Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Equações polinomiais: Soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas [†]

por

Ronaldo da Silva Pontes

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Equações polinomiais: Soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas

por

Ronaldo da Silva Pontes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. Gilberto Fernandes Vieira - UFCG

Agosto/2013

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus, por ter me dado forças e capacidade para executar esse trabalho.

Aos meus queridos pais, que contribuíram de forma prática na formação do meu caráter, com seus exemplos de dignidade e honestidade.

À minha amada esposa por ter abdicado de minha presença e assumido minhas responsabilidades familiares.

Aos meus filhos, cujo amor e carinho trouxeram alegria nos momentos de exaustão e desânimo.

Aos meus irmãos que sempre me apoiaram nessa caminhada.

A todos os professores e colegas de curso pelo crescimento intelectual proporcionado e às coordenações, local e geral, do PROFMAT pelo excelente projeto que concretizou a realização de um sonho.

A Napoleón Caro Tuesta, meu orientador, por toda contribuição intelectual e pelas horas de empenho em busca de me mostrar os melhores caminhos da pesquisa e pela paciência com minhas limitações e dificuldades que foram superadas com seu excelente apoio.

Aos amigos, Aldeck, Alysson, Diego, Francisco e Marcelo pelo companheirismo durante todo o curso e as horas de estudos compartilhadas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

À Universidade Federal da Paraíba-UFPB onde conclui minha graduação e agora este trabalho de mestrado.

Dedicatória

Aos meus pais, José e Maria Lúcia, a minha esposa Marizete e aos meus filhos Déborah e Miguel.

Resumo

Desde a antiguidade, há mais ou menos 4000 anos, vários povos já resolviam equações polinomiais no seu cotidiano através de problemas e construções práticas. Neste trabalho, estudaremos alguns métodos algébricos e geométricos usados para resolução de equações polinomiais. Iniciaremos falando sobre fatoração e divisão de polinômios, dispositivo de Briot-Ruffini, relações de Girard, teorema das raízes complexas e o teorema de pesquisa das raízes racionais. No capítulo 2, mostraremos os métodos algébricos de Viète, Cardano, Ferrari e Euler, e alguns métodos geométricos, como o da proporção, o de Descartes e Thomas Carlyle e das cônicas. No capítulo 3, veremos a derivada de uma função polinomial, o método iterativo de Newton, translação de eixos coordenados, o uso da derivada para encontrar os coeficientes da forma reduzida das funções polinomiais e com auxílio de derivadas mostraremos um método de resolução para as equações do 3° e 4° graus.

Palavras-chave: Polinômios, Equações polinomiais.

Abstract

Since ancient times, for about 4000 years, many people have already solved polynomial equations in their daily lives through problems and practices constructions. In this paper, we study some algebraic and geometric methods used for solving polynomial equations. We start talking about factoring and division of polynomials, device Briot-Ruffini, relationships Girard, theorem of the complex roots and the theorem of the rational roots research. In chapter 2, we will show the methods algebraic of Viète, Cardano, Ferrari and Euler, and some geometric methods, such as the of proportion, of the Descartes and Thomas Carlyle and of the conicas. In section 3, we see the derivative of a polynomial, Newton's iterative method, translation of coordinate axes, using the derived for to find coefficients of the reduced form of the polynomial and with the aid of derivatives show a method of resolution the equations 3rd and 4th degrees.

Keywords: polynomials, polynomial equations.

Sumário

Introdução

Este trabalho trata do uso das derivadas da função polinomial para determinar os coeficientes das equações polinomiais na forma reduzida ou canônica, obtidos da transformação $x = y - a_{n-1}/na_n$ que converte qualquer equação completa de grau n da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ em uma equação de grau n em y faltando o termo de expoente $n-1$, a qual chamaremos de forma reduzida ou canônica.

A busca de uma forma mais simples para resolver equações polinomiais levou os gênios Vièti, Cardano e Ferrari a fazer uma translação do domínio da função polinomial de grau correspondente pela seguinte substituição $x = y - b/na$ onde n é o grau da função polinomial. O grande problema no nosso ponto de vista são as relações entre os coeficientes da forma reduzida e a forma original (completa). Observe:

Na equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, mediante a substituição de x por $y - b/2a$ apresenta a forma reduzida $y^2 + p = 0$, onde a relação entre os coeficientes é:

$$p = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Na equação completa do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, mediante a substituição de x por $y - b/3a$ apresenta a forma reduzida $y^3 + py + q = 0$, onde as relações entre os coeficientes são:

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a},$$
$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Na equação completa do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$, mediante a substituição de x por $y - b/4a$ apresenta a forma reduzida $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ onde p, q e r são:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2},$$
$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3},$$
$$r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}.$$

Como são indispensáveis nos métodos de resolução de cada equação, vamos propor um método para relacionar de forma simples os coeficientes da equação reduzida com os da forma original (completa), usando apenas as derivadas da função polinomial que possui as mesmas raízes que a equação original (completa). Mostraremos também que toda equação na forma reduzida obedece a uma fórmula geral, baseada na série de Taylor.

Iniciaremos falando sobre polinômios, equações polinomiais e derivada de uma função polinomial, demonstraremos na medida do possível alguns resultados e teoremas. Estudaremos alguns métodos algébricos de resolução de equações polinomiais destacando, o método de completar quadrados e a fórmula de Bháskara para a equação do 2º grau, a fórmula de Cardano e a solução trigonométrica de Viète que dispensa o "calculo de raízes de números complexos" para a equação do 3º grau, os métodos de Ferrari e Euler para a equação do 4º grau e o método iterativo de Newton para equações de grau maior que 4. Veremos também alguns métodos geométricos que podem ser aplicados facilmente nas aulas do ensino médio, como os métodos de Descartes e Thomas Carlyle para a equação do 2º grau e o método das cônicas para a do 3º grau.

Em cada sessão dos capítulos serão expostas a utilidade de cada método e técnica de resolução de equações polinomiais, obedecendo à seguinte sequência: fatoração de polinômios, pesquisa de raízes racionas, e em último caso, as fórmulas.

Capítulo 1

Polinômios e equações polinomiais

Estudaremos neste capítulo os métodos e técnicas usadas no ensino médio para resolução de equações polinomiais. Demostraremos algumas técnicas de resolução, como a fatoração e divisão de polinômios, dispositivo de Briot-Ruffini, as relações de Girard, o teorema das raízes complexas e o teorema de pesquisa das raízes racionais. Para isso seguiremos a sequência didática dos livros do ensino médio.

1.1 Polinômio em uma variável

Definição 1.1 *Um* ***polinômio com coeficientes em*** $\mathbb{R}$ ***(corpo dos números reais) na variável*** x *é uma expressão formal do tipo:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ *são números reais, chamados* ***coeficientes do polinômio****. Se* $a_n \neq 0$*, dizemos que* n *é o* ***grau do polinômio****. Neste caso,* a_n *é chamado de* ***coeficiente líder*** *do polinômio.*

Observação: Um polinômio sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ se define de forma análoga.

Exemplos:

1. $p(x) = 5x - 4$ é um polinômio do 1º grau com coeficientes $a_1 = 5, a_0 = -4$.
2. $p(x) = 2x^2 - 3x$ é um polinômio do 2º grau com coeficientes $a_2 = 2$, $a_1 = -3$ e $a_0 = 0$.
3. $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x - 3$ é um polinômio do 3º grau com coeficientes $a_3 = 3$, $a_2 = 2$, $a_1 = 7$ e $a_0 = -3$.

$\diamond$

1.1.1 Função polinomial

Definição 1.2 *Uma função f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é do* ***tipo polinomial*** *quando existem números reais* $a_0, a_1, ..., a_n$ *tais que, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Observações:

1. Funções polinomiais são originadas por polinômios.

2. A cada função polinomial associa-se um único polinômio e vice-versa, de forma que não há confusão em nos referirmos sem distinção às funções polinomiais ou aos polinômios.

Exemplos:

1. As funções polinomiais do tipo $p(x) = a$, com $a \neq 0$, são chamadas de **funções constantes**.

2. As funções polinomiais da forma $p(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, são chamadas de **funções afins**.

3. As funções polinomiais do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, são chamadas de **funções quadráticas**.

◇

Polinômio identicamente nulo

Definição 1.3 *Um polinômio cujos coeficientes são todos iguais a zero é denominado de* ***polinômio identicamente nulo ou polinômio zero.*** *De modo que, um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *é identicamente nulo se* $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$.

Observação: O grau do polinômio identicamente nulo não é definido.

Igualdade de polinômios

Definição 1.4 *Dados dois polinômios* $p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *e* $p_2(x) = b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + a_0$*. Então* $p_1(x) = p_2(x)$ *se,* $m = n$ *e, além disso, os seus coeficientes são ordenadamente iguais, ou seja:*

$$a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Exemplo: Determine os valores de a, b, c, d e e de modo que os polinômios $p(x) = ax^4 + 5x^2 + dx - b$ e $q(x) = 2x^4 + (b-3)x^3 + (2c-1)x^2 + x + e$ sejam iguais.

Solução: Para que seja $p(x) = q(x)$, devemos ter:

$a = 2$,

$0 = b - 3 \Rightarrow b = 3$,

$5 = 2c - 1 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$,

$d = 1$,

$e = -b \Rightarrow e = -3$.

Logo, $a = 2, b = 3, c = 3, d = 1$ e $e = -3$. ◇

Valor numérico de uma função polinomial

Definição 1.5 *Considere uma função polinomial $f(x)$ e um número real α.* ***O valor numérico*** *da função polinomial $f(x)$ para $x = \alpha$ é o valor que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $f(\alpha)$. Então, $f(\alpha)$ é o valor numérico de $f(x)$ para $x = \alpha$. Assim, de modo geral, dado o polinômio*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

o valor de $f(x)$ para $x = \alpha$ é

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0.$$

Exemplo: O valor numérico de $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$ é

$$p(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 5 = 32 - 12 + 5 = 25.$$

◇

Observação: Se $f(\alpha) = 0$, o número α é denominado **raiz** de $f(x)$. Por exemplo, na função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, temos $f(2) = 0$. Logo, 2 é raiz dessa função polinomial.

Gráficos de funções polinomiais

Os gráficos de funções polinomiais são estudados desde o 9º ano do ensino fundamental, apresentando diversas aplicações na Física, na Química e na Estatística. Por exemplo, em Cinemática o movimento retilíneo uniforme (MRU) tem a posição de um móvel descrita por uma função afim e a velocidade por uma função constante. Já no movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), a posição de um móvel é descrita por uma função quadrática, a velocidade por uma função afim e a aceleração por um função constante. Veremos agora umas dicas simples de como construir esses gráficos no plano cartesiano.

Função constante.

Seja $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial definida por $f(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$, conhecida como função constante, o seu gráfico é uma linha reta paralela ao eixo horizontal. Da geometria Euclidiana, sabemos que por dois pontos distintos passa uma única linha reta; basta calcular dois pontos distintos da reta de coordenadas $(x, f(x))$ e traçar a linha reta que passa por esses pontos.

Exemplo: Esboce o gráfico da função constante $f(x) = 4$.

Solução: Escolhendo arbitrariamente $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$ e $x = 4 \Rightarrow f(4) = 4$. Logo, temos os pontos $P_1 = (0, 4)$ e $P_2 = (4, 4)$ por onde vamos traçar nossa linha reta. Ver figura 1.1. $\diamond$

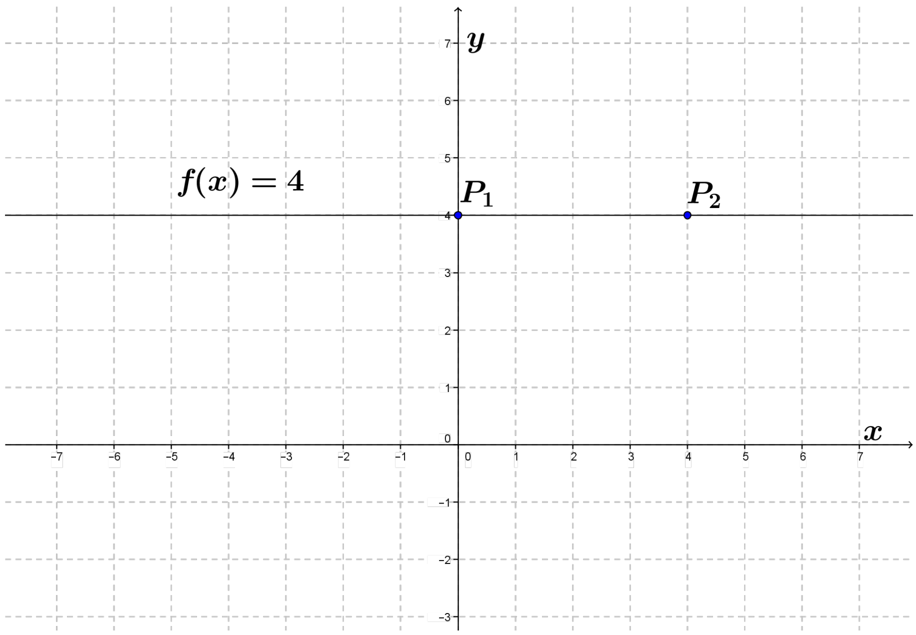

Figura 1.1: Gráfico da função constante $f(x) = 4$.

Função afim.

Seja $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ conhecida como função afim. Ela será crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$, o seu gráfico é uma linha reta inclinada ao eixo horizontal. De modo análogo à função constante, basta calcular dois pontos distintos da reta de coordenadas $(x, f(x))$ e traçar a linha reta que passa por esses pontos.

Exemplo: Esboce o gráfico da função afim $f(x) = 2x - 4$.

Solução: Como $a = 2 > 0$, a função é crescente. Escolhendo arbitrariamente $x = 0$ e $x = 4$ obtemos $f(0) = -4$ e $f(4) = 4$. Logo, temos os pontos $P_1 = (0, -4)$ e $P_2 = (4, 4)$, por onde vamos traçar nossa linha reta. Ver figura 1.2. $\diamond$

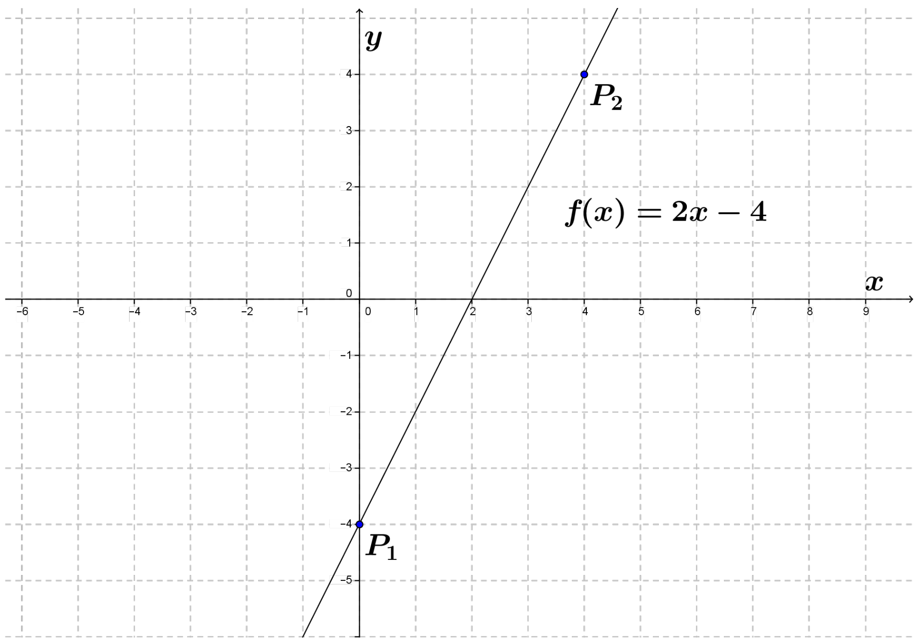

Figura 1.2: Gráfico da função afim $f(x) = 2x - 4$.

Função quadrática.

Seja $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, conhecida como função quadrática. O seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima se $a > 0$ e, para baixo se $a < 0$. Possui um ponto especial chamado de vértice de coordenadas $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Marcando o vértice, e alguns pontinhos de coordenadas $(x, f(x))$ no plano cartesiano, podemos traçar por eles o gráfico da função.

Exemplo: Esboce o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Solução: As coordenadas do vértice são $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = (3, -4)$. Como $a = 1 > 0$ a concavidade da parábola é para cima. Calculemos alguns pontos de coordenadas $(x, f(x))$. Para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$; para $x = 2 \Rightarrow f(2) = 3$; para $x = 4 \Rightarrow f(4) = 3$ e para $x = 5 \Rightarrow f(5) = 0$. Marcando o vértice e esses pontos no plano cartesiano, podemos traçar, por eles, o gráfico da função. Ver Figura 1.3. $\diamond$

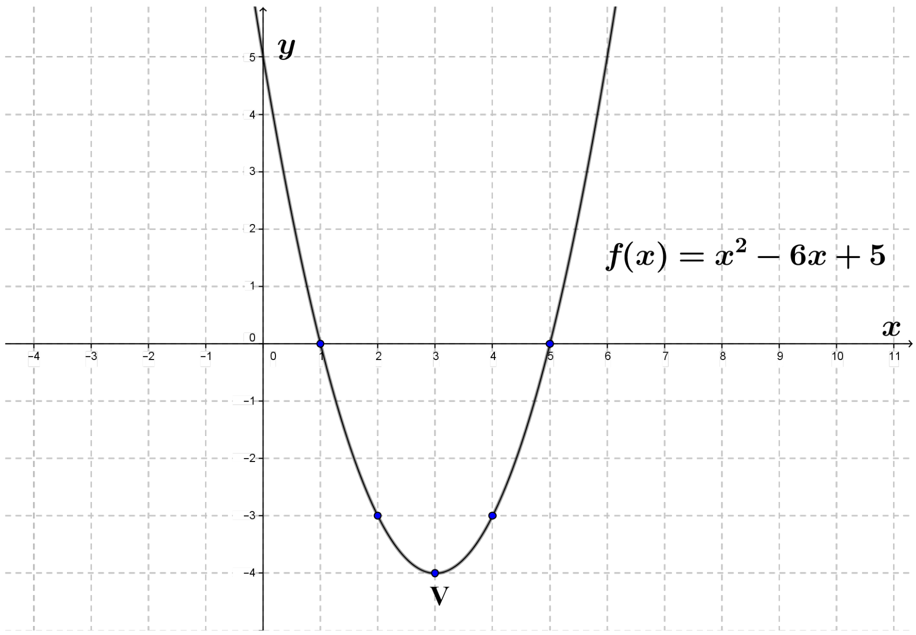

Figura 1.3: Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

1.1.2 Operações com polinômios

Adição de polinômios

Definição 1.6 *A adição de dois polinômios é feita somando os termos de mesmo expoente.*

Dados $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *e* $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$*, temos que:*

$$p(x) + g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i.$$

Exemplos:

1. Dados $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$, determine $p(x) + q(x)$.

   Solução: Completando o polinômio $p(x)$ com o termo $0x^3$, temos:

$$p(x) + q(x) = (0x^3 + 3x^2 + 2x + 1) + (-x^3 + 4x^2 - 2x - 5)$$

$$= (0 - 1)x^3 + (3 + 4)x^2 + (2 - 2)x + (1 - 5)$$

$$= -x^3 + 7x^2 - 4.$$

2. Dados $p(x) = 6x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ e $q(x) = -3x^3 + 3x^3 - x + 1$, calcule $p(x) + q(x)$.

