Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Carlos José Amorim da Silva

A expressão zero elevado a zero.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profa. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro
Agosto de 2020

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Carlos José Amorim da Silva

A expressão zero elevado a zero.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Profa. Christine Sertã Costa
Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Renata Martins da Rosa
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Sinesio Pesco
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Humberto José Bortolossi
Departamento de Matemática - UFF

Rio de Janeiro, 20 de agosto de 2020

Carlos José Amorim da Silva

Graduou-se em Ciências Navais com ênfase em Mecânica pela Escola Naval e Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Possui licenciatura e bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Possui mestrado em Ciências Navais pela Escola de Guerra Naval (EGN).

Ficha Catalográfica

Silva, Carlos José Amorim da

A expressão zero elevado a zero / Carlos José Amorim da Silva; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2020.
83 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Zero elevado a zero. 3. Potenciação. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha mãe, Ilda Amorim da Silva de Oliveira, pelo eterno apoio e amor incondicional.

À professora Christine Sertã, minha orientadora, pelo incentivo e suporte desde a escolha do tema até a conclusão deste trabalho.

Aos colegas de turma e a todos os professores da PUC-Rio que semanalmente contribuíram para o meu sucesso no curso PROFMAT.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Silva, Carlos José Amorim da; Costa, Christine Sertã. **A expressão zero elevado a zero.** Rio de Janeiro, 2020. 83p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho é um estudo sobre a controvérsia que circunda a expressão zero elevado a zero. Como o objetivo de contextualizar o foco principal do trabalho é apresentado um percurso histórico sobre as questões que sustentam a referida controvérsia desde o século XVIII com Leonhard Euler até a atualidade. O texto contém análises exemplificadas em contextos diversos sobre a expressão e apresenta diferentes métodos para a operação potenciação que está estritamente relacionada ao conflito exposto. Também exibe soluções diversas obtidas para o valor da expressão 0^0 por softwares matemáticos e expõe possíveis métodos de abordagens teóricas que sustentam as soluções que caracterizam a controvérsia. Ao final, é realizada uma análise de como alguns livros didáticos brasileiros abordam a referida expressão. O objetivo deste estudo e das reflexões contidas neste trabalho é permitir aos leitores, estudantes e professores, constatarem que a matemática é rica em detalhes e que o valor de uma simples operação aritmética pode não ter resposta única caso o contexto não esteja bem definido.

Palavras-chave

Zero elevado a zero; potenciação.

Abstract

Silva, Carlos José Amorim da; Costa, Christine Sertã (Advisor). **The expression zero to the power of zero.** Rio de Janeiro, 2020. 83p. Master Thesis - Departament of Mathematics, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

This work is a study on the controversy surrounding the expression zero raised to zero. As the objective of contextualizing the main focus of the work is presented a historical journey on the issues that support this controversy since the eighteenth century with Leonhard Euler until today. The text contains analyzes exemplified in different contexts about expression and presents different methods for the potentiation operation that is strictly related to the exposed conflict. It also shows various solutions obtained for the value of the expression 0^0 by mathematical software and exposes possible methods of theoretical approaches that support the solutions that characterize the controversy. At the end, an analysis is made of how some Brazilian textbooks approach this expression. The objective of this study and the reflections contained in this work is to allow readers, students and teachers, to see that mathematics is rich in details and that the value of a simple arithmetic operation may not have a single answer if the context is not well defined.

Keywords

Zero to the power of zero; potentiation.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

"O zero, como o Velho Caos, está à solta de novo, só que maior agora nesta terra de expoentes. Lembra muito um daqueles valentões naquelas festas que acabam em briga. João Grandão caiu ao chão! Quem vai levantá-lo? Vamos tentar tirar o 0^0 do chão."

Robert Kaplan (KAPLAN, 2001, p. 117)

1

Introdução

O zero é um número notável e enigmático. Por convenção, pode ou não pertencer ao conjunto dos números naturais e, simultaneamente, expressa o nada e possui um universo de intrigas. Existem identidades de áspera compreensão que envolvem esse elemento como por exemplo o valor 1 atribuído a zero fatorial ($0! = 1$) e, frequentemente, o zero está presente em controvérsias matemáticas. Entre elas, a questão que norteia o presente trabalho: qual é o valor de zero elevado a zero?

Outrossim, a potenciação é uma das primeiras operações derivadas das operações básicas e que possui regras especiais para o zero. Destacaremos duas:

(i) Qualquer número, diferente de zero, elevado a zero é igual a 1; e

(ii) Zero elevado a qualquer número, maior que zero, é igual a zero.

Estas regras excluem, cuidadosamente, a situação que permite responder qual o valor de zero elevado a zero (0^0) podendo se tornar um pesadelo aritmético, conforme ilustrado ludicamente na figura 1.

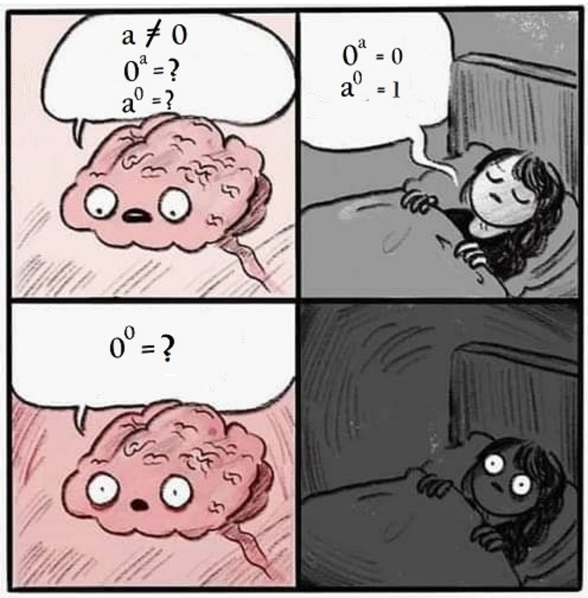


Figura 1: Postagem *Web* (fonte: internet)

Além disso, em alguns livros didáticos, é possível obter a informação de que o valor de 0^0 não está definido (Safier, 2011, p.15; Silveira, 2015, p.13) ou mesmo que não será dado significado matemático à expressão 0^0 (Bezerra, 1999, p. 76). Em uma consulta a alguns livros universitários de cálculo (Simmons, 1987, p.570; Stewart, 2013, p.277), encontra-se que a expressão 0^0 é uma indeterminação matemática.

Por outro lado, observa-se que o resultado apresentado por softwares matemáticos tais como o MatLab ou Geogebra e pela calculadora do "Google" quando se pesquisa o valor de 0^0 é 1.

Cabe também destacar o cuidado que se deve ter em pesquisas de modo geral feitas na internet. A figura 2 ilustra alguns resultados obtidos na busca de um significado para o valor de zero elevado a zero (0^0). Observe que, diversas vezes, estabelece-se uma relação entre esta expressão e o valor de zero dividido por zero (0/0) como resultados entrelaçados, situação que atesta a incorreta abordagem do assunto. Cabe ressaltar que podemos utilizar o inadequado argumento da figura 2 para demonstrar que o zero é uma expressão indeterminada ($0 = 0^{2-1} = 0^2 \times 0^{-1} = \frac{0^2}{0^1} = \frac{0}{0}$).

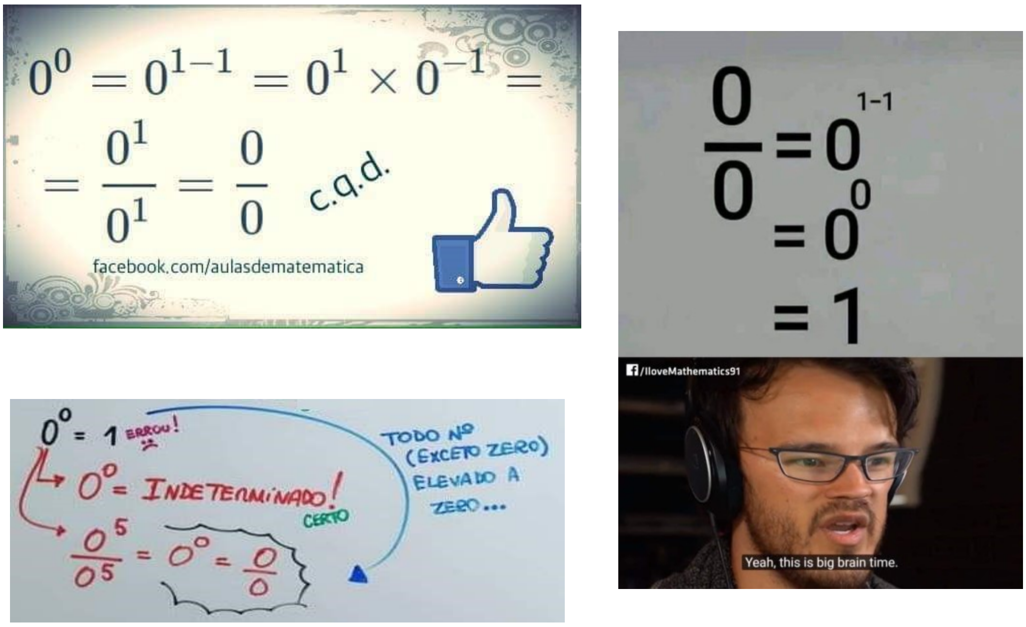


Figura 2: Postagens *Web* (fonte: internet)

Dessa maneira, considerando que é possível encontrar diferentes respostas à pergunta "Qual o valor de 0^0?", algumas precisas e outras inconsistentes, seguimos com as palavras de Kaplan que argumenta que, fora de um contexto pré-determinado, não haverá "algo revolucionário a responder a pergunta de se 0^0 é 0, 1, ou seja, lá que for." (Kaplan, 2001, p.155)

As reflexões acima motivam e justificam o desenvolvimento deste trabalho que se propõe a apresentar e discutir diversas nuanças e abordagens que atingem a esta controvérsia norteadas inicialmente pelos artigos publicados na "Revista do Professor de Matemática" em seus exemplares um[1], sete[2] e onze[3], na seção conceitos e controvérsias. Este trabalho discorrerá sobre a operação de potenciação e a sua importância na obtenção do valor do 0^0. Igualmente, apresentará variantes utilizadas em softwares no estabelecimento do valor 0º e fará diversas abordagens para ampliar o domínio do assunto. Ao final será realizada uma análise dos livros didáticos brasileiros utilizados no ensino básico sob a perspectiva da abordagem ou tratamento da expressão 0^0.

Este trabalho considera que uma expressão matemática indeterminada é aquela que não possui um único valor que se impõe naturalmente (Lima, 2011, p.156), por exemplo, quando uma equação linear possui infinitas soluções diz-se que o conjunto solução é indeterminado. Por sua vez, uma expressão matemática indefinida é aquela que carece de uma definição formal em certo contexto matemático, por exemplo, log(0) é indefinido, ou seja, o valor da função logarítmica não está definida quando o valor do domínio da função é igual a zero. As figuras virais utilizadas da *Web* neste trabalho estão identificadas como fonte a internet por desconhecimento das origens e seus reais elaboradores.

1 Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/1/2.htm>. Acesso em 21 jul. 2020.
2 Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/7/4.htm>. Acesso em 21 jul. 2020.
3 Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/11/4.htm>. Acesso em 21 jul. 2020.

