

# COLÉGIO PEDRO II

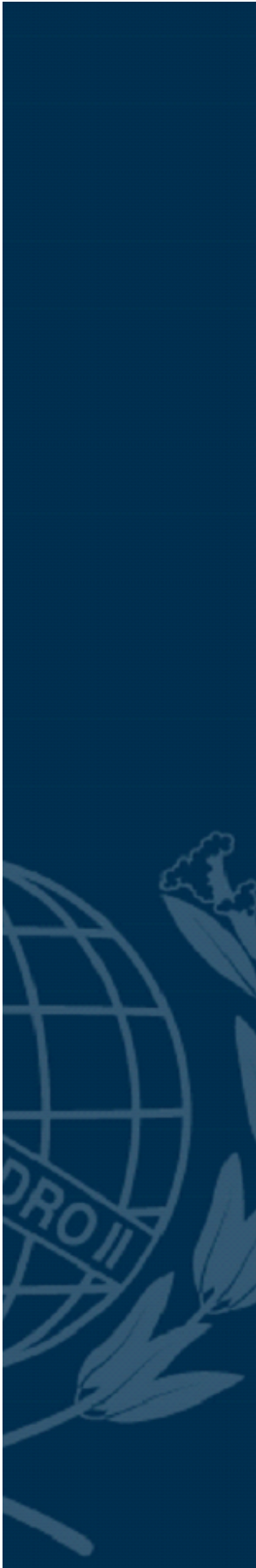
Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rafael da Silva Costa

TÓPICOS  
MATEMÁTICOS APLICADOS À SÍSMICA DE REFLEXÃO

Rio de Janeiro

2020



Rafael da Silva Costa

## TÓPICOS MATEMÁTICOS APLICADOS À SÍSMICA DE REFLEXÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup>. Líliliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Rio de Janeiro

2020

**COLÉGIO PEDRO II**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**  
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**  
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

C837 Costa, Rafael da Silva  
Tópicos matemáticos aplicados à sismica de reflexão / Rafael da Silva  
Costa. – Rio de Janeiro, 2020.  
60 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,  
Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teorema de Pitágoras. 3.  
Hipérbole. 4. Binômio de Newton. 5. Sismica de reflexão. I. Costa, Liliana  
Manuela Gaspar Cerveira da. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Rafael da Silva Costa

## TÓPICOS MATEMÁTICOS APLICADOS À SÍSMICA DE REFLEXÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

Banca Examinadora:

---

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Liliana Manuela Gaspar Cerveira  
da Costa  
Colégio Pedro II

---

Prof. Dr. Augusto Cesar Castro Barbosa  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Ivail Muniz Junior  
Profmat-Colégio Pedro II

---

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Marilis Bahn Karam  
Profmat-Colégio Pedro II

Rio de Janeiro  
2020

Esta pesquisa é dedicada a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão da mesma: Deus, família, alunos, amigos e professores.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta conquista.

A cada amigo e familiar que me apoiou neste momento de minha vida.

Por fim, quero agradecer aos meus professores do PROFMAT que ajudaram muito em meu crescimento acadêmico, e em especial à minha orientadora, Professora Liliana Manuela Costa, que me auxiliou desde a escolha do tema até a conclusão desta dissertação com muito carinho, paciência e dedicação.

*“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”.*  
*(Pitágoras)*

## RESUMO

COSTA, Rafael da Silva. Tópicos Matemáticos Aplicados à Sísmica de Reflexão. 2020. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

A sísmica de Reflexão é uma técnica de exploração geofísica, amplamente utilizada em diversas áreas. Esta técnica possui em seu arcabouço operacional um conjunto de fontes e receptores. As fontes geram ondas sísmicas artificiais, semelhantes às produzidas por um terremoto. Os receptores, por sua vez estão incumbidos de registrar o tempo de trânsito dessas ondas refletidas em subsuperfície. Este método baseia-se no fato de que ondas sísmicas propagam com diferentes velocidades, em diferentes meios geológicos. Através desta técnica é possível delimitar estruturas geológicas diferentes e investigar áreas com potencial econômico, principalmente reservatórios de petróleo. O objetivo deste trabalho é mostrar o potencial didático-pedagógico inerente à Sísmica de Reflexão. E para isso, é mostrado como alguns tópicos matemáticos contribuíram de forma significativa na implementação desta técnica. Mais precisamente, como o Teorema de Pitágoras forneceu subsídios para a modelagem do tempo de trânsito da onda sísmica. Além disso, é mostrado como a aplicação do Binômio de Newton para expoentes fracionários alcançou equações aproximadas, que modelam a geração de dados de forma bastante ajustada à realidade. Por fim, como o estudo da equação da hipérbole e seu gráfico associado contribuíram para a obtenção de informações à respeito de subsuperfície. Algumas atividades para sala de aula são apresentadas com a finalidade de ressaltar o propósito deste trabalho. Tais atividades podem ser aplicadas em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Sísmica de Reflexão; Teorema de Pitágoras; Binômio de Newton; Hipérbole.



## ABSTRACT

COSTA, Rafael da Silva. Tópicos Matemáticos Aplicados à Sísmica de Reflexão. 2020. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

Reflection seismic is a geophysical exploration technique, widely used in several fields. This technique has in its operational framework a set of sources and receivers. The sources generate artificial seismic waves, similar to those produced by an earthquake. The receivers, in turn, are responsible for recording the transit time of these waves reflected in the subsurface. This method is based on the fact that seismic waves propagate at different speeds, in different geological environments. Through this technique it is possible to delimit different geological structures and investigate areas with economic potential, mainly oil reservoirs. The goal of this work is to show the didactic-pedagogical potential inherent to the Seismic of Reflection. And for that, it is shown how some mathematical topics contributed significantly to the implementation of this technique. More precisely, as the Pythagorean Theorem provided subsidies for modeling the transit time of the seismic wave. In addition, it is shown how the application of Newton's Binomial for fractional exponents reached approximate equations, which are good model for the generation of data in a way very adjusted to reality. Finally, how the study of the hyperbola equation and its associated graph contributed to obtain information about the subsurface. Some classroom activities are presented in order to emphasize the purpose of this work. Such activities can be applied in classes of the final years of elementary and high school.

**Keywords:** Reflection seismic; Pythagorean theorem; Newton's binomial; Hyperbole.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema ilustrativo de uma aquisição sísmica realizada no mar . . . . .	13
Figura 2 – Representação de uma aquisição Sísmica terrestre e marítima . . . . .	16
Figura 3 – Vibroseis utilizado em levantamento terrestre . . . . .	17
Figura 4 – Canhão de ar utilizado em levantamento marítimo . . . . .	17
Figura 5 – Seção sísmica da Sub-bacia de Mundaú. Bacia do Ceará . . . . .	19
Figura 6 – Representação de uma aquisição Sísmica . . . . .	21
Figura 7 – Representação de uma aquisição Sísmica. A trajetória do raio refletido	23
Figura 8 – Geometria aplicada à propagação do raio . . . . .	23
Figura 9 – Configurações usadas em uma aquisição sísmica . . . . .	26
Figura 10 – Curva tempo/distância para um levantamento simétrico . . . . .	27
Figura 11 – Curva tempo/distância para um levantamento unilateral . . . . .	28
Figura 12 – Modelo com camada inclinada . . . . .	28
Figura 13 – Modelo com camada inclinada . . . . .	29
Figura 14 – Modelo geológico da atividade I . . . . .	33
Figura 15 – Diferença entre as trajetórias dos raios . . . . .	36
Figura 16 – Modelo geológico e geometria da proposta III . . . . .	36
Figura 17 – Valores de anomalias gravimétricas associadas a diferentes corpos causadores . . . . .	43
Figura 18 – Intervalo de densidade de alguns tipos de rochas . . . . .	44
Figura 19 – A Susceptibilidade magnéticas das principais rochas em Ámperes por metro . . . . .	47
Figura 20 – Esquema ilustrativo do método de Resistividade . . . . .	48
Figura 21 – Parâmetros utilizados para a determinação da resistividade . . . . .	48
Figura 22 – Intervalos de Resistividade e Condutividade alguns elementos encontrados na natureza. . . . .	49
Figura 23 – Processos de polarização Induzida. Polarização de membrana (A) e de eletrodo (B) . . . . .	51
Figura 24 – Representação das 8 primeiras linhas do Triângulo de Pascal . . . . .	53
Figura 25 – Quadrados utilizados na demonstração do Teorema . . . . .	55
Figura 26 – Hipérbole formada por uma seção perpendicular à geratriz do cone . . . . .	57
Figura 27 – Interseções geradoras das cônicas . . . . .	57
Figura 28 – Ponto genérico pertencente à Hipérbole . . . . .	59

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	SÍSMICA DE REFLEXÃO . . . . .	15
2.1	Principais Fontes Sísmicas . . . . .	15
2.2	Receptores . . . . .	18
2.3	Correções Aplicadas ao Dado . . . . .	18
2.4	Resultado Final: Seção Sísmica . . . . .	18
2.5	Aplicações da Sísmica de Reflexão . . . . .	20
3	TÓPICOS MATEMÁTICOS APLICADOS À SÍSMICA DE REFLEXÃO . . . . .	21
3.1	A aplicação do Teorema de Pitágoras . . . . .	22
3.2	A aplicação do Binômio de Newton . . . . .	24
3.3	A aplicação do Estudo da Hipérbole . . . . .	26
3.4	Modelo com Camada Inclinada . . . . .	28
4	PROPOSTA DE ATIVIDADE . . . . .	31
4.1	Proposta I: Calculando o tempo de trânsito e afastamento entre fonte e receptor . . . . .	31
4.2	Proposta II: Calculando a profundidade do mar . . . . .	33
4.3	Proposta III: Estimativa de Correção . . . . .	35
5	CONCLUSÃO . . . . .	38
	REFERÊNCIAS . . . . .	40
	APÊNDICES . . . . .	41
	APÊNDICE A – MÉTODOS DE INVESTIGAÇÃO GEOFÍ- SICA . . . . .	42
A.1	Método Gravitacional . . . . .	43
A.1.1	Correções aplicadas ao dado . . . . .	44
A.1.2	Aplicações da gravimetria . . . . .	45
A.2	MÉTODO MAGNÉTICO . . . . .	45
A.2.1	Correções aplicadas ao dado . . . . .	46
A.2.2	Aplicações dos Levantamentos Magnéticos. . . . .	47

A.3	MÉTODO DE RESISTIVIDADE. . . . .	47
A.3.1	Aplicações dos levantamentos de Resistividade. . . . .	49
A.4	MÉTODO DA POLARIZAÇÃO INDUZIDA. . . . .	50
A.4.1	Aplicações dos levantamentos de polarização induzida . . . . .	50
A.5	MÉTODO DE POTENCIAL ESPONTÂNEO . . . . .	51
	APÊNDICE B – TÓPICOS MATEMÁTICOS . . . . .	52
B.1	Binômio de Newton . . . . .	52
B.2	Teorema de Pitágoras. . . . .	54
B.3	Hipérbole . . . . .	56
B.3.1	Caracterização das Cônicas de Apolônio . . . . .	57
B.3.1.1	Hipérbole: definição e equações . . . . .	58

## 1 INTRODUÇÃO

O Planeta Terra é diversas vezes mencionado na literatura como um planeta vivo. Essa nomenclatura está diretamente vinculada à diversidade de organismos vivos nele existente e ao dinamismo de seus eventos. Terremotos, tsunamis e erupção vulcânica são apenas alguns exemplos dos fenômenos inerentes ao sistema Terra que confirmam sua constante atividade. Tais fenômenos modelam, alteram e reestruturam características internas e externas da Terra. Dentro deste contexto, muitas ciências procuram investigar o planeta. Acredita-se que dentro deste âmbito, a Geofísica ocupe um lugar de destaque.

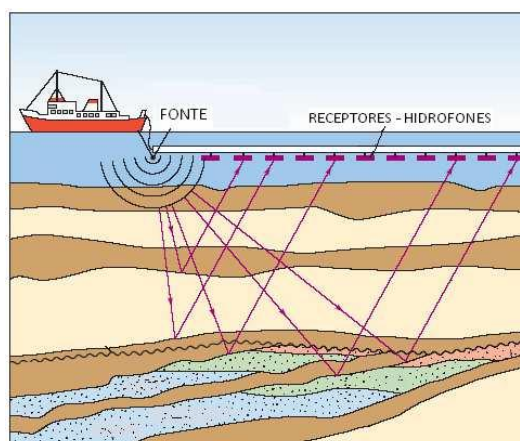
A Geofísica é a ciência que busca estudar a Terra, usando para tal princípios da Física. Utilizam-se técnicas exploratórias que não precisam ser aplicadas *in loco*, ou seja, faz-se o uso de métodos de investigação indireta. Sendo assim, realizando-se medidas na superfície ou próximo a ela, é capaz de se averiguar propriedades do interior da Terra. Nota-se que tais medições variam de acordo com a região explorada, com profundidade investigada e alguns outros parâmetros. Portanto, está diretamente ligada às propriedades físicas intrínsecas do interior da Terra.

De modo bastante abrangente, os métodos geofísicos podem ser subdivididos em dois grandes grupos: os que utilizam os campos naturais da Terra durante a sua aplicação e aqueles que exploram o uso de fontes artificiais. Assim, os métodos geofísicos que recebem destaque são: Sísmico, Gravitacional, Magnético e Elétrico. Maiores detalhes sobre esses métodos e as propriedades físicas por eles exploradas serão abordados no Apêndice deste trabalho.

Impulsionada pela indústria do petróleo, a Sísmica de Reflexão é a técnica geofísica mais utilizada no que se refere à quantidade de dados até hoje gerados. Este método se enquadra na classe dos procedimentos geofísicos que fazem uso de fontes artificiais. Uma fonte, de energia controlada, gera ondas sísmicas, semelhantes às produzidas por um terremoto. Tal energia liberada se propaga em diversas direções, sobretudo para subsuperfície, onde estará sujeita a inúmeros fenômenos, Figura 1.

Parte desta energia será reenviada à superfície, após ter sofrido reflexão em camadas inferiores. Na superfície, um conjunto de receptores detectará essa energia refletida e registrará o tempo decorrido durante todo o processo. Esse procedimento é repetido por diversas vezes e esse conjunto de dados é armazenado para que posteriormente passe por um tratamento. Deste modo, após o refinamento dos dados brutos, é possível inferir algumas informações sobre a região explorada, como profundidade das camadas, tipos de rochas ali existente e feições estruturais. Essa técnica pode ser empregada tanto em terra quanto no mar.

Figura 1 – Esquema ilustrativo de uma aquisição sísmica realizada no mar



Fonte: Carvalho, 2012

É notória a importância do papel que a educação desempenha na formação de um cidadão atuante. Inserido em uma sociedade cada vez mais globalizada, desenvolver conhecimentos que criem associações entre si e com outros é uma ferramenta valiosa. Sendo assim, dentro deste contexto, acredita-se que a interdisciplinaridade atua de forma significativa em duas vertentes. Primeiramente, é capaz de agir como o executor das correlações entre tais conhecimentos, transcendendo limites disciplinares. E, além disso, pode-se tornar uma metodologia de ensino facilitadora e mais atraente para os alunos.