   Solução: Como $p(x)$ e $q(x)$ possuem o mesmo grau, temos:

$$p(x) + q(x) = (6x^3 + 3x^2 - 2x + 4) + (-3x^3 + 3x^3 - x + 1)$$

$$= (6 - 3)x^3 + (3 + 3)x^2 + (-2 - 1)x + (4 + 1)$$

$$= 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5.$$

◇

Multiplicação de polinômios

Definição 1.7 *A multiplicação de dois polinômios é feita multiplicando cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo e somando esses produtos.*

Dados $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ *e* $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$*, temos:*

$$p(x) \cdot q(x) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) x^k.$$

Exemplos:

1. Sendo $p(x) = 3x^2$ e $q(x) = x^2 - 3x + 2$, calcule $p(x) \cdot q(x)$.

   Solução: Multiplicando termo a termo, temos:

   $p(x) \cdot q(x) = (3x^2)(x^2 - 3x + 2) = 2 \cdot 3x^2 - 3x \cdot 3x^2 + x^2 \cdot 3x^2 = 6x^2 - 9x^3 + 3x^4.$

2. Dados os polinômios $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = -2x + 5$, calcule $p(x) \cdot q(x)$.

   Solução: Multiplicando termo a termo, temos:

   $p(x) \cdot q(x) = (3x - 4)(-2x + 5) = -20 + 15x + 8x - 6x^2 = -20 + 23x - 6x^2.$

$\diamond$

1.1.3 Produto notáveis e fatoração

No próximo capítulo, trabalharemos a equação polinomial do segundo grau, onde discutiremos a sua resolução por completamento de quadrados ou por fatoração, quando for o caso. Também usaremos produtos notáveis em outras demonstrações.

Produtos notáveis

São produtos que aparecem com muita frequência na resolução de equações e no desenvolvimento de expressões algébricas:

- **Quadrado da soma de dois termos**:

  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$

- **Quadrado da diferença de dois termos**:

  $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2 \Rightarrow (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$

- **Produto da soma pela diferença de dois termos**:

  $$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba + b^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

- **Cubo da soma de dois termos** :

  $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- **Cubo da diferença de dois termos**:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

- **Soma de dois cubos**:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

- **Diferença de dois cubos**

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Observação: Caso seja necessário calcular o produto de um binômio de potência maior que 3, podemos usar o famoso **binômio de Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

com k, $n \in \mathbb{N}$.

Fatoração de polinômios:

A fatoração de polinômios é de grande utilidade na resolução de equações polinomiais, facilitando a simplificação de expressões algébricas, por exemplo, no cálculo de limites.

Veremos agora alguns casos:

- **Fatoração por fator comum:** Deve-se observar se todos o termos do polinômio apresentam um fator em comum. Em caso afirmativo devemos colocá-lo em evidência. Por exemplo.

$$4x^3 - 8x^2 + 16x = 4x(x^2 - 2x + 4).$$

- **Fatoração por agrupamento:** Deve-se aplicar a fatoração por fator comum mais de uma vez. Veja o exemplo:

$$2x^3 + 4x^2 - 6x - 12 = 2x^2(x+2) - 6(x+2) = (x+2)(2x^2 - 6).$$

- **Fatoração de um trinômio quadrado perfeito:**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

- **Fatoração pela diferença de dois quadrados**.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- **Fatoração pela soma de dois cubos**.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- **Fatoração pela diferença de dois cubos**.

$$a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2).$$

Como aplicação, veremos alguns exemplos do uso de fatoração na resolução de equações polinomiais.

1. Resolva a equação do 3º grau $9x^3 - 27x^2 - 4x + 12 = 0$ por meio de fatoração.

Solução: Fazendo a fatoração por agrupamento, temos

$$9x^3 - 27x^2 - 4x + 12 = 9x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(9x^2 - 4).$$

Fatorando o segundo fator, que é uma diferença de quadrados, temos

$$9x^3 - 27x^2 - 4x + 12 = (x - 3)(9x^2 - 4) = (x - 3)(3x + 2)(3x - 2)$$

que substituída na equação fica:

$$9x^3 - 27x^2 - 4x + 12 = (x - 3)(3x + 2)(3x - 2) = 0$$

que implica

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ou

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

ou

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Portanto, as raízes da equação $9x^3 - 27x^2 - 4x + 12 = 0$ são: 3, $\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$.

2. Encontre todas as raízes da equação $4x^4 + 32x = 0$.

Solução: Fazendo a fatoração por fator comum, temos

$$4x^4 + 32x = 4x(x^3 + 8).$$

Fatorando o segundo fator, que é a soma de dois cubos, temos:

$$4x^4 + 32x = 4x(x^3 + 8) = 4x(x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

que substituindo na equação, fica:

$$4x^4 + 32x = 4x(x^3 + 8) = 4x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0,$$

que implica

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

ou

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

ou

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ \\ x_2 = 1 - \sqrt{3}i. \end{cases}$$

Portanto, as quatro raízes da equação são $4x^4+32x = 0$ são: $0, -2$, $1+\sqrt{3}i$ e $1-\sqrt{3}i$.

Seria muito bom que todas as equações polinomiais pudessem ser resolvidas por fatoração, porém, nem sempre é fácil enxergar um fator comum para se efetuar em seguida o agrupamento ou outro tipo de fatoração. Estudaremos na próxima sessão o teorema das raízes racionais que nos ajudará a encontrar raízes racionais, caso existam.

1.1.4 Divisão de polinômios

Teorema 1.8 ***(Algoritmo de Euclides)****. Sejam $p(x)$ e $d(x)$ dois polinômios com coeficientes reais, com $d(x) \neq 0$. Então, existem únicos polinômios com coeficientes reais $q(x)$ e $r(x)$ tais que:*

$p(x) = d(x)q(x)+r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $d(x)$.

Os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ são chamados de ***quociente e resto****, respectivamente.*

Demonstração:
Provemos primeiro a **existência**. Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $d(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Se $n < p$ tome, $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$. Agora, se $n \geq p$ e $b_p \neq 0$, tome $q_0(x) = \frac{a_n}{b_p}x^{n-p}$. Vemos que o polinômio $p(x) - d(x)q_0(x) = (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_p}b_{p-1})x^{n-1} + \cdots$ tem, no máximo, grau igual a $n-1$.

Fazendo o mesmo processo para $p(x) - d(x)q_0(x)$, vemos que existe um polinômio $q_1(x)$ tal que $p(x) - d(x)q_0(x) - d(x)q_1(x) = p(x) - d(x)[q_0(x) + q_1(x)]$ tem, no máximo, grau $n-2$.

Prosseguindo, vemos que existe um polinômio $q(x) = [q_0(x) + q_1(x)] + \cdots + q_{n-p}(x)$ tal que $p(x) - d(x)q(x)$ tem grau no máximo $p-1$. Chamando $p(x) - d(x)q(x)$ de $r(x)$, está provada a existência de $q(x)$ e $r(x)$.

Unicidade, se $p(x) = d(x)q_1(x) + r_1(x)$ e $p(x) = d(x)q_2(x) + r_2(x)$ com os graus de $r_1(x)$ e $r_2(x)$ ambos menores que o grau de $d(x)$, temos, subtraindo, que $d(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_1(x) - r_2(x)$. Se $q_1(x) - q_2(x)$ não for identicamente nulo, o grau do primeiro membro será maior ou igual que o grau de $d(x)$. Por outro lado, o segundo membro tem grau menor que $d(x)$. Logo, $q_1(x) - q_2(x)$ é identicamente nulo, ou seja, $q_1(x) = q_2(x)$, que implica $r_1(x) = r_2(x)$. ■

Exemplo: Vamos efetuar a divisão do polinômio $p(x) = x^3 + 10$ por $d(x) = x + 2$.

Solução: Como o grau de $p(x)$ é 3 e o grau de $d(x)$ é 1, o grau de $q(x)$ é no máximo 2, ou seja, $q(x) = ax^2 + bx + c$ e $r(x) = r$ é uma constante.

Da identidade $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$, tem-se

$$x^3 + 10 = (x+2)(ax^2 + bx + c) + r \Leftrightarrow x^3 + 10 = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + (2c+r).$$

Logo, pela identidade de polinômios, temos

$a = 1,$

$2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a \Rightarrow b = -2,$

$2b + c = 0 \Rightarrow c = -2b \Rightarrow c = 4,$

$2c + r = 10 \Rightarrow r = 10 - 2c \Rightarrow r = 2.$

Portanto, $q(x) = x^2 - 2x + 4$ e $r(x) = 2$. ◇

Outra solução: Partindo da igualdade

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

e somando 2 a ambos os membros, tem-se

$$x^3 + 8 + 2 = x^3 + 10 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 2.$$

Logo, $q(x) = x^2 - 2x + 4$ e $r(x) = 2$.

Observação: Existe também um método de divisão de polinômios muito usado no ensino médio chamado método das chaves.

Teorema 1.9 ***(Teorema de D'Alembert)*** *O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é $p(a)$.*

Demonstração: Da divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$ tais que $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$. Como o divisor $x - a$ é de grau 1, o resto será de grau zero, ou seja, uma constante. Fazendo $r(x) = r$, constante, temos: $p(x) = (x - a)q(x) + r$ e substituindo x por a segue-se que

$$p(a) = (a - a)q(a) + r \Rightarrow r = p(a).$$

■

Exemplos:

1. Calcule o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 5$ por $x - 1$.
   De acordo com o Teorema de D´Alembert:

   $$r = p(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 + 2(1) - 5 = 2.$$

2. Encontre o resto de divisão de $p(x) = x^4 + 2x^2 + 2x - 3$ por $x + 2$.
   Pelo Teorema de D´Alembert temos:

   $$r = p(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^2 + 2(-2) - 3 = 17.$$

◇

Corolário 1.9.1 ***(Teorema do fator)*** *Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $p(a) = 0$, ou seja, $p(x) = (x - a)q(x)$.*

Demonstração: Se $p(x)$ é divisível por $x-a$, então pelo Teorema de D'Alembert, $r = p(a) = 0$, e, de outra forma, se $p(a) = 0$, como, pelo Teorema de D'Alembert, $r = p(a)$, temos $r = 0$, ou seja, $p(x)$ é divisível por $x - a$. ■

Exemplo: Determine o valor de k de modo que $p(x) = x^3 + x^2 + kx - 2$ seja divisível por $x + \dfrac{1}{2}$.

Solução: Devemos ter $p\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Logo: $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + k\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2 = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{k}{2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} = -\frac{15}{8} \Rightarrow k = -\frac{15}{4}.$$ ◇

1.1.5 Dispositivo de Briot-Ruffini

Teorema 1.10 *Ao dividir o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ por $x - a$ obtemos um quociente $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ e resto r.*

Demonstração: Como o grau de $p(x)$ é n e o grau de $x - a$ é 1, o grau de $q(x)$ é no máximo $n - 1$. Assim, pelo teorema da divisão temos:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - a)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + r.$$

Desenvolvendo o segundo membro, obtemos, por comparação:

$$\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n \\
&b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1} = aa_n + a_{n-1} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&b_1 = ab_2 + a_2 \\
&b_0 = ab_1 + a_1
\end{aligned}$$

Com coeficientes dados da forma acima, temos:

$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ e $r = ab_0 + a_0$ ■

Observação: O procedimento efetuado acima pode ser colocado na seguinte forma prática no modo horizontal. Observe:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & r \end{array}$$

Exemplo: Use o dispositivo de Briot-Ruffini para obter o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 3$ por $d(x) = x - 1$.

Solução: Conforme o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ e } grau(q) = grau(p) - grau(d) = 5 - 1 = 4$$

escrevendo $q(x) = q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$ e $r = aq_0 + a_0$.

Como: $a_5 = 3, a_4 = 4, a_3 = 3, a_2 = -7, a_1 = -2$ e $a_0 = 3$, temos:

$$q_4 = a_5 = 3$$

$$q_3 = aq_4 + a_4 = 1 \cdot 3 + 4 = 7$$

$$q_2 = aq_3 + a_3 = 1 \cdot 7 + 3 = 10$$

$$q_1 = aq_2 + a_2 = 1 \cdot 10 + (-7) = 3$$

$$q_0 = aq_1 + a_1 = 1 \cdot 3 + (-2) = 1 \text{ e } r = aq_0 + a_0 = 1 \cdot 1 + 3 = 4$$

Portanto, $q(x) = 3x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 3x + 1$ e $r = 4$. ◇

Observação: O dispositivo de Briot-Ruffini é muito útil quando se conhece uma raiz inteira de um polinômio, pois esse dispositivo reduz o grau da equação de n para $n - 1$.

Exemplo: Resolva a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Note que 1 é raiz da equação do 3º grau $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

encontraremos $x^2 - 2x + 2 = 0$, que é uma equação do 2º grau com raízes $1 + i$ e $1 - i$.

Portanto, as raízes da equação são: 1, $1 + i$ e $1 - i$.

1.2 Equações polinomiais ou algébricas

Definição 1.11 *Denomina-se* ***equação polinomial ou algébrica*** *toda equação que pode ser escrita na forma:* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ *com* $a_n \neq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$, *em que* $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ *são números reais e* n *é o* ***grau*** *da equação.*

Exemplos:

1. $5x + 2 = 0$ é uma equação algébrica do 1º grau.
2. $x^2 - 3x + 2 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.
3. $7x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$ é uma equação algébrica do 3º grau.

$\diamond$

1.2.1 Raiz de uma equação polinomial ou algébrica

Definição 1.12 *Denomina-se* ***raiz ou zero*** *da equação algébrica*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

o valor α *que substituído no lugar de* x *satisfaz a igualdade, ou seja, o valor* α *tal que*

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Exemplo: A equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ admite $x = 2$ como raiz, pois $(2)^3 - 6(2) + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$. $\diamond$

1.2.2 Teorema fundamental da álgebra

O Teorema fundamental da álgebra foi demonstrado por Gauss em 1799 e será exposto sem demonstração, pois requer um pouco de análise matemática.

Teorema 1.13 *Toda equação polinomial de grau* n $(n \geq 1)$ *com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.*

Como consequência do teorema fundamental da álgebra tem-se:

Corolário 1.13.1 ***(Teorema da decomposição)*** *Todo polinômio com coeficientes complexos* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ *com* $n \geq 1$ *e* $a_n \neq 0$ *pode ser decomposto num produto de* n *fatores de 1º grau, ou seja:*

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n).$$

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinômio de grau n ($n \geq 1$), pelo Teorema fundamental da álgebra $p(x)$ admite $x_1 \in \mathbb{C}$ como raiz, ou seja, $p(x_1) = 0$, então existe um $q(x)$ (quociente) de grau $n-1$ tal que:

$$p(x) = (x - x_1)q(x).$$

Agora se $q(x)$ tiver grau $n - 1 \geq 1$, de novo existem $x_2 \in \mathbb{C}$ e $q_2(x)$ de grau $n-2$ tal que:

$$q_1(x) = (x - x_2)q_2(x) \Rightarrow p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_2(x).$$

Por sua vez, se $q_2(x)$ tiver grau $n - 2 \geq 1$ existem $x_3 \in \mathbb{C}$ e $q_3(x)$ de grau $n-3$ tal que:

$$q_2(x) = (x - x_3)q_3(x) \Rightarrow p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)q_3(x).$$

Aplicando o processo sucessivamente, concluímos que

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n).$$

A menos de ordem dos fatores, a decomposição é única. ■

Corolário 1.13.2 *Toda equação algébrica de grau n com coeficientes complexos possui exatamente n raízes complexas.*

Demonstração: Pelo Corolário 1.13.1 todo polinômio $p(x)$ de grau n pode ser decomposto num produto de n fatores do 1º grau, logo:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) = 0,$$

o que implica que a equação $p(x) = 0$ possui exatamente n raízes complexas. ■

Exemplo: Vamos fazer a decomposição do polinômio $p(x) = x^5 - 16x$ em fatores de 1º grau:

Solução: Vamos decompor $p(x) = x^5 - 16x$ pelo método da fatoração; logo

$$p(x) = x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = x(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i).$$

Portanto, $p(x) = x(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$ é do 5º grau e possui exatamente 5 raízes complexas. ◇

Multiplicidade de uma raiz

Definição 1.14 *Se um polinômio $p(x)$ é tal que:*

$$p(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x)$$

com $q(\alpha) \neq 0$, dizemos que α é raiz de multiplicidade m da equação $p(x) = 0$.

Exemplos:

1. Quantas raízes possui a equação algébrica $x(x-2)^4(x+1)^3 = 0$.

Solução: Pelo Corolário 1.13.2, a equação possui 8 raízes, sendo: 0 uma raiz simples, 2 uma raiz quádrupla e -1 uma raiz tripla.

2. Escreva as equações do 3º grau que admitem 2 como raiz simples e -1 como raiz dupla.

Solução: Aplicando o teorema da decomposição, temos:

$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = 0$$

onde $a_n \neq 0$ e $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = -1$.

Substituindo os valores das raízes, temos

$$a_n(x-2)(x+1)(x+1) = 0$$

que equivale a

$$a_n(x-2)(x+1)^2 = a_n(x-2)(x^2 = 2x+1) = a_n(x^3-3x-2) = 0$$

Portanto, as equações pedidas são $a_n(x^3-3x-2) = 0$, com $a_n \neq 0$. $\diamond$

1.2.3 Relações de Girard

Definição 1.15 *As relações de Girard são relações entre coeficientes e raízes da equação $p(x) = 0$.*

Usaremos o Teorema da decomposição para encontrar as relações de Girard para as equações do 2º e 3º graus e depois faremos a generalização.

