



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT.



Sérgio Ferreira dos Santos

Análise comparativa dos sistemas de amortizações: SAC e Price

Teresina
2020

Esta Página é a do “Termo de Ciência e de Autorização para publicação eletrônica do TCC pela Biblioteca da UESPI”, a qual deve ser encadernada no VERSO da página anterior. O Formulário desse Termo de Ciência está em anexo.

Sérgio Ferreira dos Santos

**Análise comparativa dos sistemas de
amortizações: SAC e Price**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.

Teresina
2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Sérgio Ferreira dos Santos graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI) no ano de 1989. Concluiu Especialização em Educação Matemática no ano de 2000 pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. É professor efetivo da rede pública municipal de Teresina; além de ser professor celetista da Associação de Ensino do Piauí - AESPI.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:

Aos meus pais: Benedito Catarino dos Santos (In memoriam) Joana Ferreira dos Santos, pessoas muito especiais que sempre contribuíram para o meu crescimento profissional, social e intelectual.

Aos meus netos, Guilherme, Maria Luísa e Bento, presentes de Deus na nossa vida!

AGRADECIMENTOS

A Deus que fez em mim maravilhas! Grandioso és Tu, Senhor! A Ti, toda honra e toda glória!

A Margareth, minha namorada, pelo companheirismo e apoio incondicional.

Às minhas filhas, Sanmya Danielle e Renata Laís, pelo incentivo, apoio, colaboração, e por se fazerem o melhor presente em minha vida, preenchendo-a de tamanho felicidade. Amo-as incondicionalmente!

Aos meus irmãos, sobrinhos, tios, genros, pelo apoio e colaboração constantes.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho, pelas iluminações no percurso, orientando com tolerância, rigor científico e sensibilidade humana.

Aos professores Dr. Laurent Marcos Prouvée e Dr. Afonso Norberto da Silva, pela acolhida ao convite e contribuições na avaliação deste trabalho.

Aos professores do Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, por contribuírem com sabedoria e competência na mediação da construção do conhecimento.

Aos colegas do curso, pela amizade e rico compartilhamento de experiências.

Aos muitos amigos e amigas que de diferentes formas contribuíram para realização deste projeto.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo da análise comparativa entre os sistemas de amortização SAC e Price. Mais especificamente, temos o objetivo de analisar numérica, analítica e graficamente os sistemas e apresentar comparações de um empréstimo nas mesmas condições financeiras (valor, taxa e prazo), enfatizando os efeitos do prazo na primeira prestação no SAC e na primeira amortização no sistema Price. Destacamos se há uma melhor opção para o consumidor na escolha entre os dois.

Palavras-chave: Análise, SAC, Price.

ABSTRACT

In this work we present a study of the comparative analysis between the SAC and Price amortization systems. More specifically, we aim to analyze the systems numerically, analytically and graphically and present comparisons of a loan under the same financial conditions (amount, rate and term), emphasizing the effects of the term on the first installment in the SAC and the first amortization in the Price system. We highlight whether there is a better option for the consumer when choosing between the two.

Keywords: Analysis, SAC, Price.

Lista de Figuras

1.1	Fluxo de caixa genérico.	25
1.2	Fluxo de caixa de empréstimo.	25
2.1	Fluxo de caixa de financiamento genérico.	37
2.2	Fluxo de caixa das prestações.	38
2.3	Fluxo de caixa da soma das amortizações.	39
2.4	Fluxo de caixa do saldo devedor.	40
2.5	Fluxo de caixa do saldo devedor.	40
2.6	Fluxo de caixa dos valores atuais.	41
3.1	Gráfico das prestações no sistema SAC.	51
3.2	Gráfico do comportamento da amortização - SAC.	52
3.3	Gráfico do comportamento dos juros - SAC.	54
3.4	Gráfico do comportamento das prestações - SAC.	54
3.5	Gráfico do comportamento dos saldos devedores - SAC.	55
4.1	Gráfico da prestação no sistema Price.	67
4.2	Gráfico do comportamento da prestação - Price.	68
4.3	Gráfico do comportamento das amortizações - Price.	70
4.4	Gráfico do comportamento dos juros - Price.	71
4.5	Gráfico do comportamento dos saldos devedores - Price.	72
6.1	Gráfico de comparação das amortizações - SAC e Price.	90
6.2	Gráfico de comparação entre juros - SAC e Price.	92
6.3	Gráfico de comparação entre prestações - SAC e Price.	93
6.4	Gráfico de comparação entre saldos devedores - SAC e Price.	94

Lista de Tabelas

2.1	Planilha das amortizações de financiamento.	42
2.2	Planilha das amortizações em P.A.	44
2.3	Planilha das amortizações iguais.	46
2.4	Planilha das prestações iguais.	49
3.1	Planilha de amortização - sistema SAC.	53
3.2	Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 1\%$	60
3.3	Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 5\%$	61
3.4	Planilha de amortização - sistema SAC genérico.	63
4.1	Planilha de amortização - sistema Price.	69
4.2	Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 1\%$	76
4.3	Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 5\%$	78
4.4	Planilha de amortização - sistema Price genérico.	80
5.1	Planilha de amortização - SAC a juros simples.	84
5.2	Planilha de amortização - Price a juros simples	86
6.1	Planilha de amortização - comparação entre os sistemas: SAC e Price.	89
6.2	Planilha de comparação entre amortizações.	91
6.3	Planilha de comparação entre juros.	92
6.4	Planilha das características dos sistemas: SAC e Price.	96
6.5	Planilha de comparação entre prestações.	97
6.6	Planilha dos pontos de reversão para $n = 120$	99
6.7	Planilha dos pontos de reversão para $n = 240$	100
6.8	Planilha dos pontos de reversão para $i = 1\%$	102
6.9	Planilha dos pontos de reversão para $i = 10\%$	102

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Importância da Matemática Financeira no Ensino Médio	15
1.2 Conceitos fundamentais	18
1.3 Progressões Aritméticas	18
1.4 Progressões Geométricas	20
1.5 Logaritmo	21
1.6 Função Contínua	22
1.7 Limite de funções	22
1.8 Derivada	23
1.9 Limites indeterminados e Regra de L'Hôpital	24
1.10 Diagrama do fluxo de caixa	24
1.11 Juro, montante e taxa de Juros	26
1.12 Regimes de capitalização de juros: simples e compostos	26
1.12.1 Juros simples	26
1.12.2 Juros compostos	27
1.12.3 Convenção linear e exponencial para período não inteiros	27
1.12.4 Taxas equivalentes	28
1.13 Equivalência de capitais	29
1.13.1 Considerando pagamentos individuais	29
1.13.1.1 Regime de capitalização simples	29
1.13.1.2 Regime de capitalização composta	29
1.13.2 Considerando-se séries de pagamentos iguais ou diferentes	30
1.13.2.1 Regime de capitalização simples	30
1.13.2.2 Regime de capitalização composta	30
1.14 Séries uniformes	33
2 Sistemas ou métodos de amortização	34
2.1 Introdução	34
2.2 Tipos de sistemas ou métodos de amortização	35
2.3 Características básicas de um sistema de amortização	36
2.4 Fluxo de caixa de financiamento genérico	37

2.5	Nomenclatura adotada	37
2.5.1	Característica básicas de um sistema de amortização	38
2.6	Planilha de amortização	42
3	Sistema de Amortizações Constantes - SAC	51
3.1	Análise da Tabela 3.1	53
3.1.1	Em relação aos juros	53
3.1.2	Em relação as prestações	54
3.1.3	Em relação aos saldos devedores	55
3.2	Expressões do sistema numa época qualquer	56
3.2.1	Valor da amortização	56
3.2.2	Valor do juro	56
3.2.2.1	Cálculo do juro na época k	56
3.2.2.2	Cálculo do total de juros pagos	57
3.2.3	Valor da prestação	58
3.2.3.1	Cálculo do valor da prestação na época k	58
3.2.3.2	Efeitos do prazo do financiamento sobre o valor da primeira prestação	58
3.2.3.3	Cálculo da soma das prestações.	62
3.2.4	Valor do saldo devedor	62
3.2.4.1	Método retrospectivo - método que envolve as amortizações pagas.	62
3.2.4.2	Método prospectivo - método que envolve as amortizações não pagas.	62
3.3	Planilha de amortização	63
3.4	Aplicações das expressões genéricas	63
4	Sistema de prestações constantes ou método francês ou sistema Price	67
4.1	Análise da Tabela 4.1	70
4.1.1	Em relação as amortizações	70
4.1.2	Em relação aos juros	71
4.1.3	Em relação aos saldos devedores	72
4.2	Expressões genéricas do sistema numa época qualquer	72
4.2.1	Valor da prestação	72
4.2.2	Valor da amortização no período k (A_k)	73

4.2.2.1	Em função da primeira amortização (A_1)	73
4.2.2.2	Em função do valor do financiamento (D_0)	74
4.2.3	Efeitos do prazo do financiamento sobre o valor da primeira amortização	74
4.2.4	Valor do juro	78
4.2.4.1	Cálculo de juros na época k	78
4.2.4.2	Total de juros pagos.	79
4.2.5	Valor do saldo devedor	79
4.3	Planilha de amortização	80
4.4	Aplicações das expressões genéricas	80
5	Sistemas de amortização: SAC e Price a juros simples	83
5.1	Sistema SAC	83
5.2	Sistema Price	85
6	Comparação numérica, gráfica e analítica entre os sistemas: SAC e Price	88
6.1	Comparação entre as amortizações	90
6.2	Comparação entre os juros	92
6.3	Comparação entre as prestações	93
6.4	Comparação entre os estados de dívidas	94
6.5	Características dos sistemas de amortização: SAC e Price.	96
6.6	Ponto de reversão da prestação	96
6.6.1	Ponto de reversão da prestação na época k	97
6.6.2	Ponto de reversão com prazo fixo e taxa variável	99
6.6.3	Limite do ponto de reversão quando a taxa tende a zero	100
6.6.4	Ponto de reversão com taxa fixa e prazo variável	101
6.6.5	Limite do ponto de reversão (k) quando n tende infinito	102
6.7	Escolha entre os sistemas de amortização	103
7	Considerações finais	107
	Referências	109

1 INTRODUÇÃO

No estudo da Matemática Financeira, além dos cálculos lineares, utilizamos também os cálculos exponenciais, por meio de ferramentas como potenciação, radiciação e o logaritmo, principalmente na resolução de problemas de juros compostos, séries uniformes e sistemas de amortização. Os conhecimentos desta área facilitam, por exemplo, o entendimento sobre a cobrança de juros sobre determinada compra, permitindo a decisão de comprar ou não à vista, mediante a obtenção de desconto oferecido pelo vendedor na aquisição de um produto. Como exemplo de aplicabilidade, nos financiamentos de veículos e principalmente da casa própria, podem ser oferecidas duas maneiras de amortizar a dívida. A primeira: prestações iguais; a segunda: amortizações constantes, ou seja, as prestações possuem valores diferentes.

Vamos analisar um financiamento com o mesmo valor de financiamento, número de parcelas e a mesma taxa e o mutuário tiver condições de optar pela amortização de prestações constantes ou de valores diferentes, e tentar identificar qual o mais vantajoso para o consumidor, se existem benefícios principalmente em relação aos juros a serem pagos.

Esta dissertação está organizada como segue:

No primeiro capítulo, apresenta-se os conceitos básicos de Matemática Financeira, que serão necessários para a compreensão devida sobre sistema de amortização e a importância da matemática financeira para o Ensino Médio, enfatizando principalmente o tema a ser discutido. No segundo capítulo faz-se uma exposição sobre sistema de amortização e em seguida comenta-se as cinco características comuns existentes nos sistemas de amortização. O capítulo 3 será reservado para abordar o sistema de amortização constante - SAC. Mostra-se através de exemplos e gráficos, as principais características deste sistema. No quarto capítulo aborda-se o sistema de amortização de prestação constante ou sistema francês através de exemplos e gráficos as suas principais características deste sistema. O quinto capítulo mostra que aplicação do regime de juros simples nos cálculos de juros nestes sistema traz prejuízo para o devedor ou o credor. O sexto capítulo apresenta a análise comparativa numérica, analítica e gráfica entre os sistemas SAC e Price, mostrando a equivalência dos sistemas quando empregado nas mesmas condições; os efeitos do prazo na primeira prestação (SAC) e na primeira amortização (Price) e ponto de reversão das prestações.

Por fim, no último capítulo relatamos as principais conclusões obtidas após o estudo da análise entre os dois sistemas estudados.

1.1 Importância da Matemática Financeira no Ensino Médio

Temos sido desafiados a aperfeiçoar a prática docente, reconhecendo os estudantes como sujeitos do processo e que as experiências de mediação da aprendizagem favoreçam não somente ao conhecimento, mas também a sua aplicação.

Se nos reportarmos aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PC-NEM) [3], podemos ilustrar o registro sobre os objetivos do Ensino Médio, quando explicita que:

“Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo.”(PCNEM - Brasil, 1999).”.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio(DCNEM) [4], quando trata da organização curricular, dentre outros pressupostos no seu artigo 7º, parágrafo 3º afirma que:

“As aprendizagens essenciais são as que desenvolvem competências e habilidades entendidas como conhecimentos em ação, com significado para a vida, expressas em práticas cognitivas, profissionais e socioemocionais, atitudes e valores continuamente mobilizados, articulados e integrados, para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do exercício da cidadania e da atuação no mundo do trabalho.”.

Assim, percebe-se a importância de que o conhecimento adquirido tenha sentido para aplicação na vida cotidiana, e um tema relevante e com grande aplicabilidade prática dentro da Matemática é a Matemática Financeira. Os conhecimentos desta disciplina facilitam, por exemplo, o entendimento sobre a cobrança de juros sobre determinada compra, permitindo a decisão de comprar ou não à vista, mediante a obtenção de desconto oferecido pelo vendedor na aquisição de um produto. Desse modo, as ferramentas da Matemática Financeira ajudarão a indicar a decisão mais apropriada a ser tomada para cada caso.

George [2] *et al.* (p. 17, 2012) definem Matemática Financeira:

“A matemática financeira trata, essencialmente, do estudo do valor do dinheiro (caixa) no decorrer do tempo. Ou seja, ela parte do princípio de que determinada quantia, avaliada em qualquer moeda existente e em determinada data, tem um valor financeiro diferente se estiver em qualquer outra data. Assim, o objetivo da matemática financeira é analisar operações de caráter financeiro que envolvam entradas e saídas de dinheiro ocorridas em momentos distintos”.

Ou seja, a Matemática Financeira estuda, em essência, o valor do dinheiro ao longo do tempo, isto é, o comportamento do dinheiro no tempo.

No estudo da Matemática Financeira, além dos cálculos lineares, utilizamos também os cálculos exponenciais, por meio de ferramentas como potenciação, radiciação e o logaritmo, principalmente na resolução de problemas de juros compostos, séries uniformes e sistemas de amortização. Sabemos que o ensino médio tem como uma das suas finalidades aprofundar e ampliar os conhecimentos do ensino fundamental e prepará-los para ampliação no ensino superior. O estudo dos sistemas de amortização é um aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental e de alguns do ensino médio. Configura-se um assunto importante pois trata-se de um tema do dia-a-dia de quase todos os seres humanos, pois, de modo geral, sempre haverá a necessidade de se solicitar um empréstimo imobiliário ou uma operação de Crédito Direto ao Consumidor, logo os discentes necessitam deste conteúdo para que possam tomar decisões embasadas e conscientes em relação as operações de crédito.

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM) também destacam as necessidades de abordar este tema.

“Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários. (p. 71)”.

Ou seja, é fundamental que as práticas pedagógicas e os conteúdos ministrados estejam em sintonia com as exigências dos Parâmetros Curriculares, tornando a sala de aula um ambiente agradável e que aquilo ensinado não seja empecilho para os alunos, isto é, eles sejam experiências que venham enriquecer mais as curiosidades e a crítica dos discentes. A discussão do sistema de amortização se enquadra tranquilamente dentro desta perspectiva dos Parâmetros Curriculares.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [5] define o tema mencionado como competência específica de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio, reafirmando a sua relevância, pois no estudo resolve-se problemas concretos e interpreta-se os seus resultados para verificar a adequação das soluções:

“ Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (p. 531)”.

Neste estudo comentaremos apenas os sistemas de amortização constante e de prestação constante, por serem os mais aplicados no Brasil, principalmente nos financiamentos imobiliários e operações de Crédito Direto ao Consumidor. Por isso é imprescindível o conhecimento sobre taxa de juros, prazo e valor da prestação, e se estes são compatíveis com a capacidade financeira do tomador do empréstimo. A busca e conhecimento destas informações evitam vários problemas, principalmente a inadimplência.

Além disso, como ilustração do domínio desse conhecimento, registra-se que nos últimos anos, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) - que visa avaliar as competências adquiridas no Ensino Médio, possibilitando o acesso ao Ensino Superior - tem abordado questões que envolve conhecimento de matemática financeira, por exemplo, como vemos nas seguintes questões que abordam o tema:

QUESTÃO 156 ◇◇◇◇◇

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

- A** 2 075,00.
- B** 2 093,00.
- C** 2 138,00.
- D** 2 255,00.
- E** 2 300,00.

(a) ano 2015

QUESTÃO 144

Um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P .

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

A $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$

B $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} \right]$

C $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$

D $P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3i}{100}\right)} \right]$

E $P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3} \right]$

(b) ano 2017

Destaca-se que no PROFMA ¹ (que tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática) é ministrado a disciplina Matemática Discreta que tem um capítulo sobre Matemática Financeira, que aborda o tema sobre Sistema de Amortização, além de outros temas importantes escolhidos devido a sua importância no dia-a-dia para todos os cidadãos.

Assim, percebe-se a necessidade de abordar assuntos de Matemática Financeira nos Ensinos Fundamental e Médio, com objetivo de preparar os alunos para cidadania, ou seja, a pensar, raciocinar, interpretar, analisar, avaliar e refletir as situações da vida financeira, ajudando-os a tornarem-se seres mais críticos nas suas decisões éticas e socialmente responsáveis e além de justas.

1.2 Conceitos fundamentais

Inicialmente, abordaremos alguns dos principais conceitos teóricos que servem como ferramentas para um bom entendimento sobre os dois sistemas de amortização a serem desenvolvidos.

1.3 Progressões Aritméticas

Definição 1. *Uma progressão aritmética é uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ na qual a diferença entre cada termo a_{n+1} e o seu antecedente a_n é constante . Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r .*

Assim, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência a_n na qual

$$a_{n+1} - a_n = r, \tag{1}$$

para todo n inteiro e positivo.

Exemplo 1.1 A sequência (3, 8, 13, 18, 23,...) é uma progressão aritmética, pois $8 - 3 = 13 - 8 = 18 - 13 = 23 - 18 = \dots = 5$. Observe-se que a diferença entre cada termo e o seu anterior é a constante 5.

Teorema 1. (Termo geral de uma P.A.) *Se a_n é uma sequência que representa o termo geral de uma progressão aritmética de razão r , então $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$; para todo n inteiro e positivo.*

¹Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Demonstração. Pela definição de progressão aritmética, temos:

$$a_2 - a_1 = r,$$

$$a_3 - a_2 = r,$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = r$$

$$a_n - a_{n-1} = r.$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, verifica-se que

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

Exemplo 1.2. Na progressão aritmética $(3, 8, 13, 18, 23, \dots)$, temos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 2$, em particular, $a_{50} = 5 \cdot 50 - 2 = 248$. □

Teorema 2. (Soma dos n primeiros termos de uma P.A.) A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \tag{2}$$

Demonstração. Considere as somas

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \text{ e}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1.$$

Daí,

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Temos que:

$$a_n - a_{n-1} = r \Rightarrow a_{n-1} = a_n - r,$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = r \Rightarrow a_{n-2} = a_{n-1} - r = a_n - r - r = a_n - 2r,$$

$$a_{n-3} - a_{n-2} = r \Rightarrow a_{n-3} = a_{n-2} - r = a_n - 2r - r = a_n - 3r.$$

Logo, com raciocínio similar garantimos que:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_n - r + (a_1 + 2r + a_n - 2r) + \dots + (a_n + a_1) \Rightarrow$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_n + a_1) \Rightarrow$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

□

Exemplo 1.3. Determine a soma dos cinquenta primeiros termos da progressão aritmética (3, 8, 13, 18, 23, ...).

Solução: Temos que $a_1 = 3$, $a_{50} = 248$ e $n = 50$

$$S_{50} = \frac{(3 + 248) \cdot 50}{2} = 6.275.$$

1.4 Progressões Geométricas

Definição 2. Uma progressão geométrica é uma sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ onde cada termo, a partir do segundo, é dado por

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

isto é, o produto do termo anterior por uma constante q , (q é chamada de razão da progressão).

Exemplo 1.4. A sequência (3, 6, 12, 24, 48,...) é uma progressão geométrica, pois $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \dots = 2$, ou seja, a divisão entre cada termo posterior e termo anterior é uma constante no valor de 2.

Teorema 3. Termo geral de uma progressão geométrica - P.G.

Em toda progressão geométrica (a_n) de razão q , tem-se para todo natural n que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Demonstração. Temos $\frac{a_2}{a_1} = q$, $\frac{a_3}{a_2} = q$, $\dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Multiplicando essas $n - 1$ igualdades, obtemos: $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$.

Daí,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

□

Exemplo 1.5. Na sequência (3, 6, 12, 24, 48,...), temos uma progressão geométrica. De fato, temos $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Em particular, $a_{10} = 3 \cdot 2^9$.

Teorema 4. Soma dos n primeiros termos de uma P.G. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é dado por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (3)$$

Demonstração. Considerando a soma

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ e, multiplicando por q , obtemos

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \Rightarrow$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q.$$

Subtraindo essas igualdades, obtemos:

$$S_n - q \cdot S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q) \Rightarrow$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 \cdot (1 - q^n) \Rightarrow$$

$$S(1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n) \Rightarrow$$

Daí, já que $q \neq 1$, tem-se:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

1.5 Logaritmo

□

Definição 3. Dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$.

Escreve-se $y = \log_a x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a .

Podemos escrever então:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Em outras palavras, dizer que $y = \log_a x$ é o mesmo que afirmar que $a^y = x$.

Em particular, se base $a = 10$, dizemos que y é o logaritmo decimal x e neste caso, escrevemos

$$y = \log_{10} x = \log x.$$

Propriedade 1. Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Demonstração. Para provar isto, basta escrever $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$. Isto quer dizer que $a^x = b$ e $a^y = c$. Segue-se então que $a^y \cdot a^x = b \cdot c$, ou seja, que $a^{x+y} = b \cdot c$. Esta última igualdade significa que $x + y = \log_a(bc)$, isto é, que

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

□

Observa-se que esta propriedade estende-se para o produto de um número qualquer de fatores. Por exemplo, com $d > 0$,

$$\log_a(b \cdot c \cdot d) = \log_a(b \cdot (c \cdot d)) = \log_a b + \log_a(c \cdot d) = \log_a b + \log_a c + \log_a d.$$

E assim por diante, com $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, temos indutivamente que

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n.$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então,

$$\log_a x^n = \log_a(x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = \log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x = n \cdot \log_a x. \quad (4)$$

1.6 Função Contínua

Definição 4. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua em um ponto** $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A função f é dita **contínua** se o for em todo $x_0 \in X$.

1.7 Limite de funções

Definição 5. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, uma **vizinhança** de x_0 é um intervalo I da forma $I = (x_0 - r, x_0 + r)$, onde r é um real positivo. Nesse caso, diremos que r é o **raio** de I e que I é a **r-vizinhança** de x_0 .

Definição 6. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in X$ e $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que f tem **limite** L quando x **tende** a x_0 , e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

se, para cada vizinhança J de L , existir uma vizinhança I de x_0 tal que

$$x \in X \cap (I \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J.$$

Teorema 5.² *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ uma união de intervalos e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Para $x_0 \in X$, temos f contínua em x_0 , se, e só se,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Teorema 6.³ *Sejam $x_0 \in X$ e $f, g : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções dadas. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, então:*

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = L \pm M$;

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$;

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L}{M}$, caso $M \neq 0$.

Definição 7. *Dada uma função $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, se, dado $M > 0$ arbitrário, se existir $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

1.8 Derivada

Definição 8. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Fixado $x_0 \in I$, dizemos que f é **derivável** em x_0 se existir o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Neste caso, tal limite será denominado a **derivada** de f em x_0 , podendo ser denotado por $f'(x_0)$.

Propriedade 2.⁴ *Se $n \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada por $f(x) = x^n$, então f é derivável em \mathbb{R} e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Propriedade 3.⁵ *Se $n \in \mathbb{Z}$ é negativo e $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, por $f(x) = x^n$, então f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

²Demonstração encontra-se no livro [18].