A geofísica é uma ciência conhecidamente relacionada com diversas outras áreas. Geologia, Oceanografia, Física e Matemática são apenas alguns exemplos de campos correlatos a ela. Deste modo, a geofísica acaba se tornando um tópico bastante favorável no que se refere à interdisciplinaridade. A gama de assuntos matemáticos explorados pela geofísica é extensa, e vai desde temas básicos a avançados.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) institui para o Ensino Médio, o aprofundamento dos tópicos matemáticos abordados ao longo do Ensino Fundamental. E, para isso, prioriza uma visão mais integrada da matemática à realidade. O estudo de tópicos Geofísicos além de promover o conhecimento sobre tal ciência, contribui para tal correlação teoria e prática. Além disso, a atratividade de determinados assuntos, assim como desfragmentação dos conteúdos podem ser obtidos através desta interdisciplinaridade. Desta forma, esses fatores contribuíram substancialmente na motivação desde trabalho. Sendo assim, visando alcançar o objetivo desta dissertação, é mostrar para o leitor como alguns tópicos matemáticos, ensinados no ensino básico, são utilizados em técnicas de exploração de petróleo. E, com isso, mostrar a aplicabilidade de determinados assuntos, que muitas vezes são questionados por estudantes quanto à sua serventia. Apesar de ao longo do texto ser realizada uma revisão teórica dos temas, o foco aqui é a abordagem

matemática em seu aspecto mais operacional, verificando seu emprego na prática.

A metodologia aplicada neste trabalho é uma pesquisa bibliográfica, na qual consiste em abordar uma técnica de investigação geofísica, a Sísmica de Reflexão. Com isso, dentro dos trâmites que regem o método, mostrar como o Teorema de Pitágoras está associado à teoria de modelagem do tempo de percurso das ondas sísmicas. Será visto que este assunto está intimamente ligado à geometria construída entre as fontes e os receptores. Além disso, ainda explorando o tempo de percurso, será mostrado como a Expansão Binomial pode ajudar na obtenção de um modelo simplificado, porém bem ajustado à realidade. Por fim, será mostrado como o conhecimento a respeito da equação da Hipérbole e de seu gráfico associado pode ajudar na obtenção de informações sobre a área explorada.

Este trabalho foi desenvolvido em um total de cinco capítulos, incluindo esta parte introdutória. No capítulo 2 será discutida a Sísmica de Reflexão, que se trata de uma técnica Geofísica. Neste tópico será fornecido uma ideia geral sobre o assunto, abordando conceitos fundamentais, ferramentas, procedimentos e áreas de aplicação. No capítulo 3 é desenvolvida a metodologia traçada para este trabalho. Sendo assim, aí será abordada a modelagem do processo de aquisição sísmica, utilizando alguns tópicos matemáticos. No capítulo 4 são realizadas três propostas de atividades para serem feitas em sala de aula, explorando os temas abordados. E o capítulo 5 tratará da conclusão e das considerações finais acerca desta dissertação.

Em Apêndice é possível encontrar os conceitos de algumas outras técnicas de exploração Geofísica. Além disso, será realizada uma revisão teórica dos tópicos matemáticos que foram explorados ao longo deste trabalho.

## 2 SÍSMICA DE REFLEXÃO

Neste capítulo será visto o método de investigação geofísica, que é o alvo principal deste trabalho. Sendo assim, neste momento será fornecido um conhecimento geral à respeito da Sísmica de Reflexão. Alguns conceitos teóricos e detalhes operacionais serão visto no próximo capítulo, por se tratarem do desenvolvimento desta dissertação. Além disso, informações sobre outras técnicas de exploração geofísica podem ser encontradas no Apêndice A deste mesmo trabalho.

Historicamente, sabe-se que o primeiro levantamento sísmico ocorreu por volta de 1920. Este método tem sua implementação atrelada ao desenvolvimento dos estudos sobre terremotos. Durante um longo período na história, informações estruturais sobre subsuperfície terrestre eram obtidas somente através de escavações e cavernas. Contudo, com o desenvolvimento dos estudos sobre terremoto esse cenário mudou. Através das medições do tempo de trânsito das ondas sísmicas realizadas em observatórios, tornou-se possível adquirir informações sobre a estrutura interna da Terra. Com a evolução deste estudo, conhecimento sobre propriedades físicas das camadas foram alcançados. E, atualmente, até informações sobre o núcleo da Terra são conhecidas.

A Sísmica de Reflexão fundamenta-se dentro dos mesmos conceitos da sismologia dos terremotos, mas, evidentemente, com diferenças operacionais e escala. Diferentemente do que ocorre em um terremoto, em um levantamento sísmico as ondas são criadas artificialmente por fontes. A energia liberada por tais fontes são previamente controladas por um profissional (geofísico e/ou geólogo) de acordo com o interesse da exploração. A energia liberada para a subsuperfície sofrerá uma série de fenômenos, entre eles refração e reflexão. Sendo assim, parte desta energia será reenviada à superfície, onde um conjunto de aparelhos, chamado de receptores, detectam o movimento do terreno ocasionado por estas ondas. A técnica consiste em medir o tempo de duração de todo o processo, desde a liberação da energia pela fonte, até o registro da chegada nos receptores. Este tempo pode ser convertido em profundidade e, assim, as camadas na subsuperfície podem ser mapeadas.

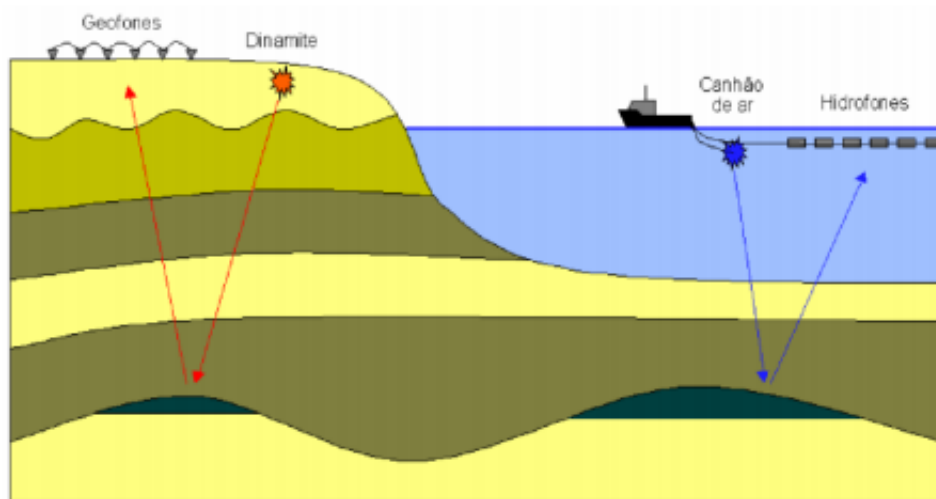
### 2.1 Principais Fontes Sísmicas

O Brasil é uma das referências mundiais no quesito exploração de petróleo em águas profundas e ultraprofundas (MORAIS J, 2013). Grande parte deste prestígio deve-se à contribuição vinda da sísmica de reflexão. Esta técnica pode ser aplicada no mar ou em terra, Figura 2. Naturalmente, o tipo de fonte sísmica utilizada vai mudar de acordo com a área investigada. Contudo, algumas características são comuns independente do



ambiente de exploração. As fontes precisam ter como requisitos: gerar energia que abranja um amplo conteúdo de frequência; gerar ondas apropriadas ao levantamento, evitando a degradação do sinal; forma de onda repetível e segura e aceitável no que refere-se a impacto ambiental (KEAREY, 2009).

Figura 2 – Representação de uma aquisição Sísmica terrestre e marítima



Fonte: Gerhardt, 1998

Durante um longo período, em levantamentos terrestres usou-se dinamite como fonte. Artefatos de dinamite eram enterrados a pequenas profundidades para uma melhor fixação e menor destruição da superfície. Apesar de ser considerado um tipo de fonte relativamente de baixo custo, a dinamite caiu em desuso. Fatores como a dificuldade de armazenamento e transporte, a obtenção de permissão para o uso e alta demanda de tempo para fixá-la no terreno contribuíram para isso. Além disso, o uso de dinamites deixava a desejar no quesito padrão repetível da fonte sísmica. Com isso, o uso de fontes não explosivas ganhou espaço neste contexto. Atualmente, o *vibroscis* é a fonte sísmica mais utilizada em levantamentos terrestres, Figura 3. Esta ferramenta consiste em um caminhão acoplado a um aparelho que imprime vibração ao solo.

Por outro lado, em levantamentos marítimos são geralmente usados canhões de ar comprimido *air guns*. Neste caso, as fontes são câmaras de ar confinado a alta pressão, mais precisamente entre 10 a 15 mil pascal. Quando acionado pelo operador, através de um dispositivo elétrico, o ar é liberado em formato de bolha, Figura 4. Este tipo de fonte é o padrão utilizado na aquisição em mar, devido à repetitividade e confiabilidade. Em alguns casos, a fim de se evitar efeitos indesejáveis de interferência e aumentar a intensidade do sinal transmitido, é comum o uso de arranjos de canhões de ar.

Uma variação do *air guns* seria o canhão de água. Neste caso, o ar comprimido não é liberado diretamente na lamina d'água, e sim utilizado como força motora para

mover um pistão que projeta um jato de água no meio. Devido à pressão hidrostática o jato implode, gerando um pulso sísmico de ondas acústicas.

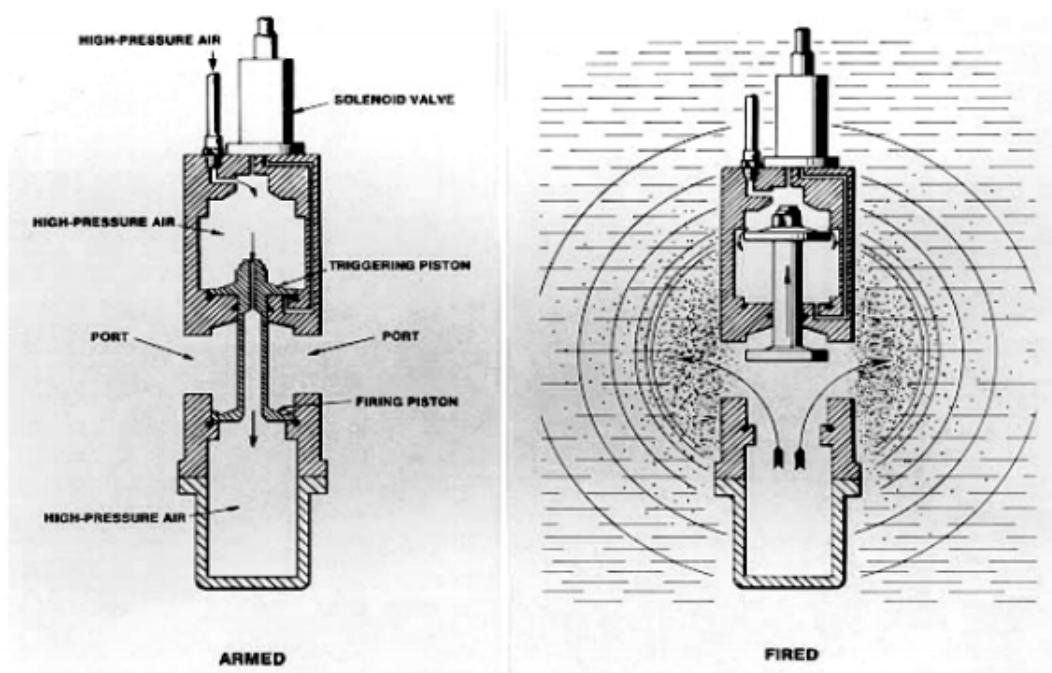
Figura 3 – Vibroseis utilizado em levantamento terrestre



Fonte: Página do The Cornell Daily Sun

1

Figura 4 – Canhão de ar utilizado em levantamento marítimo



Fonte: <http://www.bolt-technology.com>

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://cornellsun.com/>>. Acesso em: 14 mar. 2020.

## 2.2 Receptores

Os receptores são responsáveis por detectar o movimento do terreno proporcionado pelas ondas sísmicas. Esta aferição é bastante sensível, pois o que é feito na realidade é a medição da velocidade das partículas do meio na direção vertical. Em levantamentos terrestres estes aparelhos são nomeados de *geofones*. Em aplicações feitas no mar, aquisições marítimas, o aparelho é chamado de *hidrofone* e é responsável por medir a diferença de pressão causada pela passagem de energia.

## 2.3 Correções Aplicadas ao Dado

Após a obtenção dos dados e o seu armazenamento em arquivos, é de suma importância a aplicação de determinadas correções aos tempos de reflexão registrados. Estes ajustes são realizados com o propósito de gerar uma imagem sísmica final o mais condizente possível com a seção geológica real, para que assim não se cometa equívoco na interpretação, como, por exemplo, a suposição de feições geológicas inexistentes.

A primeira correção, *Correção Estática de Elevação*, deve ser feita devido ao desnível entre fontes e receptores. Como será visto no próximo capítulo, durante a modelagem do método, pressupõe-se que o conjunto fonte-receptor esteja no mesmo nível. Contudo, provavelmente esse fato não acontece e, por se tratar de medições em frações de tempo muito pequenas, essa diferença pode gerar grandes problemas à qualidade do dado.

Além disso, existe ainda a *Correção Estática de Intemperismo*, que está ligada à heterogeneidade das primeiras dezenas de metros da camada intemperizada. Apesar de pequena, quando comparada ao pacote geológico explorado, essa camada produz uma zona de baixa velocidade de ondas sísmicas, anômalas às da região circundante.

Em levantamentos marítimos não ocorre o desnível entre os receptores, não sendo assim necessário a Correção de Elevação. Contudo, a segunda correção se faz necessária devido à lamina de água causar uma zona de baixa velocidade, assim como na camada intemperizada. Essas etapas de correções são extremamente importante e são aplicadas durante o tratamento dos dados.

## 2.4 Resultado Final: Seção Sísmica

De modo resumido, a Sísmica de Reflexão pode ser entendida como uma técnica dividida em três grandes etapas, sendo elas: a aquisição, o processamento e a interpretação dos dados. Cada uma das etapas possuem sua relevância dentro do processo como um todo e, de certa forma, uma dependência com as demais. Uma etapa mal realizada acarretará prejuízo às fases subsequentes.

O processamento de dados sísmicos é uma etapa que pode ser desmembrada

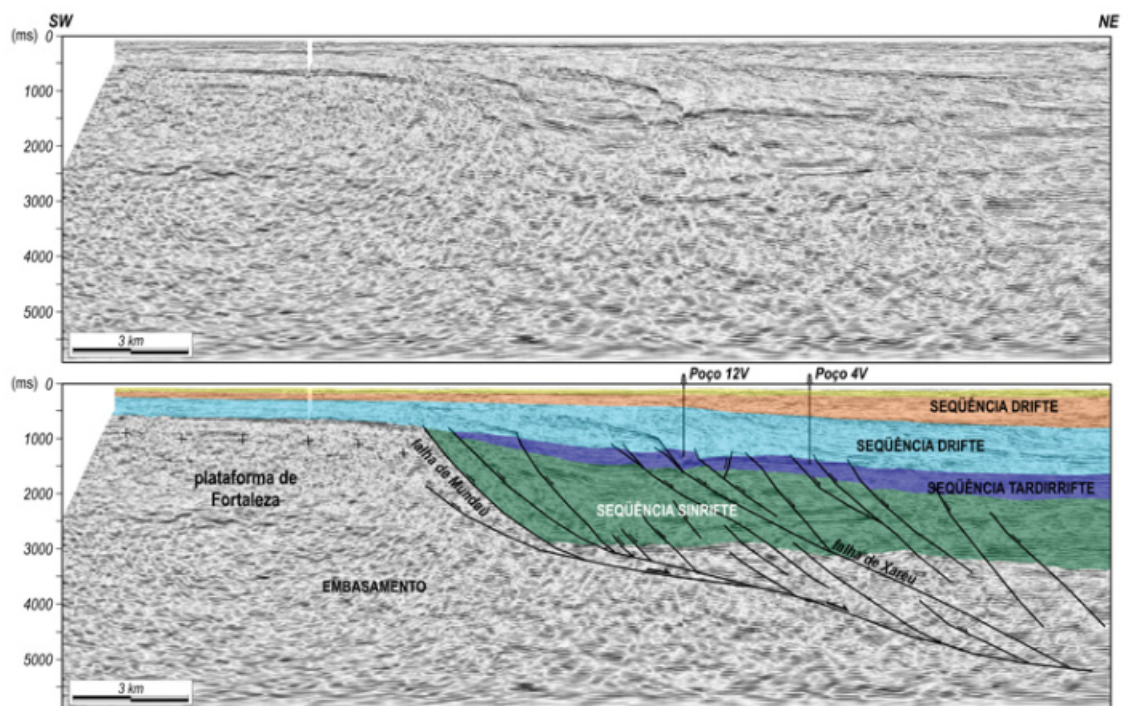
em diversas outras. Os procedimentos realizados dentro do processamento, inclusive as correções mencionadas na seção anterior, têm como objetivo minimizar distorções e erros que são intrínsecos ao levantamento. Além disso, busca maximizar atributos e eliminar ruídos indesejáveis.