A equação do 2º grau $ax^2+bx+c = 0$ tem raízes x_1 e x_2, que decomposta em fatores lineares fica:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

e pela identidade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

A equação do 3º grau $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tem raízes x_1, x_2 e x_3 que decomposta em fatores lineares fica:

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

logo,

$$ax^3+bx^2+cx+d = ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)x^2 + a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x + a(x_1x_2x_3)$$

e pela identidade de polinômios, temos:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

De modo geral, para uma equação polinomial de grau $n \geq 3$ da forma

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com raízes, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, temos:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & \text{(Soma das raízes)} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & \text{(Soma das raízes duas a duas)} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} & \text{(Soma das raízes três a três)} \\ \vdots & \\ x_1x_2x_3\cdots x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} & \text{(Produto das } \mathbf{n} \text{ raízes).} \end{cases}$$

Exemplo: Resolva a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que uma raiz é igual à soma das outras duas.

Solução: Usando as relações de Girard para soma e produto das raízes, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 10 \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = 30.$$

A informação dada no problema (uma raiz é igual à soma das outras duas) $x_1 = x_2 + x_3$ que substituída na relação da soma implica

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_1 = 10 \Rightarrow 2x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 5$$

Daí segue-se que

$$x_2 + x_3 = 5 \text{ e } x_2x_3 = 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2.$$

Logo, as raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ são: 2, 3 e 5. $\diamond$

Observação: As relações de Girard são muito importantes quando se sabe alguma informação sobre as raízes da equação. A solução do sistema das relações em si nos leva de novo à equação original.

1.2.4 Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Teorema 1.16 *Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Demonstração: Por hipótese, temos que $\frac{p}{q}$ é uma raiz não nula da equação

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0.$$

Logo,

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a equação acima por q^n temos

$$a_np^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Isolando a_np^n, temos

$$a_np^n = -q(\underbrace{a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}}_{k\in\mathbb{Z}}),$$

pois os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$, p e q são números inteiros; logo:

$$a_n p^n = -qk$$

como o MDC de p e q é 1, então o MDC de p^n com q também é 1. Logo, q é divisor de a_n.

De modo análogo, isolando $a_0 q^n$, temos

$$a_0 q^n = -p(\underbrace{a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}}_{s \in \mathbb{Z}}).$$

Podemos escrever:

$$a_0 q^n = -ps$$

Como o MDC de q^n com p é 1, conclui-se que p é divisor de a_0. ■

Exemplo: Vamos pesquisar se a equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ possui raízes racionais.

Solução: Na equação dada, temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$.

p é divisor de 2 $\Rightarrow p \in$ {-1,1,-2,2}

q é divisor de 3 $\Rightarrow q \in$ {-1,1,-3,3}

Pelo Teorema 1.16, as prováveis raízes racionais p/q satisfazem a propriedade:

$\dfrac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\}$.

Fazendo a verificação, vemos que a equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$, possui três raízes racionais: 1, -2 e $\dfrac{1}{3}$. ◇

No capítulo 2 usaremos esse teorema para justificar que a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ possui o número 2 como raiz.

1.2.5 Raízes complexas não reais numa equação algébrica de coeficientes reais

Teorema 1.17 *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite o número complexo $z = a + bi$ como raiz, então $\overline{z} = a - bi$, conjugado de z, também é raiz da equação.*

Demonstração: Considere $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, com coeficientes reais. Por hipótese, temos que $z = a + bi$, $(b \neq 0)$ é raiz da equação, ou seja, $p(z) = 0$.
Portanto

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$$

Aplicando o conjugado em ambos os membros da equação, temos

$$\overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0} = \overline{0}.$$

Aplicando a propriedade da adição de conjugados $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, temos

$$\overline{a_nz^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} = 0.$$

Aplicando a propriedade do produto de conjugados $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ e o fato dos coeficientes a_n serem reais, ou seja, $a_n = \overline{a_n}$ para todo n temos

$$a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_2\overline{z^2} + a_1\overline{z} + a_0 = 0.$$

Aplicando a propriedade das potencias de conjugado $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, temos

$$a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_2(\overline{z})^2 + a_1(\overline{z}) + a_0 = 0,$$

ou seja, $p(\overline{z}) = 0$, de modo que $\overline{z}$ também é raiz da equação $p(x) = 0$. ■

Exemplo: Vamos resolver a equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ sabendo que o número complexo $1 + i$ é raiz desta equação.

Solução: Como $i+1$ é raiz da equação, implica que $1-i$ também é raiz, e podemos escrever

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = (x - 1 + i)(x - 1 - i)q(x) = (x^2 - 2x + 2)q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau 2.

Dividindo $p(x)$ por $x^2 - 2x + 2$ vamos obter $q(x) = x^2 - 1$ que tem como raízes -1 e 1.

Portanto, as raízes da equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ são: -1, 1, $1 + i$ e $1 - i$. ◇

Capítulo 2

Métodos de resolver equações algébricas

Estudaremos agora os métodos de resolução das equações polinomiais de forma algébrica por meio de radicais envolvendo os coeficientes da equação, dando destaque para os métodos de Bháskara, Viète, Cardano, Ferrari e Euler que contribuíram e muito para a resolução das equações. Falaremos também sobre alguns métodos geométricos, como o da proporção para a equação do 1º grau, o de completar quadrados, de Descartes e Thomas Carlyle para equações do 2º grau e o de Omar Kayan para equações do 3º grau. De forma simples, daremos exemplos que podem ser aplicados no ensino médio.

2.1 Equações do 1º grau

A primeira referência à equações de que se têm notícias consta do papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de matemática, escrito há mais ou menos 4000 anos. Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos. Os gregos resolviam equações através de Geometria, mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma situação matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de "coisa". Em árabe, a palavra "coisa" era pronunciada como xay. Daí surge o x como tradução simplificada de palavra "coisa" em árabe. Hoje, chamamos o termo desconhecido de incógnita, que é uma palavra originária do latim incognitu, que também quer dizer "coisa desconhecida". A incógnita é um símbolo que ocupa o lugar de um elemento desconhecido em uma equação.

2.1.1 Método algébrico

A solução algébrica de uma equação do 1º grau baseá-se em dois axiomas:

- **Princípio aditivo da igualdade ou de Euclides**:

  Podemos somar um número real a ambos os membro de uma igualdade que ela não se altera.

  Em símbolos: dados a, b e c números reais, tem-se

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

- **Princípio multiplicativo da igualdade**:

  Podemos multiplicar ambos os membros de uma igualdade por um número real não nulo que ela não se altera

  Simbolicamente, dados a, b e c números reais, com $c \neq 0$, tem-se

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

Toda equação polinomial do 1º grau pode ser escrita algebricamente da seguinte forma $ax + b = 0$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver essa equação soma-se o oposto de b nos dois lados da igualdade e obtem-se

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b),$$

que implica

$$ax = -b.$$

Posteriormente, multiplicando pelo inverso de a, chega-se a

$$a^{-1} \cdot ax = -b \cdot a^{-1},$$

que implica

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Exemplo: Resolva a equação $5x + 1 = 36$, onde x é um número racional.

Solução: Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar (-1) aos dois membros da equação, isolando o termo que contém a incógnita x no 1º membro:

$$5x + 1 = 36$$

$$5x + 1 + (-1) = 36 + (-1)$$
$$5x + 1 - 1 = 36 - 1$$
$$5x = 35.$$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{5}$, descobrindo assim o valor do número x.

$$5x \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 35 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x = 7.$$

Como $7 \in \mathbb{Q}$, temos que 7 é a solução da equação $5x + 1 = 36$. $\diamond$

Observação: Podemos resolver a equação acima isolando o valor da incógnita x de forma prática: Aplicando o princípio aditivo,

$$5x = 36 - 1$$
$$5x = 35.$$

Agora, aplicando o princípio multiplicativo,

$$x = \frac{35}{5} \Rightarrow x = 7.$$

2.1.2 Método geométrico

Se uma equação algébrica do 1º grau tem uma raiz positiva, ela poderá ser escrita como $ax = b$, com a e b positivos. Geometricamente, x é o quarto proporcional para os três segmentos de comprimento a, b , e 1, ou seja, $a : b = 1 : x$ (de fato, $a/b = 1/x$ leva a $ax = b$), de modo que x pode ser construído com régua e compasso de forma simples, mostrada na Figura 2.1, onde a abertura do ângulo em O é qualquer, $OA = a$, $OB = b$, $AC = 1$, e o ponto D é marcado de modo que CD seja paralelo a AB . Então $x = BD$ é a solução. De fato, por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+x},$$

donde resulta que

$$a(b + x) = b(a + 1),$$

que implica

$$ax = b.$$

Aprender bem a resolução de uma equação do 1° grau implica diretamente na aprendizagem de conteúdos como razão, proporção, regra de três simples e composta, como também na resolução de algumas equações do 2º grau incompletas, por exemplo, $4x^2 - 12x = 0$ e $9x^2 - 25 = 0$, que podem ser resolvidas por fatoração.

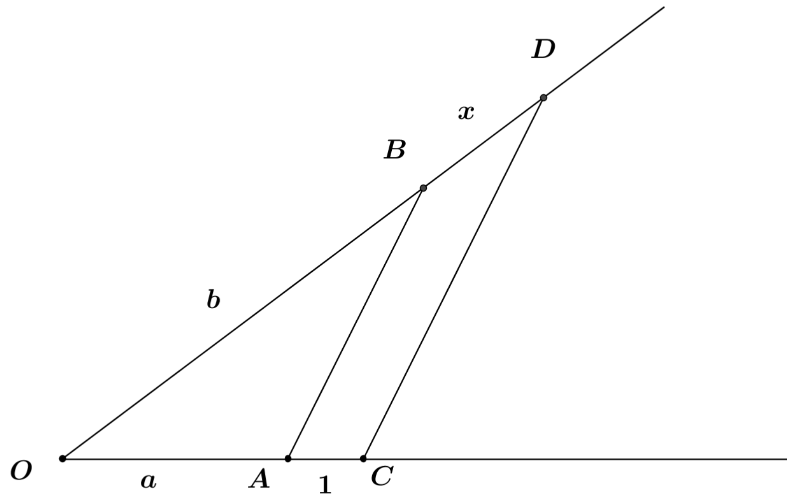

Figura 2.1: Solução geométrica da equação do 1º grau.

2.2 Equações polinomiais do 2º grau e a fórmula de Bháskara

A equação polinomial de segundo grau foi resolvida algebricamente (solução por radicais) pelo matemático hindu Sridhara, mas a fórmula para resolver essa equação acabou levando o nome de Bhaskara, pelo fato da solução ter sido publicada por esse matemático. Sua demonstração hoje é considerada bem simples, pois baseia-se no método de completamento de quadrados. Outro matemático que resolveu a equação do 2º grau de forma algébrica foi Françóis Viète usando o mesmo método que Tartaglia usara para resolver a equação do 3º grau. Dentre os métodos de resolução geometrica vamos destacar os dos matemáticos Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa Al-Kowarismi, René Descartes e Thomas Carlyle aos quais veremos na sequência.

2.2.1 Métodos algébricos

Solução por completamento de quadrados

A solução algébrica da equação completa $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ é feita mediante completamento de quadrados (aliás, completar quadrado nada mais é que encontrar os lados de um quadrado que resulte em determinada área). O processo é feito multiplicando a equação pelo inverso de a, a^{-1}, e subtraindo $-\frac{c}{a}$ de ambos os lados da igualdade. Tem-se

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Agora, pode-se pensar o que acrescenta nessa equação para que seu lado esquerdo possa ser um quadrado perfeito. Perceba que $b^2/4a^2$ é esse elemento e então se tem

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$

que implica

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

donde temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solução algébrica de Bháskara.

Solução algébrica de Sridhara

O método de resolução empregado por Bháskara (1114-1185) na verdade é de Sridhara (870-930) e foi encontrado um século antes de ser publicada por Bháskara. A fórmula de Sridhara considera encontrar dois números x e y cuja soma é s e cujo produto é p :

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Fazendo $x = \dfrac{s}{2} + a$ e $y = \dfrac{s}{2} - a$ temos

$$xy = \left(\frac{s}{2} + a\right)\left(\frac{s}{2} - a\right) = \frac{s^2}{4} - a^2 = p$$

que implica

$$a^2 = \frac{s^2}{4} - p \Rightarrow a = \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}}.$$

Logo, concluímos que os valores de x e y são:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} \quad \text{e} \quad y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}}.$$

Note que se $a < 0$, os valores de x e y são permutados.

Exemplo: Bruno cercou uma região retangular de área $54m^2$ com 30 metros de corda. Encontre as dimensões dessa região.

Solução: Se chamamos de a e b os lados do retângulo construído por Bruno, as condições sobre o perímetro e a área desse retângulo nos levam às seguintes equações:

$$2a + 2b = 30 \Rightarrow a + b = 15 \quad \text{e} \quad ab = 54, \text{ ou seja, } s = 15 \text{ e } p = 54.$$

Usando a fórmula de Sridhara, temos

$$a = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{15 + \sqrt{225 - 216}}{2} = \frac{15 + \sqrt{9}}{2} = \frac{15 + 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

e

$$b = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{15 + \sqrt{225 - 216}}{2} = \frac{15 - \sqrt{9}}{2} = \frac{15 - 3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Portanto, as dimensões da região procurada são 9 e 6 metros. $\diamond$

Método de Viète

A maneira que François Viète (1540-1603) descobriu para resolver a equação do segundo grau baseia-se em relacionar a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com uma equação do tipo $ay^2 + p = 0$, onde p é um número que depende de a, b, c de modo que qualquer solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ determinará uma solução da equação $ay^2 + p = 0$. Observe que a equação $ay^2 + p = 0$ admite duas soluções:

$$y_1 = \sqrt{-\frac{p}{a}} \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{-\frac{p}{a}}, \quad \text{se} \quad -\frac{p}{a} \geq 0.$$

Para fazer isto, usamos o seguinte truque: escrevendo $x = y + m$ como a soma de duas novas variáveis y e m, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ se escreve como

$$a(y + m)^2 + b(y + m) + c = 0,$$

na qual desenvolvendo o quadrado, tem-se

$$ay^2 + 2amy + am^2 + bm + by + c = 0.$$

Agrupando convenientemente, podemos escrever a expressão acima como uma equação na variável y, ou seja,

$$ay^2 + (2am + b)y + (am^2 + bm + c) = 0.$$

Dessa forma podemos obter uma equação da forma $ay^2 + p = 0$, escolhendo o valor de m de modo que o termo $(2am + b)$ se anule.

Escolhendo $m = -\dfrac{b}{2a}$ temos

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

que implica

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

o que é equivalente a

$$ay^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0.$$

Observando que a equação assumiu a forma $ay^2 + p = 0$, temos que suas soluções são:

$$y_1 = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \quad \text{se} \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0\ .$$

Lembrando-se que $m = -\dfrac{b}{2a}$ e que $x = y + m$ temos que as soluções da equação

$ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + y_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + y_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Como era de se esperar, as soluções são idênticas às de Bháskara.

Discriminante da equação do 2º grau

Vimos nas sessões anteriores que dada uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$ podemos encontrar as raízes pela fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \text{onde} \ \ \Delta = b^2 - 4ac.$$

Fazendo a análise do Δ junto com a fórmula de Bháskara, concluímos que:

- Se $\Delta > 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes complexas.

Exemplo: Vamos resolver as equações abaixo pela fórmula de Bháskara.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$. b) $x^2 - 4x + 4 = 0$. c) $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Soluções:

a) Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos $\Delta = 1 > 0$ e substituindo-os na fórmula de Bháskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm\ 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2. \end{cases}$$

Note que essas duas raízes são reais e diferentes.

b) Na equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$. Calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ obtemos $\Delta = 0$ e substituindo-os na fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm\ 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{4}{2} = 2.$$

Note que essas duas raízes são reais e iguais.

c) Na equação $x^2 - 6x + 10 = 0$, temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = 10$. Calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos $\Delta = -4 < 0$ e substituindo-os na fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm\ 2i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+2i}{2} = 3 + i \\ \\ x_2 = \dfrac{6-2i}{2} = 3 - i. \end{cases}$$

Note que essas duas raízes são complexas conjugadas.

2.2.2 Métodos geométricos

O método de completar quadrado de Al-Khwarizmi

Na Grécia, as equações de segundo grau eram resolvidas por meio de construções geométricas, mas essas construções, em geral, eram aplicadas à equações específicas. Muito tempo depois, na Pérsia, Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa Al-Kowarismi

(783-850), nascido na província persa de Khwarezm, de quem se herda as palavras algarismo e algoritmo, produziu uma obra popular sobre equações, a pedido do Califa Al-Mamun. A obra intitulada Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah (O livro da restauração e do balanceamento) utilizava um método geométrico para achar a solução da equação $x^2 + px = q$ (essa obra também ensinava os números hindu-arábicos), que consistia em pensar na quantidade $x^2 + px$ como sendo uma área. Assim, era construída uma cruz formada pelo quadrado de lado x e por quatro retângulos de lados $p/4$ e x. A área da cruz é exatamente $x^2 + px$. Então, como mostra a Figura 2.2, completa-se esta cruz com os quatros quadrados de lado $p/4$, para obter um quadrado perfeito de lado $x + p/2$.

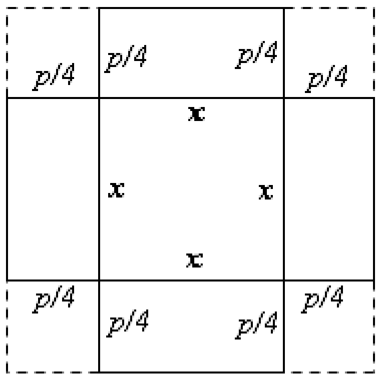

Figura 2.2: Construção de Al-Khwarizmi.

Usando este artifício geométrico, Al-Khwarizmi demonstrou que adicionando quatro vezes $p^2/16$ (que é a soma das áreas dos quatro quadrados de lado $p/4$), ao lado esquerdo da equação $x^2 + px = q$, obtinha-se a área do quadrado de lado $x + p/2$, isto é,

$$x^2 + px + 4 \cdot \frac{p^2}{16} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

e a equação $x^2 + px = q$ poderia ser escrita como

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}.$$

Logo,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

idêntica à fórmula de Bháskara.