³Demonstração encontra-se no livro [20].

⁴Demonstração encontra-se no livro [18].

⁵Demonstração encontra-se no livro [18].

1.9 Limites indeterminados e Regra de L'Hôpital

Definição 9. Diremos que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, se o quociente de funções reais $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ está definido em um conjunto da forma $I \setminus \{a\}$ (sendo I um intervalo, e a uma extremidade ou ponto interior de I), $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas e deriváveis para $x \neq a$, e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Definição 10. Diremos que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, se o quociente de funções reais $\frac{f}{g}(x)$ está definido em um conjunto da forma $I \setminus \{a\}$ (sendo I um intervalo, e a uma extremidade ou ponto interior de I), $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas e deriváveis para $x \neq a$, e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

Teorema 7. (Regra de L'Hôpital)⁶ Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

1.10 Diagrama do fluxo de caixa

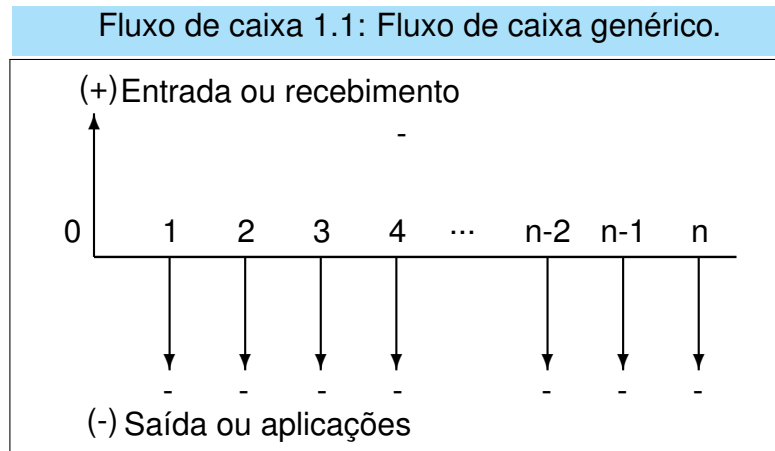
Definição 11. Diagrama do fluxo de caixa ⁷, ou simplesmente fluxo de caixa de uma operação financeira é a maneira de representar visualmente as entradas e saídas de dinheiro efetivadas no decorrer do tempo de operação. A maneira de representar depende da visão do credor ou devedor.

Pode-se representar o digrama de fluxo de caixa tanto na visão do credor ou devedor, contudo neste estudo, a representação gráfica será feita do ponto de vista do mutuário.

⁶Demonstração encontra-se no livro [22].

⁷Os diagramas, figuras, gráficos e tabelas todos de autoria do autor

Temos o diagrama de fluxo de caixa de uma operação de n pagamentos representado graficamente no Fluxo de caixa 1.1.

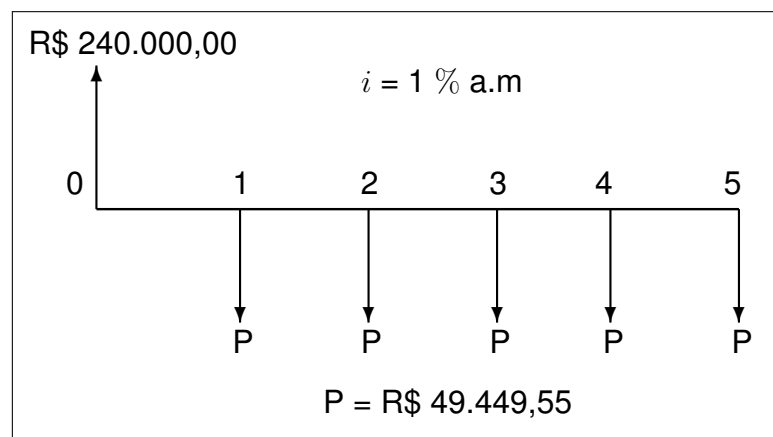


No eixo horizontal, está registrada a escala do tempo, que chamamos de período e pode ser expresso em dias, meses, anos ou outra unidade de tempo qualquer. O ponto zero (0) indica o momento inicial, enquanto a data (n) representa o prazo da operação.

No eixo vertical, encontram-se as entradas (ou recebimento), representadas por setas para cima (\uparrow) da linha do tempo, e as saídas, por setas para baixo (\downarrow) da linha. Caso haja recebimento e pagamento numa mesma data, poder-se-á representar graficamente a diferença entre os dois.

Exemplo 1.6. Um empréstimo de R\$ 240.000,00, a uma taxa de juros de 1% a.m. que será pago em 5 prestações iguais de R\$ 49.449,55, sendo a primeira paga 30 dias após a liberação do empréstimo. Represente graficamente o fluxo de caixa.

A representação gráfica do empréstimos é dada pelo Fluxo de caixa 1.2.



Fluxo de caixa 1.2: Fluxo de caixa de empréstimo.

Neste exemplo, temos uma entrada de R\$ 240.000,00 e saída de 5 pagamentos iguais e sucessivos de R\$ 49.449,55, sendo o primeiro pago um mês após a liberação do empréstimo.

1.11 Juro, montante e taxa de Juros

Definição 12. *Juro é a remuneração J que alguém recebe por emprestar um capital C a outrem por certo período de tempo n .*

Montante M é a soma do capital C e juro J , ou seja, $M = C + J$.

Taxa de juros i é a razão entre o juro e capital, isto é, $i = \frac{J}{C}$, será sempre referida ao período da operação.

1.12 Regimes de capitalização de juros: simples e compostos

1.12.1 Juros simples

Definição 13. *Chamamos de **juros simples** a remuneração recebida pela aplicação de um capital (C) a uma taxa de juros (i) e ao final do prazo de tempo (n).*

No regime de juros simples, os juros periódicos (J) são calculados apenas sobre o capital, assim os juros formados ao final de cada período são calculados aplicando-se a taxa (i) sobre capital, isto é,

$$J = C \cdot i.$$

Desse modo, tem-se:

$$J_1 = J_2 = J_3 = \dots = J_n = C \cdot i.$$

O cálculo dos juros de n períodos de tempo é dado pela expressão:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n.} \quad (5)$$

Essa expressão mostra que os juros simples (J) são diretamente proporcionais ao capital (C), ao tempo (n) à taxa de juros (i), sendo i referida na mesma unidade de n .

Definição 14. *Ao valor resgatado ao final da capitalização do Capital (C) damos o nome de montante (C_n).*

Ou seja, o montante é a soma do capital mais o juro.

$$\boxed{C_n = C + J = C + C \cdot i \cdot n = C \cdot (1 + i \cdot n).} \quad (6)$$

1.12.2 Juros compostos

Definição 15. Chamamos de **juros compostos** à remuneração que o capital (C) recebe após um período de aplicação (n), quando a cada período, a partir do segundo, os juros são calculados sobre montante do capital C no período anterior.

Teorema 8.⁸ No regime de juros compostos de taxa (i), um capital (C_0), transforma-se, em (n) períodos de tempo, em um montante (C_n) igual a:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n. \quad (7)$$

Outro modo de ler o Teorema 8, $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$, é que uma quantia, hoje igual a C_0 , transformar-se-á, após n períodos de tempo, em $C_0 \cdot (1 + i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A , equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A \cdot (1 + i)^n$. Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

- Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1 + i)^n$.
- Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1 + i)^n$.

1.12.3 Convenção linear e exponencial para período não inteiros

Definição 16. Definimos *convenção linear*, como aquela que admite a formação de juros compostos para a parte inteira do prazo e de juros simples para a parte não inteira.

- Nesta convenção, usaremos juros compostos para a parte inteira e juros simples para a parte fracionária.

Definição 17. *Convenção exponencial* adota o mesmo regime de capitalização para o período.

- Nesta convenção, aplicaremos o juros compostos tanto para a parte inteira como fracionária.

⁸Demonstração encontra-se no livro [17].

Exemplo 1.7. (PROFMAT) Em 5 de janeiro de 1996 foi feito um investimento de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Determine o montante em 12 de abril de 1996, usando a convenção linear e exponencial.

Solução:

$$\begin{cases} D_0 = \text{R}\$300,00 \\ n = \text{início} = 05/01/1996, \text{ fim} = 12/04/1996, \text{ 98 dias} = 3 \text{ meses e 8 dias} \\ i = 15\% \text{ a.m} = 0,15 \text{ a.m.} \end{cases}$$

a) **Convenção linear**

1º passo: Utilizando a equação (7) para determinar o juro composto para $n = 3$ meses;

$$C_3 = 300 \cdot (1 + 0,15)^3 = 300 \cdot (1,15)^3 = 300 \cdot 1,52088 = 456,26.$$

2º passo: Utilizando a equação (5) para calcular o juro simples para $n = 8 \text{ dias} = \frac{8}{30} = 0,26667$ meses, logo

$$C_{0,26667} = 456,26 \cdot 0,15 \cdot 0,26667 = 18,25.$$

Assim,

$$C_{3,26667} = 456,26 + 18,25 = 474,51.$$

b) **Convenção exponencial**

Utilizando a relação (7), tem-se:

$$\begin{aligned} C_{3,26667} &= 300 \cdot (1 + 0,15)^{3,26667} = 300 \cdot (1,15)^{3,26667} \Rightarrow \\ C_{3,26667} &= 300 \cdot 1,57863 = 473,59. \end{aligned}$$

1.12.4 Taxas equivalentes

Definição 18. Dadas duas taxas i_1 e i_2 , respectivamente aos períodos n_1 e n_2 ⁹. Elas serão ditas equivalentes se, para um mesmo prazo de aplicação, for indiferente colocar um capital C a render juros à taxa i_1 ou à taxa i_2 .

Assim, em regime de juros compostos, devemos ter:

$$C(1 + i_1)^{n_1} = C(1 + i_2)^{n_2},$$

ou

$$\boxed{(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}.} \quad (8)$$

⁹Os períodos n_1 e n_2 têm diferentes unidades de medida de tempo, mesmo sendo iguais.

Exemplo 1.8. (PROFMAT) Determine as taxas mensais equivalentes a 100% ao ano e a 39% ao trimestre.

Solução

$$a) \begin{cases} i_1 = 100\% \text{ ao ano e } n_1 = 1 \text{ ano} \\ i_2 = ? \% \text{ ao mês e } n_2 = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses} \end{cases}$$

Aplicando a equação (8), tem-se:

$$(1 + 1)^1 = (1 + i_2)^{12} \Rightarrow (1 + i_2)^{12} = 2 \Rightarrow (1 + i_2) = \sqrt[12]{2} \Rightarrow \\ (1 + i_2) = 1,05946 \Rightarrow i_2 = 5,946\% \text{ ao mês.}$$

$$b) \begin{cases} i_1 = 39\% \text{ ao trimestre e } n_1 = 1 \text{ trimestre} \\ i_2 = ? \% \text{ ao mês e } n_2 = 1 \text{ trimestre} = 3 \text{ meses} \end{cases}$$

Aplicando a equação (8), tem-se:

$$(1 + 0,39)^1 = (1 + i_2)^3 \Rightarrow (1 + i_2)^3 = 1,39 \Rightarrow (1 + i_2) = \sqrt[3]{1,39} \Rightarrow \\ (1 + i_2) = 1,11602 \Rightarrow i_2 = 11,602\% \text{ ao mês.}$$

1.13 Equivalência de capitais

Definição 19. *Dois ou mais capitais de valores $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, com vencimentos nas datas $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, contados a partir da data de referência n_0 e considerada a taxa de juros i , são equivalentes se os seus valores atuais forem iguais.*

A equivalência de capitais pode ser calculada no regime de capitalização simples e composta.

1.13.1 Considerando pagamentos individuais

1.13.1.1 Regime de capitalização simples Aplicando a equação (6), tem-se que:

$$\frac{C_1}{(1 + n_1 \cdot i)} = \frac{C_2}{(1 + n_2 \cdot i)} = \frac{C_3}{(1 + n_3 \cdot i)} = \dots = \frac{C_n}{(1 + n_n \cdot i)}.$$

1.13.1.2 Regime de capitalização composta Aplicando o Teorema 8, tem-se que

$$\frac{C_1}{(1 + i)^{n_1}} = \frac{C_2}{(1 + i)^{n_2}} = \frac{C_3}{(1 + i)^{n_3}} = \dots = \frac{C_n}{(1 + i)^{n_n}}.$$

1.13.2 Considerando-se séries de pagamentos iguais ou diferentes

Definição 20. Diz-se que duas séries de pagamentos A ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$) e B ($B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$) são equivalentes quando o valor atual dos termos da série A , na data de referência t_0 for igual ao valor dos termos da série B , na mesma data, considerada determinada taxa de juros i .

Isso também é verdade para três ou mais séries de planos de pagamentos.

1.13.2.1 Regime de capitalização simples

$$\frac{A_1}{(1 + 1 \cdot i)} + \frac{A_2}{(1 + 2 \cdot i)} + \dots + \frac{A_m}{(1 + m \cdot i)} = \frac{B_1}{(1 + 1 \cdot i)} + \frac{B_2}{(1 + 2 \cdot i)} + \dots + \frac{B_n}{(1 + n \cdot i)}. \quad (9)$$

1.13.2.2 Regime de capitalização composta

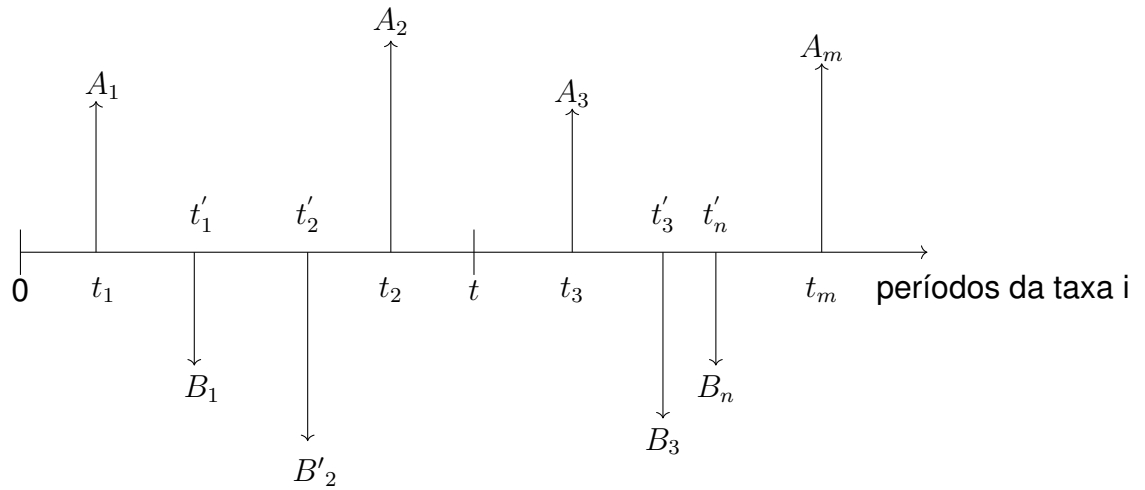
$$\frac{A_1}{(1 + i)^1} + \frac{A_2}{(1 + i)^2} + \dots + \frac{A_m}{(1 + i)^m} = \frac{B_1}{(1 + i)^1} + \frac{B_2}{(1 + i)^2} + \dots + \frac{B_n}{(1 + i)^n}. \quad (10)$$

A equivalência de capitais no regime de capitalização composta depende, necessariamente, da taxa de juros aplicada para descontar os capitais, a fim de obter seus valores atuais. Ou seja, se for alterada a taxa, a equivalência deixará de existir.

Se duas ou mais séries de valores tiverem o mesmo valor atual, a uma determinada taxa de juros, então, seus valores futuros (VF) após n períodos, obtidos com a mesma taxa, são necessariamente iguais. Assim, a equivalência de capitais pode ser verificada no final de qualquer período n , desde que o período escolhido seja o mesmo para todos os termos.

Teorema 9. No regime de juros compostos, a equivalência financeira de conjuntos de capitais independe da data tomada como a data comparação (data focal).

Demonstração. Sejam dois conjuntos de capitais. O primeiro é composto de m capitais, $A_1; A_2, \dots, A_m$, respectivamente pagáveis nas datas t_1, t_2, \dots, t_m , contadas a partir da origem (data 0) e expressas em número de períodos da taxa i de juros compostos considerada. O segundo formado por n capitais, que pode ser maior, menor ou igual a m , B_1, B_2, \dots, B_n , respectivamente pagáveis nas datas t'_1, t'_2, \dots, t'_n , também contadas a partir da mesma origem e expressa na mesma unidade de tempo que relativa aos capitais do primeiro conjunto.



Sendo t , medida a partir data da origem e também em número de períodos da data i , uma data arbitrária tomada como a da comparação, os conjuntos serão equivalentes se:

$$\sum_{k=1}^m A_k \cdot (1+i)^{t-t_k} = \sum_{j=1}^n B_j \cdot (1+i)^{t-t'_j}$$

ou

$$\frac{A_1 \cdot (1+i)^t}{(1+i)^{t_1}} + \frac{A_2 \cdot (1+i)^t}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{A_m \cdot (1+i)^t}{(1+i)^{t_m}} = \frac{B_1 \cdot (1+i)^t}{(1+i)^{t'_1}} + \frac{B_2 \cdot (1+i)^t}{(1+i)^{t'_2}} + \dots + \frac{B_n \cdot (1+i)^t}{(1+i)^{t'_n}} \Rightarrow$$

$$(1+i)^t \cdot \frac{A_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{A_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{A_m}{(1+i)^{t_m}} = (1+i)^t \cdot \frac{B_1}{(1+i)^{t'_1}} + \frac{B_2}{(1+i)^{t'_2}} + \dots + \frac{B_n}{(1+i)^{t'_n}}.$$

Como $i > 0$, logo $1+i > 0$, podemos dividir a igualdade por $(1+i)^t$. Obtemos:

$$\frac{A_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{A_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \frac{A_m}{(1+i)^{t_m}} = \frac{B_1}{(1+i)^{t'_1}} + \frac{B_2}{(1+i)^{t'_2}} + \dots + \frac{B_n}{(1+i)^{t'_n}}.$$

Ou seja,

$$\sum_{k=1}^m A_k \cdot (1+i)^{-t_k} = \sum_{j=1}^n B_j \cdot (1+i)^{-t'_j}$$

igualdade que independe da data t .

□

Exemplo 1.9. (PROFMAT) Suponha que o dinheiro valha 10% ao mês para um comerciante que vende determinado produto por R\$ 4.200,00 à vista.

- a) Se o comerciante deseja oferecer o produto para compra em duas prestações iguais, a primeira no ato da compra, qual deve ser o valor dessas prestações?
- b) Suponha que ele deseja oferecer o produto em 10 prestações iguais, a primeira no ato da compra, qual o valor das prestações?

Solução

$$a) \begin{cases} D_0 = 4.200,00 \\ n = 2 \text{ prestações iguais, a primeira no ato da venda} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{cases}$$

Seja C o valor da prestação e usando a relação (10) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{C}{(1 + 0,10)^0} + \frac{C}{(1 + 0,10)^1} &= 4200 \Rightarrow \\ C + \frac{C}{(1,10)} &= 4200 \Rightarrow \\ 2,10C &= 4620 \Rightarrow \\ C &= 2200. \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} D_0 = 4.200,00 \\ n = 10 \text{ prestações iguais, a primeira no ato da venda} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{cases}$$

Seja C o valor da prestação e usando a relação (10) novamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{C}{(1 + 0,10)^0} + \frac{C}{(1 + 0,10)^1} + \frac{C}{(1 + 0,10)^2} + \dots + \frac{C}{(1 + 0,10)^9} &= 4200 \Rightarrow \\ C \left(1 + \frac{1}{1,10} + \frac{1}{(1,10)^2} + \frac{1}{(1,10)^3} + \dots + \frac{1}{(1,10)^9} \right) &= 4200. \end{aligned}$$

Temos que a expressão:

$$\left(1 + \frac{1}{1,10} + \frac{1}{(1,10)^2} + \dots + \frac{1}{(1,10)^9} \right) \text{ é uma PG com } a_1 = 1 \text{ e } q = \frac{1}{1,10}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^9 \frac{1}{(1,10)^n} = \frac{1 - \frac{1}{(1,10)^9}}{1 - \frac{1}{1,10}} = \frac{1 - 0,38554}{1 - 0,90909} = \frac{0,61446}{0,09091} = 6,75899.$$

Assim, tem-se:

$$C \cdot 6,75899 = 4200 \Rightarrow$$
$$C = \frac{4200}{6,75899} = 621,39.$$

1.14 Séries uniformes

Definição 21. *Série uniforme é um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos, todos iguais e igualmente espaçados no tempo) referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade (apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme.*

Teorema 10. ¹⁰ *O valor de uma série uniforme (A) de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, dada por*

$$A = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

¹⁰Demonstração encontra-se item 4.2.1 na página 73.

2 Sistemas ou métodos de amortização

2.1 Introdução

Definiremos amortização e sistemas (planos) de amortização, em seguida abordaremos principalmente as características básicas de um plano genérico de financiamento e demonstraremos, através de exemplos, a importância destas características comuns que todos os sistemas de amortização possuem, que não são compatíveis com a utilização do regime de juros simples, pois sempre trazem uma inconsistência no seu emprego, porque os juros calculados são diferentes dos juros devidos ou o saldo devedor no final do período não é zerado.

Com relação à amortização, Camargos [6] (2019, p. 295) aduz que:

“É o processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que, ao término do prazo estipulado, o débito seja totalmente liquidado. Ou seja, é a forma de pagamento dos juros e de devolução do principal contratado”.

A amortização é a devolução parcial do valor financiado, somada com os juros - representam a remuneração do financiamento - que esta soma equivale a prestação.

Camargos [6], sobre aos sistemas de amortização, (p. 295, 2019), acrescenta:

“Sistemas de amortização são as diferentes formas existentes para pagar um empréstimo. Na maioria dos sistemas, a dívida ou saldo devedor remanescente sofrerá incidência dos juros, sendo este último progressivamente reduzido e quitado com o pagamento da amortização. Geralmente são apresentados demonstrativos sobre o estado/estágio da dívida, do qual constam: quantidade de parcelas, valor de cada pagamento, dividido em juros e amortização, e saldo devedor”.

No tocante a quantidade de prestações e sobre a periodicidade das mesmas, Dutra, [23] (2018, p.127), assevera:

“O plano pode ser formado por apenas um pagamento ou por uma série de parcelas iguais ou diferentes, com periodicidade diária, quinzenal, mensal, trimestral, anual ou em períodos variáveis”.

Sistemas de amortização estabelecem o ritmo em que se fará a amortização e como as partes (credor e devedor) de um empréstimo são livres para estipular alguns tipos de acordos, inúmeros são os métodos de amortização empregados para a liquidação de uma dívida.

2.2 Tipos de sistemas ou métodos de amortização

Faro [11] (2012, p. 230,) enumera os diversos tipos de sistemas existentes no ambiente financeiro:

“Os métodos mais utilizados para o resgate de empréstimos a longo prazo, chamados método de amortização, são:

- a) método francês ou de prestações periódicas e constantes;
- b) método americano ou do *sinking fund*;
- c) método alemão ou de juros antecipados;
- d) método das quotas constantes de amortização;
- e) método misto de amortização”.

Dos diversos sistemas de amortização existentes, apresentamos aqui o sistema francês (sistema Price) e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Estes sistemas são habitualmente utilizados nos financiamentos imobiliários.

Morgado [16](2015, p.100) comunga com a ideia, mesmo, existindo diversos métodos de amortização, há apenas dois que são mais utilizados no ambiente financeiro:

“Os sistemas usuais de amortização são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema francês de amortização, também chamada de Tabela Price ¹¹ (Ricard Price foi um economista inglês). O sistema francês é caracterizado por prestações constantes”.

Nascimento [19](2011, p. 109) tenta justificar sobre a utilização do sistema Price:

“É um dos sistemas de amortização mais utilizados ultimamente, talvez por sua praticidade ao proporcionar prestações periódicas nominalmente iguais, facilitando o controle orçamentário”.

Por essa razão, nosso estudo irá abordar os sistemas de amortização: SAC e Price, por serem os mais usuais, com objetivo de compará-los analítica, numérica e graficamente, procurando identificar, se existe, qual a melhor opção para consumidor.

Os exemplos não terão prazo de carência ¹² e nem parcelas intermediárias, serão também desconsiderados os efeitos inflacionários e da correção monetária pois essa não faz parte do sistema de amortização, visa apenas proteger o capital dos efeitos da inflação, fazendo parte apenas do custo efetivo do financiamento.

¹¹Para mais detalhes, veja livro [23].

