}{2a}$ na expressão (1) temos:

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

2.5 Conceitos básicos da Física

A Física como ciência recebeu esse nome há pouco tempo. Porém, suas formulaçẽs sempre usaram linguagem matemática. O desenvolvimento da Física se dá a partir da necessidade do homem de entender a natureza e de controlar e reproduzir suas forças. Todos os conceitos apresentados nesse capítulo estão baseados em [4], [8] e [12].

Segundo Rubie José Giordani "a ideia de que o homem é um ser intelectualmente evolutivo é irrefutável". Porém, por mais avançada que seja a geração, seja em termos científicos ou empíricos, teve de partir de ideias simples ou da necessidade de resolver um problema prático do contidiano e nesse sentid,o qual foi o problema prático que Newton estava pensando ao propor o conceito de velocidade instantânea?

Porém, antes de falar de Newton, devemos observar que muitos pensadores buscaram respostas para o conceito de infinito. Zeno foi o primeiro a pensar filosoficamente sobre o infinito: um móvel se deslocando entre dois pontos fixos A e B situados a uma distância finita. Considerando T_0, T_1, $\ldots, T_n, \ldots$ são os tempos gastos para percorrer a metade da distância restante no trajeto, Zeno concluiu que o movél nunca chegaria em B. Aristóteles procurou resolver o paradoxo de Zeno usando argumentos filosóficos, enquanto Arquimedes encontrou diversas somas envolvendo elementos infinitos.

Por outro lado, o estudo de áreas abaixo de curvas foi impulsionado pela Geometria Analítica de Pierre de Fermat e Rene Descartes. Fermat tentava mostrar que nos pontos de máximo ou de mínimo a reta tangente a curva é horizontal, ou seja, tem inclinação zero. E a partir daí encontrar a reta tangente a curva, passou a ser o grande desafio para os pensadores. A necessidade do uso do conceito de limites era eminente, porém não reconhecida. Newton foi o primeiro a buscar esse conceito e usá-lo na sua teoria.

Newton teve contato inicialmente com Aristóteles, porém não foi adepto de suas ideias. Contudo, ter estudado as ideias aristotélicas trouxeram a Newton um aprendizado novo de como abordar a natureza e a pensar sobre ela de forma organizada e coerente.

As ideias de Newton sobre o Cálculo Infinitesimal vieram ao longo do período de 1666 a 1668. Durante esses anos ocorreu um surto de peste que fechou Cambrigde obrigando Newton a abrigar-se na casa de sua mãe em Woolsthorpe. No tempo que ficou isolado ele usou um caderno com suas páginas quase todas em branco que ganhou do reverendo Smith. Nele encontra-se detalhes da abordagem que ele desenvolveu sobre a Física e o movimento.

Sabe-se através desse caderno que Newton fez uma análise sobre o movimento usando o cálculo infinitesimal que ele havia criado. O cálculo infinitesimal permitiu a Newton relacionar a quantidade de força aplicada a um objeto com a mudança de velocidade aplicada a ele.

Não foi somente Newton que iniciou os estudos sobre cálculo, porém neste trabalho abordaremos a sua versão, por estarmos interessados na sua aplicação na Física.

Segundo Eves (2011), o trabalho "Methodus fluxionum et serierum infinitarum" para Newton uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto.

Parte dos estudos sobre "fluxões" se originou de trabalhos desenvolvidos por Galileu, Torriceli e Barrow. Neste estudo Newton tratava x e y como grandezas independentes, considerando o movimento de dois corpos de modo unidimensional e não como coordenadas.

Nesse método Newton afirmava que uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um corpo no tempo. A grandeza que era variável ele dava o nome de fluente (quantidade que flui), representada por p e a sua taxa de variação ele chamava de "fluxo de fluente", representado por $p^{\cdot}$ que receberia mais a frente o nome de velocidade.

No método de Newton a relação entre os fluentes resulta na relação entre os fluxos de fluentes. Para isso era necessário o conceito de momento de fluente, o qual seria o incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente x em um intervalo de tempo infinitamente pequeno. Newton propõe que o momento do fluente seja o produto do fluxo do fluente pelo incremento infinitamente pequeno. Porém, essa visão era incompatível com o significado de derivada, que será mostrado a seguir.

Nesse período Newton também formulou as seguintes leis da Física:

(1) Um corpo permanece em repouso ou em movimento uniforme a menos que atue sobre ele uma força.
(2) Um corpo move-se sob ação de uma força de tal maneira que a taxa de variação temporal do momento é igual a força.
(3) Se dois corpos exercem forças um sobre o outro, essas forças são iguais em magnitude e de direções opostas.

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Limites do tipo:

$$\lim_{x \longrightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

ocorrem de modo natural tanto na Geometria quanto na Física.

Seja o problema de definir *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$, assim a reta tangente fica determinada se encontrarmos seu coeficiente angular. Considere a reta s_X que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$.

Quando x tende a p, o coeficiente angular de s_X tende a $f^{'}(p)$ onde

$$f^{'}(p) = \lim_{x \longrightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Temos que $f^{'}(p)$ é apenas uma notação para indicar o valor do limite acima. Assim, à medida que x vai se aproximando de p, a reta s_X vai tendendo a reta T que tem equação:

$$y - f(p) = f^{'}(p)(x - p).$$

É natural, definir então a reta tangente em $(p, f(p))$ como sendo a reta da equação acima.

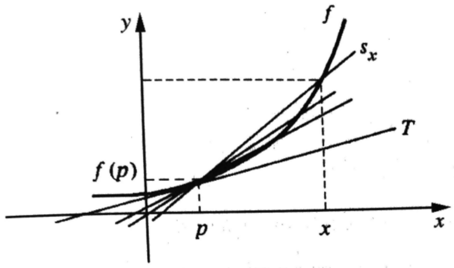

Figura 2.8: Gráfico aproximação de retas (fonte: [8])

Suponhamos que $s = f(t)$ seja a equação horária do movimento de uma partícula vinculada a uma reta orientada na qual se escolheu uma origem. Isto é, a função f fornece a cada instante a abscissa ocupada pela partícula na reta. A velocidade média da partícula entre os instantes t_0 e t é definida pelo quociente

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

A velocidade instantanea da partícula no instante t_0 é definida como sendo o limite

$$v(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Definição: Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \longrightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f^{'}(p)$. Assim,

$$f^{'}(p) = \lim_{x \longrightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p. E assim foi introduzido o conceito de velocidade instantânea e também o conceito de derivada.

Durante o Ensino Médio o estudante inicia seu contato com os conceitos pensados por Newton e por outros, porém de uma forma mais simplificada. Abaixo seguem esses conceitos.

Velocidade: Na escola os conceitos iniciais como velocidade, aceleração são vistos de forma mais simples. Várias grandezas estão associadas ao termo "rapidez". Uma delas é a velocidade média v_m, que é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo Δt durante o qual ocorre esse deslocamento:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

A notação significa que a posição é x_1 no tempo t_1 e depois x_2 no tempo t_2. Uma unidade usual de velocidade média é o metro por segundo (m/s). Outras unidades também podem ser vistas, mas elas estarão sempre na forma de comprimento/tempo.

A velocidade escalar média S_m é uma forma diferente de descrever a "rapidez" com que uma partícula se move. A velocidade média envolve o deslocamento da partícula Δx, enquanto a velocidade escalar média envolve a distância total percorrida (por exemplo, o número de metros percorridos), independente da direção e sentido; ou seja,

$$S_m = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}.$$

Como a velocidade escalar média não inclui direção e sentido, ela não possui sinal algébrico. Em algumas situações S_m é igual a (exceto pela ausência de sinal) v_m.

Vimos até agora duas maneiras de se descrever a rapidez com que algo se move: a velocidade média e a velocidade escalar média, ambas medidas em um intervalo de tempo Δt. Entretanto, o termo "quão rápido" se refere mais frequentemente a com que rapidez uma partícula está se movendo em um dado instante - e essa é a sua velocidade instantânea (ou simplesmente velocidade) v.

A velocidade em qualquer instante é obtida a partir da velocidade média, encolhendo o intervalo de tempo Δt, fazendo-o tender a 0. À medida que Δt diminui, a velocidade média se aproxima de um valor limite, que é a velocidade naquele instante:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Velocidade escalar é o módulo da velocidade; ou seja, a velocidade escalar é a velocidade destituída de qualquer indicação de direção e sentido, seja em palavras ou através de um sinal algébrico.