2

Resumo histórico

Nosso percurso histórico sobre a controvérsia do valor de zero elevado a zero começará com a apresentação de abordagens realizadas por Leonhard Euler, notável matemático do século XVIII e um dos mais profícuos matemáticos de todos os tempos. Leonhard Euler, em seu famoso livro "Elementos de Álgebra" (figura 3) com a primeira edição publicada em 1770 em São Petersburgo – Rússia (original em Alemão), apresentou os seguintes argumentos:

> *Em uma série de potência, cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por a, o que aumenta o expoente em 1; da mesma forma, quando um termo qualquer é dado, podemos também encontrar o termo anterior, se dividirmos por a, o que diminui o expoente em 1. Isso mostra que o termo que precede o primeiro termo a^1 deve necessariamente ser $\frac{a}{a}$ ou 1; e, se operamos os expoentes, podemos concluir imediatamente, que o termo que precede o primeiro deve ser a^0; e, portanto, deduzimos esta notável propriedade, que a^0 é sempre igual a 1, por maior ou menor que o valor do número a possa ser, e mesmo quando o valor de a seja o nada; isto é, a^0 é igual a 1.* (Euler, 1840, pp.50-51, tradução nossa[4])


Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.
Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnißen und Proportionen.
St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

Figura 3: Elementos de Álgebra
(Fonte: Revista Brasileira de História da Matemática - v. 9, nº 17, 2009, p. 34)[5]

---

[4] *"As in this series of powers each term is found by multiplying the preceding term by a, which increases the exponent by 1; so when any term is given, we may also find the preceding term, if we divide by a, because this diminishes the exponent by 1. This shews that the term which precedes the first term a^1 must necessarily be $\frac{a}{a}$ or 1; and, if we proceed according to the exponents, we a immediately conclude, that the term which precedes the first must be a^0; and hence we deduce this remarkable property, that a^0 is always equal to 1, however great or small the value of the number a may be, and even when a is nothing; that is to say, a^0 is equal to 1."*

[5] Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo9-no17.html>. Acesso em 21 jul. 2020.

Em oportunidade anterior esta controvérsia também foi abordada por Leonhard Euler, no livro “Introdução a Analise do Infinito” (figura 4) com a primeira edição em 1748 e possui a seguinte abordagem:

> *Seja a operação de exponenciação a ser considerada* a^z *onde* a *é uma constante e o expoente* z *é uma variável. Como o expoente* z *representa um número qualquer, é claro que pelo menos todos os inteiros positivos podem ser substituídos por* z *para obter os valores determinados* a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, *etc. Se substituirmos o* z *por números inteiros negativos* $-1, -2, -3$, *etc. obteremos* $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, *etc. Se* $z = 0$, *temos um* $a^0 = 1$. *Se* $a = 0$, *damos um grande salto nos valores de* a^z. *Enquanto o valor de* z *permanecer positivo ou maior que zero, sempre teremos* $a^z = 0$. *Se* $z = 0$, *então* $a^0 = 1$. (Euler, 1988, p. 75-76, tradução nossa[6])

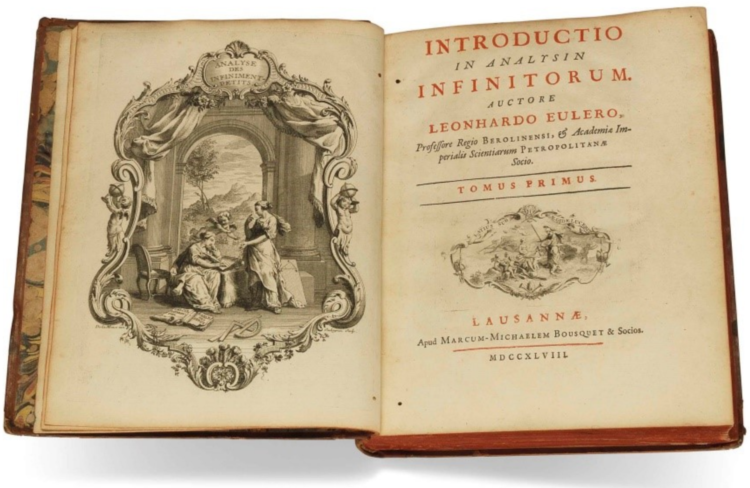


Figura 4: Introdução à Análise do Infinito
(Fonte: <https://www.christies.com/lotfinder/Lot/euler-leonhard-1707-1783-introductio-in-analysin-infinitorum-6118969-details.aspx>. Acesso em 21 jul. 2020.)

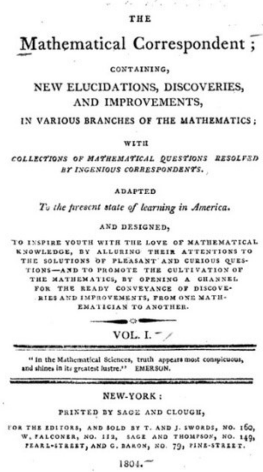
Continuando a nossa trajetória histórica, vamos apresentar as abordagens e comentários realizados por George Baron, matemático da fase inicial do século XIX e fundador do primeiro jornal científico americano, *Mathematical Correspondent* (figura 5). George Baron publicou em seu jornal científico no ano de 1804 um artigo com o título: "Uma curta dissertação, relativa à definição, da

---

[6] *Let the exponential to be considered be* a^z *where a is a constant and the exponent z is a variable. Since the exponent z stands for all determined number, it is clear at least that all positive intergers can be substituted foz z to give determined values* a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, *etc. If for z we substitute the negative integers -1, -2, -3, etc. we obtain* $\frac{1}{a^1}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}$, *etc.... If for* $z = 0$, *them we have* $a^0 = 1$..... *If* a = 0, *we take a huge jump in the values of* a^z. *As long as the value of* z *remains positive, or greater than zero, then we always have* $a^z = 0$. *If* z = 0, *then* $a^0 = 1$.

palavra Potência, em aritmética e álgebra". Neste artigo, vamos efetuar os seguintes destaques sobre a operação de potenciação:

> *Mas, para prosseguir com a aplicação de nossa definição, a valores extremamente pequenos, suponhamos que* x *represente qualquer valor fracionário; ou, em outras palavras,* x *denote qualquer magnitude, expressa em números, por meio de alguma parte da sua unidade de medida: então pela definição* $x^1 = 1 \times x$. *Vamos simplificar essa multiplicação por* x*; e pelas razões até agora apresentadas, temos* $x^0 = 1$. *Agora, como* x *aqui representa uma quantidade fracionária, independente de qualquer limitação, em relação à grandeza infinitesimal; podemos, portanto, supor que* x*, por meio de diminuição contínua, ou decrescente, passa de seu valor atual, por reduções infinitesimais, até que ele se torne nada; então será evidente que, durante essa diminuição ou redução decrescente de* x*,* x^0 *continuará igual a uma unidade invariavelmente; e isso precisamente no instante em que* x *se torna nada,* x^0*, ou* $0^0 = 1$. (Baron, 1804, p. 64, tradução nossa[7]).



THE

Mathematical Correspondent;

CONTAINING,

NEW ELUCIDATIONS, DISCOVERIES, AND IMPROVEMENTS,

IN VARIOUS BRANCHES OF THE MATHEMATICS;

WITH

COLLECTIONS OF MATHEMATICAL QUESTIONS RESOLVED BY INGENIOUS CORRESPONDENTS.

ADAPTED

To the present state of learning in America.

AND DESIGNED,

TO INSPIRE YOUTH WITH THE LOVE OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE, BY ALLURING THEIR ATTENTIONS TO THE SOLUTIONS OF PLEASANT AND CURIOUS QUESTIONS—AND TO PROMOTE THE CULTIVATION OF THE MATHEMATICS, BY OPENING A CHANNEL FOR THE READY CONVEYANCE OF DISCOVERIES AND IMPROVEMENTS, FROM ONE MATHEMATICIAN TO ANOTHER.

VOL. I.

"In the Mathematical Sciences, truth appears most conspicuous, and shines in its greatest lustre." EMERSON.

NEW-YORK:

PRINTED BY SAGE AND CLOUGH,

FOR THE EDITORS, AND SOLD BY T. AND J. SWORDS, NO. 160, W. FALCONER, NO. 112, SAGE AND THOMPSON, NO. 149, PEARL-STREET, AND G. BARON, NO. 79, PINE-STREET.

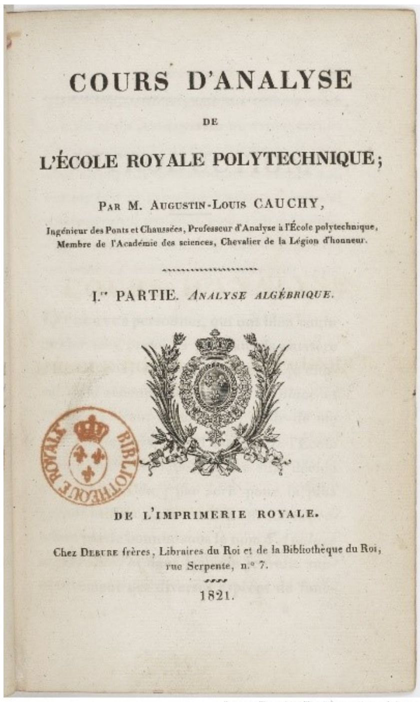
1804.

Figura 5: Jornal *Mathematical Correspondent*
(Fonte: <https://books.google.com.br/books?id=dxoAAAAAMAAJ&pg=PP15&hl=pt-BR&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false>. Acesso em 21 jul. 2020.)

[7] *"But, in order, to pursue the application of our definition, to quantity in the ultimate extremity of smallness, let us suppose* x *to represent any fractional quantity; or in other words, let* x *denote any magnitude, expressed in numbers, by means of some part of its measuring unit: then by the definition* $x^1 = 1 \times x$. *Let now this multiplication by* x*, be abstracted; and for the reasons heretofore advanced, we have* $x^0 = 1$. *Now since* x *here represents a fractional quantity, independent of any limitation, in respect to smallness; we may therefore suppose* x*, by means of continual diminution, or decrease, to pass from its present value, through every degree of smallness, until it become nothing; then it will be evident, that, during this diminution or decrease of* x*,* x^0 *will continue equal to an invariable unit; and that precisely at the instant, when* x *becomes nothing,* x^0*, or* $0^0 = 1$."

Até então, existia uma convergência entre os matemáticos para concluir que o valor de zero elevado a zero é igual a um, porém convém destacar que as observações apresentadas por Baron e Euler caracterizam exemplos de manipulações sem o devido apuro matemático, típico do formalismo matemático empregado no século XVIII (Eves, 2004, p. 474).

O século XIX pode ser considerado como a "idade de ouro" da matemática (Boyer, 2001, p. 343), caracterizado pelo processo de rigorismo e o questionamento aos métodos aplicados nas demonstrações matemáticas em séculos anteriores. Muitos matemáticos se destacaram neste processo de formalização durante o século XIX, entre eles, o francês Augustin-Louis Cauchy que demonstrou em sua obra, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (figura 6), que a expressão 0^0 é uma das formas indeterminadas quando se lida com limites. (Cauchy, 1821, p. 68).


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Figura 6: *Cours d'Analyse*
(Fonte: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f9.image>. Acesso em 21 jul. 2020.)

É possível observar que as abordagens apresentadas por Euler e Baron possuíam a aplicação dos princípios de limites, pois mantinham o valor do expoente em zero e reduziam gradativamente os valores da base em aproximação ao zero. Este tipo de argumentação passou a ser questionada, pois eram conflituosas com as noções de limites apresentadas por Cauchy e como consequência não atendiam o formalismo que passou a vigorar no século XIX.