Observação: Como a construção é geométrica, só faz sentido solução positiva.

As construções de Descartes

No seculo XVII, destaca-se a contribuição de René Descartes (1596-1650). Em seu livro, La Géométrie, Descartes descreveu um método geométrico para a resolução da equação do 2º grau.

O método geométrico, descrito por esse famoso matemático em seu livro, resolveu equações do tipo $x^2 = bx + c$, $x^2 = c - bx$ e $x^2 = bx - c$ sempre com b e c positivos.

A resolução da equação $x^2 + bx = c$ é do seguinte modo, com o uso de régua e compasso:

1. Traçar um seguimento AB de comprimento $\sqrt{c}$.
2. Levantar em A uma perpendicular a AB e nessa perpendicular toma-se um ponto C sendo $AC = b/2$.
3. Construir uma circunferência de centro C e raio AC.
4. Construir uma reta que passa por B e C, cruzando a circunferência nos pontos E e D, com $BE = x$.

Geometricamente, tem-se Figura 2.3.

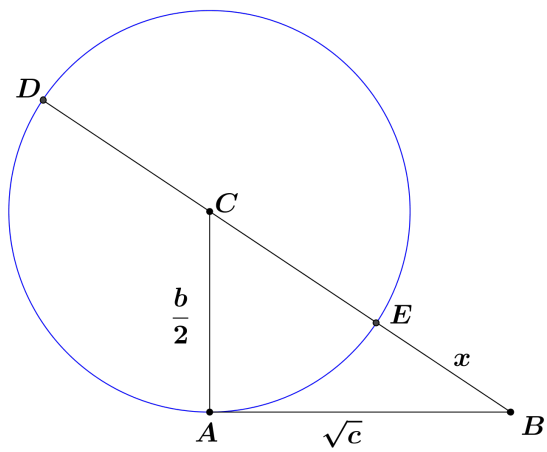

Figura 2.3: Construção de Descartes ($x^2 + bx = c$).

Pelo teorema de Pitágoras, pode-se encontrar o valor de x em $BE = x$. Considerando o triângulo retângulo ABC, tem-se

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

ou,

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(\sqrt{c})^2.$$

Então,

$$x^2+bx+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}+c,$$

ou seja,

$$x^2+bx=c.$$

A resolução da equação $x^2=bx+c$ é construída de forma análoga a equação $x^2+bx=c$, basta considerar o segmento $x=BD$ no 4º passo. Observe a Figura.2.4.

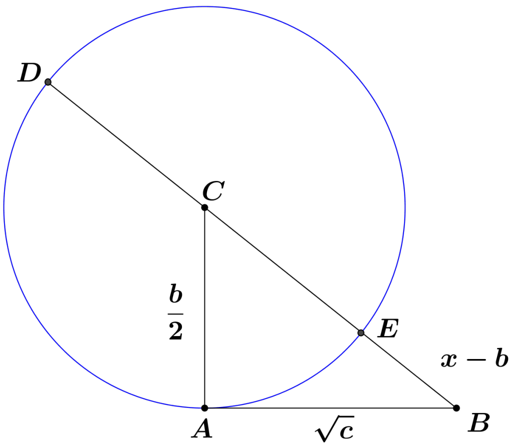

Figura 2.4: Construção de Descartes ($x^2=bx+c$).

Pelo teorema de Pitágoras, pode-se encontrar o valor de x em $BD=x$. Considerando o triângulo retângulo ABC, tem-se Como $x=BD \Rightarrow BE=x-b$, logo

$$BC^2=AC^2+AB^2$$

ou,

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(\sqrt{c})^2.$$

Então,

$$x^2-bx+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}+c,$$

ou seja,

$$x^2=bx+c.$$

Já a construção da equação $x^2 + c = bx$, tem a seguinte mudança no 4º passo:

Levantar em B uma perpendicular a AB cruzando a circunferência nos pontos D e E, onde $x = BD$ ou $x = BE$. Observe a Figura 2.5.

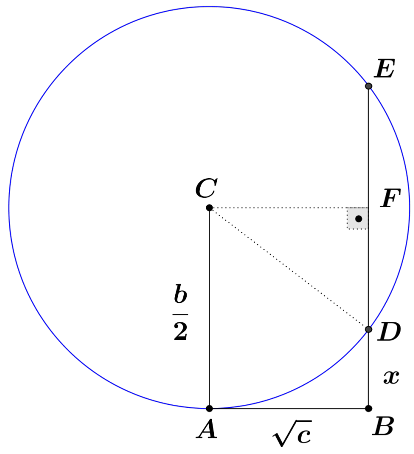

Figura 2.5: Construção de Descartes ($x^2 + c = bx$).

Pelo teorema de Pitágoras, pode-se encontrar o valor de x em $BD = x$. Considerando o triângulo retângulo CFD, tem-se

$$CD^2 = CF^2 + FD^2$$

ou,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = (\sqrt{c})^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2.$$

Então,

$$\frac{b^2}{4} - bx + x^2 + c = \frac{b^2}{4},$$

ou seja,

$$x^2 + c = bx.$$

Observação: Enquanto as duas primeiras construções só admitem uma solução real positiva, a terceira pode apresentar duas soluções reais e distintas, se o raio $b/2$ da circunferência for maior que $\sqrt{c}$, uma raiz real dupla, se o raio for igual a $\sqrt{c}$ e nenhuma raiz real, se o raio for menor que $\sqrt{c}$.

O método de Thomas Carlyle

O método utilizado por Descarte não usa coordenadas cartesianas, porém o método desenvolvido por Thomas Carlyle (1775-1881) as utiliza. Esse método de resolver a equação do tipo $x^2+bx+c=0$, para b e c pertencentes aos reais é representado graficamente, como na Figura 2.6.

O método geométrico de Carlyle segue os seguintes passos:

1. Com um papel quadriculado, determine os pontos $A(0,1)$ e $B(-b,c)$.

2. Encontre o ponto médio M de AB.

3. Construa uma circunferência com centro em M e raio AM.

4. P e Q são os pontos em que a circunferência cruza o eixo Ox.

Os comprimentos OP e OQ representam as raízes da equação $x^2+bx+c=0$. Dependendo do ponto $(-b,c)$ pode-se encontrar exemplos cuja a circunferência cortará o eixo-x em dois pontos distintos, tangenciando em um certo ponto, ou não. Isso ocorrerá quando o raio é respectivamente maior, igual ou menor que a distância entre o centro M da circunferência e o eixo Ox.

Justificativa do método de Carlyle:

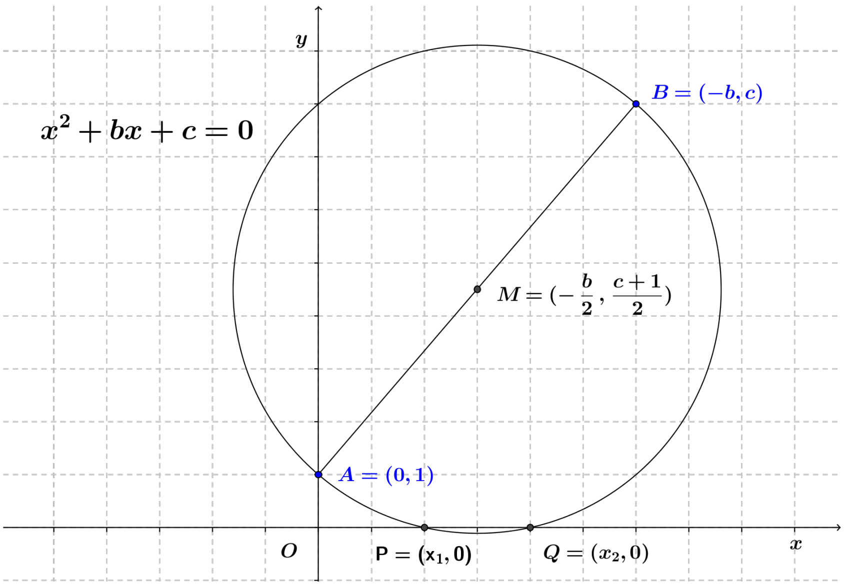

Figura 2.6: Construção de Thomas Carlyle.

Observe a Figura 2.6. Pela construção, os seguimentos $AM = BM = PM = QM$ possuem o mesmo comprimento do raio r da circunferência. Para calcular o raio r da circunferência, basta calcular a metade da distância entre os pontos $A(0,1)$ e $B(-b,c)$, obtendo

$$r = \frac{\sqrt{b^2 + (c-1)^2}}{2}$$

O ponto médio do seguimento AB, $\left(-\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right) = M$ é o centro da circunferência.

Se $X(x,0)$ é um ponto pertencente a circunferência de centro em M e raio r. Logo

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c+1}{2}\right)^2 = r^2,$$

que implica

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}$$

ou ainda

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2 + 2c + 1}{4} = \frac{b^2 + c^2 - 2c + 1}{4}$$

fazendo as simplificações, temos

$$x^2 + bx = -c$$

que implica

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Observa-se que recai na equação do 2º grau que, ao se fazerem variar os valores de b e c pode-se analisar a relação que tem os coeficientes e o número de soluções. Observando simplesmente se a distancia do centro ao eixo Ox é maior, igual ou menor que o raio da circunferência.

Observação: O método de Carlyle resolve qualquer equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, pois, basta dividir ambos os membros por a e fazer $b' = \frac{b}{a}$ e $c' = \frac{c}{a}$ consequentemente, $x^2 + b'x + c' = 0$ e, após, tomar os pontos $A(0,1)$ e $B(-b', c')$ e seguir o mesmo procedimento de resolução.

Exemplo: Resolva as equações abaixo pelo método geométrico de Carlyle.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$. b) $x^2 - 6x + 9 = 0$. c) $x^2 - 4x + 6 = 0$.

Soluções:

a) Na equação $x^2-6x+8=0$, temos que $a=1, b=-6$ e $c=8$. Logo, marcando os pontos $A=(0,1)$ e $B=(-b,c)=(6,8)$, traçando o segmento AB, calculando o ponto médio M de AB e construindo a circunferência de cento em M e raio AM tem-se que a circunferência corta o eixo Ox nos pontos $P=(2,0)$ e $Q=(4,0)$ e portanto, 2 e 4 são as soluções reais da equação $x^2-6x+8=0$.

Observe a Figura 2.7.

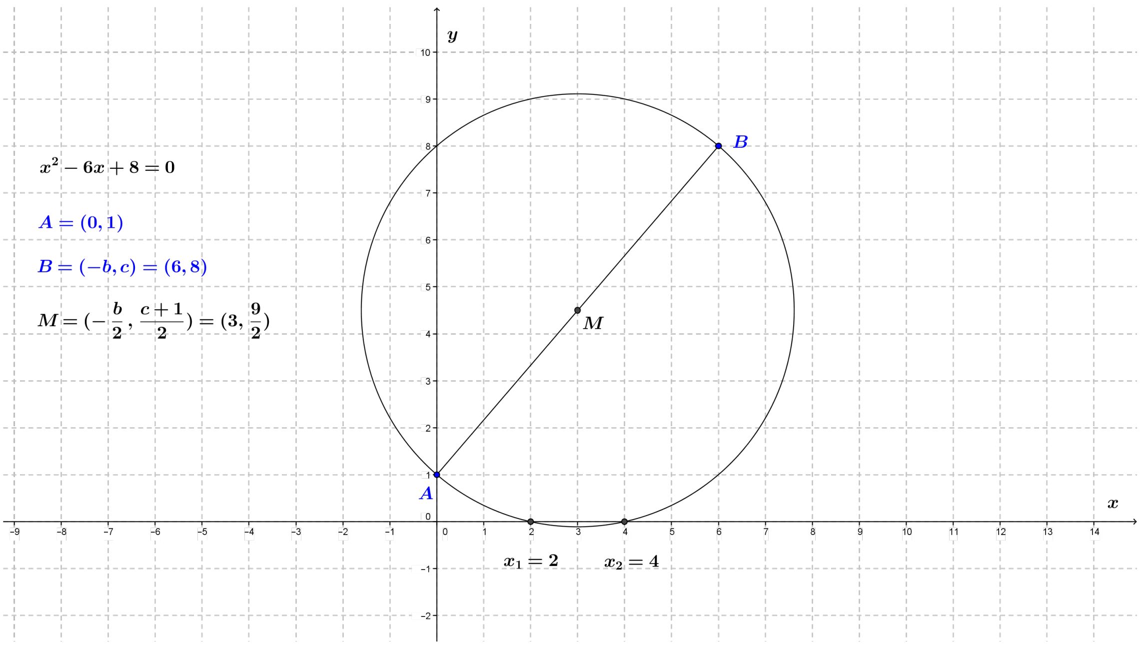

Figura 2.7: Solução geométrica da equação $x^2 - 6x + 8 = 0$.

b) Na equação $x^2 - 6x + 9 = 0$, temos que $a = 1, b = -6$ e $c = 9$. Logo, marcando os pontos $A = (0,1)$ e $B = (-b, c) = (6,9)$, traçando o segmento AB, calculando o ponto médio M de AB e construindo a circunferência de cento em M e raio AM, tem-se que a circunferência corta o eixo Ox no ponto $P = (3,0)$ e, portanto, 3 é a única solução real (raiz dupla) da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Observe a Figura 2.8.

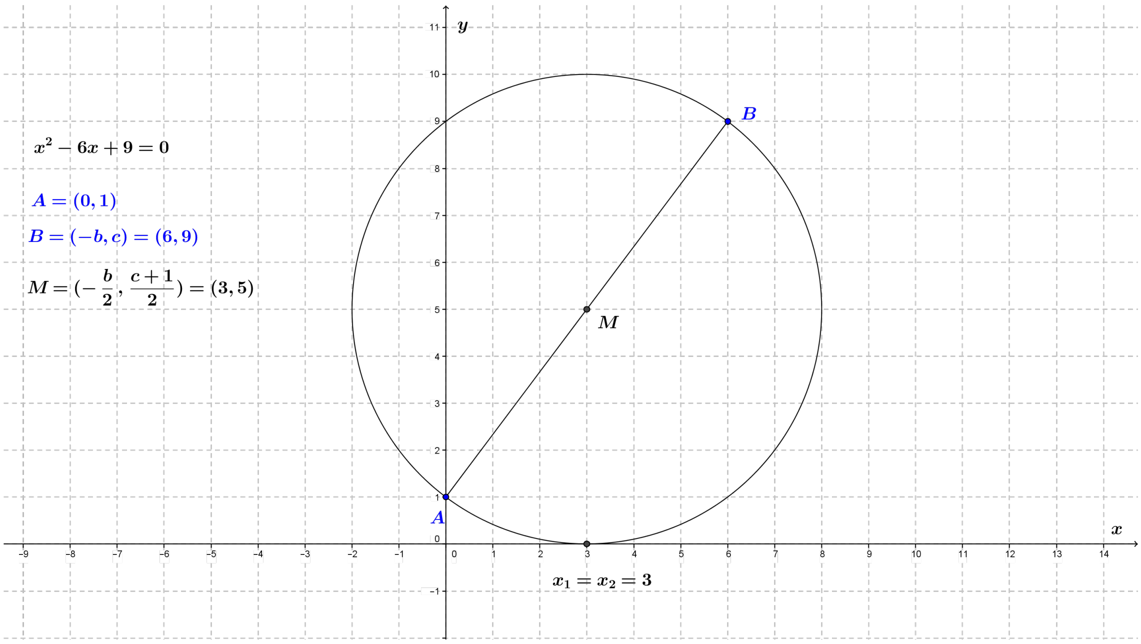

Figura 2.8: Solução geométrica da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

c) Na equação $x^2 - 4x + 6 = 0$, temos que $a = 1, b = -4$ e $c = 6$ Logo, marcando os pontos $A = (0,1)$ e $B = (-b, c) = (4,6)$, traçando o segmento AB, calculando o ponto médio M de AB e construindo a circunferência de cento em M e raio AM, tem-se que a circunferência não corta o eixo Ox em nenhum ponto e, portanto, a equação $x^2 - 4x + 6 = 0$ não possui solução real.

Observe a Figura 2.9.

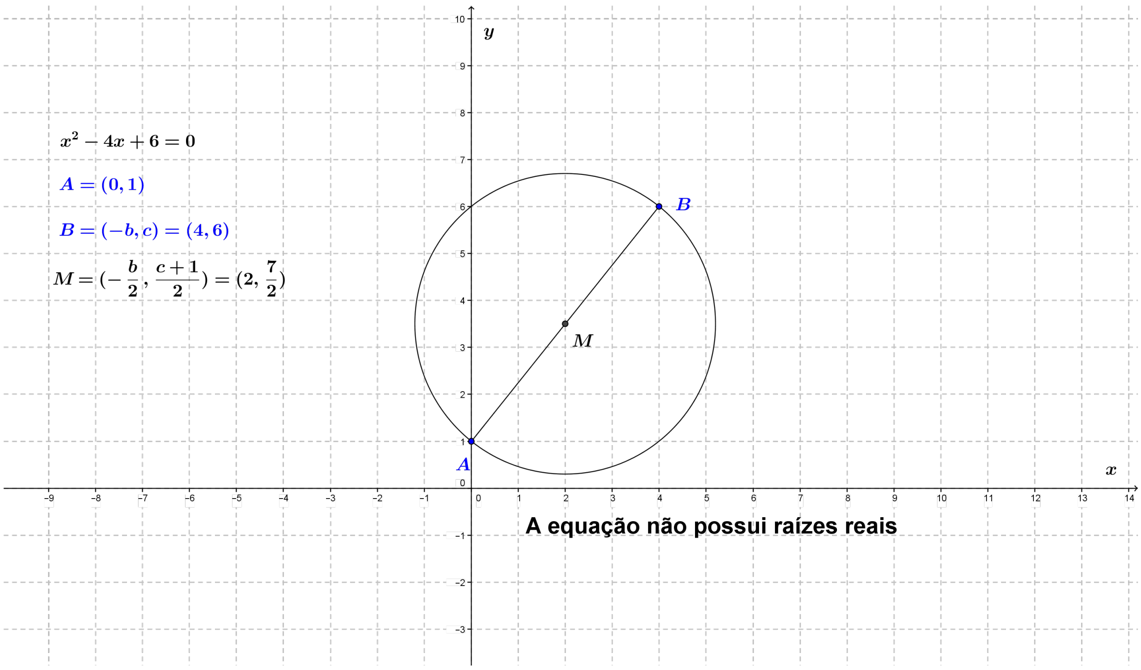

Figura 2.9: Solução geométrica da equação $x^2 - 4x + 6 = 0$.