Movimento retilíneo uniforme: Considere um movimento que possui velocidade constante, em módulo, direção e sentido. Este movimento se caracteriza pelo fato de percorrer distâncias iguais em intervalos de tempos iguais, o chamado **movimento retilíneo uniforme** (MRU). Neste movimento, como a posição varia linearmente com o tempo, o gráfico de posição x tempo dele é uma reta crescente se $v > 0$ e uma reta descrescente se $v < 0$, obtido através da lei horária do movimento retilíneo uniforme:

$$x(t) = x_0 + vt.$$

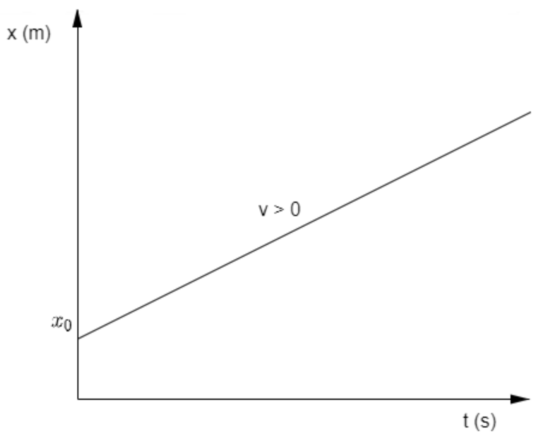

Figura 2.9: Gráfico de posição do MRU com velocidade positiva (fonte: próprio autor)

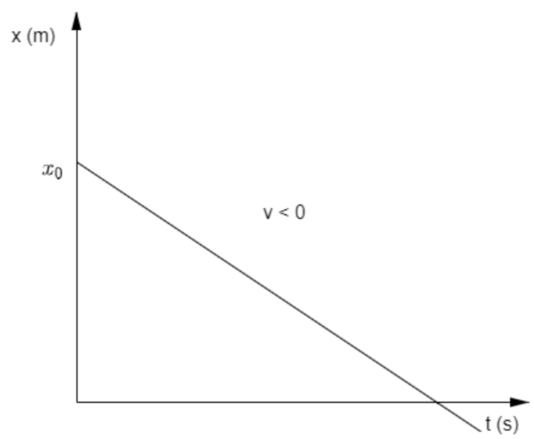

Figura 2.10: Gráfico de posição do MRU com velocidade negativa (fonte: próprio autor)

Como no MRU a velocidade é constante, seu gráfico de velocidade x tempo é uma reta horizontal:

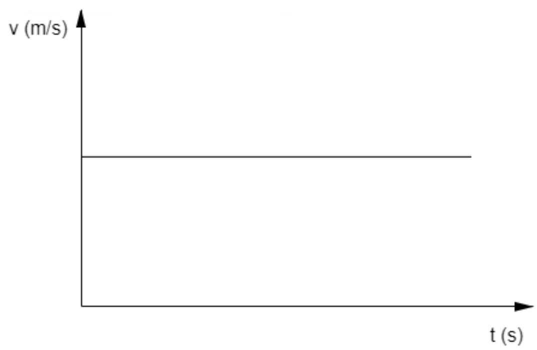

Figura 2.11: Gráfico de velocidade positiva do MRU (fonte: próprio autor)

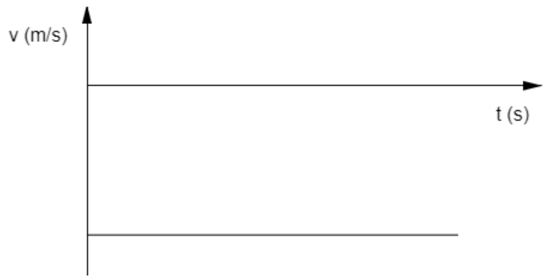

Figura 2.12: Gráfico de velocidade negativa do MRU(fonte: próprio autor)

Aceleração: Quando a velocidade de uma partícula varia, diz-se que a partícula sofre aceleração (ou se acelera). Para movimentos ao longe de um eixo, a aceleração média a_m em um intervalo de tempo Δt é

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

onde a partícula possui velocidade v_1 no tempo t_1 e depois velocidade v_2 no tempo t_2. A aceleração instantânea (ou simplesmente aceleração) é a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Em palavras, a aceleração de uma partícula em qualquer instante é a taxa com que sua velocidade está variando naquele instante. Graficamente, a aceleração em qualquer ponto é a declividade da curva de v(t) naquele ponto.

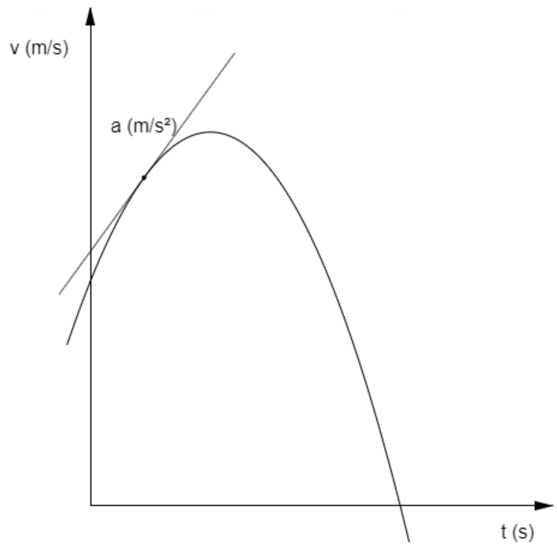

Figura 2.13: Aceleração tangente à curva de velocidade (fonte: próprio autor)

Uma unidade usual de aceleração é o metro por segundo ao quadrado (m/s^2). Outras unidades podem aparecer, mas cada uma delas estará na forma de comprimento/tempo^2. A aceleração é uma grandeza vetorial e possui módulo, direção e sentido. Seu sinal algébrico representa seu sentido sobre um eixo, ou seja, um valor positivo está na direção positiva do eixo e um valor negativo está na direção negativa do eixo.

Movimento retilíneo uniformemente variado: Um movimento retilíneo chama-se uniformemente variado quando a aceleração instantânea é constante e não nula. No **movimento retilíneo uniformemente variado** (MRUV), a velocidade varia linearmente com o tempo, o gráfico de velocidade x tempo é uma reta crescente se $a > 0$ e uma reta decrescente se $a < 0$, com função de velocidade dada por:

$$v(t) = v_0 + at.$$

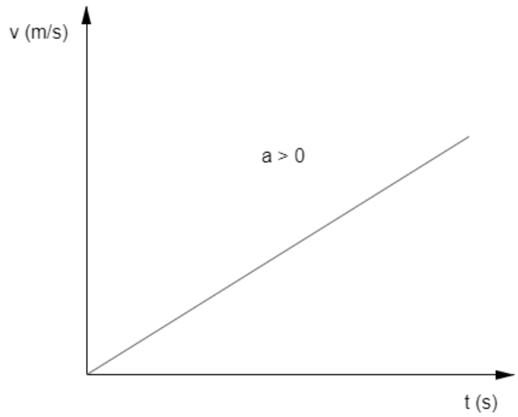

Figura 2.14: Gráfico de velocidade do MRUV com acaleração positiva (fonte: próprio autor)

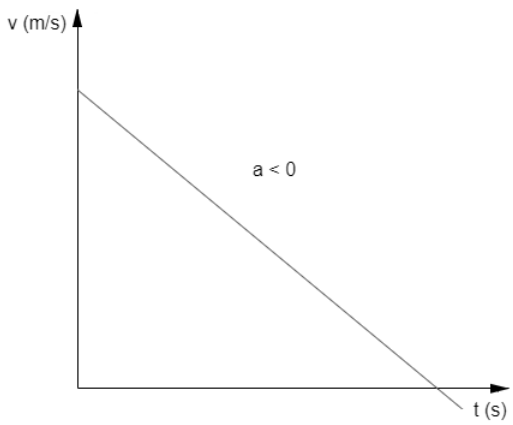

Figura 2.15: Gráfico de velocidade do MRUV com acaleração negativa (fonte: próprio autor)

Como no MRUV, a velocidade varia linearmente com o tempo, a posição varia com o quadrado do tempo, o gráfrico de posição x tempo é uma parábola com concavidade voltada para cima se $a > 0$ e uma parábola com concavidade voltada para baixo se $a < 0$, com a função horária dada por:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

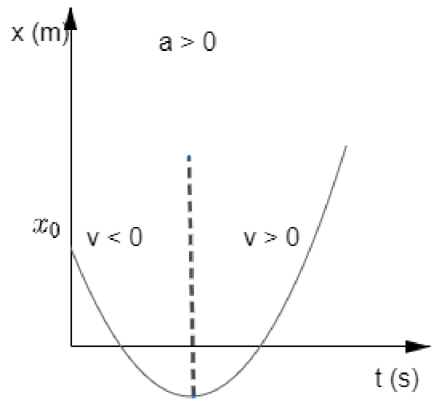

Figura 2.16: Gráfico de posição do MRUV com acaleração positiva (fonte: próprio autor)

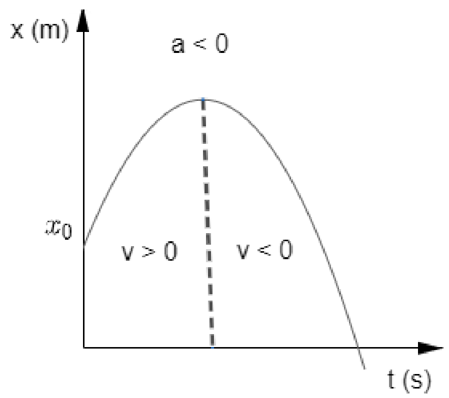

Figura 2.17: Gráfico de posição do MRUV com acaleração negativa (fonte: próprio autor)

Aceleração de queda livre: Se arremessássemos um objeto para cima ou para baixo e pudéssemos de alguma forma eliminar os efeitos de ar no seu vôo, acharíamos que o objeto está acelerado para baixo a uma certa taxa constante. Essa taxa é chamada de aceleração de queda livre, e seu módulo é representado por g. A aceleração independe das características do objeto, tais como massa, massa específica ou forma; ela é a mesma para todos os objetos. O valor de g varia ligeiramente com a latitude e com a elevação. Ao nível do mar em latitudes médias da Terra, o valor é $9,8m/s^2$, o valor que usaremos.

Considerando a situação onde um objeto é abandonado a partir do repouso a partir de determinada altura H, temos um caso particular de movimento retilíneo uniformemente variado, e utilizando a função horária dos espaços para $x(t) = H$, definimos o tempo de queda do objeto como:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Lançamento horizontal: Considere um objeto em MRU sobre um plano horizontal. Ao atingir o final do plano, o objeto começa a cair, iniciando assim um movimento bidimensional chamado **lançamento horizontal**. Neste movimento, o objeto continua seu MRU na horizontal ao mesmo tempo que inicia um MRUV de queda livre na vertical. Neste estudo foram realizados lançamentos horizontais de uma bolinha que se movimenta sobre um plano, e quando ela começa a cair, sua trajetória é uma parábola. A forma da parábola e o alcance horizontal dependem da velocidade com que ela deixa o plano.

