UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FELIPE IAREMA

ESTUDO GEOMÉTRICO DAS RAÍZES REAIS DE EQUAÇÕES NÃO ALGÉBRICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

PONTA GROSSA

2020

FELIPE IAREMA

ESTUDO GEOMÉTRICO DAS RAÍZES REAIS DE EQUAÇÕES NÃO ALGÉBRICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Aparecido Cerniauskas.

PONTA GROSSA

2020

Iarema, Felipe
I11 Estudo geométrico das raízes reais de equações não algébricas com o auxílio do geogebra / Felipe Iarema. Ponta Grossa, 2020.
156 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Aparecido Cerniauskas.

1. Raízes reais. 2. Equações não algébricas. 3. Gráficos. 4. Recursos computacionais. I. Cerniauskas, Wanderley Aparecido. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

FELIPE IAREMA

"ESTUDO GEOMÉTRICO DAS RAÍZES REAIS DE EQUAÇÕES NÃO ALGÉBRICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 20 de Abril de 2020.

Membros da Banca:

Prof. Dr. Wanderley Aparecido Cerniauskas (UEPG) – Presidente

Prof. Dr. Prof. Dr. Airton Kist (UEPG)

Prof. Dr. Márcio Augusto Villela Pinto (UFPR)

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles**, **Secretário(a)**, em 04/05/2020, às 21:03, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Wanderley Aparecido Cerniauskas**, **Professor(a)**, em 06/05/2020, às 12:29, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Airton Kist**, **Professor(a)**, em 23/07/2020, às 16:53, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **0210996** e o código CRC **9CE0E708**.

20.000014155-3 0210996v2

Aos meus queridos e amados pais, meus grandes exemplos de vida.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Wanderley Aparecido Cerniauskas, por toda a ajuda dada na construção deste trabalho e por toda a paciência e compreensão dedicadas a mim.

Aos meus pais, Alexandre e Soeli, por sempre acreditarem em mim e por todo o incentivo e apoio que me deram ao longo de toda a minha vida.

Ao meu irmão Rafael, por ter cedido a mim grande parte do material necessário para a construção da minha base matemática e pelo incentivo dado a mim desde os tempos de cursinho.

Ao Prof. Dr. Adilson Longen, por ter sido minha fonte de inspiração para ser professor de Matemática.

Ao Prof. Dr. Airton Kist por todo o apoio e carinho que dedicou a mim e aos meus colegas do Profmat.

A todos os meus Professores do Profmat, pelas grandes contribuições, tanto relacionadas à Matemática quanto à forma de ver a vida.

A todos os meus colegas do Profmat, pela troca de ideias, pelos bate papos, pelas risadas e pelo incentivo ao longo dos dois anos em que estudamos juntos.

Ao meu amigo Ms. Maikon Luiz Mirkoski, que estudou comigo na graduação e no mestrado, por toda a ajuda e contribuição dadas a mim desde os tempos da graduação em Matemática.

Ao meu amigo Dr. Eng. Joéverton Iurk Pereira, por ter me acolhido em sua casa desde quando iniciei o mestrado e também por toda a ajuda, compreensão e incentivo dedicados a mim durante a construção deste trabalho.

Ao meu primo Ulisses, por todo o apoio prestado a mim e por ter me incentivado durante todo o tempo de mestrado.

“Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida – a mais alta ou a mais baixa – tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá”.

(AYRTON SENNA)

RESUMO

Alguns exames vestibulares realizados no Brasil apresentam questões cuja resolução consiste em determinar o número de raízes reais de equações não algébricas. Questões assim podem ser resolvidas com o uso de *softwares* ou de conteúdos que geralmente não são vistos no ensino médio. Porém, como o candidato a uma vaga na universidade dispõe apenas de caneta e papel e, provavelmente ainda não teve contato com uma matemática mais avançada, a solução é recorrer a outro método. O objetivo deste trabalho, destinado aos anos finais do ensino médio, é apresentar uma proposta ao professor que tenha interesse em auxiliar seus alunos a encontrar o número de soluções reais de equações não algébricas, com base na construção gráfica de funções elementares e utilizando apenas lápis, borracha e papel. Por fim, apresentamos uma proposta para confirmar os resultados encontrados na qual os mesmos gráficos são construídos com a utilização do *software* GeoGebra. Tal proposta visa incorporar recursos computacionais à aula tradicional de Matemática.

Palavras-chave: raízes reais; equações não algébricas; gráficos; recursos computacionais.

ABSTRACT

Some vestibular exams carried out in Brazil present questions whose resolution consists in determining the number of real roots of non-algebraic equations. Such issues can be resolved with the use of software or content that is not usually seen in high school. However, as the candidate for a place at the university only has a pen and paper and probably has not yet had contact with more advanced mathematics, the solution is to use another method. The objective of this work, aimed at the final years of high school, is to present a proposal to the teacher who is interested in helping his students to find the number of real solutions of non-algebraic equations, based on the graphic construction of elementary functions and using only pencils, rubber and paper. Finally, we present a proposal to confirm the results found in which the same graphics are constructed using the GeoGebra software. This proposal aims to incorporate computational resources into the traditional mathematics class.

Keywords: real roots; non-algebraic equations; graphics; computational resources.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Entre os diversos tipos de funções elementares estudadas no Ensino Médio, destacamos as funções afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica, trigonométrica e também as funções polinomiais de grau superior a dois. Esse estudo das características das funções permite, entre outras coisas, resolver equações, inequações e analisar graficamente como se dá a relação entre duas grandezas. Por exemplo, o comportamento gráfico – conceito que será estudado mais adiante – da função afim e da função quadrática se mostra muito importante na resolução de inequações como:

$$(x-2)\cdot(x^2-5x+6) > 0.$$

Veremos que a injetividade das funções exponencial e logarítmica permite resolver equações como:

$$2^x = 32 \text{ e } log_{10}(x-1) = log_{10}12.$$

Além disso, a periodicidade das funções trigonométricas seno e cosseno é que torna possível determinar o conjunto das soluções de equações como:

$$senx = 1 \text{ e } \cos(x/2) = \sqrt{3}/2.$$

A solução da equação $x+2=3$, por exemplo, pode ser encontrada através de procedimentos algébricos. Uma estratégia para resolvê-la é utilizar manipulações algébricas usuais que não alteram uma igualdade – ideia geralmente associada à balança de dois pratos em equilíbrio –, de modo que forneçam a solução $x = 1$.

Considere agora a equação $x^2 = 2^x$. Como podemos determinar o número de soluções reais dessa equação? Caso todas elas sejam encontradas, o número de soluções estará automaticamente determinado. A questão agora é saber quais são essas soluções. Por inspeção, constata-se que duas delas são: $x = 2$ e $x = 4$. Mas, talvez elas não sejam as únicas. E realmente não são. Há mais uma solução real.

Vimos que, para resolver determinadas equações, podemos lançar mão de métodos algébricos. Acontece que, no caso da equação $x^2 = 2^x$ não existe um método puramente algébrico que permita determinar o valor da terceira solução. Então, como podemos saber que, além dos números 2 e 4, essa equação admite mais uma solução real?

Voltemos à equação $x + 2 = 3$. Sabemos que sua solução pode ser encontrada com base em procedimentos algébricos. Mas, curiosamente, essa equação também pode ser estudada sob outro ponto de vista: o geométrico. Dada a equação $x + 2 = 3$, podem-se associar a ela duas funções: a função $f(x) = x + 2$ e a função $g(x) = 3$. Geometricamente, determinar o valor de x que verifica a equação $x + 2 = 3$ consiste em determinar a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos de f e g, quando representados num mesmo plano cartesiano. Nesse caso haverá apenas um ponto de intersecção, de coordenadas (1, 3), visto que o gráfico de f é uma reta ascendente (da esquerda para a direita) e o de g é uma reta perpendicular ao eixo y. As funções f e g, definidas acima, são ambas chamadas de afim. E a equação associada a elas, $f(x) = g(x)$, recebe o nome de equação polinomial (ou algébrica) do 1º grau.

Já a equação $x^2 = 2^x$ não é do tipo polinomial (ou algébrica) e nem do tipo exponencial, mas sim uma combinação de ambos os tipos. Isto permite classificá-la como equação não algébrica, o que muitas vezes gera complicações adicionais na estratégia de obter suas soluções. Os procedimentos algébricos usuais não se aplicam na resolução de tais tipos de equação. Entretanto, os gráficos das funções associadas a ela nos fornecem informações extremamente úteis sobre as soluções da equação.

Dada a equação $x^2 = 2^x$, é possível associar a ela duas funções: a função $f(x) = x^2$ e a função $g(x) = 2^x$. Representando os gráficos de f e g num mesmo plano cartesiano, pode-se observar que, além dos pontos de coordenadas (2, 4) e (4, 16), há um terceiro ponto de intersecção dos gráficos, cuja abscissa está compreendida entre os números – 1 e 0. E as características gráficas das funções f e g evidenciam que não há mais do que três pontos de intersecção. Isso nos permite concluir que a equação $x^2 = 2^x$ apresenta exatamente três soluções reais. Apenas a título de curiosidade, o valor da terceira solução pode ser aproximado com o uso de programas computacionais ou com o uso de conteúdos geralmente estudados apenas no ensino superior.

A proposta deste trabalho é comentar de que forma um professor pode auxiliar seus alunos em questões que exigem a determinação do número de raízes reais de equações não algébricas, como é o caso da equação $x^2 = 2^x$. Questões desse tipo aparecem com certa frequência em provas de vestibulares, e a resolução de questões assim envolve uma técnica bem particular, nem sempre comentada nos livros didáticos destinados ao ensino médio.

Essa proposta é direcionada aos professores dos anos finais do ensino médio, especialmente aos do 3º ano, presumindo que seus alunos estiveram em contato com as principais funções elementares.

Diante das atividades relacionadas às equações não algébricas, é sugerido ao professor que solicite aos alunos a construção dos gráficos das funções associadas à equação em estudo. E essa construção pode ser solicitada de duas formas. A primeira consiste em esboçar os gráficos utilizando apenas lápis, borracha, canetas coloridas e folha de papel quadriculado. A segunda, sugerida para ser realizada após a primeira ser concluída, consiste em construir os gráficos com a utilização do *software* GeoGebra, como uma forma de confirmar o resultado encontrado com a construção manual. É essencial que, durante esses dois processos de construção, o professor resolva juntamente com os alunos as questões propostas para trabalhar em sala, auxiliando-os quando necessário. Após a finalização das atividades em sala, sugere-se que o professor distribua aos alunos uma lista de exercícios, para a fixação do conteúdo visto durante a aula.

É importante ressaltar que, para responder algumas questões envolvendo equações não algébricas, são necessários outros conteúdos além dos apresentados na teoria deste trabalho. Como exemplo, observe a questão a seguir:

(IME – RJ) – O número de soluções reais da equação abaixo é:

$$(cosx)^{2018} = 2 - 2^{(x/\pi)^2}$$

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 4.

Para se chegar à resposta correta da questão acima, presente na prova de 2019 para o ingresso no Instituto Militar de Engenharia, são utilizados, além da teoria apresentada neste trabalho, alguns conteúdos que, em geral, são estudados somente no ensino superior. Uma exceção a essa regra são alguns cursos preparatórios específicos para escolas militares, que abordam conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, disciplina presente em diversos cursos superiores da área de exatas e engenharia. Mas, de forma geral, a teoria aqui presente mostra-se suficiente para a resolução de grande parte das questões propostas nos exames vestibulares que ocorrem em nosso país.

Na seção 3.2 da Fundamentação Teórica, apresentamos o programa computacional que o professor utilizará com os seus alunos. Nas seções 3.4 e 3.5 apresentamos uma espécie de manual contendo as principais informações que serão utilizadas na resolução de problemas envolvendo o estudo geométrico das raízes reais de uma equação não algébrica. Abordamos, algumas vezes de forma mais aprofundada, as principais funções estudadas no ensino médio, de modo a conferir a precisão necessária na construção de seus gráficos, o que se mostra fundamental para que se chegue à solução correta dos problemas apresentados neste trabalho. Na seção 4, intitulada Soluções Geométricas, encontram-se duas questões comentadas, explicando de que forma o professor pode orientar seus alunos durante a resolução de um problema que envolve a determinação do número de raízes reais de uma equação não algébrica. E no Apêndice, que está localizado logo após às considerações finais, encontra-se uma lista de exercícios, os quais podem ser utilizados pelo professor durante a elaboração de uma atividade extra classe.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Segundo Lima (2012), não existe um método puramente algébrico que permita determinar a raiz negativa da equação $x^2 = 2^x$. A justificativa reside no fato de que essa raiz não é um número algébrico, mas sim um número transcendente. Segundo o autor, um número é algébrico quando é raiz de alguma equação do tipo $p(x) = 0$, em que p é um polinômio com coeficientes inteiros. Já um número que não é algébrico recebe o nome de transcendente, como é o caso do número π $(\cong 3{,}14)$ e do número e $(\cong 2{,}718)$. Utilizando o Teorema de Gelfond-Schneider (LIMA, 2012), o autor prova que a raiz negativa da equação $x^2 = 2^x$ realmente não é um número algébrico.

Conforme pode ser constatado no apêndice deste trabalho, algumas questões de provas de vestibulares exigem que os candidatos a uma vaga na universidade saibam determinar o número de raízes reais de equações não algébricas. Para responder a uma questão assim, no momento da prova, o candidato deve buscar uma técnica que lhe confira segurança – que não deixe dúvidas sobre a resolução – e agilidade, pois, em muitas provas, o tempo por questão é relativamente curto. Apesar de ter encontrado pouco sobre o tema na literatura, percebe-se que os autores analisados concordam sobre a maneira mais eficaz de resolver questões desse tipo.

Segundo Nemitz (2015),

> Existem algumas equações que não podem ser resolvidas por simples procedimentos algébricos. Nesses casos, para determinar todas as soluções, precisaríamos recorrer a um *software* ou à matemática estudada no Ensino Superior. Entretanto, muitas vezes, é possível descobrir quantas são as soluções utilizando um procedimento gráfico.

Para Giudice et al. (2019), algumas equações, formadas por determinadas funções, "[...] não possuem solução analítica, ou seja, não é possível determinar suas soluções simplesmente resolvendo um sistema qualquer". Segundo o autor, para se avaliar as soluções é necessário fazer "uma inspeção gráfica das funções". Por exemplo, dada uma função da forma $h(x) = f(x) - g(x)$, para encontrar os valores de x tais que $h(x) = 0$, deve-se construir no mesmo plano cartesiano os gráficos de f e g. E então, "o cruzamento dos gráficos nos fornecerá a raiz ou as raízes". Afirma ainda que, mesmo sendo possível avaliar mentalmente as raízes em algumas equações, a questão principal é saber se a equação admite outras raízes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 GEOMETRIA DE UMA EQUAÇÃO NÃO ALGÉBRICA

Em relação às equações não algébricas apresentadas neste trabalho, o nosso interesse está em determinar o número de raízes reais da equação, e não em quais são essas raízes. E, para isso, é fundamental que saibamos a interpretação geométrica de raiz real de uma equação.

A solução algébrica de uma equação associada a uma função f pode ser interpretada geometricamente como segue: se α é uma raiz (solução) real da equação $f(x) = 0$, então α corresponde à abscissa do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo x. Caso a equação seja da forma $f(x) = g(x)$, sendo f e g funções distintas e caso o número real β seja raiz da equação $f(x) = g(x)$, então β corresponde à abscissa do ponto de intersecção dos gráficos de f e g. Assim, se a equação admitir n raízes reais, haverá n pontos de intersecção dos gráficos. Portanto, determinar o número de raízes reais de uma equação $f(x) = g(x)$, algébrica ou não, consiste em contar o número de pontos comuns aos gráficos das funções f e g. É importante lembrar que algumas equações admitem infinitas raízes reais, o que impossibilita a contagem do número de pontos de intersecção.

Há uma segunda maneira de determinar o número de raízes reais de uma equação da forma $f(x) = g(x)$. Note que essa equação é equivalente à $f(x) - g(x) = 0$. Definindo a função $h(x) = f(x) - g(x)$, pode-se observar que a equação $f(x) - g(x) = 0$ é equivalente à $h(x) = 0$. Isso significa que, para determinar o número de raízes reais da equação $f(x) = g(x)$, ou seja, da equação $h(x) = 0$, basta contar, quando possível, o número de pontos de intersecção do gráfico da função h com o eixo das abscissas.

É importante comentar que, neste trabalho, essa segunda maneira de interpretação só será abordada com os alunos durante a construção no GeoGebra.

3.2 O GEOGEBRA

O uso de novas tecnologias durante a aula tradicional pode impactar os alunos de forma a produzir resultados positivos. Segundo Giraldo et al. (2012), a integração dos recursos computacionais à prática docente "pode viabilizar a produção de novas abordagens, possibilitando reestruturações da ordem e das conexões entre os conteúdos, e criando novas formas de explorar e de aprender Matemática".

Em contrapartida, muitas escolas não têm acesso aos recursos computacionais, conforme colocado por Giraldo et al. (2012):

> ‘Sabemos que, em muitos casos, a incorporação de tecnologias digitais na escola esbarra em barreiras de ordem prática, tais como carência de recursos materiais, ou resistências políticas por parte das direções escolares. Entretanto, esta constatação não implica que os professores que vivenciam essas realidades em suas práticas devam ignorar as possibilidades oferecidas pelos recursos computacionais para o enriquecimento do ensino de Matemática. Ao contrário, justamente para se munir de contra-argumentos para tais obstáculos, é importante conhecer essas possibilidades’.

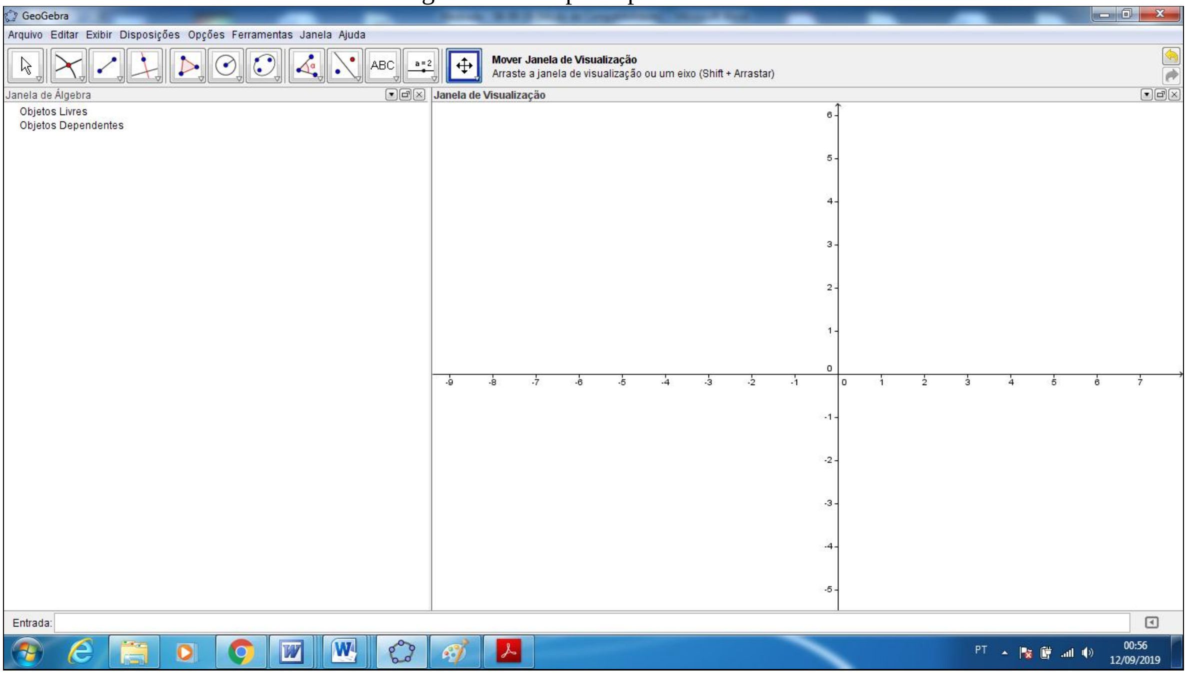
Nesta seção é apresentado o *software* GeoGebra, que será utilizado na segunda etapa de construção dos gráficos das funções abordadas neste trabalho. A construção no GeoGebra tem por objetivo confirmar o resultado encontrado na primeira etapa, que se refere à construção manual dos gráficos.

Segundo Giraldo et al. (2012), “o *software* GeoGebra é concebido para integrar recursos geométricos e algébricos em um só ambiente”. Dessa forma, os gráficos de funções reais elementares podem ser facilmente gerados partindo de suas expressões algébricas.

A escolha do GeoGebra – ao invés de outro *software* que ofereça recursos semelhantes – deve-se ao fato de que é um programa gratuito e, para as finalidades a que esse trabalho se propõe, o seu manuseio é relativamente simples. Conforme observa Souza e Pataro (2012), o “GeoGebra é um programa computacional gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Sua interface é simples e exibe diversos comandos para realizar diferentes tipos de construções”. Adicionalmente, em virtude da sua relevância, até a data de 28 de julho de 2020, o GeoGebra foi citado em 316 dissertações de mestrado do Profmat.

Em termos de características do programa, são apresentados a seguir a tela principal e os principais comandos utilizados. Na Figura 1 é mostrada a tela principal do Geogebra.

Figura 1 - Tela principal do GeoGebra.



Fonte: O autor.

Neste trabalho é utilizado principalmente o campo “Entrada”, lugar em que são digitadas as leis de formação das funções em estudo. No Quadro 1 são listados alguns dos comandos utilizados.

Quadro 1– Alguns dos símbolos utilizados no GeoGebra e os seus significados.

Símbolo	Utilizado para representar
*	a operação de multiplicação
+	a operação de adição
-	a operação de subtração
/	a operação de divisão
sin	o seno de um arco (em radianos)
cos	o cosseno de um arco (em radianos)
abs	o módulo aplicado a uma expressão
^	a operação de potenciação

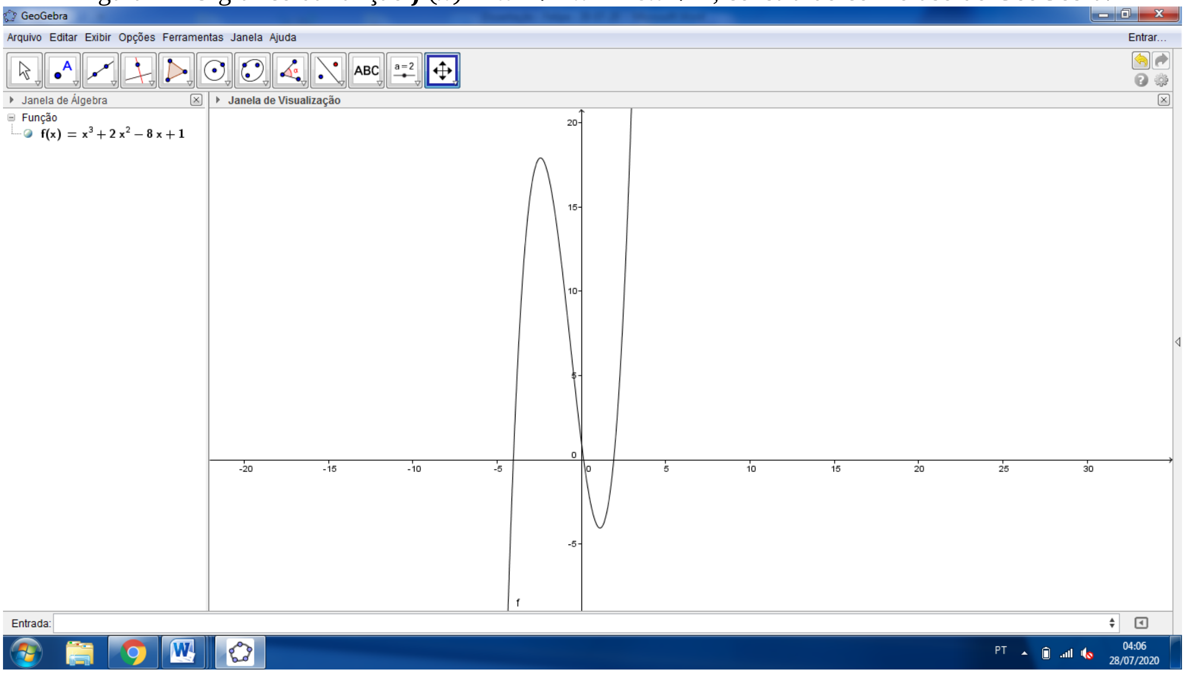
Fonte: O autor.

Por exemplo, para representar a função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 1$, digita-se, no campo “Entrada”:

$$f(x)=x\text{^}3+2*x\text{^}2-8*x+1$$

Feito isso, aparecerá na tela o gráfico da função f, representado na Figura 2.

Figura 2 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 1}$, construído com o uso do GeoGebra.



Fonte: O autor.

3.3 ÁLGEBRA DOS NÚMEROS REAIS

Nesta seção são apresentados alguns conceitos e notações utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

3.3.1 Intervalos Reais

Segundo Lima (2013), intervalos reais são subconjuntos dos números reais. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, definimos os seguintes intervalos:

(i) Intervalo fechado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}.$$

(ii) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita):

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}.$$

(iii) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda):

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}.$$

(iv) Intervalo aberto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos também os intervalos:

$$\text{(v) } [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}.$$
$$\text{(vi) } (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}.$$
$$\text{(vii) } (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}.$$
$$\text{(viii) } (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}.$$

Alguns autores utilizam a notação $]\ a, b\ [$ ao invés de (a, b), por exemplo (LIMA, 2013).

Observações:

- O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, pode ser representado pelo intervalo aberto $(-\infty, +\infty)$ (MUNIZ NETO, 2015).
- Seja A um conjunto que apresenta originalmente o elemento zero. Para indicar que o zero foi suprimido desse conjunto, será utilizada a notação A*.
- Para indicar a diferença entre os conjuntos A e $\{a\}$, nessa ordem, será utilizada ou a notação A – $\{a\}$ ou a notação A \ $\{a\}$.

A seguir são apresentados alguns importantes subconjuntos dos números reais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}.$$

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

$$\mathbb{R}_+^* = (0, \infty).$$

3.3.2 Fatoração de Expressões Algébricas

Os principais casos de fatoração são:

I. Fator comum:

Coloca-se o fator comum em evidência:

$$ax + bx = x \cdot (a + b).$$

II. Agrupamento:

Não há um fator que seja comum a todos os termos. Nesse caso, podemos agrupá-los, considerando dois, três ou mais termos, conforme a expressão apresentada:

$$ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) \quad \Leftrightarrow$$
$$ax + bx + ay + by = (a + b) \cdot (x + y).$$

III. Diferença de dois quadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

IV. Trinômio quadrado perfeito:

Há dois tipos:

(i) Quadrado de uma soma:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \, .$$

(ii) Quadrado de uma diferença:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b) \cdot (a - b) \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \, .$$

3.3.3 Lei do Cancelamento.

Se a e b são números reais tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$ (MUNIZ NETO, 2015).

Exemplo: Determine, caso existam, as raízes reais da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Solução:

Note que a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pode ser escrita na forma

$$(x - 1) \cdot (x - 2) = 0.$$

Assim,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1) \cdot (x - 2) = 0.$$

Pela Lei do Cancelamento,

$$(x - 1) \cdot (x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, 1 e 2 são as raízes reais da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

3.3.4 Módulo de um Número Real

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, denotado por $|\ x\ |$, pode ser definido da seguinte maneira:

$$|\ x\ | = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$ (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2002)

Geometricamente, o módulo de um número real x corresponde, na reta real, à distância entre o número x e o número 0 (zero) (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2002).

Propriedade: Se a e b são números reais quaisquer, então:

$$|\ a \cdot b\ | = |\ a\ | \cdot |\ b\ |.$$

Demonstração:

Vamos separar a demonstração em cinco casos:

I) Se $a > 0$ e $b > 0$, temos que:

$a \cdot b > 0$ e $|\ a \cdot b\ | = a \cdot b$. Também, $|\ a\ | = a$, $|\ b\ | = b$ e $|\ a\ | \cdot |\ b\ | = a \cdot b$.

Portanto, $|\ a \cdot b\ | = |\ a\ | \cdot |\ b\ |$.

II) Se $a > 0$ e $b < 0$ (o caso em que $a < 0$ e $b > 0$ é análogo), temos que:

$a \cdot b < 0$ e $|\ a \cdot b\ | = -\ a \cdot b$. Também, $|\ a\ | = a$, $|\ b\ | = -\ b$ e $|\ a\ | \cdot |\ b\ | = -\ a \cdot b$.

Portanto, $|\ a \cdot b\ | = |\ a\ | \cdot |\ b\ |$.

III) Se $a < 0$ e $b < 0$, temos que:

$a \cdot b > 0$ e $|\ a \cdot b\ | = a \cdot b$. Também, $|\ a\ | = -\ a$, $|\ b\ | = -\ b$ e $|\ a\ | \cdot |\ b\ | = a \cdot b$.

Portanto, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

IV) Se $a = 0$ e $b \neq 0$ (o caso em que $a \neq 0$ e $b = 0$ é análogo), temos que:

$a \cdot b = 0$ e $|a \cdot b| = 0$. Também, $|a| = 0$ e $|a| \cdot |b| = 0 \cdot |b|$, ou seja, $|a| \cdot |b| = 0$.

Portanto, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

V) Se $a = 0$ e $b = 0$, temos que:

$a \cdot b = 0$ e $|a \cdot b| = 0$. Também, $|a| = 0$, $|b| = 0$ e $|a| \cdot |b| = 0$.

Portanto, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Logo, para quaisquer a e b reais,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

3.4 FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

Nesta seção são apresentadas algumas definições importantes a respeito de funções reais em geral. E essas definições são fundamentais para que possamos obter um esboço adequado dos gráficos das funções que compõem uma equação não algébrica.

3.4.1 Definição de Função

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Uma função f: X $\rightarrow$ Y é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in$ X um único elemento $y = f(x) \in$ Y (LIMA, 2013; MUNIZ NETO, 2015). Dada uma função f, dizemos que x representa a variável independente e y (ou $f(x)$) representa a variável dependente (do valor de x) (LONGEN, 2004a). Observe os dois exemplos a seguir:

Exemplo 1. A regra que associa a cada número inteiro n o seu quadrado n^2 define uma função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ (LIMA, 2013). A relação entre as variáveis n e $f(n)$ pode ser dada pela expressão $f(n) = n^2$. Dizemos que $f(n) = n^2$ é a lei de formação da função f (LONGEN, 2004a).

Exemplo 2. Sejam X o conjunto dos triângulos equiláteros de um plano π e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Se, a cada $x \in$ X, fizermos corresponder o número real $g(x)$ = perímetro do triângulo x, teremos uma função g: X $\to \mathbb{R}$ (LIMA, 2013).

3.4.2 Domínio e Contradomínio de uma Função

Dada uma função f: X $\to$ Y, o conjunto X é chamado de domínio da função e o conjunto Y é chamado de contradomínio da função (MUNIZ NETO, 2015). Para representar esses dois conjuntos, usaremos também as notações Dom(f) e CD(f), respectivamente. Como exemplo, considere a função $f\colon \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} \to \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ cuja lei de formação é $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$. Neste caso, Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ e CD(f) = $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$.

Neste trabalho trataremos de funções cujo domínio X é um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$. Diremos que f é uma função real (f assume valores reais, dado que seu contradomínio é o conjunto dos números reais) de uma variável real (um elemento qualquer x do domínio X de f é um número real) (MUNIZ NETO, 2015). Iremos convencionar que o domínio e o contradomínio de uma função, sempre que não forem descritos, serão definidos como o conjunto dos números reais ou o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a regra que relaciona as duas variáveis, x e $f(x)$ (ou x e y), está definida.

3.4.3 Imagem de uma Função

Seja f: X $\to$ Y uma função real de variável real. O conjunto imagem de f, $Im(f)$, é o conjunto formado pelos elementos $f(x) \in$ Y que são imagens dos elementos $x \in$ X:

$$Im(f) = \{ f(x) \in Y; x \in X \}$$ (MUNIZ NETO, 2015).

É importante destacar que $Im(f) \subset$ Y, o que não significa necessariamente que $Im(f)$ = Y (MUNIZ NETO, 2015). Nos casos em que o contradomínio coincide com o conjunto imagem a função f recebe uma denominação especial, conforme veremos mais adiante.

Exemplo: Determine o conjunto imagem da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Se a é um elemento qualquer do domínio de f, temos que:

$$a^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 1 \geq 0 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \geq 1.$$

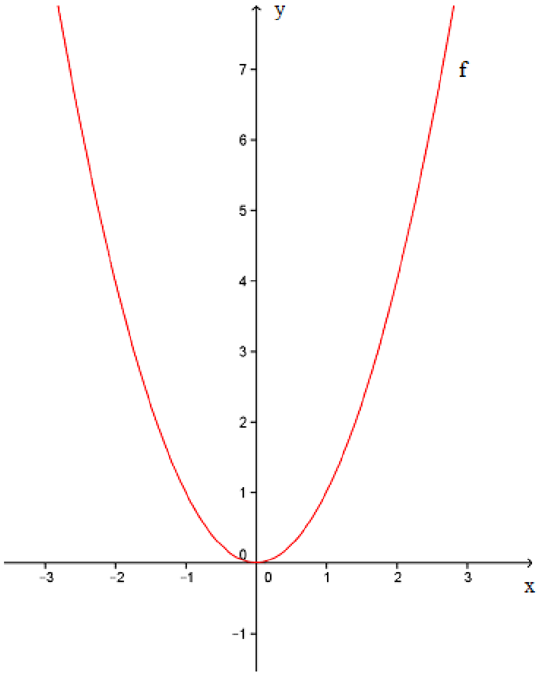
Portanto, $Im(f) = [\ 1,\ \infty\ )$.

3.4.4 Gráfico de uma Função

Seja $X \subset \mathbb{R}$. O gráfico de uma função f: X → ℝ é um subconjunto do plano cartesiano ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Visto que $y = f(x)$, o gráfico de f é formado por todos os pontos de coordenadas $(x,\ f(x))$. Em muitos casos o gráfico pode ser visto como uma linha, com x variando no conjunto X (LIMA, 2013).

Exemplo: O gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = x^2$ é o conjunto formado por todos os pontos da forma $(x,\ f(x))$, e é representado por uma linha no plano cartesiano, conforme podemos observar na Figura 3.

Figura 3 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.



Fonte: O autor

3.4.5 Transformações Gráficas

Sejam f uma função real de variável real e k um número real não nulo. Vejamos, agora, o efeito que a adição de uma constante k à fórmula de f produz no gráfico dessa função.

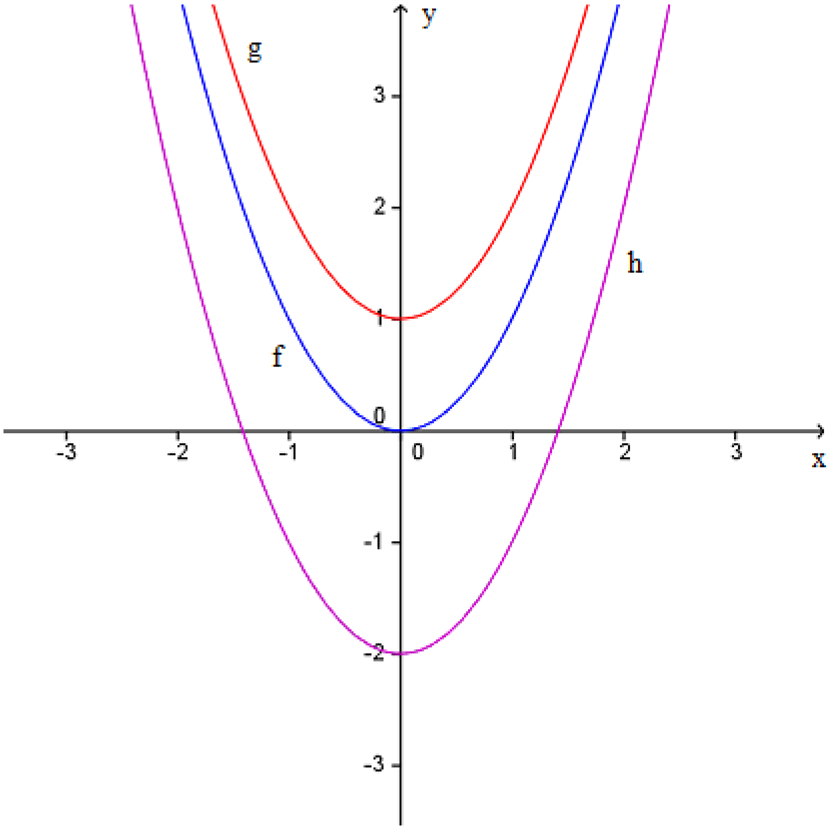
I) Translação Vertical:

Adicionando uma constante k à direita da fórmula de f, obtemos a função $y = f(x) + k$. Assim, há duas possibilidades:

- Se $k > 0$, o gráfico de f é transladado k unidades para cima;
- Se $k < 0$, o gráfico de f é transladado $|\, k \,|$ unidades para baixo.

Observe, por exemplo, os gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x) + 1$ e $h(x) = f(x) - 2$, apresentados na Figura 4.

Figura 4 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1}$ e $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 2}$.



Fonte: O autor.