Prosseguindo em nosso percurso histórico e exemplificando este conflito, vamos apresentar quatro artigos divulgados no *Journal for die reine und angewand Mathematik*[8], publicação alemã também conhecida como *Journal de Crelle* (figura 7) em alusão ao seu fundador, August Leopold Crelle, que teve sua primeira edição em janeiro de 1826 e possui o título de ser o mais antigo periódico matemático em circulação na atualidade (Eves, 2004, pp. 533, 565; Boyer, 2001, pp. 350, 362).

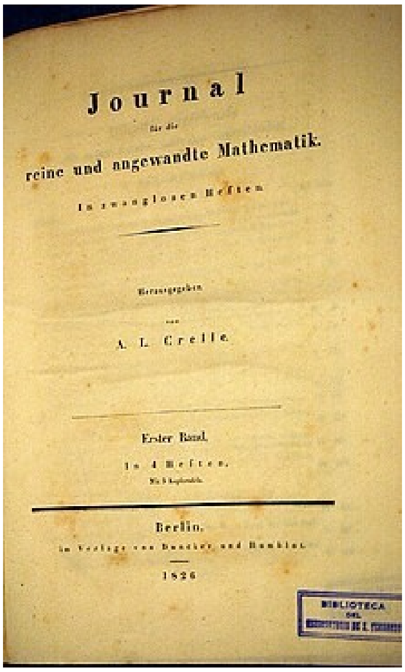


Figura 7: *Journal de Crelle*
(Fonte: <https://www.wikidata.org/wiki/Q1368270>. Acesso em 21 jul. 2020.)

O primeiro artigo que destacamos foi de autoria do matemático italiano Guilaume Libri publicado em 1833 no volume X do *Journal de Crelle*:

> *Em nosso estudo anterior sobre funções descontínuas, consideramos o valor de* 0^0 *como sempre igual à unidade, como conseqüência do valor de* $x\,log\,0$*, que sempre foi zero, quando* $x = 0$*. Mas devemos observar que sabemos apenas que o produto* $x\,log\,0$*, o zero de* $log\,0$*, vem de* $log\,x$*, no qual temos*

[8] Página web disponível em: < https://www.degruyter.com/view/journals/crll/crll-overview.xml>. Acesso em 21 jul. 2020.

> *feito* $x = 0$ *ou qualquer outra função de* x *sob o cunho logarítmico. Isso resulta de alguma incerteza no valor de* $x \log 0$, *quando* $x = 0$ *e, consequentemente, no valor de* $0^0 = 1$. *Mas é fácil provar diretamente por outros meios que a expressão* 0^0 *sempre tem o valor da unidade. Mascheroni já havia observado que* $0^0 = 1$. *Ele encontrou esse valor pela equação:* $0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$; *mas isso pode ser feito de outras maneiras. Sabemos que quando* x *é um número inteiro, o desenvolvimento do binômio:* $(1-u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)u^2}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)u^3}{2\times 3} + etc.$, *é finito e sempre fornece um valor exato, independentemente do valor de u; o que não se deve à convergência das séries do segundo membro (porque essa convergência exige que tenhamos* $u < 1$*), mas o fator* $x - x$, *encontrado em todos os termos após o termo* $x + 1^a$. *Daí resulta que, se fizermos* $x = 0$, *todos os termos, exceto o primeiro, serão anulados, e sempre teremos* $(1-u)^0 = 1$. *Vemos que esse valor é independente do valor de* u *e que podemos fazer* $u = 1$, *o que resulta em* $(1-1)^0 = 1 = 0^0$. *Também chegaríamos ao mesmo resultado, fazendo:* $(a-b)^x = a^x - xa^{x-1}b + \frac{x(x-1)a^{x-2}b^2}{2} - etc.$, *e então (pela suposição de* $x = 0$*),* $(a-b)^0 = a^0 = 1$: *porque como este último resultado é independente de* a *e* b, *podemos fazer* $a = b$ *e ainda teremos:* $(a-a)^0 = 0^0 = 1$ (Libri, 1833, p. 303, tradução nossa[9]).

Neste artigo podemos destacar o notório conflito entre a dificuldade em admitir a solução indefinida para a expressão 0^0 quando se opera com logaritmos e a existência de provas por outros meios de que o valor de 0^0 é unitário, solução

[9] *"Dans nos recherches précédentes sur les fonctions discontinues nous avons considéré la valeur de* 0^0 *comme étant toujour égale à l'unité, en conséquence de la valeur de* $x \log 0$, *qui était toujours égale à zéro, losque* $x = 0$. *Mas il faut observer qu'on sait seulement que le produit* $x \log 0$, *le 0 du* $\log 0$ *vient de* $\log x$, *dans lequel on ait fait x=0, ou de toute autre fonction de x sous le signe logarithmique. Il résulte de lá quelque incertitude dans la valeur de* $x \log 0$, *lorsque x=0, et par suite dans celle de* $0^0 = 1$. *Mais il est aisé de prouver directement par d'autres moyens que l'expression* 0^0 *a toujours pour valeur l'unité. Mascheroni avait déjà observé que* $0^0 = 1$. *Il trouvait cette valeur par l'équation* $0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$ *mais on peut y parvenir par d'autres voies. On sait que lorsque x est un nombre entier, le développement du binome* $(1-u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)u^2}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)u^3}{2\times 3} + etc.$, *s'arrête toujours et donne toujours une valeur exacte quelleque soit la valeur de u; ce qui ne tient pas à la convergence de la série du second membre (car cette convergence exige que l'on ait u <1), mais au facteur* $x - x$, *qu'on retrouve dans tous les termes après le terme* $x + 1^{me}$. *Il résulte de là que si l'on fait* $x = 0$, *tous les termes, excepté le premier, se détruiront, et on aura toujours* $(1-u)^0 = 1$ *On voit que cette valeur est indépendante de la valeur de u, et qu'on pourra faire* $u = 1$, *d'où il résultera* $(1-1)^0 = 1 = 0^0$. *On voit aussi que l'on parviendrait au même résultat, en fesant d'abord* $(a-b)^x = a^x - xa^{x-1}b + \frac{x(x-1)a^{x-2}b^2}{2} - etc.$, *et puis (par la supposition de x = 0),* $(a-b)^0 = a^0 = 1$: *car puisque ce dernier résultat est indépendant de* a *et* b, *on pourra faire* $a = b$, *et on aura encore* $(a-a)^0 = 0^0 = 1.$*"*

usual no século XVIII. O autor apresenta algumas demonstrações, destacamos a primeira que credita ao matemático italiano Lorenzo Mascheroni e as seguintes que utiliza a aplicação do binômio de Newton.

O segundo artigo possui o fato interessante de ser uma análise anônima ao artigo apresentado por Libri, foi publicado em 1834 no volume XI do *Journal de Crelle* e destacamos os seguintes comentários:

> *Em um artigo sobre funções descontínuas, que o Sr. Libri apresentou neste jornal, ele usa a expressão* 0^0*, que ele considera com o valor sendo sempre igual à unidade. É também a opinião quase unânime de todos os pesquisadores, cujos trabalhos estão ao meu alcance. No entanto, parece-me que os vários raciocínios usados para demonstrar essa igualdade se baseiam na generalização não permitida de um caso específico, e que, se eles foram bem fundamentatos, podemos também argumentar que o valor de* $\frac{0}{0}$ *é sempre igual à unidade. Por exemplo, Euler em seu Tratado sobre álgebra argumenta da seguinte maneira: porque temos* $\frac{a}{a} = a^0 = 1$*, segue-se que* a^0 *é sempre igual à unidade, seja o número a grande ou pequeno, e mesmo se* a *é zero, de modo que o valor* 0^0 *é certamente igual à unidade. Mas por que não dizer novamente: porque sempre temos a igualdade* $\frac{a}{a} = 1$*, dependendo do valor do número* a*, ela ainda existirá se tivermos* $a = 0$*, ou seja, sempre teremos* $\frac{0}{0} = 1$*? O mesmo vale para a demonstração de Mascheroni que o Sr. Libri citou. Porque também ocorre o mesmo, pois temos* $\frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$*, então temos* $\frac{0}{0} = 1$*? A demonstração do Sr. Libri me parece também sujeita as mesmas muitas objeções. De fato, ninguém contestará que o valor da expressão* $\frac{a}{a}$ *é sempre igual à unidade, mesmo se assumirmos a = 0, então o valor de* 0^0 *como o de* $\frac{0}{0}$ *é igual à unidade. Mas como o valor de* $\frac{0}{0}$ *não é sempre igual à unidade, não podemos concluir que sempre temos* $0^0 = 1$*. Para provar essa igualdade, seria necessário demonstrar que o valor de* $[f\,(a)]^{F\,(b)}$ *é sempre igual à unidade, se tivermos duas funções* $f\,(x), F\,(y)$ *que se aproximam a zero, para os valores* $x = a$*,* $y = b$*, o que não fizemos até agora. Na minha opinião, a expressão* 0^0 *nada mais é do que a expressão* $0^1 \times 0^{-1}$*, e como esta última expressão que é igual a* $0 \times \infty = \frac{0}{0}$ *pode assumir todos os valores incluídos entre* $-\infty$ *e* ∞*, da mesma forma a expressão* 0^0 *pode ter todos os seus valores. O Sr. Cauchy é o único autor em que possui a mesma opinião.* (*Sur la valuer*, 1834, p. 272, tradução nossa[10]).

[10] *"Dans un mémoire sur les fonctions discontinues, que Mr. Libri a fait insérer dans ce journal, il fait usage de l'expression* 0^0*, dont il considère la valeur comme étant toujours égale à l'unité. C'est aussi l'opinion presque unanime de tous les géomètres, dont les ouvrages sont à ma portée. Pourtant il me semble que les divers raisonnemens qu'on a employés pour démontrer cette*

Este artigo traz um relato histórico que reforça o fato de, naquela época, ser o usual adotar o valor unitário para a expressão zero elevado a zero. O autor questiona as demonstrações apresentadas por Libri, acrescenta críticas à demonstração de Euler inclusa em sua obra "Elementos de Álgebra". O autor também indica que o único caminho para solução da igualdade, $0^0 = 1$, é demonstrar por limite que o valor de $f(a)^{F(b)}$ é sempre igual à unidade, quando duas funções $f(x), F(y)$ que se aproximam à zero, para os valores $x = a$, $y = b$ e finaliza informando que as sua abordagens são consonantes com as de Cauchy. Cabe ressaltar que não foram tecidas considerações sobre as demonstrações por binômio de Newton.