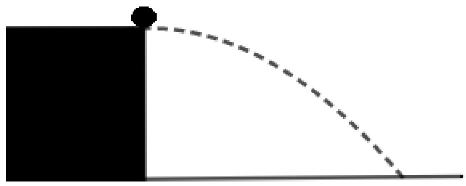

Figura 2.18: Lançamento horizontal (fonte: próprio autor)

3 Modelagem matemática

Neste capítulo foram apresentadas ideias fundamentais sobre Modelagem Matemática e como ela pode ser aplicada na educação e sua relação com o ensino de Física. Este capítulo foi baseado em [1].

Nas últimas duas décadas, a Modelagem Matemática tem sido vista como uma abordagem educacional desde os níveis elementares até o ensino superior. Em ambientes educacionais, Modelagem Matemática tem sido considerada uma maneira de melhorar a capacidade dos alunos de resolver problemas cotidianos. Como introduzir a um aluno o gosto pelo pensar? Como incentivar esse aluno a procurar perguntas e respostas que não estejam no celular ou em alguma rede social ? A ideia de usar a Modelagem Matemática é uma possível resposta para essas perguntas, pois a Matemática é algo totalmente mental, feita a partir de estruturas que criamos em nossa mente e a Modelagem Matemática será a ligação entre essas ideias e a realidade.

A Modelagem Matemática é uma metodologia muito usada quando se quer trazer para a prática em sala de aula a teoria vista pelos alunos. Ela também pode ser usada como método científico de pesquisa. Logo ela se encaixa perfeitamente ao que foi proposto em ser feito na sala de aula. O proposto foi tornar o aluno um cientista, isto é, ele observar o fenômeno, fazer questionamentos sobre o que está observando e após esta etapa procurar um modelo que se encaixe ao que foi visto, ou criar um novo modelo. Para o professor é uma estratégia de ensino e aprendizagem, pois torna o aluno interessado no conteúdo que vai aprender.

Diferentes abordagens foram propostas com diferentes perspectivas teóricas para o uso modelagem no ensino de Matemática. Essas abordagens podem ser classificadas da seguinte maneira:

- modelagem realista ou aplicada,
- modelagem contextual,
- modelagem educacional,
- modelagem sociocrítica,
- epistemológica ou modelagem teórica,
- modelagem cognitiva.

  Geralmente, modelagem também é classificada por sua finalidade em educação matemática, da seguinte maneira:

- modelagem como objetivo do ensino de Matemática ou

- modelagem como um meio para ensinar Matemática.

Nesta útima abordagem, a modelagem é considerada um veículo para apoiar os esforços dos alunos em criar e desenvolver seus conhecimentos matemáticos iniciais e seus próprios modelos.

Nesta perspectiva, a Modelagem Matemática é vista como halibidade básica, e o objetivo ao ensinar Matemática usando essa habilidade é equipar os alunos com a capacidade para resolver problemas da vida real em Matemática e em outras disciplinas.

Já [2] mostraram o ciclo do processo da modelagem em seis passos mostrados abaixo para auxiliar a análise cognitiva de situações de modelagem. Expressões matemáticas de um problema e o processo de resolver este problema colocando a vida real de lado estão mostrados de maneira cíclica nesses passos.

1. Entendendo a situação problema;
2. Simplificar/Estruturar;
3. "Matematizando";
4. Trabalhando com a matemática;
5. Interpretando;
6. Verificando;
7. Apresentando.

Primeiramente, a situação problema deve ser entendida pelo aluno, isto é, um modelo de situação é formado. Depois a situação é estruturada e transformada em um modelo real. Durante o passo 3, que é matematizar o problema, o aluno transforma o verdadeiro problema em um modelo matemático. O aluno, no quarto passo, coordena o pensamento matemático e o interpreta em relação a vida real. Por último as soluções para o problema são verificadas e apresentadas.

De acordo com [6] (1989), existem três modos diferentes de usar Modelagem Matemática para o ensino:

1. "Abordagem Geral de Aplicação", concentra-se em uma certa aplicação. Basicamente, o professor apresenta o modelo e os alunos o usam de maneira controlada. Essa abordagem é usada principalmente em escolas de Ensino Médio e inclui a terceira (cálculo, resolução de desigualdades, etc.) até a quinta etapa (resultados reais na vida cotidiana são interpretados e verificados) do processo de modelagem.

2. "Abordagem pela Modelagem Estrutural", usa situações da vida real e abrange todos os passos da modelagem para formar do primeiro passo ao último passo. O professor faz um esforço para preparar o modelo matemático usado no terceiro passo.

3. "Abordagem Aberta da Modelagem". Nesta abordagem os alunos trabalham com ajuda limitada do professor sobre o problema. Neste caso os alunos tem total independência para resolver o problema.

Por que a modelagem é tão importante para a formação de um aluno? Modelos matemáticos e Modelagem Matemática existem ao nosso redor, especialmente na tecnologia. É necessário durante a formação do estudante desenvolver suas habilidades para usar as novas tecnologias e prepará-lo para ser um cidadão consciente e responsável. Mais geralmente a Modelagem Matemática ajuda os alunos a entenderem melhor o mundo, motiva e fornece significado ao ensino da Matemática, garante o desenvolvimento de várias habilidades, fornece apoio suficiente para a estrutura da Matemática.

Na verdade, aplicação matemática e científica, desenvolvimento de modelos, é um processo complicado. Não exitem padrões para ensinar Matemática e ciência relacionando com o mundo real através de atividades. Tal abordagem revela a complexidade da pergunta "Qual é a razão da abstração, formulação, generalização em implementações e modelagem?" Esta questão em Matemática tradicional e em ciências se volta para o pensamento epistemológico para indicar que realidades abstratas são importantes na conexão entre Matemática e realidade. Este caso necessariamente está relacionado ao processo cognitivo do aluno e a sua realidade social e econômica.

Desde a infância até a adolescência o aluno aprende Matemática. Neste período o aluno desenvolve o conhecimento matemático examinando um modelo apropriado para o que está aprendendo, ou seja, ele o reconstrói. Os modelos podem ser usados para três objetivos diferentes no ensino de Matemática: garantir que os alunos desenvolvam novos conceitos e relações, ajudar os estudantes a estabelecer relações entre conceitos e símbolos, medir o nível de comprensão dos alunos. Usar a modelagem traz uma contribuição importante em termos de desenvolvimento de resolução de problemas e habilidades dos alunos.

Segundo [1], a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Porém segundo [5], o professor não deve ser um mero expectador, deve ter um comportamento ativo na definição do problema e não somente na sua solução. Quando se trata de entender e explicar a realidade é necessário distinguir no sistema o que serão os parâmetros, os argumentos, o sistema, o que será o modelo.

Para [1], usaremos Modelo Objeto como sendo a representação de um objeto ou fato concreto. Tal representação pode ser um desenho, um esquema compartimental, um mapa ou conceitual fórmula matemática ou simbólica.

Segundo [1], a formulação do modelo pode muitas vezes preceder à análise dos dados experimentais, e nestes casos, o método de ajuste de curvas é fundamental para a validação dos modelos estabelecidos a priori. A validação de um modelo matemático consiste na verificação da aproximação do modelo com a realidade, ou seja, se os dados experimentais ou observador não estão "muito longe" daqueles fornecidos pelo modelo.

Em geral, o modelo depende de parâmetros e sua validação exige a estimação desses parâmetros, de modo que a curva (solução do modelo) ajustada represente, o mais próximo possível, o fenômeno estudado.

É importante também, no caso da modelagem, analisar a sensibilidade do modelo aos valores dos parâmetros, o que é tratato através de argumentos estatísticos. Um dos métodos mais usados para estimação de parâmetros ou ajuste de curvas é denominado "método dos quadrados mínimos" ou dos mínimos quadrados como é usualmente conhecido:

Método dos Quadrados Mínimos

Considere um conjunto de n dados observados $\{\overline{x}_i, \overline{y}_i\}$, i = 1, 2, 3, ..., n e uma função $y(x) = f(xa_1, a_2, ..., a_k)$, onde a_j $(j = 1, ..., k)$ são os parâmetros - o **método dos quadrados mínimos** consiste em determinar estes parâmetros de modo que "minimize" o valor de

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(\overline{x}_i a_1, a_2, ..., a_k) - \overline{y}_i]^2.$$

isto é, devemos minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores $\overline{y}_i$ observados e os valores $y_i = f(\overline{x}_i a_1, a_2, ..., a_k)$ ajustados.