◇

A solução de Carlyle é muito interessante do ponto de vista prático e didático, pode ser realizada de forma simples apenas com o uso de papel quadriculado, régua e compasso para encontrar soluções reais de uma equação do 2º grau e se trabalhar os temas plano cartesiano, circunferência, ponto médio e segmento de reta.

2.3 Equações do 3º grau

Já muito antes de Cristo os babilônios construíram um método de resolução da equação do 3º grau, baseado em tabelas de quadrados, cubos e raízes cubicas de números naturais. Porém, a historia recente da equação do terceiro grau está repleta de intrigas, disputas e acusações, envolvendo Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557) e Cardano (Girolamo Cardano, 1501-1576). Sabe-se hoje que fora Tartaglia que resolvera primeiro a equação do terceiro grau e após um duelo revelou, sob juramento, sua solução a Cardano, que publicou em 1545 o método em Ars Magna depois de perceber que Del Ferro (Scipione del Ferro, 1465-1526) também conhecia um método de resolução para equações do 3º grau. Há suspeitas que o método de Del Ferro não era suficiente para resolver todos os tipos de equações do 3º grau. Veremos agora os métodos algébricos dos babilônios, Cardano, Viète e um método geométrico baseado no método das cônicas.

2.3.1 Solução dos babilônios

Entre 1800 e 1600 a.c, na Babilônia, vê-se as primeiras tentativas de resolução da equação do terceiro grau. Os babilônios faziam tabelas de cubos e raízes cubicas para auxiliar na tabela n^3+n^2 com n inteiro entre 1 e 30, para resolver equações que tinham termos com x^3, x^2 e termo independente. Para isso, é usado o método da substituição. Equações como $ax^3+bx^2=c$ podem ser transformadas nas equações usadas pelos babilônios se ela for multiplicada por a^2/b^3, obtendo, assim, a seguinte equação

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3+\left(\frac{ax}{b}\right)^2=\frac{a^2c}{b^3}.$$

Na qual se x fosse um número natural entre 1 e 30 encontrava-se a solução.

Exemplo: Vamos resolver a equação $2x^3+3x^2=540$ pelo método dos babilônios.

Solução: O fator multiplicativo será $\dfrac{a^2}{b^3}=\dfrac{4}{27}$, que torna a equação acima na forma

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^3+\left(\frac{2x}{3}\right)^2=80.$$

Observando o valor de **n** na tabela abaixo, concluímos que

$$\frac{2x}{3}=4\Rightarrow 2x=12\Rightarrow x=6$$

é a solução da equação $2x^3+3x^2=540$.

Tabela semelhante a dos Babilônios.

n	n^2	n^3	n^2+n^3
1	1	1	2
2	4	8	12
3	9	27	36
4	16	64	80
5	25	125	150
6	36	216	252
7	49	343	392
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	900	27000	27900

◇

2.3.2 A fórmula de Cardano

A fórmula da solução da equação do 3º grau recebe o nome de Cardano, pois foi quem a publicou em Ars Magna, porém foi Tartaglia quem a deduziu. Quando Tartaglia achou solução das equações $x^3 + px + q = 0$, ele deu uma solução não apenas para esse tipo de cúbica, mas mostrou que toda equação completa podia ser escrita nessa forma a qual chamou de reduzida.

De fato, seja a equação completa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. Fazendo $x = y + m$, tem-se

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0$$

ou

$$ay^3 + (3am+b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Para eliminarmos o termo de grau 2, basta que façamos $m = -\dfrac{b}{3a}$.
A nova equação do 3º grau em y é dada por

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Dividindo ambos os membros por a, temos

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Comparando com a forma reduzida $y^3 + py + q = 0$, concluímos que

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Para resolvermos a equação $y^3 + py + q = 0$, vamos supor que y é a soma de duas parcelas, ou seja, $y = u + v$. Substituindo $y = u + v$, em $y^3 + py + q = 0$, temos

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

que implica

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

e, reescrevendo, fica

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0.$$

Portanto, se conseguimos achar u e v tais que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \\ u \cdot v = -p/3 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \\ u^3 \cdot v^3 = -p^3/27. \end{cases}$$

Como u^3 e v^3 são números que se conhece a soma e o produto, eles podem ser encontrados como solução da equação do 2º grau a seguir.
A equação $w^2 + qw - \dfrac{p^3}{27} = 0$ possui as seguintes soluções:

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad w_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Portanto, os números procurados são

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

que implicam

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Logo,

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

conhecida como fórmula de Cardano-Tartaglia.

Dessa forma, uma solução da equação completa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ é dada por

$$x = y + m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}.$$

Exemplos: Vamos resolver algumas equações do 3º grau pelo método de Cardano:

1) Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$.

Solução: Na equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$, temos $a = 1$, $b = -6$, $c = 10$ e $d = -8$.

Fazendo a mudança $x = y - \dfrac{b}{3a} = y + 2$,

a equação acima se transforma na forma reduzida $y^3 + py + q = 0$,

onde

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} = -2$$
$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = -4$$

de modo que a forma reduzida fica $y^3 - 2y - 4 = 0$ e, aplicando a fórmula de Cardano, temos

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Logo:

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - \frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - \frac{8}{27}}} = 2 \text{ [1]}$$

Portanto, como $x = y + 2$, obtemos $x = 2 + 2 = 4$.

Pela fórmula de Cardano $x = 4$ é solução da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$. Usando as relações de Girard da soma e do produto das raízes, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 6 \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = 8.$$

Dessa forma, podemos montar a equação do 2º grau $x^2 - 2x + 2 = 0$ que, resolvida pela fórmula de Bháskara, nos dá as outras duas raízes: $x = 1 + i$ e $x = 1 - i$.

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$ são: $x_1 = 4, x_2 = 1 + i$ e $x_3 = 1 - i$.

[1] Nota: Provaremos esta igualdade na página 47.

2) Encontre as raízes da equação $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Solução: Na equação $x^3 - 3x + 2 = 0$, temos $p = -3$ e $q = 2$ que substituídos na fórmula de Cardano fica

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + (-1)}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1 + (-1)}}$$

$$x = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -1 + (-1) = -2.$$

Portanto, uma das raízes da equação $x^3 - 3x + 2 = 0$ é $x = -2$.

Usando as relações de Girard da soma e do produto das raízes, temos

$$x_1 + x_2 + (-2) = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 \text{ e de } x_1 \cdot x_2 \cdot (-2) = -\frac{d}{a} = -2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Como conhecemos a soma e o produto das raízes podemos escrever a equação do 2º grau $x^2 - 2x + 1 = 0$, que resolvida, nos dá 1 como raiz dupla.

Logo, as raízes da equação $x^3 - 3x + 2 = 0$ são $x_1 = x_2 = 1$ e $x_3 = -2$.

3) Quantas raízes reais possui a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Solução: Na equação $x^3 - 6x + 4 = 0$, temos $p = -6$ e $q = 4$ que, substituídos na fórmula de Cardano, fica

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 + (-8)}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 + (-8)}}$$

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$

"Como não existe raiz quadrada de números negativos a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ não possui raízes reais". Errado!

Vimos no capitulo 1 que o Teorema 1.17 garante que todo polinômio com coeficientes reais de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real e pelo Teorema 1.16 vê-se claramente que $x = 2$ é raiz desta equação.

Foram equações como estas que deixaram Cardano intrigado, quando em Ars Magna classificou soluções desse tipo como inúteis, os chamados de casos irredutíveis, que deram origem aos números complexos. $\diamond$

Veremos que quando $\delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$ a equação reduzida $x^3 + px + q = 0$ apresentará 3 raízes reais e distintas, as quais vamos encontrar a partir da solução trigonométrica de Viète.

Discriminante da fórmula de Cardano

Análise do discriminante $\delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ da fórmula de Cardano.

Assim como na equação do 2º grau, o valor do discriminante δ da fórmula de Cardano está diretamente relacionado como número de raízes reais da equação do 3º grau. Vejamos os casos:

1º Caso: 3 raízes reais e distintas:

Sejam a, b e c três números reais distintos que são soluções da equação

$x^3 + px + q = 0$. Pelas relações de Girard temos:

$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -(a + b) \qquad (1)$

$ab + ac + bc = p \qquad (2)$

$abc = -q \qquad (3)$

Substituindo o valor de c na segunda e terceira equações tem-se que

$p = ab - (a + b)^2$ e $q = ab(a + b)$ que substituídos em δ chega-se a

$$\delta = \left[\frac{ab(a+b)}{2}\right]^2 + \left[\frac{ab - (a+b)^2}{3}\right]^3 \Rightarrow \delta = -\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{108}$$

$\Rightarrow \delta < 0.$

2º Caso: Uma real e duas raízes complexas.

Sejam $a + bi$, $a - bi$ e c, com a, b e c números reais, soluções da equação $x^3 + px + q = 0$, então pelas relações de Girard, temos

$2a + c = 0 \Rightarrow c = -2a \qquad (1)$

$a^2 + b^2 + 2ac = p \qquad (2)$

$c(a^2 + b^2) = -q. \qquad (3)$

Substituindo o valor de c nas equações (2) e (3), obtemos

$p = b^2 - 3a^2$ e $q = 2a(a^2 + b^2)$ que substituídos em δ nos dá

$$\delta = \left[\frac{2a(a^2+b^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{b^2-3a^2}{3}\right]^3 \Rightarrow \delta = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27}$$

Note que:

* Para $b \neq 0 \Rightarrow \delta > 0$ e teremos duas raízes complexas e uma real.

* Para $b = 0$ tem-se $\delta = 0$ o que torna as três raízes reais, sendo duas ou três coincidentes.

Vamos mostrar que as recíprocas também são verdadeiras, ou seja:

- Se $\delta < 0 \Rightarrow 3$ raízes reais e distintas.
- Se $\delta = 0 \Rightarrow 3$ raízes reais sendo duas ou três coincidentes.
- Se $\delta > 0 \Rightarrow 2$ complexas conjugadas e uma real.

De fato, se $\delta < 0$ não implicasse em três raízes reais e distintas, teríamos uma raiz complexa e sua conjugada e assim estaríamos no 2º caso, o que é uma contradição.

Logo, se $\delta < 0$ implica em 3 raízes reais e distintas.

De modo análogo, podemos provar que $\delta > 0$ implica em duas raízes complexas e uma real e de forma imediata se $\delta = 0$ implica em três raízes reais, sendo duas ou três coincidentes.

Portanto, mostramos que:

- $\delta < 0 \Leftrightarrow$ as três raízes são reais e distintas.
- $\delta = 0 \Leftrightarrow$ as três raízes são reais, sendo uma dupla ou três simples.
- $\delta > 0 \Leftrightarrow$ duas raízes complexas conjugadas e uma real.

Exemplo: Mostre que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}=2.$$

Prova: Note que:

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)^3=4$$

e

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)=\frac{2}{3}.$$

Fazendo

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}.$$

Elevando ao cubo ambos os membros, temos

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)^3$$

$$+3\cdot\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}\right)$$

que implica

$$x^3=4+3\cdot\frac{2}{3}\cdot x\Rightarrow x^3=4+2x\Rightarrow x^3-2x-4=0.$$

Pelo teorema das raízes racionais, $x=2$ é solução da equação $x^3-2x-4=0$.
Como $\delta=4-\frac{8}{27}=\frac{100}{27}>0$, a equação só admite uma raiz real.
Logo,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}=2.$$

◇

2.3.3 Solução trigonométrica de Viète

Teorema 2.1 *Toda equação do 3º grau na forma* $x^3 = 3R^2x + 2R^3cos3\theta$ *tem como uma solução a raiz* $x = 2Rcos\theta$.

Demonstração: Partindo da identidade trigonométrica

$$cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$$

temos

$$4cos^3\theta = cos3\theta + 3cos\theta,$$

na qual multiplicando ambos os membros por $2R^3$, sendo $R \neq 0$ um número real,

$$8R^3cos^3\theta = 2R^3cos3\theta + 6R^3cos\theta,$$

que pode ser reescrita como

$$(2Rcos\theta)^3 = 3R^2(2Rcos\theta) + 2R^3cos3\theta$$

e fazendo $x = 2Rcos\theta$ chegaremos à equação

$$x^3 = 3R^2x + 2R^3cos3\theta \Rightarrow x^3 - 3R^2x - 2R^3cos3\theta = 0.$$

■

Comparando a forma de Viète $x^3 - 3R^2x - 2R^3cos3\theta = 0$ com a forma reduzida $x^3 + px + q = 0$, concluímos que $p = -3R^2$ com $p < 0$ e $q = -2R^3cos3\theta$.

Como p e q são conhecidos, podemos encontrar os valores de R e θ.

Exemplo: Vamos resolver a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ pelo método de Viète.

Solução: Da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ conclui-se que $p = -6 < 0$ e $q = 4$, que implica em

$$p = -3R^2 \Rightarrow 3R^2 = 6 \Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

e

$$q = -2R^3cos3\theta \Rightarrow cos3\theta = -\frac{4}{4\sqrt{2}} \Rightarrow cos3\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, temos que $x = Rcos\theta = 2\sqrt{2}cos(\pi/4) = 2$ é uma solução real da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Usando Briot-Ruffini encontraremos a equação $x^2+2x-2=0$, que implica que $x_1=-1+\sqrt{3}$ e $x_2=-1-\sqrt{3}$ são as outras duas soluções. $\diamond$

Conclusões.

Dada a equação do 3º grau na forma reduzida $x^3+px+q=0$.

- Se $\delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\geq 0$ devemos usar a fórmula de Cardano

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\delta}}.$$

- Se $\delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$, então $p<0$, que é a condição necessária à aplicação do método de Viète.

  Para $p=-3R^2$ com $p<0$ e $q=-2R^3cos3\theta$,

$$x=2Rcos\theta.$$

Veremos na Sessão 2.4 que para resolver uma equação do 4º grau basta saber completar quadrados e resolver uma equação auxiliar do 3º grau.

2.3.4 Método geométrico das cônicas

O método geométrico que vamos expor agora baseia-se na ideia do método de Omar Khayyam (1050-1130) ou método das cônicas. A ideia é a seguinte.
Dada a cúbica $x^3+ax^2+b^2x+c^3=0$, substituindo x^2 por $2py$ resulta na equação $2pxy+2apy+b^2x+c^3=0$, que é a equação de um hipérbole. Como $x^2=2py$ é a equação de uma parábola, traçando estas duas curvas em um mesmo plano cartesiano, teremos as intersecções delas como raízes da equação cúbica original.

Aproveitando a ideia de Omar Khayyam, considere a equação geral do 3º grau $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com $a\neq 0$ e $d\neq 0$. Dessa forma podemos construir duas funções $g(x)=ax^2+bx+c$ onde o gráfico é uma parábola e $h(x)=-d/x$ onde o gráfico é uma hipérbole. Sendo, a,b,c e d os mesmos coeficientes da equação do 3º grau. Fazendo $g(x)=h(x)\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d=0$, as duas curvas assim definidas num mesmo plano se interceptam em pelo menos um ponto P. Em seguida baixa-se a perpendicular que passa por P em relação ao eixo Ox para encontrar a abcissa do ponto P que é uma solução da equação do 3º grau. Observe a Figura 2.10, onde a equação do 3º grau possui três raízes reais.

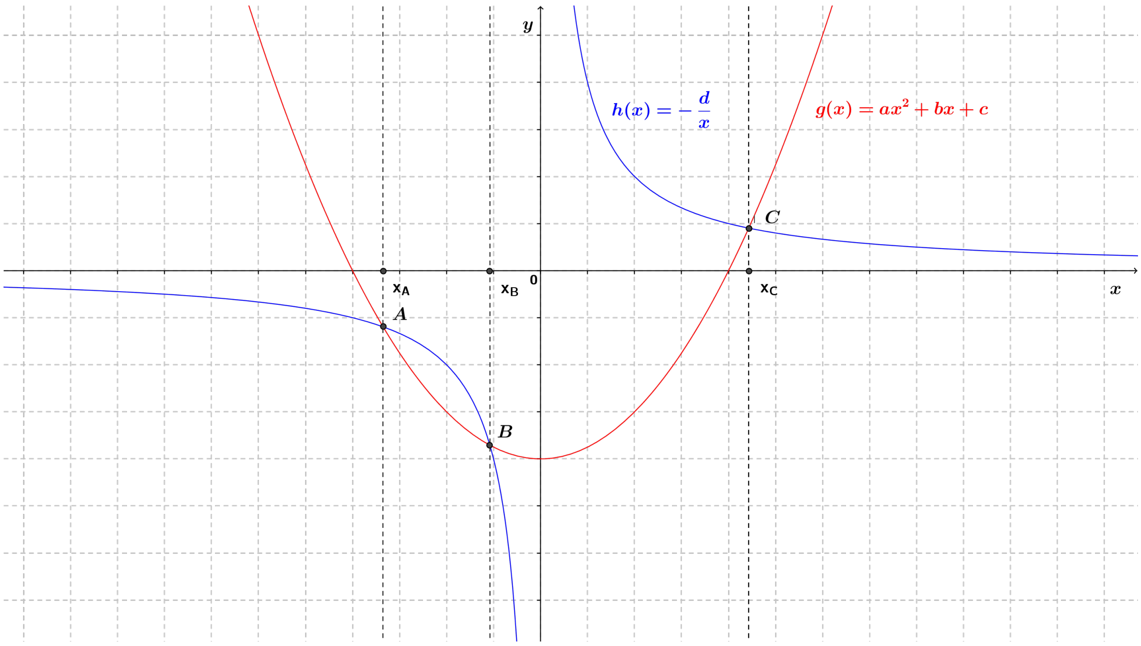

Figura 2.10: Solução geométrica da equação do 3º grau.

Exemplos:

1) Resolva a equação $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ pelo método das cônicas.

Solução: Aplicando o método das cônicas, temos as funções $g(x) = x^2 + 3x + 2$ onde seu gráfico é uma parábola e $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ representa uma hipérbole. Construindo os dois gráficos num mesmo plano cartesiano conforme a Figura 2.11, vê-se que o ponto A é o único ponto de interseção das duas curvas. Baixando a perpendicular que passa por A em relação ao eixo Ox tem-se que $x_A = -2,3$ é a única raiz real da equação $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$. O que pode-se perguntar é o seguinte: essa raiz é tripla? Resposta: Não, pela relação Girard (produto das raízes de uma equação do 3º grau) $-\dfrac{d}{a} = -1 \neq (-2,3)^3$. Conclusão: as outras duas raízes são complexas conjugadas.