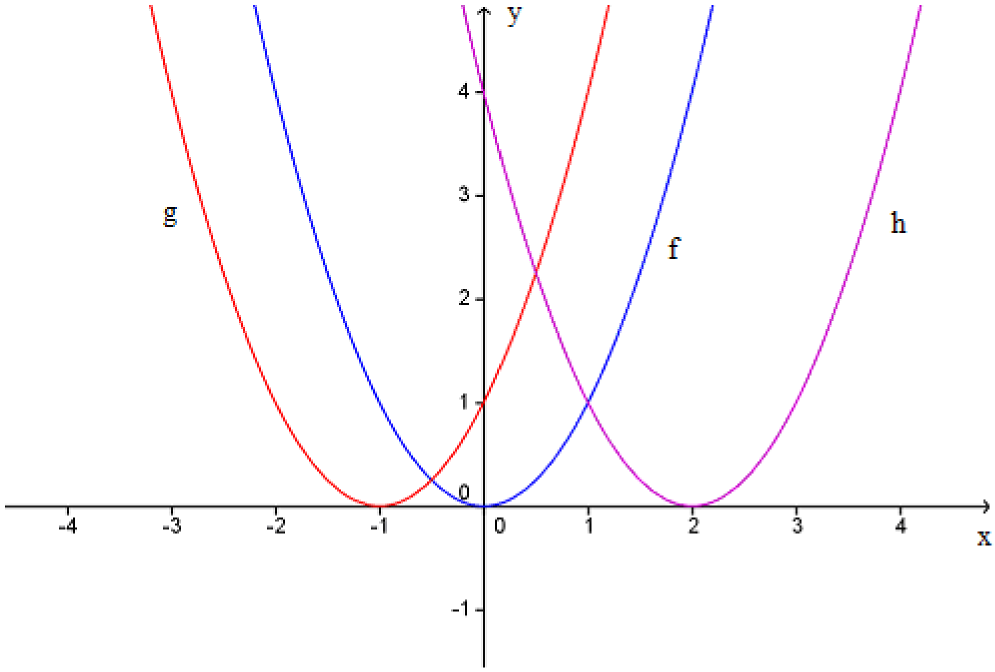
II) Translação Horizontal:

Adicionando uma constante k à x, obtemos a função $y = f(x + k)$. Há também duas possibilidades a considerar:

- Se $k > 0$, o gráfico de f é transladado k unidades para a esquerda;
- Se $k < 0$, o gráfico de f é transladado $|\, k \,|$ unidades para a direita (THOMAS, 2002).

Observe, por exemplo, os gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x + 1)$ e $h(x) = f(x - 2)$, mostrados na Figura 5.

Figura 5 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, $\boldsymbol{g(x) = (x+1)^2}$ e $\boldsymbol{h(x) = (x-2)^2}$.



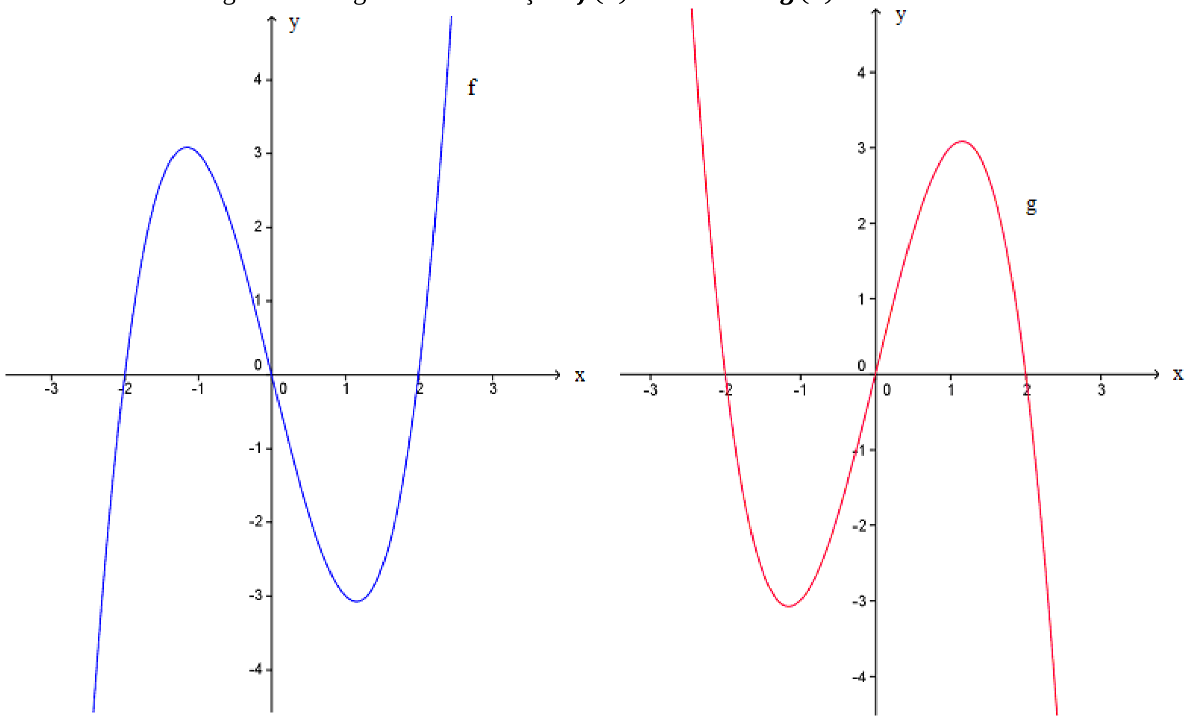
Fonte: O autor.

Observações:

- Seja f uma função real de variável real. O gráfico da função $g(x) = -f(x)$ pode ser obtido refletindo-se todos os pontos do gráfico de f simetricamente em relação ao eixo das abscissas (PRAZERES, 2014).

Exemplo: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 4x$, cujo gráfico está representado na $\boxed{\text{Figura 6}}$. Fazendo a reflexão dos pontos de f em relação ao eixo x, obtemos o gráfico da função $g(x) = -f(x)$, ou seja, da função $g(x) = -(x^3 - 4x)$, que também está representado na $\boxed{\text{Figura 6}}$.

Figura 6 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x}$ e $\boldsymbol{g(x) = -x^3 + 4x}$.

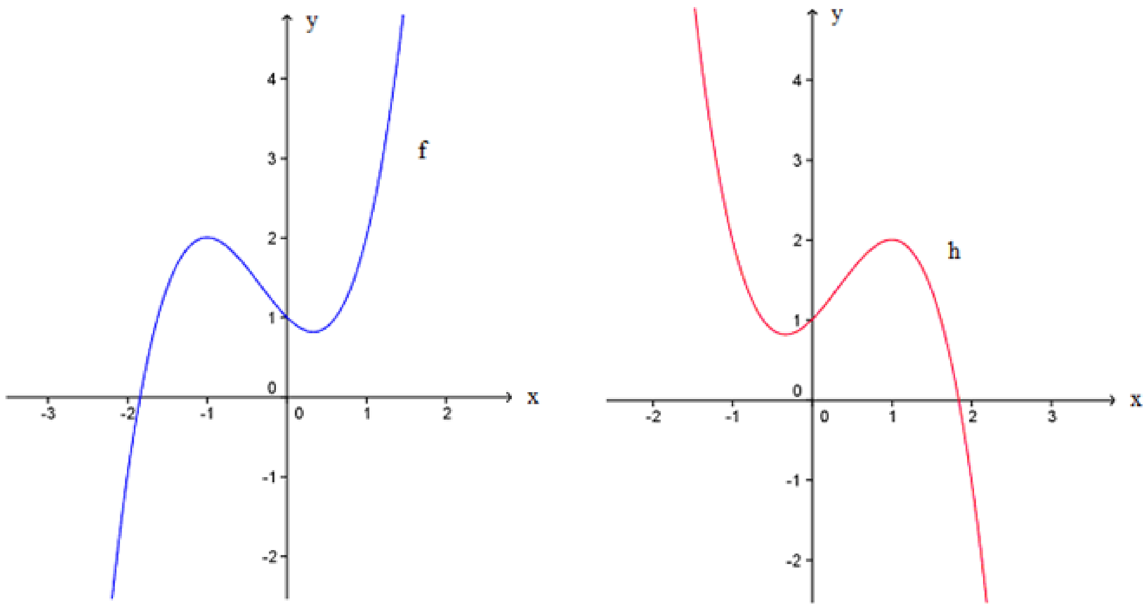


Fonte: O autor.

- Seja f uma função real de variável real. O gráfico da função $g(x) = f(-x)$ pode ser obtido refletindo-se todos os pontos do gráfico de f simetricamente em relação ao eixo das ordenadas (PRAZERES, 2014).

Exemplo: Considere uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 7. Fazendo a reflexão dos pontos do gráfico de f em relação ao eixo das ordenadas, obtemos o gráfico da função $h(x) = f(-x)$, ou seja, da função $h(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$, que também está representado na Figura 7.

Figura 7 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2 - x + 1}$ e $\boldsymbol{g(x) = -x^3 + x^2 + x + 1}$.



Fonte: O autor.

3.4.6 Função Crescente, Função Decrescente e Função Constante

O crescimento ou o decrescimento de uma função representa um tópico de extrema importância na pesquisa do número de raízes reais de uma equação não algébrica. Com base nesse comportamento, podemos prever o que acontece com o gráfico de uma função f quando a variável independente x assume valores que estão além do alcance de nossa visão, considerando a limitação do plano cartesiano construído em uma folha de papel ou mostrado na tela de um computador. Vejamos, agora, como classificar uma função em relação ao crescimento ou decrescimento.

Dado um intervalo $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, uma função $f \colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ é chamada de:

(a) Crescente se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$ (MUNIZ NETO, 2015).

Exemplo: A função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$ é crescente, pois:

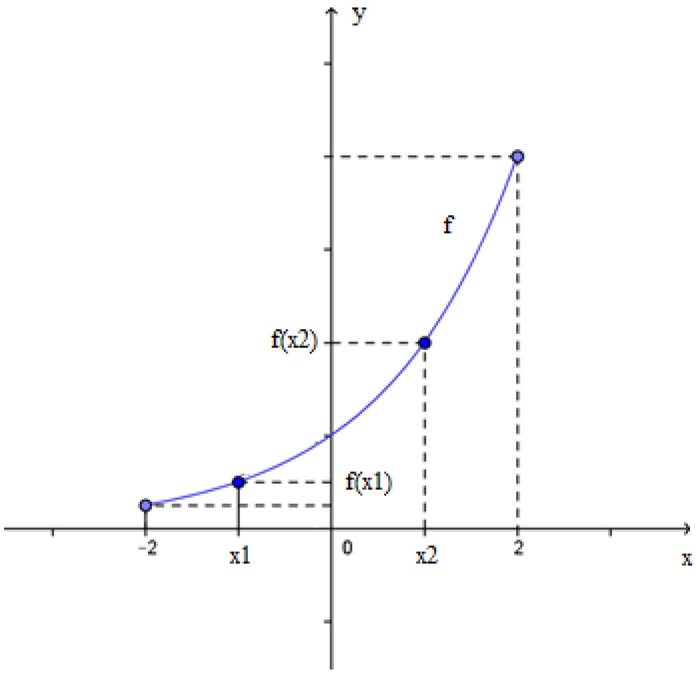
$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot x_1 < 2 \cdot x_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot x_1 + 3 < 2 \cdot x_2 + 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x_1) < f(x_2).$$

Na Figura 8 é mostrado o gráfico de uma função crescente f.

Figura 8 – O gráfico de uma função crescente $\boldsymbol{f}$, de domínio [– 2, 2].



Fonte: O autor.

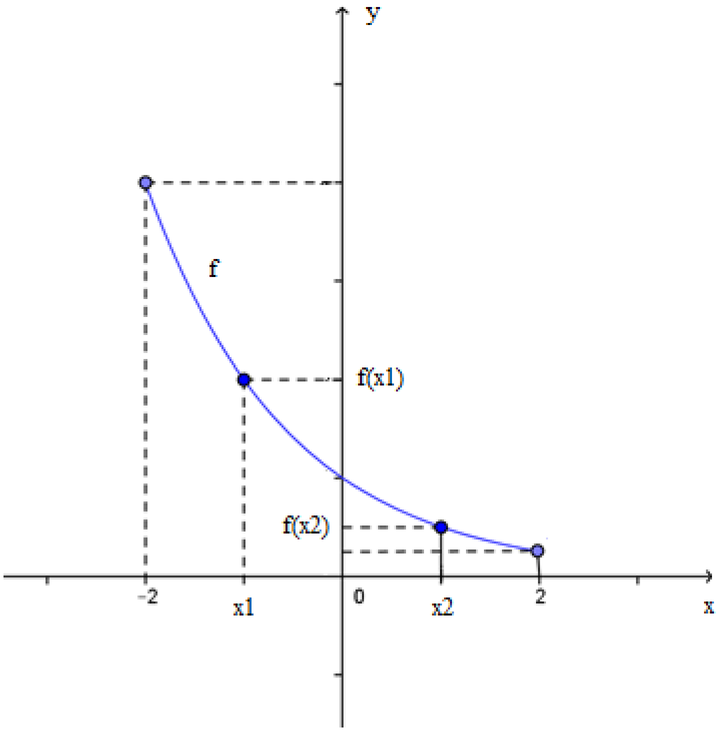
(b) Decrescente se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$ (MUNIZ NETO, 2015).

Exemplo: a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 4$ é decrescente, pois:

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$-x_1 > -x_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + 4 > -x_2 + 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x_1) > f(x_2).$$

Na Figura 9 é mostrado o gráfico de uma função decrescente f.

Figura 9 – O gráfico de uma função decrescente $\boldsymbol{f}$, de domínio [– 2, 2].



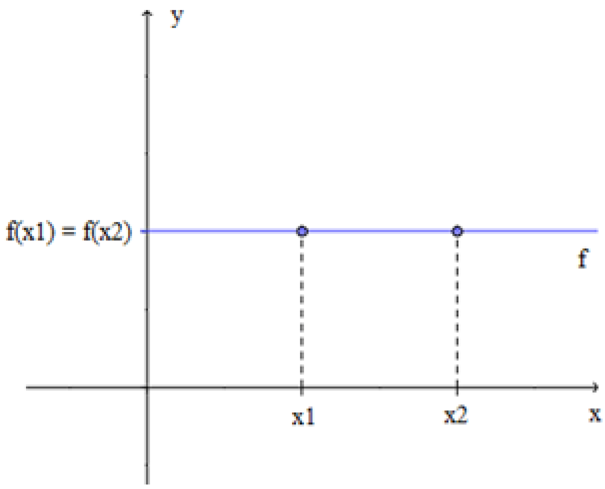
Fonte: O autor.

(c) Constante se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemplo: a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4$ é uma função constante.

O gráfico de uma função constante f é uma reta perpendicular ao eixo y (alguns autores preferem a frase “reta paralela ao eixo x”), conforme podemos observar na Figura 10.

Figura 10 – O gráfico de uma função constante $\boldsymbol{f}$.



Fonte: O autor.

3.4.7 Função Par e Função Ímpar

Seja I uma união de intervalos reais, simétrica em relação ao número zero. Uma função f: I $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ é chamada de:

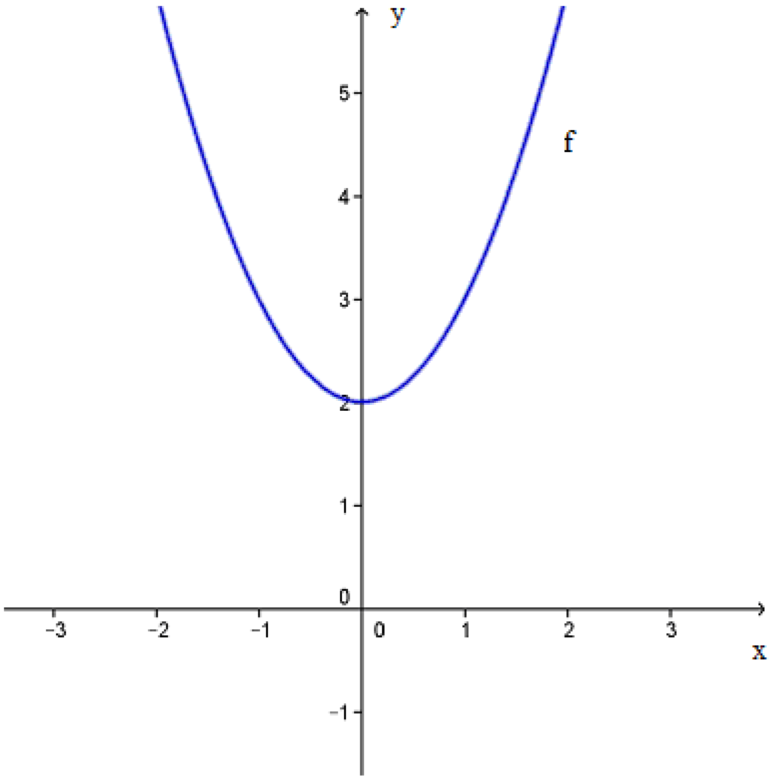
(a) Par, se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in$ I (MUNIZ NETO, 2015).

Exemplo: A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é uma função par, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x).$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y (THOMAS, 2002). Na Figura 11 é mostrado o gráfico da função par $f(x) = x^2 + 2$.

Figura 11 – O gráfico da função par $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2}$.



Fonte: O autor.

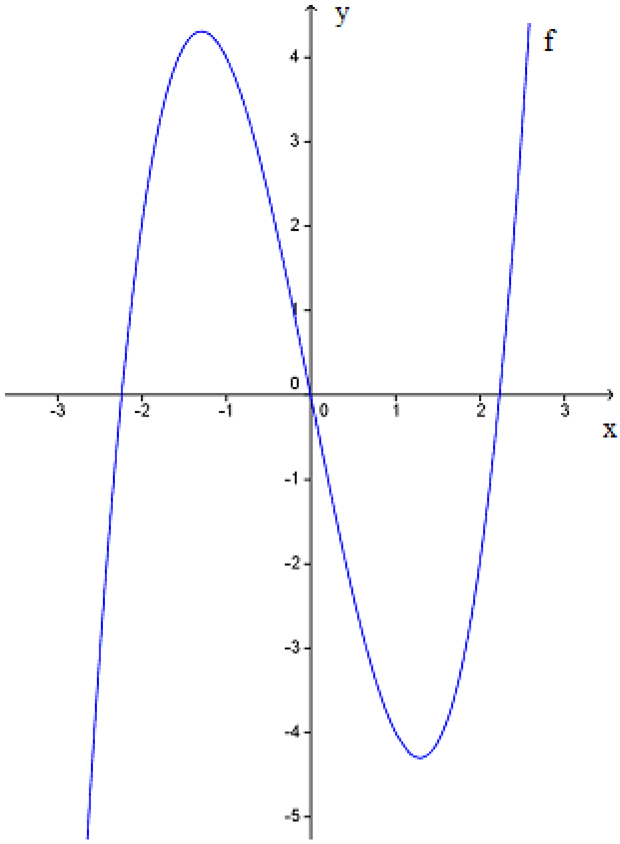
(b) Ímpar, se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in$ I (MUNIZ NETO, 2015).

Exemplo: A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 5x$ é uma função ímpar, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^3 - 5 \cdot (-x) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = -x^3 + 5x \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = -(x^3 - 5x) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = -f(x).$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas (THOMAS, 2002). Na Figura 12 pode ser observado o gráfico da função ímpar $f(x) = x^3 - 5x$.

Figura 12 – O gráfico da função ímpar $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x}$.



Fonte: O autor.

Além das funções pares e das funções ímpares, existem funções que não são pares e nem ímpares.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5 - 1$ não é par e nem ímpar, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^5 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = -x^5 - 1.$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$ concluímos que f não é par e nem ímpar.

Observação: Se f é par e ímpar ao mesmo tempo, então f é necessariamente a função $f(x) = 0$ (função nula).

Demonstração:

Vamos supor que uma função f seja par e ímpar simultaneamente, isto é, que f atenda, ao mesmo tempo, às condições $f(-x) = f(x)$ e $f(-x) = -f(x)$. Logo, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-x) - f(x) = 0 \\ f(-x) + f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -f(-x) + f(x) = 0 \\ f(-x) + f(x) = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações desse último sistema, obtemos:

$$2 \cdot f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

Portanto, se uma função f é par e ímpar ao mesmo tempo, então f é necessariamente a função $f(x) = 0$.

Outro fato bastante curioso é que toda função pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar (MUNIZ NETO, 2015).

Demonstração:

$$f(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \frac{2 \cdot f(x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \frac{f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Seja g a função denotada por:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

e h a função denotada por:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Note que g é par, pois:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$g(-x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$g(-x) = g(x).$$

Note que h é ímpar, pois:

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$h(-x) = \frac{-(f(x) - f(-x))}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$h(-x) = -\left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$h(-x) = -h(x).$$

Como $g(-x) = g(x)$, $h(-x) = -h(x)$ e $f(x) = g(x) + h(x)$, temos que a função f pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Segundo Thomas (2002), “Ao fazer gráficos é útil reconhecer funções pares e ímpares. Uma vez que conhecemos o gráfico de cada tipo de função de um lado do eixo y, automaticamente conhecemos o gráfico do outro lado”.

3.4.8 Função Injetiva, Função Sobrejetiva e Função Bijetiva

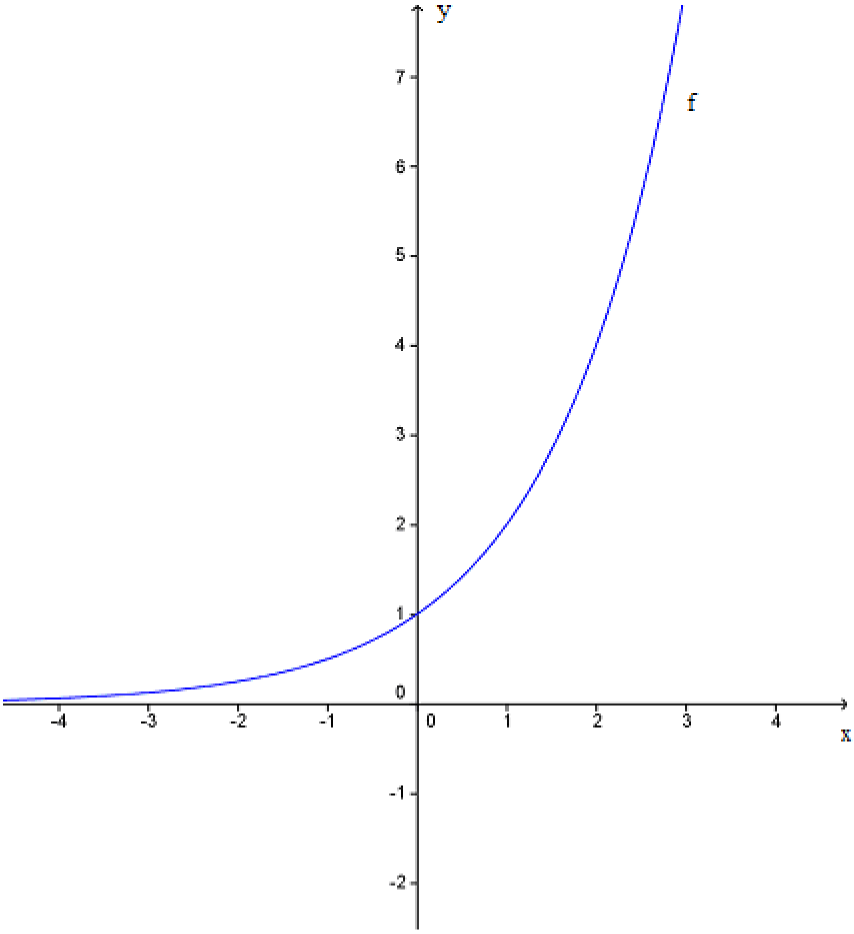
Um função f: X $\rightarrow$ Y é chamada de:

(a) Injetiva, ou injetora ou uma injeção, se todo elemento $y \in$ Y estiver relacionado a no máximo um elemento $x \in$ X. Em notação simbólica,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ ou } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo: A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $f(x) = 2^x$ é injetiva. O gráfico de f está ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – O gráfico da função injetiva $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{x}}$.



Fonte: O autor.

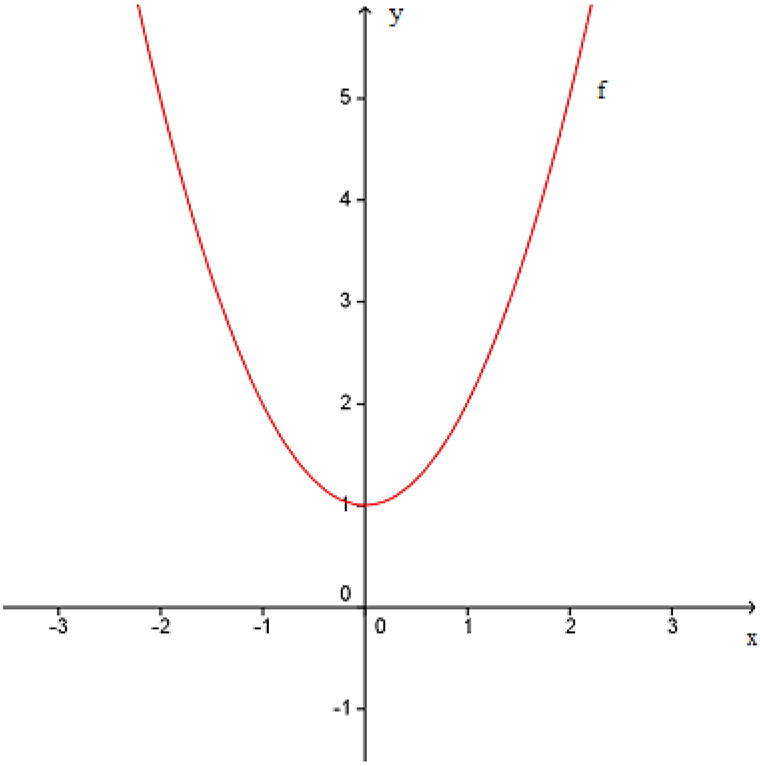
De acordo com o gráfico apresentado na Figura 13, valores distintos de x possuem imagens distintas.

Observação: Se uma função é injetiva, cada reta horizontal que cruza o gráfico de f o intersecta em um único ponto (THOMAS, 2002).

(b) Sobrejetiva, ou sobrejetora ou uma sobrejeção, se todo $y \in \mathrm{Y}$ estiver relacionado a pelo menos um elemento $x \in \mathrm{X}$. Neste caso, o conjunto Imagem coincide com o Contra Domínio da função.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ denotada por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetiva, pois $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f)$, conforme o gráfico apresentado na Figura 14.

Figura 14 – O gráfico da função sobrejetiva $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to [1, \infty)$ definida por $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$.

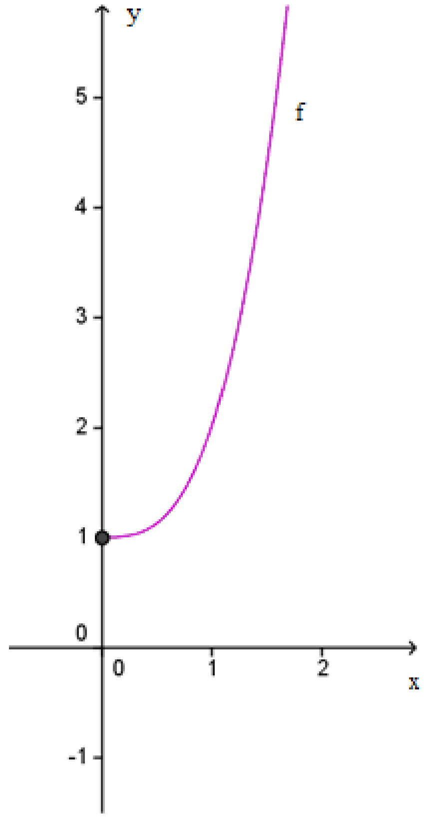


Fonte: O autor.

(c) Bijetiva, ou bijetora ou uma bijeção, se for injetiva e sobrejetiva simultaneamente (MUNIZ NETO, 2015).

Exemplo: A função $f\colon [0, \infty) \to [1, \infty)$ denotada por $f(x) = x^3 + 1$ é bijetiva. O gráfico de f pode ser visualizado na Figura 15.

Figura 15 – O gráfico da função bijetiva $\boldsymbol{f}$: $[0;\ \infty) \rightarrow [1;\ \infty)$ definida por $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 1}$.



Fonte: O autor.

3.4.9 Função Composta

Sejam as funções f: X $\rightarrow$ Y e g: Y $\rightarrow$ Z. A função composta de f e g, nesta ordem, é a função $g \circ f$: X $\rightarrow$ Z definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

para todo $x \in$ X (MUNIZ NETO, 2015). Note que o domínio de g é igual ao contradomínio de f (THOMAS, 2002).

Observação: Na definição acima, o conjunto Z não representa necessariamente o conjunto dos números inteiros.

Exemplo: Dadas as funções f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotadas, respectivamente, por $f(x) = x^2 - x + 4$ e $g(x) = x + 1$, determine a lei de formação da função composta $f \circ g$.

Solução:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \Leftrightarrow$$
$$(f \circ g)(x) = [g(x)]^2 - [g(x)] + 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$(f \circ g)(x) = (x+1)^2 - (x+1) + 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$(f \circ g)(x) = x^2 + x + 4.$$

3.4.10 Função Inversa

Seja f: X $\rightarrow$ Y uma função bijetiva. A função inversa de f, que denotaremos por f^{-1}, é a função g: Y $\rightarrow$ X tal que, para $x \in$ X, y $\in$ Y, temos

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \text{ (MUNIZ NETO, 2015).}$$

Seja f uma função bijetiva. Em alguns casos podemos obter a expressão da função inversa de f, f^{-1}, seguindo os passos abaixo:

I. Trocamos as variáveis (x por y e y por x);
II. Isolamos a variável y.

Exemplo: Mostre que a função f: $\mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ denotada por $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$, é bijetiva e determine a sua inversa.

Solução:

Para mostrar que f é injetiva, basta verificar que, para todos $x_1, x_2 \in Dom(f)$,

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

De fato,

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1 - x_1}{x_1 - 2} = \frac{1 - x_2}{x_2 - 2} \quad \Rightarrow$$
$$(1 - x_1) \cdot (x_2 - 2) = (1 - x_2) \cdot (x_1 - 2) \quad \Rightarrow$$
$$x_2 - 2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 = x_1 - 2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 \quad \Rightarrow$$
$$x_2 + 2 \cdot x_1 = x_1 + 2 \cdot x_2 \quad \Rightarrow$$
$$x_1 = x_2.$$

Já para mostrar que f é sobrejetiva, deve-se obter, para cada y, pelo menos um valor de x para a equação $f(x) = y$. Note que:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1 - x}{x - 2} = y \quad \Leftrightarrow$$
$$1 - x = xy - 2y \quad \Leftrightarrow$$
$$-x - xy = -2y - 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x + xy = 2y + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x \cdot (1 + y) = 2y + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2y + 1}{1 + y}.$$

Os cálculos acima mostram que, para cada $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, existe um único $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tal que $f(x) = y$. Portanto, como x existe, a função f é sobrejetiva.

Como f é injetiva e sobrejetiva, concluímos que f é bijetiva. E, por ser bijetiva, f admite inversa.

A expressão que define f é $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$ ou $y = \frac{1-x}{x-2}$. Fazendo a troca de variáveis, temos que:

$$x = \frac{1-y}{y-2}.$$

Agora, vamos isolar a variável y:

$$x = \frac{1-y}{y-2} \quad \Leftrightarrow$$
$$xy - 2x = 1 - y \quad \Leftrightarrow$$
$$xy + y = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$y \cdot (x + 1) = 2x + 1.$$

Para $x \neq -1$, temos que:

$$y = \frac{2x+1}{x+1}.$$

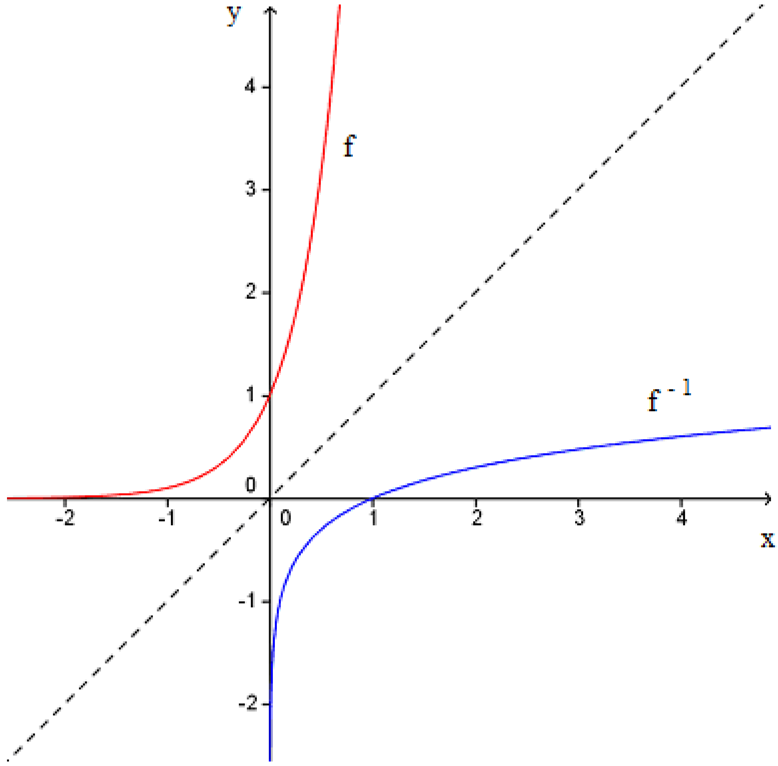
Denotando a função inversa de f por f^{-1}, temos que:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

Note que Dom(f^{-1}) = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ou seja, Dom($f^{-1}$) = CD($f$). Também ocorre que CD($f^{-1}$) = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, isto é, CD($f^{-1}$) = Dom($f$).

Observação: Seja f uma função bijetiva e f^{-1} a sua inversa. Num mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta de equação $y = x$, conhecida como bissetriz dos quadrantes ímpares (BIANCHINI; PACCOLA, 1995), como representado na Figura 16. Portanto, de posse do gráfico de uma função f, podemos construir o gráfico da sua inversa f^{-1} e vice-versa.

Figura 16 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{f^{-1}}$. A linha tracejada representa a bissetriz dos quadrantes ímpares.



Fonte: O autor.

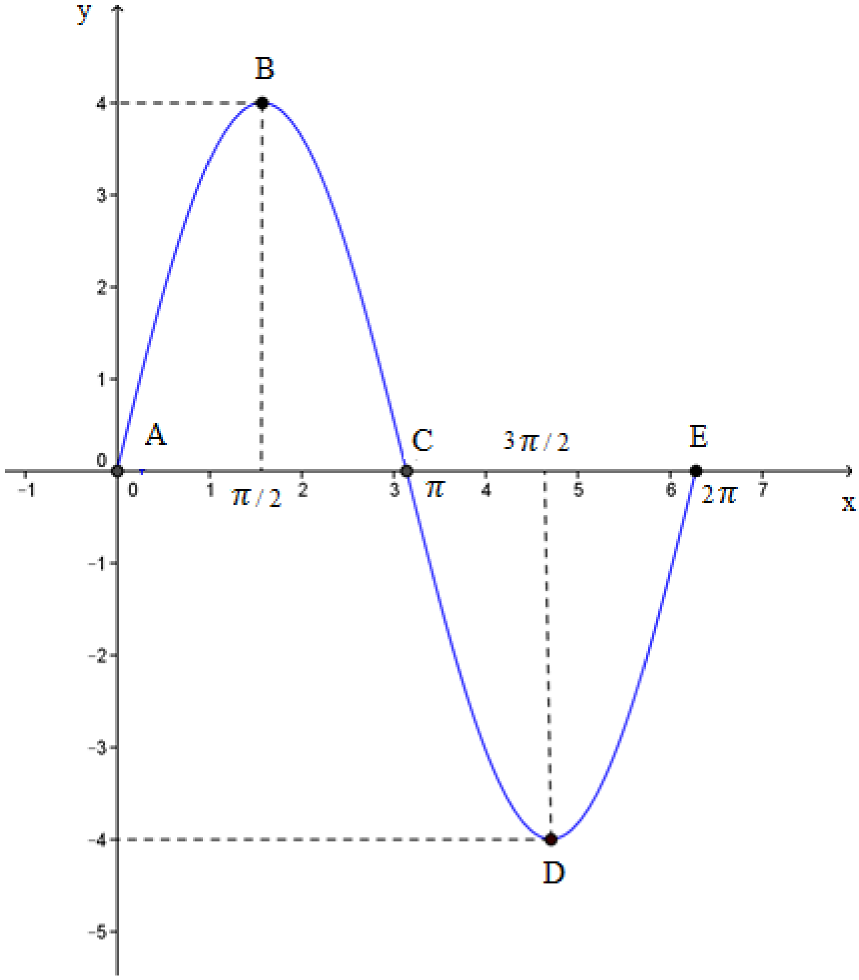
3.4.11 Função Periódica

O conceito de periodicidade nos remete à ideia de repetição. E conforme observado por Iezzi et al. (2016), "... existem funções que apresentam um comportamento periódico". Vamos, então, à definição de função periódica:

Uma função f: X $\rightarrow$ Y é periódica se existir um número real $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in$ X. O menor valor positivo de p tal que $f(x + p) = f(x)$ é chamado de período da função f. Conforme veremos mais adiante e de forma mais detalhada, "as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas" (IEZZI, et al., 2016).

Uma informação muito útil na construção do gráfico de uma função periódica f é o fato de que o gráfico de f pode ser construído com base no gráfico relativo a apenas um período da função. Observe, na Figura 17, o gráfico relativo a apenas um período da função periódica $f(x) = 4 \cdot senx$, cujo período é igual a 2π.