¹²Corresponde ao período compreendido entre a data da liberação do empréstimo e o pagamento da primeira amortização.

Elencaremos as características comuns de um sistema de amortização genérico, que são cinco, as quais têm uma grande importância para identificar se um sistema de amortização é ou não é um sistema consistente, ou seja, qualquer sistema que não cumpre as cinco regras básicas será considerado um sistema inconsistente, pois traz prejuízo ou ao devedor, cobrando mais juros que são devidos, ou ao credor, o empréstimo não é liquidado totalmente no final de contrato. Analisaremos que um sistema que adota o regime de juros simples é inconsistente.

2.3 Características básicas de um sistema de amortização

De modo geral, os sistemas de amortizações apresentam algumas características comuns e Castaño [7] (2014, p.163) enuncia as cinco:

“Para definir las características de un sistema de amortización se considera un acuerdo crediticio donde un capital V_p es pagado en n cuotas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ no necesariamente iguales, pagadas en períodos equidistantes. La unidad de tiempo es el lapso entre dos cuotas consecutivas (t); el momento en que se concreta el préstamo o inicio de la operación se supone en $t = 0$; y la k -ésima cuota en $t = k$; además, es la tasa de interés efectiva en el período unitario.

Bajo las anteriores condiciones cada pago o renta A_k se compone de dos partes:

$$A_k = V_k + I_k$$

V_k es la parte de la cuota que corresponde a la amortización de capital e I_k la parte de la cuota que corresponde al pago del interés. La suma de las n cuotas de amortización de capital corresponde al valor del préstamo; es decir:

$$V_p = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

El interés del k período se calcula como el interés sobre las cuotas de amortización de capital, aun no pagadas; es decir

$$I_k = i \cdot (V_k + V_{k+1} + \dots + V_n)$$

De otro lado, al momento de haber pagado la k -ésima cuota, el saldo del préstamo es:

$$V_p - (V_1 + V_2 + \dots + V_k) = (V_{k+1} + V_{k+2} + \dots + V_n); \text{ para } k < n$$

Lo cual debe coincidir con el valor en de las cuotas que restan pagar:

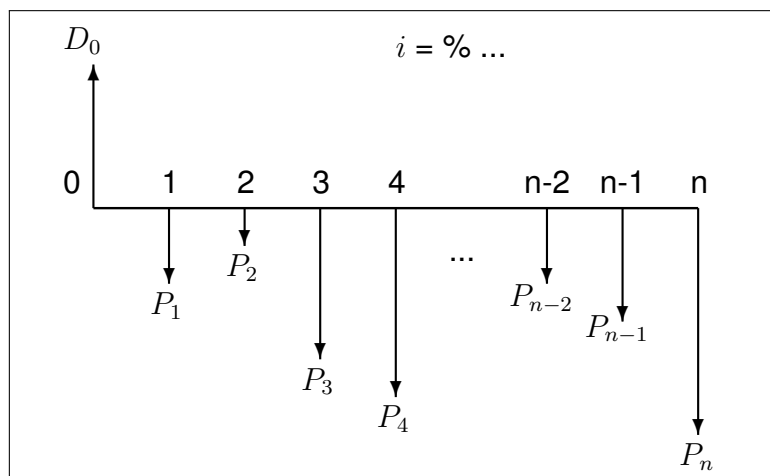
$$V_k = A_{k+1} \cdot \frac{1}{(1+i)} + A_{k+2} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + A_{k+3} \cdot \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + A_n \cdot \frac{1}{(1+i)^{(n-k)}}$$

La renta finaliza al momento del pago de la última cuota de amortización de capital, ya que se completa el pago del préstamo V_p y por tanto no hay intereses por cobrar ”.

Após as definições essenciais para este estudo, detalharemos as características comuns dos sistemas de amortização.

2.4 Fluxo de caixa de financiamento genérico

Sejam D_0 a quantia emprestada, i a taxa de juros compostos, por período, considerada, que a dívida seja amortizada por uma sucessão de n pagamentos periódicos iguais a $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}$ e P_n , respectivamente, com valores iguais ou não, com vencimento da primeira prestação se dê um período após a data em que se contratou a dívida, que representamos, esquematicamente, através deste fluxo de caixa.



Fluxo de caixa 2.1: Fluxo de caixa de financiamento genérico.

2.5 Nomenclatura adotada

Vamos analisar os valores das amortizações, juros, prestações e saldos devedores durante todo o período ou um período específico do contrato, por isso é essencial adotar as definições, denotando por $k = 0$ a data de concessão do empréstimo.

Adotaremos as seguintes definições:

- n - número de parcelas de prestações a serem efetuadas durante o contrato;
- i - o valor da taxa de juros compostos efetiva acordada;
- A_k - o valor da parcela de amortização na época k para $k = 1, 2, \dots, n$;
- J_k - o valor da parcela de juro na época k , para fins contábeis, para $k = 1, 2, \dots, n$;
- P_k - o valor da parcela da prestação na época k para $k = 1, 2, \dots, n$;
- D_k - saldo devedor ou estado da dívida, logo após o pagamento da k -ésima prestação, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Assim, o valor da parcela de amortização referente à primeira prestação será representada por A_1 , da segunda por A_2 , da décima por A_{10} , e assim sucessivamente; idem para as parcelas de juros. Quanto ao saldo devedor, o saldo inicial será representado por D_0 ; o saldo devedor no final do primeiro período, após a dedução da primeira amortização A_1 , será representado por D_1 ; o saldo devedor no final do segundo período após a dedução da segunda amortização A_2 por D_2 ; e assim por diante.

Em seguida, enunciaremos as cinco características comuns de vários sistemas de amortizações, utilizando a nomenclatura adotada.

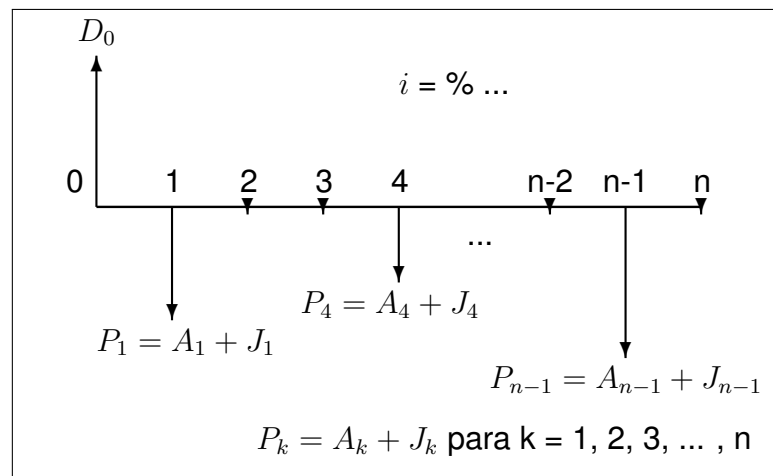
2.5.1 Características básicas de um sistema de amortização

Utilizando a nossa terminologia adotada, podemos reescrever as características citadas por Castaño, [7] da seguinte maneira:

1ª Característica:¹³ O valor de cada prestação no período k (P_k) é igual a soma da quota de amortização (ou da restituição do financiamento) e da parcela de juros (ou de remuneração do financiamento), neste mesmo período.

$$P_k = J_k + A_k \quad (11)$$

Temos, esquematicamente, o fluxo de caixa das prestações:



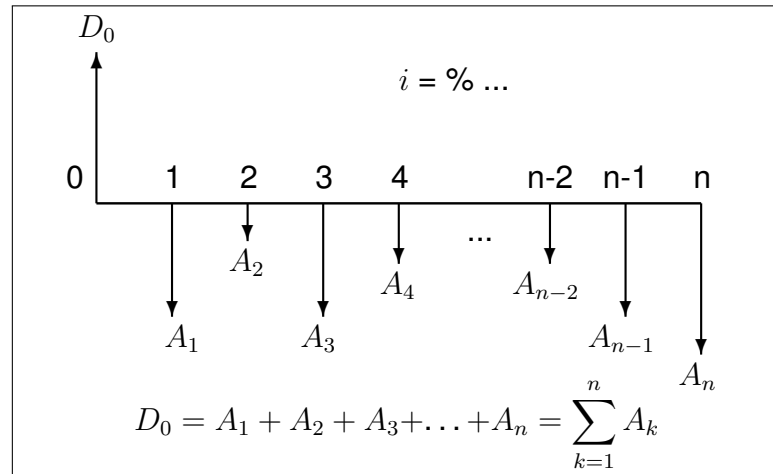
Fluxo de caixa 2.2: Fluxo de caixa das prestações.

2ª Característica: O valor do financiamento é igual a soma das amortizações.

$$D_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k. \quad (12)$$

¹³Desde que não tenhamos prestações intermediárias.

Temos, esquematicamente, o fluxo de caixa da soma das amortizações:



Fluxo de caixa 2.3: Fluxo de caixa da soma das amortizações.

3ª Característica O valor da parcela dos juros na época k (J_k) é igual ao produto da taxa pelo soma das parcelas amortizações ainda não pagas,

$$J_k = i \cdot (A_k + A_{k+1} + \dots + A_n) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Também o valor da parcela dos juros na época k é o produto da taxa pelo saldo devedor na época $k - 1$.

$$J_k = i \cdot D_{k-1} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Sobre a determinação do total de juros pagos durante certo período, é importante reforçar o comentário de Faro [13] (2012, p. 250):

“Para fins contábeis, principalmente devido ao fato de que os juros pagos por empréstimos são considerados como dedutíveis da renda bruta de acordo com a legislação do Imposto de Renda,¹⁴ é interessante que saibamos determinar o total de juros incluído nas prestações pagas em certo período”.

4ª Característica: o saldo devedor na época k (D_k) é igual a diferença entre o valor do financiamento e das amortizações pagas até a época k ¹⁵ ou a soma das amortizações não pagas¹⁶.

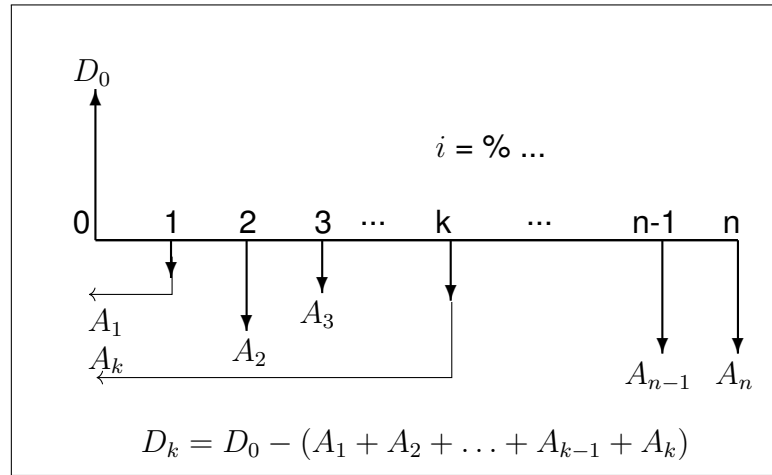
$$D_k = D_0 - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) = A_{k+1} + A_{k+2} + \dots + A_n \quad \text{para } k < n. \quad (15)$$

¹⁴Atualmente, somente para pessoas jurídicas cujo resultado do exercício seja tributado pelo lucro real.

¹⁵Chamada de método retrospectivo pelo professor Faro [12].

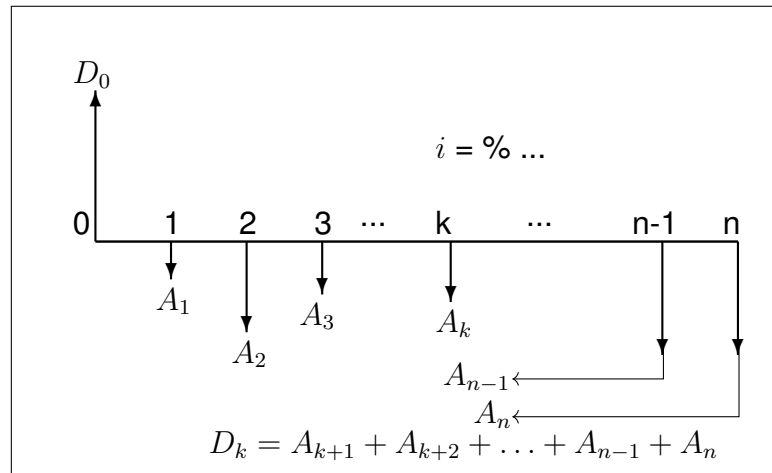
¹⁶Chamada de método prospectivo pelo professor Faro [12].

Temos, esquematicamente, o fluxo de caixa do saldo devedor em função das amortizações pagas:



Fluxo de caixa 2.4: Fluxo de caixa do saldo devedor.

Temos, esquematicamente, o fluxo de caixa do saldo devedor em função das amortizações não pagas:



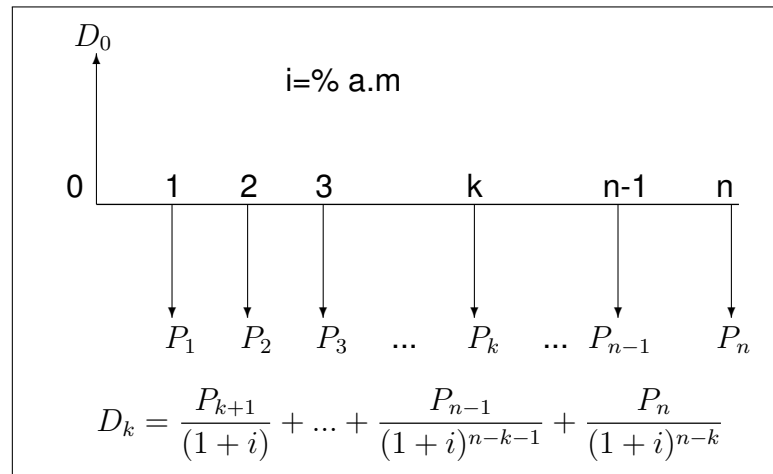
Fluxo de caixa 2.5: Fluxo de caixa do saldo devedor.

5ª Característica: o saldo devedor, também, na época k é igual a soma dos valores atuais das prestações não pagas na época k ¹⁷.

$$D_k = \frac{P_{k+1}}{(1+i)} + \dots + \frac{P_{n-1}}{(1+i)^{n-k-1}} + \frac{P_n}{(1+i)^{n-k}} = \sum_{j=k+1}^n \frac{P_j}{(1+i)^{k-j}} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n. \quad (16)$$

¹⁷Desde que não haja prestação em atraso.

Temos, esquematicamente, o fluxo de caixa dos valores atuais das prestações não pagas:



Fluxo de caixa 2.6: Fluxo de caixa dos valores atuais.

A partir dessas cinco regras concluímos:

- a) o valor de cada prestação do plano de financiamento deverá ser maior que a parcela de juro devido nesse período ¹⁸, caso contrário geraria o aumento do saldo devedor, porque implicaria na incorporação dos juros não pagos no saldo devedor;
- b) o juro de cada prestação é sempre calculado sobre o saldo devedor do financiamento no início do período a que se refere a prestação, por exemplo, o juro da primeira prestação é calculado sobre o valor financiado na data $k = 0$. O juro da segunda prestação é calculado sobre o estado da dívida no início do segundo período, cujo valor é o resultado da diferença do valor financiado menos do valor da parcela de amortização na primeira prestação. E assim sucessivamente até a última prestação ou calculado sobre soma das quotas de amortização não pagas;
- c) o saldo devedor de um período é a diferença entre o saldo devedor do período anterior menos o valor da parcela de amortização deste período;
- d) o valor financiado é igual a soma das amortizações;
- e) o valor financiado é a soma dos valores atuais das prestações, calculados à taxa i de juros compostos;
- f) qualquer plano de financiamento que atender as cinco regras, ao mesmo tempo, será considerado um plano consistente;
- g) as regras acima serão fundamentais para construção de um plano de financiamento, sem carência e prestações(s) intermediária(s), nem atrasada(s).

¹⁸Amortização negativa quando a prestação não é suficiente sequer para pagar os juros devidos.

Apresentaremos a seguir, um demonstrativo ou planilha de amortização que mostra a evolução da dívida, mostrando valor(s) da(s) amortização(ões), valor dos juros, valor da parcela da prestação ou valores das prestações e saldo devedor no final de cada período do sistema utilizado.

2.6 Planilha de amortização

Uma planilha de amortização é uma tabela composta por 5 colunas: a primeira indica o período (k), a segunda, valor da parcela de amortização (A_k), a terceira, valor da parcela de juro (J_k), a quarta, quantia da parcela da prestação (P_k) e a quinta, estado da dívida no período (D_k).

Com base nas características elencadas acima, podemos construir a planilha de amortização de plano genérico, onde estão descritos as fórmulas de como obter a amortização, juros, prestação e saldo devedor de cada período, desde que seja informado o valor do financiamento, a taxa de juros ou tipo de sistema de amortização adotado.

De maneira genérica, a planilha de amortização terá apresentação de acordo com a Tabela 2.1.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				D_0
1	$A_1 = P_1 - J_1$	$J_1 = D_0 \cdot i$	$P_1 = A_1 + J_1$	$D_1 = D_0 - A_1$
2	$A_2 = P_2 - J_2$	$J_2 = D_1 \cdot i$	$P_2 = A_2 + J_2$	$D_2 = D_1 - A_2$
...
k	$A_k = P_k - J_k$	$J_k = D_{k-1} \cdot i$	$P_k = A_k + J_k$	$D_k = D_{k-1} - A_k$
...
n	$A_n = P_n - J_n$	$J_n = D_{n-1} \cdot i$	$P_n = A_n + J_n$	$D_n = D_{n-1} - A_n = 0,00$

Tabela 2.1: Planilha das amortizações de financiamento.

Os exemplos a seguir explicitarão o entendimento das características acima, onde verificaremos se eles atendem as cinco características comentadas acima.

Exemplo 2.1. AMORTIZAÇÕES EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA - P.A. - Construa a planilha de amortização para um empréstimo de R\$ 200.000,00 que se amortiza em 5 quotas mensais de valores R\$ 20.000,00; R\$ 30.000,00; R\$ 40.000,00, R\$ 50.000,00 e R\$ 60.000,00, respectivamente, com juros compostos de 10 % ao mês, sendo a primeira paga 30 dias após a liberação do empréstimo.

Solução

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = \text{R\$ } 200.000,00 \\ n = 5 \text{ amortizações mensais de:} \\ A_1 = 20.000,00, A_2 = 30.000,00, A_3 = 40.000,00, A_4 = 50.000,00, A_5 = 60.000,00 \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{array} \right.$$

Período k = 1:

O valor da primeira parcela de juros (J_1) corresponde a 10% sobre o valor do empréstimo, isto é,

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,10 \cdot 200.000,00 = 20.000,00.$$

A primeira parcela da prestação (P_1) é constituída da primeira parcela de amortização e da parcela de juros, isto é,

$$P_1 = A_1 + J_1 = 20.000,00 + 20.000,00 = 40.000,00.$$

O saldo devedor do primeiro período (D_1) é a diferença entre o valor do financiamento e a quota de amortização, que será:

$$D_1 = D_0 - A_1 = 200.000,00 - 20.000,00 = 180.000,00.$$

Período k = 2:

Após o pagamento da primeira prestação, o saldo devedor passa a ser R\$ 180.000,00; logo o valor do juros do segundo período (J_2) será:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,10 \cdot 180.000,00 = 18.000,00.$$

A segunda parcela da prestação (P_2) será a soma segunda parcela de amortização e da parcelas de juros:

$$P_2 = A_2 + J_2 = 30.000,00 + 18.000,00 = 48.000,00.$$

O saldo devedor do segundo período (D_2) é a diferença entre o saldo devedor do primeiro período e a quota de amortização.

$$D_2 = D_1 - A_2 = 180.000,00 - 30.000,00 = 150.000,00.$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos:

Período k = 3:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,10 \cdot 150.000,00 = 15.000,00.$$

$$P_3 = A_3 + J_3 = 40.000,00 + 15.000,00 = 55.000,00.$$

$$D_3 = D_2 - A_3 = 150.000,00 - 40.000,00 = 110.000,00.$$

Período k = 4:

$$J_4 = i \cdot D_3 = 0,10 \cdot 110.000,00 = 11.000,00.$$

$$P_4 = A_4 + J_4 = 50.000,00 + 11.000,00 = 61.000,00.$$

$$D_4 = D_3 - A_4 = 110.000,00 - 50.000,00 = 60.000,00.$$

Período k = 5:

$$J_5 = i \cdot D_4 = 0,10 \cdot 60.000,00 = 6.000,00.$$

$$P_5 = A_5 + J_5 = 60.000,00 + 6.000,00 = 66.000,00.$$

$$D_5 = D_4 - A_5 = 60.000,00 - 60.000,00 = 0,00.$$

Assim, montamos a Tabela 2.2 referente as amortizações em PA com os valores acima.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				200.000,00
1	20.000,00	20.000,00	40.000,00	180.000,00
2	30.000,00	18.000,00	48.000,00	150.000,00
3	40.000,00	15.000,00	55.000,00	110.000,00
4	50.000,00	11.000,00	61.000,00	60.000,00
5	60.000,00	6.000,00	66.000,00	0,00

Tabela 2.2: Planilha das amortizações em P.A.

Averiguando os dados da Tabela 2.2 tem-se:

1º - A soma das amortizações é igual ao valor do financiamento, ou seja,

$$D_0 = A_1 + A_2 + \dots + A_n \Rightarrow$$

$$D_0 = 20.000,00 + 30.000,00 + 40.000,00 + 50.000,00 + 60.000,00 \Rightarrow$$

$$D_0 = 200.000,00.$$

2º - O valor do juro num determinado período é igual ao produto da taxa pelo saldo devedor do período anterior, por exemplo, o valor do juro no período 3 equivale:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,10 \cdot 150.000,00 = 15.000,00.$$

Também podemos calcular o valor do juro no período 3 como o produto da taxa pela soma das amortizações ainda não pagas.

$$\begin{aligned} J_3 &= i \cdot (A_3 + A_4 + A_5) \Rightarrow \\ J_3 &= 0,01 \cdot (40.000,00 + 50.000,00 + 60.000,00) \Rightarrow \\ J_3 &= 0,10 \cdot 150.000,00 = 15.000,00. \end{aligned}$$

3º - O valor de cada prestação é igual ao valor da amortização e do juro daquele período, por exemplo, o valor da prestação no período 4 vale:

$$P_4 = A_4 + J_4 = 50.000,00 + 11.000,00 = 61.000,00.$$

4º - O saldo devedor no determinado período é a diferença entre o valor da dívida e a soma das amortizações pagas, por exemplo, o valor do saldo devedor no período 2 é igual a:

$$\begin{aligned} D_2 &= D_0 - (A_1 + A_2) \Rightarrow \\ D_2 &= 200.000,00 - (20.000,00 + 30.000,00) \Rightarrow \\ D_2 &= 200.000,00 - 50.000,00 = 150.000,00. \end{aligned}$$

Ou, o saldo devedor no determinado período é soma das amortizações não pagas.

$$\begin{aligned} D_2 &= A_3 + A_4 + A_5 \Rightarrow \\ D_2 &= 40.000,00 + 50.000,00 + 60.000,00 = 150.000,00. \end{aligned}$$

Assim, este sistema de amortização atende as cinco características, logo é um sistema de amortização consistente.

Exemplo 2.2. AMORTIZAÇÕES TODAS IGUAIS - Construa para um empréstimo de R\$ 200.000,00 uma planilha de amortização que se amortiza em 5 quotas mensais de valores de R\$ 40.000,00, com juros de 10 % ao mês, sendo a primeira prestação paga dias 30 após a liberação do empréstimo.

Solução

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = 200.000,00 \\ A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 40.000,00, \text{ cinco amortizações iguais.} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{array} \right.$$

Adotando o mesmo raciocínio do **Exemplo 2.1** da página 43, tem-se:

Período k = 1:

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,10 \cdot 200.000,00 = 20.000,00.$$

$$P_1 = A_1 + J_1 = 40.000,00 + 20.000,00 = 60.000,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 200.000,00 - 40.000,00 = 160.000,00.$$

Período k = 2:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,10 \cdot 160.000,00 = 16.000,00.$$

$$P_2 = A_2 + J_2 = 40.000,00 + 16.000,00 = 56.000,00.$$

$$D_2 = D_1 - A_1 = 160.000,00 - 40.000,00 = 120.000,00.$$

Período k = 3:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,10 \cdot 120.000,00 = 12.000,00.$$

$$P_3 = A_3 + J_3 = 40.000,00 + 12.000,00 = 52.000,00.$$

$$D_3 = D_2 - A_3 = 120.000,00 - 40.000,00 = 80.000,00.$$

Continuando esse procedimento de cálculo para os períodos 4^o e 5^o, geramos a Tabela 2.3 das amortizações todas iguais a R\$ 40.000,00.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				200.000,00
1	40.000,00	20.000,00	60.000,00	160.000,00
2	40.000,00	16.000,00	56.000,00	120.000,00
3	40.000,00	12.000,00	52.000,00	80.000,00
4	40.000,00	8.000,00	48.000,00	40.000,00
5	40.000,00	4.000,00	44.000,00	0,00

Tabela 2.3: Planilha das amortizações iguais.