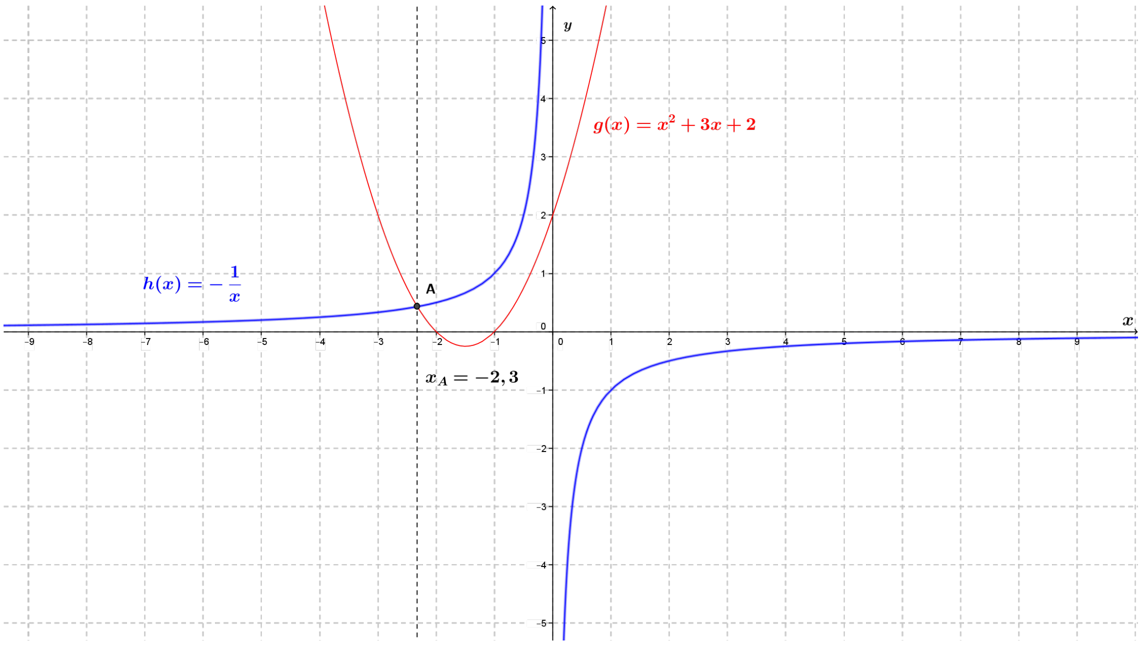

Figura 2.11: Solução geométrica da equação $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

2) Encontre as raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ pelo método das cônicas.

Solução: Aplicando o método das cônicas, temos as funções $g(x) = x^2 - 3x$, onde seu gráfico é uma parábola e $h(x) = -\dfrac{4}{x}$ representa uma hipérbole. Construindo os dois gráficos num mesmo plano cartesiano conforme a Figura 2.12, vê-se que os ponto A e B são os pontos de interseção das duas curvas. Baixando as perpendiculares que passa por A e B em relação ao eixo Ox tem-se que $x_A = -1$ e $x_B = 2$ são as raízes reais da equação $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Como já sabemos que uma equação com coeficientes reais de grau ímpar possui um número ímpar de raízes reais, logo uma das duas é raiz dupla da equação $x^3 - 3x^2 = 4 = 0$, que pode ser facilmente verificada aplicando duas vezes o dispositivo de Briot-Ruffini, donde conclui-se que 2 é a raiz dupla.

Observação: Quando uma equação do 3º grau possui uma raiz dupla, ela será facilmente percebida (encontrada) pelo método das cônicas, pois a raiz é a abscissa do ponto de tangência entre os gráficos da parábola e da hipérbole. Caso isso não ocorresse a equação teria três raízes reais e distintas ou uma raiz real, simples ou tripla.

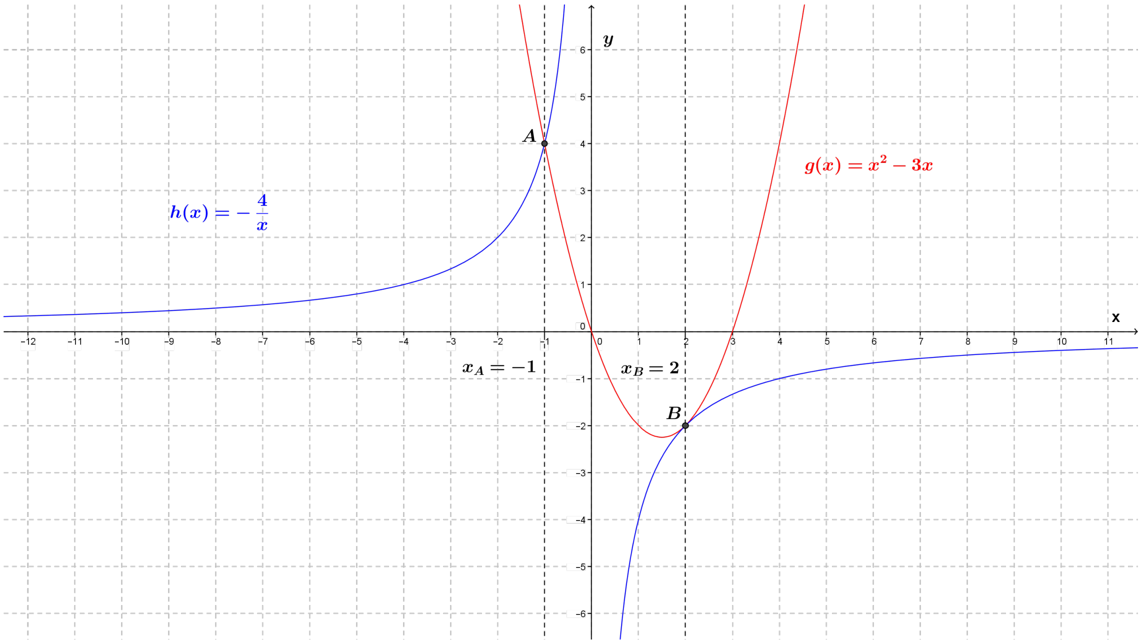

Figura 2.12: Solução geométrica da equação $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

3) Resolva a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ pelo método das cônicas.

Solução: Aplicando o método das cônicas, temos as funções $g(x) = x^2 - 6$, onde seu gráfico é uma parábola e $h(x) = -\dfrac{4}{x}$ representa uma hipérbole. Construindo os dois gráficos num mesmo plano cartesiano conforme a Figura 2.13, vê-se que os ponto A, B e C são os pontos de interseção das duas curvas. Baixando as perpendiculares que passam por A, B e C em relação ao eixo Ox tem-se que $x_A = -2,7$, $x_B = 0,7$ e $x_C = 2$ são as raízes reais da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$.

$\diamond$

Observação: O método das cônicas é muito interessante do ponto de vista prático e didático, pode ser realizado de forma simples apenas com o uso de papel quadriculado, régua e compasso para encontrar soluções reais de uma equação do 3º grau e se trabalhar os temas plano cartesiano, função quadrática, hipérbole equilátera e segmento de reta.

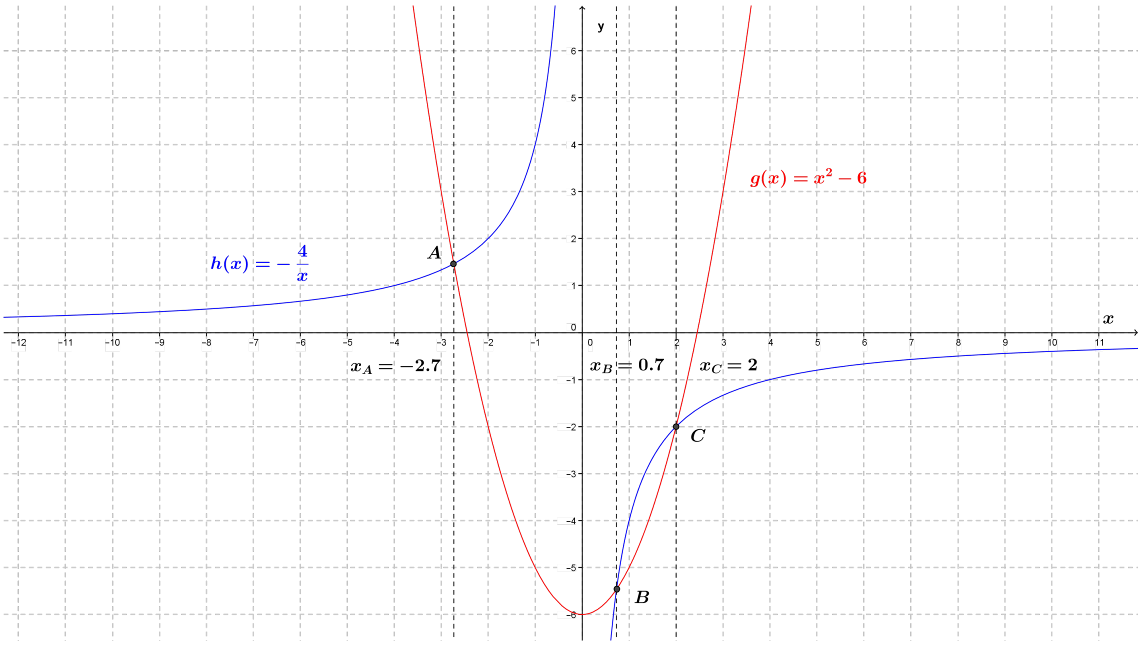

Figura 2.13: Solução geométrica da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$.

2.4 Equações do 4º grau e o método de Ferrari

A história da solução algébrica da equação do quarto grau vem junto com a do terceiro grau, por ter sido encontrada na mesma época, pelo matemático Ludovico Ferrari. Nascido em Bolonha em 1522, discípulo de Cardano como já fora dito, trabalhou como servo na residência de seu mestre com apenas 15 anos de idade. Nessa época já se mostrava muito brilhante e logo foi reconhecido por Cardano, ganhando assim uma promoção a secretário. Com 18 anos, Ferrari começou a ensinar em Milão, protegido pelo Cardeal de Mantova, ganhando, assim, prestígio e muito dinheiro. Tornou-se professor de Matemática na Universidade de Bolonha, mas morreu aos 30 anos de idade, talvez envenenado por sua própria irmã. Certo dia, o Matemático Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano o seguinte problema:

"Divida 10 em três partes tais que elas estejam em proporção continuada e que o produto das duas primeiras seja 6".

Se as três partes são denotadas por x, y e z, tem-se

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ \\ \qquad xz = y^2 \quad (\text{ vem de } x : y = y : z) \\ \\ \qquad xy = 6. \end{cases}$$

Esse sistema tem como consequência a equação $y^4 + 6y^2 - 60y + 36 = 0$.

Depois de várias tentativas sem sucesso, Cardano passou o desafio a Ferrari que acabou encontrando uma fórmula geral para as equações do quarto grau. Este processo também foi publicado por Cardano, como continuação da solução feita por Tartaglia das equações do terceiro grau, em sua obra Ars Magna.

Dada a equação geral de quarto grau $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$, substituindo x por $y-b/4$, tem-se como resultado a equação reduzida, sem o termo de terceiro grau, $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, onde p, q e r são:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2},$$
$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3},$$
$$r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}.$$

Foi esse tipo de equação que Ferrari resolveu (que pela substituição acima, significa solução para a equação de quarto grau completa). Ele reagrupou os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos. Sendo isso possível, seriam extraídas as raízes quadradas, caindo em equações do segundo grau, e o problema estaria resolvido.

Assim ele procedeu:

Isolando $y^4 + py^2$ e somando $py^2 + p^2$ a ambos os membros

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

ou

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy + p^2 - r.$$

Tomando s arbitrário,

$$(y^2+p+s)^2 = py^2-qy+p^2-r+2s(y^2+p)+s^2 = (p+2s)y^2-qy+(p^2-r+2ps+s^2).$$

Agora escolhendo s de forma que o lado direito da equação acima seja um quadrado (a condição necessária e suficiente para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ seja um quadrado é $\Delta = b^2 - 4ac = 0$), tem-se

$$4(p + 2s)(p^2 - r + 2ps + s^2) - q^2 = 0.$$

Esta é uma equação do terceiro grau em s e como se sabe resolvê-la, chega-se a um valor de s que reduz a solução da equação original à extração de raízes quadradas, pois ter-se-ia

$$(y^2 + p + s)^2 = (ty + u)^2.$$

Onde t e u são números reais que dependem de p, q, r e s. Consequentemente,

$$y^2 + p + s = \pm(ty + u).$$

Logo, a solução completa da equação do 4º grau é dada por:

$$x = y - \frac{b}{4a}.$$

Exemplo: Vamos resolver a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ pelo método de Ferrari.

Solução: Da equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$, temos que $a = 1$, $b = 0$, $c = -15$, $d = -10$ e $e = 24$. Como $b = 0$, faz-se desnecessária a substituição de x por $y - b/4a$ e aplicaremos diretamente o método de completamento de quadrados semelhante ao de Ferrari.

Isolando o termo x^4 e somando o termo $2sx^2 + s^2$ a ambos os membros da equação, sendo s a variável que vai auxiliar o completamento de quadrados auxilar, temos:

$$x^4 + 2sx^2 + s^2 = (2s + 15)x^2 + 10x + (s^2 - 24).$$

Como o primeiro membro já é um quadrado perfeito vamos condicionar o trinômio do segundo membro com a variável s de modo que $\Delta = 0$ (condição necessária e suficiente). Logo, $100 - 4(2s + 15)(s^2 - 24) = 0 \Rightarrow 2s^3 + 15s^2 - 48s - 385 = 0$, que resolvida pelo método de Cardano, nos dá as raízes $s_1 = -7$, $s_2 = -11/2$ e $s_3 = 5$. Escolhendo um dos valores de s, por exemplo, $s = -7$, concluímos que a equação

$$x^4 + 2sx^2 + s^2 = (2s + 15)x^2 + 10x + (s^2 - 24)$$

pode ser reescrita como

$$(x^2 - 7)^2 = x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \Rightarrow (x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2,$$

ou

$$x^2 - 7 = \pm(x + 5)$$

que implica

$$x^2 - x - 12 = 0$$

e

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Resolvendo-as pela fórmula de Bháskara ou completando quadrados, vamos encontrar $x = 4$ e $x = -3$ para a primeira equação e $x = 1$ e $x = -2$ para a segunda equação.

Logo, as raízes da equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ são: $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = -2$ e $x_4 = -3$.

2.5 Método de Euler para a equação do 4º grau

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático suíço que fez contribuições enormes para uma ampla gama da matemática e física, incluindo geometria analítica, trigonometria, geometria, cálculo e teoria dos números. Em 1972, Euler, em seu livro Elements of Algebra, publicou um novo método de resolver equações do 4º grau, baseado basicamente nas relações de Girard, produtos notáveis e na resolução de uma equação auxiliar do 3º grau. Assim, da mesma forma que Ferrari, o método de Euler passa pela resolução de uma equação do 3º grau. Veja uma demonstração desse método encontrada na RPM (Revista do professor de matemática) de 1994.

Considere a equação do 3º grau $x^3 - Sx^2 + S_d - P = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem : $x_1 + x_2 + x_3 = S$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_d$ e $x_1x_2x_3 = P$.

Sendo $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, temos

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})$$

que implica

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 =$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}),$$

ou seja,

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y$$

ou

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P} + S^2 - 4S_d = 0. \qquad (*)$$

Dada a equação do 4º grau $ay^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$, fazendo a substituição $x = y - b/4a$ tem-se a forma reduzida

$y^4 + py^2 + qy + r = 0$ que, comparada com $(*)$ implica em

$$p = -2S, \; q = -8\sqrt{P} \text{ e } r = S^2 - 4S_d.$$

Como p, q e r são conhecidos, podemos encontrar os valores de S, S_d e P, de modo que

$$S = -\frac{p}{2}, \; P = \left(\frac{q}{8}\right)^2 \;\text{ e }\; S_d = \frac{S^2 - r}{4} = \frac{p^2 - 4r}{16}.$$

Assim, reescrevendo a equação do 3º grau temos:

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)y + \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0.$$

Obtemos x_1, x_2 e x_3 tais que:

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \text{ satisfaz a equação } y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Para encontrar as raízes da equação completa do 4º grau basta lembrar que $x = y - \dfrac{b}{4a}$, sendo y solução da equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.
Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -q/8$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -q/8$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma, obtemos todas as raízes da equação original.

Exemplo: Encontre as raízes da equação $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$.

Solução: Da equação $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$, tem-se $p = -12$, $q = -16$ e $r = -4$.

Resolvendo a equação do 3º grau

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)y + \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0,$$

ou seja,

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0.$$

Pelo teorema das raízes racionais 2 é raiz da equação acima e pelas relações de Girard temos que a soma das outras é 4 e o produto 2. Montando a equação do 2º grau e resolvendo, temos que $2 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$ são as outras raízes.

Aplicando a regra de sinais, o produto das raízes é $-q/8 = 2$.

As raízes da equação $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$ são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Do nosso ponto de vista, o método de Euler é tão eficaz quanto o de Ferrari, desde que o indivíduo traga no bolso a equação auxiliar do 3º grau.

2.6 Os casos inúteis da equação do 4º grau

Em 1545, Cardano publicou Ars Magna (Arte Magna), na qual descrevia métodos algébricos para resolver equações cúbicas e quárticas. Porém, ele também trabalhou com equações quadráticas em sua obra. Um dos problemas que ele chamou "manifestamente impossível" é o seguinte: Divida 10 em partes cujo o produto é 40: isto é, encontre a solução de

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

ou, equivalentemente, a solução da equação quadrática

$$40 - x(10 - x) = x^2 - 10x + 40 = 0,$$

cujas raízes são $5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano formalmente multiplicou as raízes e encontrou

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40.$$

Quanto às computações, ele escreveu "deixando de lado as torturas mentais envolvidas". Cardano não aprofundou tal estudo e concluiu que tal resultado era "tão sutil quanto inútil". Ainda assim, tal evento é histórico, pois pela primeira vez a raiz quadrada de um número negativo havia sido escrita explicitamente.

Como diria Cardano, casos inúteis são aquelas equações que só possuem raízes complexas.

Exemplo: Encontre as raízes reais da equação $x^4 + x^2 + 4x + 4 = 0$.