Ajuste Linear

Um ajuste é linear se for da forma $y(x) = f(x; a, b) = ax + b$ (equação de uma reta). Neste caso, devemos encontrar os valores dos parâmetros a e b que tornam mínimo o valor da soma dos quadrados dos desvios:

$$S = S(b, a) = \sum_{i=1}^{n} (b + a\overline{x}_i - \overline{y}_i)^2.$$

Tais valores devem satisfazer, necessariamente, às condições:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 2(b + a\overline{x}_i - \overline{y}_i) = 0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\overline{x}_i(b + a\overline{x}_i - \overline{y}_i) = 0.$$

ou seja,

$$a = \frac{n \sum \overline{x}_i \overline{y}_i - \sum \overline{x}_i \sum \overline{y}_i}{n \sum \overline{x}_i^2 - (\sum \overline{x}_i)^2} = \frac{\sum \overline{x}_i \overline{y}_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum \overline{x}_i^2 - n\overline{x}^2}.$$

$$b = \frac{\sum \overline{x}_i^2 \sum \overline{y}_i - \sum \overline{x}_i \sum \overline{x}_i \overline{y}_i}{n \sum \overline{x}_i^2 - (\sum \overline{x}_i)^2} \Leftrightarrow b = \frac{\sum \overline{y}_i}{n} - a\frac{\sum \overline{x}_i}{n} = \overline{y} - a\overline{x}.$$

onde $\overline{x}$ (respectivamente $\overline{y}$) é a média dos valores $\overline{x}_i$ (respectivamente $\overline{y}_i$).

Quando fazemos um ajuste linear para relacionar duas variáveis não sabemos a priori se a reta encontrada é de fato o melhor modelo de ajuste. A verificação da existência e do grau de relação entre variáveis é objeto do estudo da correlação.

A correlação linear mede a relação existente entre as variáveis y_i dados, em torno de uma reta ajustada y = ax + b.

O coeficiente de correlação Pearson r é um instrumento de medida da correlação linear, é dado por:

$$r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^{\frac{1}{2}} \sum (y_i - \overline{y})^{\frac{1}{2}}}.$$

O coeficiente de correlação de Pearson é obtido através do teste de hipóteses H_0 sobre a aceitação ou não do coeficiente angular da reta.

O intervalo de variação de r é entre -1 e +1, isto é,

$$-1 \leq r \leq 1.$$

A correlação será tanto mais forte quanto mais próximo r estiver de ±1, será tanto mais fraca quanto mais próximo estiver de zero. Se r = ±1, então a correlação entre as variáveis é perfeita. Se r = 0, então não existe nenhuma correlação.

O sinal de r indica o sinal do coeficiente angular da reta ajustada.

Exemplo 3.1 Calcular o coeficiente de correlação linear entre a renda e número de filhos para 8 famílias.

renda x	n^o de filhos y	x^2	y^2	xy
700	2	49000	4	1400
8000	4	64000000	16	32000
3000	2	9000000	4	6000
3700	3	13690000	9	11100
7000	2	49000000	4	14000
200	3	40000	9	600
480	3	230400	9	1440
500	5	250000	25	2500
$\sum x_i = 23580$	$\sum y_i = 24$	$\sum (x_i)^2 = 136700400$	$\sum (y_i)^2 = 80$	$\sum x_i y_i = 69040$

Tabela 3.1: Renda x número de filhos de 8 famílias (fonte:[1])

Calulando o coeficiente r de correlação do ajuste, obtemos

$$r = \frac{69040 - \frac{23580 \times 24}{8}}{[136700400 - \frac{23580^2}{8}][80 - \frac{24^2}{8}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1700}{[67198350 \times 8]^{\frac{1}{2}}} = -0.073.$$

O resultado r = -0.073 indica uma fraca correlação entre a renda e o número de filhos dessas 8 famílias consideradas. Observamos que se a escolha das famílias fosse aleatória então o resultado poderia ser diferente.

Atualmente, a maioria das calculadoras científicas já têm o programa de ajustes incorporado juntamente com o cálculo do coeficiente de correlação. O software Excel é um excelente programa e também muito simples de ser utilizado.

Importante: na impossibilidade de se fazer o ajuste linear com o uso de calculadoras, uma maneira simples, e que pode ser usada pelos alunos do ensino médio, é considerar os dados experimentais dispostos num gráfico sobre um papel milimetrado e usar uma régua para traçar, aproximadamente ou no “olhômetro”, a reta ajustada.

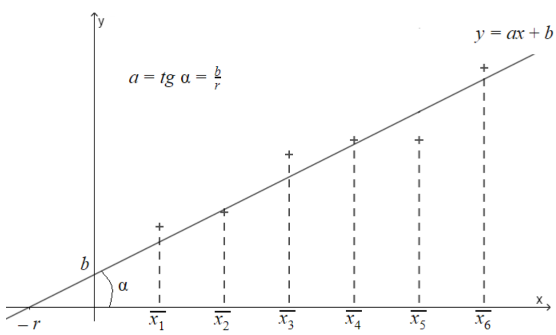

Figura 3.1: Ajuste linear no “olhômetro” (fonte:[1])

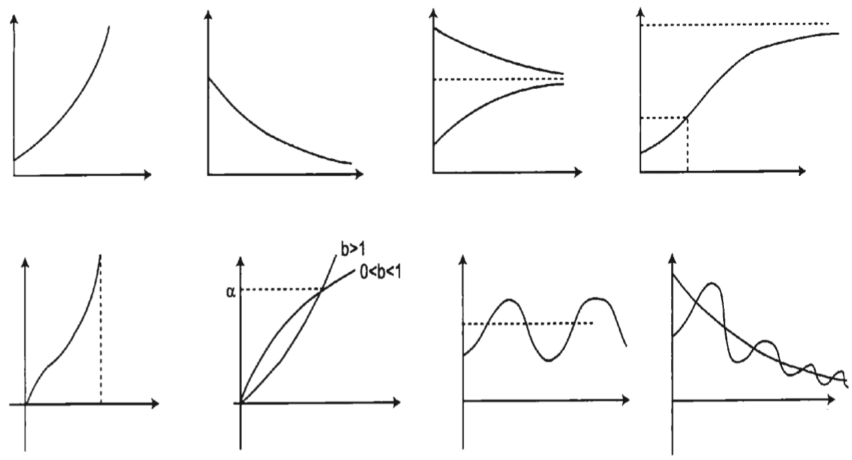

Figura 3.2: Elenco de funções típicas (fonte:[1])

De qualquer forma, sempre se pode fazer uma comparação da reta "chutada" com a reta ajustada pelo método dos quadrados mínimos - as contas usadas são bastante simples.

Para modelos dados por outras funções (não lineares), o método do ajuste linear é ainda aplicável se conseguirmos escrever estas funções na forma

$$f(\tau) = \alpha\tau + \beta$$

mediante uma mudança de variável $\tau = g(y)$. Na prática é bom considerar um elenco de funções típicas.

3.1 Relações entre Física e Modelagem Matemática

Um dos objetivos da Física é criar modelos matemáticos que permitam previsões e explicacões de fenômenos físicos.

A Matemática desempenha papel fundamental na aprendizagem da Física, mas nem sempre de uma maneira bem sucedida.

Em Física, a Matemática tem sido intimamente ligada à filosofia desse conhecimento, por 300 anos, transformando a Física da filosofia natural no que é a ciência Matemática de hoje.

Costuma-se dizer que a Matemática é a linguagem da Física, mas o que os físicos fazem com a Matemática é profundamente diferente do que os matemáticos fazem com isso, pois eles carregam significados nos símbolos de maneira diferente.

Perguntas sobre a natureza promoveram problemas e conceitos matemáticos. Conjecturas foram formuladas tendo em vista situações físicas e até soluções foram propostas usando o comportamento físico.

No contexto do Ensino Médio, é importante notar que vários dos principais conceitos de Matemática e Física convidam a sequência educativa entre os dois, por exemplo, pêndulos podem ser usados para demonstrar uma gama de fenômenos físicos e também, por exemplo, fornecer um ambiente para o estudo de Trigonometria.

Segundo [5] (2000)"a Modelagem Matemática pode ser considerada uma abordagem de um problema não matemático por meio da Matemática onde as características pertinentes de um objeto são extraídas com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras e representações em termos matemáticos são determinadas".

O objetivo do trabalho é usar a Física como motivação para o ensino da Matemática, especificamente, o assunto de funções, funções quadráticas e o estudo da parábola.

4 Atividades realizadas

Foram realizadas duas atividades envolvendo parábolas e Modelagem Matemática em conjunto com a Física em duas salas do 1^o ano do Ensino Médio em duas escolas diferentes da cidade de Ourinhos-SP, com o intuito de não apenas ensinar Matemática, como também mostrar que a Matemática e a Física caminham juntas, que é possível ensinar tais disciplinas de maneira prática e tangível com situações simples, com o auxílio desta poderosa ferramenta que é a Modelagem Matemática. É importante ressaltar, que nas situações estudadas, desprezou-se o atrito e a resistência do ar, pois apenas assim seria possível encontrar as equações aqui presentes. Ao final dos cálculos, descobriu-se que seria necessário resolver sistemas lineares, conteúdo de Matemática que seria visto apenas no ano seguinte, e por isso a maior parte dos cálculos foi realizada pelo professor, sem entrar em muitos detalhes. Em uma turma utilizou-se a regra de Cramer, e na outra o método do escalonamento, para ver qual dos dois caminhos seria o melhor.

4.1 O lançamento de foguetes

A primeira atividade realizada foi no Colégio Santo Agostinho, o lançamento de foguetes de acordo com as orientações da Olimpíada Brasileira de Astronomia. O objetivo deste estudo era encontrar uma equação para a trajetória do voo do foguete utilizando o que foi estudado no mesmo ano na disciplina de Física, embora sem saber ainda se tal feito seria possível, ou como issoseria feito.