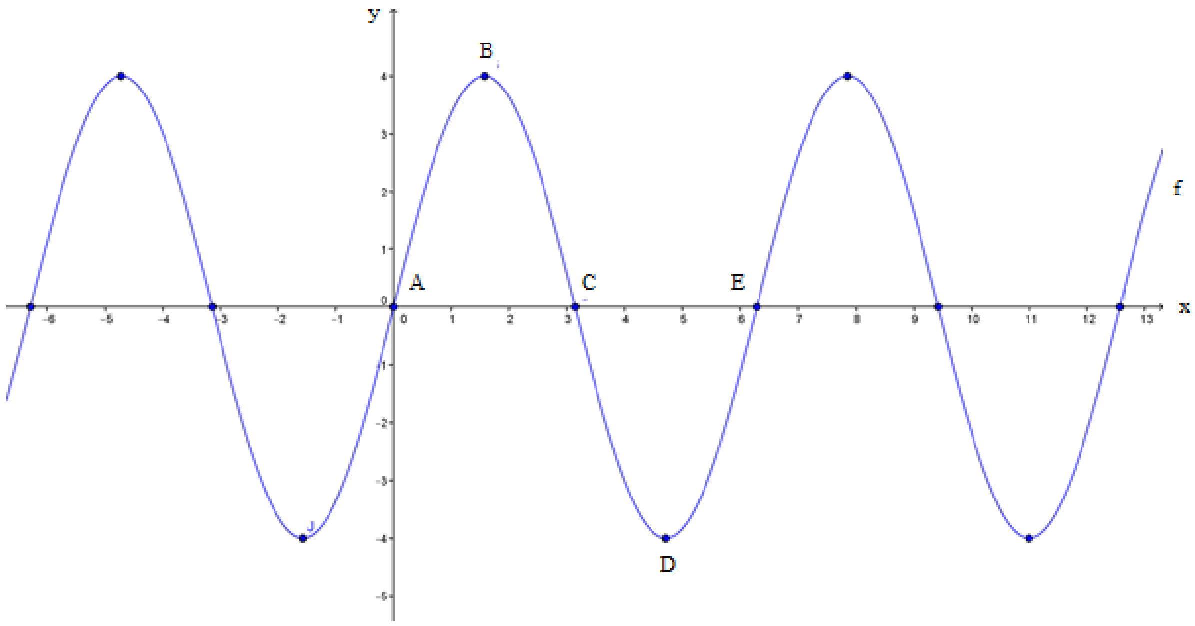
Figura 17 – A representação gráfica de um período da função periódica $\boldsymbol{f(x) = 4 \cdot senx}$.



Fonte: O autor.

Com base no comportamento de f apenas no intervalo $[0, 2\pi]$, podemos construir o gráfico da função $f(x) = 4 \cdot \text{sen } x$, com x variando no conjunto dos reais. O fato de f ser periódica nos permite fazer uma "cópia" do gráfico da Figura 17, ao transladar 2π unidades para a direita ou para a esquerda cada ponto do gráfico. Por exemplo, transladando 2π unidades para a direita o ponto A, de coordenadas (0, 0), ele se sobrepõe ao ponto E, de coordenadas $(2\pi, 0)$. Transladando 2π unidades para a direita o ponto B, de coordenadas $(\pi/2, 4)$, ele se sobrepõe ao ponto de coordenadas $(5\pi/2, 4)$. Transladando 2π unidades para a direita o ponto C, de coordenadas $(\pi, 0)$, ele se sobrepõe ao ponto de coordenadas $(3\pi, 0)$, e assim por diante. Ao repetir esse processo indefinidamente obtemos a parte do gráfico de f que está à direita da origem. Com um procedimento similar, transladando o gráfico da Figura 17 para a esquerda, obtemos a parte do gráfico de f que está à esquerda da origem. Reunindo as duas partes, obtemos o gráfico da função f, ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – O gráfico da função periódica $\boldsymbol{f(x) = 4 \cdot senx}$.



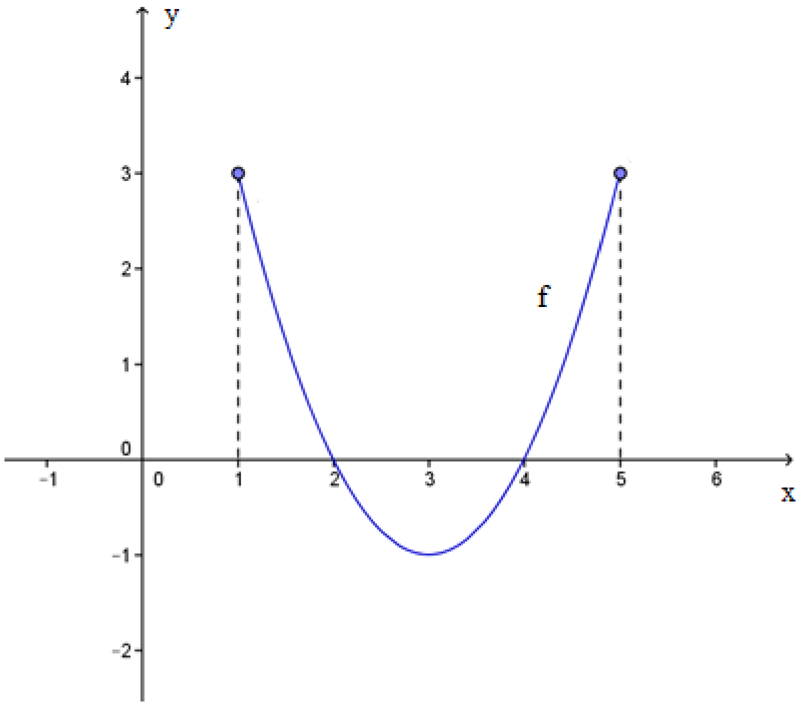
Fonte: O autor.

3.4.12 Zero de uma Função

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dada uma função $f: X \to \mathbb{R}$, diz-se que um número real $\alpha \in X$ é um zero de f se $f(\alpha) = 0$ (RIBEIRO, 2012a).

Geometricamente, os zeros de uma função f correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico de f intersecta o eixo x (RIBEIRO, 2012a). Na Figura 19 podemos notar que os zeros da função f, definida no intervalo [1, 5], são os números 2 e 4, que correspondem, respectivamente, às abscissas dos pontos (2, 0) e (4, 0).

Figura 19 – O gráfico de uma função f, cujos zeros são os números 2 e 4.



Fonte: O autor.

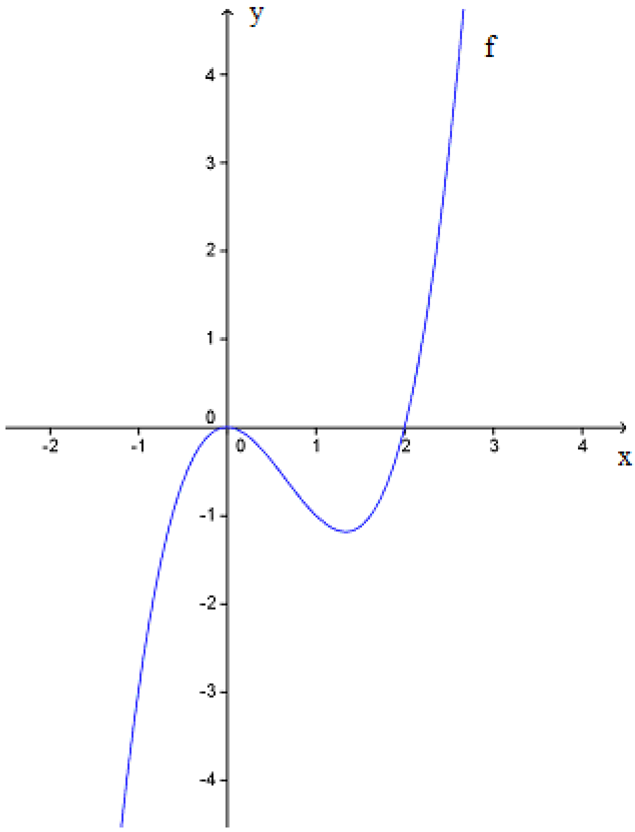
Note que $f(2) = 0$ e que $f(4) = 0$, o que significa que 2 e 4 são zeros da função f.

Observação: Neste trabalho, as funções possuem como domínio subconjuntos dos números reais. Portanto, chamaremos de zeros da função f apenas os valores reais de x tais que $f(x) = 0$.

3.4.13 Função Contínua em um Intervalo Real

O conceito de função contínua, apesar de amplamente utilizado no estudo de funções durante os ensinos fundamental e médio, geralmente não é definido nesses níveis de ensino. A definição precisa de função contínua pode ser encontrada no livro de Muniz Neto (2015). “De modo geral, o gráfico de uma função contínua em um intervalo real é representado por uma curva que não apresenta ponto de descontinuidade, isto é, não possui saltos e nem furos” (SILVA; FILHO, 2005). Sabe-se que toda função polinomial é contínua (MUNIZ NETO, 2015). E essa afirmação se mostra muito importante no momento em que esboçamos os gráficos de funções polinomiais. Na Figura 20 está representado o gráfico de uma função polinomial que, por sua vez, é uma função contínua.

Figura 20 – O gráfico de uma função contínua $\boldsymbol{f}$.



Fonte: O autor.

3.5 FUNÇÕES REAIS ELEMENTARES

Nesta seção será apresentada a fundamentação teórica necessária para se construir um esboço das funções reais estudadas no ensino médio. Chamaremos tais funções de elementares. A construção do esboço é a etapa mais importante no processo de resolução de questões envolvendo equações não algébricas, que estamos interessados em explorar. É importante ressaltar que nesta seção faremos o uso do software GeoGebra para ilustrar os gráficos das funções elementares. Tais gráficos serão utilizados como modelos para os esboços que apresentaremos na seção 4.

3.5.1 Função Afim

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim se, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x) = ax + b,$$

em que a e b são constantes reais.

Na expressão $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado de taxa de crescimento da função f e b, que é o valor que a função assume quando $x = 0$, é chamado de valor inicial da função f (LIMA, 2013).

Em relação ao crescimento ou decrescimento, uma função afim é classificada como:

(a) crescente, se $a > 0$.

Exemplo: A função $f(x) = x + 3$ é uma função afim crescente.

(b) decrescente, se $a < 0$.

Exemplo: A função $f(x) = -x + 7$ é uma função afim decrescente.

(c) constante, se $a = 0$ (LIMA, 2013).

Exemplo: A função $f(x) = 2$ é uma função afim constante.

O zero de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é o valor real de x tal que $f(x) = 0$ (BIANCHINI; PACCOLA, 1995), ou seja, é a raiz da equação $ax + b = 0$.

Geometricamente, o zero de uma função da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, corresponde ao valor da abscissa do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x (SILVA; FILHO, 2000). Esse ponto de intersecção tem coordenadas $(-b/a, 0)$.

Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela ao eixo y. De acordo com o valor de a, podemos ter os seguintes casos:

(a) se $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (da esquerda para a direita);
(b) se $a < 0$, o gráfico de f é uma reta descendente (LIMA, 2013).
(c) se $a = 0$, o gráfico de f é uma reta perpendicular ao eixo y.

Para construirmos o esboço do gráfico de uma função afim, atribuímos valores a x, obtendo em correspondência os valores de y. Sabe-se que dois pontos distintos são suficientes para determinar uma reta (LIMA, 2013). E dois pontos interessantes a se considerar ao construir o gráfico de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$ em que $a \neq 0$ são os pontos em que a reta intersecta os eixos coordenados. O gráfico de f intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0, b).

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função afim $f(x) = 2x - 4$.

Solução:

Atribuindo a x o valor zero, temos que:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = -4.$$

Assim, obtemos o ponto A = (0, – 4).

Atribuindo a x o valor 2, temos que:

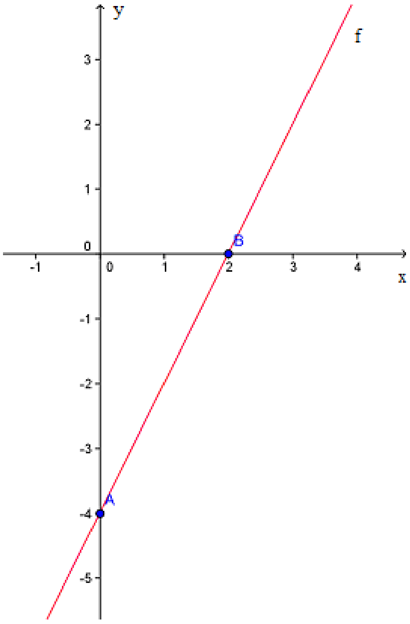
$$f(2) = 2.2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f(2) = 0.$$

Com isso, obtemos o ponto B = (2, 0).

Observação: Note que poderíamos obter a abscissa do ponto B resolvendo a equação $f(x) = 0$.

Localizando os pontos A e B no plano e traçando uma reta passando por eles, obtemos o esboço do gráfico de f. A Figura 21 ilustra o gráfico de f.

Figura 21 – O gráfico da função afim $\boldsymbol{f(x) = 2x - 4}$.



Fonte: O autor.

Observe que o conjunto imagem de uma função afim $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos números reais. No caso de funções da forma $f(x) = b$, o gráfico de f é uma reta perpendicular ao eixo y e os pontos do gráfico são todos da forma (x, b), de modo que $Im(f) = \{b\}$.

3.5.2 Função Quadrática

Uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$ (LIMA, 2013).

Os zeros de uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, caso existam, são os valores reais de x tais que $f(x) = 0$ (RIBEIRO, 2012a), ou seja, são as raízes reais (caso existam) da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Caso as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ sejam números reais, podemos obter uma expressão que permite calculá-las, partindo da equação $f(x) = 0$. Considere a equação abaixo, com $a > 0$ (o caso em que $a < 0$ é análogo):

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dividindo os dois membros da equação por a, temos que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Somando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros da equação, temos que:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, temos que:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a^2}}.$$

Como $a > 0$, temos que:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (LIMA, 2013).

Assim, se $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pelas expressões:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $b^2 - 4ac < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais (LIMA, 2013).

Aqui, chamaremos a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ de fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

Se x_1 e x_2 são as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Temos também que:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta^2}}{4.a^2}.$$

Como $\Delta \geq 0$, temos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4.a^2}.$$

Como $\Delta = b^2 - 4.a.c$, então:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$ (MUNIZ NETO, 2015).

Se x_1 e x_2 são os zeros da função:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\ ,$$

então f pode ser escrita na forma:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

chamada de forma fatorada da função quadrática f (MUNIZ NETO, 2015).

Demonstração:

Os zeros da função f, x_1 e x_2, são tais que:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a} \text{ e } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

ou seja,

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a} \text{ e } -(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}.$$

Temos que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Então,

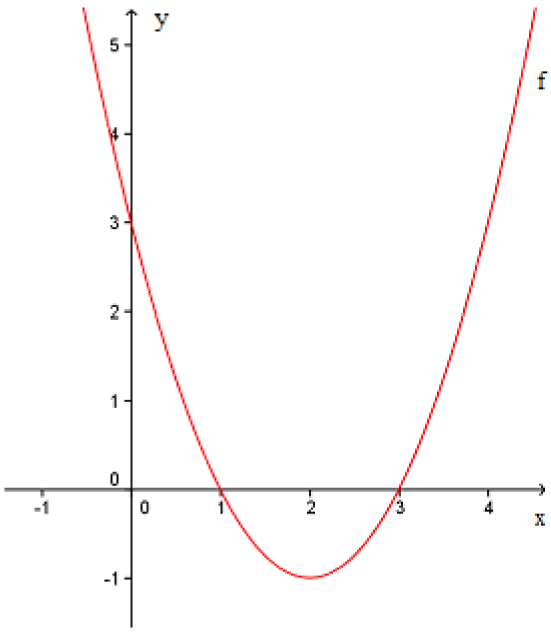
$$f(x) = a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2] \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = a \cdot (x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = a \cdot [x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)] \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola. E essa curva, que representa o gráfico de uma função quadrática, possui a concavidade ou voltada para cima ou voltada para baixo (RIBEIRO, 2012a). Outra característica relevante é a de que o gráfico de uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, c)$.

A parábola que representa o gráfico de uma função quadrática apresenta:

(a) concavidade voltada para cima, se $a > 0$, como na Figura 22:

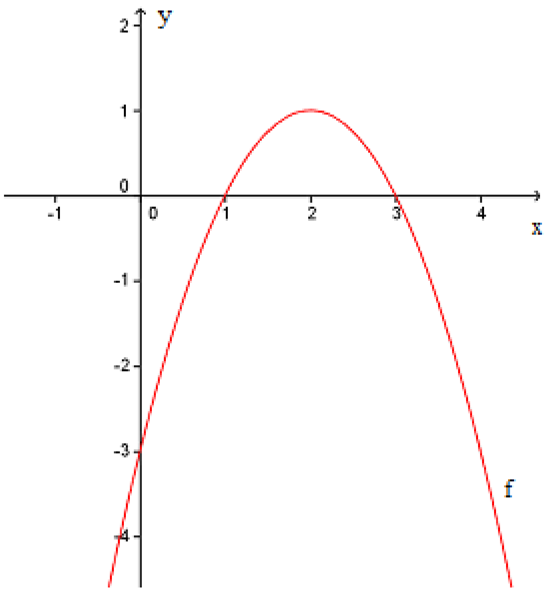
Figura 22 – O gráfico de uma função quadrática da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a > 0}$.



Fonte: O autor.

(b) concavidade voltada para baixo, se $a < 0$ (RIBEIRO, 2012a), como na Figura 23.

Figura 23 – O gráfico de uma função quadrática da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a < 0}$.



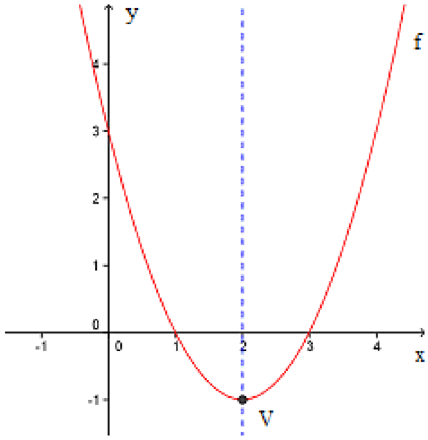
Fonte: O autor.

Toda parábola apresenta um eixo de simetria (LONGEN, 2004a). Como a parábola que representa o gráfico de uma função quadrática tem a concavidade ou voltada para cima ou para baixo, pode-se definir o eixo de simetria como a reta que passa pelo ponto extremo da parábola (que veremos a seguir) e é perpendicular ao eixo x.

O ponto extremo (de ordenada máxima ou de ordenada mínima) da parábola que representa o gráfico de uma função quadrática é chamado de vértice da parábola, e é simbolizado por $V = (x_v, y_v)$ (BIANCHINI; PACCOLA, 1995). Nesse ponto:

(a) f atinge seu valor mínimo, se $a > 0$.

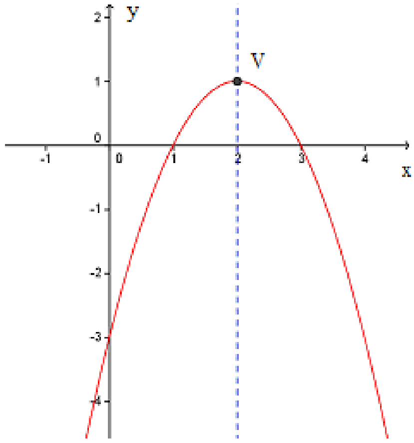
Figura 24 – O vértice V e o eixo de simetria da parábola que representa o gráfico de uma função quadrática da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a > 0}$.



Fonte: O autor.

(b) f atinge seu valor máximo se $a < 0$.

Figura 25 - O vértice V e o eixo de simetria da parábola que representa o gráfico de uma função quadrática da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a < 0}$.



Fonte: O autor.

A Figura 24 mostra o caso em que $a > 0$, ao passo que a Figura 25 mostra o caso em que $a < 0$.

Sejam x_1 e x_2 as raízes reais e distintas da equação $f(x) = 0$. Devido à simetria da parábola, temos que a abscissa do vértice encontra-se exatamente no ponto médio do segmento de reta de extremos x_1 e x_2. Portanto, a abscissa do vértice coincide com a média aritmética entre x_1 e x_2 (SILVA; FILHO, 2000), ou seja,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

No caso em que as raízes são reais e iguais, a abscissa do vértice coincide com o valor das raízes, ou seja, $x_v = x_1 = x_2$.

Podemos também expressar o valor de x_v em função apenas dos coeficientes da equação $f(x) = 0$. Como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, temos que:

$$x_v = \frac{-\frac{b}{a}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_v = -\frac{b}{2.a} \quad \text{(SILVA; FILHO, 2000).}$$

Como $y_v = f(x_v)$, pode-se determinar a ordenada do vértice fazendo $x = x_v$ na expressão que define a função.

O valor de y_v também pode ser dado em função apenas dos coeficientes da equação $f(x) = 0$. Fazendo $x = -\frac{b}{2a}$ na expressão que define a função, temos que:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \quad \Leftrightarrow$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \quad \Leftrightarrow$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \quad \Leftrightarrow$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Visto que $b^2 - 4ac = \Delta$, pode-se escrever também que:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{(SILVA; FILHO, 2000).}$$

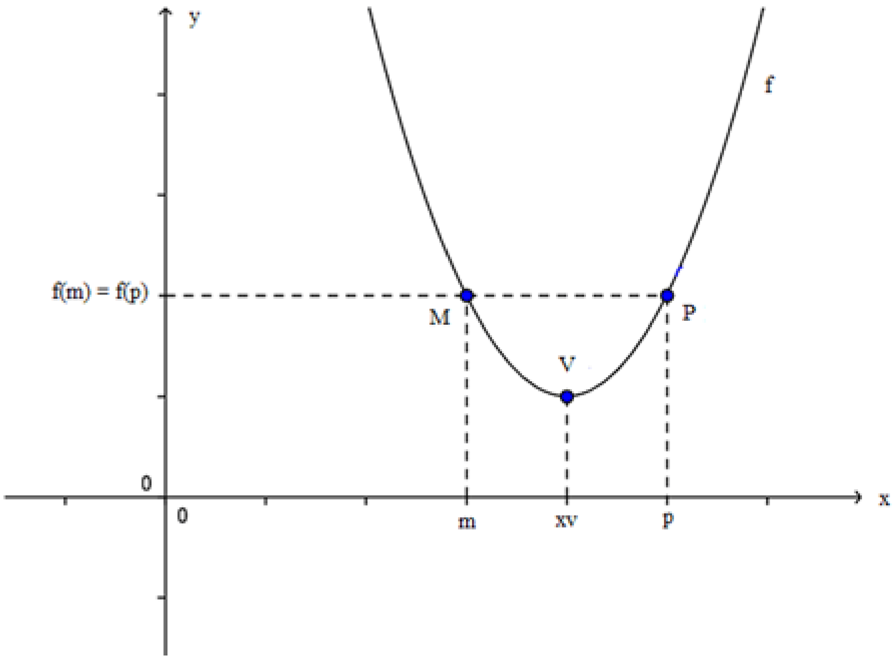
Mesmo no caso em que não existem valores reais de x tais que $f(x) = 0$, as coordenadas do vértice da parábola também podem ser calculadas utilizando-se as relações:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Demonstração:

Considere a Figura 26:

Figura 26 – A parábola de vértice V e que contém os pontos M e P, ambos de mesma ordenada.



Fonte: O autor.

Dados dois pontos da parábola, M = $(m, f(m))$ e P = $(p, f(p))$, simétricos em relação à reta vertical que passa pelo vértice (eixo de simetria da parábola), temos que:

$$p - x_v = x_v - m \quad \Leftrightarrow$$

$$p + m = 2 \cdot x_v \quad \Leftrightarrow$$

$$x_v = \frac{1}{2} \cdot (m + p) \tag{2.1}$$

Temos também que:

$$f(m) = f(p) \quad \Leftrightarrow$$
$$am^2 + bm + c = ap^2 + bp + c \quad \Leftrightarrow$$
$$am^2 - ap^2 = -bm + bp \quad \Leftrightarrow$$
$$a \cdot (m^2 - p^2) = -b \cdot (m - p) \quad \Leftrightarrow$$
$$a \cdot (m + p) \cdot (m - p) = -b \cdot (m - p).$$

Dividindo ambos os membros por $m - p$, visto que $m \neq p$, temos que:

$$a \cdot (m + p) = -b \quad \Leftrightarrow$$
$$m + p = -\frac{b}{a} \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1), temos que:

$$x_V = \frac{1}{2} . \left(-\frac{b}{a} \right) \quad \Leftrightarrow$$
$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{(LONGEN, 2004a).}$$

Portanto, mesmo que uma função quadrática f não possua zeros (valores reais de x tais que $f(x) = 0$), as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico podem ser dadas por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Seja $\Delta = b^2 - 4ac$ o radicando que aparece na fórmula resolutiva de equações do 2º grau. O número representado por Δ (lê-se delta) é chamado de discriminante da equação e será usado para discriminar quando a equação possui raízes reais (MUNIZ NETO, 2015). Há três possibilidades:

(a) $\Delta > 0$: a equação possui 2 raízes reais e distintas.
(b) $\Delta = 0$: a equação possui 2 raízes reais e iguais (ou uma raiz real dupla).
(c) $\Delta < 0$: a equação não possui raízes reais (RIBEIRO, 2012a).

Geometricamente, há três situações possíveis:

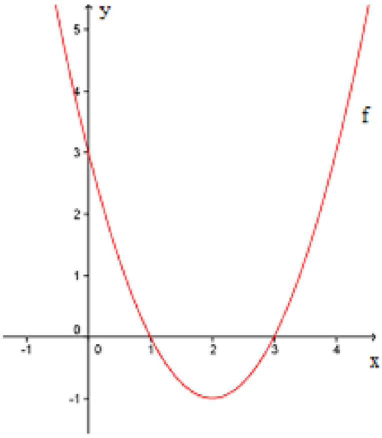
(a) $\Delta > 0$: o gráfico de f intersecta o eixo x em dois pontos distintos.

(b) $\Delta = 0$: o gráfico de f intersecta o eixo x em um único ponto (RIBEIRO, 2012a). Diz-se que o gráfico tangencia o eixo x (SILVA; FILHO, 2000).

(c) $\Delta < 0$: o gráfico de f não intersecta o eixo x (RIBEIRO, 2012a).

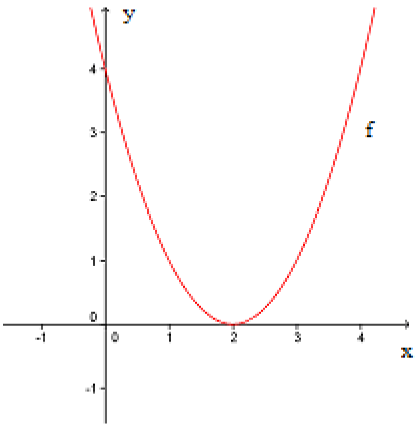
Os casos em que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$ são representados na Figura 27, Figura 28 e Figura 29, respectivamente.

Figura 27 - Caso em que $\Delta > 0$.



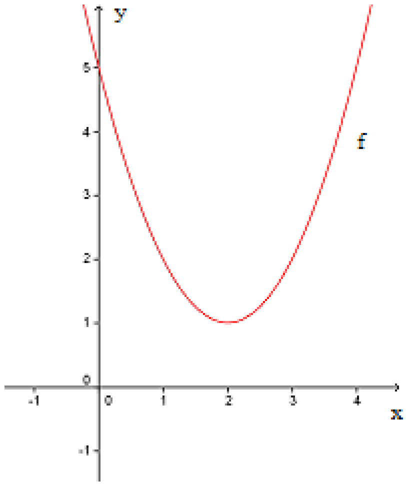
Fonte: O autor.

Figura 28- Caso em que $\Delta = 0$.



Fonte: O autor.

Figura 29- Caso em que $\Delta < 0$.



Fonte: O autor.

O conjunto imagem de uma função quadrática f é igual:

(a) ao conjunto $[y_v, \infty)$, se $a > 0$;

(b) ao conjunto $(-\infty, y_v]$, se $a < 0$ (SILVA; FILHO, 2000).

Para construirmos o esboço do gráfico de uma função quadrática atribuímos alguns valores a x, obtendo em correspondência os valores de y. Mas, alguns pontos tornam a construção mais interessante. São eles:

- os pontos cujas abscissas correspondem às raízes reais simples ou o ponto cuja abscissa corresponde à raiz real dupla, caso a equação $f(x) = 0$ admita raízes reais;
- o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo y;
- o vértice da parábola (PAIVA, 2005).
- um ponto qualquer da parábola, distinto dos já citados, e o seu simétrico em relação ao eixo de simetria da parábola.

Observação: Caso a função não possua zeros, o gráfico de f não intersectará o eixo x. Assim, o vértice, o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y e dois pontos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola já são suficientes para uma razoável construção do gráfico.

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Em primeiro lugar, vamos descobrir se a função f possui zeros. Considere a equação abaixo:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Como $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$, o discriminante dessa equação é:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 4.$$

Como o resultado do discriminante é positivo, a equação possui duas raízes reais e distintas. Utilizando a fórmula resolutiva, temos que:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = 4.$$

Assim, os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo x são A = (2, 0) e B = (4, 0).

O ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y pode ser obtido fazendo $x = 0$ na expressão que define a função. Então:

$$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 8.$$

Assim, obtemos o ponto C = (0, 8).

Vamos agora determinar as coordenadas do vértice da parábola. A abscissa do vértice é:

$$x_v = -\frac{(-6)}{2.1} \quad \Leftrightarrow \quad x_v = 3.$$

Como $y_v = f(x_v)$, para calcularmos a ordenada do vértice, basta fazermos $x = x_v$ na expressão que define a função:

$$y_V = f(x_V)$$

$$y_V = (x_V)^2 - 6.(x_V) + 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$y_V = 3^2 - 6.3 + 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$y_V = -1.$$

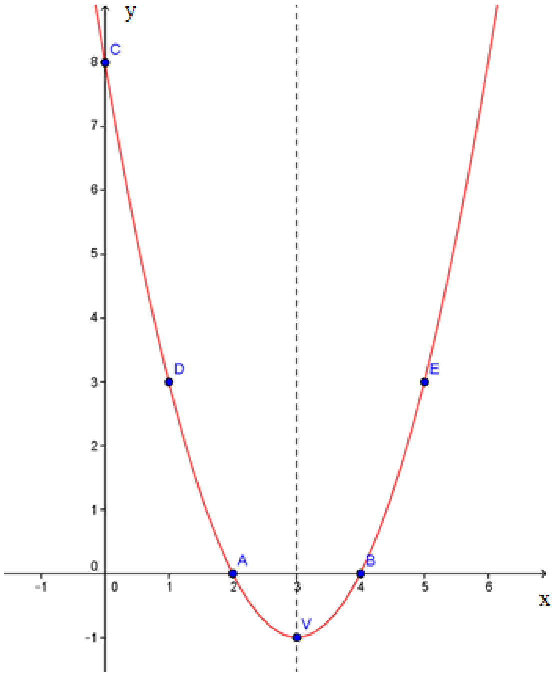
Assim, $V = (3, -1)$.

Vamos encontrar mais dois pontos. Fazendo $x = 1$, temos que:

$$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = 3.$$

Assim, obtemos o ponto D = (1, 3). Note que $1 = x_V - 2$. Como a função quadrática possui um eixo de simetria, então $f(x_V - 2) = f(x_V + 2)$, ou seja, $f(3 - 2) = f(3 + 2)$. Como $f(1) = 3$, concluímos que $f(5) = f(1) = 3$. Dessa forma, obtemos o ponto E = (5, 3). Localizando os pontos no plano cartesiano e ligando-os de forma que o esboço do gráfico obtido seja semelhante ao apresentado na Figura 22, obtemos o esboço do gráfico da função f. A Figura 30 ilustra o gráfico de f.

Figura 30- O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 8}$ e o eixo de simetria da parábola (linha tracejada).



Fonte: O autor.

Observe que, nesse exemplo, $Im(f) = [-1, \infty)$.

3.5.3 Funções Polinomiais

O objetivo deste tópico é explorar técnicas mais gerais para auxiliar na construção dos gráficos das demais funções polinomiais, além da função afim e da quadrática.

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais, com $n \in$ IN. A função p: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial se, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$ dizemos que a função polinomial p tem grau n (LIMA, 2013).

Pode-se perceber que a função afim e a função quadrática são casos particulares de funções polinomiais.

Na expressão $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, o número real a_n é chamado de coeficiente dominante e o número a_0 recebe o nome de termo independente de x (RIBEIRO, 2012c).

De acordo com Lima (2013), existe uma pequena diferença entre os conceitos de polinômio e de função polinomial. Mas, neste trabalho, não faremos essa distinção. Portanto, os resultados sobre polinômios podem ser adaptados para funções polinomiais.

Da igualdade:

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha) \cdot (x^{n-1} + \alpha \cdot x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2} \cdot x + \alpha^{n-1}),$$

em que x e α são números reais, podemos concluir que o polinômio $x^n - \alpha^n$ é divisível pelo polinômio $x - \alpha$. Então, temos que:

$$p(x) - p(\alpha) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 - (a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \cdots + a_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$p(x) - p(\alpha) = a_n \cdot (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} \cdot (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1 \cdot (x - \alpha).$$

Note que todas as parcelas do segundo membro da igualdade são divisíveis por $x - \alpha$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha) \cdot q(x),$$

em que q é uma função polinomial. Como p tem grau n, a função q tem grau $n - 1$. Se α é um zero de p, ou seja, se $p(\alpha) = 0$, então:

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A recíproca é verdadeira. E isso nos leva a afirmar que α é um zero de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

De forma geral, dada uma função polinomial p de grau n, os números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são zeros de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_k) \cdot q(x),$$

em que q é uma função polinomial de grau $n - k$. Isso evidencia o fato de que uma função polinomial de grau n não pode ter mais do que n zeros (LIMA, 2013).

Já uma função polinomial identicamente nula é do tipo:

$$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \ldots + 0 \cdot x + 0,$$

em que n é um número natural. Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $p(x) = 0$. Para a função polinomial identicamente nula não se define grau, já que não há coeficiente diferente de zero (LIMA, 2013).

Considere, agora, que p e q são funções polinomiais de grau n dadas por:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

e

$$q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0.$$

Vamos supor que p e q sejam funções iguais, isto é, que $p(x) = q(x)$ para todo x real. Ou, de forma equivalente, que $p(x) - q(x) = 0$ para todo x real. Temos que:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 - (b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0) = 0,$$

ou seja,

$$(a_n - b_n) \cdot x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1) \cdot x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Então,

$$a_n - b_n = 0,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0,$$

ou seja,

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Desta forma, duas funções polinomiais p e q são iguais se, e somente se, possuem os mesmos coeficientes (LIMA, 2013).

Para construirmos o gráfico de uma função polinomial de grau $n > 2$ atribuímos valores à variável independente x (LONGEN, 2004b), obtendo em correspondência os valores de y. Há pontos que facilitam a construção do gráfico, conforme é exemplificado abaixo.

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função real de variável real denotada por $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Solução:

Em primeiro lugar vamos determinar, caso existam, os zeros de p, o que equivale a determinar as raízes reais da equação $p(x) = 0$. Note que, como o grau da função polinomial p

é ímpar, então a equação $p(x) = 0$ admite pelo menos uma raiz real (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2002). Se uma das raízes dessa equação for um número racional, uma das estratégias para determiná-la é utilizar o Teorema das Raízes Racionais, que será apresentado mais adiante. Mas, observando que a soma dos coeficientes de p é igual a zero, podemos concluir que 1 é uma das raízes da equação $p(x) = 0$. Então, podemos escrever que:

$$p(x) = (x - 1) \cdot Q(x).$$

Como o grau de p é igual a 3, concluímos que o grau de Q é igual a 2. Assim, temos que:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Então,

$$p(x) = (x - 1) \cdot (ax^2 + bx + c) \quad \Leftrightarrow$$

$$p(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Da igualdade de funções polinomiais, encontramos $a = 1$, $b = 4$ e $c = 3$. Logo,

$$Q(x) = x^2 + 4x + 3.$$

As outras raízes da equação $p(x) = 0$ são as raízes da equação $Q(x) = 0$. Utilizando a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, descobrimos que as raízes da equação

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

são $x_1 = -1$ e $x_2 = -3$.

Como os zeros de p são -3, -1 e 1, o gráfico de p vai intersectar o eixo x nos pontos A = (– 3, 0), B = (– 1, 0) e C = (1, 0).

Para termos uma ideia do comportamento gráfico de p nos intervalos $(-\infty, -3)$, (– 3, – 1), (– 1, 1) e $(1, \infty)$, vamos encontrar alguns pontos auxiliares. Primeiramente vamos atribuir a x valores que estão entre as raízes. Para facilitar, vamos escolher valores inteiros.

Para $x = -2$, temos que:

$$p(-2) = (-2)^3 + 3.(-2)^2 - (-2) - 3 \quad \Leftrightarrow \quad p(-2) = 3.$$

Para $x = 0$, temos que:

$$p(0) = 0^3 + 3.0^2 - 0 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad p(0) = -3.$$

Assim, obtemos os pontos D = (– 2, 3) e E = (0, – 3). Agora vamos atribuir a x um valor inteiro menor do que a menor das três raízes e depois um valor inteiro maior do que a maior das três raízes.

Para $x = -4$, temos que:

$$p(-4) = (-4)^3 + 3.(-4)^2 - (-4) - 3 \quad \Leftrightarrow \quad p(-4) = -15$$

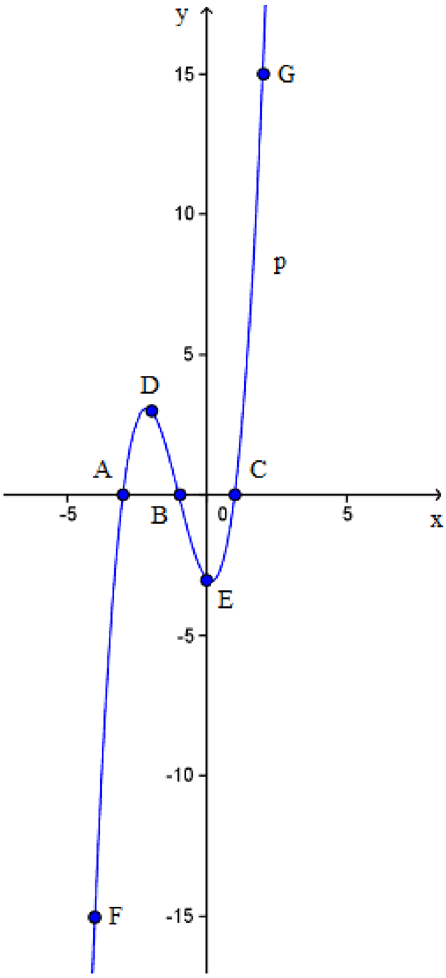
Para $x = 2$, temos que:

$$p(2) = 2^3 + 3.2^2 - 2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad p(2) = 15.$$

Assim, obtemos os pontos F = (– 4, – 15) e G = (2, 15). Considerando que toda função polinomial é contínua (MUNIZ NETO, 2015), podemos traçar o gráfico de p.