Solução: Algum curioso prontamente vai tentar o método de Ferrari ou, quem sabe o método de Euler...vendo o monstro que aparecerá ... acho que ele desistirá! E nós também. Pois, durante os cálculos irá aparecer raízes de números complexos e será necessário o uso de análise complexa.

OBSERVE COM ATENÇÃO!

$$x^4 + x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + (x+2)^2 = 0.$$

Não precisa ser um bom matemático para perceber que nenhum número real é solução dessa equação.

Portanto, a equação possui 4 raízes complexas.

A justificativa é bem simples: basta saber completar quadrados.

Considere a equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow (x^2)^2 = -p\left(x - \dfrac{q}{2p}\right)^2 + \dfrac{q^2 - 4pr}{4p}$.
Se $p > 0$ e $\Delta = q^2 - 4pr \leq 0$ a equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ não possui raízes reais, pois o quadrado de um número real é sempre positivo ou zero.
Como no exemplo anterior tínhamos $p = 1$ e $\Delta = q^2 - 4pr = 0$, então as soluções são complexas. E muito complexas de se achar!

Fomos no site: http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=9 e encontramos as raízes da equação $x^4 + x^2 + 4x + 4 = 0$:

$x_1 = 0.9395649091666411 + 1.5643224222656023i$

$x_2 = 0.9395649091666411 - 1.5643224222656023i$

$x_3 = -0.9395649091666411 + 0.564322422265602i$

$x_4 = -0.9395649091666411 - 0.564322422265602i.$

Observação: O site supracitado contém um aplicativo que resolve equações do 2º até o 4º grau, quando informado apenas os coeficientes da equação.

2.7 Equações do 5º grau. Ruffini, Abel e Galois

Soluções de equações algébricas até o quarto grau são solúveis por fórmulas que envolvem as quatro operações aritméticas e a extração de raízes. Entretanto, nem todas as equações do 5º grau podem ser resolvidas por fórmulas gerais desse tipo.

Em 1799, Ruffini (Paolo Ruffini, 1765-1822) publicou um trabalho em que, exceto por um pequeno engano, provava a impossibilidade de resolução da equação do 5º grau por fórmulas. Como na época não se acreditava que uma equação algébrica não pudesse ser resolvida por meio de fórmulas, morreu sem corrigir sua prova e sem ser reconhecido por ela.

A primeira prova correta da impossibilidade de resolver as equações do 5º grau por meio de fórmulas foi publicada pelo norueguês Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) em 1824. O curioso é que, três anos antes, Abel chegou a acreditar ter obtido a fórmula da equação do 5º grau, porém, ao produzir um exemplo de utilização da fórmula, percebeu que se enganou.

Galois (Évariste Galois, 1811-1832) também provou essa impossibilidade usando sua própria teoria, mais tarde chamada Teoria de Galois. Com isso, esse gênio francês, que morreu num duelo aos 21 anos de idade, nos permitiu hoje saber quais equações são ou não passíveis de resolução por fórmulas que envolvem os coeficientes.

Veremos no próximo capítulo que Isaac Newton desenvolveu um método iterativo para encontrar uma raiz real de uma função polinomial baseado no sinal da função e na sua primeira derivada. Dessa forma, temos como encontrar pelo menos uma raiz da função do 5º grau, já que todo polinômio com coeficientes reais de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Capítulo 3

O uso de derivadas na resolução de equações polinomiais

Estudaremos nesse capítulo o método iterativo de Newton e a aplicação da derivada para encontrar os coeficientes das formas canônicas das funções polinomiais do 1º até o 4º grau. Para isso falaremos um pouco da derivada de uma função polinomial e analisaremos os métodos de translação de Viète, Cardano e Ferrari, usados nas resoluções das equações do 2º, 3º e 4º graus, respectivamente, descritos no capítulo anterior.

3.1 Derivada de uma função polinomial

Definição 3.1 *Seja $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial definida por*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Chamaremos de $f'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial derivada com relação a x da função $f(x)$ definida por

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

Observação: Como a derivada de uma função polinomial também é um polinômio, podemos calcular a derivada da derivada com relação a x, a qual denotaremos por $f''(x)$ e chamaremos de derivada segunda de $f(x)$ com relação a x e usando a definição da derivada, temos

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 6a_3x + 2a_2.$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos calcular as derivadas de todas as ordens da função polinomial $f(x)$.

Exemplos:

1. Dada a função $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4$. Calcule $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$.

Solução: Pela definição, temos

$f'(x) = 5 \cdot 3x^4 + 4 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 4x - 5.$

Aplicando a definição em $f'(x)$, temos

$$f''(x) = 4 \cdot 15x^3 + 3 \cdot 8x^2 - 2 \cdot 9x + 4 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 + 24x^2 - 18x + 4.$$

Aplicando a definição agora em $f''(x)$, temos

$$f'''(x) = 3 \cdot 60x^2 + 2 \cdot 24x - 18 \Rightarrow f'''(x) = 180x^2 + 48x - 18.$$

2. Um corpo se move de acordo com a função $S(t) = t^2 - 5t - 6$ (onde temos S em metros e t em segundos). Calcule sua velocidade e aceleração no instante $t = 4s$.

Solução: Você já deve ter escutado expressões do tipo *"vovô ateu"* e *"a é o dobro do coeficiente de t^2"*. São maneiras de lembrar das funções horárias, $v(t) = v_0 + at$ da velocidade e $a(t) = 2a_2$ da aceleração no movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

Para fugir dessa tortura, vamos usar derivadas para resolver esse problema.

As equações horárias do (MRUV) são:

$S(t) = s_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ (posição) e $v(t) = v_0 + at$ (velocidade).

Observe que a velocidade instantânea do corpo é a derivada de S com relação a t, ou seja, $v(t) = S'(t) = v_0 + at$ e a aceleração é a derivada de v com relação a t, ou seja, $a(t) = v'(t) = a$.

Dessa forma, temos que a velocidade instantânea do corpo é dada por,

$v(t) = S'(t) = 2t - 5$ e a aceleração por, $a(t) = v'(t) = 2$.

Portanto, em $t = 4s$, temos: $v(4) = 3m/s$ e $a(4) = 2m/s^2$. $\diamond$

3.2 Método de Newton para encontrar raízes

Os métodos que se usam atualmente para determinar uma raiz de uma função polinomial $f(x)$ localizada num intervalo $[a, b]$ quando se sabe que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos não se baseiam em fórmulas fechadas, como as que foram obtidas para as equações de grau ≤ 4. Em vez disso, esse método se baseia em algoritmos aproximativos, os quais instruem, passo a passo, como proceder para obter uma sequência de números $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ tais que os valores de $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_2)$ estão cada vez mais próximos de zero. Isaac Newton (1642-1727) foi cientista inglês, que descobriu a "Lei da Gravitação Universal". É considerado um dos maiores estudiosos da história. Estudou e publicou trabalhos sobre mecânica, astronomia, física, química e matemática e alquimia. Também descobriu o cálculo infinitesimal. Ele desenvolveu um método iterativo para determinar uma raiz de uma função polinomial $f(x)$ localizada no intervalo $[a, b]$, quando se sabe que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos. Segundo este método, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência $x_1, x_2, ..., x_n$ de números reais obtidos pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

tem como limite uma raiz de $f(x)$. Onde $f'(x)$ representa a derivada da função polinomial $f(x)$.
Exemplo: Vamos encontrar uma raiz da função polinomial $f(x) = x^5 - 5x^2 + 1$ pelo método de Newton.

Solução: Para encontrar uma raiz da função polinomial $f(x)$ devemos resolver a equação $x^5 - 5x^2 + 1 = 0$. Observando que $f(1) = -3$ e $f(2) = 13$. Logo deve haver uma raiz de $f(x)$ entre 1 e 2. para aplicarmos o método de Newton devemos tomar $x_0 = 2$ como ponto de partida, lembrando que $f'(x) = 5x^4 - 10x$. Daí obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
&x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.\\
&x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{13}{60} = 1,783.\\
&x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,783 - \frac{3,124}{32,703} = 1,687.\\
&x_3 = x_3 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,687 - \frac{0,434}{23,627} = 1,668.
\end{aligned}$$

Poderíamos prosseguir com as iterações, porém não há necessidade. 1,668 é uma excelente aproximação para a raiz procurada, pois $f(1,668)$ é menor que um milésimo.

3.3 Translação de eixos

Conhecendo-se a curva dada pela equação $y = f(x)$, um bom recurso para construção do gráfico de curvas do tipo $y - k = f(x - m)$ é a translação de eixos. Em geral, no plano em que os eixos Ox e Oy são dados, quando tomamos novos eixos paralelos aos anteriores, dizemos que ocorreu uma translação de eixos.

Consideremos que os eixos dados Ox e Oy foram transladados aos eixos $O'x'$ e $O'y'$ com nova origem $O' = (m, k)$ em relação aos eixos dados.

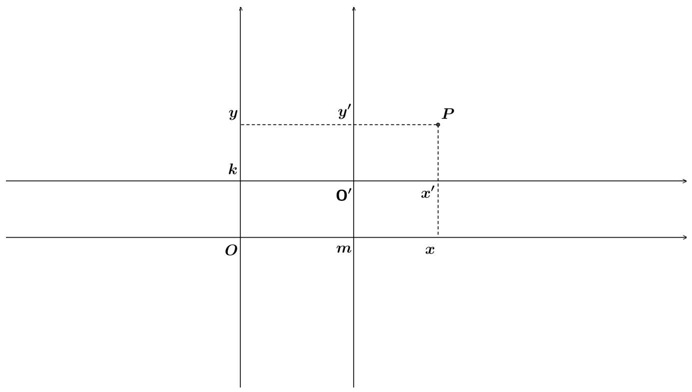

Figura 3.1: Translação de eixos

Seja P um ponto de coordenadas (x, y) em relação aos eixos originais e (x', y') em relação aos novos eixos. Vamos relacionar (x, y) com (x', y'). Temos que:

$$\begin{cases} x = x' + m \\ y = y' + k \end{cases}$$

Então, temos as equações de translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - k \end{cases}$$

Se a equação de uma curva é dada em x e y então a equação em x' e y' é obtida substituindo-se x por $x' + m$ e y por $y' + k$. O gráfico da equação em x e y em relação aos eixos Ox e Oy é exatamente o mesmo conjunto de pontos que o gráfico da equação correspondente em x' e y', em relação aos eixos $O'x'$ e $O'y'$. A forma de uma curva não é afetada pela posição dos eixos coordenados, no entanto sua equação é modificada.

Exemplos:

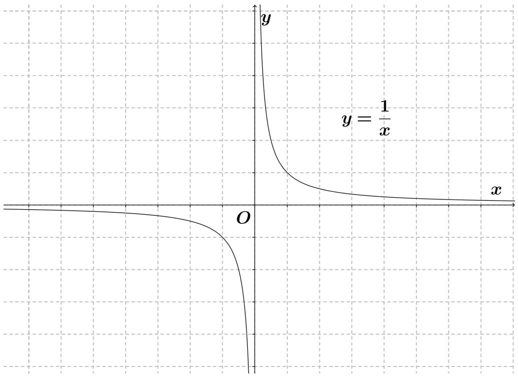

Figura 3.2: Gráfico da função hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ no plano cartesiano Oxy.

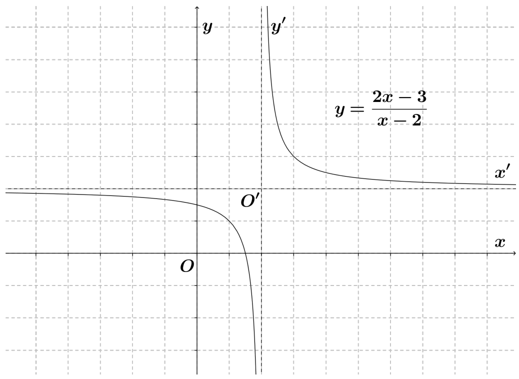

Figura 3.3: Gráfico da função hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ transladado duas unidades para cima e duas para à direita.

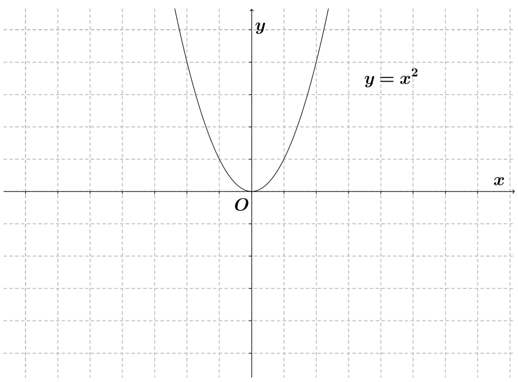

Figura 3.4: Gráfico da função quadrática $y = x^2$ no plano cartesiano Oxy.

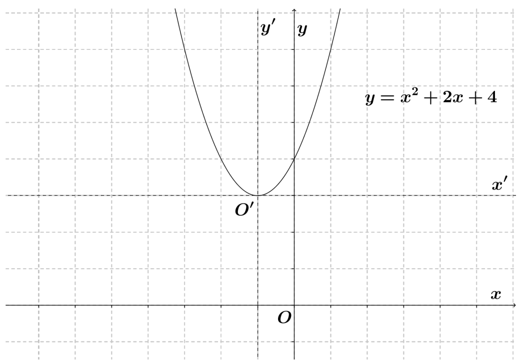

Figura 3.5: Gráfico da função quadrática $y = x^2$ transladado três unidades para cima e uma para à esquerda.

Observação: Como a forma da curva não muda por uma translação, se transladarmos apenas o domínio da função, a quantidade de vezes que o gráfico vai cortar o eixo x é mesma, ou seja, a função transladada terá o mesmo número de raízes reais, o que não ocorre quando se translada a imagem da função .

Exemplos:

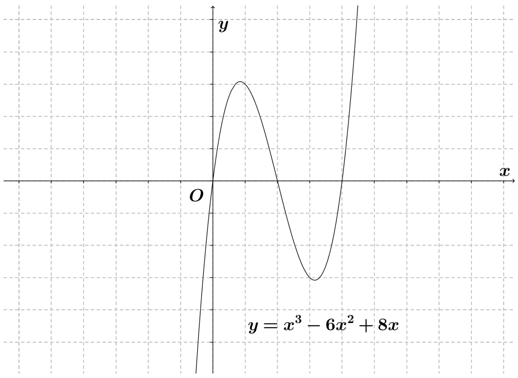

Figura 3.6: Gráfico da função cubica $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ no plano cartesiano Oxy.

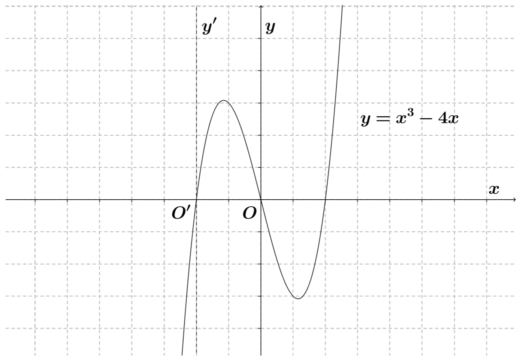

Figura 3.7: Gráfico da função cubica $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ transladado duas unidades para à esquerda.

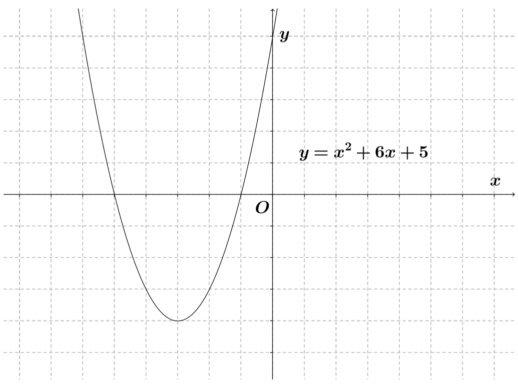

Figura 3.8: Gráfico da função quadrática $y = x^2+6x+5$ no plano cartesiano Oxy.

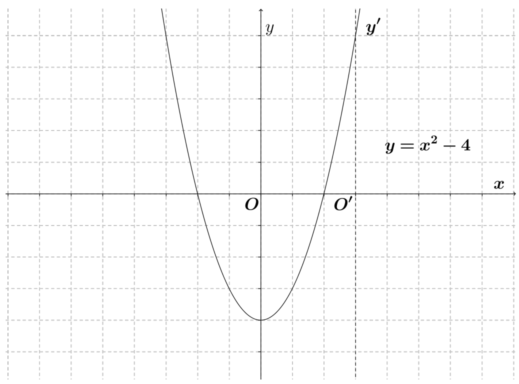

Figura 3.9: Gráfico da função quadrática $y = x^2 + 6x + 5$ transladado três unidades para à direita.

Assim, na busca de uma forma mais simples para resolver equações polinomiais levou os gênios Vièti, Cardano e Ferrari a fazer uma translação do domínio da função polinomial de grau correspondente pela seguinte substituição $x = y - b/na$ onde n é o grau da função polinomial.

Dessa forma, Viète fazendo a mudança $x = y - b/2a$ transformou a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ na equação $ay^2 + p = 0$, onde $p = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$ que possui soluções simples $y = \pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$, substituindo y em $x = y - b/2a$ e fazendo as simplificações necessárias, chegamos na fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De forma semelhante, Cardano fez a mudança $x = y - b/3a$ e transformou a equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ na equação $y^3 + px + q = 0$, onde

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \\ q &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \end{aligned}$$

na qual apresentou uma solução:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e substituindo y em $x = y - b/3a$ chegou-se a uma solução da equação completa

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}.$$

E de modo análogo, Viète com sua solução trigonométrica:

$$x = 2Rcos\theta - \frac{b}{3a}.$$

Sendo $p = -2R^2$ com $p < 0$ e $q = -2R^3cos3\theta$.

Ferrari usou o mesmo artifício, substituindo x por $y - b/4a$ para transformar a equação do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c = 0$ na equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, onde p, q e r são:

$$\begin{aligned} p &= \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, \\ q &= \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}, \\ r &= \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4} \end{aligned}$$

e usando completamento de quadrados e uma função auxiliar de 3º grau conseguiu soluções para equação completa.