Etapa 1: A história dos foguetes Os estudos foram iniciados com a história dos foguetes, pois parecia interessante despertar a curiosidade dos alunos com um contexto histórico. Começou-se fazendo uma discussão sobre o que eles sabiam sobre foguetes e viu-se que não sabiam tanta coisa assim. Selecionou-se então alguns vídeos no Youtube sobre vários tipos de foguetes ao longo da hitória da humanidade, seus usos e aplicações e como um foguete funciona. O novo conhecimento gerou perguntas e discussões, principalmente sobre viagens à Lua e exploração espacial. Chegaram até mesmo a cogitar a exploração de Marte! Ao final, concluiu-se que a trajetória de um foguete lançado na Terra sempre é de uma parábola, quando desconsideradas as forças de atrito e de resistência do ar, que nosso objetivo com a fabricação deles era estudar as funções quadráticas, cujo gráfico é uma parábola.

Etapa 2: A construção do foguete
A atividade deu-se início lendo os textos disponíveis no site da Olimpíada Brasileira de Astronomia sobre construção de foguetes para produzir nossos foguetes e uma base de

lançamento. Os foguetes foram construídos utilizando-se duas garrafas PET, pedaços de uma pasta de plástico, uma bexiga com água, tesoura, estilete e fita adesiva. A base de lançamento foi feita com canos de pvc, mas ficou diferente da base das instruções, pois a escola tinha alguns canos de diâmetro maior que o indicado, e pareceu apropriado aproveitá-los. Esta etapa foi uma das partes que os alunos mais gostaram, eles se dividiram em 4 grupos e fizeram seus foguetes com a orientação do professor, havia até mesmo um clima agradável de competição para ver quem faria o melhor e o mais belo foguete, entretanto, como não era uma coisa tão simples de se fazer, pareceu que o tempo gasto de 4 aulas foi muito grande.

Figura 4.1: A base de lançamento desmontada(fonte: próprio autor)

Figura 4.2: A base de lançamento montada(fonte: próprio autor)

Etapa 3: O estudo do foguete
Antes de lançar o foguete, era preciso entender como e porque o foguete voava. Re-

capitulando o vídeo assistido que mostrava o funcionamento do motor de um foguete real, foi proposta fazer algo semelhante usando uma reação de vinagre (ácido acético) com bicarbonato de sódio. O foguete sairia da base a 45 graus em um lançamento oblíquo e sua trajetória descreveria o movimento de uma parábola, cuja equação tentaríamos encontrar. O resto da aula foi utilizado pelos os grupos para pesquisarem em seus *smartphones* sobre o funcionamento do foguete, assunto que seria discutido na próxima aula.
Como já havia sido estudado naquele ano transformações gasosas e estávamos estudando Leis de Newton, como esperado os alunos conseguiram encontrar explicações satisfatórias para explicar o vôo do foguete: a reação do vinagre com o bicarbonato de sódio gerava muito gás carbônico, que aumentava a pressão dentro da garrafa hermeticamente vedada. Quando liberada a trava de segurança, o gás em alta pressão fazia uma força empurrando o líquido para trás, e o líquido, segundo a Terceira Lei de Newton, como reação, empurrava o gás para frente, fazendo o foguete decolar.

Etapa 4: O lançamento

Através de experimentação, concluiu-se que um bom lançamento utilizaria um frasco de 900 mL de vinagre misturado com 100 g de bicarbonato de sódio. O vinagre era colocado dentro do foguete e depois, com muita cautela, introduziam-se 4 cilindros feitos de guardanapo de papel cheios de bicarbonato, presos a uma linha. Quando soltos, a reação começava imediatamente, então era preciso rapidamente colocar a boca do foguete na base de lançamento para não perder muito gás. Após alguns segundos, a reação terminava, e era hora de soltar a trava de segurança e finalmente ver o foguete voar.
As únicas informações possíveis de se obter foram o ângulo de lançamento de 45 graus, o tempo de vôo obtido através da análise do vídeo no computador e o alcance horizontal medido através de uma trena de 3 metros. A última medição era a menos precisa, pois era impossível fazer uma medição perfeitamente em linha reta e o tamanho da trena piorava a situação. Decidiu-se então, para facilitar os cálculos, que o alcance horizontal seria aproximado para um valor inteiro.
Após vários lançamentos, foi uma experiência gratificante e divertida, os alunos puderam ver uma situação muitas vezes estudada em sala de aula acontecendo na prática, com a escola toda assistindo.

Figura 4.3: O foguete voando(fonte: próprio autor)

Etapa 5: O cálculo da parábola

Analisando um dos vídeos, obteve-se os seguintes resultados: alcance horizontal de 53 metros e tempo de vôo 2,5 segundos. Com esses dois dados e o ângulo de lançamento, já parecia possível realizar alguns cálculos. Para encontrar uma equação de parábola, era preciso 3 pontos dela. Estabaleceu-se que o foguete, apesar de não decolar do chão, poderia ser considerado como tal, a fim de facilitar os cálculos, e assim haveria um ponto de partida de coordenadas (0,0). Um segundo ponto fácil de determinar foi o momento quando o foguete caiu: (53,0). Uma sugestão para o terceiro ponto foi o ponto do vértice da parábola, pois sua coordenada x seria a metade do alcance horizontal (26,5) e sua coordenada y seria o ponto de altura máxima. A resolução do problema parecia muito mais simples do que o esperado!

Através do tempo de queda, sabendo que na horizontal havia um movimento uniforme, rapidamente calculou-se a velocidade horizontal:

$$\Delta x = vt$$

$$53 = 2,5v$$

$$v = 21,2m/s.$$

Era sabido dos alunos pelo estudo da composição de movimentos, que quando o ângulo de lançamento era de 45 graus, o módulo da velocidade horizontal era igual ao módulo da velocidade inicial na vertical. Também sabiam que o ponto de altura máximo era obtido utilizando-se metade do tempo de percurso, e ainda que neste ponto, a velocidade vertical era nula. Então:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{V + Vo}{2}$$

$$\frac{H}{1,25} = \frac{21,2 + 0}{2}$$

$$2H = 26,5$$

$$H = 13,25m.$$

E aí estava o último ponto: (26,5;13,25). Bastava então utilizar os 3 pontos para descobrir uma equação.
Utilizando a regra de Cramer, o resultado obtido foi:

$$f(x) = -0.0188679x^2 + x.$$

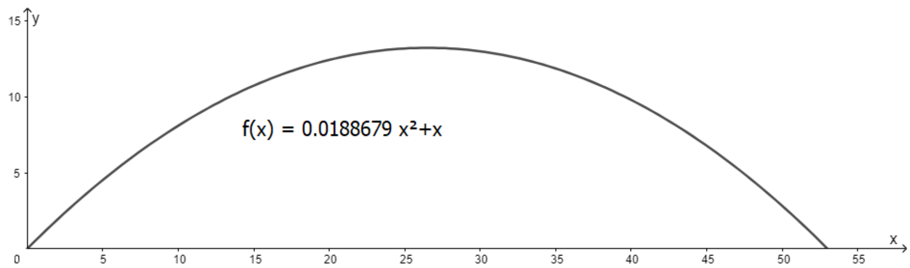

Figura 4.4: A parábola do foguete(fonte: próprio autor)

A regra de Cramer ainda não havia sido estudada, então esta parte teve uma abordagem apenas superficial. Coincidentemente, neste ano de 2020, estava lecionando as disciplinas de Matemática e Física para esta turma, que agora era uma sala de segundo ano do Ensino Médio, e durante as aulas online da quarentena começamos a estudar sistemas lineares e a regra de Cramer. Os alunos, já familiarizados, conseguiram entender o assunto com mais facilidade.

4.2 O experimento do plano inclinado

A segunda atividade realizada foi no colégio Padre João Bagozzi, consistia em observar uma bola que descia um plano inclinado partindo do repouso. Após percorrer o plano, a bola fazia uma curva por uma rampa que alterava o movimento para a horizontal, e assim ela inciava um lançamento horizontal. Foi explicado aos alunos (e já era sabido deles por conhecimentos prévios em Física) que durante a descida do plano inclinado a bola realizava um movimento retilíneo uniformemente variado, e que após deixar a rampa, ela realizava uma composição de movimentos, com movimento retilíneo uniforme na horizontal e movimento retilíneo uniformemente variado de queda livre na vertical, com trajetória parabólica. Ressaltou-se que os tipos de movimentos e a trajetória paraboólica só aconteciam quando a resistência do ar era ignorada, e como isso era impossível de se fazer, seria esperada alguma discrepância nos resultados, que deveria ser levada em consideração.

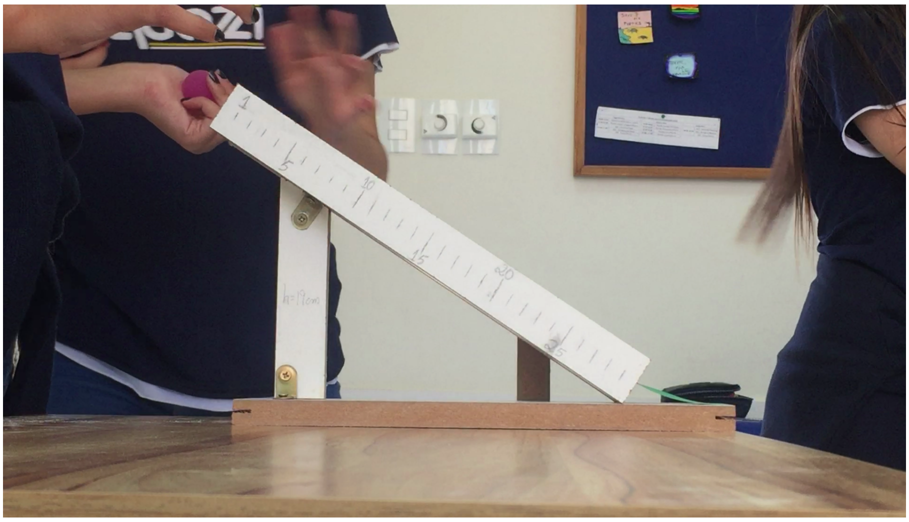

Figura 4.5: O plano inclinado(fonte: próprio autor)

Na ausência de instrumentos precisos de medição, fez-se uma escala em centímetros no plano, e após ele, havia uma fita métrica esticada no chão no caminho que a bola percorreria. Em pontos específicos da fita, havia uma trena na direção horizontal, para medir em que altura a bola passava em determinado ponto. Como não era possível medir os tempos, filmou-se uma série de lançamentos para depois, com o auxílio de um software editor de vídeo, determinar a posição da bola em posições específicas. Após realizar dez lançamentos e coletar os dados necessários no computador, era a hora de realizar alguns cálculos. O objetivo final era ver o quão próximo da realidade a parábola do movimento sem resistência do ar chegaria.