Analisando a Tabela 2.3, tem-se:

1º - A soma das amortizações é igual ao valor do financiamento, ou seja,

$$\sum_{n=1}^5 A_k = 40.000,00 + 40.000,00 + 40.000,00 + 40.000,00 + 40.000,00 = 200.000,00.$$

2º - O valor do juro num determinado período é igual ao produto da taxa de juros pelo saldo devedor do período anterior, por exemplo, o valor do juro no período 4 é:

$$J_4 = i \cdot D_3 = 0,10 \cdot 80.000,00 = 8.000,00.$$

Também podemos calcular o juro no período 4 como o produto da taxa de juros pela soma das amortizações ainda não pagas.

$$J_4 = i \cdot (A_4 + A_5) = 0,01 \cdot (40.000,00 + 40.000,00) \Rightarrow \\ J_4 = 0,10 \cdot 80.000,00 = 8.000,00.$$

3º - O valor de cada prestação é igual ao valor da amortização e do juro daquele período, por exemplo, o valor da prestação no período 2 é:

$$P_2 = A_2 + J_2 = 40.000,00 + 16.000,00 = 56.000,00.$$

4º - O saldo devedor no determinado período é a diferença entre o valor do empréstimo e a soma das amortizações pagas, por exemplo, o valor do saldo devedor no período 2 é:

$$D_2 = D_0 - (A_1 + A_2) \Rightarrow \\ D_2 = 200.000,00 - (40.000,00 + 40.000,00) \Rightarrow \\ D_2 = 200.000,00 - 80.000,00 = 120.000,00.$$

Alternativamente, o saldo devedor no determinado período é a soma das amortizações não pagas:

$$D_2 = A_3 + A_4 + A_5 \Rightarrow \\ D_2 = 40.000,00 + 40.000,00 + 40.000,00 = 120.000,00.$$

5º - A soma dos valores atuais das prestações é igual ao valor do financiamento.

$$D_0 = \frac{60.000}{1,10} + \frac{56.000}{1,10^2} + \frac{52.000}{1,10^3} + \frac{48.000}{1,10^4} + \frac{44.000}{1,10^5} \Rightarrow$$

$$D_0 = 54.545,45 + 46.280,99 + 39.068,37 + 32.784,65 + 27.320,54 = 200.000,00$$

Assim, este sistema atende as cinco características, ou seja é um sistema de amortização consistente.

Exemplo 2.3. PRESTAÇÕES TODAS IGUAIS - Construa uma planilha de amortização para um empréstimo de R\$ 200.000,00 que se amortiza em 5 prestações mensais e consecutivas, com juros de 10 % ao mês, sendo que a primeira prestação é paga um mês após a liberação do empréstimo.

Solução

$$\begin{cases} D_0 = 200.000,00 \\ n = 5 \text{ prestações mensais e iguais} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{cases}$$

As cinco prestações são iguais a R\$ 52.759,50, resultado obtido aplicando a equação (27).

Agora adotando o mesmo raciocínio **Exemplo 2.1** da página 43 tem-se:

Período k = 1:

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,10 \cdot 200.000,00 = 20.000,00.$$

$$A_1 = P_1 - J_1 = 52.759,50 - 20.000,00 = 32.759,50.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 200.000,00 - 32.759,50 = 167.240,50.$$

Período k = 2:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,10 \cdot 167.240,50 = 16.724,05.$$

$$A_2 = P_2 - J_2 = 52.759,50 - 16.724,05 = 36.035,45.$$

$$D_2 = D_1 - A_2 = 167.240,50 - 36.035,45 = 131.205,06 .$$

Período k = 3:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,10 \cdot 131.205,06 = 13.120,51.$$

$$A_3 = P_3 - J_3 = 52.759,50 - 13.120,51 = 39.638,99.$$

$$D_3 = D_2 - A_3 = 131.205,15 - 39.638,99 = 91.566,07.$$

Período k = 4:

$$J_4 = i \cdot D_3 = 0,10 \cdot 91.566,07 = 9.156,61.$$

$$A_4 = P_4 - J_4 = 52.759,50 - 9.156,61 = 43.602,89.$$

$$D_4 = D_3 - A_4 = 91.566,07 - 43.602,89 = 47.963,18.$$

Procedendo o cálculo da mesma maneira, obtemos os valores do 5º período, com-
pondo a seguinte Tabela 2.4.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				200.000,00
1	32.759,50	20.000,00	52.759,50	167.240,50
2	36.035,45	16.724,05	52.759,50	131.205,06
3	39.638,99	13.120,51	52.759,50	91.566,07
4	43.602,89	9.156,61	52.759,50	47.963,18
5	47.963,18	4.796,32 ¹	52.759,50	0,00

Tabela 2.4: Planilha das prestações iguais.

O saldo devedor da última prestação deverá ser igual a zero, entretanto, pequenas diferenças são aceitáveis desde que sejam provenientes de arredondamentos realizados durante os cálculos, por isso fizemos alteração no valor dos juros da última parcela.

Comentando a Tabela 2.4 tem-se que:

1º - A soma das amortizações é igual ao valor do financiamento, ou seja,

$$\sum_{k=1}^5 A_k = 32.759,45 + 36.035,40 + 39.638,94 + 43.602,83 + 47.963,39 = 200.000,00.$$

2º - O valor de cada amortização é igual ao valor da prestação subtraído do juro daquele período, por exemplo, o valor da amortização no período 2 é:

$$A_2 = P_2 - J_2 = 52.759,45 - 16.724,05 = 36.035,40.$$

3º - O valor do juro num determinado período é igual ao produto da taxa pelo saldo devedor do período anterior, por exemplo, o valor do juros no período 4 é:

$$J_4 = i \cdot D_3 = 0,10 \cdot 91.566,22 = 9.156,22.$$

Também podemos calcular o juro no período 4 como o produto da taxa pela soma das amortizações ainda não pagas.

$$J_4 = i \cdot (A_4 + A_5) = 0,10 \cdot (43.602,83 + 47.963,38) \Rightarrow$$

$$J_4 = 0,10 \cdot 91.566,22 = 9.156,22.$$

¹Feito acerto para zerar o saldo devedor.

4º - O saldo devedor no determinado período é a diferença entre o valor do empréstimo e a soma das amortizações pagas, por exemplo, o saldo devedor no período 2:

$$D_2 = D_0 - (A_1 + A_2) \Rightarrow$$

$$D_2 = 200.000,00 - (32.759,45 + 36.035,40) \Rightarrow$$

$$D_2 = 200.000,00 - 68.794,85 = 131.205,15.$$

Ou, a soma das amortizações não pagas dos períodos 3 a 5:

$$D_2 = A_3 + A_4 + A_5 \Rightarrow$$

$$D_2 = 39.638,94 + 43.602,83 + 47.963,38 = 131.205,15.$$

Este sistema de amortização também é um sistema consistente, pois atende as cinco características acima referidas.

3 Sistema de Amortizações Constantes - SAC

Discutiremos com mais detalhes os sistemas que são objeto deste estudo. Iniciaremos com o sistema de amortizações constantes ou sistema SAC.

Para definir o sistema SAC ¹⁹, tomaremos as palavras de Assaf [1] (2009, p. 200):

“O Sistema de Amortização Constante (SAC), como o próprio nome indica, tem como característica básica serem as amortizações sempre iguais (ou constantes) em todo o prazo da operação. O valor da amortização é facilmente obtido mediante a divisão do capital emprestado pelo número de prestações.”

Neste sistema todas as prestações são variáveis, em decorrência de que as amortizações são constantes e os juros, não fixos.

Seja D_0 quantia emprestada, i taxa de juros compostos, por período, considerada, que a dívida seja amortizada por uma sucessão de n amortizações periódicas iguais a A , com vencimento da primeira prestação ocorra um período após a data em que se contratou a dívida, que representamos, esquematicamente, através Gráfico 3.1.

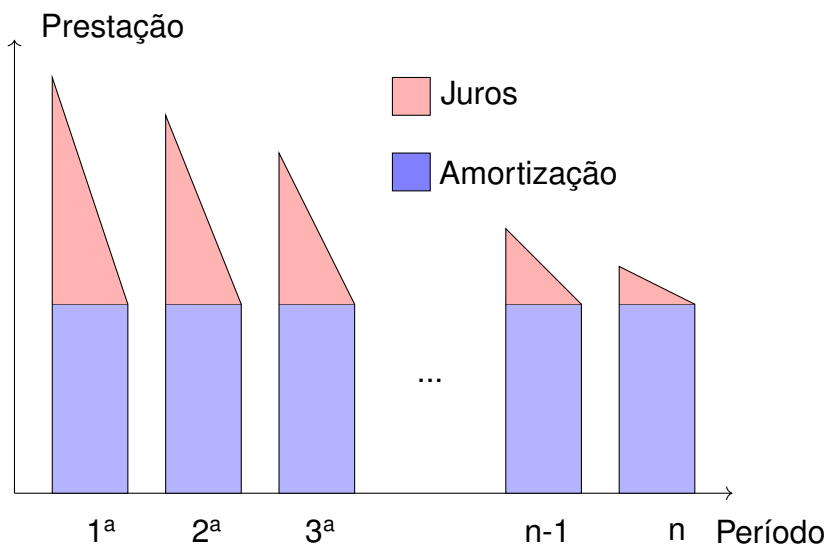


Gráfico 3.1: Gráfico das prestações no sistema SAC.

Neste sistema, o valor das amortizações permanece o mesmo até o final do contrato, ou seja,

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A.$$

¹⁹Veja quando foi introduzido no Brasil [13].

Para um melhor entendimento do sistema, veja o exemplo abaixo.

Exemplo 3.1. Uma dívida de R\$ 300.000,00 é paga em 10 meses, com um juros compostos de 10% ao mês, sendo a primeira prestação paga 30 dias após a assinatura do contrato. Elabore a planilha de amortização, utilizando o sistema SAC.²⁰

$$\text{Solução: } \begin{cases} D_0 = 300.000,00 \\ n = 10 \text{ prestações mensais} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{cases}$$

Calculemos o valor da amortização em face de fórmula²¹ (17), assim:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_{10} = A = \frac{D_0}{n} = \frac{300.000,00}{10} = 30.000,00.$$

Desse modo, todas as amortizações correspondem a R\$ 30.000,00.

Graficamente, a evolução da amortização é ilustrada no Gráfico 3.2.

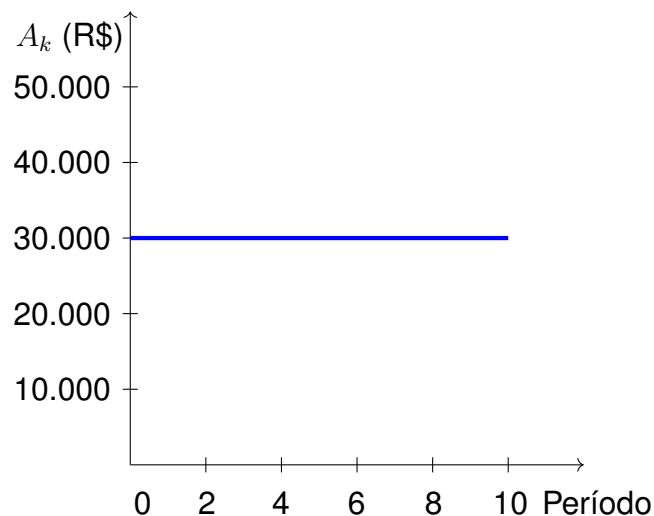


Gráfico 3.2: Gráfico do comportamento da amortização - SAC.

Seguindo o mesmo raciocínio do **Exemplo 2.1** da página 43 , calculamos os valores dos juros, prestações e saldos devedores de alguns períodos.

Período k = 1:

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,10 \cdot 300.000,00 = 30.000,00.$$

$$P_1 = A_1 + J_1 = 30.000,00 + 30.000,00 = 60.000,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 300.000,00 - 30.000,00 = 270.000,00.$$

²⁰Visando comparar os dois sistemas estudados, os dados deste exemplo serão utilizados no sistema Price.

²¹Demonstração encontra-se no item 3.2.1 na página 56.

Período k = 2:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,10 \cdot 270.000,00 = 27.000,00.$$

$$P_2 = A_2 + J_2 = 30.000,00 + 27.000,00 = 57.000,00.$$

$$D_2 = D_1 - A_2 = 270.000,00 - 30.000,00 = 240.000,00.$$

Período k = 3:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,10 \cdot 240.000,00 = 24.000,00.$$

$$P_3 = A_3 + J_3 = 30.000,00 + 24.000,00 = 54.000,00.$$

$$D_3 = D_2 - A_3 = 240.000,00 - 30.000,00 = 210.000,00.$$

Operando da mesma forma para os demais períodos, obtemos os valores da Tabela 3.1.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				300.000,00
1	30.000,00	30.000,00	60.000,00	270.000,00
2	30.000,00	27.000,00	57.000,00	240.000,00
3	30.000,00	24.000,00	54.000,00	210.000,00
4	30.000,00	21.000,00	51.000,00	180.000,00
5	30.000,00	18.000,00	48.000,00	150.000,00
6	30.000,00	15.000,00	45.000,00	120.000,00
7	30.000,00	12.000,00	42.000,00	90.000,00
8	30.000,00	9.000,00	39.000,00	60.000,00
9	30.000,00	6.000,00	36.000,00	30.000,00
10	30.000,00	3.000,00	33.000,00	0,00
Total	300.000,00	165.000,00	465.000,00	

Tabela 3.1: Planilha de amortização - sistema SAC.

3.1 Análise da Tabela 3.1

Apresentaremos as análises da Tabela 3.1, as conclusões do comportamento dos juros, prestações e saldos devedores, através de gráficos.

3.1.1 Em relação aos juros

Examinando o Gráfico 3.3 (que representa a evolução dos juros) e a Tabela 3.1, verifica-se que eles decrescem linearmente durante todo o período, formando uma pro-

gressão aritmética decrescente de razão negativa igual ao produto do valor da amortização pela taxa de juros.²²

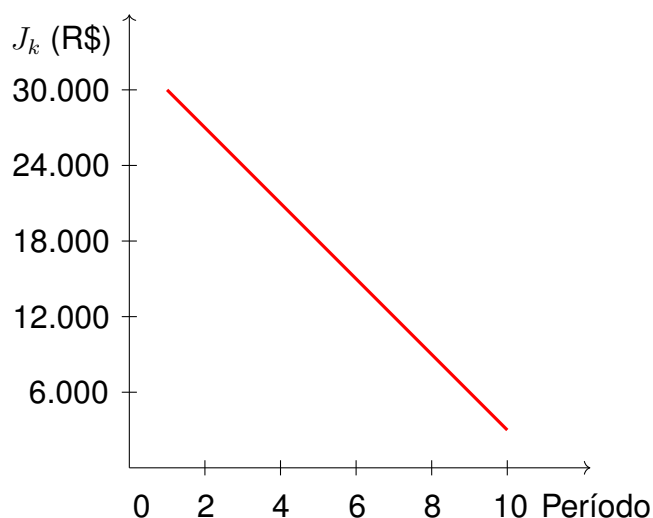


Gráfico 3.3: Gráfico do comportamento dos juros - SAC.

3.1.2 Em relação as prestações

Examinando os dados da Tabela 3.1 e do Gráfico 3.4 (que representa a evolução das prestações) constata-se que os valores das prestações decrescem a razão negativa de R\$ 3.000,00, pois $57.000,00 - 60.000,00 = \dots = 33.000,00 - 36.000,00 = - 3.000,00$.

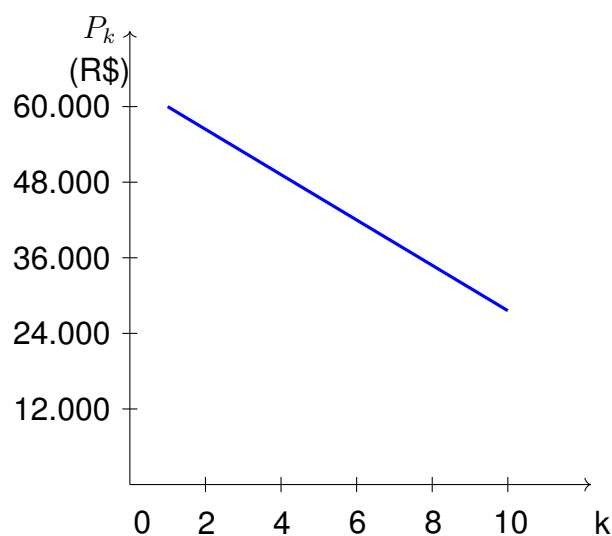


Gráfico 3.4: Gráfico do comportamento das prestações - SAC.

²²Demonstração encontra-se seção 3.2.2.2 da página 57.

Elas formam uma progressão aritmética decrescente de razão igual a amortização multiplicada pela taxa ²³.

Comparando o valor da parcela de amortização com a primeira prestação, perceberemos que aquela equivale a 50% $\left(\frac{30.000,00}{60.000,00} = 0,5\right)$ dessa, já em relação a última, 91% $\left(\frac{30.000,00}{33.000,00} = 0,91\right)$, isto é, na última prestação quase a sua totalidade é para o pagamento do capital emprestado.

A soma do total das amortizações $\left(\sum_{k=1}^{10} A_k\right)$ com o total dos juros $\left(\sum_{k=1}^{10} J_k\right)$ deverá ser igual à soma das prestações $\left(\sum_{k=1}^{10} P_k\right)$. Assim:

$$\sum_{k=1}^{10} P_k = \sum_{k=1}^{10} A_k + \sum_{k=1}^{10} J_k = 300.000,00 + 165.000,00 = 465.000,00.$$

3.1.3 Em relação aos saldos devedores

Com base na Tabela 3.1 e no Gráfico 3.5 (que representa a evolução dos saldos devedores), nota-se que eles decrescem linearmente ao longo do prazo do financiamento na razão negativa de R\$ 30.000,00, pois $270.000,00 - 300.000,00 = \dots = 30.000,00 - 60.000,00 = - 30.000,00$, que corresponde ao valor negativo da amortização.

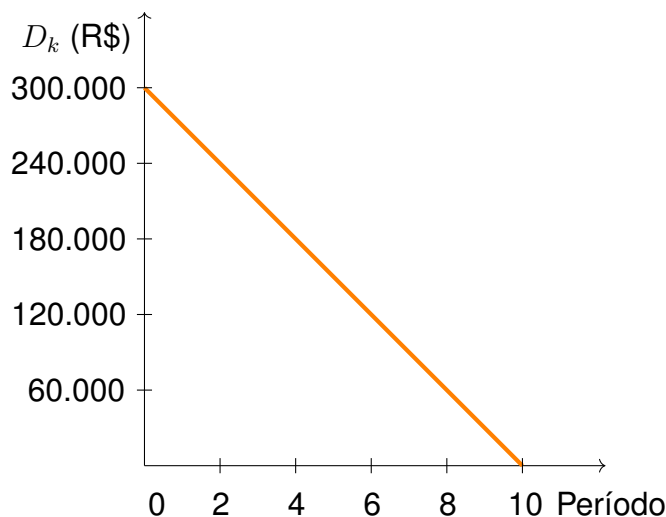


Gráfico 3.5: Gráfico do comportamento dos saldos devedores - SAC.

Eles também formam uma progressão aritmética decrescente cuja razão é igual ao valor da parcela da amortização ²⁴.

²³Demonstração encontra-se na seção 3.2.3.1 da página 58.

²⁴Demonstração encontra-se na seção 3.2.4.1 da página 62.

No ato de pagar a primeira prestação R\$ 60.000,00, o saldo devedor salda integralmente o juro do período, R\$ 30.000,00, e amortiza R\$ 30.000,00. Neste momento, o saldo devedor passa a ser R\$ 270.000,00. Da mesma forma, essa análise se repete com as demais prestações.

A primeira prestação (R\$ 60.000,00) corresponde a 20% do valor do financiamento e a última (R\$ 33.000,00), 11%.

Deduziremos em seguida relações sobre o valor da amortização, juro, saldo devedor num determinado período e total de juros pagos.

3.2 Expressões do sistema numa época qualquer

Comumente interessa-nos saber o valor da amortização, juros, prestação e saldo devedor em uma determinada época k ($0 \leq k \leq n$).

Existindo a planilha de amortização não há dificuldade alguma, mas, caso contrário, principalmente quando o número de prestações é grande, a construção da planilha torna-se extremamente trabalhosa. Por isso, vamos deduzir várias relações com base na definição do sistema e nas características de qualquer sistema de amortização, conhecidos valor do empréstimo D_0 , taxa de juros i e número de prestações n .

3.2.1 Valor da amortização

Para o cálculo do valor da amortização uma época k , utilizaremos a equação (12), ou seja, a soma das amortizações é igual ao valor do financiamento, para $k = n$, tem-se:

$$D_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = A + A + \dots + A = n \cdot A \iff A = \frac{D_0}{n}. \quad (17)$$

Assim, o valor da amortização é obtido mediante da divisão do valor do financiamento pelo número de prestações. Percebe-se que o valor da amortização depende somente do valor do financiamento e do número de prestações.

3.2.2 Valor do juro

Deduziremos a equação para determinar o valor do juro na época k e em seguida a equação para calcular o total de juros pagos durante o contrato do financiamento.

3.2.2.1 Cálculo do juro na época k De acordo coma a equação (14), o valor do juro para o período k (J_k) é igual ao produto da taxa de juro pelo saldo devedor do período anterior, ou seja,

$$J_1 = i \cdot D_0 \Rightarrow$$

$$J_2 = i \cdot D_1 = i \cdot (D_0 - A) = i \cdot \left[D_0 - \frac{D_0}{n} \right] = i \cdot D_0 \cdot \left[\frac{n-1}{n} \right] \Rightarrow$$

$$J_3 = i \cdot D_2 = i \cdot (D_0 - 2) \cdot \frac{D_0}{n} = i \cdot D_0 \cdot \left[\frac{n-2}{n} \right] \Rightarrow$$

$$J_4 = i \cdot D_3 = i \cdot (D_0 - 3) \cdot \frac{D_0}{n} = i \cdot D_0 \cdot \left[\frac{n-3}{n} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{J_k = i \cdot D_{k-1} = i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - k + 1)} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

3.2.2.2 Cálculo do total de juros pagos $\left(\sum_{k=1}^n J_k \right)$.

Usando a equação (18), podemos escrever que:

$$J_{k+1} = i \cdot D_k = i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - k) \quad (19)$$

Subtraindo membro a membro as equações 18 e 19, obtemos

$$J_{k+1} - J_k = i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - k) - \left[i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - k + 1) \right] = -i \cdot \frac{D_0}{n}.$$

Dessa forma, os juros diminuem linearmente a uma razão negativa no valor de $-i \cdot \frac{D_0}{n} = -i \cdot A$.

Temos que:

$$J_k = i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - k + 1),$$

logo

$$J_1 = i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - 1 + 1) = i \cdot D_0 \Rightarrow$$

$$J_n = i \cdot \frac{D_0}{n} \cdot (n - n + 1) = i \cdot \frac{D_0}{n}.$$

Como os valores das parcelas de juros é uma progressão aritmética, calculamos a soma das parcelas de juros, utilizando a relação (2).

$$\sum_{k=1}^n J_k = \left(\frac{J_1 + J_n}{2} \right) \cdot n = \left[\frac{i \cdot D_0 + \frac{i \cdot D_0}{n}}{2} \right] \cdot n \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n J_k = \frac{D_0 \cdot i \cdot (n + 1)}{2}. \quad (20)$$

Isto é, o total de juros pagos é numericamente igual à metade dos juros simples, à taxa i , que seria devido pela aplicação do capital emprestado durante $n + 1$ períodos.

3.2.3 Valor da prestação

Além de determinar a equação da prestação no período k , analisaremos os efeitos do prazo sobre o valor da primeira prestação.