Localizando os pontos no plano cartesiano e ligando-os de forma que o esboço obtido seja semelhante ao gráfico apresentado na Figura 20, obtemos o esboço do gráfico de p. A Figura 31 ilustra o gráfico de p.

Figura 31- O gráfico da função polinomial $\boldsymbol{p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3}$.



Fonte: O autor.

Observação: Uma outra maneira de determinar os zeros da função $p(\mathrm{x}) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ é utilizar a fatoração de expressões algébricas. Fatorando a expressão que define p por agrupamento, temos que:

$$p(x) = x^2 \cdot (x + 3) - 1 \cdot (x + 3) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = (x + 3) \cdot (x^2 - 1).$$

Fatorando agora a diferença de dois quadrados, chegamos a:

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1).$$

3.5.4 Funções Modulares

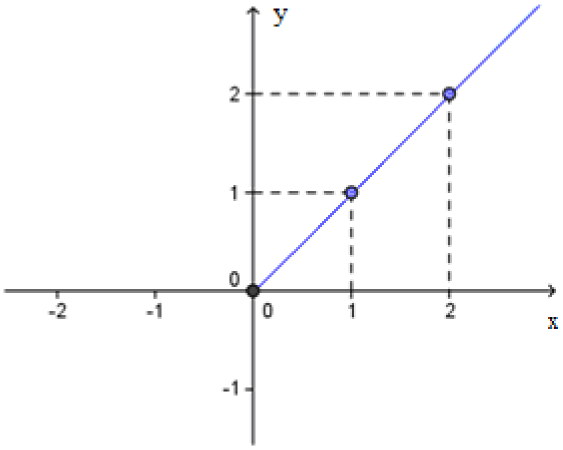
Chama-se função modular a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Com base na definição de módulo de um número real, a função f pode ser definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{(RIBEIRO, 2012a).}$$

Para construirmos o gráfico de f, atribuímos valores a x e obtemos os valores correspondentes para y. Como a função f é definida por duas sentenças, vamos construir separadamente o gráfico relativo a cada sentença. A união dessas duas partes será o gráfico de f.

I. Se $x \geq 0$, então $f(x) = x$ (Figura 32).

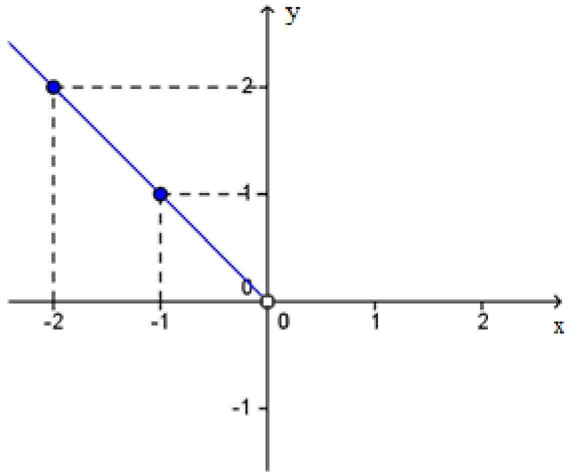
Figura 32 – O gráfico da função $\boldsymbol{f}(x) = x$, para $x \geq 0$.



Fonte: O autor.

II. Se $x < 0$, então $f(x) = -x$ (Figura 33).

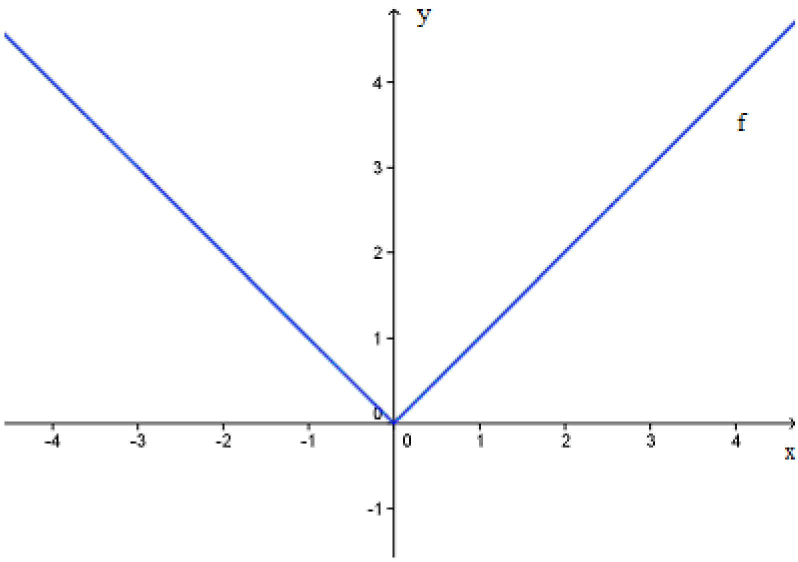
Figura 33 – O gráfico da função $\boldsymbol{f}(x) = -x$, para $x < 0$.



Fonte: O autor.

Representando os gráficos relativos a cada sentença em um mesmo plano cartesiano, obtemos o gráfico da função $f(x) = |\ x\ |$ (SILVA; FILHO, 2000), que está representado na Figura 34.

Figura 34 – O gráfico da função $\boldsymbol{f}(x) = |\ x\ |$.



Fonte: O autor.

Observação: Seja j: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Para construirmos o gráfico da função $|\ j\ |$, podemos proceder da seguinte forma:

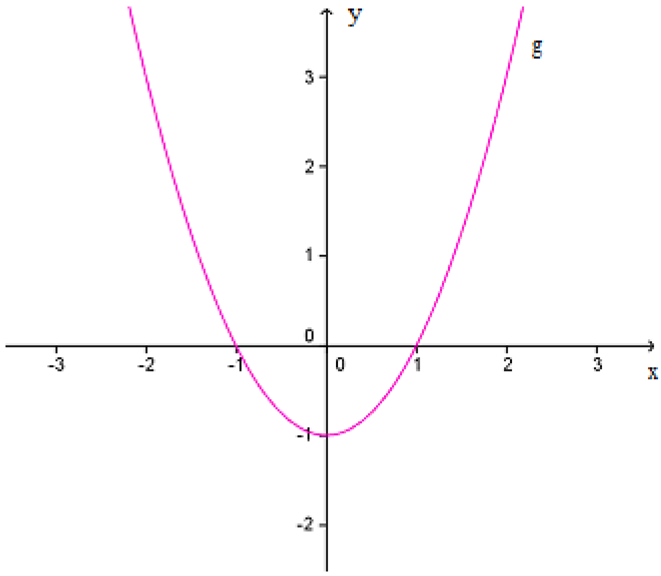
I. Construímos primeiramente o gráfico da função j;

II. Rebatemos os pontos de ordenada negativa simetricamente em relação ao eixo x (PAIVA, 2005).

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\ x^2 - 1\ | + 2$.

Para obtermos o esboço do gráfico de f construímos, em primeiro lugar, o esboço do gráfico da função $g(x) = x^2 - 1$. O gráfico de g é ilustrado na Figura 35.

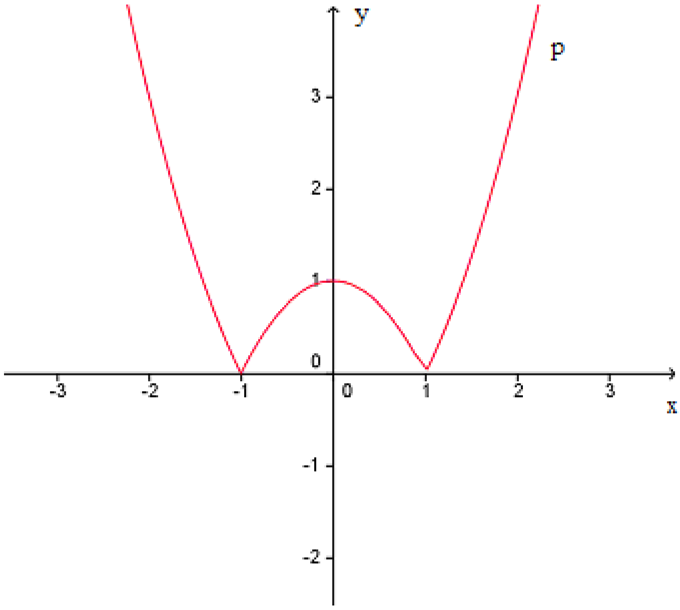
Figura 35 – O gráfico da função $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 1}$.



Fonte: O autor.

Rebatendo os pontos de ordenada negativa simetricamente em relação ao eixo x, obtemos o esboço do gráfico da função $p(x) = |\ x^2 - 1\ |$. O gráfico de p é mostrado na Figura 36.

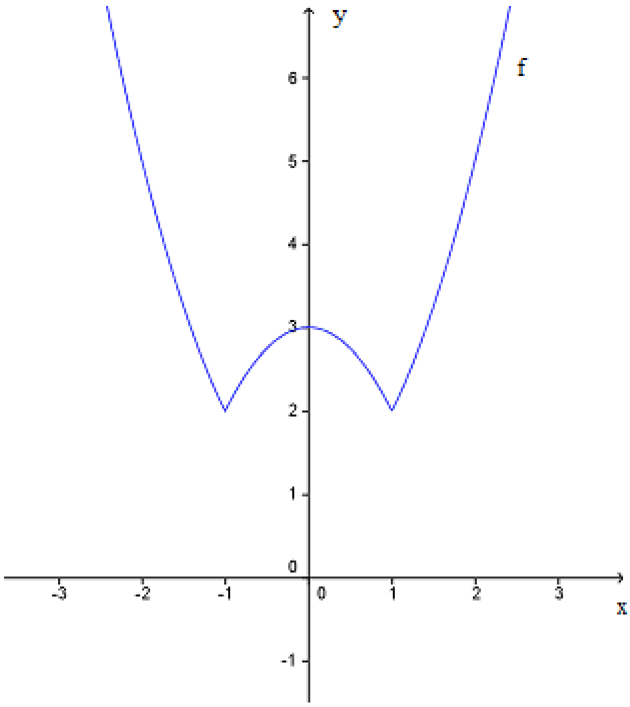
Figura 36 – O gráfico da função $\boldsymbol{p(x) = |\, x^2 - 1\,|}$.



Fonte: O autor.

Deslocando duas unidades para cima cada ponto do esboço do gráfico de p, obtemos o esboço do gráfico da função $f(x) = |\, x^2 - 1\,| + 2$. A Figura 37 ilustra o gráfico de f.

Figura 37 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = |\, x^2 - 1\,| + 2}$.



Fonte: O autor.

3.5.5 Funções Exponenciais

Para que possamos definir a função exponencial, precisamos antes da definição de potência.

Se a é um número real e n é um número natural maior do que 1, define-se que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ fatores}.$$

Na expressão a^n, o número a denomina-se base, o número n denomina-se expoente e a^n recebe o nome de potência.

De modo que as propriedades das potências, que veremos mais adiante, sejam válidas para $n = 0$ e $n = 1$, define-se que $a^1 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, e $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.

Caso o expoente n seja um número inteiro positivo, define-se que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Considerando que a é um número real positivo e que m/n é um número racional, com m e n positivos, define-se também que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Precisamos, agora, atribuir um significado às potências de expoente irracional. Considere, por exemplo, a potência $3^{\sqrt{2}}$. Para dar significado a tal número, consideramos aproximações racionais (por falta ou por excesso) de $\sqrt{2}$. Se adotarmos para $\sqrt{2}$ a aproximação 1,4, o número $3^{\sqrt{2}}$ se aproxima de $3^{1,4}$, ou seja, de 4,66. Já se tomarmos para $\sqrt{2}$ a aproximação 1,41, o número $3^{\sqrt{2}}$ se aproxima de $3^{1,41}$, ou seja, de 4,71. Portanto, à medida que os expoentes se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$ (por excesso, nesse caso), os respectivos valores das potências se aproximam cada vez mais de $3^{\sqrt{2}}$.

De modo geral e considerando expoentes reais, são válidas as seguintes propriedades:

I. $a^m . a^n = a^{m+n}$.

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

IV. $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$.

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Podemos, agora, definir a função exponencial.

Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotada por $f(x) = a^x$ é chamada de função exponencial de base a (LIMA, 2013). Uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$ possui as seguintes propriedades, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

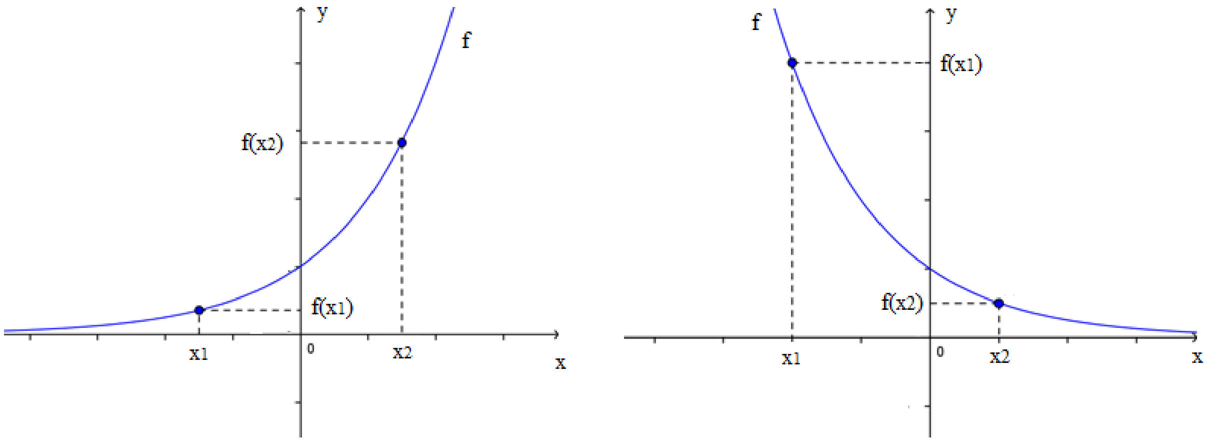
II. $f(1) = a$.

III. Se:

- $a > 1$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$;
- $0 < a < 1$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.
-

A ilustração dessa propriedade pode ser vista na Figura 38.

Figura 38 – O gráfico de uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, no caso em que $\boldsymbol{a > 1}$ (à esquerda) e no caso em que $\boldsymbol{0 < a < 1}$ (à direita).



Fonte: O autor.

Da propriedade III, temos que a função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$ (LIMA, 2013).

Note que o número a^x é sempre positivo. Dessa forma, o gráfico da função $f(x) = a^x$ pode se aproximar do eixo x tanto quanto se queira, porém nunca irá tocá-lo.

Demonstração da propriedade I:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função da forma $f(x) = a^x$. Temos que $f(x_1) = a^{x_1}$ e que $f(x_2) = a^{x_2}$. Fazendo $x = x_1 + x_2$ na expressão de f, temos que:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Observação: Se uma função f não é identicamente nula e possui a propriedade I, isto é, se $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, então $f(x) \neq 0$. Note que, caso existisse um real x_0 tal que $f(x_0) = 0$, então, para todo x real, teríamos:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = 0 \cdot f(x - x_0) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = 0.$$

Ou seja, f seria identicamente nula. E mais, se f não é identicamente nula e possui a propriedade I, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

Assim, $f(x) > 0$ para todo x real (LIMA, 2013).

Para construirmos o gráfico de uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$, atribuímos valores a x, obtendo em correspondência os valores de y. Aqui, optamos pela utilização dos seguintes pontos:

- o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y;
- um ponto de abscissa positiva;
- um ponto de abscissa negativa.

Observação: Independentemente do valor da base a, $a > 0$ e $a \neq 1$, o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0, 1).

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4^x$.

Solução:

Para obter o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y, basta fazer $x = 0$ na lei de formação da função:

$$f(0) = 4^0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 1.$$

Assim, obtemos o ponto A = (0, 1). Vamos, agora, obter um ponto de abscissa positiva.

Fazendo $x = 1$, temos que:

$$f(1) = 4^1 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = 4.$$

Assim, obtemos o ponto B = (1, 4).

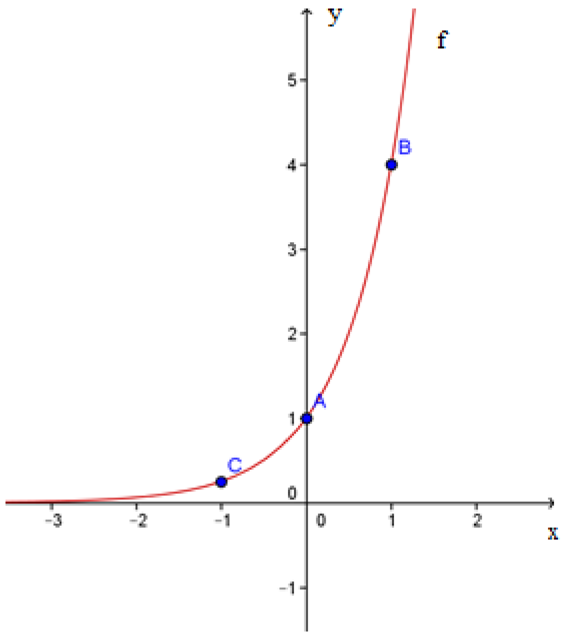
Para obtermos um ponto de abscissa negativa, podemos atribuir a x o valor – 1. Então:

$$f(-1) = 4^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad f(-1) = \frac{1}{4}.$$

Assim, obtemos o ponto C = (– 1, 1/4).

Localizando os pontos no plano cartesiano e ligando-os de modo a obter um esboço semelhante ao gráfico mostrado na parte esquerda da Figura 38, obtemos o esboço do gráfico da função f. A Figura 39 ilustra o gráfico da função f.

Figura 39 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = 4^x}$.



Fonte: O autor.

Note que o conjunto imagem de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é o conjunto dos números reais positivos, isto é, $Im(f) = (0, \infty)$.

3.5.6 Funções Logarítmicas

Inicialmente, vamos definir o que vem a ser o logaritmo de um número real positivo.

O logaritmo de um número positivo b, na base a, $a > 0$ e $a \neq 1$, é o número x ao qual se deve elevar a para se obter b. Em símbolos,

$$log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b.$$

Na igualdade $log_a b = x$, b é o logaritmando, a é a base e x é o logaritmo.

Exemplo: Sabemos que, se $4^x = 16$, então x = 2. De fato, se $f(x) = 4^x$, então:

$$f(x) = 16 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 16 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 4^2.$$

Da injetividade da função $f(x) = a^x$, podemos concluir que $x = 2$. Dizemos que 2 é o logaritmo de 16 na base 4, e indicamos isso por $2 = log_4 16$.

Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função $f\colon \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $f(x) = log_a x$ é chamada de função logarítmica de base a e é a inversa da função exponencial $g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ denotada por $g(x) = a^x$. Como $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$, tem-se $log_a 1 = 0$. Vale destacar também que apenas os números positivos possuem logaritmo real, pois a função que associa a cada x o valor a^x assume somente valores positivos (LIMA, 2013).

Uma função da forma $f(x) = log_a x$ possui as seguintes propriedades:

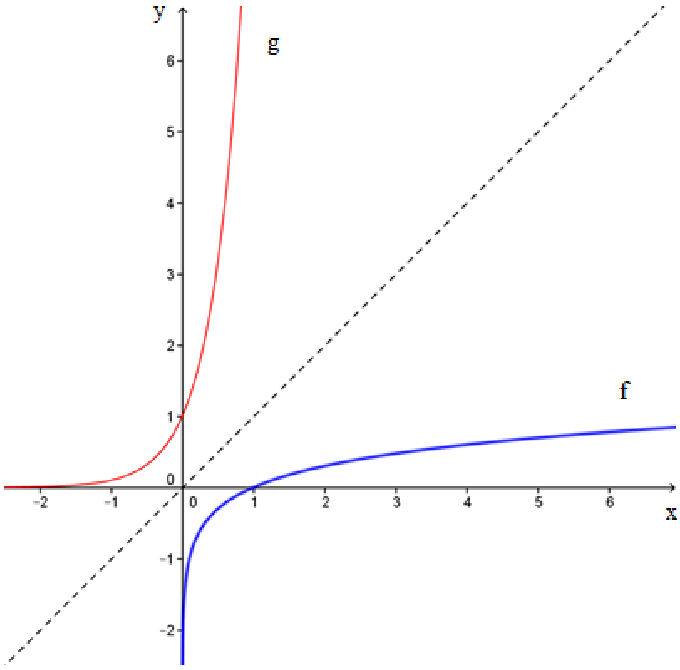
I. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

II. É:

(a) crescente quando $a > 1$. O gráfico de uma função logarítmica crescente pode ser visto na Figura 40.

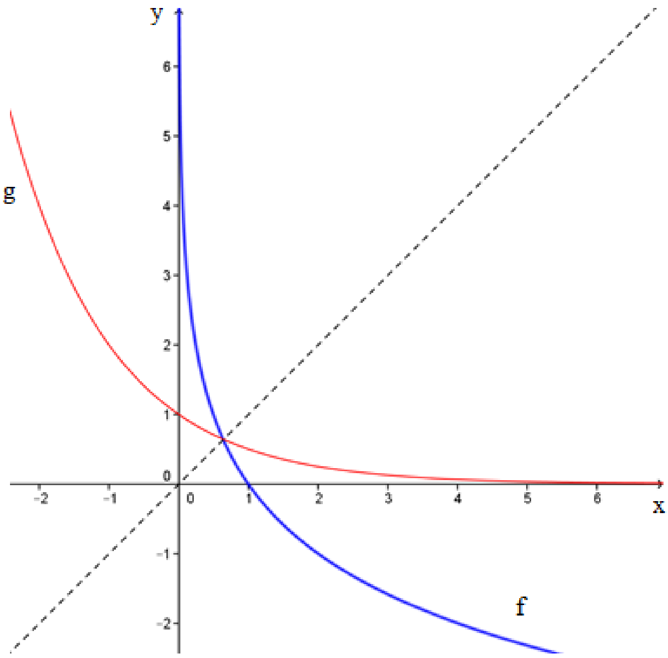
(b) decrescente quando $0 < a < 1$. O gráfico de uma função logarítmica decrescente pode ser visto na Figura 41.

Figura 40 – O gráfico de uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = log_a x}$ com $\boldsymbol{a > 1}$**,** e o gráfico da sua inversa, $\boldsymbol{g(x) = a^x}$.



Fonte: O autor.

Figura 41 – O gráfico de uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = log_a x}$, com $\boldsymbol{0 < a < 1}$**,** e o gráfico de sua inversa $\boldsymbol{g(x) = a^x}$.



Fonte: O autor.

Tanto na Figura 40 quanto na Figura 41 temos a impressão de que o gráfico da função f, construída utilizando o GeoGebra, "encosta" no eixo y. Mas na verdade isso não acontece.

À medida que tomamos valores de x cada vez mais próximos de zero, o gráfico da função $f(x) = log_a x$ se aproxima cada vez mais do eixo y sem, no entanto, tocá-lo.

Demonstração da propriedade I:

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ e $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função denotada por $f(x) = log_a x$. Fazendo $x = x_1$ na expressão que define a função, temos que:

$$f(x_1) = log_a x_1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x_1)} = x_1 \ .$$

De forma análoga, temos que:

$$f(x_2) = log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x_2)} = x_2 \ .$$

Por fim, fazendo $x = x_1 \cdot x_2$, temos que:

$$f(x_1 \cdot x_2) = log_a (x_1 . x_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = log_a [\, a^{f(x_1)} \cdot a^{f(x_2)}] \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = log_a a^{f(x_1)+f(x_2)} \quad \Leftrightarrow$$

$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2002).

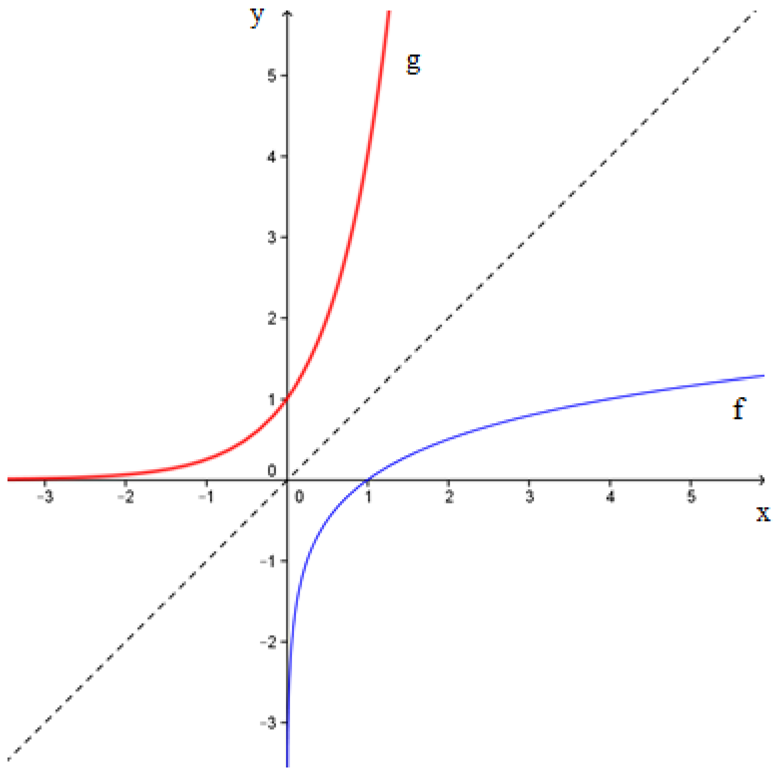
Como a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ denotada por $f(x) = log_a x$ é a inversa da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotada por $g(x) = a^x$ (BIANCHINI; PACCOLA, 1995), podemos construir o esboço do gráfico de f utilizando a simetria de funções inversas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Dessa forma, inicialmente construímos o esboço do gráfico da função g e depois rebatemos os pontos do gráfico de g simetricamente em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, obtendo o esboço do gráfico de f.

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ denotada por $f(x) = log_4 x$.

Solução:

A função $f(x) = log_4 x$ é a inversa da função $g(x) = 4^x$, cujo gráfico pode ser visto na Figura 39. Utilizando a simetria dos gráficos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, obtemos um esboço do gráfico da função f. Na Figura 42 é apresentado o gráfico de f.

Figura 42 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = log_4 x}$ e o gráfico de sua inversa, $\boldsymbol{g(x) = 4^x}$.



Fonte: O autor.

Note que a imagem de uma função $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é o conjunto dos números reais. E independentemente do valor da base a, o gráfico de f intersecta o eixo x no ponto (1, 0).

3.5.7 Funções Trigonométricas

Apesar da existência de várias funções trigonométricas, neste trabalho vamos tratar apenas das funções seno e cosseno, pois são as que aparecem com mais frequência nas provas de vestibulares.

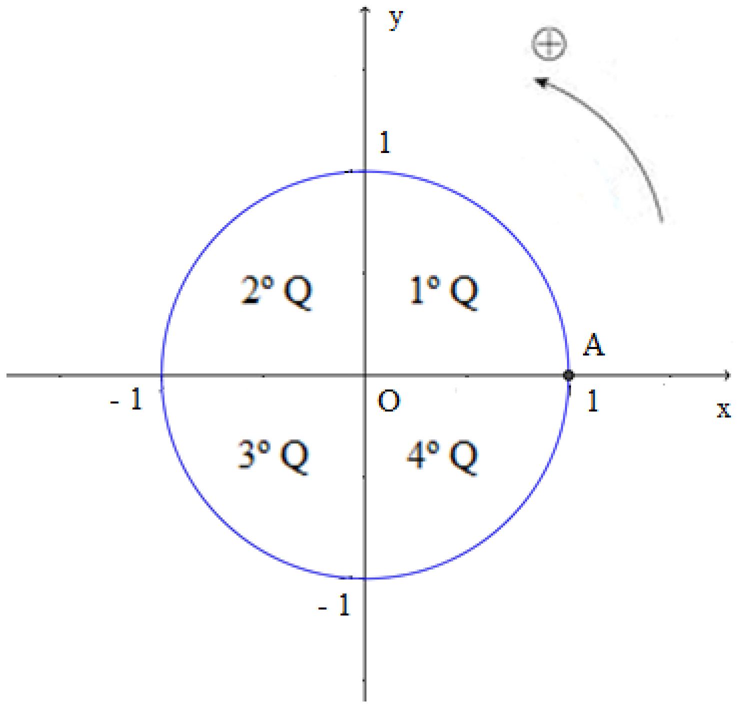
Antes de definirmos as funções seno e cosseno, vamos à definição de Circunferência Trigonométrica.

Considere uma circunferência de raio igual a 1, cujo centro coincide com o ponto O = (0, 0), que é a origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Considere também que:

- o ponto A = (1, 0) é a origem de todos os arcos a serem marcados na circunferência.
- o sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é o horário.
- os eixos do sistema de coordenadas dividem a circunferência em 4 partes, chamadas de quadrantes (1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante e 4º quadrante).

Uma circunferência que possui essas características é chamada de circunferência trigonométrica (Figura 43).

Figura 43 – A Circunferência Trigonométrica.

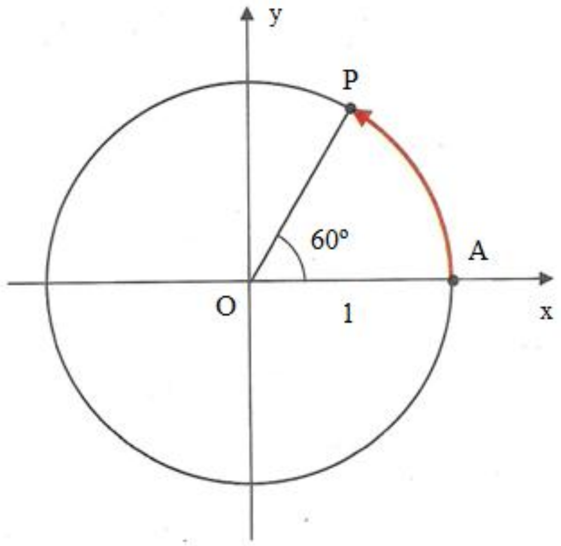


Fonte: O autor.

As unidades de medida de arcos mais utilizadas são o grau (º) e o radiano (rad).

O arco de medida 1º é o arco cuja medida corresponde a 1/360 da medida da circunferência. Na Figura 44, podemos observar um arco cuja medida é igual a 60º.

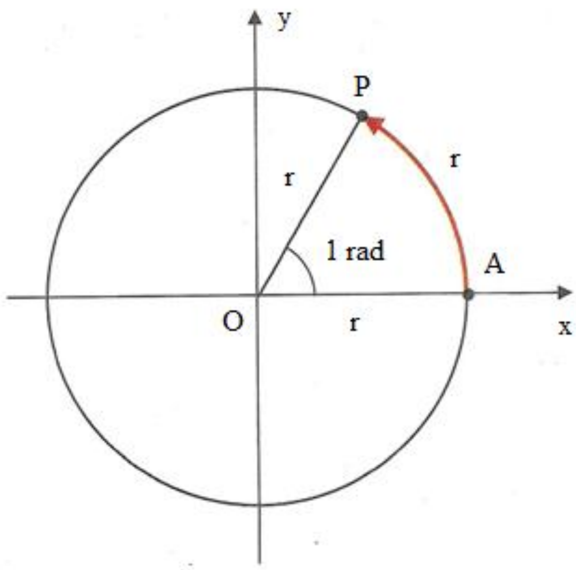
Figura 44 – Arco cuja medida é igual a 60º.



Fonte: O autor.

Já o arco de medida 1 rad é o arco cuja medida de seu comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém. Na Figura 45, podemos observar um arco cuja medida é igual a 1 rad.

Figura 45 – Arco cuja medida é igual a 1 radiano.



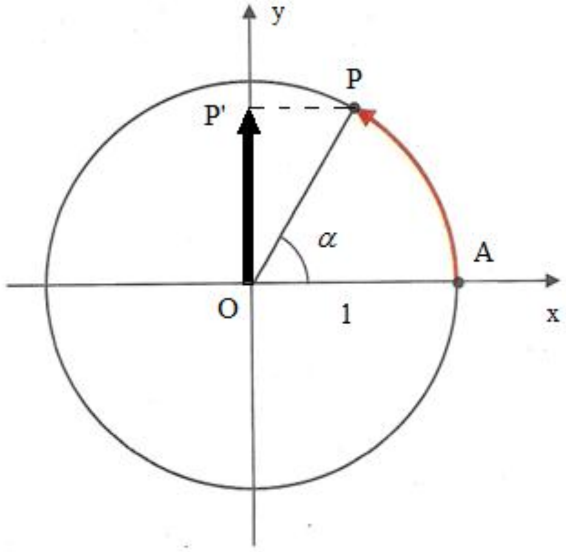
Fonte: O autor.

Observação: A medida do arco de uma volta é igual a π radianos ou a 180º. Com base nessa equivalência, conclui-se que 1 rad $\cong$ 57º.

Seno de um Arco

Considere um ponto P marcado sobre a circunferência trigonométrica, que é extremidade de um arco $\widehat{AP}$ cuja medida é igual a α radianos. Projetando-se o ponto P no eixo vertical, obtemos o ponto P'. A medida algébrica do segmento OP', considerando a orientação do eixo vertical, é chamada de seno de α (IEZZI, G. et al, 2016). Note que o valor do seno do arco cuja medida é α coincide com a ordenada do ponto P (Figura 46).

Figura 46 – O segmento OP' representa o seno do arco cuja medida é $\boldsymbol{\alpha}$.

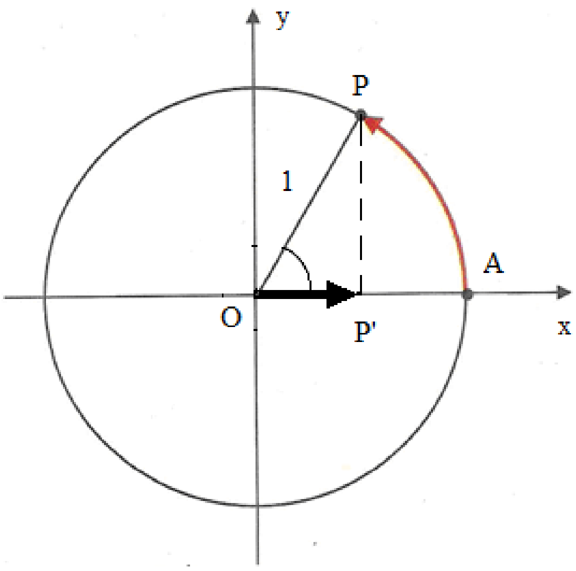


Fonte: O autor.

Cosseno de um Arco

Considere agora um ponto P marcado sobre a circunferência trigonométrica, que é extremidade de um arco $\widehat{AP}$ cuja medida é igual a α radianos. Projetando-se o ponto P no eixo horizontal, obtemos o ponto P'. A medida algébrica do segmento OP', considerando a orientação do eixo, é chamada de cosseno de α (IEZZI, G. et al, 2016). Note que a medida do cosseno do arco cuja medida é α coincide com a abscissa do ponto P (Figura 47).

Figura 47 – O segmento OP’ representa o cosseno do arco cuja medida é $\boldsymbol{\alpha}$.



Fonte: O autor.

Na Figura 47, quando $0 < \alpha < \pi/2$, o triângulo OPP’ é um triângulo retângulo. Nesse triângulo, os segmentos OP, OP’ e PP’ são, respectivamente, a hipotenusa, o cateto adjacente a α e o cateto oposto a α. Usando semelhança de triângulos, podemos concluir que, em todo triângulo retângulo que possui um ângulo agudo α, valem as relações:

$$sen\ \alpha = \frac{comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{comprimento\ da\ hipotenusa}$$

e

$$\cos\ \alpha = \frac{comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{comprimento\ da\ hipotenusa}.$$

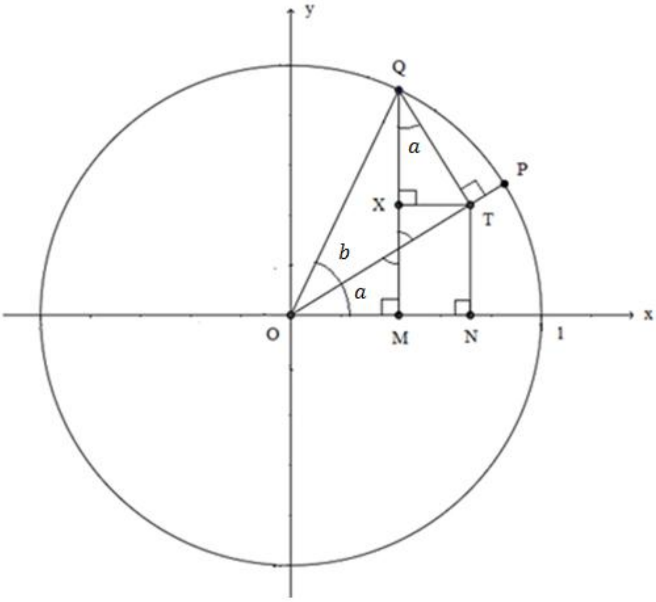
Se a e b são as medidas de dois arcos distintos da circunferência trigonométrica, então:

$$sen(a + b) = sena \cdot cosb + senb \cdot cosa.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração no caso em que $0 < a + b < \pi/2$. Considere a circunferência trigonométrica apresentada na Figura 48.

Figura 48 – Na circunferência trigonométrica, o triângulo retângulo OQM, que possui um ângulo agudo de medida $\boldsymbol{a+b}$.