Etapa 1: o ângulo de inclinação do plano inclinado
O plano inclinado não possuía um ângulo notável de inclinação, primeiro fato observado pelos alunos, era diferente do que estavam acostumados, então era preciso de calculá-lo. Aí surgiu o primeiro problema: quais seriam as medidas que deveriam ser usadas para calcular o ângulo? Os alunos sabiam que deveriam usar as relações trigonométricas para realizar o cálculo, porém, por exemplo, não sabiam que valor deveriam medir no cateto adjacente. Entretanto, não havia um valor correto, os valores da hipotenusa e do cateto oposto dependiam do valor escolhido para o cateto adjacente.

Neste texto estão dois exemplos de medições feitas pelos alunos, com os respectivos cálculos de seno, cosseno e tangente do ângulo de inclinação, na tentativa de encontrá-lo.

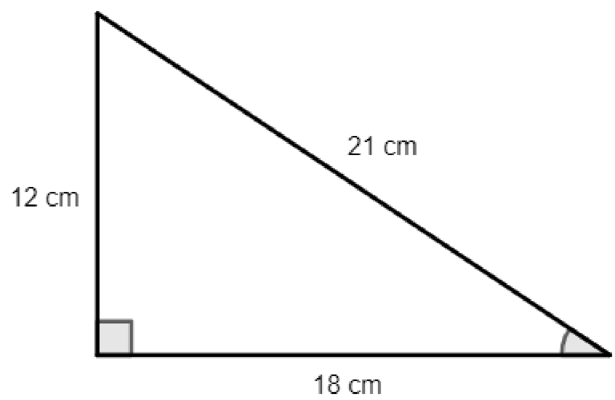

Figura 4.6: Uma medição do plano inclinado(fonte: próprio autor)

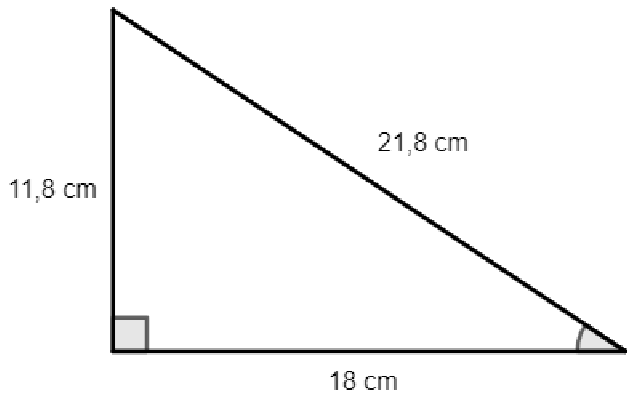

Figura 4.7: Outra medição do plano inclinado(fonte: próprio autor)

Logo nesta primeira etapa, os alunos perceberam que quando se faz cálculos na prática, coisas inesperadas acontecem. Não conseguiam entrar num consenso sobre quais valores deveriam usar, e não perceberam um erro que ficaria evidenciado no cálculo das funções trigonométricas. A tabela abaixo mostra os possíveis ângulos de inclinação, segundo os cálculos:

	sen	arcsen	cos	arccos	tg	arctg
Triângulo 1	0,5714	34,85	0,8571	31,01	0,6667	33,69
Triângulo 2	0,5413	32,77	0,8257	34,34	0,6556	32,25

Tabela 4.1: Valores das funções trigonométricas(fonte: próprio autor)

Assim surgia outro problema, pois o ângulo encontrado era diferente para cada relação trigonométrica. Como ninguém foi capaz de entender o motivo do erro, os alunos foram encorajados a verificar a relação do Teorema de Pitágoras, e para a surpresa deles, descobriram que os triângulos que eles mediram não eram retângulos, explicando os erros, pois os cálculos somente seriam válidos no caso de um triângulo retângulo. Já que o cateto adjacente nos dois triângulos tinham e mesma medida,

	$\Delta x(m)$	$s_m(m/s)$
Δt_1	0,001	0,03
Δt_2	0,005	0,15
Δt_3	0,012	0,36
Δt_4	0,017	0,51
Δt_5	0,019	0,57
Δt_6	0,023	0,69
Δt_7	0,028	0,84
Δt_8	0,030	0,90
Δt_9	0,034	1,02
Δt_{10}	0,036	1,08
Δt_{11}	0,040	1,20
Δt_{12}	0,045	1,35

Tabela 4.2: Valores de Δx, s_m e Δt(fonte: próprio autor)

foi escolhido o valor médio do cateto oposto (11,9 cm) e o valor da hipotenusa foi determinado através do Teorema de Pitágoras:

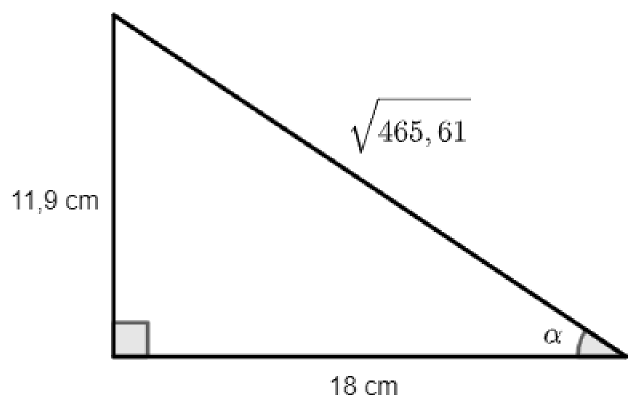

Figura 4.8: Última medição do plano inclinado(fonte: próprio autor)

O valor da hipotenusa permaneceu em formato de raiz quadrada, afinal, sendo este triângulo garantidamente retângulo, bastava usar apenas uma relação trigonométrica para descobrir o ângulo, optou-se pela tangente, pelo fato de que os catetos são números racionais:

$$tg\ \alpha = \frac{11,9}{18} = 0,6611 \Rightarrow arctg\ \ 0,6611 = 33,47^o.$$

Etapa 2: a velocidade no plano inclinado

Na segunda etapa, o objetivo era calcular com que velocidade a bola deixava o plano inclinado. Para isso, usou-se o editor de vídeo para determinar vários deslocamentos da bola e assim calcular a sua velocidade média em vários pontos da descida. Como o vídeo foi gravado a 30 quadros por segundo, havia intervalos de tempo sempre iguais a $\frac{1}{30}s$ cada vez que um quadro avançava, facilitando os cálculos.

Com isso havia um valor aproximado da velocidade da bola ao final do plano inclinado, pois ficou impossível medir o deslocamento no momento da curva. Os alunos notaram que o movimento era acelerado, porém não uniformemente acelerado, como era esperado conforme o que foi estudado em sala. Por que isso aconteceu? Após discussão com os alunos, os motivos mais citados foram: resistência do ar, atrito, deformação da bola e erros de medição.
Entretanto, ao fazer o gráfico de velocidade por tempo desses dados, os pontos se assemelhavam à figura de uma reta, o esperado para este tipo de movimento. Concluiu-ses então que as medições e cálculos faziam sentido, os pontos só não formavam uma reta perfeita por causa dos motivos anteriormente mencionados.

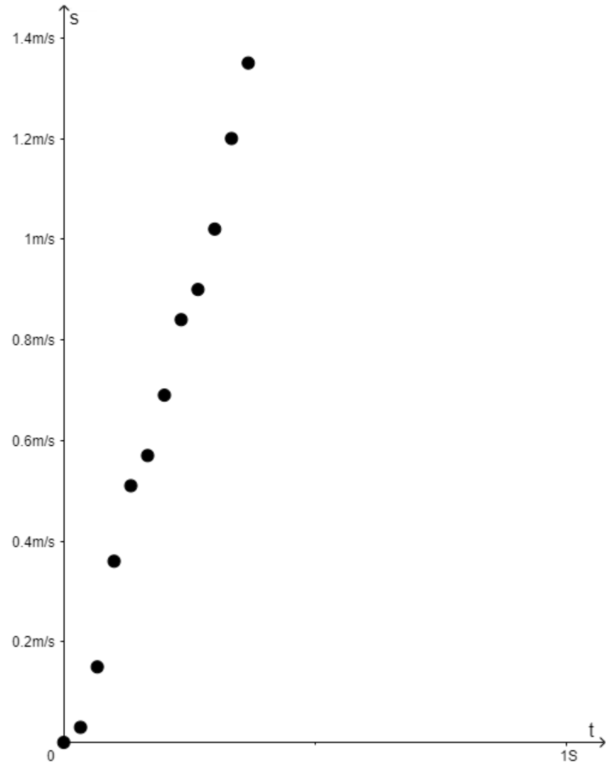

Figura 4.9: Gráfico da velocidade da bola na rampa em função do tempo(fonte: próprio autor)

Etapa 3: o lançamento horizontal
Com a velocidade inicial de lançamento, já era possível estimar a parábola procurada. A bola saía do plano com velocidade de $1,35m/s$ a uma altura $h = 0,813m$ em relação ao solo. Para fins de facilitar os cálculos, determinou-se este ponto como $A(0; 0,813)$, que era o x do vértice da parábola. Com apenas mais dois pontos seria possível calcular a parábola e para isso era necessário recorrer à Física.