O terceiro artigo é de autoria do matemático August Ferdinand Möbius e apresenta uma demonstração para a igualdade $0^0 = 1$ creditada a seu professor Johann Friedrich Pfaff. A demonstração publicada por Möbius recorre à transformação de variável, aplica conceitos de limites e utiliza um caso específico para concluir que o valor de 0^0 é unitário. Foi publicada em 1834 no volume XII do *Journal de Crelle* e destacamos os seguintes detalhes do artigo:

> *Dessa equação, meu inesquecível professor e amigo, entendia. J. F. Pfaff em Halle apresentou-me uma prova em 1814 que não deixava nada a desejar em termos de nível, e que aqui apresento para eliminação das dúvidas levantadas no volume XI deste jornal, página 272, contra a compreensão geral sobre a admissibilidade geral da equação. A equação $0^0 = 1$ não quer dizer nada além de que o valor de x^x quando se aproxima*

égalité reposent sur la généralisation non permise d'un cas particulier, et que, s'ils étoient bien fondés, on devoit aussi soutenir, que la valeur de $\frac{0}{0}$ est toujours égale à l'unité. Par exemple, Euler dans son Traité d'algèbre argumente comme il suit: parcequ'on a $\frac{a}{a} = a^0 = 1$ il suit que a^0 est toujours égal à l'unité, soit que le nombre a soit grand ou petit, et même si a est égal à zéro, de manière que la valeur de 0^0 est certainement égale à l'unité. Mais pourquoi ne pas dire encore: parce-qu'on a toujours $\frac{a}{a} = 1$ sans que cette égalité dépende de la valeur du nombre a, elle subsistera encore si l'on a $a = 0$, c'est-à-dire qu'on aura toujours $\frac{0}{0} = 1$? Il en est de mémo avec la démonstration de Mascheroni que Mr.Libri a citée. Car n'en suit-il pas également que, parcequ'on a $\frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$ on a aussi $\frac{0}{0} = 1$? La démonstration de Mr. Libri me parait encore sujette aux ménes objections. En effet, personne ne contestera que la valeur de l'expression a/a est toujours égale à l'unité, au cas même qu'on suppose $a = 0$, alors la valeur de 0^0 comme celle de $\frac{0}{0}$ est égale à l'unité. Mais comme il n'en suit pas que la valeur de $\frac{0}{0}$ soit toujours égale à l'unité, de même on n'en doit pas conclure qu'on a toujours $0^0 = 1$. Pour prouver cette égalité il faudrait démontrer que la valeur de $f(a)^{F(b)}$ est toujours égale à l'unité, si l'on a deux fonctions $f(x), F(y)$ qui se changent en zéro, pour les valeurs $x = a, y = b$, ce qu'on n'a pas fait jusqu'à présent. Selon mon avis l'expression 0^0 n'est autre chose que l'expression $0^1 . 0^{-1}$, et comme cette dernière expression qui est égale à $0. \infty = \frac{0}{0}$ peut avoir toutes les valeurs comprises. entre $-\infty$ et ∞, de même l'expression 0^0 peut avoir toutes ses valeurs. Mr. Cauchy est le seul auteur où j'ai trouvé la même opinion."

> *a qualquer limite especificável com a diminuição contínua de x. Se você definir $x = \frac{1}{u}$, $x^x = \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$, é possível demostrar que $u^{\frac{1}{u}}$ pode ser trazido o mais próximo possível da unidade que você deseja, bastando u crescer.* (Möbius, 1834, p. 134, tradução nossa[11])

O quarto artigo apresenta dois textos de autores anônimos com a identificação de que o segundo texto possuía a mesma autoria do segundo artigo apresentado neste item e contra argumentam as premissas adotadas por Möbius. Os textos indicam que expressões mais gerais de $f\ (s)^{F(x)}$ podem convergir para valores diferentes do unitário. Os textos foram publicados em 1834 no volume XII do *Journal de Crelle* e destacaremos as seguintes observações do primeiro e segundo textos respectivamente:

> *1º) À luz da observação que acaba de ser feita, não será estranho dizer que em quantidades exponenciais o valor do limite pode não ser 1, enquanto expoente e base desaparecem ao mesmo tempo, como é o caso das seguintes expressões, $x^{\frac{a+x}{ln(x)}}$, $x^{\frac{a}{ln(x)+ln(ln(\frac{1}{x}))}}$, ambos se reduzem a e^a quando x tende a zero.*
> *2º) Seja $X = e^{-\frac{1}{z}}$, onde e significa a base dos logaritmos naturais, $Y = x$: e quando o valor x é reduzido para zero tanto X como Y serão reduzidos para zero; neste caso $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^x$ deveria ser igual à unidade. No entanto, você nunca negará que, para todo valor finito de x, esta expressão será igual a $\frac{1}{e}$. Então, aqui temos um exemplo onde não é igual a um. Além disso, a expressão $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{2x} = \frac{1}{e^2}$; e outros exemplos poderiam mostrar que a expressão 0^0 pode ter muitos valores diferentes. Talvez o professor Möbius compartilhe sua visão das observações que acabamos de fazer neste Jornal.* (Bemerkungen, 1834, pp. 292-294, tradução nossa[12])

---

[11] *"Von dieser Gleichung theilte mir mein unvergefslicher Lehrer und Freund, der verst. Hofrath Pfaff in Halle, im Jahre 1814 einen Beweis mit, der an Bündigkeit nichts zu wünschen übrig lassen möchte, und den ich hier zur Beseitigung der im XI. Bande dieses Journals, Seite 272, gegen die allgemeine Zulässigkeit der Gleichung erhobenen Zweifel bekannt zu machen, mir erlaube. Die Gleichung $0^0 = 1$ will nichts Andares sagen, als dafs der Werth von x^x bei fortwährender Abnahme von x sich der Einheit über jede angebbare Grenze nähert. Man setze $x = \frac{1}{u}$, so wird $x^x = \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$, und es kommt alsdann darauf an, zu zeigen, dafs $u^{\frac{1}{u}}$ der Einheit so nahe gebracht werden kann, als man will, wenn man u ohne Ende wachsen läfst."*

[12] *"1º) Nach der eben gemachten Bemerkung wird es nicht befremden, wenn man auf Exponentialgröfsen stufst, die nicht den Grenzwerth 1 annehmen, während Exponent und Basis*

Möbius não apresentou ao *Journal de Crelle* nenhuma observação sobre as argumentações do quarto artigo e ficou registrada nestes artigos a fragilidade da demonstração da igualdade $0^0 = 1$ com a aplicação dos conceitos de limite, fato usual no século XIX. Realmente, expressões mais gerais de $f\ (s)^{F(x)}$ podem convergir para valores diferentes do unitário, conduzindo para definir a expressão 0^0 como uma indeterminação conforme reivindicado por Cauchy.

O matemático alemão Georg Cantor, precursor da teoria dos conjuntos introduziu ideias notáveis e originais que revolucionaram a matemática nos séculos XIX e XX (Rooney, 2012, pp. 192-195). Os seus trabalhos são considerados como introdutórios a uma nova escala de infinidades e permitiu a construção das bases da nova aritmética cardinal (Eves, 2004, p. 662).

Esta aritmética permitiu que outros estudiosos debruçassem sobre o valor da expressão 0^0 sob uma nova perspectiva e matemáticos tais como Nicolas Bourbaki[13], Roger Godement (Godement, 1997, p. 90), Patrick Suppes (Suppes, 1960, p. 116), entre outros, elaboraram teoremas para provar que 0^0 possui valor unitário e que este valor, o 1, é o único que atende a expressão $a^b = c$, quando $a = 0$, $b = 0$, com a, b, c sendo números naturais, não sendo portanto uma mera convenção ou norma prática[14].

No Brasil, a Revista do Professor de Matemática (RPM) abordou o assunto nos exemplares um, sete e onze na seção "Conceitos e Controvérsias". O artigo do professor Elon Lages Lima, publicado no primeiro exemplar da RPM (figura 8) apresenta duas repostas possíveis: (i) 0º é uma expressão sem significado

---

gleichzeitig verschwinden, wie es z. B. bei den folgenden der Fan ist, $x^{\frac{a+x}{\log(x)}}$, $x^{\frac{a}{\log(x)+\log(\mathrm{lnog}(\frac{1}{x}))}}$ *die sich beide Dir* $x = 0$ *auf* e^0 *reduciren.*

2º) Es sei $X = e^{-\frac{1}{z}}$, *wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet,* $Y = x$*: so wird sowohl X als Y für den Werth* $x = 0$ *auf Null reducirt; es müfste also in diesem Falle* $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^x$ *der Einheit gleich sein. Gleichwohl wird aber Niemend leugnen, dafs für jeden endlichen Werts von* x *dieser Andruck* $= \frac{1}{e}$ *ist. Hier hätten wir also ein Beispiel, wo* 0^0 *nicht =1 ist. Ferner ist der Ausdruck* $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{2x} = \frac{1}{e^2}$*; und so liefse sich durch noch andere Beispiele zeigen, dafs der Ausdruck* 0^0 *allerdings sehr verschiedene Werthe haben kann. Vielleicht theilt uns Herr Prof. Moebius seine Ansicht über die eben gemachten Bemerkungen in diesem Journale mit."*

[13] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo de um grupo de matemáticos que possuia formação variável, tendo chegado a ser composto por até vinte matemáticos (Eves, 2004, p. 691).

[14] O item 3.3 deste trabalho apresentará os conceitos básicos da aritmética cardinal que permitem concluir que $0^0 = 1$.

matemático ou (ii) 0º é uma expressão indeterminada, ambas com argumentos. Destacamos alguns argumentos que justifica a indeterminação:

> *Lembramos que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$*, que é evidente quando* $m > n$*, continue válida para* $m = n$*. Pondo* $a^m = b$ *teremos então* $\frac{b}{b} = b^0$*, logo* $b^0 = 1$ *se* $b \neq 0$*. No caso de* $b = 0$*, a igualdade* $\frac{b}{b} = b^0$ *tomaria a forma* $\frac{0}{0} = 0^0$*, o que leva a considerar* 0^0 *como uma expressão indeterminada. Esta conclusão é ainda reforçada pelo seguinte argumento: como* $0^y = 0$ *para todo* $y \neq 0$*, seria natural pôr* $0^0 = 0$*; por outro lado, como* $x^0 = 1$ *para todo* $x \neq 0$ *seria também natural por* $0^0 = 1$*. Logo, o símbolo* 0^0 *não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.* (Lima, 1982, p.7).

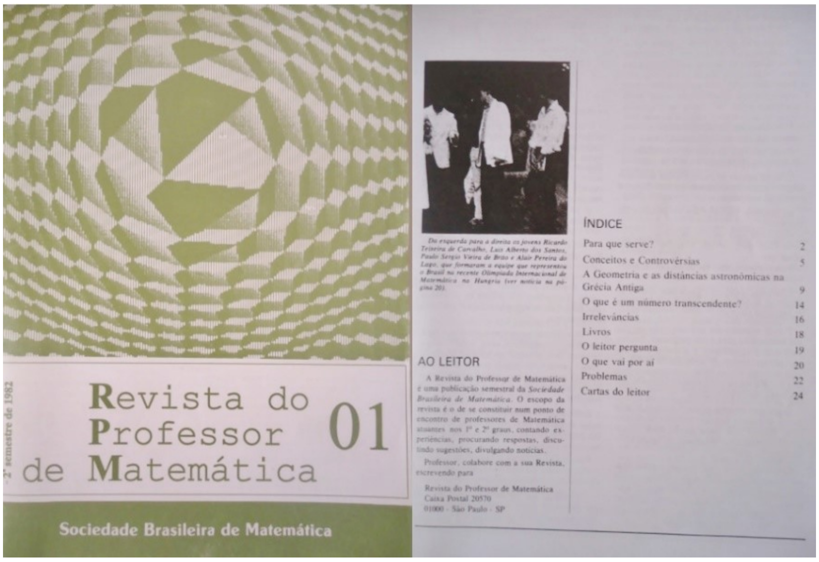


Figura 8: Revista do Professor de Matemática nº 01
(Fonte: Revista de História da Educação Matemática v. 5, nº 1, 2019, p. 175)[15]

O artigo publicado no sétimo exemplar exibe uma carta com o questionamento do professor Euclides Rosa sobre a possibilidade de 0º ser igual a um e apresentam dois raciocínios que permitem validar a afirmação, o primeiro faz uma abordagem por função e o segundo utiliza o binômio de Newton. Sobre os raciocínios do professor Euclides Rosa, o professor Elon Lages Lima apresenta os seguintes comentários:

[15] Disponível em <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/210>. Acesso em 21 jul. 2020.