Fonte: O autor.

No triângulo OQT, temos que:

$$sen\ b = \frac{\overline{QT}}{\overline{OQ}}.$$

Como $\overline{OQ}$ = 1, então:

$$sen\ b = \frac{\overline{QT}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{QT} = sen\ b.$$

Ainda no triângulo OQT, temos que:

$$\cos b = \frac{\overline{OT}}{\overline{OQ}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OT} = \cos b.$$

No triângulo OTN, temos que:

$$sen\ a = \frac{\overline{NT}}{\overline{OT}}.$$

Como $\overline{OT} = \cos b$, então:

$$sen\ a = \frac{\overline{NT}}{\cos b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{NT} = sena \cdot cosb.$$

No triângulo QXT, temos que:

$$\cos a = \frac{\overline{QX}}{\overline{QT}}.$$

Como $\overline{QT} = sen\ b$, então:

$$\cos a = \frac{\overline{QX}}{sen\, b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{QX} = senb \cdot cosa.$$

No triângulo OMQ, temos que:

$$sen(a+b) = \frac{\overline{MQ}}{\overline{OQ}} \quad \Leftrightarrow$$

$$sen(a+b) = \frac{\overline{MX} + \overline{QX}}{1} \quad \Leftrightarrow$$

$$sen(a+b) = \overline{NT} + \overline{QX} \quad \Leftrightarrow$$

$$sen(a+b) = sena \cdot cosb + senb \cdot cosa$$ (PAIVA, 2005).

Se a e b são as medidas de dois arcos distintos da circunferência trigonométrica, então:

$$\cos(a+b) = cosa \cdot cosb - sena \cdot senb.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração no caso em que $0 < a + b < \pi/2$. Considere novamente a circunferência trigonométrica representada na Figura 48. No triângulo OQT, temos que:

$$sen\ b = \frac{\overline{QT}}{\overline{OQ}}.$$

Como $\overline{OQ}$ = 1, então:

$$sen\ b = \frac{\overline{QT}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{QT} = sen\ b.$$

Ainda no triângulo OQT, temos que:

$$\cos b = \frac{\overline{OT}}{\overline{OQ}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OT} = \cos b.$$

No triângulo OTN, temos que:

$$sen\ a = \frac{\overline{NT}}{\overline{OT}}.$$

Ainda no triângulo OTN, temos que:

$$\cos a = \frac{\overline{ON}}{\overline{OT}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{ON} = cosa \cdot cosb.$$

Ainda no triângulo QXT, temos que:

$$sen\ a = \frac{\overline{TX}}{\overline{QT}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{TX} = sena \cdot senb.$$

No triângulo OMQ, temos que:

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OQ}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{ON} - \overline{MN}}{1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(a+b) = \overline{ON} - \overline{TX} \quad \Leftrightarrow$$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b$ (PAIVA, 2005).

3.5.7.1 Função seno

Seja x, em radianos, a medida de um arco. A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $f(x)$ = sen x é chamada de função seno (LONGEN, 2004a). O valor de $f(\alpha)$ corresponde à segunda coordenada do ponto P, representado na Figura 46.

A função seno possui algumas propriedades importantes:

I. é periódica e seu período é igual a 2π .

II. seu conjunto imagem é [– 1; 1].

III. é ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$ (IEZZI, 2016).

Demonstração da propriedade I:

$$f(x+p) = sen(x+p) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x+p) = sen\ x \cdot \cos p + sen\ p \cdot \cos x.$$

Para que a igualdade $f(x+p) = f(x)$ se verifique, devemos ter simultaneamente $\cos p = 1$ e $sen\, p = 0$. O menor valor real positivo de p que torna a igualdade verdadeira é o 2π. Fazendo $p = 2\pi$, temos que:

$$f(x+2\pi) = sen\ x \cdot \cos\ (2\pi) + sen\ (2\pi) \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x+2\pi) = sen\ x \cdot 1 + 0 \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow$$

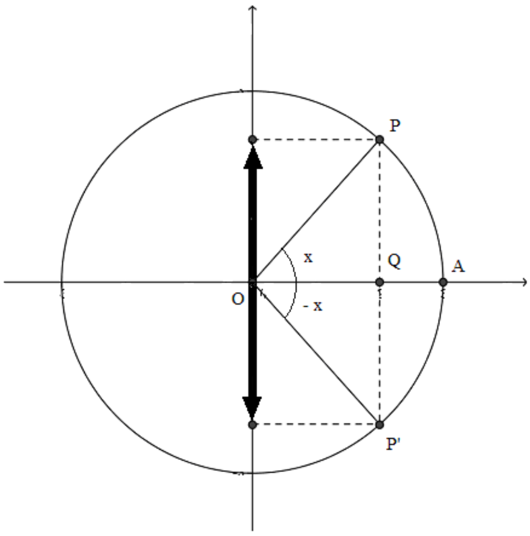
$$f(x + 2\pi) = sen\, x \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Demonstração da propriedade III:

Para essa demonstração usaremos um dos casos de congruência de triângulos, conhecido na literatura como o caso LAL (lado-ângulo-lado). Segundo Muniz Neto (2013), "se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes".

Na Figura 49, o arco $\widehat{AP}$, medido no sentido positivo (anti-horário), possui medida x. Pelo caso LAL (lado-ângulo-lado), que é um dos casos de congruência de triângulos, podemos concluir que os triângulos retângulos OPQ e OP'Q são congruentes, com $\overline{PQ}$ = $\overline{P'Q}$. Como PQ e $P'Q$ são paralelos ao eixo vertical, temos que $\overline{PQ}$ = sen x e $\overline{P'Q}$ = sen (– x). Considerando a orientação do eixo y, concluímos que sen (– x) = – sen x.

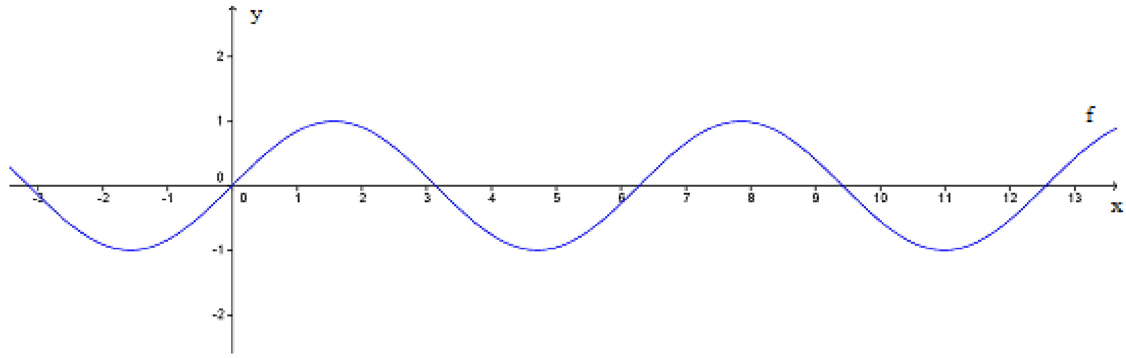
Figura 49 – Representação de $\boldsymbol{senx}$ e $\boldsymbol{sen(-x)}$ na circunferência trigonométrica.



Fonte: O autor.

O gráfico de uma função da forma $f(x)$ = $sen\, x$ é uma curva denominada senóide (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2002), e pode ser vista na Figura 50.

Figura 50 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$.



Fonte: O autor.

Para construirmos o esboço do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen\ x$ atribuímos valores a x, obtendo em correspondência os valores de y. Como a função seno é periódica e seu período é igual a 2π, podemos construir inicialmente apenas a representação gráfica de um período da função e depois usar a ideia de que essa parte se repete indefinidamente. Vamos atribuir alguns valores para x, que pertençam ao intervalo $[0, 2\pi]$, e obter os correspondentes valores de y. Dessa forma, podemos montar o Quadro 2.

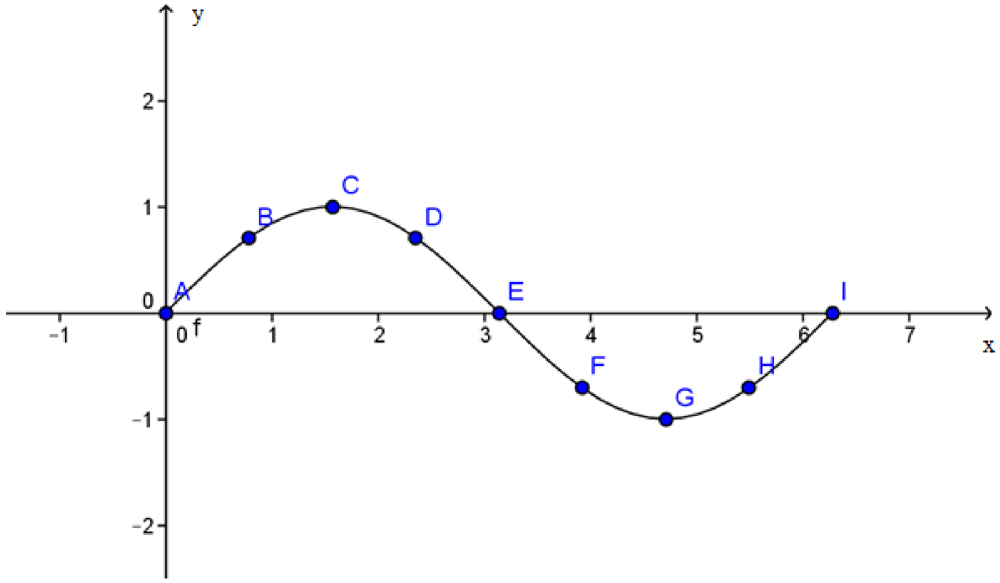
Quadro 2 – Coordenadas de alguns pontos do gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$.

x	y	(x, y)
0	0	A=$(0, 0)$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	B=$(\pi/4, \sqrt{2}/2)$
$\pi/2$	1	C=$(\pi/2, 1)$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	D=$(3\pi/4, \sqrt{2}/2)$
π	0	E=$(\pi, 0)$
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	F=$(5\pi/4, -\sqrt{2}/2)$
$3\pi/2$	-1	G=$(3\pi/2, -1)$
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	H=$(7\pi/4, -\sqrt{2}/2)$
2π	0	I=$(2\pi, 0)$

Fonte: O autor.

Localizando os pontos no plano cartesiano e ligando-os de forma a obter um esboço semelhante ao gráfico da Figura 50, obtemos o esboço do gráfico relativo a apenas um período da função f. A Figura 51 ilustra o gráfico de um período da função f.

Figura 51 – Representação gráfica de um período da função $\boldsymbol{f(x) = senx}$, em que $x \in [0, 2\boldsymbol{\pi}]$.



Fonte: O autor.

Repetindo a cópia do esboço do gráfico relativo a um período, tanto para a esquerda do eixo y quanto para a direita da reta de equação $x = 2\pi$, obtemos o esboço do gráfico da função seno.

3.5.7.2 Função cosseno

Seja x, em radianos, a medida de um arco. A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $f(x) = \cos x$ é chamada de função cosseno (LONGEN, 2004a). O valor de $f(\alpha)$ corresponde à primeira coordenada do ponto P, representado na Figura 47. A função cosseno também possui algumas propriedades importantes:

I. é periódica e seu período é igual a 2π .

II. seu conjunto imagem é [– 1; 1].

III. é par, ou seja, $f(-x) = f(x)$ (IEZZI, 2016).

Demonstração da propriedade I:

$$f(x+p) = \cos(x+p) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x+p) = \cos x \cdot \cos p - \operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen} x.$$

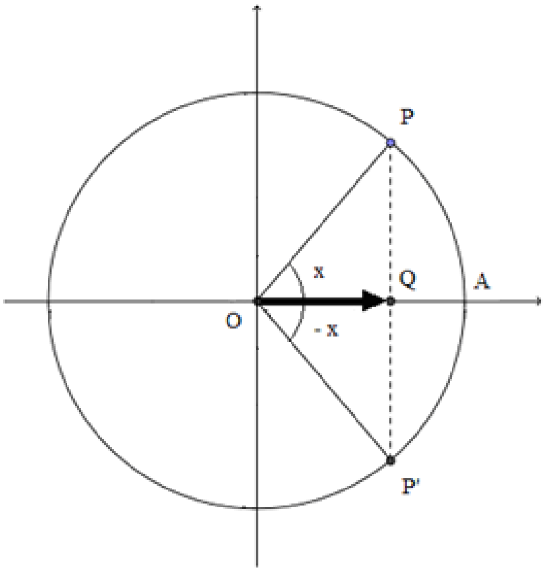
Para que a igualdade $f(x + p) = f(x)$ se verifique, devemos ter simultaneamente $\cos p = 1$ e $\operatorname{sen} p = 0$. O menor valor real positivo de p que torna a igualdade verdadeira é o 2π. Fazendo $p = 2\pi$, temos que:

$$f(x + 2\pi) = cosx \cdot cos(2\pi) + sen(2\pi) \cdot senx \Leftrightarrow$$
$$f(x + 2\pi) = cosx \cdot 1 + 0 \cdot senx \Leftrightarrow$$
$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Demonstração da propriedade III:

Na $\boxed{\text{Figura 52}}$, o arco $\widehat{AP}$, medido no sentido positivo (anti-horário), possui medida x. Utilizando o caso de semelhança de triângulos conhecido como LAL (lado-ângulo-lado), podemos concluir que os triângulos retângulos OPQ e OP'Q são congruentes. Como $\cos x = \overline{OQ}$ e $\cos(-x) = \overline{OQ}$, concluímos que $\cos(-x) = \cos x$.

Figura 52 – Representação de $\boldsymbol{cosx}$ e $\boldsymbol{cos(-x)}$ na circunferência trigonométrica.



Fonte: O autor.

O gráfico da função cosseno pode ser obtido a partir do gráfico da função seno. Note que:

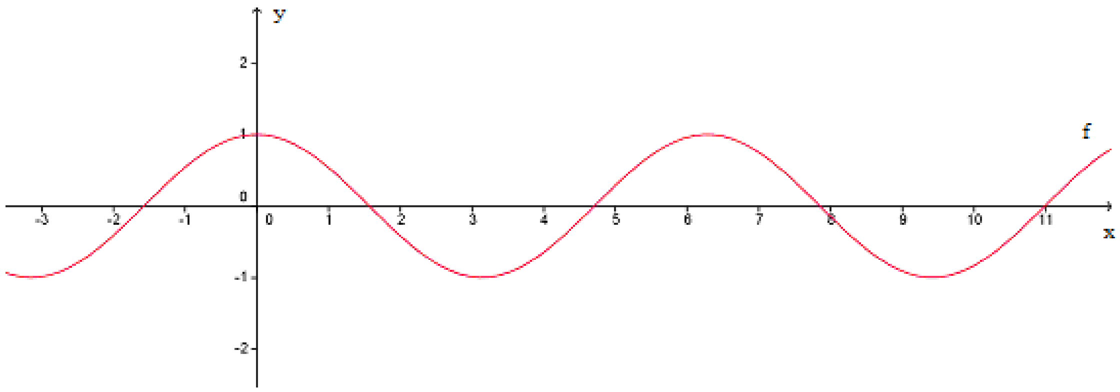
$$cosx = senx \cdot 0 + 1 \cdot cosx \quad \Leftrightarrow$$

$$cosx = senx \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cosx \quad \Leftrightarrow$$

$$cosx = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Como $cosx = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, o gráfico da função cosseno pode ser obtido deslocando-se $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda cada ponto do gráfico da função seno. Portanto, o gráfico de uma função da forma $f(x) = \cos x$ também é uma senóide. A Figura 53 ilustra o gráfico da função f.

Figura 53 – O gráfico da função cosseno.



Fonte: O autor.

3.5.7.3 Funções da forma $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ ou $f(x) = a + b \cdot \cos(mx + n)$

Considere uma função real de variável real da forma $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ (ou da forma $f(x) = a + b \cdot cos(mx + n)$, em que $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, com $b, m \neq 0$.

O período P de f, em radianos, pode ser dado por:

$$P = \frac{2\pi}{|m|}.$$

Demonstração:

Para que uma função da forma $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ (ou da forma $f(x) = a + b \cdot cos(mx + n)$) complete um período, o arco $mx + n$ deve variar de 0 rad a 2π rad. Então,

$$0 \leq mx + n \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad -n \leq mx \leq 2\pi - n.$$

Se $m > 0$, temos que:

$$-\frac{n}{m} \leq x \leq \frac{2\pi - n}{m}.$$

Assim,

$$P = \frac{2\pi - n}{m} - \left(-\frac{n}{m}\right) \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{2\pi}{m}.$$

Se m < 0, temos que:

$$-\frac{n}{m} \geq x \geq \frac{2\pi - n}{m}.$$

Assim,

$$P = -\frac{n}{m} - \left(\frac{2\pi - n}{m}\right) \quad \Leftrightarrow \quad P = -\frac{2\pi}{m}.$$

Note que $-\frac{2\pi}{m} > 0$. Considerando os dois casos, podemos escrever que:

$$P = \frac{2\pi}{|m|} \text{ (IEZZI, 2016).}$$

O conjunto imagem de f é um intervalo da forma:

$$Im(f) = [a - |b|, a + |b|],$$

Demonstração:

Considere uma função da forma $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ (ou da forma $f(x) = a + b \cdot cos(mx + n)$).

Se $b > 0$, temos que:

$$-1 \leq sen(mx+n) \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$-b \leq b\,.\,sen(mx+n) \leq b \quad \Leftrightarrow$$
$$a - b \leq a + b\,.\,sen(mx+n) \leq a + b \quad \Leftrightarrow$$
$$a - b \leq f(x) \leq a + b.$$

Se $b < 0$, temos que:

$$-1 \leq sen(mx+n) \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$-b \geq b\,.sen(mx+n) \geq b \quad \Leftrightarrow$$
$$a + b \leq a + b\,.sen(mx+n) \leq a - b \quad \Leftrightarrow$$
$$a + b \leq f(x) \leq a - b.$$

Considerando os dois casos, podemos escrever que:

$$Im(f) = [a - |\,b\,|, a + |\,b\,|].$$

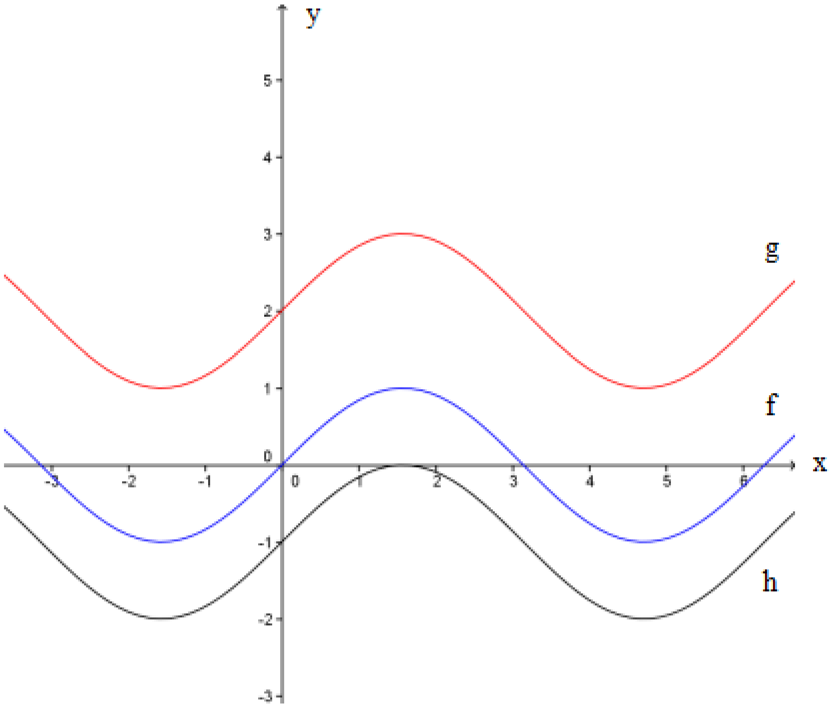
Vamos, agora, ver de que forma se dá a influência das constantes a, b, m e n no gráfico da função f.

I. Constante a:

(a) Translada o gráfico a unidades para cima, se $a > 0$.
(b) Translada o gráfico $|\,a\,|$ unidades para baixo, se $a < 0$.

Observe, por exemplo, os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(x) + 2$ e $h(x) = sen(x) - 1$, ilustrados na Figura 54.

Figura 54 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$, $\boldsymbol{g(x) = sen(x) + 2}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen(x) - 1}$.



Fonte: O autor.

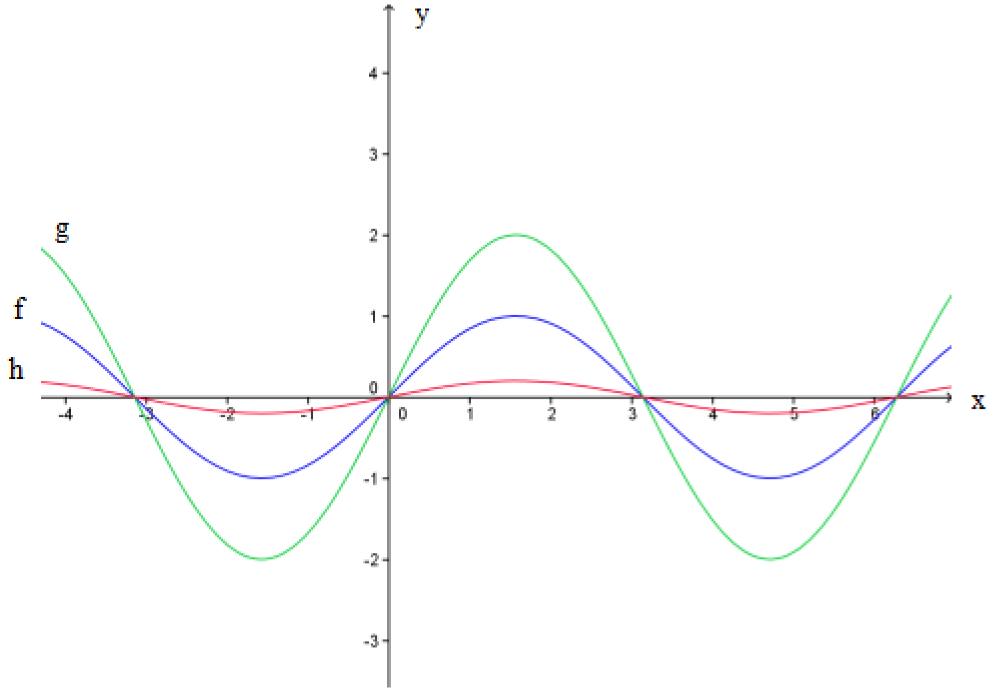
II. Constante b:

(a) Dilata verticalmente o gráfico se | b | > 1.

(b) Contrai verticalmente o gráfico se | b | < 1.

Como exemplo, observe os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2 \cdot sen(x)$ e $h(x) = 0{,}5 \cdot sen(x)$, apresentados na Figura 55.

Figura 55 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = sen(x), g(x) = 2 \cdot sen(x)}$ e $\boldsymbol{h(x) = 0,5 \cdot sen(x)}$.



Fonte: O autor.

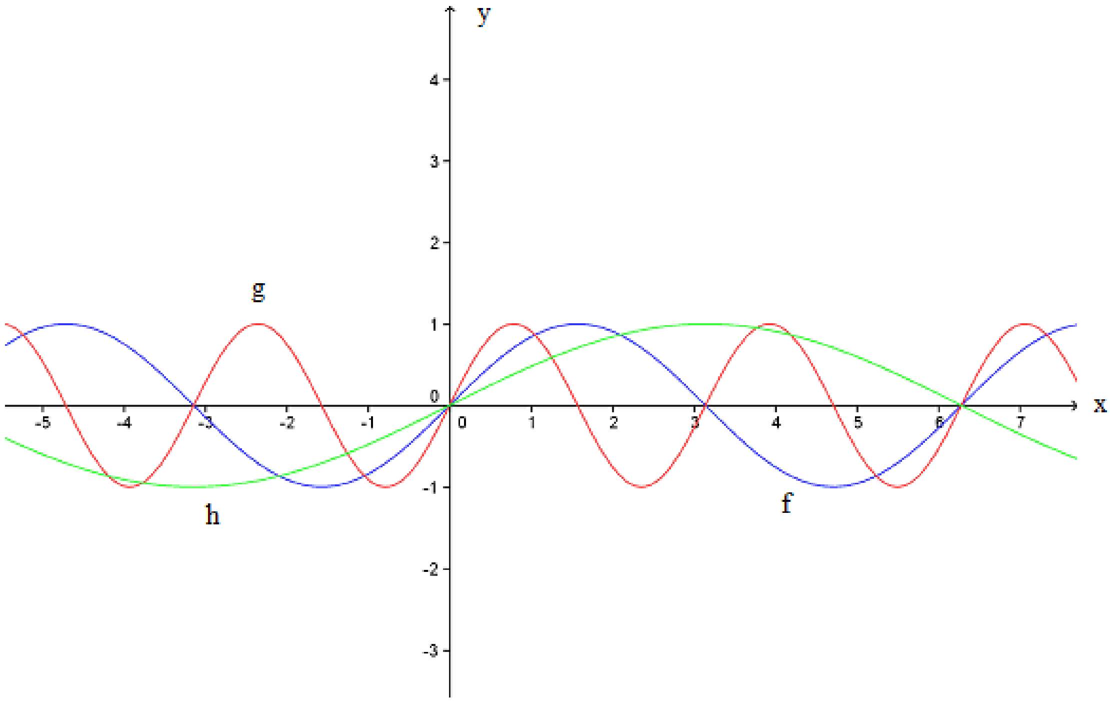
III. Constante m:

(a) Dilata horizontalmente o gráfico se $| m | < 1$.

(b) Contrai horizontalmente o gráfico se $| m | > 1$.

Observe, por exemplo, os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(2 \cdot x)$ e $h(x) = sen(0,5 \cdot x)$, representados na Figura 56.

Figura 56 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = sen(x), g(x) = sen(2 \cdot x)}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen(0,5 \cdot x)}$.



Fonte: O autor.

Observação: A constante m influencia somente no período da função. Ela não influencia no conjunto imagem.

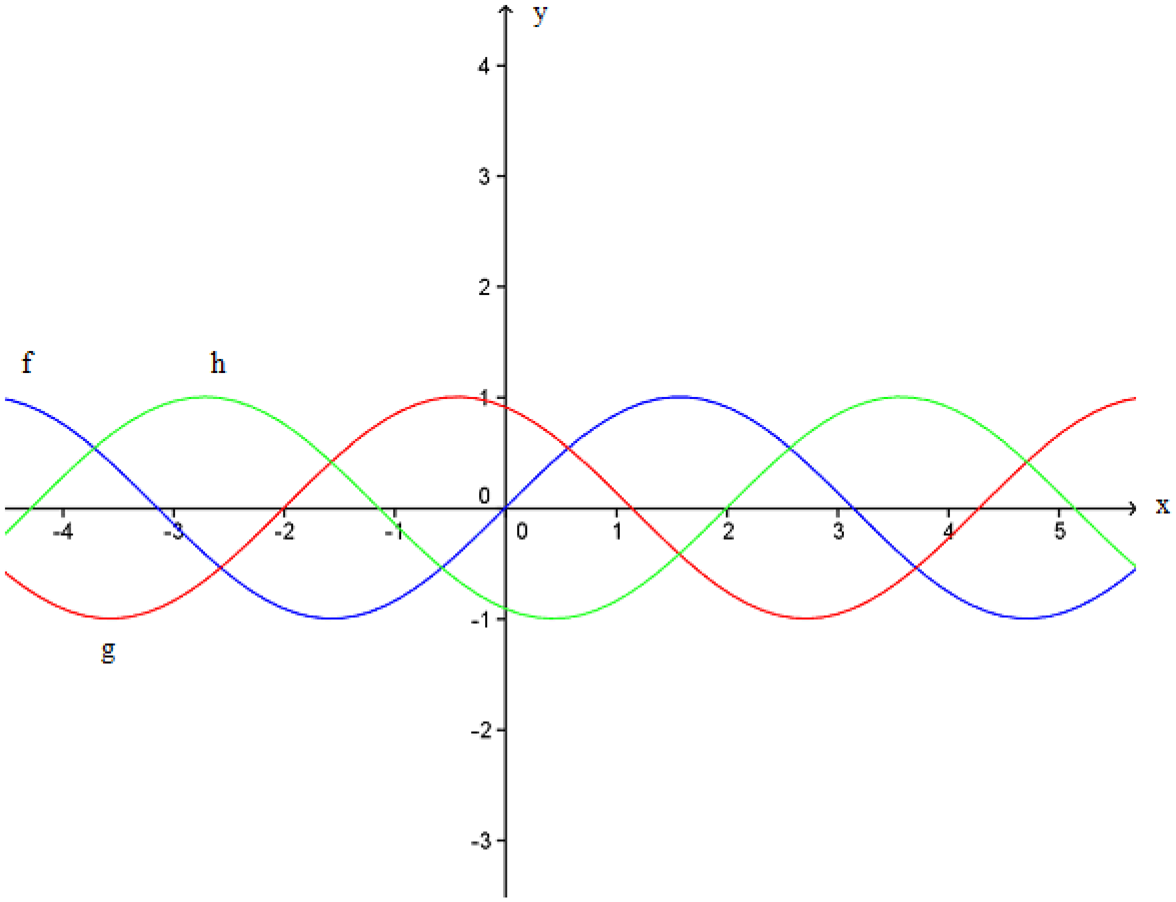
IV. Constante n:

(a) Translada o gráfico | n/m | unidades para a esquerda se $n > 0$.

(b) Translada o gráfico | n/m | unidades para a direita se $n < 0$ (RIBEIRO, 2012b).

Como exemplo, observe os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(x + 2)$ e $h(x) = sen(x – 2)$, apresentados na Figura 57.

Figura 57 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = sen(x), g(x) = sen(x+2)}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen(x-2)}$.



Fonte: O autor.

3.6 EQUAÇÕES.

Nesta seção definimos o que é uma equação algébrica. E, com base nessa definição, apresentamos exemplos de equações que chamaremos de não algébricas.

3.6.1 Equações Algébricas

Toda equação que puder ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

sendo $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ números reais, $n \in$ IN, e $a_n \neq 0$, é chamada de equação algébrica (ou polinomial) de grau n (SILVA, 2000; LONGEN, 2004b; PAIVA, 2005).

Exemplo:

$-x^3 + 5x = 0$ é uma equação algébrica de grau 3.

Para a pesquisa de possíveis raízes racionais de equações algébricas, pode-se utilizar o Teorema das Raízes Racionais, enunciado a seguir:

Seja P um polinômio de coeficientes inteiros dado por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$. Sejam p e q números inteiros e primos entre si, com $q \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $P(x) = 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração:

Substituindo x por $\frac{p}{q}$ na equação:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

temos que:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por q^n, temos que:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Isolando o termo $a_0 . q^n$ no segundo membro da igualdade, temos que:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Dividindo os dois membros da igualdade por p, $p \neq 0$, temos que:

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p}.$$

Como, no primeiro membro, os coeficientes e os números p, q e n são números inteiros, então podemos concluir que o primeiro membro representa um número inteiro. Como o segundo membro também deve representar um número inteiro, concluímos que $a_0 \cdot q^n$ é múltiplo de p. Como p e q são números primos entre si, então q^n não é múltiplo de p. Logo, a_0 é múltiplo de p ou, de forma equivalente, p é divisor de a_0. Utilizando um raciocínio semelhante, podemos provar que a_n é múltiplo de q, ou seja, que q é divisor de a_n (SILVA; FILHO, 2000).

Observação: Dada uma equação algébrica de coeficientes inteiros:

- O teorema enunciado acima não garante a existência de raízes racionais. Mas, caso a equação admita raízes racionais, o teorema mostra como obtê-las (LONGEN, 2004b).
- Se a_n for igual a 1 e a equação admitir raízes racionais, elas serão números inteiros divisores de a_0 (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR, 2002).

3.6.2 Exemplos de Equações não Algébricas

Considere as seguintes notações:

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$,

em que a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_1, a_0 são números reais, $n \in$ IN e $a_n \neq 0$.

- $f(x) = a \cdot b^x + c$, em que a, b e c são reais, com $a \neq 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

- $g(x) = b \cdot log_a(x + k) + c$, em que a, b, c e k são números reais, com $b \neq 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.
- $t(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ ou $t(x) = a + b \cdot \cos(mx + n)$ em que a, b, m e n são reais, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$.

Neste trabalho, as equações representadas abaixo serão chamadas de equações não algébricas.

a) $p(x) = f(x)$

Exemplo: $x^4 + 2x - 1 = 5^x$.

b) $p(x) = g(x)$

Exemplo: $x^2 + 1 = log_2 x - 7$.

c) $p(x) = t(x)$

Exemplo: $-3x^3 + 6x = 4 - sen(2x + 1)$.

d) $f(x) = g(x)$

Exemplo: $4 \cdot 2^x = log_3(x - 9) + 2$.

e) $f(x) = t(x)$

Exemplo: $6^x + 2 = 4 \cdot cos(3x) - 1$.

f) $g(x) = t(x)$

Exemplo: $log_5 x - 8 = 6 + sen(x - 2)$

Observação: Nas equações consideradas, pode haver a presença de expressões modulares.

Exemplo: $|\ log(x-1)| + 2 = \ x^3 - 1$.

Equações como, por exemplo,

$$2^x + 4 = 3\ .\ 2^x - 4 \text{ e } sen^2x - senx - 2 = 0,$$

são não algébricas mas, com o auxílio de uma "troca de variáveis", recaem em equações algébricas e, então, podem ser resolvidas através de métodos algébricos. Se, por exemplo, na equação:

$$sen^2x - senx - 2 = 0,$$

fizermos $senx = t$, ficamos com:

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

que é uma equação do 2º grau na incógnita t. Feito isso, resolvemos a equação em t e, depois, usando a igualdade $senx = t$, determinamos os valores da incógnita x.

4 SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS.

Nesta seção são apresentados dois exercícios comentados, propostos para serem explorados nos anos finais do ensino médio pode auxiliar seus alunos na resolução de questões que envolvem a determinação do número de raízes reais de equações não algébricas. Com base nas funções associadas à equação, o professor pode explorar as características apresentadas na seção 3.4 e as técnicas comentadas na seção 3.5 para propor a construção dos esboços dos gráficos dessas funções, utilizando apenas lápis, borracha e papel quadriculado. E com o objetivo de confirmar o resultado encontrado é proposta a construção desses mesmos gráficos, utilizando o GeoGebra.

4.1 EXEMPLO 1: TRIGONOMÉTRICA E EXPONENCIAL

1) O número de soluções reais da equação

$$3 \,.\, \text{sen}(2x) + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x},$$

no intervalo [0, 2π], é:

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

Solução:

Após os alunos se depararem com a questão e tentarem identificar se estão diante de uma equação algébrica ou não algébrica, o professor pode auxiliá-los mostrando que existe a presença tanto de uma expressão trigonométrica quanto de uma exponencial, o que faz com que a equação não possa ser classificada como algébrica. Depois de se concluir que a equação

$$3 \cdot \text{sen}(2x) + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

é não algébrica, o próximo passo seria pensar em uma maneira de determinar o número de raízes da equação. Nesse momento, é interessante que o professor relembre com os alunos o significado de raiz real de uma equação. Pode-se abordar o conceito tanto de forma algébrica quanto de forma geométrica, mas deve-se deixar claro que a interpretação geométrica é que será a "saída" para o problema. De início, o professor pode até sugerir que os alunos escrevam a equação acima na forma:

$$3 \cdot sen(3x) + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 0,$$

incentivando-os a pensar na forma gráfica da função $f(x) = 3 \cdot sen(3x) + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. Após os alunos concluírem que funções que apresentam esse modelo não pertencem à classe das funções elementares, a tendência natural é se buscar outro caminho. Neste momento o professor pode lembrá-los da seguinte ideia: as soluções de uma equação da forma $f(x) - g(x) = 0$ são exatamente iguais às soluções da equação $f(x) = g(x)$. Portanto, o ponto de partida será a equação:

$$3 \cdot sen(2x) + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x},$$

ou talvez a equação:

$$3 \cdot sen(2x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1.$$

Aqui, o professor pode lembrar os alunos que, dada uma equação da forma $f(x) = g(x)$, o número de raízes reais dessa equação é igual ao número de pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g. Para isso, é importante que se definam duas funções de forma conveniente, ou seja, duas funções que possuam gráficos conhecidos. Uma possibilidade de escolha seria definir as funções:

$$f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1 \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Outra possibilidade seria definir as funções:

$$f(x) = 3 \cdot sen(2x) \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1.$$

Nesse momento, vamos supor que os alunos optaram pela primeira possibilidade de escolha e que preferiram pensar na função f antes de pensar na g. Aos alunos, caberá esboçar o gráfico da função $f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1$. Para a construção do gráfico, ao invés de apenas construir uma tabela com valores de x e os correspondentes valores de f, o professor pode sugerir que se parta da função $h(x) = senx$ e, realizando transformações gráficas, chegue-se ao gráfico da função $f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1$.

Antes de se construir o esboço do gráfico, pode-se determinar o intervalo de variação de f, ou seja, o conjunto imagem da função. Lembrando que o seno de um arco qualquer varia de – 1 a 1, tem-se que:

$$-1 \leq sen(2x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$-3 \leq 3 \cdot sen(2x) \leq 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$-2 \leq 3 \cdot sen(2x) + 1 \leq 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$-2 \leq f(x) \leq 4\ .$$

Dessa forma, durante a construção gráfica, os alunos saberão que a função só poderá assumir valores do intervalo $[-2, 4]$.

Um bom roteiro a ser seguido quando explorar a função $h(x) = senx$ para construir o gráfico da função $f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1$ é:

- explorar a função $i(x) = senx$, para determinar o gráfico da função $j(x) = sen(2x)$;
- explorar a função $j(x) = sen(2x)$, para determinar o gráfico da função $k(x) = 3\ .sen(2x)$;
- explorar a função $k(x) = 3 \cdot sen(2x)$, para determinar o gráfico da função
$f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1$.