Por fim, tem-se a etapa da interpretação dos dados sísmicos. Esta fase é geralmente realizada por um geólogo ou um geofísico que, além de possuir conhecimentos geológicos, tenha o entendimento de como o processo de aquisição foi realizado. É este profissional que vai interpretar a imagem sísmica gerada e, a partir disto, identificar feições geológicas e entender processos tectônicos.

Acredita-se valer a ressalva que a imagem gerada pela sísmica não é exatamente uma foto da subsuperfície. Para que possam ser identificadas as feições geológicas da seção, é preciso ainda uma análise atenta e minuciosa do intérprete. Evidenciando, assim, a importância da fase de interpretação dos dados.

A Figura 5 mostra o resultado final de um imageamento sísmico antes e depois da interpretação. A figura mostra um corte de uma aquisição realizada na Bacia do Ceará. Neste caso a imagem é mostrada em função do tempo, porém, também poderia estar em função da profundidade.

Figura 5 – Seção sísmica da Sub-bacia de Mundaú. Bacia do Ceará



Fonte: Antunes, 2008

## 2.5 Aplicações da Sísmica de Reflexão

A sísmica de reflexão é uma técnica aplicada em várias áreas e em diferentes níveis de escalas. Na engenharia, esta técnica pode ser utilizada para um estudo preliminar do solo, onde será feita uma determinada construção. Dentro deste contexto, podem ser feitas inúmeras análises, como por exemplo: cálculo da espessura de um pacote de solo, estimativa da profundidade do lençol freático, classificação da rigidez de materiais que serão escavados para construção, entre outros.

Na geologia, esta técnica pode servir como ferramenta que ajude a entender o processo de formação de algumas feições geológicas, como o processo de formação de uma bacia sedimentar. Além disso, pode ser utilizada na busca por recursos minerais.

Ainda no campo geológico, acredita-se que a maior aplicação da sísmica de reflexão, pelo menos no que diz respeito à quantidade de dados gerados, seja a exploração de petróleo e gás. A perfuração de um poço de petróleo é uma atividade bastante dispendiosa em tempo e dinheiro. Deste modo, a escolha de um local de perfuração tem que ser feita cuidadosamente, minimizando as chances de insucesso. Além de encontrar o produto desejado, é preciso que se tenha uma estimativa se a extração do mesmo é rentável ou não.

É exatamente neste ponto que a contribuição da sísmica de reflexão é imprescindível. A técnica funciona como uma ferramenta de sondagem, que mapeia áreas com feições geológicas com potencial para armazenamento destes recursos fósseis e, conseqüentemente, com valor econômico elevado.

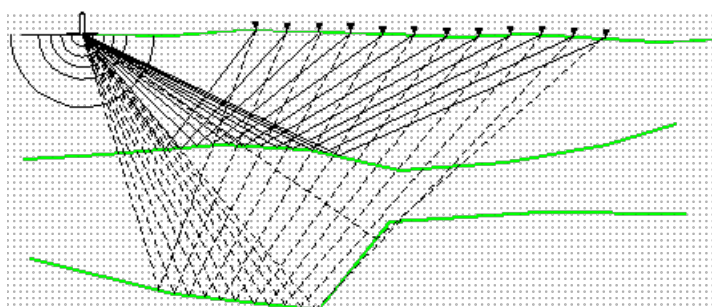
### 3 TÓPICOS MATEMÁTICOS APLICADOS À SÍSMICA DE REFLEXÃO

Este capítulo concentra a ideia principal deste trabalho. Nesta parte será mostrada a aplicação de alguns tópicos matemáticos à Sísmica de Reflexão. Acredita-se valer a ressalva de que não é intenção deste texto explorar todos os temas matemáticos atrelados à sísmica, e sim, só alguns previamente definidos. Deste modo, será apresentado como o Teorema de Pitágoras, o Binômio de Newton e o estudo de Hipérbole contribuíram para o desenvolvimento da técnica, que é tida atualmente como uma das principais ferramentas para a exploração de petróleo.

Como já mencionado anteriormente, a Sísmica de Reflexão possui dentro do seu arcabouço operacional um conjunto de fontes e receptores. A fonte gera uma quantidade de energia, que propagará em toda as direções, especialmente para a subsuperfície. Esta energia sofrerá uma série de eventos em subsuperfície e parte dela, devido à reflexão, será reenviada à superfície, onde sua presença será detectada pelos receptores. Com base no registro do tempo de ocorrência de todo o processo descrito, é possível adquirir informações sobre estruturas e formações litológicas da área de exploração.

Quando a fonte sísmica faz a liberação da energia, diz-se tecnicamente que a mesma liberou um pulso sísmico. Este pulso (energia) é liberado para todas as direções e, se propaga de forma radial, a partir da fonte, para o meio investigado, Figura 6. A velocidade de propagação desta onda não depende da fonte, mas sim do meio em que se propaga. Sendo este meio homogêneo, a velocidade será a mesma em todas as direções. Por esta razão, a energia transitará de forma esférica.

Figura 6 – Representação de uma aquisição Sísmica



Fonte: EEG- Geofísica<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://eeg-geofisica.com.br/>>. Acesso em: 14 mar. 2020

Para realizar uma análise da trajetória da energia sísmica, faz-se necessário a utilização do conceito de raio sísmico. Segundo Keary (2009), o raio sísmico pode ser entendido como fino feixe de energia sísmica que aponta na direção da propagação e é perpendicular à superfície esférica do campo energético, como pode ser visto na Figura 6.

Após a obtenção dos dados no campo, essas informações são processadas de modo a gerar uma imagem da subsuperfície investigada, chamada de seção sísmica. É com base nesta seção, que profissionais poderão estimar propriedades e características da área investigada. É de suma importância ressaltar que a seção sísmica é uma estimativa da área, e não uma cópia fiel da seção geológica. As seções apresentam diferenças que não devem ser desprezadas pelos intérpretes.

Primeiramente, as seções sísmicas são criadas tendo como parâmetro o tempo. Por outro lado, as informações sobre a geologia da área são demandadas em profundidade. Para gerar tal conversão, tempo-profundidade, é fundamental que o profissional tenha ciência de como os dados foram obtidos. É de extrema importância o conhecimento da geometria de aquisição, como será apresentada a seguir.

### 3.1 A aplicação do Teorema de Pitágoras

Com o propósito de se extrair o máximo de informação confiável da seção sísmica, torna-se imprescindível o entendimento da modelagem da técnica de aquisição dos dados. Dentro deste contexto, a geometria de aquisição desempenhará um papel fundamental na obtenção das equações envolvidas. A geometria de aquisição é a disposição, previamente definida, entre as fontes e receptores. O número de fontes, a quantidades de receptores, a distâncias entre uma determinada fonte a um receptor são alguns exemplos de parâmetros que influenciarão na obtenção dos dados.

Começa-se com um modelo simples, de camada plana paralela à superfície, com uma espessura de medida  $z$  e velocidade de propagação de onda sísmica  $V$ . Além disso, adota-se um afastamento entre fonte e receptor de medida  $x$ , Figura 8.

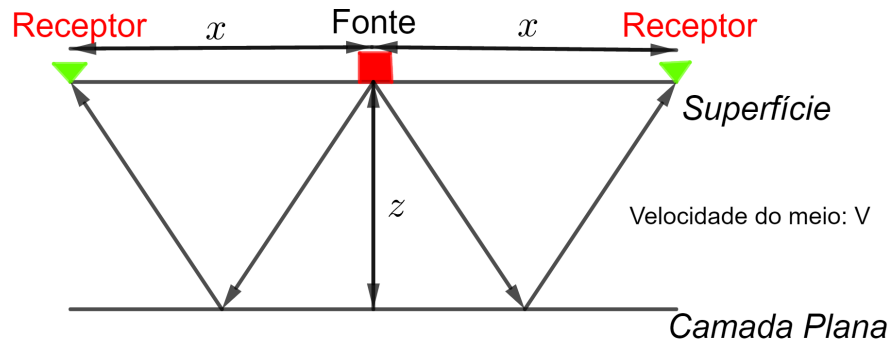
Para obter a modelagem do tempo de trânsito  $t$  deste raio sísmico através de uma relação matemática, precisa-se além da velocidade, da distância percorrida pelo o mesmo. É neste ponto que o Teorema de Pitágoras contribui de forma significativa.

Toma-se o ponto médio  $H$  entre a fonte e o receptor, Figura 8. Pelos princípios da Física, sabe-se que o ângulo do raio de incidência é igual ao ângulo do raio refletido em relação à normal. Além disso, como a superfície e a camada plana são paralelas, os triângulos  $FHI$  e  $HIR$  são congruentes. Logo  $\overline{FI} = \overline{IR}$ , as distâncias percorridas pelos raios são iguais.

Com isso, a trajetória do raio vai coincidir com as hipotenusas de dois triângulos retângulos congruentes. Sendo  $\overline{FI} = d$  e Com base no triângulo  $FHI$  tem-se:

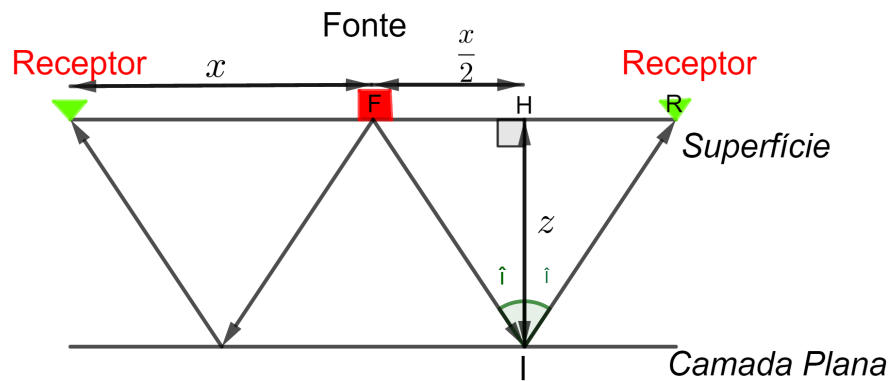


Figura 7 – Representação de uma aquisição Sísmica. A trajetória do raio refletido



Fonte: O autor, 2020

Figura 8 – Geometria aplicada à propagação do raio



Fonte: O autor, 2020

$$d^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + z^2 \quad (3.1)$$

$$d^2 = \frac{x^2}{4} + z^2 \quad (3.2)$$

$$d^2 = \frac{x^2 + 4z^2}{4}, \quad (3.3)$$

como  $d$  é uma distância,  $d > 0$ ,

$$d = \frac{\sqrt{x^2 + 4z^2}}{2}. \quad (3.4)$$



Deste modo, pode-se concluir que a distância total percorrida pelo raio refletido na primeira interface, desde a fonte até o receptor é dado por  $2d = \sqrt{x^2 + 4z^2}$ . Sendo assim, o tempo de trânsito do raio sísmico pode ser alcançado por

$$V = \frac{2d}{t}. \quad (3.5)$$

Resolvendo em ordem a  $t$ ,

$$t = \frac{2d}{V} \quad (3.6)$$

, e usando a equação (3.4),

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 4z^2}}{V}. \quad (3.7)$$

Algumas observações podem ser feitas a respeito da equação acima. Apesar de a mesma apresentar quatro incógnitas, duas serão conhecidas. O afastamento fonte-receptor  $x$  é definido antecipadamente na geometria de aquisição. Além disso, o tempo  $t$  é o valor calculado pela técnica. Com isso, os valores desconhecidos são apenas a profundidade  $Z$  e a velocidade  $V$ , parâmetros inerentes à área explorada. Contudo, o tempo pode ser calculado para outros receptores, com diferentes valores de afastamento, originando outras equações nas variáveis  $V$  e  $z$ . Considerando duas destas equações e o sistema delas resultantes, as medidas desconhecidas podem ser aproximadas.

### 3.2 A aplicação do Binômio de Newton

Com base no que foi dito, pode-se ter a ideia equivocada de que com apenas dois pares de informações, contendo tempo e afastamento, seja o suficiente para resolver o sistema e encontrar a velocidade e a profundidade. Entretanto, na realidade esses parâmetros não são calculados de forma tão simplista. O método de aferição do tempo traz intrínseco uma série de aproximações, que gera a propagação de pequenas discrepâncias em relação à realidade. Por exemplo, dificilmente uma camada geológica será homogênea. Dentro de uma mesma camada existem partículas similares, mas essencialmente distintas, com velocidade de propagação de ondas sísmicas diferentes. Além disso, em um levantamento marítimo, por exemplo, os receptores não ficam estáticos devido ao balanço do mar.

Sendo assim, por diversas razões, o cálculo da velocidade é feito através de uma análise estatística computadorizada. Apesar da sofisticação desta etapa dentro do processamento do dado sísmico, é totalmente viável desenvolver aqui o conhecimento matemático que rege este estágio.

A equação (3.7) pode ser reorganizada da seguinte maneira:

$$t = \frac{\sqrt{4z^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4z^2} + 1\right)}}{V}, \quad (3.8)$$

$$t = \frac{2z}{V} \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2}{4z^2} + 1}\right), \quad (3.9)$$

$$t = \frac{2z}{V} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2z}\right)^2 + 1}\right), \quad (3.10)$$

$$t = \frac{2z}{V} \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{2z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

É exatamente neste ponto que a teoria do Binômio de Newton de expoente fracionário fará sua contribuição nesta técnica e proporcionará uma interpretação mais criteriosa da equação do tempo. Usando o desenvolvimento binomial, a equação (3.11) pode ser expandida para:

$$t = \frac{2z}{V} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2z}\right)^2 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x}{2z}\right)^4 + \dots\right] \quad (3.12)$$

Em relação à equação acima, algumas considerações devem ser feitas. Os valores de  $z$  e  $V$  são inerentes à área explorada e, portanto, na equação serão constantes. Deste modo, essa equação é uma relação que expressa o comportamento do tempo de trânsito do raio sísmico em função do afastamento fonte receptor.

Ainda com base nesta equação, ao tomar-se a seguinte suposição,  $x = \frac{z}{2}$ . Neste caso, por exemplo, o terceiro termo do desenvolvimento será:

$$\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x}{2z}\right)^4 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\frac{z}{2}}{2z}\right)^4 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0,00048 \quad (3.13)$$

Ou seja, nesta situação, esta parcela do desenvolvimento contribui com menos de 0,05% no valor do tempo.

Na suposição acima, a razão  $\frac{x}{z} = \frac{1}{2}$  e a contribuição do terceiro termo é muito pequena no valor total do tempo. Na realidade do levantamento sísmico, a profundidade das camadas  $z$  são bem maiores que os afastamentos  $x$ . Por este motivo, a razão  $\frac{x}{z}$  é muito menor que 1. Sendo assim, a equação (3.12) pode ser truncada no segundo termo do desenvolvimento. Então, tem-se

$$t \approx \frac{2z}{V} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2z}\right)^2\right] \approx \frac{2z}{V} + \frac{x^2}{4Vz}. \quad (3.14)$$

Esta é a expressão da relação entre tempo e afastamento mais utilizada no processamento dos dados sísmicos.