> *Ao apresentar dois raciocínios que o 'levam a concluir que $0^0 = 1$', ele não afirma estar provando esta igualdade. Nós, os leitores de sua carta, devemos entender seus argumentos do seguinte modo: A definição usual da potência n^m não tem sentido quando $m = n = 0$. Entretanto, se adotarmos a convenção $0^0 = 1$, isto fará com que a igualdade "$n^m =$ número de funções de um conjunto X com m elementos num conjunto Y com n elementos" continue válida quando X e Y são conjuntos vazios (Primeiro argumento). Além disso, a mesma convenção $0^0 = 1$ fará com que a fórmula do binômio de Newton $(a+b)^m$ continue válida para $m = 0$ e $a + b = 0$ (Segundo argumento).* (Lima, 1985, p. 18).

Podemos observar que o professor Elon Lages Lima trata da possibilidade de adotar o $0^0 = 1$ por convenção. Neste mesmo artigo, o professor Elon Lages Lima apresenta outros argumentos para concluir mais uma vez que 0^0 é uma expressão indeterminada, dos quais destacamos:

> *Se nos derem de antemão um número arbitrário c, podemos escolher números x, y tão pequenos quanto desejemos, de tal forma que $\frac{x}{y} = c$. Ou seja: quando x e y tendem a zero, o quociente $\frac{x}{y}$ pode tender para qualquer valor c dado a priori, tudo dependendo de como x e y são escolhidos. O mesmo ocorre com x^y. Esta expressão tem um significado bem preciso quando $x > 0$, valendo $x^y = e^{y \log x}$ (logaritmo natural). Quando $y \neq 0$, embora a fórmula $e^{y \log 0}$ não tenha sentido, é natural escrevermos $0^y = 0$ porque, fixado $y \neq 0$, a expressão x^y assume valores cada vez mais próximos de zero, à medida que atribuímos a x valores que tendem a zero. Por outro lado, não é possível raciocinar da mesma maneira quando x = y = 0. Com efeito, quando se atribuem a x e y valores cada vez menores, que se aproximam de zero, a potência x^y não o tende para nenhum limite bem determinado; tudo depende de como se escolhem x e y.* (LIMA, 1985, p. 19)

Os argumentos apresentados pelo professor Elon Lages Lima tratam da potenciação no conjunto dos reais, onde a expressão 0^0 é indeterminada.

O artigo publicado na décima primeira edição, desta vez, assinado pelo professor Paulo Moacyr Libramento Prado, apresenta a importância de definir a natureza e o conjunto suporte da operação a ser realizada antes de definir o resultado de 0º. O professor Paulo Moacyr enumera diversos teoremas que demonstram a igualdade $0^0 = 1$ e conclui o artigo com os seguintes comentários:

> *Conclui-se, também, do exposto, que os defensores do* $0^0 = 1$ *não reivindiquem o mesmo direito para* $\frac{0}{0}$ *porque o* $\frac{0}{0}$ *não é uma operação definida nem mesmo no conjunto dos números naturais, enquanto* 0^0 *é. Desejamos, por fim, fazer justiça à exposição de ambos os Professores, o Prof. Euclides Rosa e o Prof. Elon Lages Lima. O primeiro, que destacou o ponto de vista do Algebrista, mais afeito aos cardinais e aos números naturais, apresentou num esboço sucinto, no seu "primeiro raciocínio", a definição da exponenciação de naturais e a demonstração do Teorema* $0^0 = 1$, *válido para essa operação, definida nesse conjunto suporte. O segundo, já com o ponto de vista do especialista em Análise, que evoca imediatamente os reais, mostrou, dentro deste contexto, que a expressão* 0^0 *é indeterminada*. (Prado, 1987, p. 18)

Ressaltamos que o profícuo debate na RPM ocorreu entre os anos de 1982 a 1987, época em que os recursos digitais de apoio à matemática eram incipientes. Atualmente existem diversos campos que podem deparar com esta expressão e com soluções diversas, por exemplo, existem *softwares* que admitem a expressão 0^0 como indefinida e outros que a igualam a unidade. O presente trabalho mostra que, ainda hoje, as dúvidas que envolvem esta controvérsia permanecem em muitos casos por desconhecimento das possíveis abordagens ou interpretações pertinentes ao assunto nos mais variados níveis de ensino.

3
Potenciação

A potenciação está intimamente relacionada à controvérsia em torno do valor da expressão zero elevado a zero. Embora as operações matemáticas possuam relações entre si, não podemos simplesmente afirmar que uma expressão é indeterminada correlacionando operações diferentes. A potenciação é, por exemplo, uma operação fechada no conjunto dos números naturais, ou seja, quando efetuamos uma operação de potenciação entre dois elementos do conjunto dos números naturais, o resultado obtido continua pertencente ao conjunto dos números naturais considerando, obviamente, que zero não pertença aos naturais. Em contrapartida, a operação de divisão não é uma operação fechada no conjunto dos números naturais, pois o resultado da divisão de dois naturais nem sempre pertencerá ao conjunto dos números naturais. O valor da expressão zero elevado a zero é resultado de uma operação de potenciação, dessa forma, não se pode afirmar que a expressão zero elevado zero é uma indeterminação como acontece na expressão zero dividido por zero uma vez que os resultados das duas expressões são concernentes ao resultado de duas operações aritméticas distintas e, por vezes, baseadas em estruturas algébricas diversas.

A potenciação pode ser entendida com um procedimento matemático derivado das operações básicas de multiplicação e divisão, e que pode ser abordada no universo dos conjuntos naturais, inteiros ou reais, utilizando técnicas distintas. Nesta seção apresentaremos três técnicas distintas para cálculo da potência, cada uma com foco nos conjuntos numéricos citados e explicitando o valor de 0^0 para cada uma delas.

3.1 A potenciação com o expoente inteiro

Esta é a técnica mais usual e amplamente estudada e divulgada. Foi apresentada por Leornad Euler em seu livro “Elementos de Álgebra”, capítulo XVI, que será a referência para elaboração deste tópico.

A potenciação consiste na multiplicação de um número uma ou várias vezes pelo próprio número. Assim, o quadrado de um número é obtido pela multiplicação deste número por ele próprio, o cubo de um número é obtido multiplicando-se o quadrado dele por ele próprio e utilizando este procedimento recursivamente podemos obter qualquer potência inteira desejada de um determinado número. Para melhor exemplificar, podemos observar a tabela 1 onde se processa a potência de qualquer número, y, onde a potência varia de 1 a 6.

Tabela 1 – Potências inteiras de 1 a 5 do número y

Potência	1	2	3	4	5	6
Número y	y	yy	yyy	yyyy	yyyyy	yyyyyy
	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6

Fonte: Elaborada pelo autor

Esta série de potências é uma progressão geométrica de razão e primeiro termo igual a y, cada termo é obtido multiplicando o anterior por y, o que promove o aumento do expoente em uma unidade. Também podemos prosseguir com a nossa série em ordem retroativa e encontrar o termo anterior dividindo o termo por y e com isso diminuindo o expoente em uma unidade. Para melhor exemplificar, podemos observar a tabela 2 onde se processa a potência de qualquer número, y, onde a potência varia de 0 a -5.

Tabela 2 – Potências inteiras de 0 a -5 do número y

Potência	0	-1	-2	-3	-4	-5
Número y	$\frac{y}{y} = 1$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{yy}$	$\frac{1}{yyy}$	$\frac{1}{yyyy}$	$\frac{1}{yyyyy}$
	y^0	y^{-1}	y^{-2}	y^{-3}	y^{-4}	y^{-5}

Fonte: Elaborada pelo autor

O número y pode ser inteiro, racional ou real, porém o expoente sempre será um número inteiro. Esta restrição ao expoente consiste numa limitação deste processo para cálculo da potência de um número qualquer.

Utilizando o argumento que o termo que precede o y^1 deve necessariamente ser $\frac{y}{y}$ ou 1, ou seja, y^0 é igual a 1, Euler concluiu que y^0 é sempre igual a um, por maior ou menor que seja o valor do número y, mesmo quando o y seja o nada, isto é, y^0 é igual a 1 (Euler, 1840, p. 51). Ou seja, para Euler, mesmo que y=0, teríamos $y^0 = 1$. Atualmente, este argumento compromete o rigor desta demonstração matemática porque considera a possibilidade da divisão de zero por zero para atribuir o valor unitário a expressão 0^0.

3.2 A potenciação no conjunto dos números reais

Este processo foi elaborado quando não existiam as facilidades digitais atuais e possui definições diferentes das apresentadas no item anterior. A potenciação no conjunto dos números reais é baseada nas funções exponencial e logarítmica (Lima, 2002, pp. 274-281; Figueiredo, 1996, p. 156; Swokowski, 1983, p. 387).

Esta técnica de potenciação dá significado à expressão r^s, onde r e s são números reais com $r > 0$, atribuindo sentido a expressões tais como $\sqrt{2}^{(\sqrt{3})}$. O método utiliza a função logarítmica natural (ou neperiana) que é representada por $\ln(r)$, para traduzir a exponenciação para a expressão $r^s = e^{s\ \ln(r)}$, onde e é o número de Euler. Para obter valores aproximados de potências reais r^s, na atualidade, podemos utilizar a facilidade de algum recurso digital, porém na impossibilidade de uso da informática, como no passado, as tabelas elaboradas com esta finalidade eram a solução; pois utilizando somente estas duas funções: a função exponencial e a logarítmica natural que é a inversa da primeira (figura 9), é possível calcular valores aproximados das potências.

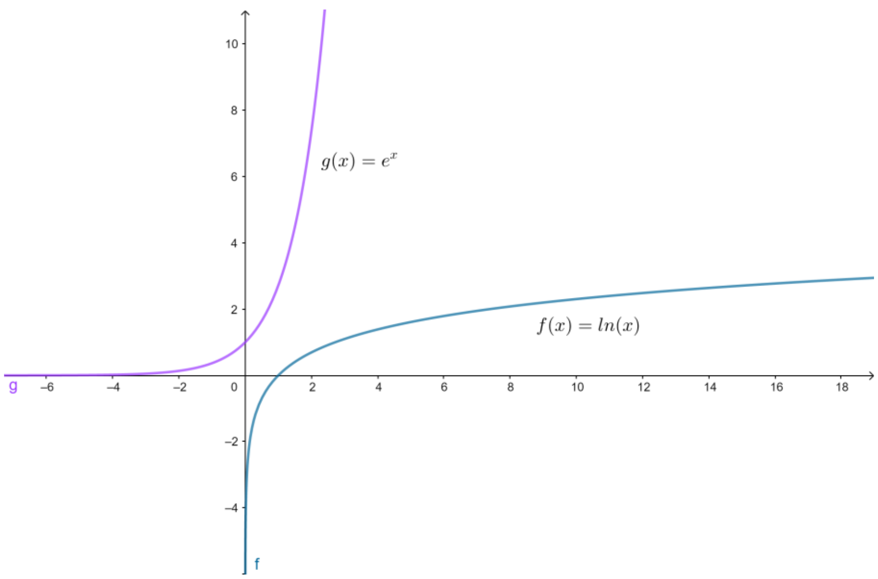


Figura 9: Funções logarítmica (f(x)) e exponencial (g(x))

(Fonte: Gráfico elaborado pelo autor no *software* Geogebra)

A título de exemplo, vamos efetuar os cálculos das potências $2^{(\sqrt{3})}$, $2^{(-\sqrt{11})}$e $\sqrt{2}^{(\sqrt{3})}$ utilizando as tabelas do anexo A:

Inicialmente sabemos que:

a) $2^{(\sqrt{3})} = e^{\sqrt{3}\ln 2}$

b) $2^{(-\sqrt{11})} = e^{-\sqrt{11}\ln 2}$

c) $\sqrt{2}^{(\sqrt{3})} = e^{\sqrt{3}i\ln\sqrt{2}} = e^{\frac{\sqrt{3}\ln 2}{2}}$

Conforme as tabelas do anexo A, temos que $\sqrt{3} = 1.732 \ldots$, $\sqrt{11} = 3{,}3166 \ldots$ e $\ln 2 = 0.693 \ldots$, logo:

a) $2^{(\sqrt{3})} = e^{\sqrt{3}\ln 2} = e^{(1.732\ldots)*(0.693\ldots)} = e^{1.200\ldots}$

b) $2^{(-\sqrt{11})} = e^{-\sqrt{11}\ln 2} = e^{-(3.317\ldots)*(0.693\ldots)} = e^{-2.299\ldots}$

c) $\sqrt{2}^{(\sqrt{3})} = e^{\sqrt{3}i\ln\sqrt{2}} = e^{\frac{(1.732\ldots)*(0.693\ldots)}{2}} = e^{0.600\ldots}$

E utilizando as tabelas do anexo A, os valores aproximados das potências são:

a) $2^{(\sqrt{3})} = e^{\sqrt{3}\ln 2} = e^{(1.732\ldots)*(0.693\ldots)} = e^{1.200\ldots} \approx 3{,}320\ldots$

b) $2^{(-\sqrt{11})} = e^{-\sqrt{11}\ln 2} = e^{-(3.317\ldots.)*(0.693\ldots)} = e^{-2.299\ldots} \approx 0{,}1003 \ldots$

c) $\sqrt{2}^{(\sqrt{3})} = e^{\sqrt{3}i\ln\sqrt{2}} = e^{\frac{(1.732\ldots)*(0.693\ldots)}{2}} = e^{0.600\ldots} \approx 1.822 \ldots$

Uma das vantagens desta definição é permitir o cálculo de potências diversas com uso de uma única base, simplificando o cálculo com uso de tábuas, réguas ou gráficos. Como já dito, esta técnica de potenciação foi valiosa quando não existiam os recursos digitais atuais.

Todavia, a função logarítmica natural é definida pela integral $\ln(r) = \int_1^r \frac{1}{t}dt$ e como podemos observar o gráfico da figura 3, para $r = 0$ não existe um valor real que represente $\ln(0)$ e portanto não está definida para $r = 0$, o que não permite concluir qual o valor de 0^0 por este método, tornando um valor indefinido.

3.3 A potenciação entre os cardinais de conjuntos finitos

Este método de potenciação conduz a demonstração de que $0^0 = 1$. É de bom alvitre ressaltar que não se trata de uma convenção, é um teorema com fundamentação sólida e apresentado por diversos matemáticos (Bourbaki, 1963, p. 46; Godement, 1997, p. 90; Suppes, 1960, p. 116; Rosser, 1978, p. 385; entre outros). A seguir apresentamos a proposição sobre o assunto de Nicolas Bourbaki:

> Proposição 11. Seja um número cardinal a. Temos $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^a = 1$; se $a \neq 0$, temos $0^a = 0$. Em efeito, existe uma aplicação e somente uma de um $\emptyset$ em qualquer conjunto (a aplicação de gráfico vazio); todas as aplicações de um conjunto de elemento único em qualquer conjunto X são equipotentes a X (cap. II, § 5, nº 3); existe uma aplicação e apenas uma de qualquer conjunto em um conjunto de um elemento; finalmente, não há aplicação de um conjunto não vazio em um $\emptyset$. Note que em particular temos $0^0 = 1$. (Bourbaki, 1963, p. 46, tradução nossa[16])

Este processo é pouco usual e raramente estudado na educação básica e possivelmente também no ensino superior visto que possui definições expressivamente diferentes das apresentadas nos itens anteriores. A potenciação entre os cardinais de conjuntos finitos possui relação direta com o cardinal das aplicações estabelecidas entre os conjuntos. Este item abordará os conceitos necessários para a obtenção do valor de 0^0 (Bourbaki, 1963, p. 46; Godement, 1966, p. 90).

O entendimento das operações aritméticas como operações entre os cardinais de dois ou mais conjuntos finitos, como já dito, são pouco exploradas e divulgadas na educação básica e, por isso, apresentaremos o que se entende por adição, multiplicação e potenciação entre dois cardinais que são as operações fechadas no conjunto dos números naturais.

O conceito de cardinalidade de um conjunto finito está associado ao número de elementos que o conjunto possui. Um conjunto finito X qualquer, tem o cardinal notado por $|X|$ (leia-se cardinal de X) que representa a quantidade de

---

[16] *Proposition 11. Soit a un cardinal. On a $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^a = 1$; si $a \neq 0$, on a $0^a = 0$. Em effet, il existe une application et une seule de $\emptyset$ dans un ensemble quelconque (l'application de graphe vide); l'ensemble des applications d'un ensemble à un seul élément dans un ensemble quelconque X est équipotent à X (chap. II, § 5, nº 3) ; il existe une application et une seule d'un ensemble quelconque dans un ensemble à un élément ; enfin, il n'existe aucune application d'un ensemble non vide dans $\emptyset$. On notera en particulier que l'on a $0^0 = 1$.*

elementos do conjunto X. Então o conjunto vazio está associado ao número zero ($|\emptyset| = 0$), o conjunto unitário ao número um ($|\{▲\}| = 1$), o conjunto com um par de elementos ao número dois ($|\{●,\ ■\}| = 2$), e assim por diante.

A operação de adição com cardinais é efetuada a partir de dois conjuntos finitos disjuntos, A e B, tendo os cardinais notados, respetivamente, por $|A|$ e $|B|$. Assim, a adição de A e B é a aplicação que produz o cardinal de um conjunto finito com elementos de A e B tal que $|A| + |B| = |A \cup B|$, o cardinal do conjunto união de A com B.

Vamos exemplificar este conceito com um exemplo:

Incialmente, vamos considerar dois conjuntos finitos não vazios, $A = \{■, ●, ▲\}$ e $B = \{◈, ◉\}$, que possuem cardinalidade $|A| = 3$ e $|B| = 2$, que necessitamos submeter à adição. Agora estabelecendo o conjunto união de A com B, temos $A \cup B = \{■, ●, ▲, ◈, ◉\}$ que está associado ao cardinal $|A \cup B| = 5$. Logo, $|A| + |B| = |A \cup B| = 5$, o cardinal do conjunto união de A com B.

A operação de multiplicação com cardinais é efetuada a partir de dois conjuntos finitos não vazios disjuntos A e B com cardinais $|A|$ e $|B|$, respectivamente. Desta forma, quando se enumera os elementos da aplicação $A \times B$ (ou produto cartesiano) é obtido um conjunto que possui o cardinal da multiplicação, ou seja, $|A||B| = |A \times B|$.

Vamos apresentar dois exemplos aplicando este conceito:

Primeiro exemplo, vamos considerar dois conjuntos finitos não vazios, $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$, que possuem cardinalidade $|A| = 3$ e $|B| = 2$, que necessitamos multiplicar. Utilizando o diagrama de Venn (figura 10) e estabelecendo todas as aplicações possíveis de A em B, temos:

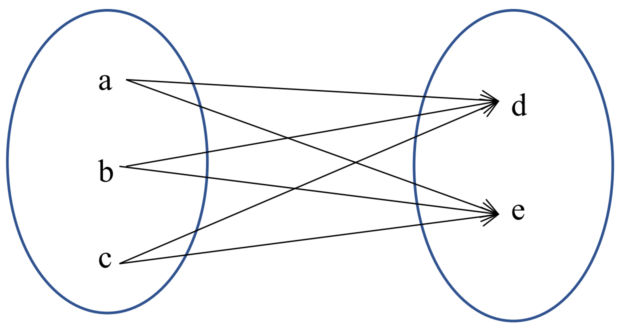


Figura 10: Multiplicação cardinal
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Logo a multiplicação cardinal, $|A||B| = 6$, pois é possível estabelecer 6 aplicações do conjunto A em B que podem também ser representado como a cardinalidade do conjunto que expressa o produto cartesiano $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{d}), (\mathrm{a}, \mathrm{e}), (\mathrm{b}, \mathrm{d}), (\mathrm{b}, \mathrm{e}), (\mathrm{c}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{e})\}$.

No segundo exemplo vamos considerar dois conjuntos finitos com $|A| = 3$ e $|B|$ finito, quando se anota a multiplicação $3 \times |B|$, devem-se considerar três vezes todos os elementos de B, que é semelhante dizer para todo $\mathrm{b_n}$ em B deve ser enumerado $(1, \mathrm{b_n})$, $(2, \mathrm{b_n})$ e $(3, \mathrm{b_n})$. Portanto, quando se enumera os elementos da aplicação $\{1, 2, 3\} \times B$, é obtido um conjunto que possui o cardinal que representa a multiplicação, $|A||B| = A \times B$.

A operação de potenciação é efetuada quando é calculado o valor de $|A|^{|B|}$, ou seja, é efetuada a aplicação que obtém o valor de $|A \times A \times A \times \ldots \times A|$ ($|B|$ vezes), que é o mesmo que calcular todas as n-uplas dos elementos de $|A|$, considerando que $|B| = n$. A aplicação para produzir as n-uplas é realizada com a escolha do primeiro elemento de A, a_1, em seguida, a_2 o segundo, e assim por diante até o a_n, o enésimo termo. Quando é selecionada uma aplicação (aqui denotada de a) de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em A. Podemos dizer então que $|A|^{|B|} = |A^B|$ ou A^B é o conjunto de aplicações em $|A|$ com potência em $|B|$, ou ainda, $|A^B| =$ número de aplicações de B em A.

Vamos apresentar um exemplo aplicando este conceito. Considerando dois conjuntos finitos, $C = \{a, b\}$ e $D = \{c, d, e\}$, que possuem cardinalidades $|C| = 2$ e $|D| = 3$, que necessitamos obter a potenciação $|C|^{|D|}$. Utilizando o diagrama de Venn (figura 11) e estabelecendo todas as aplicações triplas possíveis de C com expoente em D, temos:

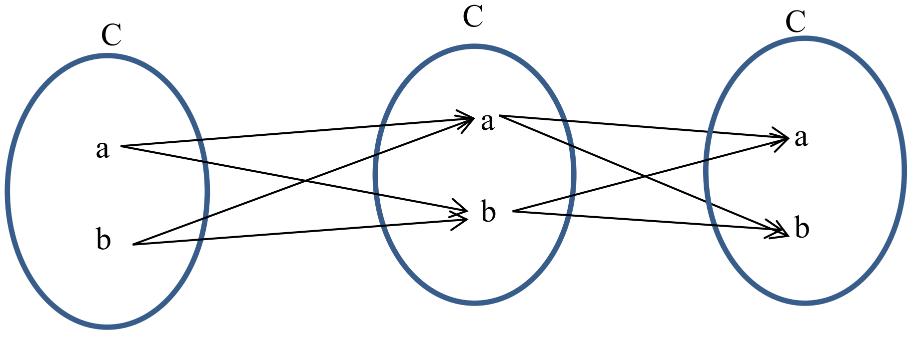


Figura 11: Potenciação cardinal

(Fonte: Elaborado pelo autor)

Logo a potenciação cardinal é $|C|^{|D|} = 8|$, pois é possível estabelecer 8 aplicações do conjunto D em C que podem também ser representado como a cardinalidade do conjunto de 3-uplas do elementos de C, ou seja, $|C^D| = |\{(\mathrm{a,a,a}), (\mathrm{a,a,b}), (\mathrm{a,b,a}). (\mathrm{a,b,b}), (\mathrm{b,a,a}), (\mathrm{b,a,b}), (\mathrm{b,b,a}), (\mathrm{b,b,b})\}| = 8$.