Ainda que os alunos saibam construir o gráfico da função $i(x) = senx$ sozinhos, é importante que o professor os auxilie, relembrando alguns passos importantes da construção. Uma característica importante que o professor pode abordar é o fato de que uma função da forma $f(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ é periódica. Portanto, para se construir o gráfico da função i, basta tomar como referência apenas um dos períodos da função. O professor pode lembrar aos alunos que o período da função $i = senx$ é igual a 2π mas, mesmo assim, ajudá-los a calcular novamente esse valor, utilizando a relação:

$$P = \frac{2\pi}{|\, m\,|}.$$

Assim, fazendo $m = 1$, o período P da função i será igual a:

$$P = \frac{2\pi}{|\,1\,|} \quad \Leftrightarrow \quad P = 2\pi.$$

Uma escolha possível para a construção do período da função i seria o intervalo [0, 2π], que é justamente o intervalo a que se refere o enunciado. Quanto mais pontos da forma $(x, i(x))$ forem determinados, mais o esboço se aproximará do gráfico da função seno. Utilizando o conteúdo funções trigonométricas, visto na seção 3.5.7, o professor pode optar por determinar, por exemplo, apenas 5 pontos do gráfico, "dividindo" o intervalo [0, 2π] em quatro intervalos de "mesmo comprimento". Como 2π / 4 = π / 2, os valores atribuídos a x são da forma $k.\frac{\pi}{2}$, com $k \in Z_+$. A restrição de que k deve ser não negativo é por causa da escolha do intervalo [0, 2π]. Realizando os cálculos necessários, obtém-se o Quadro 3:

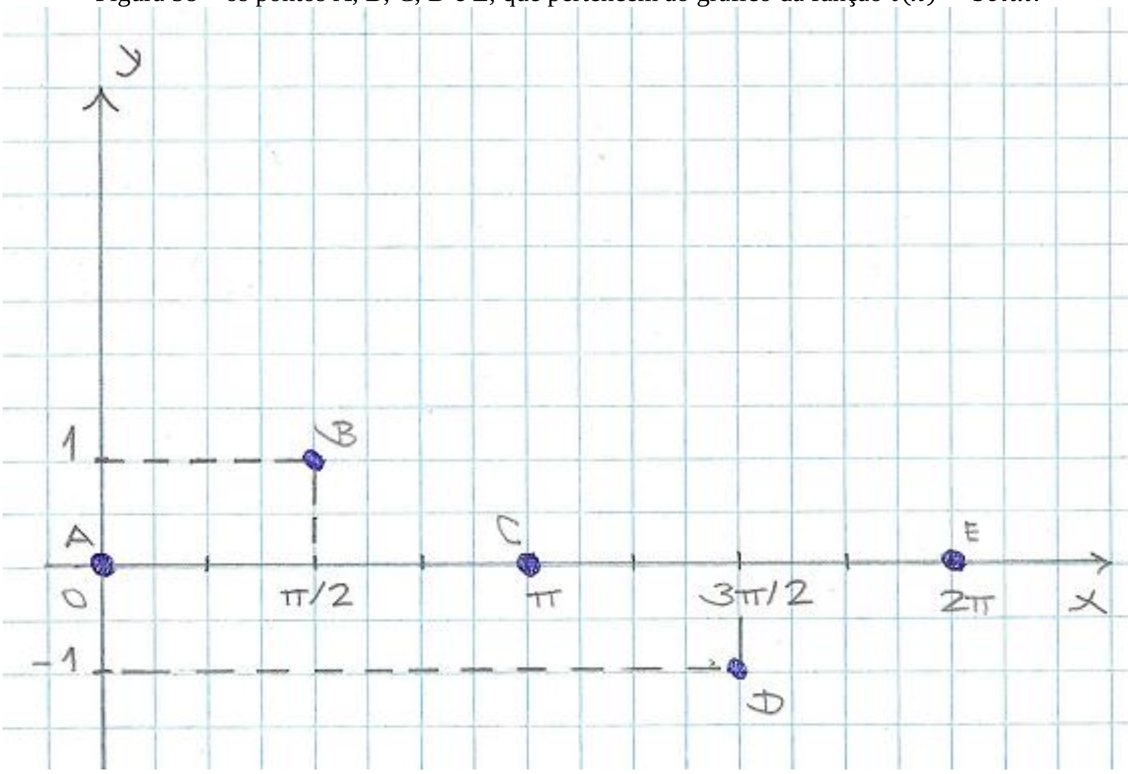
Quadro 3 – Alguns pontos do gráfico da função $\boldsymbol{i(x) = senx}$.

k	x	$h(x) = sen\,x$	Ponto
0	0	0	A = (0, 0)
1	$\pi/2$	1	B= $(\pi/2, 1)$
2	π	0	C = $(\pi, 0)$
3	$3\pi/2$	-1	D = $(3\pi/2, -1)$
4	2π	0	E = $(2\pi, 0)$

Fonte: O autor.

Para localizar com maior precisão os pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano, os alunos podem utilizar o fato de que $\pi \cong 3{,}14$. Apenas para esclarecimento, o uso dessa aproximação faz com que o desenho final fique mais próximo da situação proposta, mas não irá interferir no momento de determinar a resposta da questão. Para os alunos, o importante é, por exemplo, colocar o $\pi/2$ à esquerda do π no momento de localizar esses números no eixo x, dado que $\pi/2$ é menor do que π. Observe a Figura 58, que apresenta os pontos A, B, C, D e E:

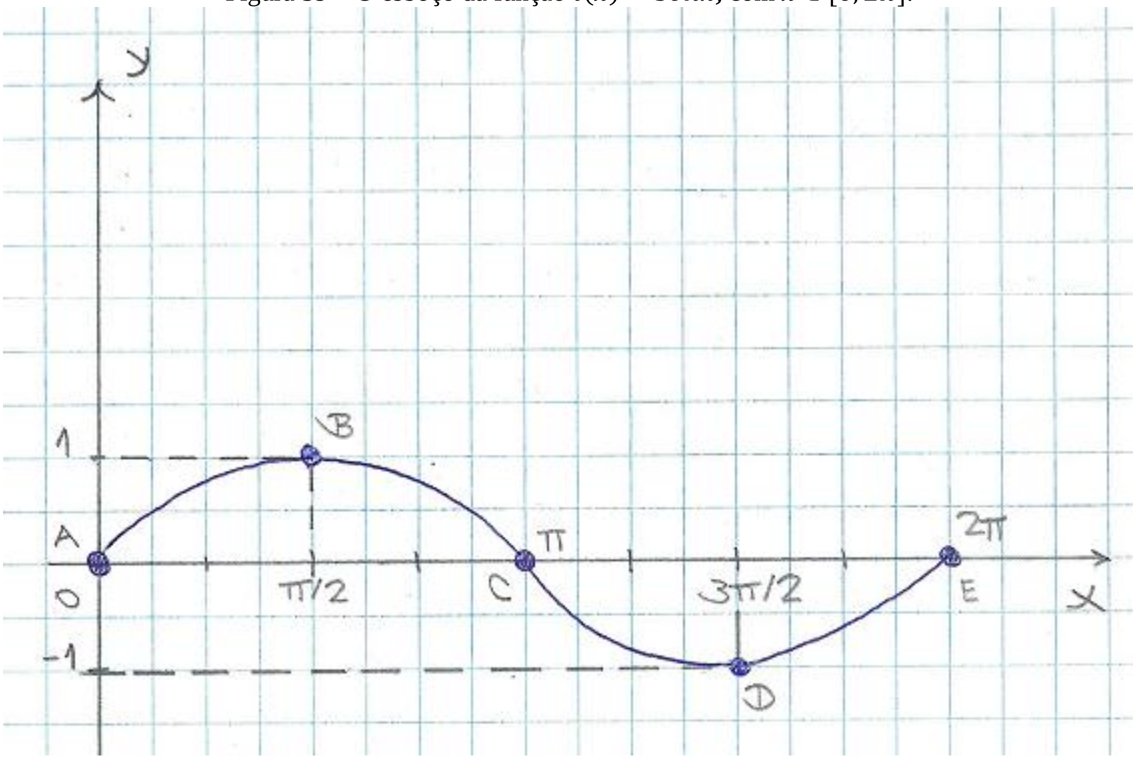
Figura 58 – os pontos A, B, C, D e E, que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{i(x) = senx}$.



Fonte: O autor.

O professor pode questionar os alunos quanto à maneira com que os pontos serão ligados: se serão utilizados segmentos de reta ou não. A análise do gráfico da função seno, feita 3.5.7.1, pode direcionar de que forma os pontos devem ser ligados. Após ligarem os pontos, os alunos devem obter um esboço semelhante ao da Figura 59:

Figura 59 – O esboço da função $\boldsymbol{i(x) = senx,}$ com $\boldsymbol{x \in [0, 2\pi]}$.



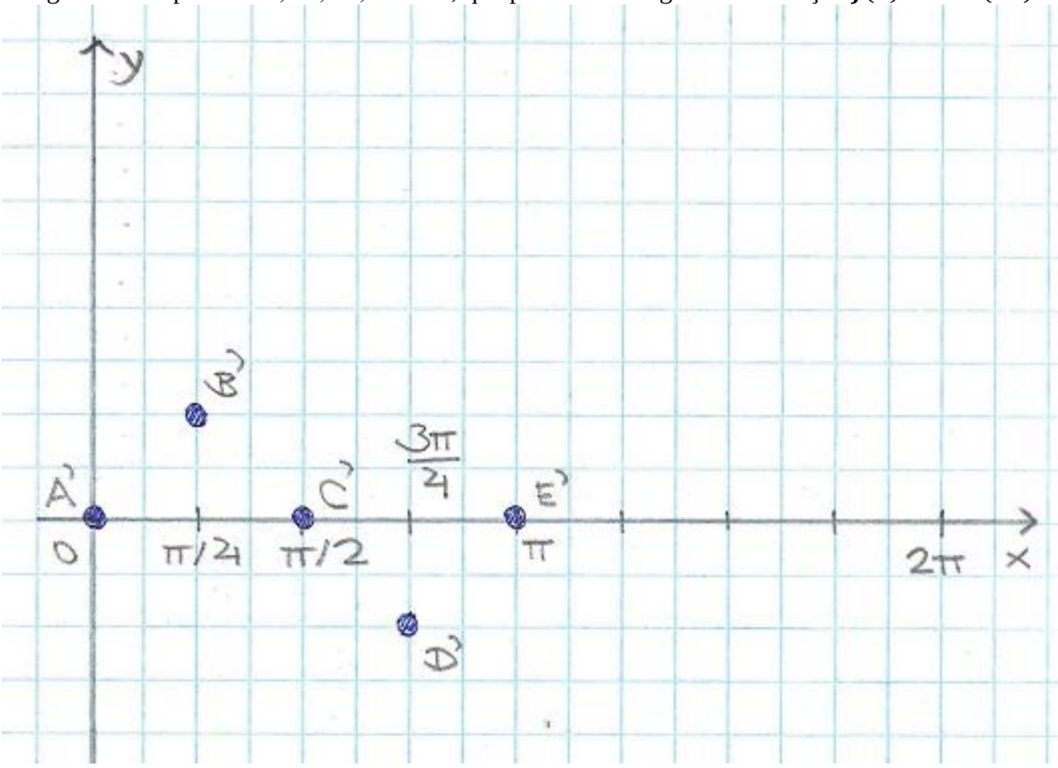
Fonte: O autor.

Com base nesse esboço da função $i(x) = senx$, pode-se construir um esboço do gráfico da função $j(x) = sen(2x)$. O período de j é igual a:

$$P' = \frac{2\pi}{|\,2\,|} \quad \Leftrightarrow \quad P' = \pi.$$

Comparando os períodos de i e de j, o professor pode explorar as propriedades da transformação gráfica conhecida como contração horizontal. Como o período de j é menor do que o período de i, concluirá junto aos alunos que o gráfico de j é mais contraído que o de i, num mesmo domínio. Mais especificamente, como $P' = P/2$, isso indica que em um período da função i caberão dois períodos da função j. E como $P' = P/2$, a abscissa de cada um dos pontos A, B, C, D e E será dividida por 2, de modo que os pontos A, B, C, D e E irão ocupar agora a posição dos pontos A' = (0, 0), B' = ($\pi/4$, 1), C' = ($\pi/2$, 0), D' = ($3\pi/4$, – 1) e E' = (π, 0), respectivamente, conforme é mostrado na Figura 60.

Figura 60- os pontos A', B', C', D' e E', que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{j(x) = sen(2x)}$.



Fonte: O autor.

Para obter uma segunda representação gráfica de um período da função j, compreendido no intervalo $[\pi, 2\pi]$, será preciso determinar mais 4 pontos, que chamaremos de F', G', H' e I'. Como a distância entre as projeções de dois pontos consecutivos (de A' e B', por exemplo) sobre o eixo das abscissas é igual a π / 4 unidades, cada ponto a ser determinado terá abscissa igual ao valor da abscissa do ponto imediatamente à esquerda, somado de π / 4 unidades. Assim, a abscissa do ponto F' será:

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Já a abscissa do ponto G' será:

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

A abscissa do ponto H' será:

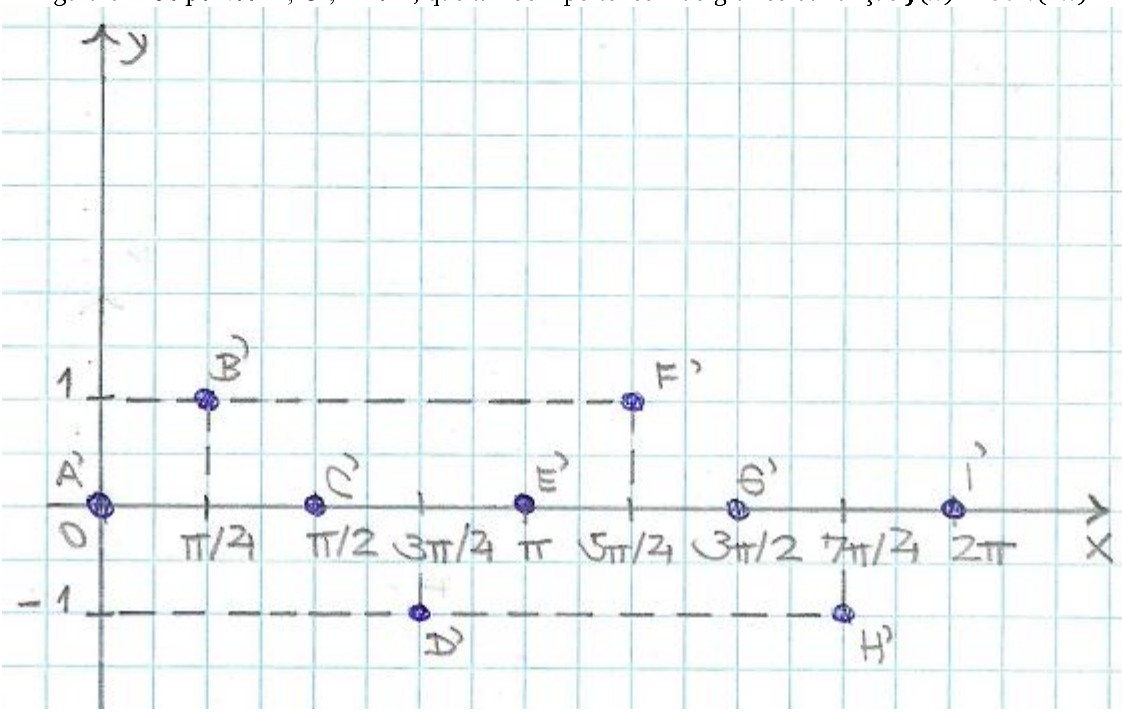
$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

E, por fim, a abscissa do ponto I' será igual a:

$$\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi.$$

É importante destacar que, como a representação gráfica do período da direita é uma cópia da representação gráfica do período da esquerda, a ordenada do ponto F' será igual a 1, a do ponto G' será igual a zero, a do ponto H' será igual a – 1 e a do ponto I' será igual a zero. A Figura 61 mostra a localização dos pontos F', G', H' e I', juntamente com os pontos A', B', C' D' e E', no plano cartesiano.

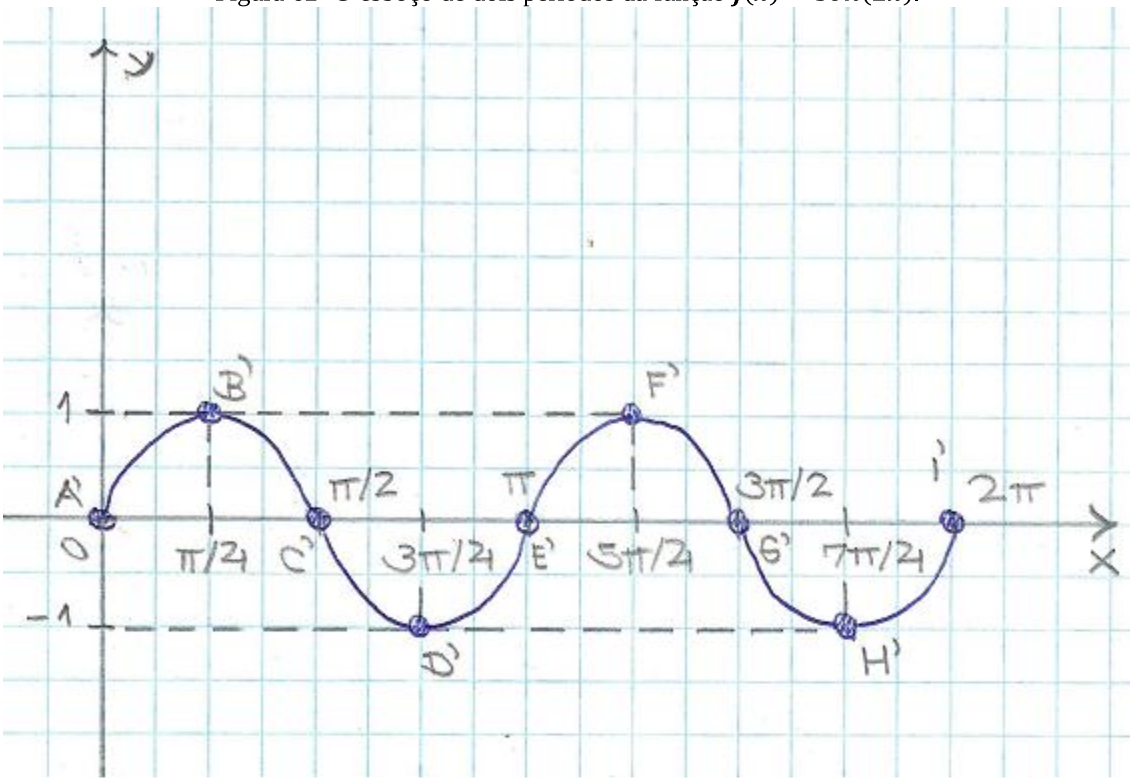
Figura 61- Os pontos F', G', H' e I', que também pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{j(x) = sen(2x)}$.



Fonte: O autor.

Ligando os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I de forma a reproduzir o esboço gráfico da Figura 59, obtemos o esboço de dois períodos do gráfico da função $j(x) = sen(2x)$, apresentado na Figura 62:

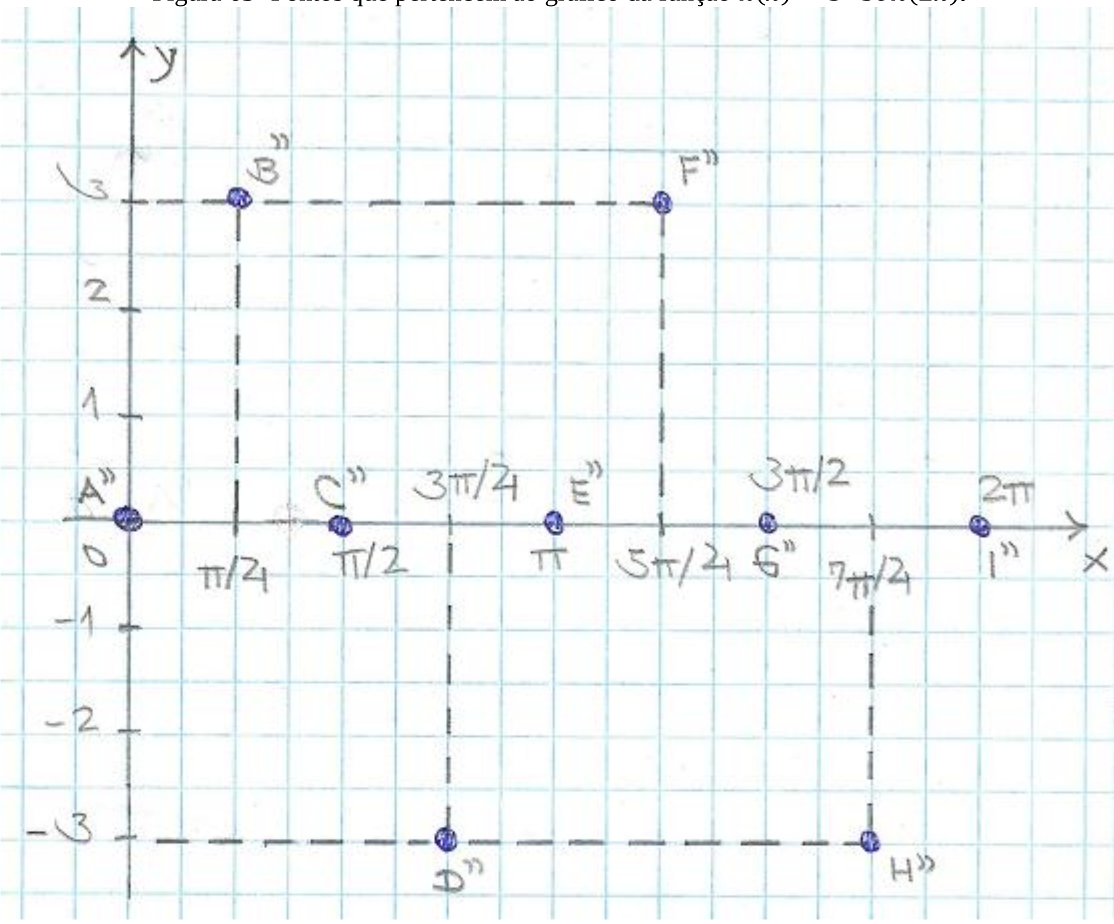
Figura 62- O esboço de dois períodos da função $\boldsymbol{j(x) = sen(2x)}$.



Fonte: O autor.

Agora, tomando como referência o esboço do gráfico da função j no intervalo $[0, 2\pi]$, o professor e os alunos podem partir para a construção do esboço do gráfico da função $k(x) = 3 \cdot sen(2x)$, nesse mesmo intervalo. Aqui, caberá ao professor explorar as propriedades da transformação gráfica conhecida como dilatação vertical. Deverá explicar aos alunos que essa constante mudará o conjunto imagem da função. Nesse caso, a ordenada de cada ponto do gráfico de j será multiplicada por 3, fazendo com que os pontos A', B', C', D', E', F, G, H e I ocupem, agora, a posição dos pontos A" = (0, 0), B" = ($\pi/4$, 3), C" = ($\pi/2$, 0), D" = ($3\pi/4$, – 3), E" = (π, 0), F" = $(5\pi/4, 3)$, G" = $(3\pi/2, 0)$, H" = $(7\pi/4, -3)$ e I" = (2π, 0), conforme é mostrado na Figura 63.

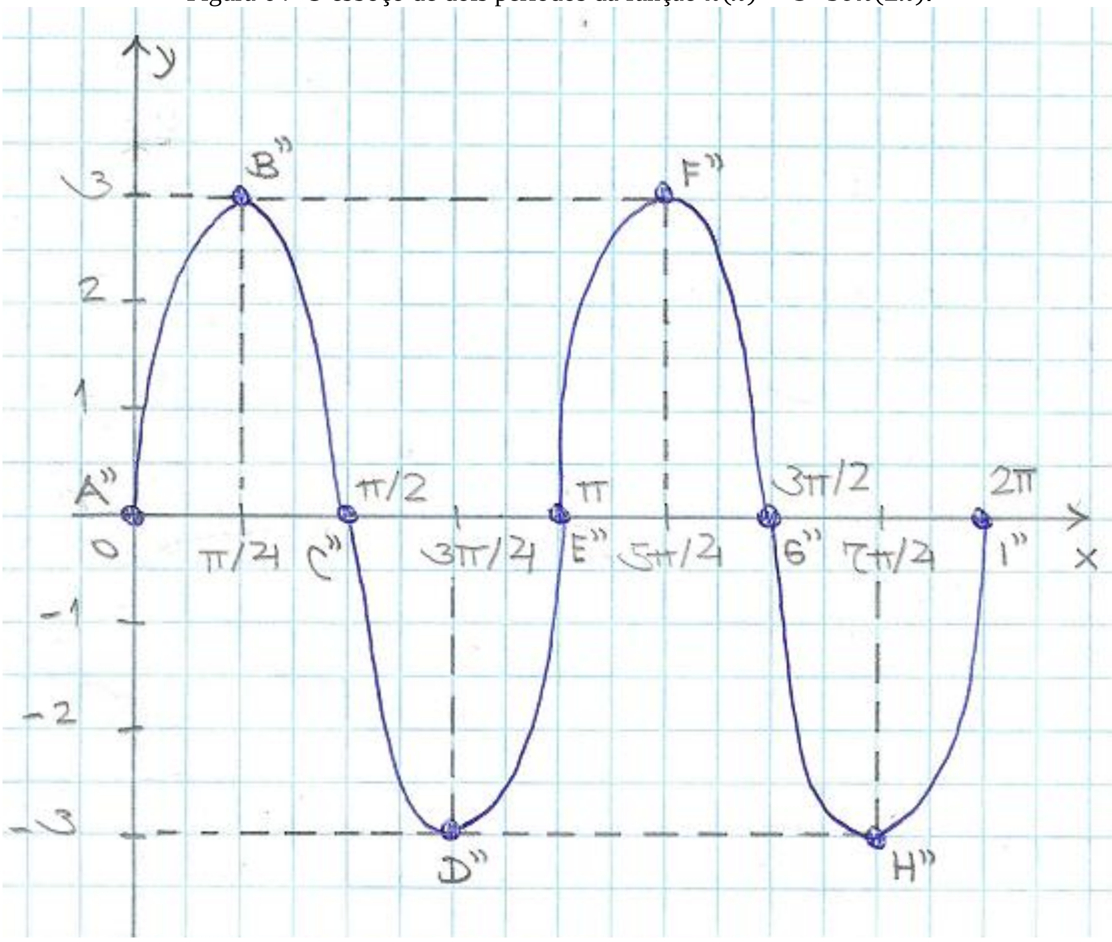
Figura 63- Pontos que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{k(x) = 3 \cdot sen(2x)}$.



Fonte: O autor.

Ligando os pontos A”, B”, C”, D”, E”, F”, G”, H” e I”, o aluno deve tentar reproduzir o esboço da Figura 62 para obter um esboço do gráfico da função k no intervalo $[0, 2\pi]$, como é apresentado na Figura 64.

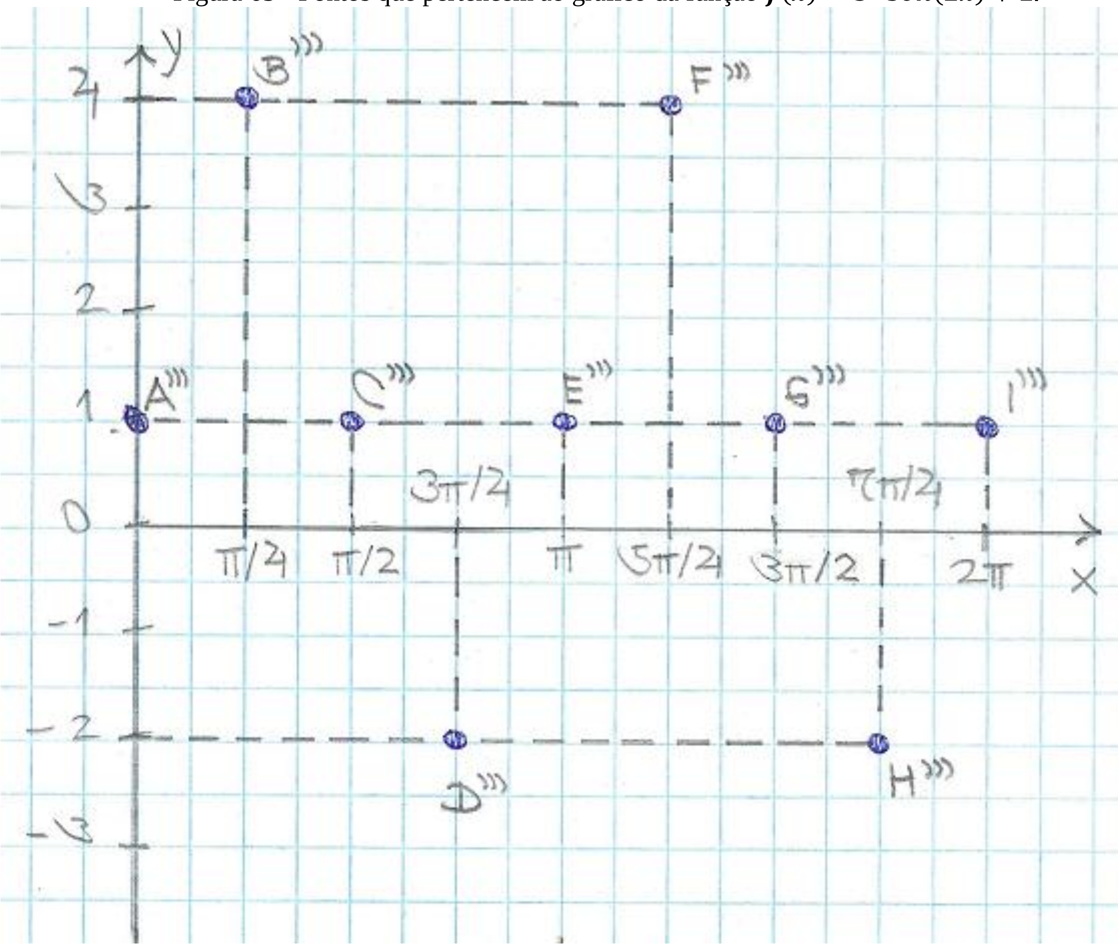
Figura 64- O esboço de dois períodos da função $\boldsymbol{k(x) = 3 \cdot sen(2x)}$.



Fonte: O autor.

Após a construção do esboço do gráfico da função $k(x) = 3 \cdot sen(2x)$, o professor pode explorar os demais conceitos de transformações gráficas. Ao se somar 1 unidade à expressão de k todos os pontos do gráfico são deslocados 1 unidade para cima, ou seja, os pontos A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H'' e I'' serão deslocados, respectivamente, para a posição dos pontos A''' = (0, 0), B''' = $(\pi/4, 4)$, C''' = $(\pi/2, 1)$, D''' = $(3\pi/4, -2)$, E''' = $(\pi, 1)$, F''' = $(5\pi/4, 4)$, G''' = $(3\pi/2, 1)$, H''' = $(7\pi/4, -2)$ e I''' = $(2\pi, 1)$, conforme podemos observar na Figura 65.

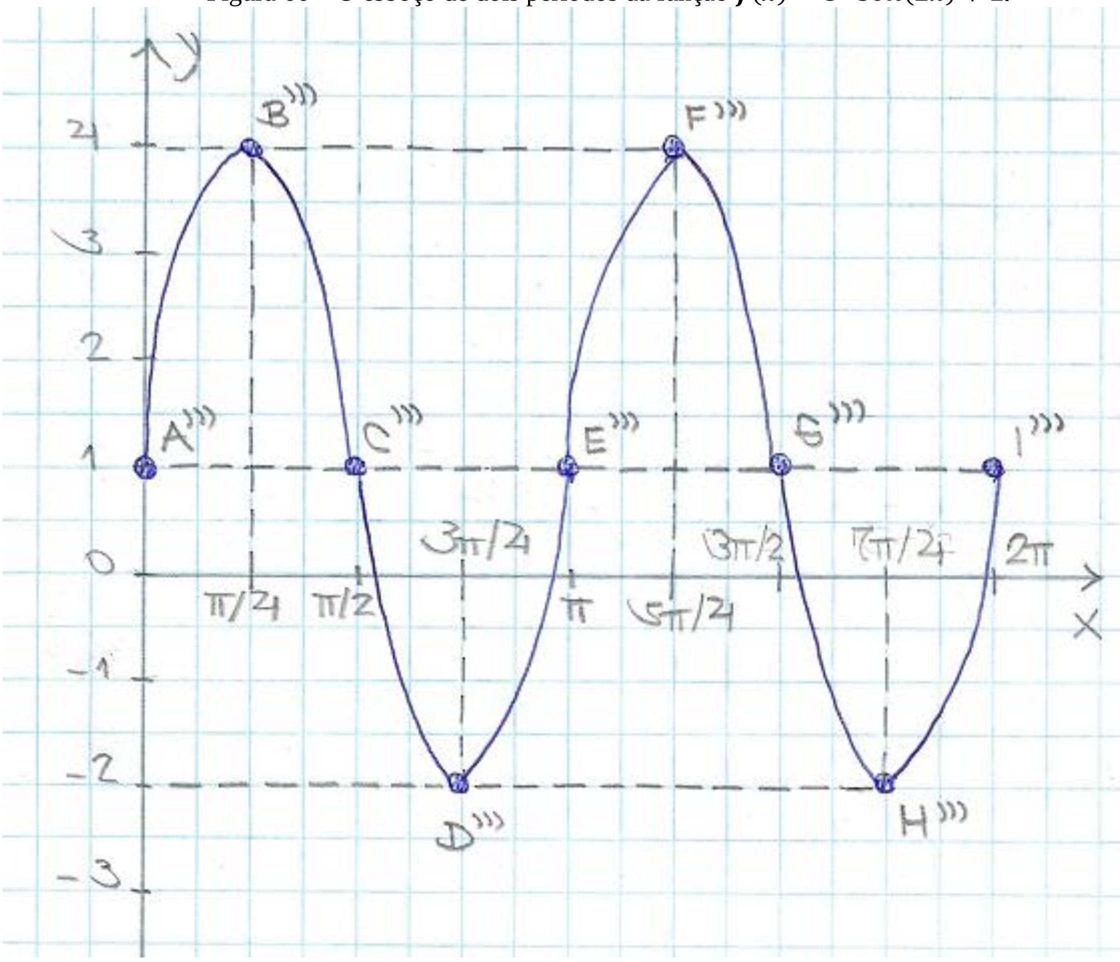
Figura 65 - Pontos que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1}$.



Fonte: O autor.

Ao ligar os pontos A''', B''', C''', D''', E''', F''', G''', H''' e I''' o aluno deve tentar reproduzir o esboço da Figura 64 para obter um esboço do gráfico da função $f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1$, no intervalo $[0, 2\pi]$, apresentado na Figura 66.

Figura 66 – O esboço de dois períodos da função $\boldsymbol{f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1}$.



Fonte: O autor.

Terminada a construção do esboço do gráfico de f no intervalo a ser analisado, chegou a vez da construção do esboço do gráfico da função g. Em primeiro lugar, o professor pode investigar com os alunos o comportamento da função

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

em relação ao crescimento ou decrescimento, e propor que o aluno encontre o elemento que descreve tal comportamento. É importante esclarecer que não é fundamental que o aluno lembre que, dada uma função da forma $f(x) = a^x$, a função é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, pois a própria construção do gráfico dará um norte a essa questão. Mas caso os alunos lembrem-se desse fato a respeito da base da potência, poderão confirmá-lo durante o processo de representação gráfica. Para a construção do gráfico, o professor pode sugerir que os alunos determinem 3 ou mais pontos do gráfico. Vamos considerar que ele escolheu determinar 3 pontos. Como o intervalo que deve ser analisado vai de 0 a 2π, ele propôs determinar dois pontos cujas abscissas sejam os extremos do intervalo $[0,\ 2\pi]$ e um terceiro ponto de abscissa compreendida entre 0 e 2π.

Atribuindo a x o valor 0, irão encontrar:

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 1.$$

Assim, o ponto obtido será J = (0, 1).

Entre 0 e 2π, uma escolha possível é o número 1. Fazendo x = 1, terão que:

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = 1/2\ .$$

Dessa forma, o ponto obtido será K = (1, 1/2).

Atribuindo a x o valor 2π, será determinado que:

$$f(2\pi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\pi}.$$

Utilizando a aproximação $\pi \cong 3{,}14$, irão obter $2\pi \cong 6{,}28$. Para facilitar os cálculos, o professor pode sugerir que troquem o expoente 2π por 6 e perguntar se essa troca comprometeria o resultado final. Ele pode comentar que, como $6 < 2\pi < 7$, então:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2\pi} < \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}008 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2\pi} < 0{,}02.$$

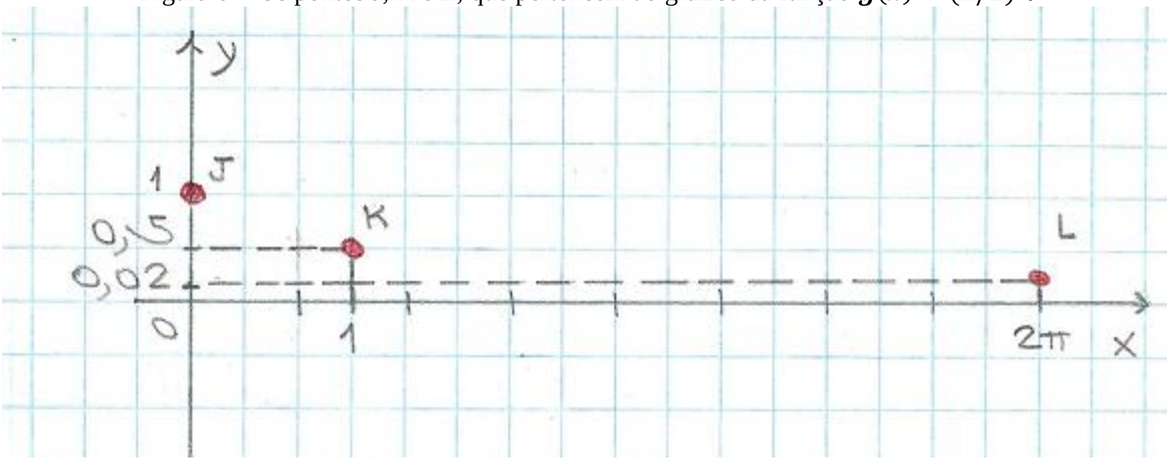
Devido ao comportamento da função $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, sabe-se de início que qualquer ponto de abcissa positiva terá ordenada compreendida entre 0 e 1. Portanto, não há problema algum em aproximar o expoente 2π para 6.

$$f(2\pi) \cong \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \Leftrightarrow \quad f(2\pi) \cong \frac{1}{64} \quad \Leftrightarrow \quad f(2\pi) \cong 0{,}02.$$

Logo, o terceiro ponto a ser considerado será o ponto L = $(2\pi, 0{,}02)$.