### 3.3 A aplicação do Estudo da Hipérbole

Para a aplicação do levantamento sísmico, diversas configurações para geometria podem ser adotadas. A escolha mais adequada estará diretamente ligada aos interesses da exploração, características da área investigada e limitações da técnica. De modo geral, a configuração do conjunto fonte-receptor pode ser dada de duas maneiras. Os receptores podem ser espalhados em ambos os lados em relação à fonte, Figura 9A, ou em apenas um dos lados, Figura 9B. Em levantamentos terrestres, a menos que ocorra um impedimento local, a primeira configuração é a mais utilizada. Por outro lado, este arranjo fica inviável em uma aquisição marítima, visto que um navio é utilizado para rebocar o conjunto. Deste modo, a configuração com receptores em apenas um dos lados é aplicada.

Como visto na seção anterior, o tempo adquirido pela técnica é medido em função do afastamento fonte-receptor. A equação (3.7) dá

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 4z^2}}{V}. \quad (3.15)$$

Como ambos os membros são não negativos, pode-se passar ao seus quadrados e obter

$$t^2 = \frac{x^2 + 4z^2}{V^2}, \quad (3.16)$$

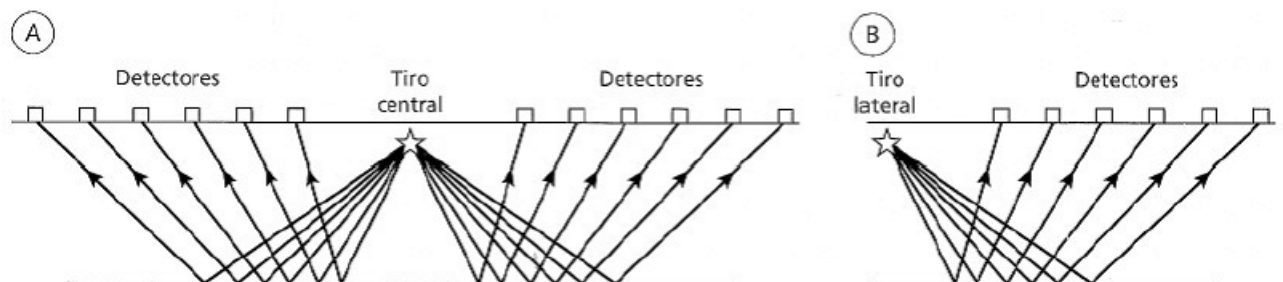
$$t^2 - \frac{x^2}{V^2} = \frac{4z^2}{V^2}. \quad (3.17)$$

Dividindo a equação por  $\frac{4Z^2}{V^2}$ ,

$$\frac{t^2}{\frac{4z^2}{V^2}} - \frac{x^2}{4z^2} = 1. \quad (3.18)$$

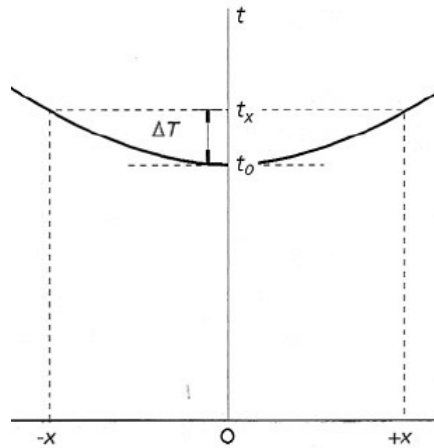
Nota-se que a equação acima é a forma padrão de uma hipérbole.

Figura 9 – Configurações usadas em uma aquisição sísmica



Analisando o primeiro arranjo, Figura 9A, em que os receptores ficam espalhados simetricamente em ambos os lados da fonte, tem-se uma hipérbole simétrica em relação ao eixo do tempo, Figura 10. Nota-se que na aplicação da hipérbole à Geofísica, como o tempo é usado como um dos eixos, naturalmente o gráfico apresentará apenas um ramo da curva.

Figura 10 – Curva tempo/distância para um levantamento simétrico



Fonte: Keary (2009)

Neste gráfico, a interseção da hipérbole com o eixo do tempo tem uma interpretação significativa para a análise dos dados. Neste ponto, o afastamento será zero, ou seja,  $x = 0$ . Substituindo esse valor na equação que rege o movimento, tem-se:

$$t^2 = \frac{x^2 + 4z^2}{V^2}, \quad (3.19)$$

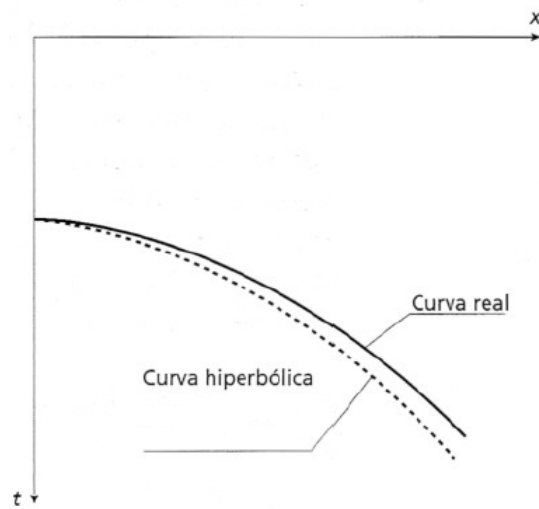
$$(t_0)^2 = \frac{4z^2}{V^2}, \quad (3.20)$$

$$t_0 = \frac{2z}{V}. \quad (3.21)$$

Neste caso,  $t_0$  é o tempo de percurso do raio que refletiu verticalmente, percorrendo a primeira camada, sem se afastar da fonte. Esta informação pode ser utilizada na estimativa da espessura desta feição geológica.

No caso da outra configuração Figura 9B, como os receptores ficam localizados em apenas um dos lados, a curva que surge é uma parte de um dos ramos da hipérbole. Sabe-se que ao longo do processo, diversas aproximações são feitas. Apesar disso, a modelagem funciona de forma bastante satisfatória, principalmente, para pequenos afastamentos entre fonte e receptor, como pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Curva tempo/distância para um levantamento unilateral

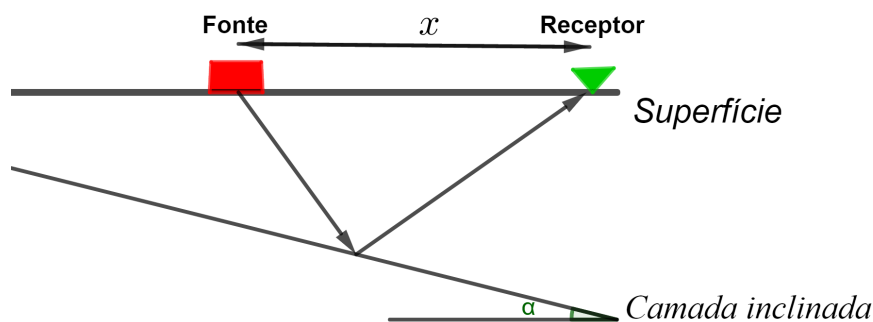


Fonte: Keary (2009)

### 3.4 Modelo com Camada Inclinada

As equações apresentadas nas seções anteriores modelam o procedimento de aquisição sísmica para camadas paralelas. Esse tipo de Configuração é considerado um modelo mais simplificado. As estruturas em subsuperfície estão sujeitas a diversas interações tectônicas. Com isso, diferentes feições geológicas podem ser formadas. Camadas inclinadas e camadas dobradas são exemplos de outras configurações que podem compor uma área explorada. Em camadas inclinadas, Figura 12, o ângulo de mergulho da estrutura geológica surge como um outro parâmetro a ser determinado.

Figura 12 – Modelo com camada inclinada

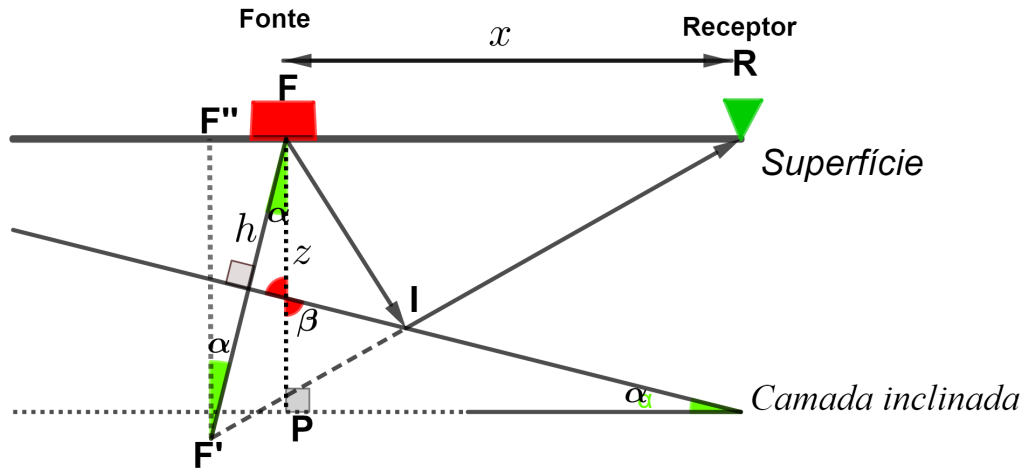


Fonte: O autor, 2020

Com o propósito de modelar a aquisição neste contexto, considere uma área

cuja estrutura apresente uma inclinação  $\alpha$  com a horizontal, Figura13. Sejam  $F$  e  $R$  a representação da fonte e do receptor, respectivamente, separados por uma distância  $x$ . Assim como foi feito no caso paralelo, o tempo de propagação neste modelo é dado pela razão entre os valores da distância percorrida pelo raio e da velocidade do meio. A distância total percorrida pelo raio é dado por  $d = \overline{F'I} + \overline{I'R}$ .

Figura 13 – Modelo com camada inclinada



Fonte: O autor, 2020

Seja  $F'$  o ponto simétrico de  $F$  em relação à camada inclinada. Deste modo, o segmento  $\overline{F'F}$  é perpendicular a camada inclinada. Além disso, tem-se ainda  $\overline{F'I} = \overline{F'I}$ . Por  $F'$  traça-se uma perpendicular à superfície que contém o conjunto fonte/receptor. Deste modo, forma-se o triângulo retângulo  $F'F''R$ , de hipotenusa  $d = \overline{F'R}$ . Sendo assim, tem-se:

$$d^2 = \overline{F'F''}^2 + \overline{F''R}^2. \quad (3.22)$$

Como  $\overline{F''R} = \overline{F''F} + x$ , a equação acima pode ser reescrita como

$$d^2 = \overline{F'F''}^2 + (\overline{F''F} + x)^2. \quad (3.23)$$

A partir do ponto  $F$ , traça-se uma perpendicular à superfície que consequentemente, será também perpendicular à interface inferior da camada inclinada (ponto P). Na base da camada inclinada, forma-se um triângulo retângulo, cujos os ângulos agudos são  $\alpha$  e  $\beta$ . Além disso,  $\overline{PF}$  e a reta que representa a inclinação da camada são concorrentes. Por esta razão, possuem o ângulo oposto pelo vértice  $\beta$ . Como  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares e  $\overline{F'F}$  é perpendicular a camada inclinada, o ângulo  $\overline{PFF'}$  vale  $\alpha$ . Além disso, por construção  $\overline{F''F'}$  é paralelo a  $\overline{FP}$  e  $\overline{FF'}$  é transversal, sendo os ângulos  $\overline{PFF'}$  e  $\overline{FF'F''}$  alternos internos, logo  $\widehat{FF'F''} = \alpha$ .

Sendo assim, do triângulo  $FF'F''$  pode-se obter as relações:  $F'F'' = 2h \cdot \cos \alpha$  e  $FF'' = 2h \cdot \operatorname{sen} \alpha$ . Sendo assim, da equação 3.23 resulta:

$$d = \sqrt{(2h \cdot \cos \alpha)^2 + (2h \cdot \operatorname{sen} \alpha + x)^2}, \quad (3.24)$$

$$d = \sqrt{4h^2 \cdot \cos^2 \alpha + 4h^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + 4hx \cdot \operatorname{sen} \alpha + x^2}, \quad (3.25)$$

$$d = \sqrt{4h^2 + 4hx \cdot \operatorname{sen} \alpha + x^2} \quad (3.26)$$

, em que  $h$  é a menor distância entre a fonte e a camada inferior a ela.

Com base no cálculo da distância, torna-se viável a obtenção da equação do tempo pela distância em um modelo de camada inclinada, sendo ela:

$$t = \frac{d}{V}, \quad (3.27)$$

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + 4hx \cdot \operatorname{sen} \alpha + x^2}}{V}, \quad (3.28)$$

sendo  $V$  a velocidade de propagação da onda sísmica no meio.

A equação 3.28 ainda tem a forma de uma hipérbole. Contudo, neste caso a curva não é simétrica em relação ao eixo do tempo. Devido à inclinação da camada, receptores simétricos em relação à fonte serão alcançados por raios em tempos distintos.

## 4 PROPOSTA DE ATIVIDADE

Neste capítulo são realizadas três atividades que podem ser colocadas em prática em sala de aula. As atividades são baseadas na Sísmica de Reflexão, mais precisamente, em seu processo operacional, e usarão os conceitos desenvolvidos ao longo deste trabalho. As atividades buscam proporcionar aos estudantes oportunidades de investigação Matemática com conexão entre diferentes conceitos da geometria e da álgebra no contexto da sísmica de reflexão. Além disso, mostram a aplicabilidade de tópicos do ensino básico e proporcionam a interdisciplinaridade.

Durante a realização das propostas de atividades, os alunos utilizarão diversas habilidades inerentes ao ensino da Matemática. Os alunos poderão interpretar tabelas e gráficos, analisar intervalos numéricos, avaliar resultados obtidos, interpretar situações problemas, realizar associações lógicas e modelar problemas. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)(BRASIL, 2018) , o foco no ensino médio é a construção da matemática, em uma perspectiva integrada e aplicada à realidade. Por esta razão, acredita-se que as atividades propostas por este trabalho estão plenamente de acordo com este documento balizador e abordando as competências 1, 3 e 5 por ele exigidas, como pode ser visto em:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral (BRASIL, 2018, p.523).

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p.523).

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p.523).

### 4.1 Proposta I: Calculando o tempo de trânsito e afastamento entre fonte e receptor

Esta atividade pode ser aplicada aos alunos do Ensino Médio, que tenham o domínio dos conceitos da cinemática. Esta prática pode ser realizada em conjunto pelos professores



de Física e Matemática.

Esta primeira proposta tem como objetivo estimar o tempo de trânsito que uma onda sísmica utilizará durante o processo de levantamento sísmico, bem como o afastamento entre receptor e fonte. Sendo assim, tem por propósito medir o tempo que levará desde a onda ser liberada pela fonte, até ser registrada pelo receptor, tendo neste interstício uma reflexão na primeira camada geológica paralela à superfície. E, observando a influência do meio geológico no tempo de propagação da onda, calcular a distância que separa fonte de receptor quando a onda leva um tempo dado em sua propagação.

Para tal atividade, estarão envolvidas quatro grandezas, sendo elas: velocidade do meio de propagação; profundidade da primeira camada; afastamento entre fonte e receptor, e tempo de trânsito. Com base na tabela abaixo, pode-se propor modelos geológicos bem definidos, que forneçam informações suficientes para a realização da atividade. Por exemplo, pode-se sugerir um pacote geológico de 700 metros de espessura, composto de argila, Figura 14. Com isso, o estudante terá informações sobre profundidade e velocidade. Além disso, fica a cargo do aluno definir parâmetros da geometria de aquisição, podendo ele próprio escolher de forma mais conveniente o afastamento entre fonte e receptor.