3.2.3.1 Cálculo do valor da prestação na época k

Em consonância com a equação (11), o valor da parcela da prestação é igual a soma da amortização e da parcela dos juros, do mesmo período, ou seja, o valor da prestação para o período k é igual a:

$$P_k = A + J_k = \frac{D_0}{n} + \frac{n - k + 1}{n} \cdot D_0 \cdot i \Rightarrow$$

$$P_k = \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i] \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Assim, podemos escrever que:

$$P_{k+1} = \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k) \cdot i]. \quad (22)$$

Subtraindo membro a membro as relações 22 e 21, obtemos:

$$P_{k+1} - P_k = \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k) \cdot i] - \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i] \Rightarrow$$

$$P_{k+1} - P_k = -i \cdot \frac{D_0}{n} = -A \cdot i.$$

Conclui-se que as prestações formam uma progressão aritmética cuja razão negativa é numericamente igual ao produto da parcela da amortização pela taxa.

3.2.3.2 Efeitos do prazo do financiamento sobre o valor da primeira prestação

Demonstra-se a seguir que, nos financiamentos de muitas prestações neste sistema, a primeira prestação P_1 tende a ser reduzida.

De acordo com a equação (21) tem-se:

$$P_k = \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i].$$
$$P_1 = D_0 \cdot \left[\frac{1}{n} + i \right]. \quad (23)$$

Infere-se que o valor da primeira prestação (P_1) é diretamente proporcional ao valor do financiamento (D_0) e inversamente proporcional ao prazo de pagamento (n). Dessa forma, quanto maior o prazo do empréstimo, menor será o valor da primeira amortização.

Veja duas situações com o mesmo valor do empréstimo, a primeira com a taxa de juros de 1%, a segunda com taxa de juros de 5%, e em ambas o número de prestações é variável.

Exemplo 3.2. Calcule o valor da amortização, do juro, da prestação e saldo devedor no primeiro período, quando $D_0 = 240.000,00$, $i = 1\%$ a.m para diversos prazos de financiamento.

Solução:

a) **Para $n = 10$ parcelas.**

Pela equação (17), tem-se:

$$A = \frac{D_0}{n} = \frac{240.000,00}{10} = 24.000,00.$$

Logo,

$$J_1 = 0,01 \cdot 240.000,00 = 2.400,00.$$

$$P_1 = A + J_1 = 24.000,00 + 2.400,00 = 26.400,00.$$

Alternativamente,

$$P_1 = D_0 \cdot \left[\frac{1}{n} + i \right] = 240.000,00 \cdot \left[\frac{1}{10} + 0,01 \right] = 26.400,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 24.000,00 = 216.000,00.$$

b) **Para $n = 50$ parcelas.** Tem-se:

$$A = \frac{D_0}{n} = \frac{240.000,00}{50} = 4.800,00.$$

Logo,

$$J_1 = 0,01 \cdot 240.000,00 = 2.400,00.$$

$$P_1 = A + J_1 = 4.800,00 + 2.400,00 = 7.200,00.$$

Alternativamente,

$$P_1 = D_0 \cdot \left[\frac{1}{n} + i \right] = 240.000,00 \cdot \left[\frac{1}{50} + 0,01 \right] = 7.200,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 4.800,00 = 235.200,00.$$

E assim para os demais números de prestações, completamos a Tabela 3.2, onde temos organizados os valores das amortizações, juros, prestações e saldos devedores relativos à primeira parcela considerando os diversos prazos de financiamentos.

k	A	J_1	P_1	D_1
10	24.000,00	2.400,00	26.400,00	216.000,00
50	4.800,00	2.400,00	7.200,00	235.200,00
200	1.200,00	2.400,00	3.600,00	238.800,00
360	666,67	2.400,00	3.066,67	239.333,33
600	400,00	2.400,00	2.800,00	239.600,00
1400	171,43	2.400,00	2.571,43	239.828,57

Tabela 3.2: Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 1\%$.

Percebe-se que aumentando o número de prestações o valor da primeira prestação está aproximando-se do valor da primeira parcela de juros, conseqüentemente o saldo devedor se aproxima do valor do financiamento.

Exemplo 3.3. Calcule o valor da amortização, do juro, da prestação e saldo devedor no primeiro período, quando $D_0 = 240.000,00$, $i = 5\%$ a.m para diversos prazos de financiamento.

Solução

a) Para $n = 10$ parcelas.

Pela equação (17), tem-se:

$$A = \frac{D_0}{n} = \frac{240.000,00}{10} = 24.000,00.$$

Logo,

$$J_1 = 0,05 \cdot 240.000,00 = 12.000,00.$$

$$P_1 = A + J_1 = 24.000,00 + 12.000,00 = 36.000,00.$$

Alternativamente,

$$P_1 = D_0 \cdot \left[\frac{1}{n} + i \right] = 240.000,00 \cdot \left[\frac{1}{10} + 0,05 \right] = 36.000,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 24.000,00 = 216.000,00.$$

b) Para $n = 50$ parcelas.

Tem-se:

$$A = \frac{D_0}{n} = \frac{240.000,00}{50} = 4.800,00.$$

Logo,

$$J_1 = 0,05 \cdot 240.000,00 = 12.000,00.$$

$$P_1 = A + J_1 = 4.800,00 + 12.000,00 = 16.800,00.$$

E assim para os demais números de prestações, completamos a Tabela 3.3

k	A	J_1	P_1	D_1
10	24.000,00	12.000,00	36.000,00	216.000,00
50	4.800,00	12.000,00	16.800,00	235.200,00
200	1.200,00	12.000,00	13.200,00	238.800,00
1200	200,00	12.000,00	12.200,00	239.800,00

Tabela 3.3: Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 5\%$.

Percebemos que embora o valor da prestação decresça quando se aumenta o prazo, os decréscimos, ao menos para prazo elevados, tendem a ser pouco relevantes, por exemplo, aumentando o prazo de 200 para 1.200 prestações, o valor da prestação diminui apenas R\$ 1.000,00, dado que o valor da prestação aproxima-se cada vez mais do valor dos juros.

Constamos que o aumento da taxa de juros (1% para 5%) aumenta o valor da primeira prestação (R\$ 26.400,00 para R\$ 36.000,00, respectivamente), consequência do aumento do valor dos juros, pois o valor da quota de amortização é a mesma, e também faz com que a diminuição da parcela da prestação seja menos acentuada.

3.2.3.3 Cálculo da soma das prestações. Tem-se:

$$\sum_{k=1}^n P_k = \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n J_k = D_0 + \frac{D_0 \cdot i \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n P_k = \frac{D_0 \cdot [2 + (n+1) \cdot i]}{2}} \quad (24)$$

3.2.4 Valor do saldo devedor

O valor do saldo devedor no período k (D_k) pode ser calculado através das parcelas das amortizações pagas e também das não pagas.

3.2.4.1 Método retrospectivo - método que envolve as amortizações pagas. Da equação (15), temos que o estado dívida, após k amortizações, é igual a:

$$D_k = D_0 - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) = D_0 - k \cdot A \Rightarrow$$

$$D_k = D_0 - k \cdot \frac{D_0}{n} = D_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{D_k = D_0 \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)} \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

Obviamente, após ter-se pago a última prestação, o financiamento estará quitado. Então, $D_n = 0$.

Partindo-se da relação (25), temos:

$$D_{k+1} = D_0 \cdot \left(1 - \frac{k+1}{n}\right),$$

logo, subtraindo membro a membro as duas relações acima, temos que:

$$D_{k+1} - D_k = D_0 \cdot \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) - \left[D_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right] = -\frac{D_0}{n} = -A.$$

Assim, o saldo devedor é uma PA, cuja razão (r) vale $-A$.

3.2.4.2 Método prospectivo - método que envolve as amortizações não pagas.

Conforme a equação (15), temos

$$\boxed{D_k = A_{k+1} + A_{k+2} + \dots + A_n = (n-k) \cdot A} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

3.3 Planilha de amortização

Após as deduções efetuadas, permitem-nos apresentar a Tabela 3.4 do sistema de amortização constante.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				D_0
1	$A = \frac{D_0}{n}$	$J_1 = i \cdot D_0$	$P_1 = A + J_1$	$D_1 = D_0 - A$
2	A	$J_2 = i \cdot D_1$	$P_2 = A + J_2$	$D_2 = D_1 - A$
3	A	$J_3 = i \cdot D_2$	$P_3 = A + J_3$	$D_3 = D_2 - A$
...	
n	A	$J_n = i \cdot D_{n-1}$	$P_n = A + J_n$	$D_n = D_{n-1} - A = 0,00$
Total	D_0	$\frac{D_0 \cdot i \cdot (n + 1)}{2}$	$\frac{D_0 \cdot [2 + (n + 1) \cdot i]}{2}$	

Tabela 3.4: Planilha de amortização - sistema SAC genérico.

3.4 Aplicações das expressões genéricas

Em sequência, resolve-se alguns exemplos, com dados do **Exemplo 3.3**, utilizando das relações deduzidas e, após, verificamos se os resultados conferem com os valores especificados na Tabela 3.1.

Exemplo 3.4. Determine o saldo devedor após o pagamento da 7ª prestação.

a) Usando a equação (25) - método retrospectivo:

$$D_7 = 300.000 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right) \Rightarrow$$

$$D_7 = 300.000 \cdot 0,3 = 90.000,00.$$

b) Usando a equação (26) - método prospectivo:

$$D_7 = (10 - 7) \cdot 30.000,00 = 90.000,00.$$

Valor esse que confere com o transcrito na tabela 3.1.

Exemplo 3.5. Determine o valor da parcela de juros correspondente a 8ª prestação (juros de ordem $k = 8$).

a) Empregando a equação (18), obtemos:

$$J_8 = \frac{300.000}{10} \cdot (10 - 8 + 1) \cdot 0,10 = 9.000,00.$$

b) Alternativamente, lançando a mão da equação (13), tem-se:

$$J_8 = 0,10 \cdot (3.000,00 + 3.000,00 + 3.000,00) = 9.000,00.$$

Valor esse que confere com o transcrito na Tabela 3.1.

Exemplo 3.6. Determine o valor total de juros pagos.

Empregando a equação (20), obtemos:

$$\sum_{k=1}^{10} J_k = \frac{300.0000 \cdot 0,10 \cdot (10 + 1)}{2} = 165.000,00.$$

Resultado equivalente ao especificado na Tabela 3.1.

Exemplo 3.7. Determine o valor da 5ª prestação (prestação na época $k = 5$).

Empregando a equação (21), obtemos:

$$P_5 = \frac{300.000}{10} \cdot [1 + (10 - 5 + 1) \cdot 0,10] = 48.000,00.$$

Também este valor da prestação equivale ao valor especificado na Tabela 3.1.

Exemplo 3.8 Determine o valor total das prestações.

Empregando a equação (24), temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_k &= \frac{D_0 \cdot [2 + (n + 1) \cdot i]}{2} \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{10} P_k &= \frac{300.000,00 \cdot [2 + (10 + 1) \cdot 0,10]}{2} \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{10} P_k &= 150.000,00 \cdot 3,1 = 465.000,00. \end{aligned}$$

Também este valor da prestação equivale ao valor especificado na Tabela 3.1.

Exemplo 3.9 - (PROFMAT) Considere a amortização de uma dívida de \$ 35.000,00, em 180 meses, com juros de 1 % ao mês, pelo SAC. Determine:

- do valor da centésima prestação.
- o estado da dívida nessa época.
- o valor do juros nessa época (acrescentado pelo autor).
- a soma total dos juros pagos (acrescentado pelo autor).

Solução

$$\begin{cases} D_0 = 35.000,00 \\ n = 180 \text{ prestações mensais e iguais} \\ i = 1\% \text{ a.m} = 0,01 \text{ a.m.} \end{cases}$$

a) Usando a equação (21) , temos:

$$P_{100} = \frac{35.000,00}{180} \cdot [1 + (180 - 100 + 1) \cdot 0,01] = 351,94.$$

b) Usando a equação (25), temos:

$$D_{100} = \frac{180 - 100}{180} \cdot 35.000,00 = 15.555,56.$$

c) Usando a equação (18), temos:

$$J_{100} = \frac{35.000,00}{180} \cdot (180 - 100 + 1) \cdot 0,01 = 157,50.$$

d) Empregando a equação (20), obtemos:

$$\sum_{k=1}^{180} J_k = \frac{35.000,00 \cdot 0,01 \cdot (180 + 1)}{2} = 31.675,00.$$

e) Empregando a equação (24), temos:

$$\sum_{k=1}^{180} P_k = \frac{35.000,00 \cdot [2 + (180 + 1) \cdot 0,01]}{2} = 66.675,00.$$

Exemplo 3.10 - (PROFMAT) Considere a amortização de uma dívida de 150 meses, com juros de 1 % ao mês, pelo SAC. De quantos se reduzirá a prestação inicial, dobrando-se o prazo?

Solução

Empregando a equação (23), tem-se

$$\text{i) para } n = 150, P_1 = D_0 \cdot \left[\frac{1}{n} + i \right] = D_0 \cdot \left[\frac{1}{150} + 0,01 \right] = 0,0166667 \cdot D_0.$$

$$\text{ii) para } n = 300, P_1 = D_0 \cdot \left[\frac{1}{n} + i \right] = D_0 \cdot \left[\frac{1}{300} + 0,01 \right] = 0,0133333 \cdot D_0.$$

Comparando as duas prestações temos:

$$\frac{P_1^{300}}{P_1^{150}} = \frac{0,0133333 \cdot D_0}{0,0166666 \cdot D_0} = 0,8.$$

Assim dobrando o prazo, mantendo a mesma taxa de juros, a primeira prestação reduzirá em 20%.

4 Sistema de prestações constantes ou método francês ou sistema Price

Analisaremos o sistema de prestação constante ou sistema Price, ou seja, de pagamento em prestações iguais e periódicas ao longo do prazo do empréstimo.

Faro *et al.* [13](2012, p.241) esclarecem que:

“Pelo método francês de amortização, o devedor obriga-se a saldar seu débito por meio de uma sequência de pagamentos iguais e que devem ser efetuados periodicamente: ou seja, a dívida é amortizada por meio de anuidades uniformes ou constantes, que incluem uma parte de amortização e outra de juros, cada uma delas variável a cada período”.

A prestação, que corresponde a soma da amortização e do juro, é fixa durante todo o contrato, isto é,

$$P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = P.$$

Representamos, esquematicamente, através do Gráfico 4.1.

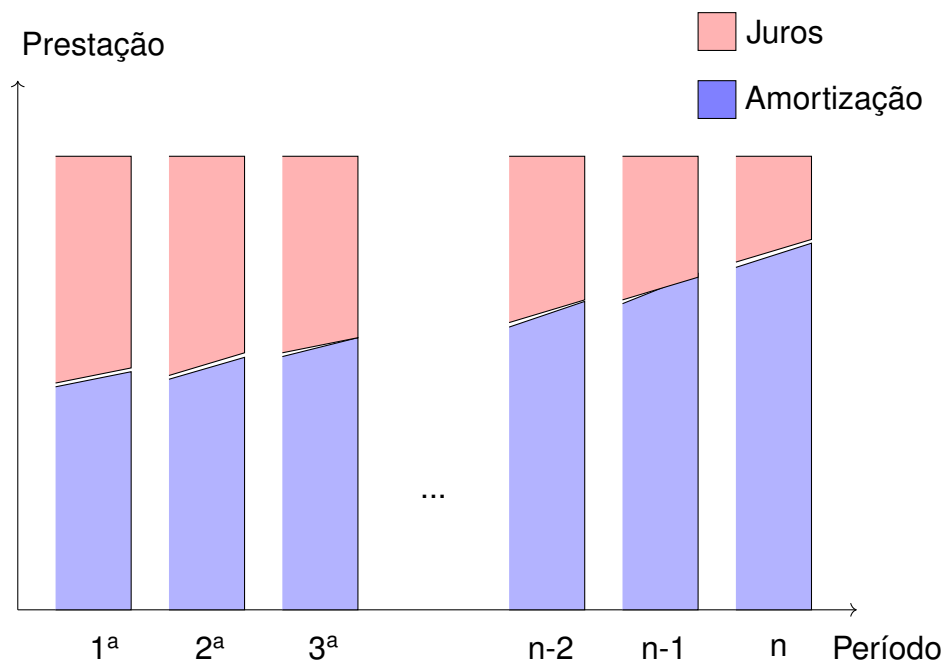


Gráfico 4.1: Gráfico da prestação no sistema Price.

Assim, todas as prestações são fixas, enquanto os juros vão diminuindo de maneira lenta, as amortizações crescem de forma exponencial.

Para uma melhor compreensão do sistema, ilustraremos na resolução do exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. Construa uma planilha de amortização para um empréstimo de R\$ 300.000,00 que se amortiza em 10 prestações mensais, a uma taxa de juros compostos de 10 % ao mês, sendo a primeira prestação trinta dias após a liberação do empréstimo, usando o sistema Price.

Solução

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = 300.000,00 \\ n = 10 \text{ prestações mensais} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{array} \right.$$

Calcule-se do valor da prestação, aplicando a relação abaixo: ²⁵

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]} = \frac{300.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,10)^{-10}}{0,10} \right]} = 48.823,62,$$

A evolução das prestações é representada graficamente pelo Gráfico 4.2.

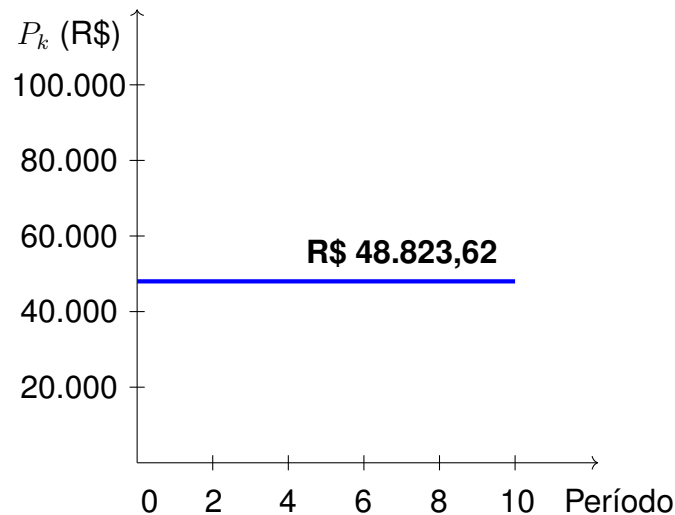


Gráfico 4.2: Gráfico do comportamento da prestação - Price.

Com base no Gráfico 4.2, percebe-se que o valor da prestação mensal é de R\$ 48.823,62, um valor constante. É constituído de uma parcela correspondente aos juros de 10% sobre o valor de empréstimo e a diferença corresponde à quota de amortização.

²⁵Demonstração da equação 27 encontra-se na página 73.

Assim, usando o mesmo raciocínio do **Exemplo 2.1** da página 43, calculamos juros, amortizações e saldos devedores de alguns períodos.

Período k = 1:

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,10 \cdot 300.000,00 = 30.000,00.$$

$$A_1 = P_1 - J_1 = 48.823,62 - 30.000,00 = 18.823,62.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 300.000,00 - 18.823,62 = 281.176,38.$$

Período k = 2:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,10 \cdot 281.176,38 = 28.117,64.$$

$$A_2 = P_2 - J_2 = 48.823,62 - 28.117,64 = 20.705,98.$$

$$D_2 = D_1 - A_2 = 281.176,38 - 20.705,98 = 260.470,40.$$

Período k = 3:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,10 \cdot 260.470,40 = 26.047,04.$$

$$A_3 = P_3 - J_3 = 48.823,62 - 26.047,04 = 22.776,58.$$

$$D_3 = D_2 - A_3 = 260.470,40 - 22.776,58 = 237.693,82.$$

Após os cálculos dos períodos 4^o a 10^a, pode-se obter o resultado da Tabela 4.1.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				300.000,00
1	18.823,62	30.000,00	48.823,62	281.176,38
2	20.705,98	28.117,64	48.823,62	260.470,40
3	22.776,58	26.047,04	48.823,62	237.693,82
4	25.054,24	23.769,38	48.823,62	212.639,59
5	27.559,66	21.263,96	48.823,62	185.079,93
6	30.315,63	18.507,99	48.823,62	154.764,30
7	33.347,19	15.476,43	48.823,62	121.417,11
8	36.681,91	12.141,71	48.823,62	84.735,21
9	40.350,10	8.473,52	48.823,62	44.385,11
10	44.385,11	4.438,51	48.823,62	0,00
Total	300.000,00	188.236,18	488.236,18	

Tabela 4.1: Planilha de amortização - sistema Price.

4.1 Análise da Tabela 4.1

Na análise da Tabela 4.1, apresentaremos a evolução das amortizações, juros, prestações e saldos devedores e comentaremos as principais características de cada item que compõe a tabela.

4.1.1 Em relação as amortizações

A partir da Tabela 4.1, as amortizações crescem de R\$ 18.823,62 a R\$ 44.385,11, que representamos graficamente a evolução através do Gráfico 4.3.

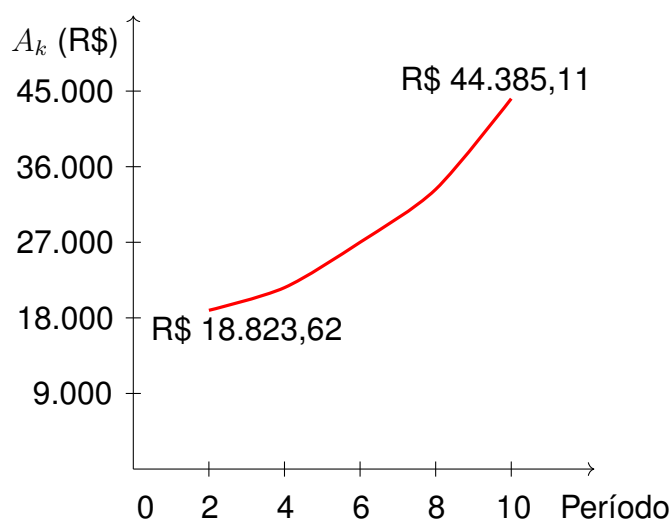


Gráfico 4.3: Gráfico do comportamento das amortizações - Price.

As amortizações crescem exponencialmente à razão 1,10, ou seja, 1 a mais que o valor da taxa na forma decimal ²⁶

$$\left(\frac{20.705,98}{18.823,62} = \frac{22.776,58}{20.705,98} = \dots = \frac{44.385,11}{40.350,10} = 1,10 \right).$$

A primeira vale apenas 39% $\left(\frac{18.823,62}{48.823,62} = 0,39 \right)$ do valor da prestação e última, quase 91% $\left(\frac{44.385,11}{48.823,62} = 0,91 \right)$, isto é, a última é quase totalmente para o pagamento da quota de amortização.

A soma de todas as amortizações é igual ao valor do financiamento e são todas equivalentes a uma mesma data focal, por exemplo, o valor atual de cada uma na data zero equivale a:

²⁶Demonstração da equação 28 encontra-se na página 74.

$$\frac{18.823,62}{(1 + 0,10)^1} = 17.112,38;$$

$$\frac{20.705,58}{(1 + 0,10)^2} = 17.112,38;$$

...

$$\frac{40.350,10}{(1 + 0,10)^9} = 17.112,38;$$

$$\frac{44.385,11}{(1 + 0,10)^{10}} = 17.112,38.$$

Por isso, que este sistema é também denominado de sistema das amortizações equivalentes.

4.1.2 Em relação aos juros

Os juros decrescem, pois incidem sobre o saldo devedor, que por sua vez diminui à medida do pagamento das prestações. Eles também decrescem de maneira mais lentamente do que os juros no sistema SAC ²⁷, pois enquanto nesse no quinto período paga 50% do valor inicial de juros, naquele 50% serão quase no oitavo período.

Representamos graficamente a evolução do juros pelo Gráfico 4.4.

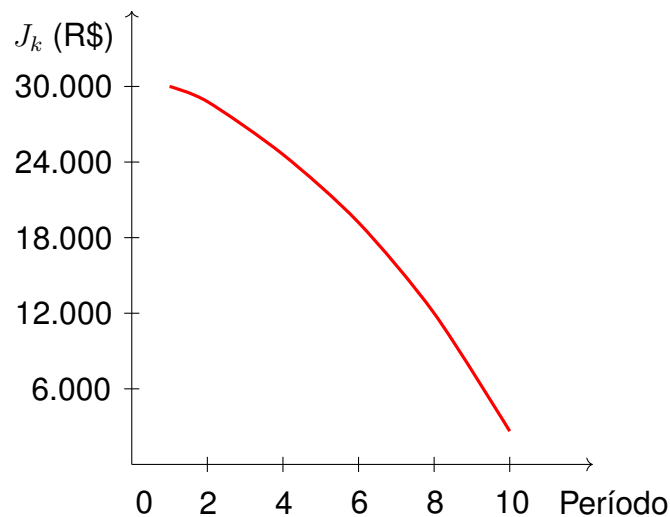


Gráfico 4.4: Gráfico do comportamento dos juros - Price.