Localizando os pontos J, K e L no plano, obtemos a Figura 67.

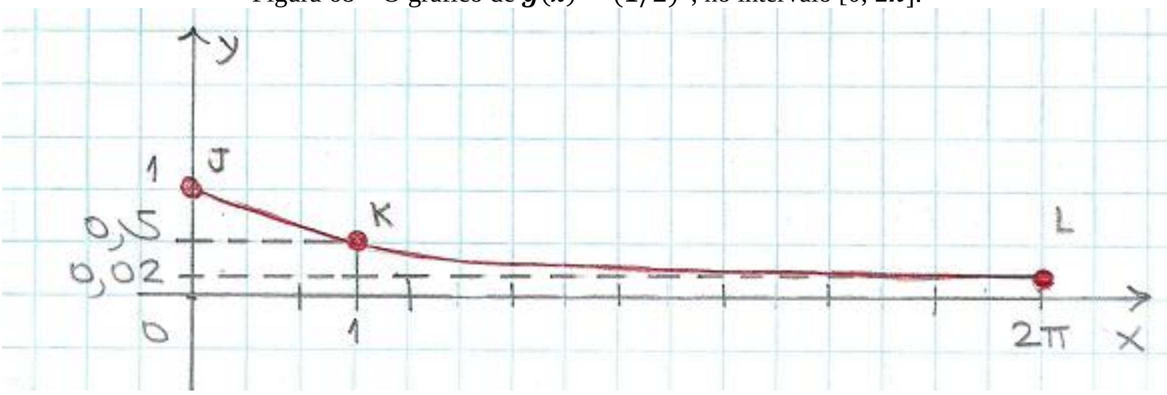
Figura 67- Os pontos J, K e L, que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{g(x) = (1/2)^x}$.



Fonte: O autor.

Após a localização dos pontos o professor poderá questionar seus alunos quanto à forma com que os pontos devem ser ligados. Nesse momento, poderá lembrá-los do aspecto do gráfico de uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, abordando tanto o caso em que $0 < a < 1$ quanto o caso em que $a > 1$. Ligando os pontos de forma a obter um esboço do gráfico da direita da Figura 38, o esboço do gráfico de g será semelhante ao mostrado na Figura 68.

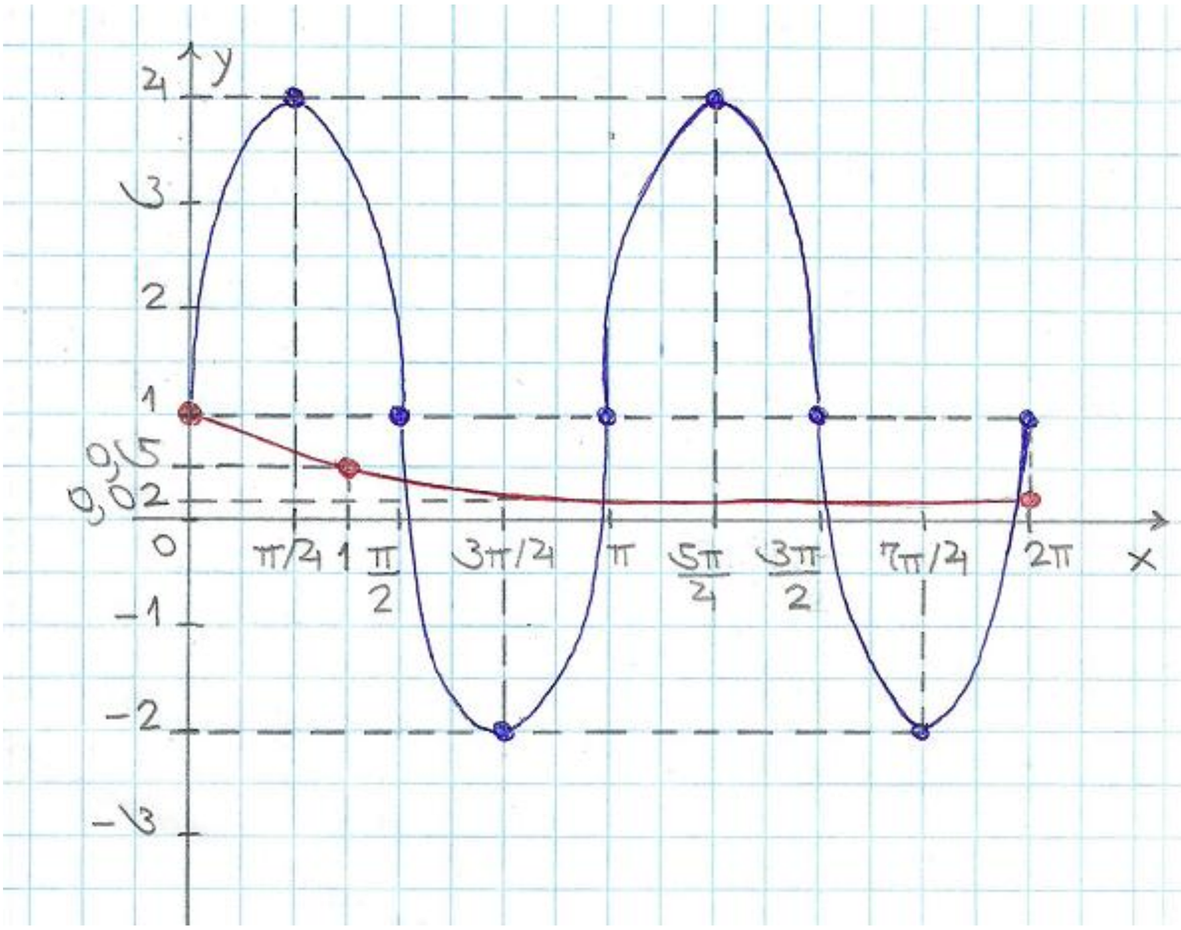
Figura 68 – O gráfico de $\boldsymbol{g(x) = (1/2)^x}$, no intervalo $[0, 2\boldsymbol{\pi}]$.



Fonte: O autor.

Inicialmente, o esboço do gráfico de f foi construído em um plano cartesiano e o esboço do gráfico de g foi construído em outro. Agora, nessa etapa, o professor deve recomendar aos alunos que representem os dois esboços dos gráficos em um mesmo plano cartesiano. A sugestão é que, neste momento inicial, não utilizem nenhum dos dois planos usados anteriormente, mas que utilizem um terceiro plano. Assim, ao final, o processo de resolução tende a ficar mais claro para os alunos. Ao esboçarem os dois gráficos num mesmo plano cartesiano, a figura obtida será semelhante à Figura 69.

Figura 69 – Os esboços dos gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, definidas no intervalo [0, $2\boldsymbol{\pi}$], representados num mesmo plano cartesiano.



Fonte: O autor.

Nesse momento, após terem esboçado os dois gráficos em um mesmo plano cartesiano, o professor pode incentivar o aluno a terminar a resolução do problema proposto. Após lembrarem que o número de soluções reais da equação $f(x) = g(x)$ corresponde ao número de pontos de intersecção dos gráficos de f e g, os alunos deverão tentar determinar o número de pontos comuns ao gráficos. Eles podem sinalizar esses pontos pintando bolinhas sobre eles ou apontando flechinhas para a localização desses pontos, utilizando o esboço apresentado na Figura 69. No intervalo $[0,\ 2\pi]$, os gráficos de f e g se intersectam em 5 pontos, o que significa que, nesse intervalo, a equação

$$3 \cdot sen(2x) + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

possui 5 soluções reais.

4.2 EXEMPLO 1 – TRIGONOMÉTRICA E EXPONENCIAL – CONSTRUÇÃO GRÁFICA NO GEOGEBRA

Agora vamos retomar o exemplo 1 apresentado na seção 4.1 para explorar a construção dos gráficos no GeoGebra. O professor pode apresentar alguns comandos que os alunos devem utilizar, bem como citar os vários "locais" que compõem a tela principal. É importante comentar que, nesse exemplo, as funções f e g possuem como domínio o intervalo $[0,\ 2\pi]$. Portanto, serão úteis comandos específicos que limitam o domínio a um determinado intervalo real. Por exemplo, caso a função f tivesse como domínio o conjunto dos números reais, o comando:

$$f(x) = 3 * \sin(2 * x) + 1$$

forneceria o gráfico dessa função. Já se o domínio de f for o intervalo real $[a, b]$, o gráfico de f será fornecido pelo comando:

$$f(x) = função[3 * \sin(2 * x) + 1, a, b].$$

Após ter feito essas observações, o professor pode apresentar o seguinte roteiro para a construção dos gráficos das funções f e g:

1. No campo "Entrada", digitar:

$$f(x) = função[3 * \sin(2 * x) + 1{,}0{,}2 * pi]$$

2. Apertar "enter".

3. No campo "Entrada", digitar:

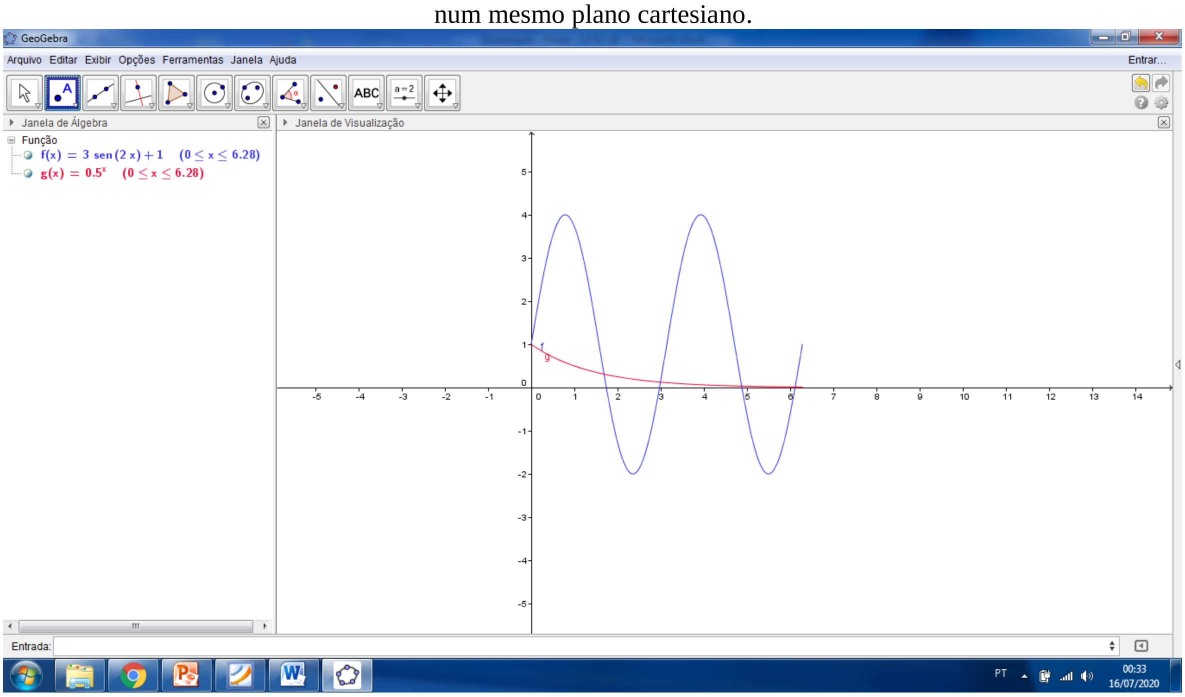
$$g(x) = função[(1/2)^\wedge x, 0,2 * pi]$$

4. Apertar “enter”.

Observação: As cores dos gráficos foram alteradas.

Após a realização desses passos, aparecerá na tela os gráficos de f e g, definidas no intervalo $[0, 2\pi]$, num mesmo plano cartesiano, conforme podemos observar na Figura 70.

Figura 70 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f}$ (em azul) e $\boldsymbol{g}$ (em vermelho), definidas no intervalo [0, $2\boldsymbol{\pi}$], construídos num mesmo plano cartesiano.



Fonte: O autor.

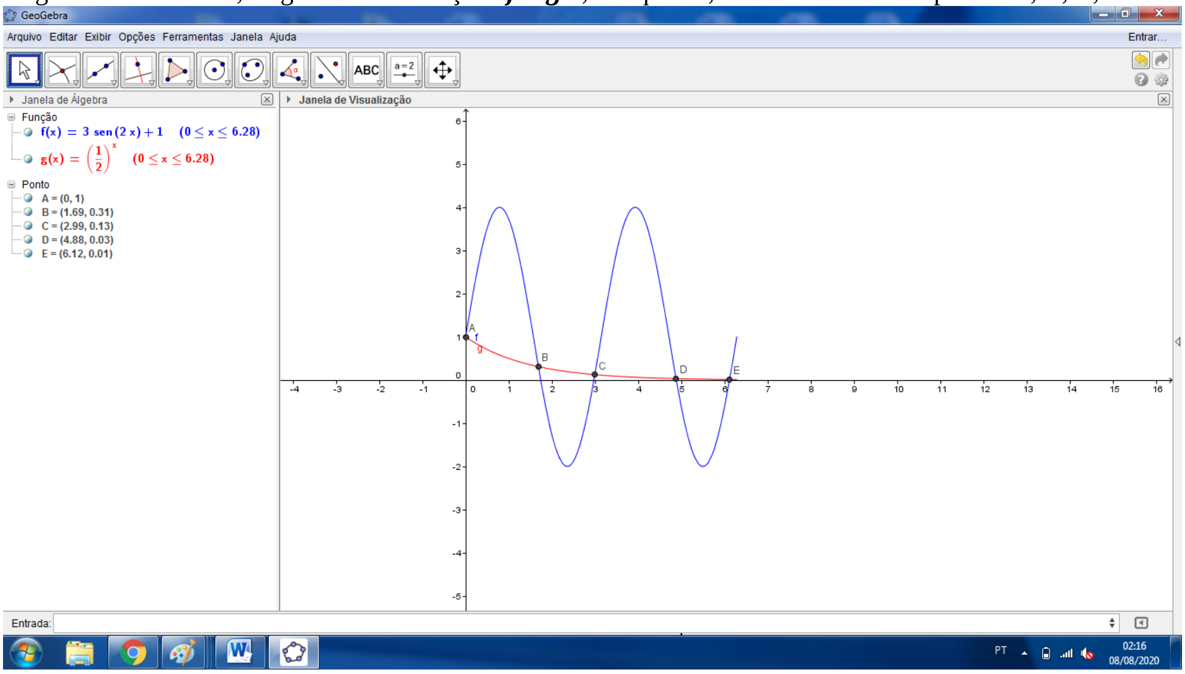
Conforme sugerido na Figura 70, no intervalo [0, 2π] os gráficos de f e g se intersectam em 5 pontos, confirmando que nesse intervalo a equação $f(x) = g(x)$ apresenta 5 soluções reais. Note que o ponto de intersecção de menor abscissa é o ponto (0, 1).

O professor pode comentar ainda que o Geogebra pode apresentar os valores aproximados das raízes reais da equação em estudo. Para que o aluno obtenha esses valores e se convença da resposta encontrada anteriormente, basta fazer o seguinte:

1. Clicar em “intersecção de dois objetos”.
2. Clicar nos pontos de encontro dos gráficos de f e g.

Com isso, os pontos de intersecção dos gráficos são destacados e as coordenadas desses pontos podem ser vistas na “Janela de Álgebra”, conforme podemos observar na Figura 71.

Figura 71 – À direita, os gráficos das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ e, à esquerda, as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E.



Fonte: O autor.

A segunda maneira de utilizar o GeoGebra no exemplo 1 baseia-se no fato de que as soluções reais da equação $f(x) = g(x)$ são iguais às soluções da equação $f(x) - g(x) = 0$. Portanto, definindo a função $h(x) = f(x) - g(x)$, determinar o número de soluções reais da equação $f(x) = g(x)$ equivale a buscar o número de soluções reais da equação $h(x) = 0$, que é igual ao número de pontos de intersecção do gráfico da função h com o eixo x.

Apresentamos a seguir um roteiro para a construção do gráfico da função $h = f - g$:

1. No campo “Entrada”, digitar:

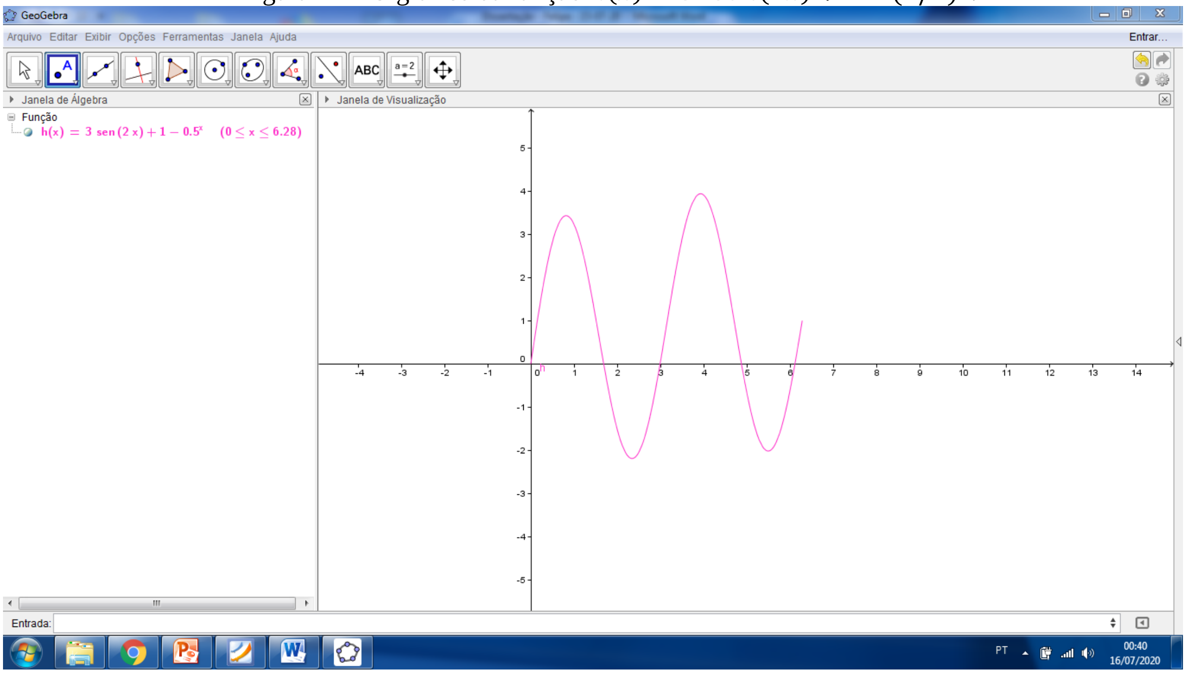
$$h(x) = 3*\sin(2 * x) + 1 – (1/2)\text{^}x$$

2. Apertar “enter”.

Observação: A cor padrão do gráfico foi alterada.

Após a realização desses passos, aparecerá na tela o gráfico da função h, conforme podemos observar na Figura 72.

Figura 72 – O gráfico da função $\boldsymbol{h(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1 - (1/2)^x}$.

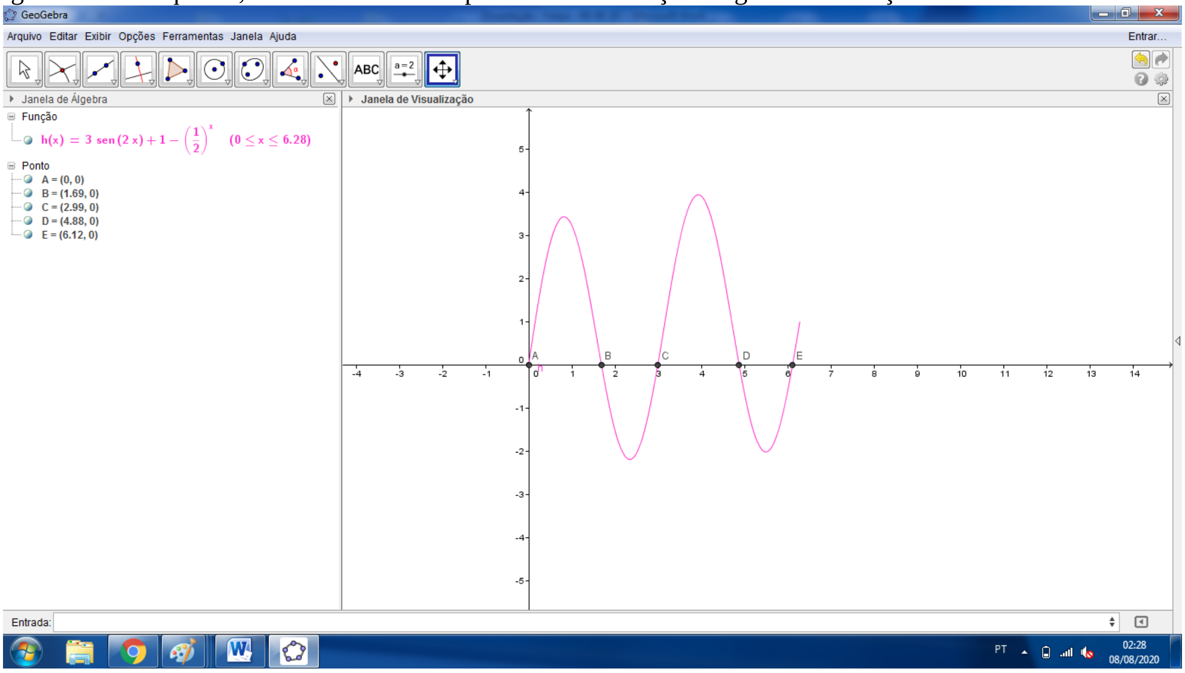


Fonte: O autor.

Conforme é sugerido na Figura 72, no intervalo $[0, 2\pi]$ a função h intersecta o eixo x em 5 pontos. Assim, concluímos que nesse intervalo a equação $h(x) = 0$, ou seja, a equação $f(x) = g(x)$, possui 5 soluções reais.

Clicando em “intersecção de dois objetos” e depois nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas, podemos obter as coordenadas desses pontos, conforme podemos notar na Figura 73:

Figura 73 – À esquerda, as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função $\boldsymbol{h}$ com o eixo $\boldsymbol{x}$.



Fonte: O autor.

Note que as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de h com o eixo x, mostrados na Figura 73, são exatamente as mesmas dos pontos de intersecção do gráfico das funções f e g, apresentados na Figura 71.

4.3 EXEMPLO 2: LOGARÍTMICA, MODULAR E POLINOMIAL

2) (UFRGS – 2010) – Representando no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das funções reais de variável real $f(x) = \log|x|$ e $g(x) = x(x^2 - 4)$, verificamos que o número de soluções da equação $f(x) = g(x)$ é:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Solução:

Neste segundo exemplo, o professor pode comentar que, apesar de o enunciado já ter definido as funções f e g, é preciso saber o que se quis dizer com “número de soluções da equação $f(x) = g(x)$". Em primeiro lugar, devem concluir que a equação apresentada é não algébrica, visto que combina uma expressão logarítmica com uma polinomial. Depois, o professor deve lembrar aos alunos que, para encontrar o número de soluções reais de uma equação não algébrica da forma $f(x) = g(x)$, eles devem traçar os gráficos das funções f e g em um mesmo plano cartesiano e contar o número de pontos de intersecção desses gráficos, quando possível.

Vamos supor que o professor oriente seus alunos a começarem pelo gráfico da função logarítmica $f(x) = log \mid x \mid$. Várias observações podem ser feitas a respeito dessa função. O professor pode começar explorando o conceito de base do logaritmo. Na sequência pode sugerir que pensem no domínio da função. Pode questionar de que forma a presença do módulo no logaritmando influencia o conjunto domínio. Diferentemente da função que a cada valor positivo de x associa o valor do logaritmo de x, a função f, por apresentar o módulo no logaritmando, está definida também para valores negativos da variável real x. O único número real em que a função f não está definida é o zero, dada a definição de logaritmo de um número real. Portanto, conclui-se que $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Agora, determinado o domínio, o professor pode trabalhar com a definição de módulo de um número real, analisar o que acontece com os valores de f para valores positivos e para valores negativos de x:

- Se $x > 0$, então $| x | = x$. Logo, para todo $x > 0$ o gráfico da função f(x) = log | x | coincide com o gráfico da função que a cada x associa o valor log x.
- Se $x < 0$, então $| x | = – x$. Logo, para todo $x < 0$, o gráfico da função f(x) = log | x | coincide com o gráfico da função que a cada x associa o valor log (– x).

Portanto, a função f pode ser definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} \log\ x, & se\ x > 0. \\ \log\ (-x), & se\ x < 0. \end{cases}$$

Visando utilizar alguns conceitos vistos 3.4.7, ele pode verificar com os alunos que a função f é par:

$$f(-x) = \log\ |-x\ | \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = \log\ |-1\ .\ x\ | \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = \log\ (|-1|\ .\ |\ x\ |) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = \log\ (1\ .\ |x\ |) \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = \log\ |\ x\ | \quad \Leftrightarrow$$
$$f(-x) = f(x).$$

E como a função f é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Portanto, construindo a parte do gráfico que se encontra à direita do eixo y, basta utilizar a ideia de simetria para construir a outra parte, que ficará à esquerda do eixo y. Para isso, pode-se pensar apenas na primeira sentença que define a função f. Dado que:

$$f(x) = \begin{cases} \log\ x, & se\ x > 0. \\ \log\ (-x), & se\ x < 0. \end{cases},$$

pode-se utilizar a função $i(x) = logx$, definida para todo $x > 0$.

Para a construção do gráfico de i, o professor pode sugerir que os alunos determinem três ou mais pontos. Vamos supor que ele escolheu determinar apenas três: o ponto de intersecção do gráfico com o eixo x e mais dois pontos de abscissa positiva.

A abscissa do ponto de intersecção do gráfico de i com o eixo x é o valor de x tal que $i(x) = 0$. Então:

$$i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad logx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad logx = log1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Assim, o ponto obtido é A = (1, 0).

Para obter um segundo ponto, como a base do logaritmo é igual a 10, o professor pode atribuir a x o valor 10.

$$i(10) = log10 \quad \Leftrightarrow \quad i(10) = 1.$$

Logo, o ponto obtido será B = (10, 1).

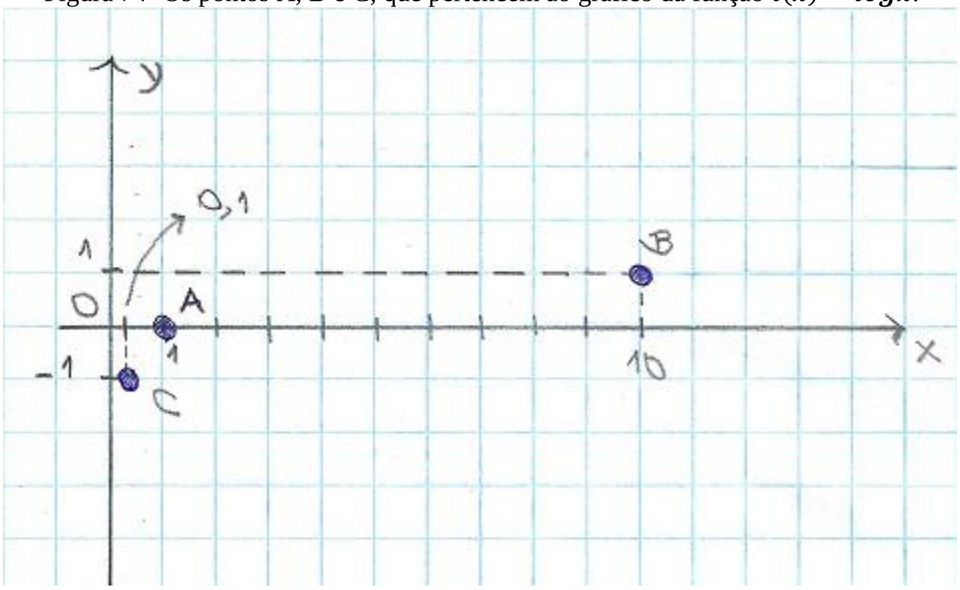
Para obter um ponto abaixo do eixo x, o professor pode dar a ideia de atribuírem à x um valor entre 0 e 1. Uma boa escolha é fazer x = 0,1, pois 0,1 = 10^{-1}, o que fornecerá um valor inteiro para a ordenada do ponto. Assim,

$$i(0{,}1) = log0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad i(0{,}1) = log10^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad i(0{,}1) = -1.$$

Caso seja preciso desenhar mais uma parte do gráfico, pode-se atribuir outros valores para x, conforme a necessidade. É importante que o professor lembre aos seus alunos que ainda não se sabe em qual intervalo ou em quais intervalos os gráficos se intersectarão.

Localizando os pontos A, B e C no plano cartesiano, obtemos a Figura 74.

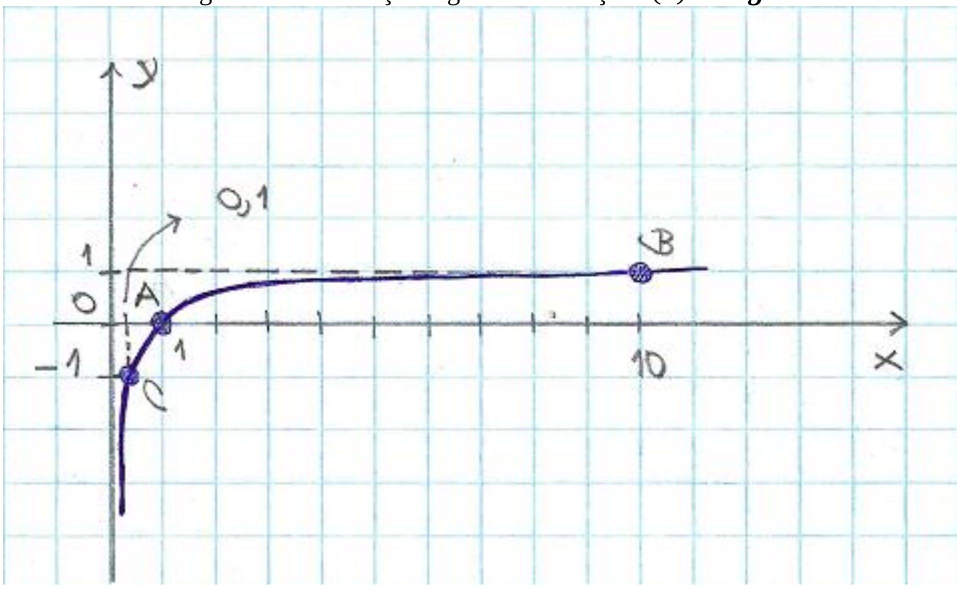
Figura 74- Os pontos A, B e C, que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{i(x) = logx}$.



Fonte: O autor.

Nesse momento, o professor pode lembrar aos alunos que a função logarítmica da forma $f(x) = log_a x$ é a inversa da função exponencial $f^{-1}(x) = a^x$. Isto será útil no momento de ligar os pontos A, B e C, para obter um esboço do gráfico da função $i(x) = logx$, apresentado na Figura 75.

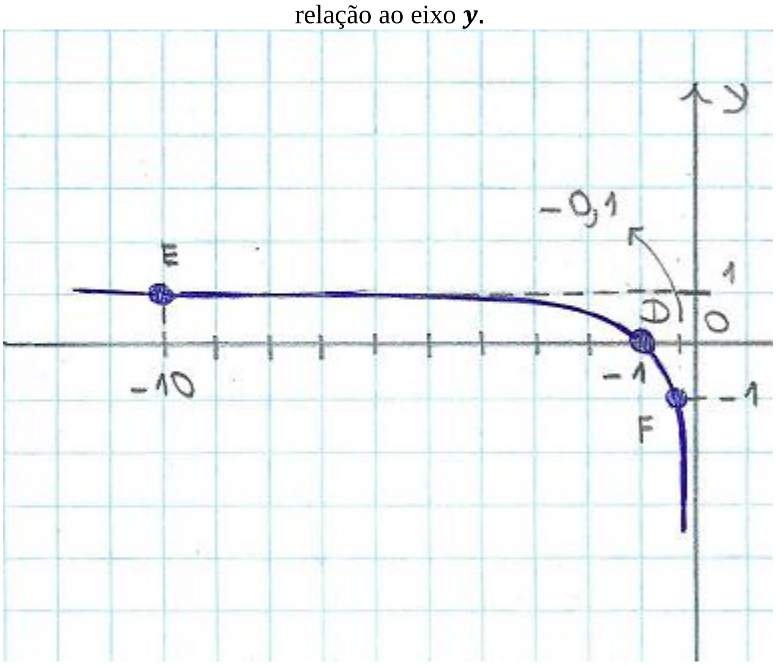
Figura 75 – O esboço do gráfico da função $\boldsymbol{i(x) = logx}$.



Fonte: O autor.

É importante o professor comentar que, mesmo tomando valores de x cada vez mais próximos de zero, o gráfico da função i nunca tocará o eixo y. Por fim, para obter a parte do gráfico de f, que fica à esquerda do eixo y, correspondente à função $j(x) = log(-x)$, é só refletir o gráfico de i simetricamente em relação ao eixo das ordenadas, conforme podemos observar na Figura 76.

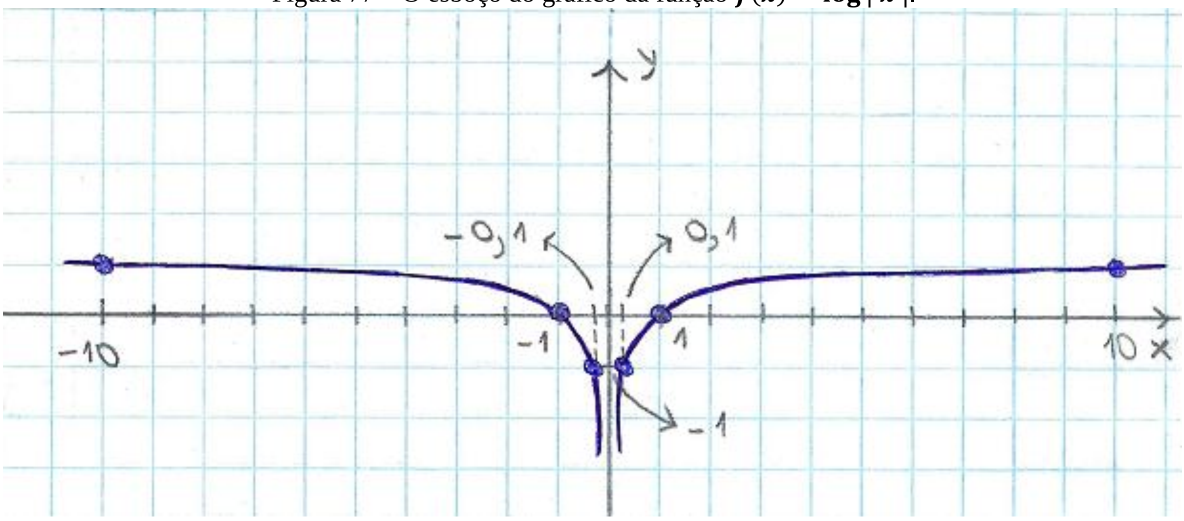
Figura 76 – O esboço do gráfico da função $\boldsymbol{j(x) = \log(-x)}$, obtido pela reflexão do esboço do gráfico de $\boldsymbol{i}$ em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$.



Fonte: O autor.

Ao esboçar os gráficos da funções i e j num mesmo plano cartesiano, obtém-se o esboço do gráfico da função f (Figura 77):

Figura 77 – O esboço do gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = \log | x |}$.



Fonte: O autor.

O próximo passo é a construção do esboço do gráfico da função g. Após apresentar os conceitos de função polinomial e observar que vale:

$$g(x) = x.(x^2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = x^3 - 4x,$$

o professor pode propor a construção do gráfico dessa função. Como o grau é 3, a função terá no máximo três zeros.