Utilizando os conceitos apresentados neste item, vamos observar que o valor a 0^0 corresponde às aplicações existentes entre dois conjuntos vazios (V’ e V”). A função identidade é a auto aplicação que podemos estabelecer nesta situação, logo o valor de 0^0 é igual a um por este método e a figura 12 representa o 0^0 utilizando o diagrama de Venn.

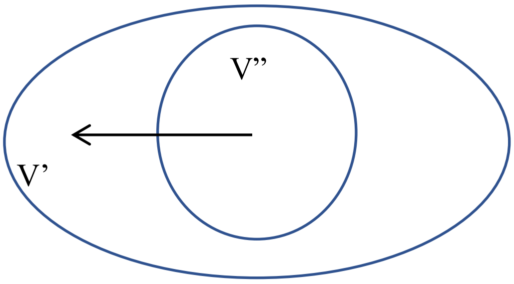


Figura 12: Diagrama de Venn para o zero elevado a zero

(Fonte: Elaborado pelo autor)

4
O zero elevado a zero digital

Nos dias atuais, a informática é uma ferramenta importante na investigação matemática e determinadas descobertas seriam praticamente impossíveis sem o seu uso. Na teoria dos números, a informática tem permitido, por exemplo, a descoberta de números primos paulatinamente maiores, situação que seria impossível sem os recursos digitais. Existem, atualmente, inúmeros recursos de informática que atribuem algum valor à potência 0º.

Cabe ressaltar que em grande parte dos *softwares*, os números estão divididos em dois grupos, um deles corresponde ao conjunto dos números inteiros e o outro aos números representados em ponto fixo ou flutuante que é a forma que se expressa os números decimais. Então podemos identificar, em informática, dois "tipos" de zero, o inteiro (0) e o zero em ponto fixo ou flutuante (0.0). Os cálculos para cada tipo de zero podem ser efetuados diferentemente dependendo do *software* utilizado. Então, as análises de como as rotinas internas tratam o valor de 0º passam pela consideração de quatro possibilidades de valores: 0^0, $0^{0.0}$, 0.0^0 e $0.0^{0.0}$. Selecionamos alguns recursos de informática e, a seguir, os resultados desses quatros valores são apresentados em todos os recursos digitais escolhidos.

O buscador *Google* é um serviço de pesquisa na internet amplamente utilizado no Brasil e que permite o cálculo de operações aritméticas, cálculos geométricos, elaboração de gráficos entre outras tarefas. A calculadora do *Google* permite o cálculo do valor de 0^0, bastando digitar a expressão em forma de pergunta ou diretamente sua forma aritmética. A calculadora do *Google* exibirá o valor unitário para as quatro possibilidades do 0^0 conforme apresentado na figura 13.

O resultado das operações indica que esta calculadora não realiza distinção entre o zero inteiro ou em ponto flutuante, atribuindo valor unitário para as quatro operações.

Figura 13: Calculadora Google

(Fonte: <https://www.google.com.br/>.)

O Maple, por exemplo, é um sistema algébrico computacional desenvolvido pela empresa canadense Maplesoft que disponibiliza um ambiente digital para análise de expressões algébricas, elaboração de gráficos, entre muitas outras funções. O Maple também efetua cálculos aritméticos. A figura 14 exibe os resultados do cálculo dos quatros possíveis valores digitais para 0^0.

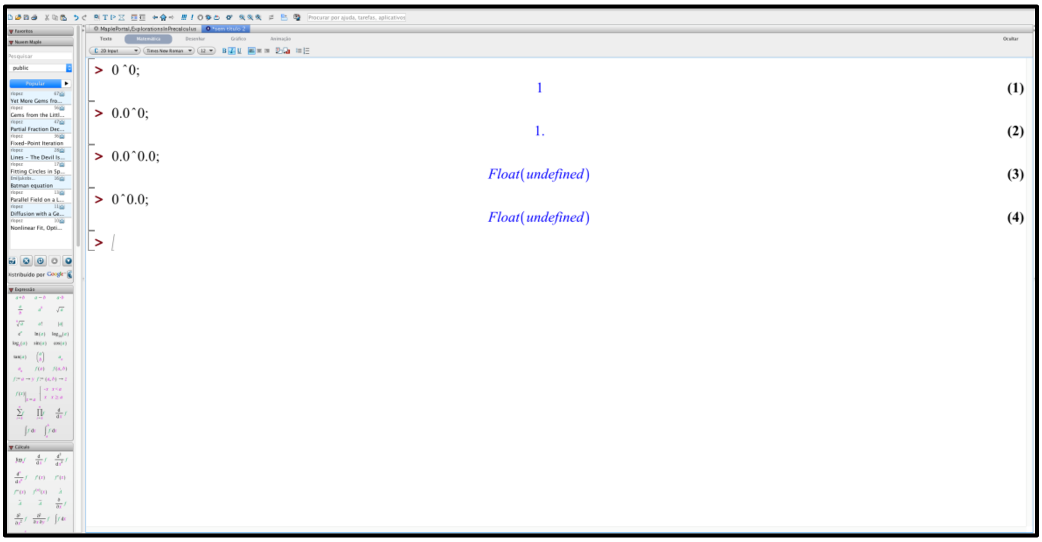


Figura 14: Tela do Maple

(Fonte: Foto do autor)

O resultado das operações indica que o *software* realizou distinção entre o zero inteiro e o em ponto flutuante, atribuindo como indefinido quando o expoente é em ponto flutuante (0.0) e valor unitário quando o expoente é o zero inteiro (0).

O WolframAlpha é outro sistema computacional desenvolvido pela empresa internacional Wolfram Research que disponibiliza um mecanismo *online* para pesquisa, semelhantes aos sites de busca, e realiza cálculo de expressões algébricas, soluciona sistemas algébricos, elabora gráficos, entre outras funções. O WolframAlpha pode apresentar o resultado do cálculo do valor de 0^0 em dois modos, inserindo o valor a ser calculado ou realizando a pergunta em inglês. A figura 15 exibe o resultado para a pergunta sobre o valor de 0^0 com as justificativas para a solução.

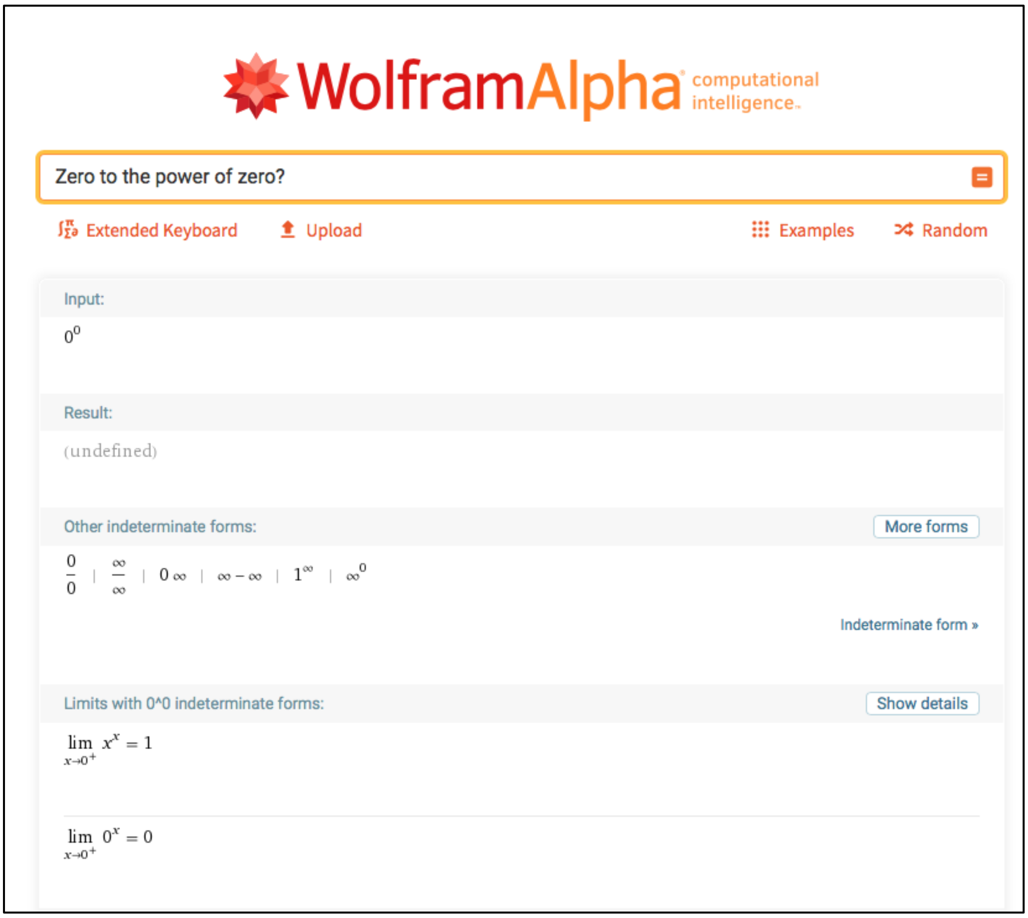


Figura 15: Tela Wolfram Alpha

(Fonte: <https://www.wolframalpha.com/>.)

Os cálculos para os valores 0.0^0, $0^{0.0}$ e $0.0^{0.0}$ apresentam o resultado indefinido sem apresentar justificativas para o resultado como ocorre no 0^0. As soluções demonstram que o *software* não realiza distinção entre o zero inteiro e o em ponto flutuante.

A calculadora gráfica HP 50g projetada pela empresa americana Hewlett-Packard, é utilizada em diversas áreas e permite a execução de diferentes tarefas, tais como cálculos de sistemas algébricos e elaboração de gráficos. A HP 50g também permite a realização de cálculos aritméticos e a figura 16 exibe os resultados dos quatros possíveis valores digitais para 0^0.

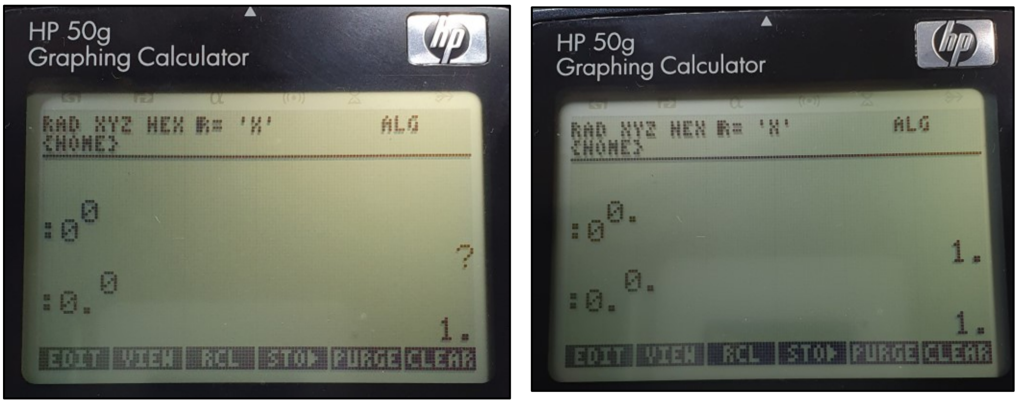


Figura 16: Visores da calculadora Gráfica HP 50g
(Fonte: Fotos do autor)

Conforme mostra a figura 10, o cálculo do valor de 0^0 apresenta como retorno da operação um sinal de interrogação (“ ?”), indicando um valor indetefinido, e os valores 0.0^0, $0^{0.0}$ e $0.0^{0.0}$ apresentam o resultado unitário. As operações indicam que o *software* da calculadora apresenta soluções contraditórias e preparadas em suas rotinas de cálculo para a situação específica do 0^0, exibindo valor unitário para quando a base ou expoente possuem o zero em ponto flutuante.