²⁷Veja Tabela 3.1.

4.1.3 Em relação aos saldos devedores

Com base nas Tabelas 3.1 e 4.1, o saldo devedor do sistema SAC tem um decréscimo mais rápido do que do sistema Price, pois o saldo devedor no 5º período no sistema SAC é igual R\$ 270.000,00 e no sistema Price, R\$ 281.176,38.

Representamos graficamente a evolução do saldo devedor pelo Gráfico 4.5.

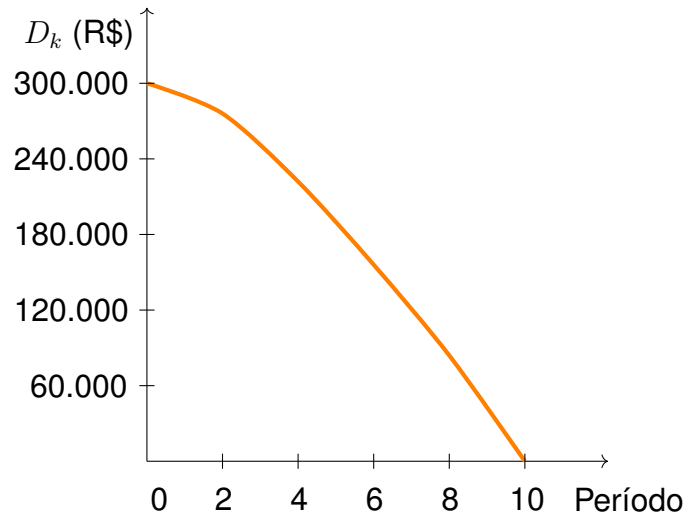


Gráfico 4.5: Gráfico do comportamento dos saldos devedores - Price.

4.2 Expressões genéricas do sistema numa época qualquer

Vamos agora deduzir algumas fórmulas importantes referente a este sistema para o cálculo da prestação, amortização, juro e saldo devedor num período qualquer, que serão empregadas quando não existir uma planilha de amortização pronta ou quando a construção dela for inconveniente quando o número de prestações for enorme.

4.2.1 Valor da prestação

Demonstraremos que a prestação depende do valor do financiamento, da taxa e do prazo. Como todas as prestações são iguais e usando a relação (15), tem-se:

$$D_0 = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^n \frac{P}{(1+i)^k} = P \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n.$$

A expressão $\frac{1}{(1+i)^k}$ é uma PG, a_1 e quanto a razão (q) são iguais $\frac{1}{(1+i)}$.

Aplicando a equação (3), tem-se:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Desse modo,

$$D_0 = P \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} = P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Logo,

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]} \quad (27)$$

4.2.2 Valor da amortização no período k (A_k)

Apresentamos como calcular valor da amortização, num período qualquer, em função da primeira amortização e o do valor financiamento e, em seguida, os efeitos do prazo sobre o valor da primeira amortização.

4.2.2.1 Em função da primeira amortização (A_1) Como o valor de cada prestação, na época k, é igual ao valor dos juros mais o valor da amortização nesta mesma época, isto é,

$$P_k = A_k + J_k,$$

ou melhor,

$$P = A_k + J_k = A_k + i \cdot D_{k-1}$$

assim, podemos escrever que:

$$P = A_{k+1} + J_{k+1} = A_{k+1} + i \cdot D_k.$$

Igualando as duas equações acima, obtemos:

$$A_k + i \cdot D_{k-1} = A_{k+1} + i \cdot D_k.$$

Com

$$A_{k+1} = A_k + i \cdot D_{k-1} - i \cdot D_k = A_k + i \cdot (D_{k-1} - D_k).$$

²⁸Veja Teorema 10.

Como $A_k = D_{k-1} - D_k$, conclui-se que:

$$A_{k+1} = A_k \cdot (1 + i).$$

Desse modo, tem-se:

$$A_2 = A_1 \cdot (1 + i); A_3 = A_2 \cdot (1 + i) = A_1 \cdot (1 + i)^2.$$

Ou seja, as quotas de amortização formam uma PG de razão igual a $(1 + i)$.

Logo

$$\boxed{A_k = A_1 \cdot (1 + i)^{k-1}} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

4.2.2.2 Em função do valor do financiamento (D_0) A expressão $(1 + i)^{k-1}$ é uma PG, tanto o primeiro termo e quanto a razão são iguais $(1 + i)$.

Aplicando a equação (3), tem-se:

$$\sum_{k=1}^n (1 + i)^{k-1} = (1 + i) \cdot \frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Desse modo,

$$A_k = A_1 \cdot (1 + i)^{k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k = A_1 \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Mas pela segunda característica $\sum_{k=1}^n A_k = D_0$, então $A_1 = \frac{D_0 \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$.

Assim,

$$\boxed{A_k = \frac{D_0 \cdot i}{(1 + i)^n - 1} \cdot (1 + i)^{k-1} = D_0 \cdot \left[\frac{(1 + i)^{k-1} \cdot i}{(1 + i)^n - 1} \right]} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

4.2.3 Efeitos do prazo do financiamento sobre o valor da primeira amortização

Demonstra-se a seguir que, nos financiamentos de prazos longos, a primeira amortização (A_1) tende a ser reduzida, tornando-se quase nula, isto é, ela é inversamente proporcional ao prazo.

Vimos que $A_1 = \frac{D_0 \cdot i}{(1+i)^n - 1}$ e $D_0 = P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ e substituindo o valor de D_0 na primeira igualdade, temos:

$$A_1 = \frac{P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow A_1 = \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Dessa maneira, mostra-se que o valor da primeira amortização (A_1) é diretamente proporcional à prestação (P) e inversamente proporcional à exponencial do prazo de pagamento (n). Dessa forma, quanto maior o prazo do empréstimo, menor será o valor da primeira amortização.

Vejamos alguns exemplos que abordam os efeitos da taxa de juros de prazo no valor da primeira amortização.

Exemplo 4.2 Calcule o valor da amortização, juro, prestação e saldo devedor no primeiro período, quando $D_0 = 240.000,00$, $i = 1\%$ a.m para diversos prazos de financiamento.

Solução:

a) **Para $n = 10$ parcelas.**

Pela equação (27), tem-se:

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]} = \frac{240.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,01)^{-10}}{0,01} \right]} = 25.339,70.$$

Calculamos o valor da parcela de juros, amortização e saldo devedor do primeiro período.

$$J_1 = 0,01 \cdot 240.000,00 = 2.400,00.$$

$$A_1 = P - J_1 = 25.339,70 - 2.400,00 = 22.939,70.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 22.939,70 = 217.060,30.$$

Alternativamente,

$$A_1 = \frac{P}{(1+i)^n} = \frac{25.339,70}{(1 + 0,01)^{10}} = 22.939,70.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 22.939,70 = 217.060,30.$$

b) **Para $n = 50$ parcelas.** Tem-se:

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]} = \frac{240.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,01)^{-50}}{0,01} \right]} = 6.123,06.$$

Calculamos a parcela de juros, amortização e saldo devedor do primeiro período.

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,01 \cdot 240.000,00 = 2.400,00.$$

$$A_1 = P - J_1 = 6.123,06 - 2.400,00 = 3.723,06.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 3.723,06 = 236.276,94.$$

c) **Para $n = 200$ parcelas.**

Tem-se:

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]} = \frac{240.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,01)^{-200}}{0,01} \right]} = 2.779,99.$$

Calculamos a parcela de juros, amortização e saldo devedor do primeiro período.

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,01 \cdot 240.000,00 = 2.400,00.$$

$$A_1 = P - J_1 = 2.779,99 - 2.400,00 = 379,99.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 379,99 = 239.620,01.$$

Usando o mesmo raciocínio dos cálculos para $n = 10$ e 50 , compomos a Tabela 4.2.

k	A_1	J_1	P	D_1
10	22.939,70	2.400,00	25.339,70	217.060,30
50	3.723,06	2.400,00	6.123,06	236.276,94
200	379,99	2.400,00	2.779,99	239.620,01
360	68,67	2.400,00	2.468,67	239.931,33
600	6,14	2.400,00	2.406,14	239.993,86
1400	0,00	2.400,00	2.400,00	240.000,00

Tabela 4.2: Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 1\%$.

Na Tabela 4.2 temos organizados os valores das amortizações, juros, prestações e saldos devedores relativo à primeira parcela considerando os diversos prazos de financiamentos, que mostra que aumentando o número de prestações o valor da primeira prestação equivale ao valor da primeira parcelas de juros, conseqüentemente o saldo devedor permanece o mesmo.

Exemplo 4.3 Calcule o valor da amortização, juro, prestação e saldo devedor no primeiro período, quando $D_0 = 240.000,00$, $i = 5\%$ a.m para diversos prazos de financiamento,

Solução:

a) **Para $n = 10$ parcelas.**

Pela equação (27), tem-se:

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]} = \frac{240.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,05)^{-10}}{0,05} \right]} = 31.081,00.$$

Calculamos o valor da parcela de juros, amortização e saldo devedor da primeiro período.

$$J_1 = 0,05 \cdot 240.000,00 = 12.000,00.$$

$$A_1 = P - J_1 = 31.081,00 - 12.000,00 = 19.081,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 19.081,00 = 220.918,90.$$

Alternativamente,

$$A_1 = \frac{P}{(1 + i)^n} = \frac{31.081,00}{(1 + 0,05)^{10}} = 19.081,00.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 19.081,00 = 220.918,90.$$

b) **Para $n = 50$ parcelas.**

Tem-se:

$$P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]} = \frac{240.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,05)^{-50}}{0,05} \right]} = 13.146,42.$$

Calculamos o valor da parcela de juros, amortização e saldo devedor do primeiro período.

$$J_1 = 0,05 \cdot 240.000,00 = 12.000,00.$$

$$A_1 = P - J_1 = 13.146,42 - 12.000,00 = 1.146,42.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 1.146,42 = 238.853,58.$$

Alternativamente,

$$A_1 = \frac{P}{(1+i)^n} = \frac{13.146,42}{(1+0,05)^{10}} = 1.146,42$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 240.000,00 - 1.146,42 = 238.853,58.$$

Usando o mesmo raciocínio dos cálculos para $n = 10$ e 50 , construímos a Tabela: 4.3.

k	A_1	J_1	P	D_1
10	19.081,00	12.000,00	31.081,00	220.918,90
50	1.146,42	12.000,00	13.146,42	238.853,58
200	0,69	12.000,00	12.000,69	239.999,31
302	0,00	12.000,00	12.000,00	240.000,00

Tabela 4.3: Planilha dos efeitos do prazo a taxa $i = 5\%$.

Observando a Tabela 4.3, nota-se que aumentando o prazo em determinado período não há mais amortização, tornando uma dívida perpétua, pois o valor da prestação corresponde apenas ao valor dos juros. Esse efeito também depende da taxa de juros adotada, pois quanto maior for a taxa menor será o prazo em que inexistirá amortização.

Também percebemos que embora o valor da prestação decresça quando se aumenta o prazo, os decréscimos, ao menos para prazo elevados, tendem a ser pouco relevante, dado que o valor da prestação aproxima-se do valor dos juros. O efeito da taxa de juros é bastante significativo, quanto maior a taxa de juros, mais acentuada é a diminuição do número de prestações para que a amortização seja nula.

4.2.4 Valor do juro

4.2.4.1 Cálculo de juros na época k Sabemos que as equações (11), (27) e (28) são, respectivamente,

$$J_K = P - A_k, \quad P = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]} \quad \text{e} \quad A_k = D_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^{k-1} \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right].$$

Assim substituindo o valor de P e A_k na primeira equação, chega-se a seguinte conclusão:

$$J_k = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]} - D_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^{k-1} \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right] \Rightarrow$$

$$J_k = D_0 \cdot i \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

4.2.4.2 Total de juros pagos. Tem-se:

$$\sum_{k=1}^n J_k = \sum_{k=1}^n P_k - \sum_{k=1}^n A_k = n \cdot P - D_0. \quad (31)$$

4.2.5 Valor do saldo devedor

O saldo devedor no período k (D_k) é a diferença entre o valor financiado e a soma das amortizações pagas até o período k .

$$D_k = D_0 - \sum_{j=1}^k A_j.$$

Sabemos que

$$A_k = D_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^{k-1} \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right],$$

a partir dessa equação, pode-se deduzir-se que:

$$A_1 = D_0 \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \cdot (1+i)^0;$$

...

$$A_k = D_0 \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \cdot (1+i)^{k-1}.$$

Assim, podemos afirmar que a expressão (29) é uma P.G., como:

$$a_1 = D_0 \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \text{ e } q = (1+i) \text{ (razão)}.$$

Portanto, utilizando o Teorema 3, a soma das amortizações é igual a:

$$\sum_{j=1}^k A_j = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = D_0 \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \cdot \frac{1 - (1+i)^k}{1 - (1+i)} \Rightarrow \sum_{j=1}^k A_j = D_0 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^n - 1}.$$

Desse modo, tem-se:

$$D_k = D_0 - \sum_{j=1}^k A_j = D_0 - D_0 \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^n - 1}, \text{ assim}$$

$$D_k = D_0 \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right] \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

4.3 Planilha de amortização

De maneira genérica, a planilha de amortização será apresentada na Tabela 4.4, mostrando os valores de: amortização (A_k), juro (J_k), prestação (P_k) e saldo devedor (D_k) ao final de cada período.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				D_0
1	$A_1 = P - J_1$	$J_1 = i \cdot D_0$	P	$D_1 = D_0 - A_1$
2	$A_2 = P - J_2$	$J_2 = i \cdot D_1$	P	$D_2 = D_1 - A_2$
3	$A_3 = P - J_3$	$J_3 = i \cdot D_2$	P	$D_3 = D_2 - A_3$
...	
n	$A_n = P - J_n$	$J_n = i \cdot D_{n-1}$	P	$D_n = D_{n-1} - A_n = 0,00$
Total	D_0	$n \cdot P - D_0$	$n \cdot P$	

Tabela 4.4: Planilha de amortização - sistema Price genérico.

4.4 Aplicações das expressões genéricas

Comentam-se a seguir alguns exemplos, utilizando os dados do **Exemplo 4.1**, que serão resolvidos com base nas expressões deduzidas e em seguida faz-se o confronto com os resultados da Tabela 4.1.

Exemplo 4.4. Calcule o valor da amortização correspondente a época $k = 6$.

Utilizando a equação (29), tem-se:

$$A_6 = 300.000 \cdot \left[\frac{(1 + 0,10)^{6-1} \cdot 0,10}{(1 + 0,10)^{10} - 1} \right] \Rightarrow$$

$$A_6 = 300.000 \cdot \left[\frac{(1,10)^5 \cdot 0,10}{(1,10)^{10} - 1} \right] = 30.315,63.$$

Este resultado é o mesmo especificado na Tabela 4.1.

Exemplo 4.5. Calcule o valor da parcela do juro corresponde a 9ª prestação.

a) Utilizando a equação (30), tem-se:

$$J_9 = 300.000 \cdot 0,10 \left[\frac{(1 + 0,10)^{10} - (1 + 0,10)^{9-1}}{(1 + 0,10)^{10} - 1} \right] \Rightarrow$$

$$J_9 = 30.000 \left[\frac{(1,10)^{10} - (1,10)^8}{(1,10)^{10} - 1} \right] = 8.473,52.$$

b) Alternativa, utilizando a equação (13), tem-se:

$$J_9 = 0,10 \cdot (40.350,10 + 44.385,11) \Rightarrow$$

$$J_9 = 0,10 \cdot 84.735,21 = 8.473,52.$$

Este resultado é o mesmo especificado na Tabela 4.1.

Exemplo 4.6. Calcule o total de juros pagos.

Utilizando a equação (31), tem-se:

$$\sum_{k=1}^{10} J_k = \sum_{k=1}^{10} P_k - \sum_{k=1}^{10} A_k = n \cdot P - D_0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{10} J_k = 10 \cdot 48.236,18 - 300.000,00 = 188.236,18.$$

Este resultado também é o mesmo especificado na Tabela 4.1.

Exemplo 4.7. Calcule o valor do saldo devedor existente no final do 7º mês (após o pagamento da 6ª prestação).

Empregando a relação (32), tem-se:

$$D_7 = 300.000 \cdot \left[\frac{(1,10)^{10} - (1,10)^7}{(1 + 0,10)^{10} - 1} \right] \Rightarrow$$

$$D_7 = 300.000 \cdot \left[\frac{(1,10)^{10} - (1,10)^7}{(1,10)^{10} - 1} \right] = 121.417,11.$$

Resultado igual ao valor especificado na Tabela 4.1.

Exemplo 4.8. (PROFMAT) Considere a amortização de uma dívida de \$ 35.000,00, em 180 meses, com juros de 1 % ao mês, pelo sistema Price. Determine:

- Valor da centésima prestação.
- o estado da dívida nessa época.
- o valor de juro nessa época - acrescentado pelo autor.
- o valor dos juros pagos - acrescentado pelo autor.

Solução: Temos:

$$\begin{cases} D_0 = 35.000,00 \\ n = 180 \text{ prestações mensais} \\ i = 1\% \text{ a.m} = 0,01 \text{ a.m.} \end{cases}$$

a) Usando a relação (27), tem-se:

$$P_{100} = \frac{35.000}{\left[\frac{1 - (1 + 0,01)^{-180}}{0,01} \right]} = 420,06.$$

b) Usando a relação (32), tem-se:

$$D_{100} = 35.000 \cdot \left[\frac{(1 + 0,01)^{180} - (1 + 0,01)^{100}}{(1 + 0,01)^{180} - 1} \right] = 23.056,28.$$

c) Usando a relação (30), tem-se:

$$J_{100} = 35.000 \cdot 0,01 \left[\frac{(1 + 0,01)^{180} - (1 + 0,01)^{100-1}}{(1 + 0,01)^{180} - 1} \right] = 187,62.$$

d) Utilizando a equação (31), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{180} J_k &= \sum_{k=1}^{180} P_k - \sum_{k=1}^{180} A_k = n \cdot P - D_0 \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{180} J_k &= 180 \cdot 420,06 - 35.000,00 = 40.610,59. \end{aligned}$$

5 Sistemas de amortização: SAC e Price a juros simples

Discorreremos sobre as distorções decorrentes da adoção do regime de capitalização de juros simples nos sistemas de amortizações analisados, provocando, por exemplo, a não quitação do empréstimo no final do contrato.

Faro [12] (p. 438, 2006) corrobora com isso:

“... Ora, sendo a amortização de um financiamento nada mais do que um problema de equivalência financeira segue-se, como veremos, que adoção do regime de juros simples implicará uma série de inconvenientes”.

Para um melhor entendimento dessas inconsistências da aplicação dos juros simples na amortização de dívida, usaremos o mesmo exemplo utilizado como modelo no estudo dos mesmos sistemas a juros compostos.

5.1 Sistema SAC

O sistema SAC tem como característica básica: as amortizações são iguais, durante todo o contrato do financiamento.

Veremos através do mesmo **Exemplo 2.2** da página 45 como desenrola este sistema com uso do regime de juros simples.

Exemplo 5.1. Uma dívida de R\$ 200.000,00 é paga, em 5 amortizações constantes, mensais e consecutivas de R\$ 40.000,00, com um juros simples de 10% ao mês, monte a planilha de amortização.

Solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = 200.000,00 \\ n = 5 \text{ amortizações mensais e iguais de:} \\ A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 40.000,00 \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{array} \right.$$

Calculamos a parcela de juros, a prestação e o saldo de devedor de cada período.

Período k = 1:

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,10 \cdot 200.000,00 = 20.000,00.$$

$$P_1 = A + J_1 = 40.000,00 + 20.000,00 = 60.000,00.$$

$$D_1 = D_0 - A = 200.000,00 - 40.000,00 = 160.000,00.$$

Período k = 2:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,10 \cdot 160.000,00 = 16.000,00.$$

$$P_2 = A + J_2 = 40.000,00 + 16.000,00 = 56.000,00.$$

$$D_2 = D_1 - A = 160.000,00 - 40.000,00 = 120.000,00.$$

Continuando como esse procedimento de cálculo para os demais períodos, complementando a seguinte planilha de amortização iguais a juros simples.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				200.000,00
1	40.000,00	20.000,00	60.000,00	160.000,00
2	40.000,00	16.000,00	56.000,00	120.000,00
3	40.000,00	12.000,00	52.000,00	80.000,00
4	40.000,00	8.000,00	48.000,00	40.000,00
5	40.000,00	4.000,00	44.000,00	0,00
Total	200.000,00	60.000,00	260.000,00	

Tabela 5.1: Planilha de amortização - SAC a juros simples.

Constamos que a Tabela 5.1 é idêntica a Tabela 2.3, essa utilizando juros compostos, sendo considerado um sistema de amortização consistente.

Todavia, se calcularmos os valores atuais das prestações percebemos que a soma deles é maior que o valor do financiamento, ou seja, o devedor paga mais juros o que é devido.

Para calcular os valores atuais (VAP), devemos aplicar a equação (9).

$$D_0 = \frac{P_1}{1+i} + \frac{P_2}{1+2i} + \dots + \frac{P_n}{1+ni}.$$

Ou seja,

$$VAP = \frac{60.000,00}{1+1 \cdot 0,10} + \frac{56.000,00}{1+2 \cdot 0,10} + \frac{52.000,00}{1+3 \cdot 0,10} + \frac{48.000,00}{1+4 \cdot 0,10} + \frac{44.000,00}{1+5 \cdot 0,10} \Rightarrow$$

$$VAP = \frac{60.000,00}{1,10} + \frac{56.000,00}{1,20} + \frac{52.000,00}{1,30} + \frac{48.000,00}{1,40} + \frac{44.000,00}{1,50} \Rightarrow$$

$$VAP = 54.545,45 + 46.666,67 + 40.000,00 + 34.285,71 + 29.333,33 = 204.831,17$$

$$VAP \neq D_0.$$

Desse modo, não podemos usar o regime de juros simples na amortização pelo sis-

tema SAC, pois fere a quinta propriedade, ou seja, a soma dos valores atuais das prestações é diferente do valor financiado, causando um prejuízo ao devedor pois desembolsa mais valores de juros o que é devido.

5.2 Sistema Price

Este sistema possui como característica básica: todas as prestações iguais.

Suponhamos que temos uma dívida D_0 , financiada em n parcelas de prestações periódicas, postecipadas (primeira prestação é paga um após a compra) e todas iguais a P , a uma taxa periódica i , estabelecida a juros simples.

Usando a equação (9) novamente, tem-se:

$$D_0 = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{1+2i} + \dots + \frac{P}{1+ni} = \sum_{k=1}^n \frac{P}{1+ki}$$

Finalmente:

$$P = \frac{D_0}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+ki}} \quad (33)$$

Exemplo 5.2. Uma dívida de R\$ 200.000,00 é paga, em 5 prestações constantes, mensais e consecutivas, com um juros simples de 10 % ao mês, monte a planilha de amortização.

Solução:

$$\begin{cases} D_0 = 200.000,00 \\ n = 5 \text{ prestações mensais e iguais} \\ i = 10\% \text{ a.m} = 0,10 \text{ a.m.} \end{cases}$$

Recorrendo a equação (33), calculamos o valor das prestações constantes:

$$P = \frac{200.000,00}{\frac{1}{1+0,1} + \frac{1}{1+2 \cdot 0,1} + \frac{1}{1+3 \cdot 0,1} + \frac{1}{1+4 \cdot 0,1} + \frac{1}{1+5 \cdot 0,1}} \Rightarrow$$

$$P = \frac{200.000,00}{\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,5}} = 51.379,44.$$

Na sequência, calculamos a parcela de juros, quota da amortização e saldo devedor de cada período.

Período k = 1:

$$J_1 = i \cdot D_0 = 0,1 \cdot 200.000,00 = 20.000,00.$$

$$A_1 = P - J_1 = 51.379,44 - 20.000,00 = 31.379,44.$$

$$D_1 = D_0 - A_1 = 200.000,00 - 31.379,44 = 168.620,56.$$

Período k = 2:

$$J_2 = i \cdot D_1 = 0,1 \cdot 168.620,56 = 16.862,06.$$

$$A_2 = P - J_2 = 51.379,44 - 16.862,06 = 34.517,38.$$

$$D_2 = D_1 - A_2 = 168.620,56 - 34.517,38 = 134.103,18.$$

Período k = 3:

$$J_3 = i \cdot D_2 = 0,1 \cdot 134.103,18 = 13.410,32.$$

$$A_3 = P - J_3 = 51.379,44 - 13.410,32 = 37.969,12.$$

$$D_3 = D_2 - A_3 = 134.103,18 - 37.969,12 = 96.134,06.$$

E assim, sucessivamente até o período k = 5.