Para determinarem os zeros de g, é preciso resolver a equação $g(x) = 0$. Para encontrar as raízes dessa equação, o professor pode sugerir aos alunos alguns caminhos. Um deles e, por sinal, bem simples, seria fatorar a expressão de g. Outro seria aplicar o Teorema das Raízes Racionais. Aqui, vamos supor que o recurso escolhido para a determinação dos zeros de g foi a fatoração. Com base na equação $g(x) = 0$, tem-se que:

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 4) = 0.$$

Fatorando a diferença de dois quadrados, tem-se que:

$$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0.$$

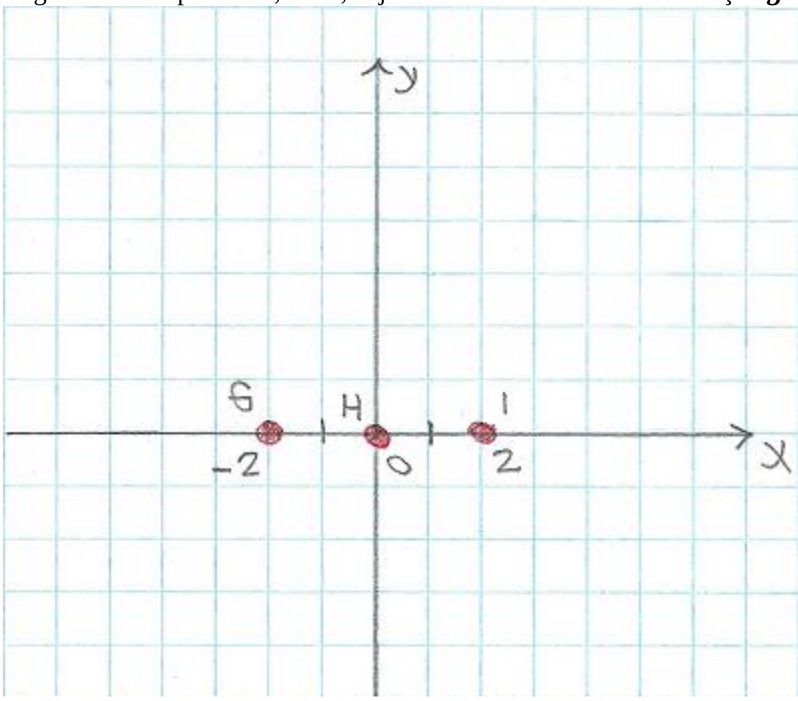
Pela Lei do Cancelamento, tem-se que:

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Como a função g admite três zeros, e todos distintos entre si, eles podem concluir que o gráfico de g vai intersectar o eixo x em três pontos distintos. Os pontos serão G = (– 2, 0), H = (0, 0) e I = (2, 0).

Localizando os pontos G, H e I no plano cartesiano, obtemos a $\boxed{\text{Figura 78}}$.

Figura 78 – Os pontos G, H e I, cujas abscissas são os zeros da função $\boldsymbol{g}$.



Fonte: O autor.

Uma outra característica relevante sobre a função g diz respeito à classificação em par, ímpar ou nem par e nem ímpar. Fazendo os cálculos abaixo, conclui-se que a função g é ímpar:

$$g(-x) = (-x).[(-x)^2 - 4] \quad \Leftrightarrow$$
$$g(-x) = -x.(x^2 - 4) \quad \Leftrightarrow$$
$$g(-x) = -[x.(x^2 - 4)] \quad \Leftrightarrow$$
$$g(-x) = -g(x).$$

Como g é ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas.

O estudo de máximos e mínimos de funções polinomiais de grau maior do que 2 geralmente é feito apenas no Ensino Superior. Portanto, para que saibam o sinal da função nos intervalos localizados entre os zeros de g, propomos determinar mais alguns pontos do gráfico. Sugerimos atribuir valores inteiros a *x*.

No intervalo (0, 2), adotando *x* = 1, tem-se que:

$$g(1) = 1 \cdot (1^2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad g(1) = -3.$$

Assim, o ponto obtido será J = (1, – 3). Como a função é ímpar, poderão usar o fato de que $g(-1) = -g(1)$, concluindo que g(– 1) = 3. Dessa forma, obtém-se o ponto K = (– 1, 3), cuja abscissa pertence ao intervalo (– 2, 0).

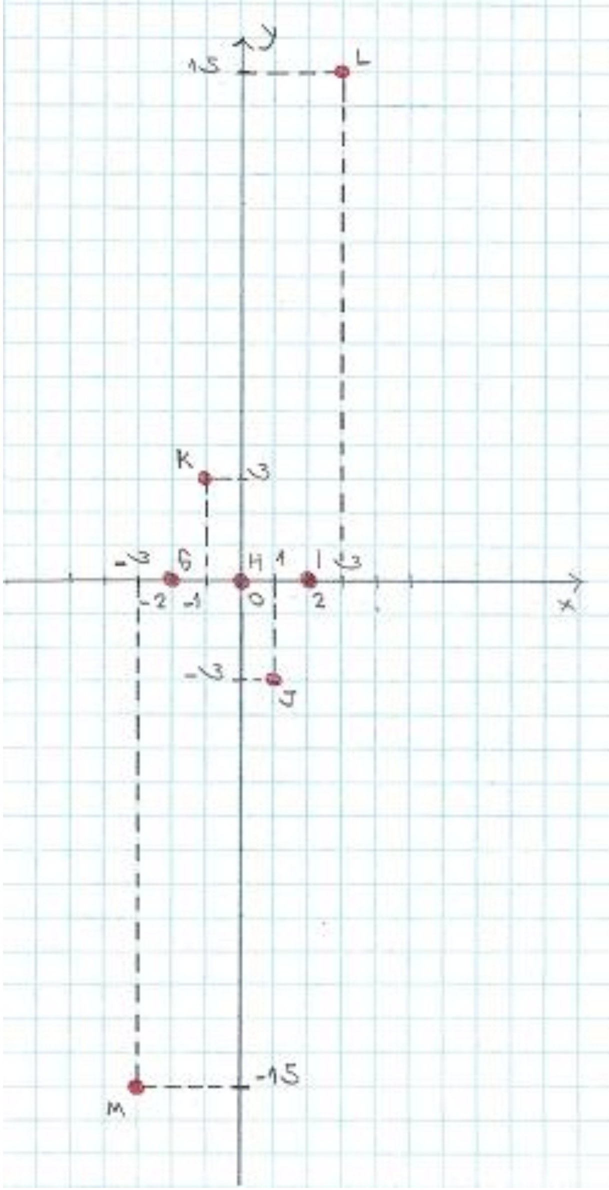
Já no intervalo (2, ∞), atribuindo a *x* o valor 3, teremos:

$$g(3) = 3.(3^2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad g(3) = 15.$$

Feito isso, o ponto obtido será L = (3, 15). Como a função é ímpar e $g(3) = 15$, podemos concluir que g(– 3) = – 15. Assim, obtemos o ponto M = (– 3, – 15), cuja abscissa pertence ao intervalo ($-\infty$, – 2).

Localizando os pontos J, K e L no plano, obtemos a Figura 79.

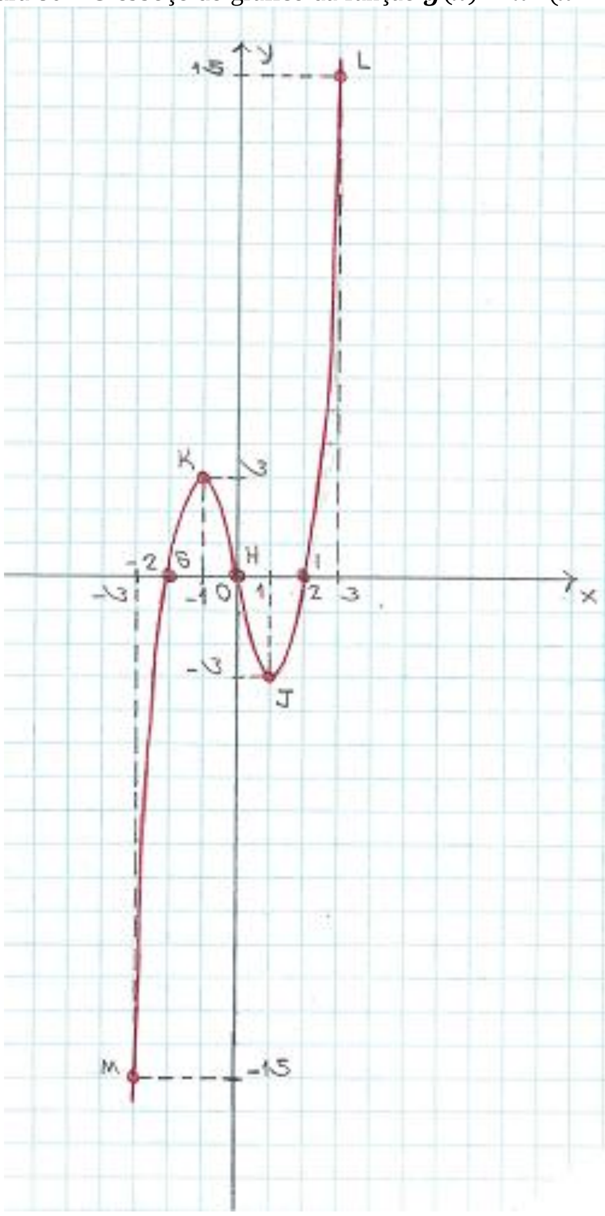
Figura 79 – Os pontos G, H, I, J, k e L, que pertencem ao gráfico da função $\boldsymbol{g}$.



Fonte: O autor.

Como a função polinomial é contínua, os pontos G, H, I, J, K e L indicam como deve ser traçado o esboço do gráfico da função g, apresentado na Figura 80.

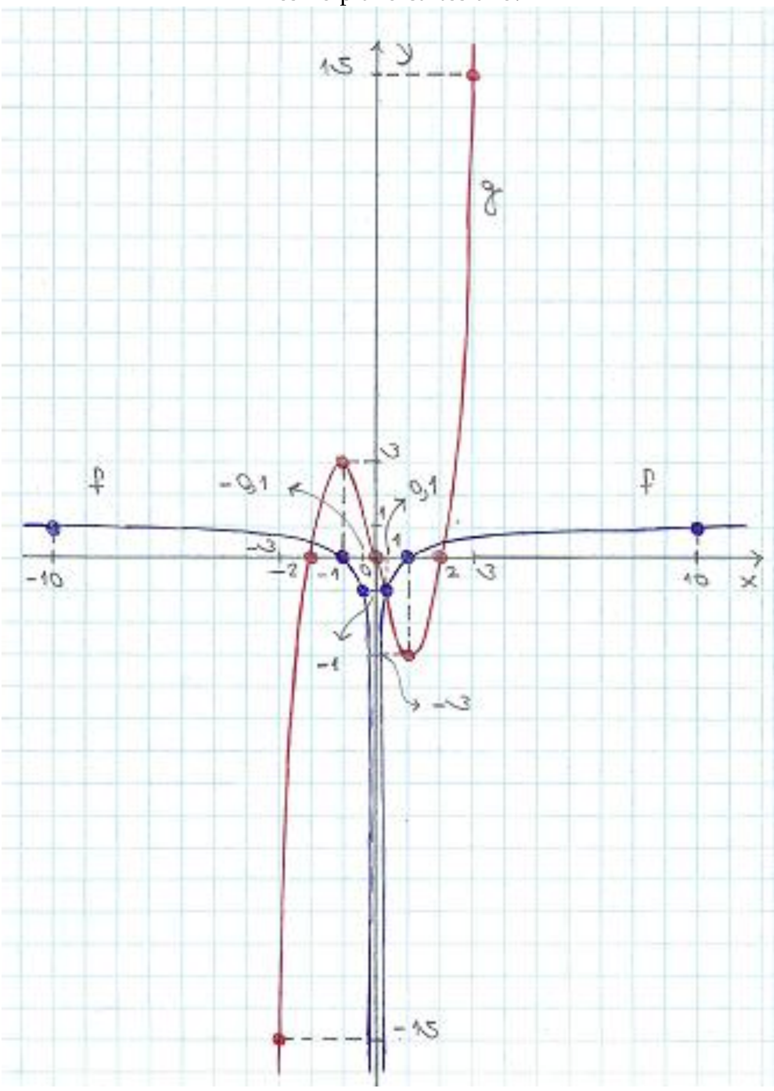
Figura 80 – O esboço do gráfico da função $\boldsymbol{g(x) = x \cdot (x^2 - 4)}$.



Fonte: O autor.

Agora que os alunos já esboçaram os dois gráficos, o professor deve sugerir a eles que representem os esboços dos gráficos em um mesmo plano cartesiano, distinto dos dois planos já utilizados. Representando os esboços dos gráficos de f e g num mesmo plano cartesiano, obtemos a Figura 81.

Figura 81 – Os esboços dos gráficos das funções $\boldsymbol{f(x) = \log|\,x\,|}$ e $\boldsymbol{g(x) = x \cdot (x^2 - 4)}$, representados num mesmo plano cartesiano.



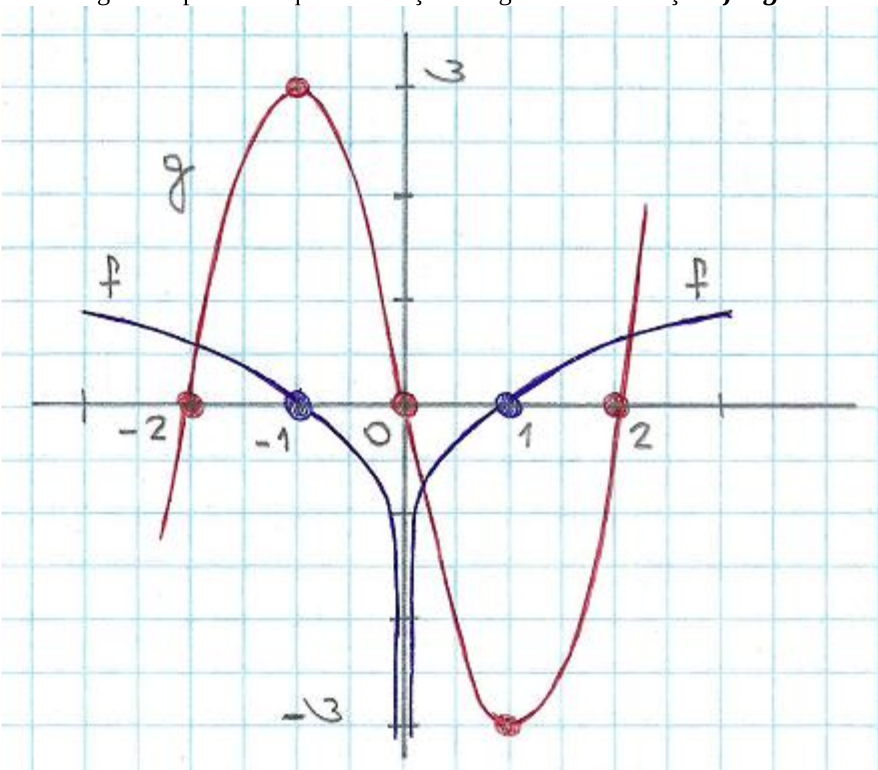
Fonte: O autor.

Com base na Figura 81 os alunos podem concluir que os gráficos das funções se intersectam em 3 pontos, indicando que a equação

$$log|\,x\,| = x \cdot (x^2 - 4)$$

admite 3 raízes reais. Na Figura 82 podemos ver com mais detalhes a região do plano onde estão localizados os pontos de intersecção dos esboços dos gráficos de f e g.

Figura 82 – Região do plano em que os esboços dos gráficos das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ se intersectam.



Fonte: O autor.

4.4 EXEMPLO 2 – LOGARÍTMICA, MODULAR E POLINOMIAL – CONSTRUÇÃO GRÁFICA NO GEOGEBRA

No GeoGebra a construção dos gráficos das funções f e g pode ser feita com os seguintes comandos:

1. No campo “Entrada”, digitar:

$$f(x) = log10(abs(x))$$

2. Apertar “enter”.

3. No campo “Entrada”, digitar:

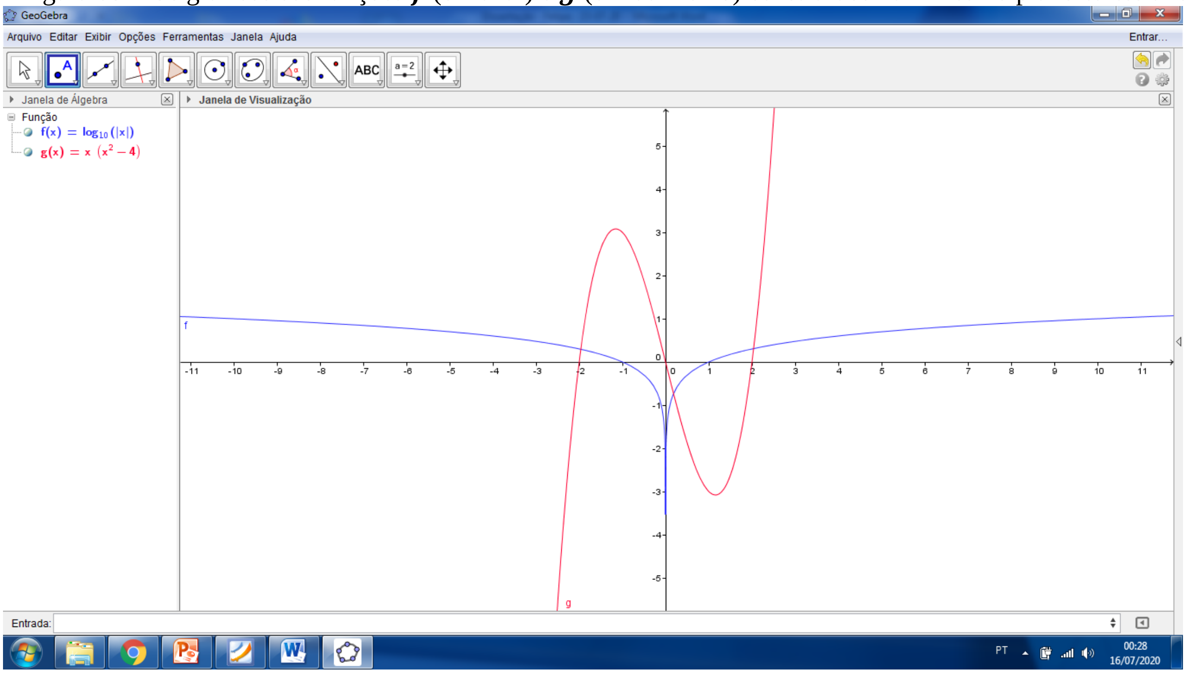
$$g(x) = x * (x^2 - 4)$$

4. Apertar “enter”.

Observação: As cores dos gráficos foram alteradas.

Após a realização desses comandos, aparecerá na tela os gráficos de f e g num mesmo plano cartesiano, conforme podemos observar na Figura 83.

Figura 83 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f}$ (em azul) e $\boldsymbol{g}$ (em vermelho) construídos num mesmo plano cartesiano.



Fonte: O autor.

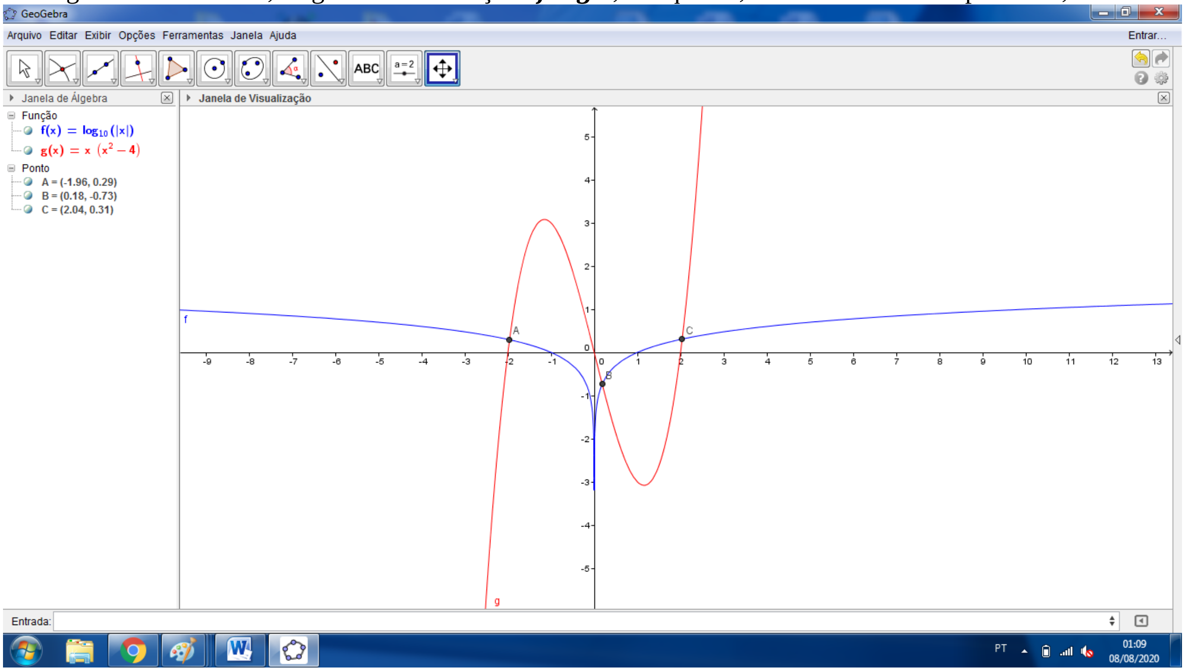
Conforme é sugerido na Figura 83, os gráficos de f e g se intersectam em 3 pontos, confirmando que a equação $f(x) = g(x)$ possui 3 raízes reais.

Nesse momento o professor pode, juntamente com os alunos, obter os valores aproximados das abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos, seguindo o roteiro abaixo:

1. Clicar em “intersecção de dois objetos”.
2. Clicar nos pontos de encontro dos gráficos de f e g.

Com isso, os pontos de intersecção dos gráficos são destacados e as coordenadas desses pontos podem ser vistas à esquerda da tela, conforme podemos observar na Figura 84:

Figura 84 – À direita, os gráficos das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ e, à esquerda, as coordenadas dos pontos A, B e C.



Fonte: O autor.

Nesse momento o professor pode relembrar a segunda maneira de determinar o número de soluções reais de uma equação não algébrica da forma $f(x) = g(x)$, definindo a função auxiliar $h = f - g$.

A construção do gráfico da função $h = f - g$ pode ser feita com os seguintes comandos:

1. No campo “Entrada”, digitar:

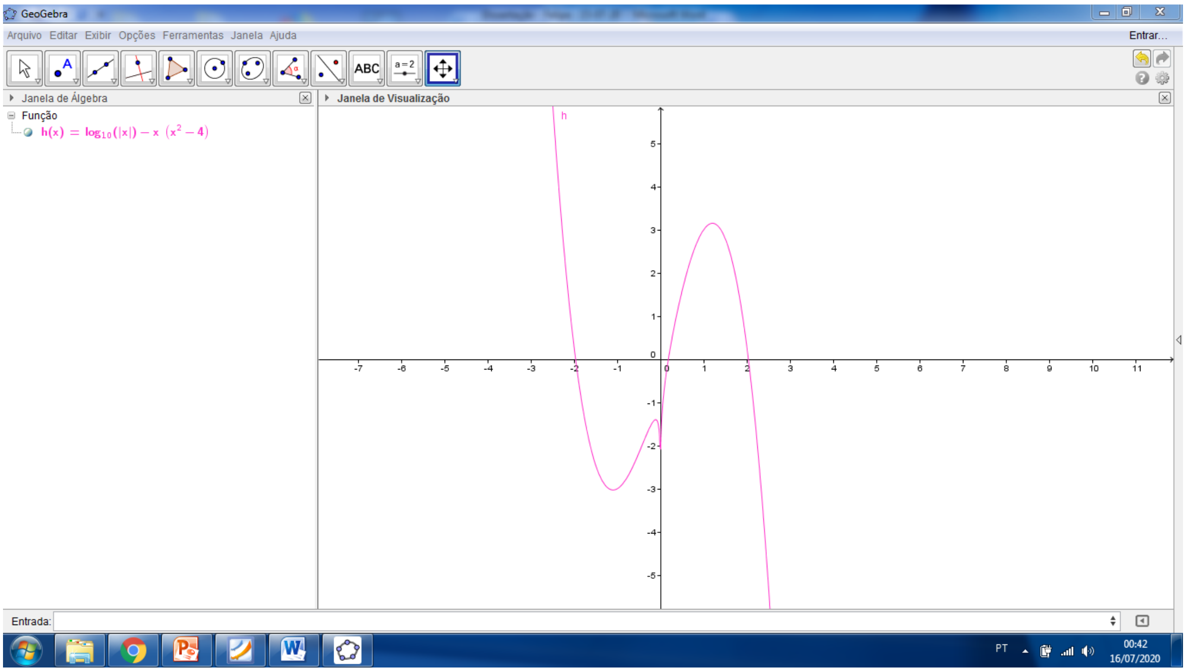
$$h(x) = log10\big(abs(x)\big) - x * (x^2 - 4)$$

2. Apertar “enter”.

Observação: A cor do gráfico foi alterada.

Após a realização desses passos, aparecerá na tela o gráfico da função h, conforme podemos observar na Figura 85.

Figura 85 – O gráfico da função $\boldsymbol{h(x) = log \mid x \mid - x \cdot (x^2 - 4)}$.

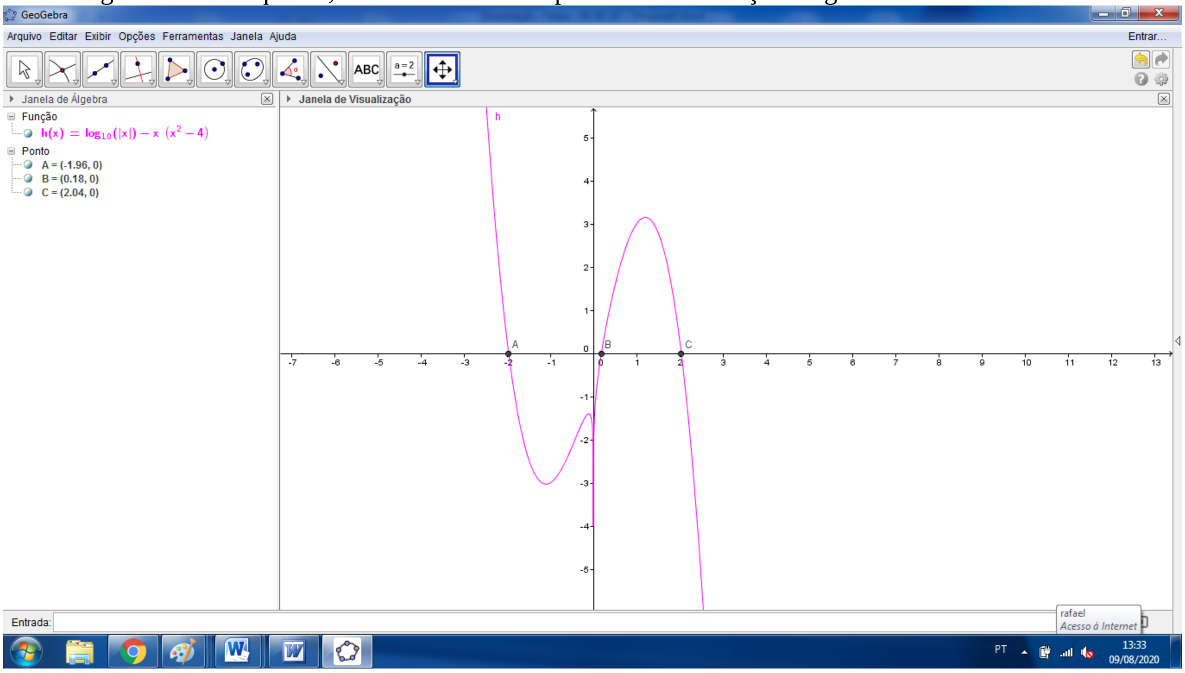


Fonte: O autor.

Conforme é sugerido na Figura 85, o gráfico da função h intersecta o eixo x em 3 pontos. Assim, concluímos que a equação $h(x) = 0$, ou seja, que a equação $f(x) = g(x)$ possui 3 raízes reais.

Clicando em “intersecção de dois objetos” e depois nos pontos de intersecção do gráfico de h com o eixo das abscissas, podemos obter as coordenadas desses pontos, conforme podemos notar na Figura 86.

Figura 86 – À esquerda, as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de $\boldsymbol{h}$ com o eixo $\boldsymbol{x}$.



Fonte: O autor.

Note que as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de h com o eixo x, mostrados na Figura 86, são as mesmas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e g, apresentados na Figura 84.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, é apresentada uma técnica para determinar o número de soluções reais de equações não algébricas de forma manual, com base na construção gráfica das funções. Esse recurso geométrico se faz necessário nesse tipo de situação, pois não há recursos algébricos que resolvam tal caso. E para que o aluno sinta segurança em sua resolução e possa confirmar se o que fez realmente está correto, é sugerido o uso de um *software* que permite a construção de gráficos.

Acredita-se que a metodologia apresentada neste trabalho é suficiente para ampliar a compreensão dos professores dos anos finais do ensino médio em relação ao tema escolhido, de modo que eles possam despertar no aluno a capacidade de perceber que determinadas questões devem ser pensadas de forma geométrica, ao invés de apenas algébrica, além de proporcionar o embasamento necessário à construção manual dos gráficos das funções.

Outra ideia interessante contida no presente trabalho é o incentivo de recursos computacionais em aulas tradicionais, de forma a enriquecer a abordagem do tema. Para tal objetivo, foi apresentado um roteiro detalhado contendo os comandos do *software* Geogebra, necessários para a construção gráfica computacional das funções estudadas, de forma a confirmar os resultados gráficos obtidos manualmente. O fato de aprender a manusear um programa computacional como esse permite que, com o tempo, o próprio aluno tire suas dúvidas em relação aos aspectos da álgebra e da geometria.

Tendo em vista as exposições realizadas, sugere-se que o presente trabalho possa servir também como material de apoio e de complementação no estudo de funções elementares, destinados aos alunos dos anos finais do ensino médio.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. 2. Ed., v. 1. São Paulo: Moderna, 1995.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto & Aplicações. v. 1. São Paulo: Ática, 2011.

GEOGEBRA. Disponível em: http://www.geogebra.org/. Acesso em: 12 de out. 2018.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática fundamental**: uma nova abordagem. Volume único. São Paulo: FTD, 2002.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GIUDICE, J. et. al. **Matemática:** pré-vestibular. v. 3. São José dos Campos: Poliedro, 2019.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciência e aplicações**: ensino médio. 5 ed. v. 2. São Paulo: Atual, 2016.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias.** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção PROFMAT).

LONGEN, A. **Matemática:** ensino médio (1º ano)**.** 1. ed. Curitiba: Positivo, 2004a. (Coleção Nova Didática).

LONGEN, A. **Matemática:** ensino médio (3º ano)**.** 1. ed. Curitiba: Positivo, 2004b. (Coleção Nova Didática).

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Volume único. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. Volume único. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

NEMITZ, V. **Matemática:** ensino médio (1º ano). V. 3. Curitiba: Positivo, 2015.

PAIVA, M. **Matemática.** 1. ed. Volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

PRAZERES, L. C. **Extensivo e Terceirão.** v. 6. Curitiba: Positivo, 2014.

RIBEIRO, J. **Matemática**: Ciências, Linguagem e Tecnologia. 1 ed., v. 1. São Paulo: Scipione, 2012a.

RIBEIRO, J. **Matemática**: Ciências, Linguagem e Tecnologia. 1 ed., v. 2. São Paulo: Scipione, 2012b.

RIBEIRO, J. **Matemática**: Ciências, Linguagem e Tecnologia. 1 ed., v. 3. São Paulo: Scipione, 2012c.

SILVA, C. X. da.; FILHO, B. B. **Matemática aula por aula.** Volume único. São Paulo: FTD, 2000.

SILVA, C. X. da; FILHO, B. B. . **Matemática aula por aula**. (3º série). 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.

SOUZA, J. R. de; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática** (7º ano). 2. Ed. v. 2. São Paulo: FTD, 2012.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 10 ed., v. 1. São Paulo: Pearson, 2002.

APÊNDICE A- LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Aqui apresentamos algumas questões de vestibulares cuja resolução consiste em analisar os gráficos das funções relacionadas a uma equação não algébrica. Com exceção da questão 13, que já fornece os gráficos das funções, em todas as outras o vestibulando precisa construir os gráficos pra poder fazer a análise necessária.

Da mesma forma que aconteceu com os exemplos comentados na seção 4, sugerimos que o professor proponha a seus alunos que primeiro construam os gráficos utilizando apenas lápis, borracha, canetas coloridas e papel quadriculado. Após a construção manual, a sugestão é que construam esses mesmos gráficos utilizando o GeoGebra, de modo a comparar as construções e verificar os resultados encontrados na primeira etapa.

1) (UFRGS) – Definindo funções convenientes e traçando seus gráficos num mesmo sistema de coordenadas, verifica-se que o número de soluções da equação

$log\,(x+1) = x^2 - 3x$ é:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

2) (FUVEST – SP) – A equação $2^x = -3x + 2$, com x real,

a) não tem solução.
b) tem uma única solução entre 0 e 2/3.
c) tem uma única solução entre – 2/3 e 0.
d) tem duas soluções, sendo uma positiva e outra negativa.
e) tem mais de duas soluções.

3) (UFRGS) – Dadas as funções reais de variável real f e g, definidas por $f(x) = -log_2(x)$ e $g(x) = x^2 - 4$, pode-se afirmar que $f(x) = g(x)$ é verdadeiro para um valor de x localizado no intervalo:

a) [0; 1].

b) [1; 2].

c) [2; 3].

d) [3; 4].

e) [4; 5].

4) (MACK – SP) – Se $f(x + 2) = 12.2^{x}$, $\forall x \in$ IR, então a solução real da equação $f(x) - log_2 |x| = 0$ pertence ao intervalo:

a) [– 3, – 2].

b) [– 2, – 1].

c) [– 1, 0].

d) [0, 1].

e) [1, 2].

5) (UFRGS) – Analisando os gráficos das funções reais de variável real definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$ e $g(x) = x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, verificamos que todas as raízes da equação $f(x) = g(x)$ pertencem ao intervalo:

a) [0, 3].

b) $\left(\frac{1}{2}, 4\right]$.

c) [1, 5).

d) $\left(\frac{3}{2}, 6\right]$.

e) (2, 6).

6) (UEG – GO) – Dada a função $y = x - 2^{x} + 2$, verifica-se que ela:

a) não possui raiz real.

b) possui duas raízes reais.

c) possui três raízes reais.

d) possui uma raiz real.

7) (UFRGS) – Esboçando os gráficos das funções definidas por $f(x) = 5^x$ e $g(x) = 2 + x - x^2$ num mesmo plano cartesiano, verifica-se que todas as raízes da equação $f(x) = g(x)$ pertencem ao intervalo:

a) (– 2, – 1).
b) (– 1, 0).
c) (– 1, 1).
d) (0, 1).
e) (0, 2).

8) (FGV – SP) – O número de soluções da equação $2^x - 4 = log_2 (x + 4)$ é:

a) zero.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

9) (UFRGS) – Analisando os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{-x}$ e $g(x) = \text{sen}(2x)$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, podemos afirmar que a equação $2^{-x} = \text{sen}(2x)$, para $x \in [0, 12\pi]$, possui:

a) 2 raízes.
b) 4 raízes.
c) 6 raízes.
d) 12 raízes.
e) 24 raízes.

10) (UNIFOR – CE) – Os gráficos das funções de IR_+^* em IR definidas por

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = |\ log_2 x\ |$:

a) têm dois pontos comuns, um com abscissa compreendida entre 0 e 1 e outro com abscissa compreendida entre 1 e 2.
b) têm dois pontos comuns, um com abscissa compreendida entre 0 e 1 e outro com abscissa maior que 2.
c) têm um único ponto comum, cuja abscissa está compreendida entre 0 e 1.
d) têm um único ponto comum, cuja abscissa é maior que 1.
e) não têm pontos comuns.

11) (UFRGS) – Traçando-se os gráficos das funções definidas por $f(x)$ = 2sen$x$ e $g(x) = 16 - x^2$ num mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, pode-se verificar que o número de soluções da equação $f(x) = g(x)$ é:

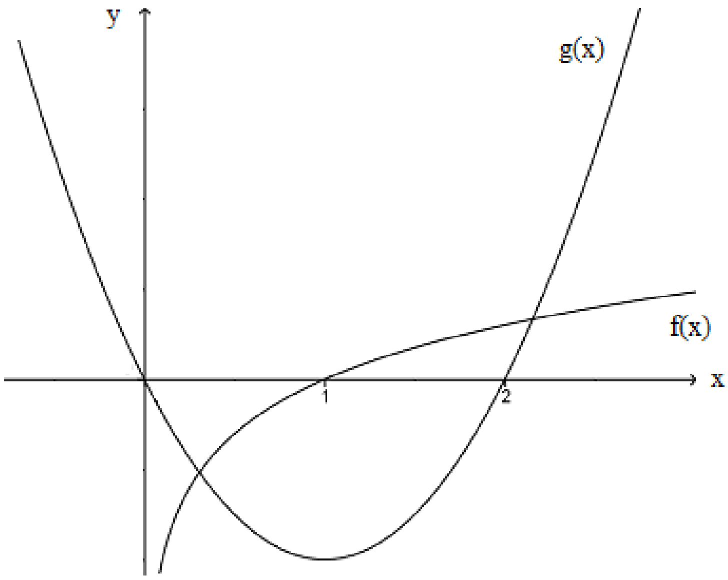
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

12) (MACK – SP) – A menor raiz da equação $log_2 2^a - 2^b = 0$, sendo $a = x^2$ e $b = log_2 2^x$ pertence ao intervalo:

a) [– 2, – 1].
b) [– 1, 0].
c) [0, 1].
d) [1, 2].
e) [2, 3].

13) (UNIFESP – SP) – A figura representa os gráficos das funções

f(x) = $\log_{10} x$ e g(x) = $x^2 - 2x$.



Pode-se afirmar que a equação $x^2 - 2x = \log_{10} x$:

a) não tem solução.

b) tem somente uma solução.

c) tem duas soluções positivas.

d) tem duas soluções cujo produto é negativo.

e) tem duas soluções cujo produto é nulo.

14) (UFRGS) – A função f é definida por $f(x) = sen\ 2x$ e g é uma função cujo gráfico não intercepta o gráfico de f, quando representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas. Entre as alternativas que seguem, a única que pode representar $g(x)$ é:

a) $sen\ x$.

b) $log x$.

c) $|\ x\ |$.

d) $2x + 3$.

e) $3 + 2^x$.