Com esta proposta, pode-se explorar a aplicação do teorema de Pitágoras e conceitos de cinemática. Além disso, como se tem informação da velocidade intervalar do material, pode-se explorar valor máximo e mínimo do tempo, além de seu valor médio.

### ATIVIDADE 1

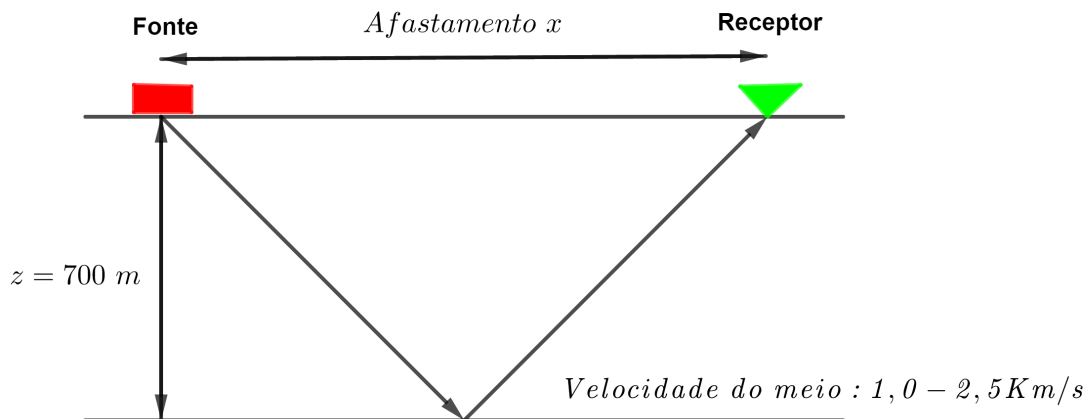
Analise com atenção os dados presentes na tabela seguinte onde são apresentadas as velocidades de propagação das ondas em meios geológicos distintos.

Material	Intervalo de Velocidade(Km/s)
Areia seca	0,2-1,0
Areia (saturada em água)	1,5 - 2,0
Argila	1,0 - 2,5
Água	1,4 -1,5
Petróleo	1,3 - 1,4
Sal	4,5 - 5,0

1. Em qual dos meios as ondas se propagam mais lentamente? E mais rapidamente?
2. Ao dizer que a velocidade de propagação de uma onda é de 1,5 km/s, podemos garantir em que meio ela se está propagando?
3. Em quais dos meios geológicos da tabela se propaga uma onda cuja velocidade é de 1,2 km/s

4. O que poderemos concluir sobre o meio geológico de propagação de uma onda que se propaga a 3 km/s?
5. Considere que estamos pesquisando em um pacote geológico com 700 m de espessura constante, composto de argila, Figura 14. Com base neste modelo, escolha a distância que represente o afastamento entre a fonte e o receptor e calcule o tempo de trânsito de uma onda. Em seguida, responda os seguintes itens:
- Qual o valor utilizado para velocidade?
  - Repita o processo anterior utilizando os valores extremos da velocidade e o valor médio. Qual dos valores: máximo, mínimo, médio ou o escolhido no item a nos fornecerá uma melhor aproximação?
  - Mantendo-se as características do pacote geológico, a que distância o receptor se encontra da fonte, se o tempo de trânsito de uma onda foi de 1,5 s?
    - O valor encontrado dará o afastamento mínimo entre receptor e fonte?
    - Calcule o intervalo em que varia a referida distância.

Figura 14 – Modelo geológico da atividade I



Fonte: O autor, 2020

## 4.2 Proposta II: Calculando a profundidade do mar

Nesta atividade tem-se como objetivo principal calcular a profundidade da lâmina d'água em uma região de exploração. Para isso, o tópico matemático utilizado é o estudo do gráfico da hipérbole.

Com base no gráfico de uma hipérbole, construída com os eixos coordenados sendo tempo e afastamento, obtêm-se o valor de  $t_0$ , como visto na seção 3.3. Este valor é a

interseção do gráfico com o eixo do tempo. E, como visto ao longo do trabalho, representa o tempo de percurso do raio que propagou verticalmente sem se afastar da fonte. A equação (3.21) mostrou que este valor pode ser obtido por  $t_0 = \frac{2z}{V}$

De posse do valor da velocidade de propagação da onda sísmica na água do mar, que é em média  $1500 \text{ m/s}$ , e do  $t_0$  obtido no experimento, pode-se obter a espessura da lâmina d'água da área explorada.

Acredita-se ser importante neste ponto a participação do professor de química. A salinidade e temperatura podem interferir na densidade da água e, conseqüentemente, na velocidade de propagação da onda sísmica. Sendo assim, uma explanação sobre tal interferência pode auxiliar na estimativa dos equívocos gerados sobre o valor da coluna de água.

## ATIVIDADE 2

Pesquisas efetuadas em diversos meios geológicos permitiram elaborar a seguinte tabela das velocidades de propagação (em km/s) das ondas.

Material	Intervalo de Velocidade(Km/s)
Areia seca	0,2-1,0
Areia (saturada em água)	1,5 - 2,0
Argila	1,0 - 2,5
Água	1,4 -1,5
Petróleo	1,3 - 1,4
Sal	4,5 - 5,0

Sabe-se que, quando o afastamento é nulo, a relação entre tempo ( $t$ ), profundidade ( $z$ ) e velocidade de propagação ( $V$ ) é dada pela expressão:

$$t = \frac{2z}{V}. \quad (4.1)$$

1. A salinidade da água influencia a sua densidade, assim a água salgada é mais densa do que a água doce (por isso é mais fácil nadar no mar do que num rio). Sabe-se que quanto mais salgada a água, maior será a velocidade de propagação da onda sísmica.
  - a) Onde se propagará mais rapidamente uma mesma onda sísmica, no Mar Morto ou na Baía da Guanabara?
  - b) Qual é a velocidade de propagação da onda sísmica em água doce? E na água do mar?
  - c) O que significa o afastamento ser nulo?
  - d) O tempo de trânsito de uma onda sísmica no mar, medido na fonte, é de 1,8 s. Qual a espessura da lâmina d'água da área explorada?

2. Suponha que a medição de tempo referida em 1.d tenha sido obtida numa camada de argila saturada.
- Seria possível obter a mesma profundidade da camada? Em que situação?
  - Considere que a velocidade de propagação na camada é a velocidade intervalar média e que o tempo, quando o afastamento é nulo, é de 4 s. Qual a profundidade da camada?

### 4.3 Proposta III: Estimativa de Correção

Esta proposta fundamenta-se em uma das principais etapas do processamento do dado sísmico, chamada de *Correção do Sobretempo*. Como visto anteriormente, o gráfico do tempo em função do afastamento comporta-se como uma hipérbole. Se este gráfico for convertido para profundidade, o mesmo apresentará um padrão curvo, mesmo sendo a camada paralela à superfície. Isso se deve ao fato de que os raios registrados em receptores mais distantes da fonte percorrerão uma distância maior e, conseqüentemente, usarão um tempo maior de propagação, Figura 15. Com isso, para corrigir tal efeito, a *Correção do Sobretempo* é feita sobre cada tempo registrado, subtraindo o valor de  $t_0$

O objetivo desta proposta é fazer com que os alunos alcancem uma relação lógica de correção para um determinado receptor, dado o seu afastamento da fonte. Para isso, estipula-se um modelo geológico simples de camadas paralelas, com uma geometria de aquisição bem definida, Figura 16. Neste modelo, adota-se um pacote geológico, cuja velocidade de propagação da onda sísmica seja  $2000 \text{ m/s}$  e espessura de  $1000 \text{ m}$ .

A geometria de aquisição é composta por uma fonte, que dista  $200 \text{ m}$  do primeiro receptor. Além disso, é utilizado um conjunto de 40 receptores separados entre si por  $10 \text{ m}$ .

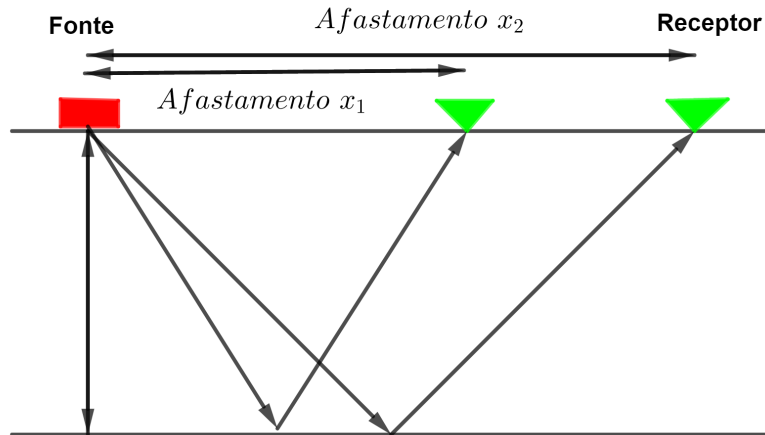
A atividade consiste em calcular o sobretempo  $\Delta t$ , que é a diferença entre o tempo registrado e o  $t_0$ . A metodologia consiste em repetir este processo, assim como foi feito na atividade I, pelo menos para os três primeiros receptores. Posteriormente, usando uma ideia intuitiva, fazer uma extrapolação do fator, para estimar a correção para o quadragésimo receptor com base nos já calculados. Além disso, analisar como os parâmetros velocidade do material e a profundidade do refletor interferem nesta diferença de tempo. Por fim, desenvolver uma relação matemática que expresse tal correção em função do afastamento.

#### ATIVIDADE 3

O modelo geológico representado a seguir é de camadas paralelas.

A velocidade de propagação da onda sísmica é de  $2 \text{ km/s}$  e a espessura da camada geológica é de  $1000 \text{ m}$ . Há 40 receptores Cada receptor dista  $10 \text{ m}$  do(s) seu(s) vizinho(s) e, o primeiro deles dista  $200 \text{ m}$  da fonte.

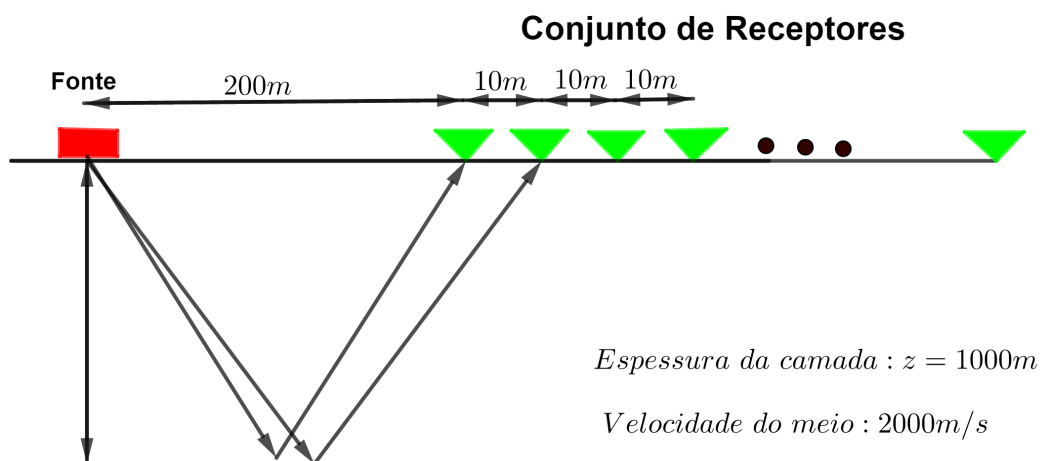
Figura 15 – Diferença entre as trajetórias dos raios



Fonte: O autor, 2020

1. Qual o valor de  $x_1$ ?
2. Qual o valor de  $x_2$ ?
3. Qual o tempo de trânsito estimado para o primeiro receptor?
4. Calcule o tempo estimado, na fonte, usando a relação  $t = \frac{2z}{V}$  e compare com o valor encontrado no item anterior.

Figura 16 – Modelo geológico e geometria da proposta III



Fonte: O autor, 2020

5. A diferença entre o maior e o menor dos dois valores referidos em 4. é o sobretempo e representa-se por  $\Delta t$ .

- a) Calcule o sobretempo do primeiro receptor.
  - b) Calcule o sobretempo dos 5 receptores a seguir ao primeiro.
  - c) Com base nos sobretempos calculados, qual será o sobretempo do 40º receptor?
6. Se a velocidade da onda sísmica se mantiver, mas a profundidade aumentar, o que ocorre com a sequência de sobretempos?
  7. Suponha que das condições iniciais, se alterou apenas a velocidade da onda sísmica que é de 1500 m/s. Os sobretempos mantêm-se?

## 5 CONCLUSÃO

Acredita-se que o objetivo inicialmente traçado para este trabalho foi realizado. O potencial didático-pedagógico da Sísmica de reflexão ficou evidente ao longo do texto, pelas teorias e práticas apresentadas. Foi mostrado para o leitor como tópicos do ensino básico da Matemática podem ser aplicados a atividades complexas, como a de exploração de petróleo. As atividades propostas buscaram proporcionar aos estudantes oportunidades de investigação matemática com conexão entre diferentes conceitos da geometria e da álgebra no contexto da sísmica de reflexão. Além disso, a perspectiva da interdisciplinaridade foi um fator notório na prática desta técnica de exploração Geofísica, como pôde ser visto. Disciplinas como Matemática, Física, Química e Geografia possuem temas correlatos dentro desta técnica.

No que tange aos tópicos matemáticos envolvidos, pôde-se comprovar suas reais aplicações. Sobre o teorema de Pitágoras foi mostrado como este tema, relativamente simples, ensinado nas séries iniciais, pôde ajudar na modelagem de uma técnica tão importante. Quanto o Binômio de Newton, assunto tão questionado por partes dos estudantes quanto à sua relevância, foi possível obter uma significativa aplicação. Através desta teoria foi viável ajustar modelos de aproximações que se adequam de forma bastante satisfatória à realidade. Por último, o estudo da equação da hipérbole e de seu gráfico associado forneceram embasamento para a obtenção de informações sobre o tempo de trânsito de ondas sísmicas e sobre a área geológica explorada.

As atividades propostas para sala de aula podem ser aplicadas em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio e estão em consonância com a proposta da BNCC, estimulando o uso da Matemática em situações da vida real e de outras áreas do conhecimento.

Por fim, acredita-se que a Sísmica de Reflexão é uma ferramenta bastante propícia no que se refere a interdisciplinaridade. Como foi mostrado ao longo do texto, principalmente nas atividades propostas, existem temas que podem e devem ser abordados em conjunto com outras disciplinas, enriquecendo assim o conhecimento e aumentando interesse pelo assunto.

Tendo em vista o que foi apresentado, acredita-se que alguns temas possam ser sugeridos, como forma de continuidade deste trabalho. Desta forma, seguem as sugestões:

- Aplicar as questões com alunos do Ensino Médio e analisar os dados produzidos por eles
- Implementar no geogebra a situação representada na figura 13, e usar para investiga-

ção de propriedades geométricas tais como: congruência (LAL, triângulos isósceles, relações angulares em retas paralelas, etc) e relações funcionais.

- Análise de sensibilidade de uma variável em função das outras.



## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Curricular Comum (BNCC)*. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>> Acesso em: 16 mar. 2020.

EVES, H. *Tópicos da história da matemática*. São Paulo: Atual, 1994.

KEAREY, P. *Geofísica de exploração*. São Paulo: Oficina de textos, 2009.

LEACHENSKI, A. A. *Binômio de Newton com expoente negativo e fracionário*. 2017: Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, outubro, 2017.