Agora, montamos a Tabela 5.2 das prestações constantes a juros simples.

k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				200.000,00
1	31.379,44	20.000,00	51.379,44	168.620,56
2	34.517,38	16.862,06	51.379,44	134.103,18
3	37.969,12	13.410,32	51.379,44	96.134,06
4	41.766,04	9.613,40	51.379,44	54.368,02
5	45.942,64	5.436,80	51.379,44	8.425,38
Total	191.574,64	65.322,58	256.897,22	

Tabela 5.2: Planilha de amortização - Price a juros simples

Constata-se que a Tabela 5.2 não é idêntica a Tabela 2.4. Mostra que saldo devedor do último período não é nulo, ou seja, no final do período ainda restaria um saldo residual de R\$ 8.425,38, quase 5 % do valor do financiamento, isso contraria a regra básica de todos os contratos que o saldo final deve ser nulo, logo este sistema de amortização aplicado ao regime de juros simples é inconsistente, pois as cinco prestações de R\$ 51.379,44 são insuficientes para liquidar o empréstimo no prazo contratado, trazendo um prejuízo para o credor.

Logo, no cálculo de juros nos sistemas de amortizações SAC e Price devemos utilizar o regime de juros compostos, pois a utilização de juros simples traz prejuízo ao devedor ou credor do financiamento, ou seja, ou o devedor paga mais juros ou as suas prestações não liquidam o empréstimo no prazo estipulado.

6 Comparação numérica, gráfica e analítica entre os sistemas: SAC e Price

Analisaremos, numérica, gráfica e analiticamente, as diferenças entre os sistemas de amortização: SAC e Price. Para tanto elaboremos um plano de pagamento para cada sistema com o mesmo valor financiado, taxa de juros e prazo de amortização.

O objetivo desta simulação de empréstimo visa demonstrar as variações monetárias, que ocorrem durante o contrato, com as amortizações, juros, prestações e saldos devedores, em relação aos dois sistemas estudados, para que o devedor possa analisar, dentre das suas condições principalmente financeiras, qual o sistema mais adequado e vantajoso para sua realidade econômica.

Vamos a simulação:

Exemplo 6.1. Um empréstimo de R\$ 240.000,00, financiado a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês, durante 25 anos, sendo a primeira prestação paga um mês após a liberação do financiamento.

Solução:

$$\begin{cases} D_0 = 240.000,00 \\ n = 25 \text{ anos} = 300 \text{ prestações mensais} \\ i = 1\% \text{ a.m} = 0,01 \text{ a.m.} \end{cases}$$

a) Sistema SAC

Calculamos o valor da amortização, usando a equação (17), tem-se:

$$A = \frac{240.000,00}{300} = 800,00.$$

b) Sistema Price

Calculamos o valor da prestação, usando a equação (27), tem-se:

$$P = \frac{240.000,00}{\left[\frac{1 - (1 + 0,01)^{-300}}{0,01} \right]} = 2.527,74.$$

Usando o mesmo raciocínio do **Exemplo 2.1** da página 43, calculamos os demais valores com ajuda do aplicativo Excel.

Por razões de ordem prática, transcrevemos somente alguns valores necessários para evidenciar o que estamos querendo mostrar, os quais estão especificados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Planilha de amortização - comparação entre os sistemas: SAC e Price.

SISTEMA SAC						SISTEMA PRICE						
k	A_k	J_k	P_k	D_k	A_k	J_k	P_k	D_k	A_k	J_k	P_k	D_k
0				240.000,00				240.000,00				240.000,00
1	800,00	2.400,00	3.200,00	239.200,00	127,74	2.400,00	2.527,74	239.872,26	127,74	2.400,00	2.527,74	239.872,26
058	800,00	1.944,00	2.744,00	193.600,00	225,24	2.302,50	2.527,74	230.024,94	225,24	2.302,50	2.527,74	230.024,94
085	800,00	1.728,00	2.528,00	172.000,00	294,66	2.233,08	2.527,74	223.013,54	294,66	2.233,08	2.527,74	223.013,54
086	800,00	1.720,00	2.520,00	171.200,00	297,60	2.230,14	2.527,74	222.715,93	297,60	2.230,14	2.527,74	222.715,93
087	800,00	1.712,00	2.512,00	170.400,00	300,58	2.227,16	2.527,74	222.415,36	300,58	2.227,16	2.527,74	222.415,36
120	800,00	1.448,00	2.248,00	144.000,00	417,41	2.110,33	2.527,74	210.615,33	417,41	2.110,33	2.527,74	210.615,33
150	800,00	1.208,00	2.008,00	120.000,00	562,61	1.965,13	2.527,74	195.950,56	562,61	1.965,13	2.527,74	195.950,56
151	800,00	1.200,00	2.000,00	119.200,00	568,23	1.959,51	2.527,74	195.382,32	568,23	1.959,51	2.527,74	195.382,32
185	800,00	928,00	1.728,00	92.000,00	796,99	1.730,75	2.527,74	172.277,84	796,99	1.730,75	2.527,74	172.277,84
186	800,00	920,00	1.720,00	91.200,00	804,96	1.722,78	2.527,74	171.472,88	804,96	1.722,78	2.527,74	171.472,88
187	800,00	912,00	1.712,00	90.400,00	813,01	1.714,73	2.527,74	170.659,87	813,01	1.714,73	2.527,74	170.659,87
200	800,00	808,00	1.608,00	80.000,00	925,28	1.602,46	2.527,74	159.320,49	925,28	1.602,46	2.527,74	159.320,49
235	800,00	528,00	1.328,00	52.000,00	1.310,75	1.216,98	2.527,74	120.387,58	1.310,75	1.216,98	2.527,74	120.387,58
236	800,00	520,00	1.320,00	51.200,00	1.323,86	1.203,86	2.527,74	119.063,72	1.323,86	1.203,86	2.527,74	119.063,72
300	800,00	8,00	808,00	0,00	2.502,71	25,03	2.527,74	0,00	2.502,71	25,03	2.527,74	0,00
Total	240.000,00	361.200,00	601.200,00		240.000,00	518.321,33	758.321,33		240.000,00	518.321,33	758.321,33	

Para melhor compreensão das comparações que serão efetuadas com base na Tabela 6.1, construiremos os gráficos da evolução das amortizações, juros, prestações saldos devedores, com os devidos comentários das diferenças entre os dois sistemas comparados.

Iniciaremos comparando as amortizações, onde analisaremos os valores da Tabela 6.1 e do gráfico.

6.1 Comparação entre as amortizações

A evolução das amortizações dos sistemas SAC e Price está representada graficamente no Gráfico 6.1.

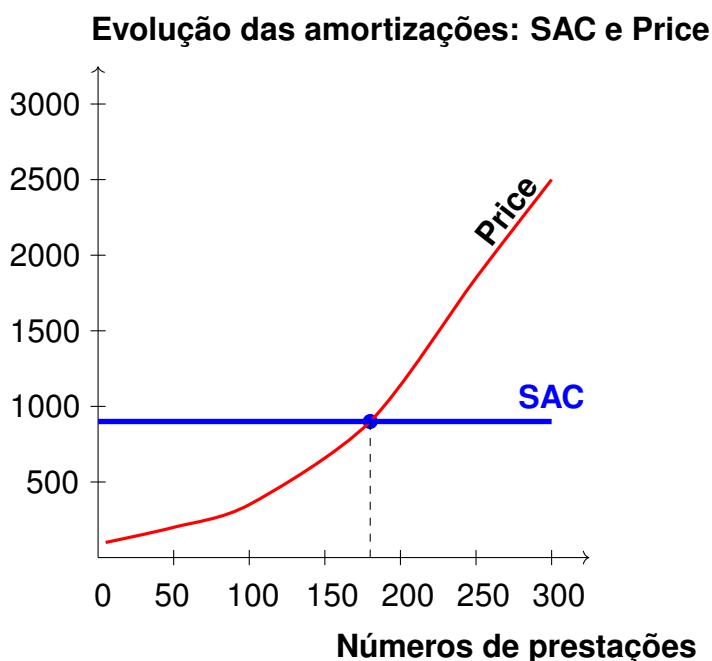


Gráfico 6.1: Gráfico de comparação das amortizações - SAC e Price.

As parcelas de amortizações do sistema SAC são todas fixas no valor R\$ 800,00, contudo as do sistema Price crescem exponencialmente de R\$ 127,74 até R\$ 2.502,71, ou seja, a parcela no início é pequena, tornando-se expressiva no final.

Esse crescimento é de 1% $\left(\frac{129,02}{127,74} = \frac{130,31}{129,02} = \dots = \frac{2.502,71}{2.477,93} = 1,01 \right)$ por mês, taxa que representa os juros cobrados na operação.

Pelo gráfico acima, constata-se que os valores da amortização tornam-se iguais entre o 150º e 200º mês, que mostraremos em seguida que este ponto é $k = 185,3$.

Veja agora o exemplo sobre o ponto onde os valores da amortizações são iguais utilizando os dados da simulação.

Exemplo 6.2. Em que ponto os valores das amortizações são iguais?

Solução:

$$\begin{cases} D_0 = 240.000,00 \\ n = 300 \text{ prestações mensais} \\ i = 1\% \text{ a.m} = 0,01 \text{ a.m.} \end{cases}$$

Conforme a equação (29), o valor da amortização na época k no Price é igual a:

$$A_k = D_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^{k-1} \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right] \text{ e o valor da amortização no SAC } (A_{SAC}) \text{ é igual a R\$ } 800,00.$$

Igualando-se as expressões:

$$\begin{aligned} 240.000,00 \cdot \left[\frac{(1+0,01)^{k-1} \cdot 0,01}{(1+0,01)^{300} - 1} \right] &= 800,00 \Rightarrow \\ \left[\frac{(1,01)^{k-1} \cdot 3}{(1,01)^{300} - 1} \right] &= 1 \Rightarrow \\ (1,01)^{k-1} &= 6,262822. \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo decimal em ambos lados da equação $(1,01)^{k-1} = 6,262822$, obtemos:

$$\log(1,01)^{k-1} = \log 6,262822.$$

Aplicando a relação (4) em ambos os termos na equação $\log(1,01)^{k-1} = \log 6,262822$, obtemos:

$$(k-1) \cdot \log 1,01 = \log 6,262822 \Rightarrow$$

$$k-1 = \frac{\log 6,262822}{\log 1,01} \Rightarrow$$

$$k = 184,3 + 1 = 185,3.$$

As amortizações igualam-se na prestação $k = 185,3$, a partir deste ponto, as do sistema SAC tornam-se menores, conforme a Tabela 6.2.

Valores das amortizações		
k	SAC	Price
185	800,00	796,99
186	800,00	804,96
187	800,00	813,01

Tabela 6.2: Planilha de comparação entre amortizações.

Apuramos que o valor da amortização do sistema SAC será menor faltando menos de 40% do total da quantidade das prestações estipuladas, ou seja, faltam 114(cento e quatorze) prestações para liquidar o empréstimo.

6.2 Comparação entre os juros

Analisaremos a comparação entre os juros, apresentando a evolução dos juros dos sistemas, que está representada graficamente no Gráfico 6.2.

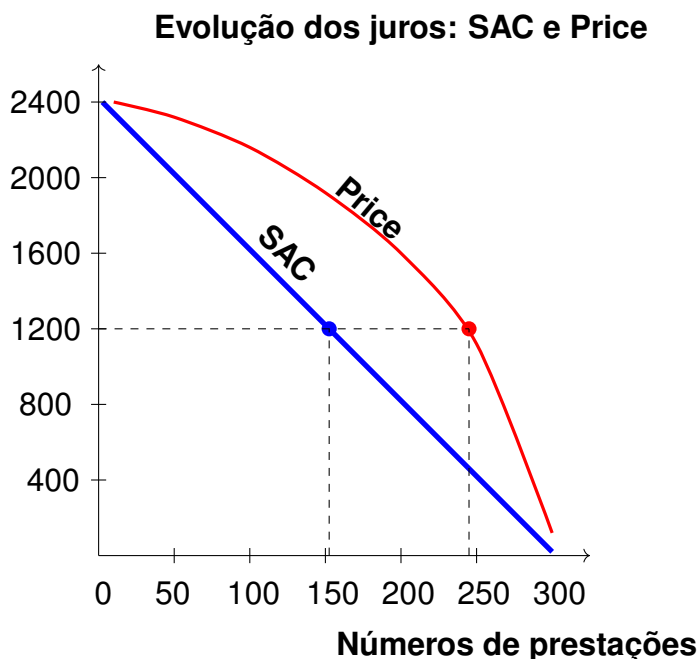


Gráfico 6.2: Gráfico de comparação entre juros - SAC e Price.

O primeiro valor da parcela de juros, dos dois sistemas, são iguais, porém vão diminuindo. Os valores do sistema SAC formam uma PA decrescente ($2.392,00 - 2.400,00 = \dots = 24,00 - 32,00 = 16,00 - 24,00 = 8,00 - 16,00 = -8,00$), cuja razão vale R\$ -8,00, ou seja -10% de 800,00 (dez por cento do valor da amortização), enquanto do sistema Price decrescem de maneira mais lenta.

k	Valores dos juros	
	SAC	Price
001	2.400,00	2.400,00
151	1.200,00	1.959,51
236	520,00	1.203,86
300	8,00	25,03
Total	361.299,00	518.321,38

Tabela 6.3: Planilha de comparação entre juros.

Esse decréscimo mais lentamente é devido ao pagamento das amortizações, no início do contrato, serem menores do que no outro sistema. Essa diminuição podemos constatar por alguns dados da Tabela 6.3. Por exemplo, na 151ª parcela da prestação no SAC, paga-se a metade do juros inicial, isso só acontece na 236ª no sistema Price, contudo na última, no sistema Price, o valor de juros é o triplo do valor no outro.

Durante todo o contrato do financiamento o valor de cada parcela de juros no sistema SAC é sempre menor do que a parcela do sistema Price, com exceção da primeira.

O total de juros do sistema SAC é igual a R\$ 361.299,00 e no sistema Price, R\$ 518.821,38, isso não quer dizer que o primeiro sistema seja melhor que o segundo, pois veremos mais adiante que o exemplo proposto para os sistemas são equivalentes.

6.3 Comparação entre as prestações

Discorreremos sobre a comparação entre as prestações, apresentando a evolução delas, a qual está representada graficamente no Gráfico 6.3.

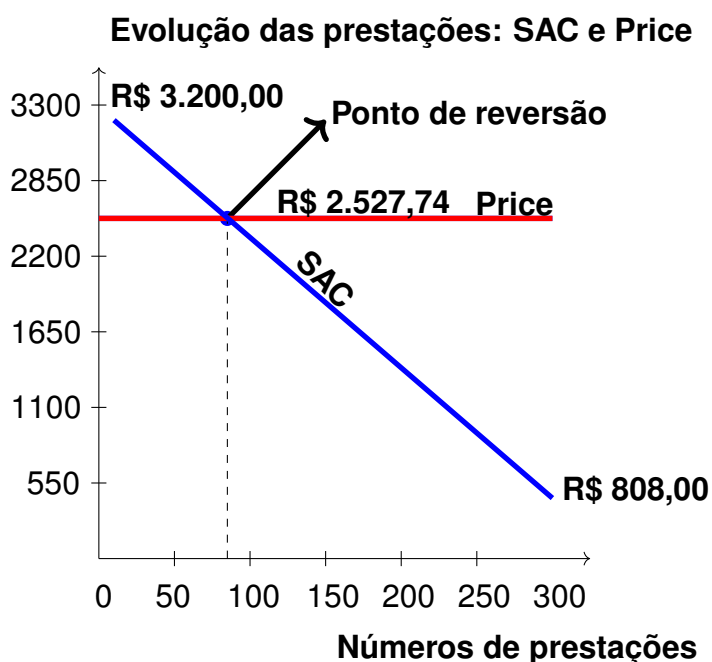


Gráfico 6.3: Gráfico de comparação entre prestações - SAC e Price.

No gráfico, percebemos que o valor das prestações correspondentes ao SAC decrescem linearmente de R\$ 3.200,00 até R\$ 808,00, entretanto o valor das prestações do sistema Price é constante, igual a R\$ 2.527,74. Isto é, enquanto no sistema SAC a prestação inicial é maior do que a do sistema Price, a sua final é menor.

A primeira prestação do sistema SAC (R\$ 3.200,00) é 21% superior que a primeira

prestação do sistema Price (R\$ 2.527,74). Em contrapartida, a última (R\$ 808.00) representa apenas 32% do valor da correspondente prestação constante.

O valor da primeira parcela dos juros no sistema Price corresponde quase 95% da prestação $\left(\frac{2.400,00}{2.527,73} = 0,949\right)$ ou seja, o pagamento da primeira prestação é quase exclusivamente para o pagamento de juros. Já nas últimas, ocorre o inverso, pagando de juros na faixa de 1% $\left(\frac{25,03}{2.527,74} = 0,01\right)$.

Isto é, as primeiras prestações são quase que totalmente para o pagamentos dos juros, ou seja, quase não há amortização. Tal peculiaridade é a razão por que mesmo já tendo sido pago as 58 primeiras prestações, a dívida diminui apenas R\$ 10.000,00.

Constamos que entre as prestações de número de 50º e 100º há uma reversão. No estudo do ponto de reversão, determinaremos o número da prestação em que as duas prestações são iguais.²⁹

6.4 Comparação entre os estados de dívidas

A evolução dos estados de dívidas dos sistemas SAC e Price está representada graficamente no Gráfico 6.4.

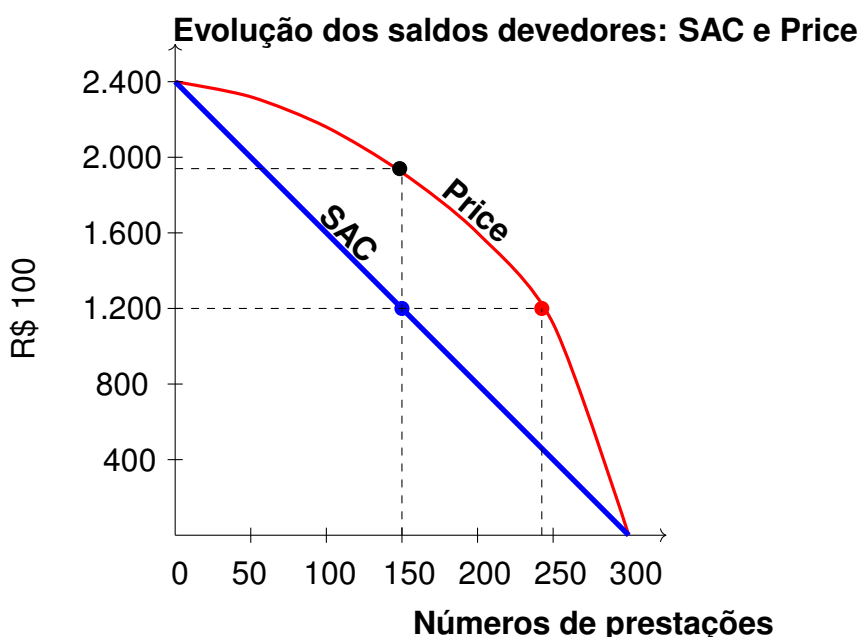


Gráfico 6.4: Gráfico de comparação entre saldos devedores - SAC e Price.

O gráfico ilustra o comportamento dos saldos devedores e podemos verificar que no SAC a diminuição é mais acentuada do que no sistema Price. Por exemplo, quando do

²⁹Veja **Exemplo 6.4** da página 97.

pagamento da 150ª (a metade) prestação no SAC, o saldo devedor corresponde a 50% da dívida (R\$ 240.000,00), já no sistema Price, ao se liquidar a metade das operações, o saldo devedor totaliza ainda 81,41% da dívida (R\$ 195.950,56).

Na liquidação do empréstimo antes do prazo, o valor do saldo devedor no sistema SAC é menor quase na totalidade do período contrato.

Determinaremos em que ponto (k), os valores dos saldos devedores correspondem a 50% da dívida.

Exemplo 6.3. Calcule o número da prestação (k) em que o valor do saldo devedor no sistema Price e SAC corresponde a 50% da dívida ($D_k = \text{R\$ } 120.000,00$).

a) **Sistema Price:**

Pela equação (32), tem-se:

$$\begin{aligned}
 D_k &= D_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right] \Rightarrow \\
 120.000,00 &= 240.000,00 \cdot \left[\frac{(1+0,01)^{300} - (1+0,01)^k}{(1+0,01)^{300} - 1} \right] \Rightarrow \\
 1 &= 2 \cdot \left[\frac{(1,01)^{300} - (1,01)^k}{(1,01)^{300} - 1} \right] \Rightarrow \\
 1 &= \left[\frac{19,788466 - (1,01)^k}{9,394233} \right] \Rightarrow \\
 9,394233 &= 19,788466 - (1,01)^k \Rightarrow \\
 (1,01)^k &= 19,788466 - 9,394233 = 10,394233.
 \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo decimal em ambos os membros na equação $(1,01)^k = 10,394233$, obtemos:

$$\log(1,01)^k = \log 10,394233.$$

Aplicando a relação (4) em ambos os termos na equação $\log(1,01)^k = \log 10,394233$, obtemos:

$$k = \frac{\log 10,394233}{\log 1,01} = 235,2.$$

b) Sistema SAC

Pela relação (25), tem-se:

$$D_k = D_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \Rightarrow$$
$$120.000 = 240.000 \cdot \left(1 - \frac{k}{300}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{k}{150} = 1 \Rightarrow$$
$$k = 150.$$

Assim, o saldo devedor no Price corresponde a 50% da dívida para $k = 235,2$, enquanto no SAC, para $k = 150$, ou seja, o saldo devedor do Price diminui mais lentamente.

6.5 Características dos sistemas de amortização: SAC e Price.

Apresentamos na Tabela 6.4 as características dos sistemas de amortizações.

	SAC	PRICE
Amortização	Constante	Crescente
Montante dos juros	Menor ao final do prazo	Maior ao final do prazo
Prestação	Decrescente	Constante
Primeira Prestação	Mais alta	Mais baixa
Última Prestação	Mais baixa	Mais alta
Saldo devedor	Decréscimo linear	Decréscimo mais lentamente

Tabela 6.4: Planilha das características dos sistemas: SAC e Price.

No SAC, o valor da amortização permanece inalterado ao longo do contrato, enquanto os juros, as prestações com os saldos devedores decrescem linearmente; no Price, as prestações são constantes durante todo o financiamento, as amortizações crescem exponencialmente e os saldos devedores têm decréscimo lento.

6.6 Ponto de reversão da prestação

Analisaremos o ponto de reversão da prestação nos dois sistemas estudados, principalmente demonstrando em que ponto as duas prestações são iguais e que ele depende da taxa de juros e do prazo.³⁰

Ponto de reversão é o momento em que a prestação do SAC é igual a do sistema Price.

³⁰Veja equação 34 da página 98.

Exemplo 6.4. Calcule o ponto de interseção ou de reversão entre os valores das prestações do SAC e Price.

$$\begin{cases} D_0 = 240.000,00 \\ n = 300 \text{ prestações mensais} \\ i = 1\% \text{ a.m} = 0,01 \text{ a.m.} \\ P_{Price} = 2.527,74 \end{cases}$$

Pela relação (21), o valor da prestação no sistema SAC na época k corresponde a: $P_k = \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i]$ e o valor da prestação no sistema Price é igual a $P_{Price} = 2.527,74$ em todo período.

Como queremos determinar o valor de k , para que as duas prestações sejam iguais, devemos ter: $P_{price} = P_k$, logo:

$$2.527,74 = \frac{240.000,00}{300} \cdot [1 + (300 - k + 1) \cdot 0,01] \Rightarrow$$

$$2.527,74 = 800 \cdot [1 + 3 - 0,01k + 0,01] \Rightarrow$$

$$2.527,84 = 3208 - 8k \Rightarrow$$

$$k = \frac{3208 - 2.527,74}{8} = \frac{680,29}{8} = 85,04.$$

Esse resultado pode ser confrontado pelos dados da Tabela 6.5. No 85º mês, a prestação pelo SAC de R\$ 2.528,00 é superior ao valor constante de R\$ 2.527,74 determinado pelo sistema Price. Logo, a interseção se verifica exatamente 85,04º mês, a partir desta época, as prestações do sistema SAC são menores do que as do sistema Price, segundo Tabela 6.5.

Valores das prestações		
k	SAC	Price
85	2.528,00	2.527,74
86	2.520,00	2.527,74
87	2.512,00	2.527,74

Tabela 6.5: Planilha de comparação entre prestações.