Resolver uma equação do 1º grau é tão simples que ninguém vai se dar ao trabalho de fazer essa translação, mas nós vamos só para ver o que acontece:

Seja $f(x) = ax + b = 0$, com $a \neq 0$, uma função polinomial do 1º grau na variável x. Fazendo a substituição $x = y - b/a$, temos

$$f(x) = f\left(y - \frac{b}{a}\right) = a\left(y - \frac{b}{a}\right) + b = ay - b + b = ay.$$

Portanto a translação do domínio leva a equação $ax + b = 0$ na equação $ay = 0$ que tem como solução $y = 0$, pois $a \neq 0$, que substituindo em $x = y - b/a$ conduz à solução da equação do 1º grau

$$x = -\frac{b}{a}.$$

3.4 Usando derivadas para determinar os coeficientes dos polinômios na forma reduzida.

Vamos mostrar agora que toda função polinomial que tem seu domínio transladado em m unidades possui seus coeficientes escritos em função das derivadas da função original aplicadas no ponto m.

Função polinomial do 1º grau:

Seja $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do 1º grau definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Substituindo x por $y + m$, temos

$$f(x) = f(y + m) = a(y + m) + b = ay + (am + b).$$

Como $f(m) = am + b$ e $f'(m) = a$ podemos escrever

$$f(x) = f(y + m) = f'(m)y + f(m)$$

Portanto, os coeficientes da função do 1º grau transladada só depende das derivadas de $f(x)$ no ponto m.

Função polinomial do 2º grau:

Seja $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do 2º grau definida por $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Substituindo x por $y + m$, temos

$$f(x) = f(y+m) = a(y+m)^2 + b(y+m) + c = ay^2 + (2am+b)y + (am^2 + bm + c).$$

Observando que

$f(m) = am^2 + bm + c,$

$f'(m) = 2am + b$ e

$f''(m) = 2a,$

podemos escrever os coeficientes da função do 2º grau transladada em função das derivadas de $f(x)$ no ponto m. A função do 2º grau transladada é dada por

$$f(x) = f(y+m) = \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m).$$

Portanto, os coeficientes da função do 2º grau transladada só depende das derivadas de $f(x)$ no ponto m.

Funções polinomiais do 3º e 4º graus:

De forma semelhante, às funções do 1º e 2º graus podemos escrever a função do 3º grau $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ transladada de x para $y + m$ em função das suas derivadas no ponto m, ou seja,

$$f(y+m) = \frac{f'''(m)}{6}y^3 + \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m)$$

e a do 4º grau $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ transladada de x para $y + m$ em função das derivadas de $f(x)$ no ponto m, ou seja,

$$f(y+m) = \frac{f''''(m)}{24}y^4 + \frac{f'''(m)}{6}y^3 + \frac{f''(m)}{2}y^2 + f'(m)y + f(m).$$

Portanto, os coeficientes das funções do 3º e 4º graus transladadas só dependem das derivadas da função $f(x)$ aplicadas no ponto m.

Observe que todas as funções transladadas seguem o mesmo padrão.

Função polinomial do 1º grau:

$$f(y+m) = f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(m)}{k!} y^k.$$

Função polinomial do 2 º grau:

$$f(y+m) = \frac{f''(m)}{2} y^2 + f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(m)}{k!} y^k.$$

Função polinomial do 3º grau:

$$f(y+m) = \frac{f'''(m)}{6} y^3 + \frac{f''(m)}{2} y^2 + f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(m)}{k!} y^k.$$

Função polinomial do 4º grau:

$$f(y+m) = \frac{f''''(m)}{24} y^4 + \frac{f'''(m)}{6} y^3 + \frac{f''(m)}{2} y^2 + f'(m)y + f(m) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(m)}{k!} y^k.$$

Generalizando temos:

Teorema 3.2 *Qualquer função polinomial de grau n transladada em m unidades possui coeficientes que só dependem das derivadas da função $f(x)$ original aplicadas no ponto m da seguinte forma:*

$$f(x) = f(y+m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(m)}{k!} y^k, \qquad (*)$$

onde n é o grau da função polinomial e $f^k(m)$ é a k-ésima derivada da função original aplicada no ponto m e considera-se a derivada de ordem zero como sendo a própria função.

Demonstração: Lembrando que fizemos a substituição $x = y + m \Rightarrow y = x - m$ que substituído na expressão $(*)$ fica

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(m)}{k!} (x-m)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(m)}{k!} (x-m)^k$$

que é a série de Taylor da função polinomial expandida em torno do ponto $x = m$. Que sorte! Já estávamos pensando numa prova por indução finita sobre os naturais. ∎

3.4.1 Aplicações.

1. Dado o polinômio do 2º grau $p(x) = ax^2 + bx + c$. Prove que o trinômio $ax^2 + bx + c$ possui α como raiz dupla se, e somente se, $p(\alpha) = 0$, $p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

Prova: ($\Leftarrow$) Fazendo a substituição de x por $y + \alpha$ em $p(x)$ tem-se

$$p(x) = p(y + \alpha) = \frac{p''(\alpha)}{2}y^2 + p'(\alpha)y + p(\alpha)$$

como $p(\alpha) = 0$, $p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$, temos

$$p(y + \alpha) = \frac{p''(\alpha)}{2}y^2 \Rightarrow p(x) = \frac{p''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2.$$

Portanto, α é raiz dupla de $p(x)$.

($\Rightarrow$) Se α é raiz dupla de $p(x)$ temos que

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2, \text{ com } a \neq 0.$$

Logo

$p(\alpha) = 0$,

$p'(x) = 2a(x - \alpha) \Rightarrow p'(\alpha) = 0$,

$p''(x) = 2a \Rightarrow p''(\alpha) = 2a \Rightarrow p''(\alpha) \neq 0$, pois $a \neq 0$.

2. Mostre que $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$.

Solução: Considerando o polinômio $p(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, temos
Fazendo a substituição $x = y + \dfrac{b}{3a} = y + \dfrac{1}{2}$, temos

$$p\left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{p'''\left(\frac{1}{2}\right)}{6}y^3 + \frac{p''\left(\frac{1}{2}\right)}{2}y^2 + p'\left(\frac{1}{2}\right)y + p\left(\frac{1}{2}\right).$$

Calculando as derivadas no ponto $x = \dfrac{1}{2}$, temos

$p(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \Rightarrow p\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$,

$$p'(x) = 24x^2 - 24x + 6 \Rightarrow p'\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 12 + 6 = 0,$$

$$p''(x) = 48x - 24 \Rightarrow p''\left(\frac{1}{2}\right) = 24 - 24 = 0,$$

$$p'''(x) = 48 \Rightarrow p'''\left(\frac{1}{2}\right) = 48.$$

Substituindo os valores das derivadas em

$$p\left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{p'''\left(\frac{1}{2}\right)}{6}y^3 + \frac{p''\left(\frac{1}{2}\right)}{2}y^2 + p'\left(\frac{1}{2}\right)y + p\left(\frac{1}{2}\right),$$

obtemos

$$p\left(y + \frac{1}{2}\right) = 8y^3.$$

Voltando para a variável x, resulta

$$p(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = (2x - 1)^3.$$

3.5 Usando derivada para escrever os coeficientes das equações polinomiais reduzidas

Como vimos anteriormente, podemos escrever qualquer função polinomial de grau n transladada m unidades com coeficientes que só depende das derivadas da função $f(x)$ original aplicadas no ponto m da seguinte forma:

$$f(x) = f(y + m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(m)}{k!}y^k, \qquad (*)$$

onde n é o grau da função polinomial e $f^k(m)$ é a k-ésima derivada da função original aplicada no ponto m.

Seguindo o mesmo procedimento de Viète, Cardano e Ferrari vamos substituir m por $-\dfrac{b}{na}$ na expressão $(*)$ e fazendo $f(x) = 0$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k\left(-\frac{b}{na}\right)}{k!}y^k = 0.$$

(forma geral da equação polinomial de grau n reduzida)

Vamos escrever a equação reduzida do 1º grau.

Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax + b = 0$, temos

$$f'\left(-\frac{b}{a}\right)y + f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Como $f'\left(-\frac{b}{a}\right) = a$ e $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, temos

$$ay = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Para a equação do 2º grau.

Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, temos

$$\frac{f''\left(-\frac{b}{2a}\right)}{2}y^2 + f'\left(-\frac{b}{2a}\right)y + f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0.$$

Como $f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a$ e $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$, temos

$$ay^2 + f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0 \Rightarrow y^2 + \frac{f\left(-\frac{b}{2a}\right)}{a} = 0.$$

Comparando com a forma reduzida de Viète $y^2 + p = 0$, concluímos que

$$p = \frac{f\left(-\frac{b}{2a}\right)}{a}.$$

Isso nos diz que os coeficientes da forma reduzida obtida através da translação de x por $y - b/2a$ dependem apenas da função do 2º grau aplicada no ponto $x = -b/2a$.

Equação do 3 º grau.

Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, temos

$$\frac{f'''\left(-\frac{b}{3a}\right)}{6}y^3 + \frac{f''\left(-\frac{b}{3a}\right)}{2}y^2 + f'\left(-\frac{b}{3a}\right)y + f\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0.$$

Como $f'''\left(-\dfrac{b}{3a}\right) = 6a$ e $f''\left(-\dfrac{b}{3a}\right) = 0$, temos

$$ay^3 + f'\left(-\frac{b}{3a}\right) + f\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0 \Rightarrow y^3 + \frac{f'\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a} + \frac{f\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a} = 0.$$

Comparando com a forma reduzida $y^3 + py + q = 0$, temos que

$$p = \frac{f'\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a} \quad \text{e} \quad q = \frac{f\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a}$$

são os coeficientes da fórmula de Cardano que dependem só da função do 3º grau e de suas derivadas aplicadas no ponto $x = -b/3a$.

Equação do 4º grau.

Usando a forma geral e considerando $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, temos

$$\frac{f''''\left(-\frac{b}{4a}\right)}{24}y^4 + \frac{f'''\left(-\frac{b}{4a}\right)}{6}y^3 + \frac{f''\left(-\frac{b}{4a}\right)}{2}y^2 + f'\left(-\frac{b}{4a}\right)y + f\left(-\frac{b}{4a}\right) = 0.$$

Como $f''''\left(-\dfrac{b}{4a}\right) = 24a$ e $f'''\left(-\dfrac{b}{4a}\right) = 0$, podemos escrever

$$y^4 + \frac{f''\left(-\frac{b}{4a}\right)}{2a}y^2 + \frac{f'\left(-\frac{b}{4a}\right)}{a}y + \frac{f\left(-\frac{b}{4a}\right)}{a} = 0$$

e comparando com a forma reduzida do 4º grau $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, temos que

$$p = \frac{f''\left(-\frac{b}{4a}\right)}{2a}, \; q = \frac{f'\left(-\frac{b}{4a}\right)}{a} \quad \text{e} \quad r = \frac{f\left(-\frac{b}{4a}\right)}{a}.$$

são os coeficientes da forma reduzida do 4º grau dependem apenas das derivadas da função $f(x)$ original aplicadas no ponto $x = -b/4a$.

Como Abel e Galois já demonstraram que nem todas as equações de grau maior ou igual a 5 podem ser solúveis por meio de radicais envolvendo seus coeficientes, vamos nos restringir ás equações do 2º até o 4º grau.

3.6 Resolvendo equações do 3º e 4° graus com o auxílio de derivadas

Exemplos:

1. Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ com auxílio de derivadas.

Solução: Fazendo a substituição $x = y - \frac{b}{3a} = y + 2$ na equação completa do 3º grau podemos escrever a forma reduzida

$$y^3 + \frac{f'\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a}y + \frac{f\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a} = 0 \Leftrightarrow y^3 + f'(2)y + f(2) = 0.$$

Nosso trabalho se resume a calcular $f(2)$ e $f'(2)$. Temos que

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \Rightarrow f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 11 = 12 - 24 + 11 = -1.$$

Portanto, a equação reduzida é dada por: $y^3 - y = 0$, que pode ser facilmente fatorada na forma $y(y+1)(y-1) = 0$, apresentando as seguintes raízes: $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 1$.

Voltando agora para a variável x, temos que $x = y + 2$ implica que as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ são:

$$x_1 = y_1 + 2 = -1 + 2 = 1,\ x_2 = y_2 + 2 = 0 + 2 = 2,\ x_3 = y_3 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

2. Resolva a equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ pelo método das derivadas.

Solução: Fazendo a substituição $x = y - \frac{b}{4a} = y - \frac{1}{2}$ na equação completa do 4º grau podemos escrever a forma reduzida

$$y^4 + \frac{f''\left(-\frac{b}{4a}\right)}{2a}y^2 + \frac{f'\left(-\frac{b}{4a}\right)}{a}y + \frac{f\left(-\frac{b}{4a}\right)}{a} = 0.$$

ou seja,

$$y^4 + \frac{f''\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}y^2 + f'\left(-\frac{1}{2}\right)y + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Portanto, o nosso trabalho é só calcular $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ e $f''\left(-\frac{1}{2}\right)$. Temos que

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16},$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 6 \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 3.$$

Substituindo estes valores, a forma reduzida fica

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 - 4y + \frac{9}{16} = 0.$$

Usando um método parecido com o de Ferrari vamos isolar o termo y^4 e somar o termo $2sy^2 + s^2$ em ambos os membros da equação $y^4 + \frac{3}{2}y^2 - 4y + \frac{9}{16} = 0$, sendo s a variável auxiliar que vai tornar o segundo membro da equação um (quase) quadrado perfeito. Assim,

$$y^4 + 2sy^2 + s^2 = \left(2s - \frac{3}{2}\right)y^2 + 4y + \left(s^2 - \frac{9}{16}\right).$$

Observe que o primeiro membro da equação é um quadrado perfeito. Falta agora transformar o trinômio do 2º membro em um quadrado perfeito; portanto

$$\Delta = 4^2 - 4\left(2s - \frac{3}{2}\right)\left(s^2 - \frac{9}{16}\right) = 0$$

resulta

$$8s^3 - 6s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{101}{8} = 0,$$

que é uma equação do 3º grau em s nossa variável auxiliar.

Vamos aplicar outra vez o método da derivada para encontrar a forma reduzida da equação $8s^3 - 6s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{101}{8} = 0$. Façamos

$$f(s) = 8s^3 - 6s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{101}{8}$$

e

$$s = t - \frac{b}{3a} = t + \frac{1}{4}$$

que nos leva à forma reduzida

$$t^3 + \frac{f'\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a}t + \frac{f\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a} = 0 \Leftrightarrow t^3 + \frac{f'\left(\frac{1}{4}\right)}{8}t + \frac{f\left(\frac{1}{4}\right)}{8} = 0.$$

Calculando as derivadas com relação a s, temos

$$f(s) = 8s^3 - 6s^2 - \frac{9}{2}y - \frac{101}{8} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = -14$$

e,

$$f(s) = 24s^2 - 12s - \frac{9}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = -6$$

e assim a forma reduzida é $t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{7}{4} = 0.$

Usando a fórmula de Cardano temos que $t \approx 1,41$ é uma solução que implica em

$$s = t + \frac{1}{4} \approx 1,41 + 0,25 = 1,66.$$

Agora, retornando à equação em y, já que conhecemos o valor de s que torna o segundo membro "quase" um quadrado perfeito, temos

$$y^4 + 2sy^2 + s^2 = \left(2s - \frac{3}{2}\right)y^2 + 4y + \left(s^2 - \frac{9}{16}\right)$$

ou

$$(y^2 + s)^2 = \left(2s - \frac{3}{2}\right)y^2 + 4y + \left(s^2 - \frac{9}{16}\right)$$

na qual substituindo o valor de s, obtemos

$$(y^2 + 1,66)^2 = 1,82y^2 + 4y + 2,19 = 1,82(y + 1,09)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros tem-se

$$(y^2 + 1,66) = \pm 1,35(y + 1,09),$$

que resulta em duas equações do 2º grau em y:

$$y^2 - 1,35y + 0,19 = 0 \quad \text{e} \quad y^2 + 1,35y + 3,13 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bháskara (e uma calculadora científica) tem-se

$y_1 \approx 1,2, \;\; y_2 \approx 0,15, \;\; y_3 \approx -0,67 + 1,64i$ e $y_4 \approx -0,67 - 1,64i.$

Fazendo, finalmente $x = y - \dfrac{1}{2}$ temos

$x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 \approx 0,7,$

$x_2 = y_2 - \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_2 \approx -0,35,$

$x_3 = y_3 - \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 \approx -1,17 + 1,64i,$

$x_4 = y_4 - \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_4 \approx -1,17 - 1,64i.$

Visto que o método das derivadas ajudou e muito na busca dos coeficientes das equações reduzidas procuramos um programa na internet para saber os valores mais próximos das soluções da equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ e encontramos no site http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=9 soluções bem próximas dos nossos resultados:

$x_1 = 0,7005983367294673,$

$x_2 = -0,35091683192764356,$

$x_3 = -1,174840752400912 + 1,639280671416904i,$

$x_3 = -1,174840752400912 - 1,639280671416904i.$

Mesmo com tantos arredondamentos, chegamos bem perto. $\diamond$

Referências Bibliográficas

[1] Dante, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações.* /Luiz Roberto Dante.1 ed. São Paulo : Ática, 2010, pág. 172-201.

[2] Ferreira, Wellington José. *História das soluções das equações por meio de radicais.* Artigo de TCC Universidade Católica de Brasília.

[3] Garbi, Gilberto G. *O romance das equações algébricas.* São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[4] Giovanni, José Ruy. *Matemática completa.* /José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorn. 2.ed.renov. São Paulo : FTD, 2005, pág. 165-213.

[5] Kurosh, A. *Higher Algebra.*/Mir Publishers. 1984.

[6] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* IMPA, Rio de janeiro, dezembro de 1991, pág. 14-22.

[7] Lima, Elon Lages. *A matemática do ensino médio - vol.1* /Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.-9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, pág.78-165

[8] Lima, Rosana Nogueira. *Resolução de equações do terceiro grau através de cônicas.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. 1999.

[9] Moreira, Carlos Gustavo Tamn de araújo, *Uma solução das equações do 3º e do 4º graus.* Revista do Professor de Matemática - RPM, número 24, IMPA, Rio de Janeiro, 1994, pág. 23-28.

[10] Oliveira, Krerley Irraciel Martins. *Iniciação à matemática:um curso com problemas e soluções.* /Krerley Irraciel Martins Oliveira, Ádan Jose Corcho Fernández. Rio de Janeiro: SBM, 2010, pág. 33-60 e 253-266.

[11] Refatti, Liliane Rose. *Aspctos Históticos e Geométricos da Equação quadrática* Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v.6 , n. 821, 2005 p.79-95.