LOPES, J. F. *Cônicas e aplicações*. 2011: Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, janeiro, 2011.

MIRANDA, J. *Introdução ao Geomagnetismo*. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2011.

MORAIS J, M. *Petróleo em águas Profundas. Uma história tecnológica da PETROBRAS na exploração e produção offshore*. Brasília: Instituto de Pesquisa e Economia Aplicada, IPEA, 2013.

PATERSON, N.; REEVES, C. *Application of gravity and magnetic survey: the state of the art*. United States: Society of Exploration Geophysicists. Geophysics, 1985.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – MÉTODOS DE INVESTIGAÇÃO GEOFÍSICA

O objetivo deste capítulo é proporcionar ao leitor uma breve apresentação dos principais métodos de investigação geofísica.

A Geofísica é a ciência que busca investigar o planeta Terra, fazendo o uso de propriedades físicas inerentes à área investigada. Dentro da sua gama de técnicas, utiliza-se de métodos de exploração que são aplicados na superfície, que permitem adquirir informações da subsuperfície. Os benefícios gerados pela geofísica são notórios, visto que anterior ao seu desenvolvimento, conhecimentos à respeito de camadas interiores da Terra ficavam restritos a poços e minas. Contudo, atualmente até são conhecidas propriedades físicas do manto e do núcleo da Terra.

O campo de aplicação da geofísica é bastante vasto, sendo suas técnicas muitas vezes aplicadas sozinhas ou vinculadas a outras. Apenas como caráter de exemplificação, podem ser citadas como áreas de utilização: Geologia, Engenharia Civil, Engenharia Ambiental, artes, entre outras.

De um modo geral, os métodos de exploração geofísica podem ser divididos em dois grupos: os métodos que utilizam os campos naturais da Terra e os que fazem uso de fontes artificiais. As técnicas que se enquadram no primeiro grupo são também intituladas de métodos potenciais. Esses métodos procuram por perturbações ou anomalias nos campos naturais, que possam ter sido geradas por feições geológicas. E para isso, analisam os campos gravitacionais, magnéticos, elétricos e eletromagnéticos da Terra (KEAREY, 2009).

O segundo grupo utilizará fontes artificiais que poderão gerar campos semelhantes aos naturais. Dentro deste segundo grupo, destaca-se a Sísmica de Reflexão, que utiliza fontes para gerar ondas sísmicas semelhantes às produzidas por um terremoto.

<b>Método</b>	<b>Parâmetro medido</b>	<b>Propriedade Física</b>
Gravitacional	Variação do Campo Gravitacional	Densidade
Magnético	Variação do Campo Geomagnético	Suscetibilidade magnética
Resistividade	Resistência da Terra	Condutividade elétrica
Polarização induzida	Voltagens de polarização	Capacitância elétrica
Potencial Espontâneo	Voltagem	Condutividade elétrica
Sísmico	Tempo de percurso de ondas sísmicas	Densidade e módulo elástico

Tabela 1 – Métodos geofísicas e suas propriedades físicas operativas.

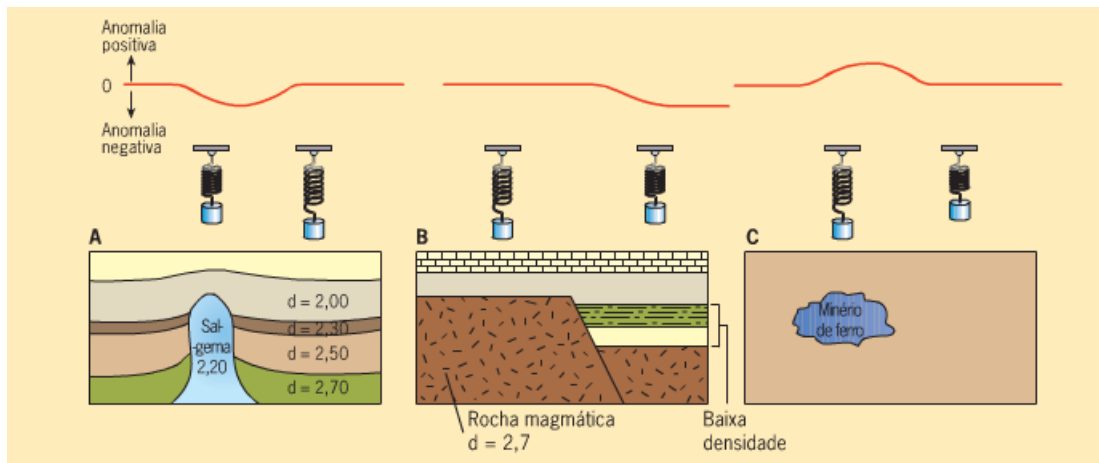
A tabela 1 faz um resumo das técnicas, ressaltando os parâmetros utilizados por cada uma, assim como as propriedades físicas. Na prática, não se pode afirmar que um

método é melhor que o outro, e sim, considerado mais adequado para determinada situação. Assim, a utilização de uma técnica específica estará diretamente relacionada à propriedade física que cada uma opera, bem como a área que deseja ser explorada.

### A.1 Método Gravitacional

O valor da aceleração da gravidade não é o mesmo para todos os pontos da superfície terrestre. O método gravitacional busca investigar a subsuperfície com base na variação do campo gravitacional causada pelas densidades das rochas. Utilizando-se um aparelho de medição chamado de gravímetro, medições são realizadas em áreas de interesse na busca por anomalias. Tais diferenças de valores são proporcionadas por rochas de densidades significativamente diferentes das demais que a circundam. A Figura 17 ilustra três situações de anomalias gravimétricas geradas por diferentes materiais. Na Figura 17A, o domo salino possui densidade menor que a das rochas adjacentes. Por esta razão, o valor da gravidade na superfície acima do sal será menor que o da área lateral, causando assim uma anomalia negativa. Nas Figuras 17B e 17C ocorre exatamente o oposto. A rocha magmática (gerada pela solidificação de magma) e o minério de ferro possuem densidades maiores que a do material do meio em que estão inseridas. Deste modo, é gerada uma anomalia negativa na zona composta por rochas de baixa densidade e anomalia positiva por cima do material de densidade maior.

Figura 17 – Valores de anomalias gravimétricas associadas a diferentes corpos causadores



Fonte: Keary, 2009

Sabe-se que o valor médio da gravidade na superfície é de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Medições mostram que as variações da gravidade proporcionadas pelas densidades das rochas são da ordem de  $10^{-4} \text{ m/s}^2$ . Acredita-se que dentre os parâmetros físicos explorados pela geofísica, a densidade esteja entre os que apresentam menor variação na natureza. Na Figura 18

mostra-se o intervalo de densidade de algumas rochas. Esses valores são alcançados em laboratórios, através de testes realizados em amostragem do material.

Figura 18 – Intervalo de densidade de alguns tipos de rochas

<b>Material Geológico</b>	<b>Intervalo de densidade (kgm<sup>-3</sup>)</b>
Aluvião (úmido)	1960-2000
Argila	1630-2600
Folhelho	2060-2660
Arenito	2050-2550
Calcário	2600-2800
Halita	2100-2400
Granito	2520-2750
Basalto	2700-3200
Gabro	2850-3120
Quartzito	2600-2700
Gnaise	2610-2990

Fonte: Keary, 2009

#### A.1.1 Correções aplicadas ao dado

Diversos fatores contribuem para a variação da gravidade medida na superfície terrestre. Essa instabilidade está vinculada à sensibilidade da medição a fatores como tempo, espaço e equipamento. Como a anomalia causada pelas densidades das rochas é pequena, quando comparada a esses fatores, um conjunto de correções deve ser aplicado ao dado, a fim de se eliminar agentes indesejáveis.

O gravímetro possui em seu mecanismo interno uma mola utilizada no processo de medição. Por isso, variações de temperatura e o desgaste da mola podem causar alterações nas medidas. Para eliminar tais efeitos, é aplicada uma correção de instrumento.

O tempo, mais precisamente, a hora a que está sendo realizada a medição também interfere nos valores calculados. Um mesmo ponto do globo terrestre pode apresentar um valor de gravidade pela manhã, e, outro diferente à noite. Neste caso, a variação está associada à atração gravitacional provocada pelo Sol e pela Lua, que alteram a forma da Terra e da superfície dos oceanos. Apesar da deformação da Terra ser relativamente pequena, pode gerar erros relevantes. Assim, para eliminar tais interferências aplica-se a chamada correção de Maré.

Por ultimo, mas não menos importante, o fator local onde está sendo realizada a medição deve ser analisado. Neste caso, a posição de aferição no globo (latitude), a altura em relação ao nível do mar onde está sendo feito a medição, feições topográficas de grande

e pequena escala nas proximidades causarão interferência. Para casos assim são aplicadas as correções de *latitude*, *ar livre*, *Bouguer e de terreno*, respectivamente. Maiores detalhes sobre tais correções e suas influências podem ser encontradas em (KEAREY, 2009).

### A.1.2 Aplicações da gravimetria

Segundo Paterson e Reeves (1985), o método de exploração de anomalias gravimétricas (gravimetria) possui uma ampla aplicabilidade em investigações de estruturas de grande e média escala. Historicamente, esta técnica de exploração geofísica era bastante usada na investigação de áreas com potencial petrolífero. Pois, trata-se de uma excelente ferramenta para a localização de bacias sedimentares e trapas de hidrocarbonetos (feições geológicas que retém o petróleo). Contudo, com o avanço tecnológico e o desenvolvimento da sísmica, a gravimetria acabou sendo preterida nessa finalidade. Assim, tornou-se um mecanismo para a obtenção de informações adicionais e raramente de exploração primária.

Por outro lado, em outros campos da geologia e geofísica, a gravimetria é uma técnica indispensável. Esse método pode fornecer valiosas informações sobre os processos que deram origem à formação de uma bacia sedimentar. Além disso, é fundamental na determinação de minério e pode ser usada em investigações hidrogeológicas, revelando-se essencial para a descoberta de potenciais aquíferos.

## A.2 MÉTODO MAGNÉTICO

O Método Magnético é uma técnica de exploração geofísica que investiga a geologia da área desejada, segundo as anomalias do campo magnético terrestre, originadas pelas rochas de subsuperfície. Atualmente, sabe-se que a maioria das rochas não são magnéticas, pois seus minerais formadores não possuem tal propriedade. Contudo, existem alguns tipos de rochas que possuem minerais magnéticos, especialmente o óxido de ferro  $Fe_3O_4$  (a magnetita), que são capazes de gerar anomalias magnéticas consideráveis.

Apesar de gerar anomalias, tais rochas magnetizadas não são capazes de produzir por si só o campo magnético terrestre. A teoria mais aceita credita a geração deste campo ao processo que ocorre no interior da Terra. Composto principalmente de ferro e níquel, o núcleo externo terrestre localiza-se a grande profundidade, tendo uma elevada temperatura. Com isso, esses materiais encontram-se em estado de fusão e em constante movimento. Sendo assim, essa dinâmica gera correntes elétricas que conseqüentemente, dão origem ao campo magnético. Chamado de Teoria ou Modelo do Dínamo, admite-se que o núcleo externo da Terra, em estado líquido, funcione como uma espécie de dínamo auto-excitado. Acredita-se ainda, que essa corrente de convecção é mantida por fatores como: variações de densidades geradas com a produção de calor radioativo, a liberação de calor latente ou pela liberação de material menos denso do núcleo primitivo, (MIRANDA, 2011).

O campo magnético produzido pela Terra assemelha-se ao produzido por um ímã, sendo assim, do tipo dipolar. As regiões onde se encontram as linhas de forças magnéticas são chamadas de pólos magnéticos. Apesar de os pólos magnéticos Norte e Sul tenderem aos seus respectivos pólos geográficos dificilmente eles coincidem. Geralmente ocorre um desvio entre eles que pode variar de até  $20^\circ$ . Historicamente, sabe-se que em grandes períodos de tempo ocorrem bruscas variações. Em tais ocasiões, os pólos magnéticos norte e sul podem até trocar de posição, gerando o que a literatura classifica como inversão de polaridade.

Este método geofísico é auxiliado por um fenômeno bastante interessante do campo físico. Quando um determinado material é inserido em um meio, que está sob a ação de um campo magnético, este material adquire uma magnetização. A este acontecimento dá-se o nome de magnetização induzida. No caso geológico, este fato ocorre devido à reorganização dos minerais magnéticos das rochas, que se orientam de acordo com a direção das linhas de força do campo indutor. A magnetização induzida vai variar de intensidade para os diferentes tipos de rochas. Pois, sabe-se que a intensidade da magnetização induzida está vinculada a fatores como o campo magnético indutor e susceptibilidade magnética do material.

Diversos fatores podem influenciar na susceptibilidade magnética de uma determinada rocha, como tamanho, forma e a distribuição dos grãos magnéticos. Contudo, mesmo assim, pode-se gerar uma organização das rochas, no que refere-se à sua magnetização, tendo por base seu conteúdo de magnetita, Figura 19. Nas rochas ígneas (rochas magmáticas), os minerais magnéticos estão mais presentes nas rochas básicas e tende a decrescer com o aumento da acidez das rochas. As rochas que sofrem algum processo após sua formação, rochas metamórficas, apresentam propriedades magnéticas menores que as anteriores. Por fim, as rochas formadas por sedimentos são pouco significativas em magnetização, devido ao seu baixo conteúdo de magnetita.

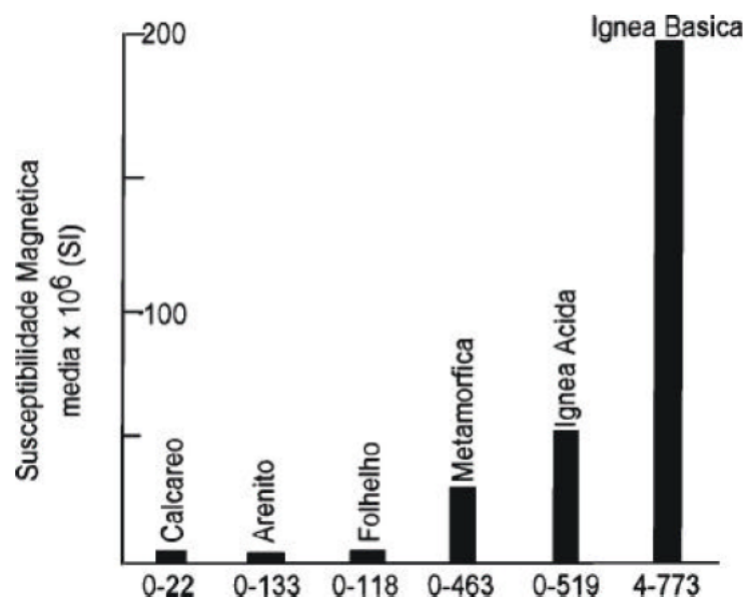
#### A.2.1 Correções aplicadas ao dado

Os levantamentos magnéticos podem ser realizados em terra, ar e mar. E, na sua aplicabilidade, utiliza-se um aparelho chamado de magnetômetro. Assim como no método gravimétrico, no magnético também é necessário realizar correções ao dado após as medições.

O processo complexo que ocorre no núcleo da terra e origina o campo magnético possui padrões variáveis. Com isso, mudanças ocorrem ao longo do tempo e alteram os elementos geomagnéticos. Essas mudanças são chamadas de variação secular. Tais variações podem ser razoavelmente previstas e suprimidas do dado.

Além disso, partículas carregadas dentro da ionosfera geram um campo magnético induzido. As alterações produzidas por tais partículas podem ser suaves, de pouca interfe-

Figura 19 – A Susceptibilidade magnéticas das principais rochas em Ámperes por metro



Fonte: Keary, 2009

rências, ou até mesmo tão significativas que seja recomendado a suspensão momentânea da aquisição dos dados. Esse tipo de interferência é chamado de variação diurna.