Os alunos, empolgados com a ideia de encontrar uma equação que descrevesse a trajetória da parábola, logo afirmaram que bastaria usar a equação do "sorvetão", pois é uma equação do segundo grau. Entretanto, tal procedimento não funcionaria, pois a trajetória da bola era representada por uma composição de dois movimentos: na vertical, um movimento de queda livre; e na horizontal, um movimento uniforme. Ou seja, os pontos x da parábola eram dados por uma equação de movimento uniforme, enquanto que os pontos y de nossa parábola eram dados por uma equação de movimento uniformemente variado. Nesta parte os alunos ficaram um tanto quanto desanimados, visto que encontrar a equação da parábola pareceu ser mais difícil que o esperado. Após um momento de pausa e reflexão, assunto foi amplamente discutido, pois era necessário apenas mais dois pontos. Um aluno sugeriu então encontrar o ponto em qua a bola toca o chão, pois sua coordenada y seria garantidamente 0.

A fim de determinar o ponto $B(x, 0)$ da parábola, fez-se uso das equações do movimento da bola. Ela parte do ponto de altura máxima 0,813 m com velocidade horizontal 1,35 m/s e velocidade vertical nula sob aceleração da gravidade, tomada como $g = -9,81m/s^2$. Sendo assim, através das equações horárias dos respectivos movimentos, temos:

$$Eixo\ \ x : x = 1,35t.$$

$$Eixo\ \ y : y = 0,813 - \frac{9,81}{2}t^2.$$

Para descobrir a coordenada y do segundo ponto, era preciso descobrir o tempo de queda da bola na queda livre, este tempo é o tempo que a bola tem para se deslocar na horizontal:

$$0 = 0,813 - \frac{9,81}{2}t^2$$

$$9,81t^2 = 1,626$$

$$t^2 = \frac{1,626}{9,81}$$

$$t = \sqrt{0,1657}$$

$$t = 0,407s.$$

Assim, descobriu-se que a bola cairía por 0,407 segundos, tempo que teria para se deslocar na horizontal:

$$x = 1,35.0,407$$

$$x = 0,549.$$

Portanto, o segundo ponto da parábola é B(0,549;0), bastava apenas descobrir mais um ponto e seria encontrar uma equação para ela. Por sugestão de outro aluno, escolheu-se desta vez um valor de tempo que pudesse facilitar os cálculos: $t = 0,2s$. Dessa forma, usando o procedimento anterior, calculou-se as coordenadas do ponto C(x,y):

$$x = 1,35.0,2 = 0,27$$

$$y = 0,813 - \frac{9,81}{2}.0,2^2$$

$$y = 0,813 - 0,1962 = 0,617.$$

Portanto, o ponto procurado era C(0,27;0,617). Entretanto, o grande desafio ainda estava por vir. Chegou a hora de finalmente calcular a equação, que em teoria era bem simples, bastava trocar os pontos A, B e C na equação $y = ax^2+bx+c$, que levaria a um sistema de três equações com três incógnitas. O problema vinha do fato de os pontos terem valores muito diferentes dos usados nos problemas e exercícios realizados em sala, houve discrepância muito grande nos resultados obtidos e muita discussão entre eles, mesmo usando calculadora. Após um longo período de cálculos, apresentaram os seguintes valores para a, b e c, respectivamente: -2,70590821; 0,00466929 e 0,813. Assim, a parábola era:

$$f(x) = y = -2,70590821x^2 + 0,00466929x + 0,813.$$

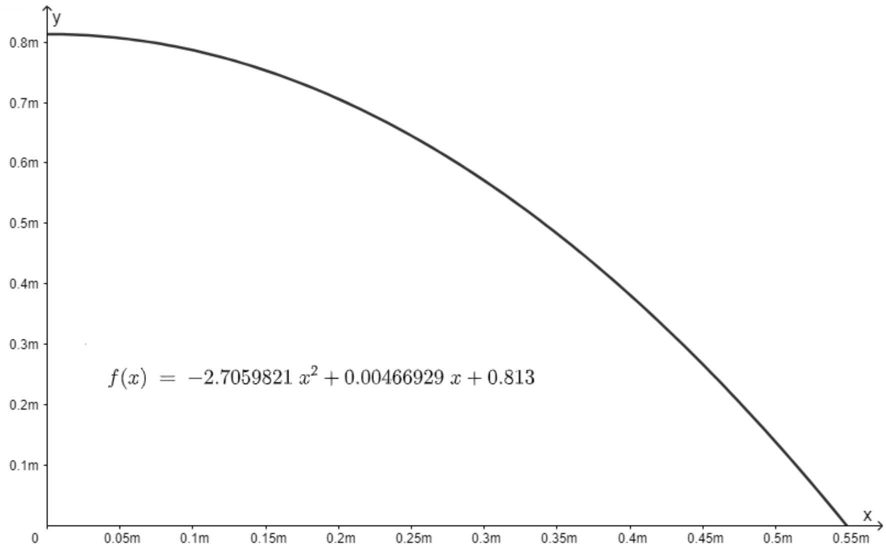

Figura 4.10: Trajetória da bola ao cair do plano inclinado(fonte: próprio autor)

O consenso geral entre a sala era de que o resultado obtido era no mínimo duvidoso, pois os coeficientes encontrados eram valores muito além da realidade deles. Especulou-se então a análise do vídeo com a trajetória da bola para ver se o valor real era próximo ao valor encontrado, lembrando que o cálculo era de uma situação perfeita de movimento, sem resistência do ar ou qualquer outro tipo de complicação, e que o resultado real deveria ficar apenas próximo dele.

Analisando os vídeos da queda da bola, foi possível determinar alguns pontos da trajetória da bola, e colocando estes pontos juntos ao gráfico anterior, para a surpresa deles, os pontos ficaram razoavelmente próximos da curva.

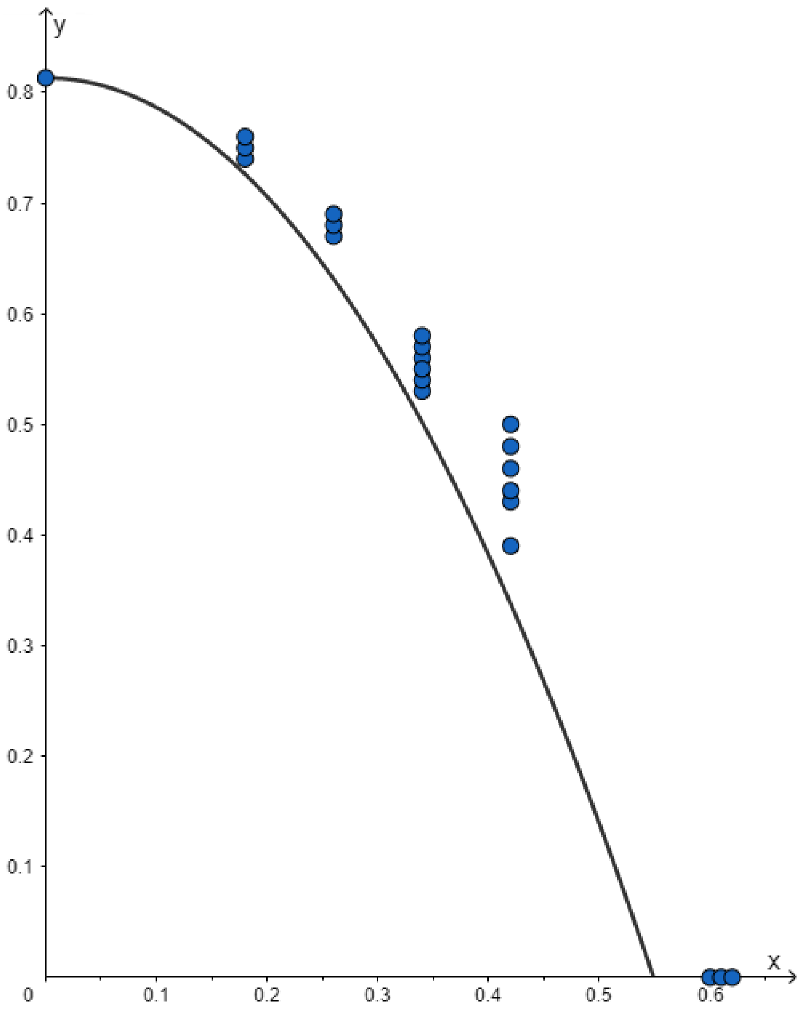

Figura 4.11: A trajetória real da bola(fonte: próprio autor)

Ao analisar o gráfico juntamente com os pontos, notou-se que algo estava errado, mas o que seria? Uma boa resposta veio do fundo da sala: a velocidade inicial calculada provavelmente estava errada. A observação fazia sentido, uma vez que os métodos de medição não eram muito precisos, e ainda havia o final da rampa, onde não foi possível calcular a velocidade. Propôs-se então que dados 3 pontos da trajetória real, uma nova paraábola seria calculada e também um novo gráfico.