6.6.1 Ponto de reversão da prestação na época k

Nosso objetivo é determinar em que momento (k) o valor da prestação do SAC (P_{SAC}) é igual o valor da prestação do Price (P_{PRICE}), considerando o mesmo saldo devedor (D_k), período (n) e taxa (i) de juros compostos.

De acordo com as equações (21) e (27), temos, respectivamente,

$$P_{SAC} = \frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i] \text{ e } P_{PRICE} = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]}$$

Dessa forma, precisamos determinar o valor de k na equação, igualando as duas equações:

$$\frac{D_0}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i] = \frac{D_0}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]}$$

Como D_0 e n são positivos, podemos multiplicar ambos os membros da equação por $\frac{n}{D_0} > 0$. Assim obtemos:

$$[1 + (n - k + 1) \cdot i] = \frac{n}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]}$$

Ou melhor:

$$1 + n \cdot i - k \cdot i + i = \frac{n \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}},$$

multiplicando a igualdade por -1, obtemos:

$$-1 - n \cdot i + k \cdot i - i = \frac{-n \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}},$$

logo

$$k = \frac{1 + (n + 1) \cdot i - \frac{ni}{1 - (1 + i)^{-n}}}{i}. \quad (34)$$

Desta maneira, a época de reversão, numa época qualquer, depende apenas do prazo n e da taxa i . Analisaremos primeiramente o que acontece com o ponto de reversão quando fixamos n ou i e variamos o outro valor, através de exemplos numéricos.

6.6.2 Ponto de reversão com prazo fixo e taxa variável

Discutiremos como se comporta a época da reversão fixando-se o prazo e variando a taxa.

Exemplo 6.5. Calcule o valor de ponto de reversão (k), para o prazo fixo de $n = 120$ e a taxa de juros igual a:

a) $i = 20\%$

Utilizando a equação (34), tem-se:

$$k = \frac{1 + (n + 1) \cdot i - \frac{ni}{1 - (1 + i)^{-n}}}{i} = \frac{1 + (120 + 1) \cdot 0,20 - \frac{120 \cdot 0,20}{1 - (1 + 0,20)^{-120}}}{0,20} \Rightarrow$$

$$k = 6.$$

b) $i = 0,001\%$

$$k = \frac{1 + (120 + 1) \cdot 0,00001 - \frac{120 \cdot 0,00001}{1 - (1 + 0,00001)^{-120}}}{0,00001} \Rightarrow$$

$$k = 60,5.$$

Usando o mesmo raciocínio para as demais taxas de juros, obtemos os valores da Tabela 6.6.

Taxa (i)	Ponto de reversão(k)
20	6
10	11
2	38,7
0,5	54,6
0,1	59,3
0,001	60,5

Tabela 6.6: Planilha dos pontos de reversão para $n = 120$.

Exemplo 6.6. Calcule o valor do ponto de reversão (k), para o prazo fixo de $n = 240$ e as mesmas taxas utilizadas no **Exemplo 6.5**.

Aplicando o mesmo raciocínio do exercício acima, construímos a Tabela 6.7.

Taxa (i)	Ponto de reversão (k)
20	6
10	11
2	48,9
0,5	97,1
0,1	115,7
0,001	120,5

Tabela 6.7: Planilha dos pontos de reversão para $n = 240$.

Observa-se que o ponto de reversão cresce à medida que decrescem as taxas de juros e que à medida que cresce o prazo das prestações, o ponto de reversão cresce tendendo a um limite.

6.6.3 Limite do ponto de reversão quando a taxa tende a zero

Calculemos o limite da equação (34) quando a taxa tende a zero.

$$\lim_{i \rightarrow 0} k = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{1 + (n + 1) \cdot i - \frac{ni}{1 - (1 + i)^{-n}}}{i},$$

que podemos escrever

$$\lim_{i \rightarrow 0} k = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{1}{i} + (n + 1) - \frac{n}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

Ou melhor:

$$\lim_{i \rightarrow 0} k = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{[1 - (1 + i)^{-n}] - ni}{i \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]} + \lim_{i \rightarrow 0} (n + 1).$$

Onde o 1º limite da direita é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e outro termo é uma constante em relação a variável "i".

Para o 1º limite aplicaremos o Teorema 7.

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{[n \cdot (1 + i)^{-n-1}] - n}{[1 - (1 + i)^{-n}] + i \cdot [n \cdot (1 + i)^{-n-1}]} = \frac{0}{0} \text{ ou seja, mais uma vez uma indeterminação.}$$

Aplicaremos novamente Teorema 7

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{[n \cdot (-n - 1)(1 + i)^{-n-2}]}{[n \cdot (1 + i)^{-n-1}] + [n \cdot (1 + i)^{-n-1}] + [i \cdot n \cdot (-n - 1) \cdot (1 + i)^{-n-2}]} = \frac{n \cdot (-n - 1)}{n + n} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{i \rightarrow 0} k = \frac{n \cdot (-n - 1)}{n + n} + n + 1 = \frac{n + 1}{2}} \quad (35)$$

Assim, o ponto de reversão (k) tende para o prazo médio à medida que i tende a zero, ou seja, o ponto de reversão tende para $\frac{n + 1}{2}$.

Exemplo 6.7. Calcule o limite do ponto de reversão (k) para o prazo $n = 120$.

Utilizando a equação 35, tem-se:

$$\lim_{i \rightarrow 0} k = \frac{n + 1}{2} = \frac{120 + 1}{2} = 60,5,$$

valor que equivale ao valor da Tabela 6.6, que corresponde o prazo médio.

Exemplo 6.8. Calcule o limite de ponto de reversão (k) para o prazo $n = 240$.

Utilizando a equação 35, tem - se:

$$\lim_{i \rightarrow 0} k = \frac{n + 1}{2} = \frac{240 + 1}{2} = 120,5,$$

valor que coincide com o valor da Tabela 6.7, que também corresponde o prazo médio.

6.6.4 Ponto de reversão com taxa fixa e prazo variável

Vejamos agora como se comporta a época da reversão fixando-se a taxa e variando o prazo.

Exemplo 6.9. Calcule o valor do ponto de reversão (k) para uma taxa de $i = 1\%$.

a) $n = 50$

$$k = \frac{1 + (50 + 1) \cdot 0,01 - \frac{50 \cdot 0,01}{1 - (1 + 0,01)^{-50}}}{0,01} \Rightarrow$$

$$k = 23,4.$$

Utilizando a equação (34), para $i = 1\%$ e variando o prazo n , obtemos a Tabela 6.8.

Prazo (n)	Ponto de reversão (k)
50	23,4
200	69,3
300	85,0
500	97,5
1000	101,0
4000	101,0

Tabela 6.8: Planilha dos pontos de reversão para $i = 1\%$.

Analisando a Tabela 6.8, percebemos que à medida que o prazo cresce, o ponto de reversão tende a 101.

Exemplo 6.10. Calcule o valor do ponto de reversão (k) para a taxa fixa $i = 10\%$.

Aplicando o mesmo raciocínio do exercício acima, construiremos a tabela 6.9.

Prazo (n)	Ponto de reversão (k)
50	10,5
200	11,0
300	11,0
500	11,0
1000	11,0
4000	11,0

Tabela 6.9: Planilha dos pontos de reversão para $i = 10\%$.

Já neste caso, observa-se que à medida que o prazo cresce, o ponto de reversão tende a 11.

6.6.5 Limite do ponto de reversão (k) quando n tende infinito

Determinaremos o limite da equação (34) quando o prazo tende infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (n + 1) \cdot i - \frac{ni}{1 - (1 + i)^{-n}}}{i},$$

que podemos escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{i} + 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - \frac{n}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{n}{1 - (1 + i)^{-n}} \right],$$

onde o primeiro limite é um constante em relação a variável "n" e o segundo limite é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicaremos o Teorema 7 para o segundo limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-n \cdot (1+i)^{n-1}} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} k = \frac{1}{i} + 1 = \frac{1+i}{i}} \quad (36)$$

Assim, o ponto de reversão (k) tende para a expressão $\frac{1+i}{i}$ à medida que o prazo tende para infinito. Apresentaremos dois exemplos para constar os valores encontrados nas Tabela 6.8 e Tabela 6.9.

Exemplo 6.11. Calcule o limite do ponto reversão (k) para uma taxa de 1%.

Empregando a equação 36, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \frac{1+i}{i} = \frac{1+0,01}{0,01} = 101.$$

Assim, para taxa de 1% ao mês, esse limite é de 101, valor equivalente encontrado na Tabela 6.8.

Exemplo 6.12. Calcule o limite do ponto de reversão (k), para uma taxa de 10%.

Empregando a equação 36, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \frac{1+i}{i} = \frac{1+0,1}{0,1} = 11.$$

Para taxa de 10% ao mês, o limite é 11, o mesmo valor encontrado na Tabela 6.9.

6.7 Escolha entre os sistemas de amortização

Na sequência discute-se sobre a escolha entre os sistemas de amortização a partir da pergunta que segue: Qual a melhor opção entre os sistemas de amortização: SAC ou Price, por exemplo para um financiamento imobiliário, nas mesmas condições, isto é, aquela que traz mais vantagens para o consumidor?

Vimos que no sistema SAC as prestações iniciam altas e vão diminuindo, enquanto no sistema Price são todas constantes e analisando a Tabela 6.1 constatamos que o valor total de juros do sistema SAC é bem menor do que do sistema Price, conseqüentemente o total das prestações do sistema SAC é menor do que o do sistema Price. Com isso podemos afirmar que o sistema SAC é melhor para o tomador de empréstimo?

Em referência sobre a análise de planos de financiamento com base somente pelo total de juros pagos, Camargos [6] (2013, p. 310) nos adverte que ao:

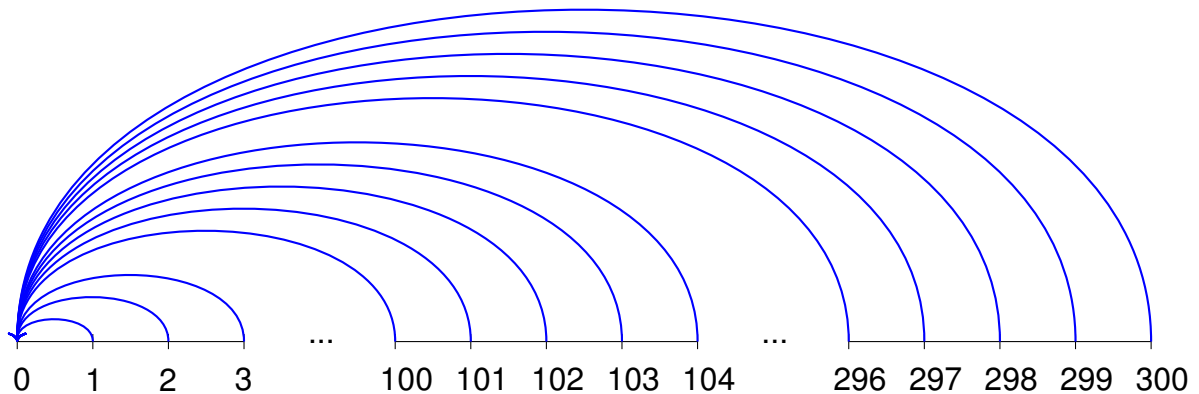
“..., analisar os planos de financiamentos somente pelo total pago, ou seja, simplesmente somando as prestações pagas é equivocado, uma vez que se estaria desconsiderando o princípio básico da matemática financeira do valor do dinheiro no tempo (VDT).

A comparação correta entre os [...] planos de financiamentos deve ser feita com os valores de cada um em um mesmo momento focal, ou seja, deve-se calcular o valor presente (VP) ou o valor futuro (VF) de cada um.”

Desse modo, precisamos determinar os valores atuais das prestações em determinado período e aí fazemos a comparação das soma dos valores de cada plano de financiamento para verificar se são equivalentes ou não.

Por isso, determinaremos:

a) o valor presente das prestações do SAC (VPP_{SAC}) e do Price (VPP_{Price}), utilizando a equação (10) e os dados da Tabela 6.1.



a.1) o valor presente das prestações do SAC (VPP_{SAC}), tem-se:

$$VPP_{SAC} = \frac{3.200,00}{(1 + 0,01)} + \frac{3.192,00}{(1 + 0,01)^2} + \dots + \frac{816,00}{(1 + 0,01)^{299}} + \frac{808,00}{(1 + 0,01)^{300}} \Rightarrow$$

$$VPP_{SAC} = 3.168,32 + 3.129,10 + \dots + 41,65 + 40,83 \Rightarrow$$

$$VPP_{SAC} = 240.000,00.$$

a.2) o valor presente das prestações do sistema Price (VPP_{Price}), tem-se:

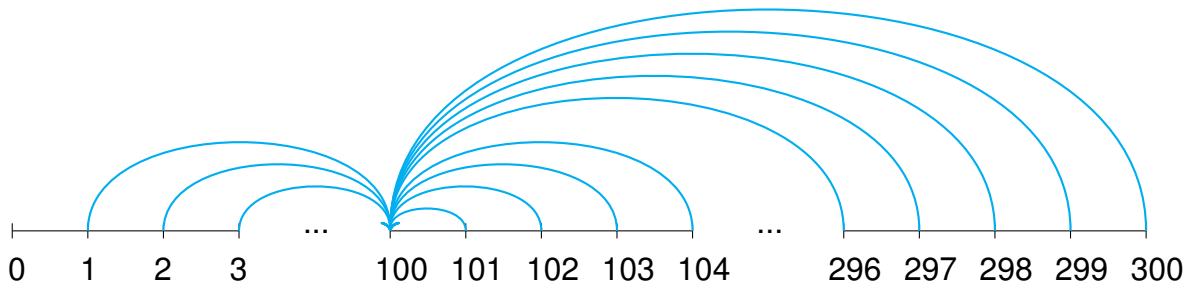
$$VPP_{PRICE} = \frac{2.527,74}{(1 + 0,01)} + \frac{2.527,74}{(1 + 0,01)^2} + \dots + \frac{2.527,74}{(1 + 0,01)^{299}} + \frac{2.527,74}{(1 + 0,01)^{300}} \Rightarrow$$

$$VPP_{PRICE} = 2.502,71 + 2.477,93 + \dots + 129,02 + 127,74 \Rightarrow$$

$$VPP_{PRICE} = 240.000,00.$$

O Teorema 9 nos garante que a equivalência independe da data focal escolhida, por isso vamos comparar dos sistemas, por exemplo, após o pagamento da 100ª prestação.

b) o valor futuro das prestações do SAC (VFP_{SAC}) e do Price (VFP_{Price}) após o pagamento da 100ª prestação.



b.1) o valor futuro das prestações do SAC (VFP_{SAC}).

$$VFP_{SAC} = 3.200,00 \cdot (1+0,01)^{99} + 3.192,00 \cdot (1+0,01)^{98} + \dots + \frac{816,00}{(1+0,01)^{199}} + \frac{808,00}{(1+0,01)^{200}} \Rightarrow$$

$$VFP_{SAC} = 8.560,71 + 8.463,65 + \dots + 112,65 + 110,44 \Rightarrow$$

$$VFP_{SAC} = 649.155,32.$$

b.2) o valor futuro das prestações do PRICE (VFP_{PRICE}).

$$VFP_{PRICE} = 2.572,74 \cdot (1+0,01)^{99} + 2.572,74 \cdot (1+0,01)^{98} + \dots + \frac{2.572,74}{(1+0,01)^{199}} + \frac{2.572,74}{(1+0,01)^{200}} \Rightarrow$$

$$VFP_{PRICE} = 6.769,37 + 6.702,34 + \dots + 348,96 + 345,51 \Rightarrow$$

$$VFP_{PRICE} = 649.155,32.$$

Ou seja, os dois planos de financiamentos são equivalentes, tanto na data focal zero ou na data focal 100.

Como os planos equivalentes, a escolha do sistema de amortização que mais convém ao mutuário está nas suas responsabilidades, pois a opção depende de vários fatores, como esclarecem Cláudia e Paiva [9] (2010, p.44).

“Se tanto o SAC quanto o Price estabelecem uma relação absolutamente justa entre os juros pagos pelo principal retido - ou seja, em ambos os casos o mutuário paga juros pela parcela de capital (do credor) que permaneceu usando, nem mais, nem menos -,então, o que é melhor: amortizar mais rapidamente (via SAC) ou amortizar de forma mais alongada (via Price)? Como decidir por qual sistema de amortização optar? A resposta é: depende!”

Eles acrescentam:

“A escolha entre os dois sistemas de amortização deve se levar em conta também outras variáveis. Isso pode ser percebido, por exemplo, no caso em que a família tem condições de assumir tanto o financiamento via Price como via SAC e, ao mesmo tempo, se depara com a necessidade de outras despesas imediatas, sem disponibilidade presente de recursos.”

A escolha passa pela condições financeiras do consumidor, porém a escolha também depende da renda do consumidor, que nos alerta a especialista em finanças Isabel [10]:

“Você pode estar se perguntando porque alguém faria a opção pela Tabela Price para um crédito imobiliário, se no final a pessoa vai pagar mais juros. A explicação é que nem sempre a escolha está nas mãos do consumidor. Não basta só se esforçar e apertar as contas do mês para arcar com as prestações mais altas no início do financiamento por SAC e economizar nos juros. É preciso ter uma renda mensal que abarque o valor das parcelas.

A maioria dos bancos não aprova financiamento em que as prestações mensais sejam maiores que 30% da renda familiar. Isso porque, com parcelas muito altas, há mais chances de calote. Às vezes, a prestação da Tabela Price, que no começo é mais barata, cabem dentro desses 30%, mas a prestação inicial do SAC supera esse percentual. E aí é a realidade que decide pelo cliente”.

Isto é, o sistema Price acaba se tornando a única alternativa para alguns, contudo o saldo devedor do PRICE é sempre maior que o do SAC para qualquer escolha do tempo do financiamento. Assim, após um mesmo número de prestações, se desejamos liquidar a dívida antes do prazo, o saldo devedor do SAC será sempre menor que o do PRICE.

Ou seja, a escolha entre Tabela Price e SAC sempre parte do princípio da capacidade de pagamento que o consumidor possui quando for solicitar o empréstimo.

7 Considerações finais

Há várias formas de liquidar um empréstimo, porém atualmente há duas maneiras mais utilizadas no Brasil são: sistema de amortização constante - SAC - e sistema Price, nosso trabalho buscou sintetizar de maneira objetiva as principais diferenças neste estudo sobre a análise comparativas dos dois sistemas, com o objetivo de identificar qual o melhor sistema para o consumidor, quando este tem a opção de escolher entre os dois num empréstimo de igualdade condições.

De modo geral, cada sistema de amortização possui 5 características comuns, numa época k : o valor de cada prestação é a soma da quota da amortização e da parcela de juro; a soma das amortizações é igual ao valor do financiamento; o valor da parcela de juro é o produto da taxa pela soma das parcelas das amortizações não pagas ou produto da taxa pelo saldo devedor do período anterior; o saldo devedor é a diferença entre valor do financiamento e soma das amortizações pagas ou igual soma das amortizações não pagas; o saldo devedor também é igual a soma dos valores atuais das prestações não pagas na época k e que saldo devedor final deve ser igual a zero. Essas regras são essenciais no estudo para identificar se um sistema é consistente ou não.

O sistema de amortização constante – SAC – tem como característica essencial que todas as suas amortizações sejam iguais e para a sua determinação basta dividir o valor do financiamento pelo o número de prestações. Temos que a prestação em qualquer período é a soma da parcela da amortização com a do juro daquele período, este vai diminuindo em consequência do pagamento das amortizações, contudo o valor de cada prestação também vai diminuindo. O decréscimo do juro, prestação e saldo devedor é linear, isto é, forma uma progressão aritmética negativa. O valor da primeira prestação é diretamente proporcional ao valor do financiamento e inversamente proporcional ao prazo de pagamento.

No tocante ao sistema Price, tem como característica o valor da prestação constante e as amortizações crescem exponencialmente, enquanto os juros e saldos devedores diminuem mais lentamente que os valores do sistema SAC. O valor da primeira amortização é diretamente proporcional à prestação e inversamente proporcional à exponencial do prazo de pagamento.

Nos cálculos dos juros nos sistemas de amortização estudados devemos empregar o regime de juros compostos, pois se usarmos o regime de juros simples observa-se as prestações não liquidarão o empréstimo ou os juros cobrados são maiores do que os devidos, tornando um sistema inconsistente, pois não atende uma ou mais das características comuns dos sistema de amortização. Além das diferenças comentadas acima

entre os dois sistemas, é fundamental registrar o ponto de reversão da prestação, ou seja, o ponto onde o valor da prestação do sistema SAC passa a ser menor que a do sistema Price, que depende exclusivamente do prazo e a taxa, pois, quando esta tende a zero, o ponto de reversão tende ao prazo médio. Já quando o prazo de financiamento tende para o infinito, o ponto de reversão tende para $\frac{1+i}{i}$.

Para concluir, qual seria a resposta para o nosso questionamento: qual é o melhor sistema? Constata-se que não há melhor sistema, ambos são equivalentes em termos de matemática financeira, aplicando valor atual do dinheiro no tempo ou valor do dinheiro em outro momento. Portanto, escolher entre um método ou outro depende da capacidade de pagamento que o mutuário tem na hora que for assinar o contrato.

Referências

- [1] ASSAF NETO, Alexandre. Matemática Financeira e suas aplicações. São Paulo: Atlas, 2009. 284 p.
- [2] BOGGISS, George Joseph, MENDONÇA, Luís Geraldo, GASPAR, Luis Alfredo Rodrigues, HERINGER, Marcos Guilherme. Matemática Financeira. São Paulo: FGV, 2012. 150 p.
- [3] BRASIL - MEC, PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Disponível <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01>. Acessado em 09 de junho de 2020.
- [4] BRASIL - MEC, DIRETRIZES CURRICULARES PARA ENSINO MÉDIO. Disponível <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>. Acessado em 09 de junho de 2020.
- [5] BRASIL - MEC, BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR. Disponível <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acessado em 09 de junho de 2020.
- [6] CAMARGOS, Marcos Antônio, CARVALHO. Matemática Financeira: aplicada a produtos financeiros e à análise de investimentos. São Paulo: Saraiva-Uni, 2013. 377 p.
- [7] CASTAÑO, Carlos Mario Morales. Finanzas del Proyecto: introducción a las Matemáticas Financieras. Colômbia: Centro Editorial Esumer, 2014. 288 p.
- [8] CRESPO, Antônio Arnot. Matemática Comercial e Financeira: São Paulo: Saraiva, 2009. 239 p.
- [9] ELOY, Cláudia Magalhães, PAIVA, Henrique Bottura. 3º Prêmio Abecip de monografia em crédito imobiliário poupança: São Paulo: 2010. 178 p.
- [10] ISABEL Filgueiras, Valor Investe — São Paulo.SAC x Tabela Price: qual é melhor para você? Disponível <http://valorinveste.globo.com/produtos/imoveis/noticia/2019/07/26/sac-x-tabela-price-qual-e-melhor-para-voce.ghtml>. Acessado em 14 de abril de 2020.
- [11] FARO, Clovis de. Fundamentos da Matemática Financeira. São Paulo: Saraiva, 2006. 459 p.
- [12] FARO, Clovis de. Matemática Financeira: uma introdução à análise de risco. São Paulo: Saraiva, 2014. 458 p.

- [13] FARO, Clovis de, LACHERMACHER, Gerson. Introdução à Matemática Financeira. São Paulo: Saraiva, 2012. 403 p.
- [14] LAPPONI. Matemática Financeira. Rio de Janeiro: Campus, 2005. 526 p.
- [15] LIMA, Elon Lages. Logaritmos, SBM, 2013. 152 p. (Coleção do Professor de Matemática).
- [16] MORGADO, Augusto César, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta . Rio de Janeiro: SBM, 2015. 284 p. (Coleção PROFMAT, 12)
- [17] MORGADO, Augusto César, WAGNER, Eduardo, ZANI, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira: SBM, 2015. 191 p. (Coleção do Professor de Matemática, 8)
- [18] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar: Volume 3, SBM, 2013. 324 p. (Coleção do Professor de Matemática).
- [19] NASCIMENTO, Marco Aurélio. Introdução à Matemática Financeira. São Paulo: Saraiva, 2011. 282 p.
- [20] MACIEL, Aldo, LIMA, Osmundo. Introdução a análise Real. Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), 2008. 273 p.
- [21] PUCCINI, Abelardo de Lima. Matemática Financeira: objetiva e aplicada. São Paulo: Saraiva, 2019. 351 p.
- [22] STEWART, James. Cálculo, volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 682 p.
- [23] VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 2018. 352 p.