Portanto, para se obter dados confiáveis, que traduzam apenas interferências de feições geológicas de subsuperfície, é necessário fazer correções que eliminem os efeitos das variações secular e diurnas.

#### A.2.2 Aplicações dos Levantamentos Magnéticos.

Os levantamentos Magnéticos constituem uma ferramenta de exploração geofísica bastante valiosa. Esta técnica é muito aplicada na busca por depósitos de minerais metálicos. Deste modo, o objetivo principal deste procedimento é a descoberta de depósito de ferro. Além disso, esta técnica pode ser usada em investigações geotécnicas e arqueológicas, sendo usada para descobertas de zonas de falhas geológicas e com o intuito de localizar corpos metálicos enterrados, como no caso de dutos.

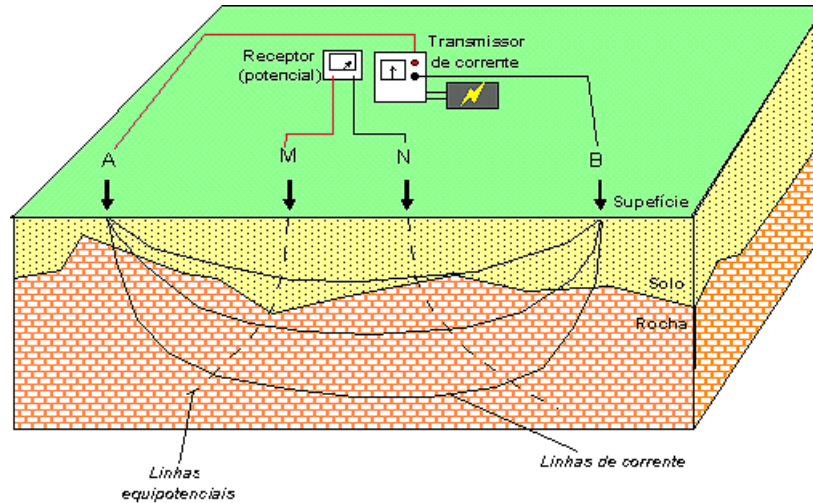
### A.3 MÉTODO DE RESISTIVIDADE.

O primeiro método de fonte artificial descrita neste trabalho é o de Resistividade. Esta técnica consiste na injeção de corrente elétrica, através de dois eletrodos (A e B) e a medição da diferença de potencial em outros dois eletrodos (M e N), conforme Figura 20. Dentro deste contexto, a lei de Ohm, da Física clássica, fornece subsídios para este método geofísico. Deste modo, a resistividade do terreno pode ser calculada, com base



nas distâncias dos eletrodos. Os dados adquiridos podem ser apresentados e função da resistividade (Ohm.m) ou em função de seu inverso, condutividade (siemens/metro)

Figura 20 – Esquema ilustrativo do método de Resistividade

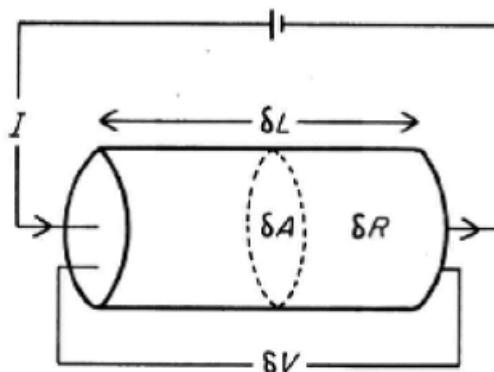


Fonte: Keary, 2009

Na literatura, a resistividade de um determinado material é definida como a resistência entre as faces opostas de um cubo unitário do material. Tomando como base um cilindro condutor com especificações de resistência  $\delta R$ , comprimento  $\delta L$  e como área de seção transversal  $\delta A$ , Figura 21, a resistividade  $\rho$  pode ser calculada por

$$\rho = \frac{\delta R \cdot \delta A}{\delta L}. \quad (\text{A.1})$$

Figura 21 – Parâmetros utilizados para a determinação da resistividade



Fonte: Keary, 2009

A resistividade dos materiais geológicos é bastante variável. Acredita-se que seja um dos parâmetros explorados pela geofísica que seja mais inconstante. Na realidade

diversos fatores podem contribuir para o aumento ou a diminuição da resistividade de um material. Alguns minerais são capazes de fazer a condução de elétrons, fato que diminui a resistividade. Por outro lado, grande parte dos minerais formadores das rochas são isolantes. E, com isso, a corrente elétrica é conduzida pela passagem de íons contidos nas águas dos poros. Deste modo, a resistividade de determinada rocha está intimamente ligada a porosidade da mesma. A figura 22 mostra os intervalos de resistividade e condutividade de algumas rochas e outros materiais.

Figura 22 – Intervalos de Resistividade e Condutividade alguns elementos encontrado na natureza.

Rocha	Resistividade (ohm.m)	Condutividade (mS/m)
Granito (húmido e seco)	$4,5 \times 10^3 - 1,3 \times 10^6$	0,0008 - 0.22
Gabro	$10^3 - 10^6$	0,001 - 1
Xisto	$20 - 10^4$	0,1 - 50
Mármore	$100 - 2,5 \times 10^8$	0,000004 - 10
Quartzito	$10 - 2 \times 10^8$	0,000005 - 100
Argilito	10 - 800	1,25 - 100
Calcário	$50 - 10^7$	0,0000001 - 20
Argila (húmida e seca)	1 - 100	10 - 1000
Areia (húmida e seca)	$1 - 10^4$	0,1 - 1000
Água doce (20° C)	80	12,5
Água subterrânea	0,5 - 300	3,3 - 2000
Água salgada	0,1 - 1	1000 - 10000
Água do mar	0,2	5000
Ferro	$9 \times 10^{-8}$	$1.1 \times 10^4$
Cobre	$2 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^4$
Solo	1 - 10	100 - 1000

Fonte: Telford,1990.

### A.3.1 Aplicações dos levantamentos de Resistividade.

Quando comparado aos métodos potenciais anteriormente descritos, o resistivo se atém a uma escala relativamente menor. Esse fato deve-se ao processo que aquisição de dados, que requer a implantação física dos eletrodos, o que despense de bastante trabalho e tempo. Sendo assim, dificilmente se configurará como uma técnica de exploração primária. O método de resistividade é muito útil na engenharia, para a detecção do embasamento para as construções. Muito usada para estimar características de camadas em subsuperfície, como profundidade e espessura. Além disso, a técnica possui ampla aplicabilidade na exploração de recursos hídricos. Através dela, informações sobre tipos de

rochas, estrutura geológica e altura de lençol freático podem ser obtidas previamente, sem qualquer perfuração.

#### A.4 MÉTODO DA POLARIZAÇÃO INDUZIDA.

Em diversos trabalhos literários, os métodos de polarização induzida, o resistivo e o potencial espontâneo (que será visto posteriormente) são apresentados como partes inerentes dos Levantamentos Elétricos. Isso se deve ao fato de que todos estes usam em sua essência o mesmo arcabouço físico. Utilizando-se de eletrodos, assim como apresentado no método anterior, notou-se uma propriedade bastante interessante das rochas. Ao desligar a corrente que atravessa o sistema, a voltagem entre os eletrodos não zera instantaneamente. É notado que após uma redução brusca inicial, a voltagem continua sofrendo uma redução, porém de forma gradual. Da mesma forma, fato semelhante acontece se a corrente for ligada. Ocorre um aumento abrupto da voltagem, seguido de gradativos acréscimos. Desta forma, as rochas funcionam como uma espécie de capacitor, armazenando carga, o que a torna eletricamente polarizada (KEAREY, 2009).

As medições do decaimento da voltagem podem ser realizadas tomadas como parâmetros o tempo ou a frequência. O processo que dá origem à polarização induzida pode ocorrer de duas maneiras, sendo elas: a polarização de membrana e a polarização de eletrodo.

A polarização de membrana (Figura23 A) ocorre em razão dos minerais formadores das rochas possuírem cargas negativas em sua superfície, em contato com os fluidos dos poros. Com isso, gera uma atração de íons positivos para a superfície. Dependendo da porosidade da rocha, esse movimento pode ser impedido, acarretando uma acumulação íons de positivos e negativos em lados opostos. Posteriormente, com a retirada da voltagem, os íons retornam para suas posições iniciais, originando o decaimento da voltagem.

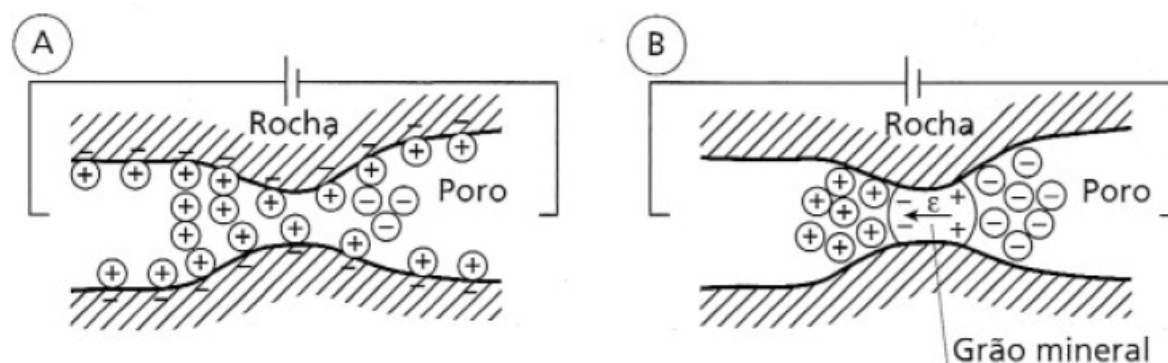
A polarização por eletrodo está intimamente vinculada a presença de minerais metálicos presentes numa rocha. Neste caso, com a aplicação da voltagem, cargas opostas são direcionadas de encontro ao grão metálico gerando uma acumulo em lados contrários, Figura23 B. Com a retirada da voltagem, os íons retornam para suas posições iniciais, gerando o decaimento da voltagem.

Com as medições realizadas no domínio do tempo, a propriedade medida é intitulada de cargabilidade. E, é definida como sendo a área sob a curva de decaimento durante um intervalo de tempo.

##### A.4.1 Aplicações dos levantamentos de polarização induzida

Este método é amplamente aplicado na exploração de metais básicos, devido ao fato de ser muito eficiente na localização de depósitos de minério de baixo teor. Além

Figura 23 – Processos de polarização Induzida. Polarização de membrana (A) e de eletrodo (B)



Fonte: Keary, 2009

disso, trata-se de uma técnica bastante utilizada na área ambiental, na caracterização e monitoramento de áreas contaminadas.

## A.5 MÉTODO DE POTENCIAL ESPONTÂNEO

O método de potencial espontâneo consiste em medir na superfície, diferenças de potenciais originados por reações eletroquímicas ocorridas em subsuperfície. A técnica fundamenta-se no princípio de ser possível aferir diferenças de potenciais entre eletrodos, apesar da ausência de um campo elétrico gerado artificialmente. Dentro deste contexto, a água subterrânea torna-se peça fundamental neste processo, pois sabe-se que para a geração de anomalias de potencial espontâneo é necessário que o corpo causador esteja localizado parcialmente em uma zona de oxidação. Um modelo bastante aceito na literatura, seria que parte do corpo causador transponha o lençol freático. Abaixo do lençol freático, ocorre processo de oxidação, que liberam elétrons. Esses elétrons migram através do corpo (minério) para a parte superior, o que acarretará uma diminuição dos eletrólitos. Deste modo, dá-se origem a um circuito em que a corrente é carregada eletroliticamente. Todo este processo gera as anomalias registradas na superfície.

O método potencial espontâneo é aplicado em estudos sobre movimentos de águas em subsuperfície. Sendo assim, possui vasta aplicabilidade em estudos ambientais e em engenharia.

## APÊNDICE B – TÓPICOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo será feita uma revisão matemática, a respeito dos temas relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Por esta razão, as próximas seções ficarão a cargo de fornecer o embasamento teórico sobre: *Binômio de Newton*, *Teorema de Pitágoras e Hipérbole*.

### B.1 Binômio de Newton

O Binômio de Newton é um tópico matemático bastante explorado em diversas áreas de conhecimento. A aplicação desta ferramenta vai desde cálculos infinitesimais, resolução de somatórios, estudo de herança genética, entre outros. Na vida acadêmica de um aluno, o contato primário com este tópico acontece de forma indireta, quase no fim do ensino fundamental, com o estudo de produtos notáveis. Por outro lado, uma abordagem mais criteriosa sobre este assunto é feita mais tarde no ensino médio.

Apesar de seu nome bastante sugestivo, o Binômio, da forma que é apresentada nos livros didáticos, não foi desenvolvida por Isaac Newton. Documentos remontam a história e mostram que diversos estudiosos da antiguidade já faziam uso de tal ferramenta, antes mesmo do nascimento de Newton. Naquela ocasião, esta teoria era então chamada de Teorema Binomial.

O Teorema Binomial ou Binômio de Newton é um método que possibilita a obtenção de um polinômio, gerado a partir da soma de dois termos elevada a uma potência natural. Deste modo, para  $(x + a)^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^n, \quad (\text{B.1})$$

ou

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k, \quad (\text{B.2})$$

com  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ , ou seja, representando um número binomial e  $k = 1 \dots n$ .

Para averiguar a veracidade desta fórmula basta verificar o seguinte:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a) \cdots (x + a)}_{n \text{ termos}} \quad (\text{B.3})$$

O segundo membro da igualdade é desenvolvido através propriedade da distributiva. Sendo assim, cada fator irá contribuir para o produto com um valor de  $x$  ou de  $a$ . Digamos que nos  $k$ -primeiros fatores, com  $0 \leq k \leq n$ , tenha-se usado a parcela  $a$  para a propriedade distributiva. Conseqüentemente, nos  $(n - k)$  fatores restantes utilizou-se a parcela  $x$ . Deste modo, forma-se o produto  $a^k \cdot x^{n-k}$ . Este mesmo produto será formado por várias configurações diferentes na aplicação da propriedade da distributiva, desde que sejam escolhidos  $k$  vezes a parcela  $a$  e  $(n - k)$  a parcela  $x$ . Mais precisamente, há  $\binom{n}{k}$  escolhas diferentes de  $k$  desses fatores  $(x+a)$ . Sendo assim, o desenvolvimento de  $(x+a)^n$  é uma soma das  $\binom{n}{k}$  parcelas com a mesma configuração  $a^k \cdot x^{n-k}$ . Logo  $(x + a)^n = \sum_{K=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k$ .

Historicamente, dentro deste contexto de desenvolvimento do binômio, a teoria do Triângulo Aritmético também possui grande destaque. Popularmente conhecido como Triângulo de Pascal, devido ao excepcional trabalho de Blaise Pascal. Trata-se de uma disposição de números em forma triangular, em que cada linha representa os coeficientes binomiais de uma determinada potência. Mais precisamente, a  $n$ -ésima linha do triângulo de Pascal representa os coeficientes da expansão binomial de  $(x + a)^n$ , figura 24.