Escolhidos os pontos A(0; 0,813), B(0,34; 0,56) e C(0,61; 0) e calculados novos valores para a, b e c, encontrou-se uma nova parábola:

$$y = -2,180256x^2 - 0,0028304x + 0,813.$$

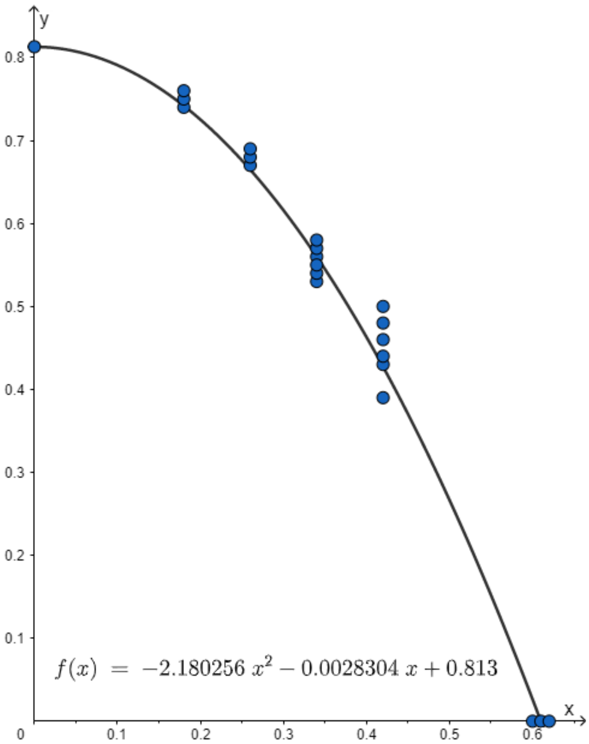

Figura 4.12: A trajetória real da bola com a nova parábola(fonte: próprio autor)

Neste novo gráfico finalmente havia um resultado satisfatório. Uma nova questão foi então lançada aos alunos: seria possível, através desse novo gráfico, encontrar a suposta velocidade real de lançamento?

A resposta para esta pergunta foi sim, e realmente não foi difícil fazer esta cálculo, pois o tempo de queda da bola era o mesmo do anterior (t=0,407s), e assim obteve-se o valor da velocidade de lançamento de aproximadamente 1,5m/s.

Nota: aqui também foi preciso recorrer a sistemas lineares, desta vez resolvendo com o método do escalonamento. Os alunos foram incentivados a não se preocuparem com este conteúdo, que seria estudado no ano seguinte, entretanto, diferentemente da outra turma, isso aconteceu com outro professor.

4.3 Reação dos alunos

Nas duas turmas, obteve-se reações positivas, tais quais serão listadas aqui. Em geral, as turmas a princípio estavam ansiosas com o trabalho que seria feito, mas pareciam muito mais preocupadas em enfrentar uma situação diferente do habitual da aula tradicional a que estavam acostumadas. Aos poucos, começaram a se sentir mais à vontade, justamente por estarem fazendo uma atividade diferente, sendo agentes da criação daquele conhecimento. Ficou evidente também que as atividades não atingiam todos os alunos, mas alguns deles ficaram especialmente cativados com as práticas, vendo as situações estudadas em sala acontecendo na sua frente. Um problema a se citar foi a dificuldade deles em realizar os cálculos das atividades, pois os números envolvidos não eram tão amigáveis quanto os números que estavam acostumados nas resoluções de exercícios, perceberam que a realidade pode ser muito diferente da teoria. Por esse motivo, foi sugerido a todo momento o uso de uma calculadora para realização dos cálculos, explicando a eles que o importante no momento não era saber efetuar cálculos com números decimais corretamente, mas sim entender os processos e as teorias envolvidas no problema. Com o problema dos números de lado, os alunos entraram num consenso de que tal prática parecia complexa à primeira vista, mas que seu uso com certa frequência poderia facilitá-la e trazer um conhecimento mais aprofundado e palpável, o que facilitaria a aprendizagem.

5 Trabalhos futuros

Segundo Rubem Alves, “Antes de mais nada, é necessário acabar com o mito de que o cientista é uma pessoa que pensa melhor do que as outras” e nesta direção pretendemos propor aos alunos atividades que envolvam a matemática, usando a física, tentando mostrar para os estudantes que a ciência está presente nas suas vidas e que é de possível acesso aos mesmos.

Nesse sentido pensamos em algumas atividades para serem aplicadas para alunos dos anos iniciais do Ensino Médio. Essas atividades são baseadas no livro “Física na Prática”, [3].

Atividade 1: Ponto de Gravidade

Para encontrarmos o ponto de gravidade, ou o centro de massa de um determinado objeto. Como seria para determinar o ponto de equilíbrio de um caderno? Nesse momento podemos perguntar aos alunos se ao invés de um caderno no formato retangular, se tivéssemos outra forma geométrica, como por exemplo, um quadrado, um círculo ou um triângulo. Qual seria seu centro de gravidade?

A atividade envolverá um pedaço de cartolina, ou a capa de um caderno. Será necessário fazer um furo na cartolina usando um percevejo ou um objeto pontudo. Construa um fio de prumo prendendo um clipe ou uma borracha em um pedaço de linha. Na outra ponta do fio dê um nó formando uma alça. Pendure a cartolina por um de seus furos num prego, de forma que possa oscilar livremente.

Marcamos então com um lápis a direção vertical dada pelo fio de prumo. Para quem não se lembra, o fio de prumo é uma linha absolutamente vertical na qual um peso está preso na ponta. Realizamos o mesmo procedimento utilizando outro furo. O ponto de encontro das linhas traçadas é o ponto de equilíbro, ou seja, o centro de gravidade da cartolina. Ao colocar o dedo nesse ponto, o aluno verá que será possível equilibrar a cartolina. Faça a mesma atividade, trocando os objetos geométricos.

Atividade 2: Medidas Físicas

Outra atividade que pode ser feita em sala de aula seria sobre medidas físicas. Para essa atividade serão necessários uma trena, um cronômetro e uma balança de precisão.

A atividade consiste em medir as dimensões de uma carteira e expressá-la em centímetros, metros e milímetros.

Feito isso, os alunos deverão pesar uma borracha e escrever esse peso encontrado em quilogramas, gramas e miligramas.

A última etapa dessa atividade o professor deve medir o tempo que um aluno leva para percorrer do fundo até o início da sala e pedir para o estudante anotar esse valor em segundos, minutos e como seria essa notação em horas.

O objetivo dessa atividade é observar o quanto é importante um padrão para as medidas e qual é a diferença quando se muda a grandeza.

O professor pode aproveitar essa atividade para iniciar o conteúdo de área e volume de objetos.

6 Conclusão

Concluímos que foi muito importante para os alunos essa abordagem para o ensino de conceitos da Física, pois os alunos tornaram-se parte da construção do conhecimento. As atividades facilitam a compreensão do conceito físico, desenvolvem o raciocínio lógico, a comunicação, a capacidade de aprendizagem ativa e de trabalho em grupo.

É importante também observar a mudança na forma de ensinar do professor, mudando o modelo conteudista e de aulas expositivas, para aulas prático-teóricas mostrando ao aluno que ele também pode ser um cientista-estudante.

O curso de mestrado do PROFMAT foi uma experiência muito enriquecedora para minha formação como professor da educação básica. O curso em si não prepara para uma melhor prática docente, pois as disciplinas são muito formais e exigiram muito de mim, entretanto, tamanha formalidade e dificuldade fizeram amadurecer meu conhecimento em Matemática, de tal maneira que durante as aulas eu me sentia muito mais confiante e com embasamento muito maior quando lecionando um assunto que foi estudado durante as matérias do mestrado. Anteriormente, alguns assuntos causavam certo receio e insegurança, pois são muitos os assuntos da Matemática e é difícil dominar todos eles, o PROFMAT foi gradativamente melhorando este quadro, de modo que me sentia confiante até mesmo diante das perguntas mais inteligentes do típico aluno dedicado que tem muita vontade de aprender, perguntas que para satisfazer tal aluno exigem um alto grau de conhecimento do assunto.

Referências

[1] Bassanezi, R. C.Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 2^a ed. São Paulo: Editora Contexto,2004.

[2] Blum, W., Ferri, R. B. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? In.: Journal of Mathematical Modelling and Aplication,Blumenau, v.1, n.12, p.45-58, 2009.

[3] Cardoso, H.B. Física na prática: contextualizando experimentos de mecânica. Fortaleza: Edições Demócrito Rocha, 2003.

[4] Eves, H. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[5] Fidelis,R., Almeida, L. M.W. Modelagem Matemática em Sala de Aula: contribuições para competências de refletir-na-ação. In: Anais VII EPEM. Disponível em $< www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_{O}rais/co0080.doc >$ Acessado em 09 de Maio de 2020.

[6] Galbraith, P. L., Clatworthy, N. J. Beyond standard models: meeting the challenge of Modelling. Educational Studies in Mathematics, v. 21, n. 2, p. 137-163, 1990.

[7] Giordani, R.J., A importância da Matemática no Ensino e estudo da Física, 2^a ed. São Paulo: Alphagraphics, 2013.

[8] Guidorizzi, L. H., Um Curso de Cálculo, 5^a ed. São Paulo: LTC Editora, 2001.

[9] Lima, E. L., Números e Funções Reais, 1^a ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2013.

[10] Neto, A. C. M., Fundamentos de Cálculo, 1^a ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2015.

[11] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., Fundamentos da Física volume 1, 6^a ed. São Paulo: LTC Editora, 2002.

[12] Nussenzveig, H. M., Curso de Física Básica volume 1, 4^a ed. São Paulo: Blucher, 2008.