Figura 24 – Representação das 8 primeiras linhas do Triângulo de Pascal

					1												
				1		1											
			1		2		1										
			1		3		3		1								
			1		4		6		4		1						
			1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1		
			1		7		21		35		35		21		7		1

Fonte: Autor, 2020

Apesar de não ter sido o pioneiro no estudo da expansão binomial, Newton é homenageado com seu nome vinculado a este tópico, devido à sua notória contribuição ao tema. Em sua pesquisa sobre cálculo infinitesimal, Newton se depara com a necessidade desenvolver expansões binomiais com expoentes fracionários, fato não descoberto até então. Com isso, o matemático dedica-se à este tópico e desenvolve o teorema binomial com expoentes racionais. A robustez de sua descoberta é tamanha que ele alcança excelentes resultados em seu estudo de séries infinitas e uma generalização para expansão binomial

para expoentes racionais, quer sejam eles fracionários ou não. Não se sabe ao certo a notação matemática utilizada por Newton à época. Porém, trabalhos sobre a sua descoberta relatam que ele obteve uma expressão equivalente a

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n \cdot (n-1)}{2} x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} x^3 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} x^4 + \dots, \quad (\text{B.4})$$

para qualquer  $n$  fracionário ou negativo e para todo  $x$  real, tal que  $|x| < 1$ . Esta relação foi obtida de (LEACHENSKI, 2017).

## B.2 Teorema de Pitágoras.

Acredita-se que o Teorema de Pitágoras seja a proposição matemática mais popularmente conhecida atualmente. Seja no âmbito acadêmico ou até mesmo fora dele, provavelmente todo mundo já ouviu a célebre frase:

*“Num triângulo retângulo, o quadrado é da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos”.*

Esta afirmação é mundialmente conhecida como o Teorema de Pitágoras. Tradicionalmente, os gregos associavam esta proposição geométrica a Pitágoras. Contudo, diversas passagens históricas evidenciam que tal teorema já era conhecido antes mesmo do tempo deste notável matemático. Registros mostram que os babilônios já calculavam a medida da diagonal de um quadrado, desde que conhecida a medida do lado deste quadrilátero. Fato este que mostrava o conhecimento de tal teoria é datado cerca de mil anos antes de Pitágoras (EVES, 1994).

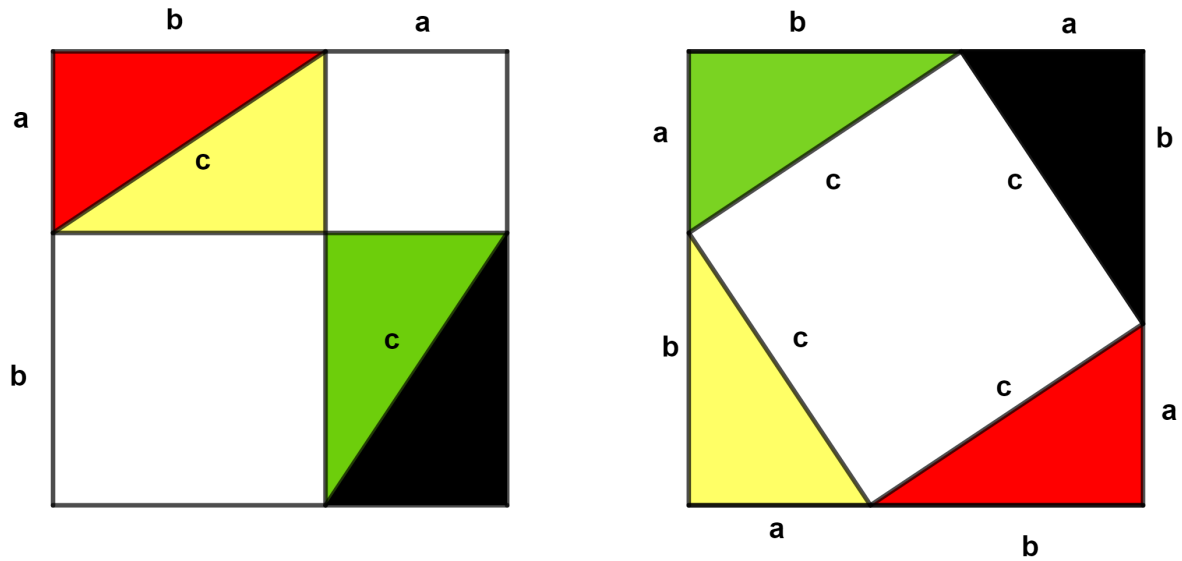
Sendo assim, uma conjectura bastante aceitável na história da matemática pressupõe que Pitágoras tenha sido o pioneiro na demonstração formal deste teorema. E, por esta razão, tenha seu nome intimamente ligado a esta teoria.

Atualmente são conhecidas centenas de demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras e existindo uma variedade de provas algébricas e geométricas. Acredita-se que seja o teorema matemático com maior número demonstrações diferentes.

No que refere-se a demonstração proposta por Pitágoras, não se tem uma convicção sobre o método utilizado. Contudo, historiadores acreditam que o matemático tenha utilizado alguma prova geométrica. E, que para isso, tenha usado comparação de áreas de figuras planas.

Seguindo o mesmo viés que acredita-se ter sido utilizado por Pitágoras, considerem dois quadrados, ambos com lados de medidas  $a + b$ , Figura 25. Primeiramente, particiona-se um dos quadrados em 6 partes, sendo elas : dois quadrados, cujos os lados têm medidas  $a$  e

Figura 25 – Quadrados utilizados na demonstração do Teorema



Fonte: O autor, 2020

$b$ , e quatro triângulos retângulos, cujos catetos são  $a$  e  $b$ . A seguir, o segundo quadrado também é dividido em partes, mas desta vez em apenas 5, sendo elas: um quadrado central e quatro triângulos retângulos, idênticos aos anteriores.

Considerando que a área de cada triângulo retângulo apresentado na figura tem medida  $A$ , a área total do primeiro quadrado é expressa por

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4A \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado, a área do segundo quadrado pode ser representada por

$$(a + b)^2 = c^2 + 4A \quad (\text{B.6})$$

Sendo  $c$  a medida do lado do quadrado central e ao mesmo tempo a hipotenusa dos triângulos retângulos. Igualando as duas equações tem-se

$$c^2 + 4A = a^2 + b^2 + 4A, \quad (\text{B.7})$$



$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (\text{B.8})$$

Desta forma, fica demonstrado o teorema.

### B.3 Hipérbole

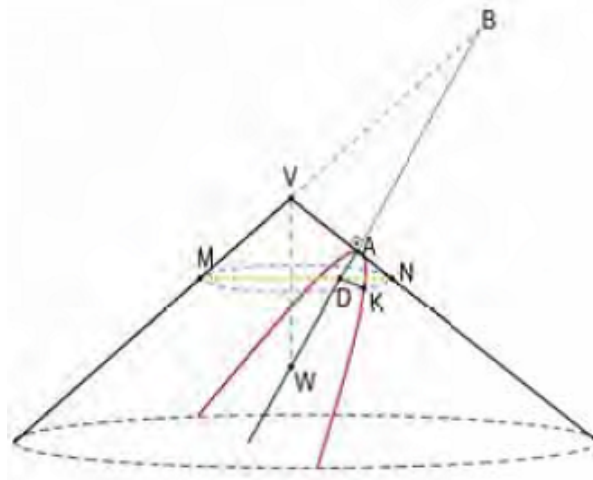
Sabe-se que o interesse sobre o estudo da elipse, hipérbole e parábola é de longa data. As cônicas, como são chamadas tais curvas, são objetos de pesquisas desde antes do século IV a.C. Ao longo da história, diversos matemáticos contribuíram significativamente para o avanço da teoria que fundamenta este tópico. O uso das definições e propriedades descobertas no passado ainda são usadas atualmente, evidenciando assim a relevância destes estudos (LOPES, 2011).

Historicamente não se tem certeza do fator que tenha impulsionado o início do estudo das cônicas. Contudo, acredita-se que o interesse por tais tópicos esteja intimamente ligado ao problema de duplicação do cubo. Mais precisamente, dado a medida da aresta de um cubo, como encontrar através de régua e compasso, a medida da aresta de um novo cubo, cujo volume deste seja o dobro do primeiro. Estudos posteriores comprovaram que a solução analítica para tal problema era alcançada com a resolução de um sistema de equações. Tais equações representam curvas que atualmente se conhece como parábola e hipérbole.

Durante um longo período da história, as definições utilizadas para as cônicas eram as mesmas que foram estipuladas por Menaechmus (380 - 320 a. C). Menaechmus foi um dos pioneiros no estudo das cônicas. Durante seu trabalho, para a formação das seções cônicas, utilizava-se de planos perpendiculares à geratriz do cone. Além disso, o geômetra acreditava que a característica da seção formada estava previamente determinada pelo tipo de cone reto utilizado. Deste modo, na utilização de cones cujo o ângulo do vértice fosse reto, agudo ou obtuso, formava-se parábola, elipse ou hipérbole, respectivamente. A Figura 26 mostra uma ilustração para a formação de uma hipérbole segundo a teoria de Menaechmus. A contribuição deste estudo foi essencial para a obtenção das expressões matemáticas que caracterizavam cada uma das curvas, feito alcançado pelos gregos.

É notória a contribuição que diversos estudiosos forneceram ao longo do tempo para o estudo das cônicas. Entretanto, a obra *As Cônicas* de Apolônio (262 - 190 a.C) é tido como um marco histórico neste segmento matemático. Apesar da existência de um estudo sólido e bem caracterizado a respeito das cônicas até aquele momento, Apolônio forneceu um grau de refinamento teórico nunca alcançado até então. Por meio deste trabalho, mostrou-se que a característica da seção cônica não depende do ângulo do vértice, reto, agudo ou obtuso, como acreditava-se anteriormente. Um mesmo cone é capaz de gerar as

Figura 26 – Hipérbole formada por uma seção perpendicular à geratriz do cone



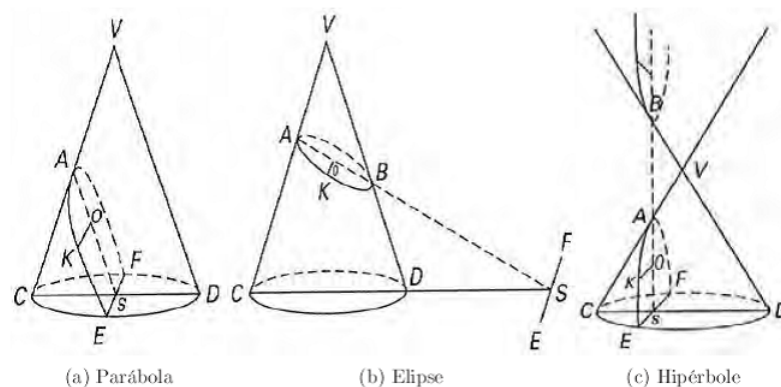
Fonte: Lopes 2011

três curvas independente da sua angulação. Apolônio provou que as diferentes formas eram obtidas com a variação do ângulo entre o plano de interseção e a geratriz. Outro fator marcante creditado ao Apolônio e, utilizado até hoje, foi o uso do cone de duas folhas. Esta inovação para época propiciou a geração da configuração da hipérbole como é conhecida atualmente, com dois ramos.

### B.3.1 Caracterização das Cônicas de Apolônio

A caracterização das seções cônicas apresentadas por Apolônio traz uma abordagem sistemática a respeito dos diferentes tipos de curvas. A parábola, elipse e hipérbole são então obtidas através de interseções entre um cone e um determinado plano, Figura 27.

Figura 27 – Interseções geradoras das cônicas



Fonte: Lopes 2011

Primeiramente, toma-se como base o triângulo axial, representado na Figura 27 pelo triângulo  $VCD$ . A parábola será determinada por um plano que seccionará a base  $\overline{CD}$  do triângulo axial e será paralelo a um dos lados deste triângulo, Figura 27a.

Por outro lado, no caso da elipse, o plano intersecta os lados  $\overline{CV}$  e  $\overline{VD}$  do triângulo axial, além do prolongamento de sua base  $\overline{CD}$ , figura 27b.

Por fim, a hipérbole é gerada pela a interseção do plano e um dos lados do triângulo axial. Uma característica que difere a parábola da hipérbole é que, nesta última o plano não é paralelo a nenhum dos lados do triângulo axial. Além disso, o prolongamento do lado do triângulo não intersectado pelo plano seccionará este mesmo plano.

Além disso, o plano não é paralelo a nenhum dos lados do triângulo e intersecta prolongamento do lado oposto, Figura 27c.

### B.3.1.1 Hipérbole: definição e equações

Apesar do tratamento dado às curvas, como apresentado nas seções anteriores, faz-se necessário para o bom entendimento deste trabalho uma abordagem que caracterize seus elementos de forma analítica. Por esta razão, foi utilizada a descrição de seus pontos por meio de lugar geométrico, que recorre às propriedades entre segmentos e pontos que pertencessem à hipérbole. Deste modo, tem-se a definição que é utilizada atualmente:

*Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos distintos é em valor absoluto igual a uma constante, menor que a distância entre estes pontos.*

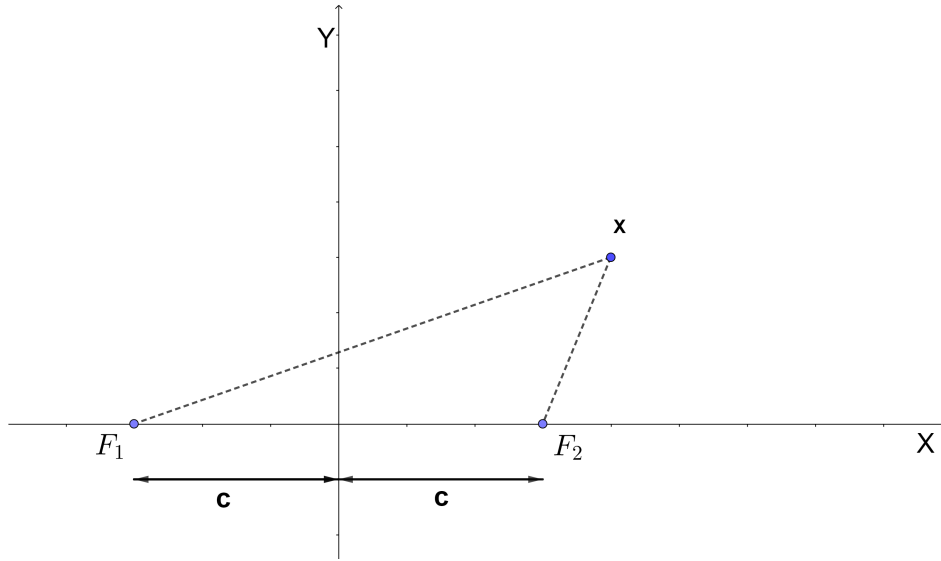
A fim de alcançar uma equação matemática que denote a hipérbole é necessário uma modelagem da definição apresentada. Seguindo esse viés, define-se: Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos fixos, separados por uma distância igual a  $2c$ , com  $c > 0$  Figura 28. Toma-se um ponto genérico  $X = (x, y)$  deste plano.

Com o propósito de que o ponto  $X$  pertença à hipérbole, tem que satisfazer a condição estipulada pela definição. Ou seja,  $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ , com  $d$  representando a distância entre os pontos e  $0 < a < c$ . Sendo assim, tem-se:

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a. \quad (\text{B.9})$$

Considerando  $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$ ,

Figura 28 – Ponto genérico pertencente à Hipérbole



Fonte: O autor, 2020

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a, \quad (\text{B.10})$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a. \quad (\text{B.11})$$

Como ambos os membros da igualdade são não negativos. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação,

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (\text{B.12})$$

Desenvolvendo, realizando os devidos anulamentos e simplificação,

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (\text{B.13})$$

Novamente, elevando os membros da equação ao quadrado,

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2, \quad (\text{B.14})$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4, \quad (\text{B.15})$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (\text{B.16})$$

Dividindo a equação anterior por  $a^2(c^2 - a^2)$ , que não é nulo, pois  $0 < a < c$ , tem-se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \quad (\text{B.17})$$

Por fim, admitindo  $b^2 = c^2 - a^2$ , a equação se resume a:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{B.18})$$

A equação (B.18) é chamada de equação reduzida da hipérbole.