O MATLAB é um software voltado para a análise numérica e permite a solução de problemas, elaboração de gráficos, processamento de sinais, entre outras funções. É possível calcular os valores de expressões aritméticas e todos os resultados para todas as potências selecionadas neste estudo apresentam o valor um (figura 17).

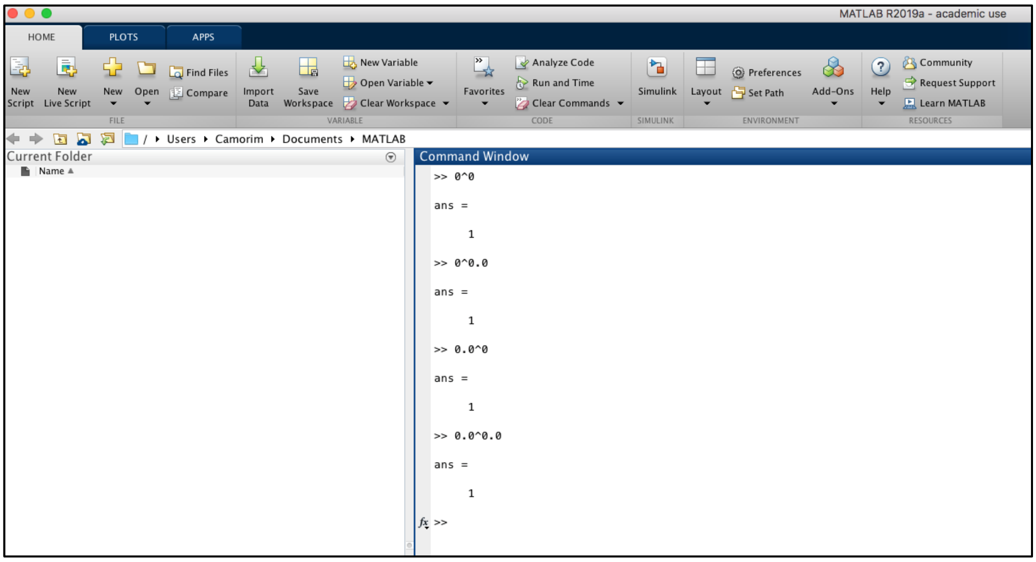


Figura 17: Tela do MATLAB
(Fonte: Foto do autor)

O Geogebra é um software de matemática dinâmica que aglutina conceitos de geometria e álgebra, possui distribuição gratuita e é amplamente difundido para uso em ambiente escolar.

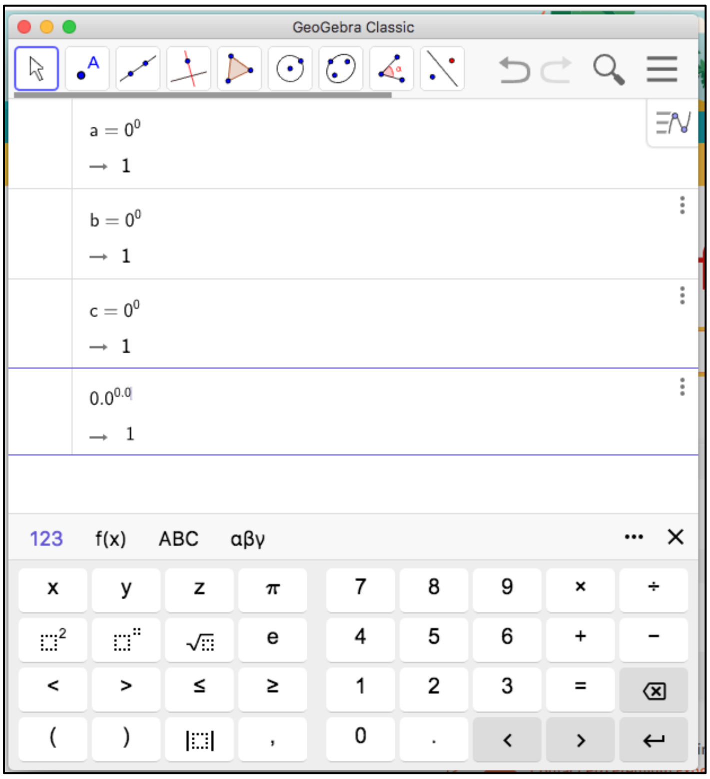


Figura 18: Tela do Geogebra
(Fonte: foto do autor)

Este software também permite a execução de cálculos aritméticos. A figura 18 exibe os resultados do cálculo dos valores 0^0, 0.0^0 e $0^{0.0}$ executados e valor $0.0^{0.0}$ inserido, com resultado exibido, porém não executado que exibirá apresentação semelhante aos três resultados anteriores após a execução do comando. As rotinas do Geogebra não fazem distinção entre possíveis valores digitais para 0^0, considerando que 0 e 0.0 são valores iguais.

O wxMaxima é um sistema de álgebra computacional que permite a manipulação de expressões simbólicas e numéricas. O wxMaxima realiza cálculos aritméticos e a análise dos quatros resultados (figura 19) para os valores de 0^0, 0.0^0, $0^{0.0}$ e $0.0^{0.0}$ apresentam o resultado indefinido. Os resultados demonstram que o *software* não realiza distinção entre o zero inteiro e o em ponto flutuante.

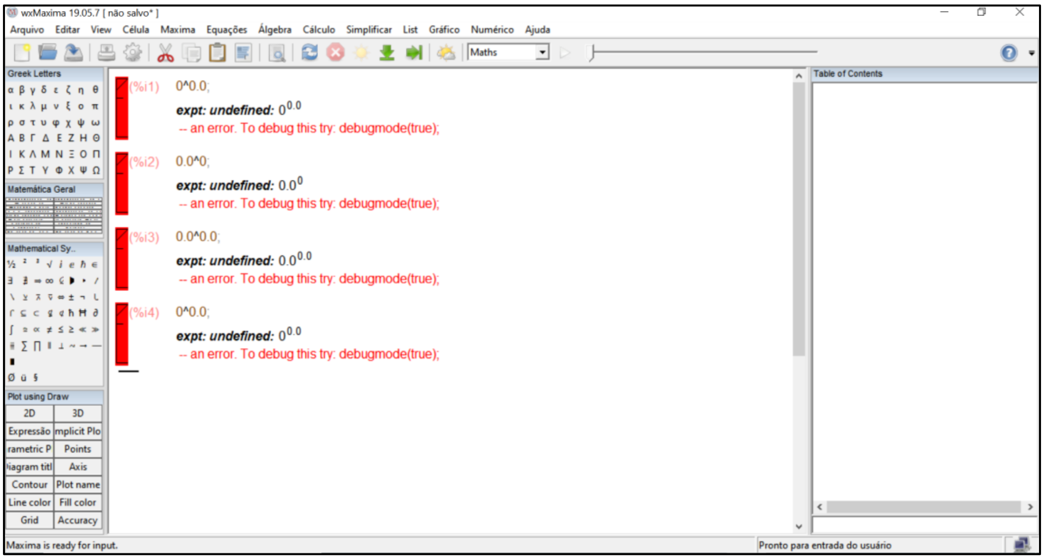
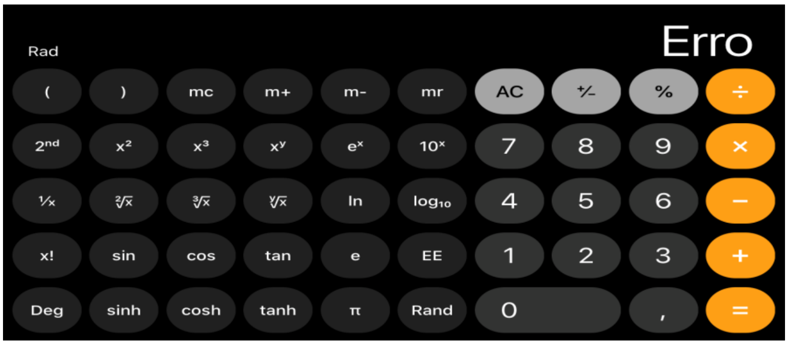


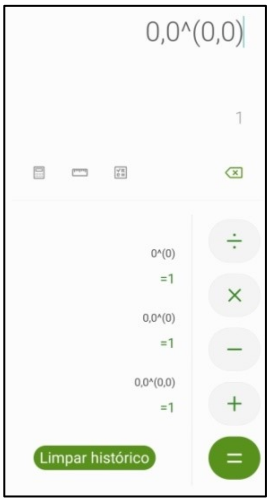
Figura 19: Tela do wxMaxima
(Fonte: Foto do autor)

É muito comum os celulares possuírem calculadoras digitais que permitem a execução de diversas operações aritméticas. A figura 20 exibe as telas do cálculo dos valores de 0^0, inteiros e em ponto flutuante, com soluções distintas. Enquanto os celulares Samsung, Xiaomi e Asus Zenfone exibem o resultado unitário para qualquer dos valores digitais, o celular iPhone apresenta a solução como indefinida e o celular da Motorola expõe uma solução dupla, indicando que o resultado pode ser um ou indefinido.

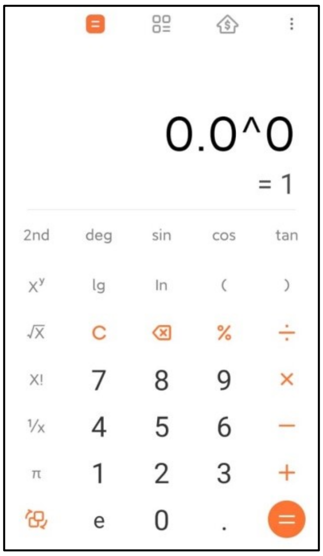


Calculadora do celular iPhone

Calculadora do celular Motorola



Calculadora do celular Samsumg

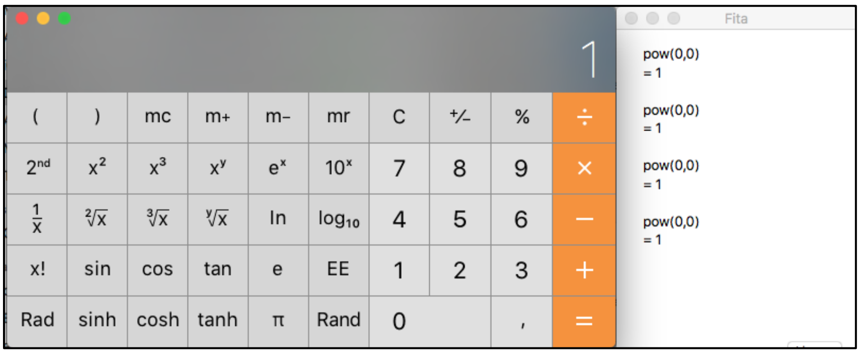


Calculadora do celular Xiaomi

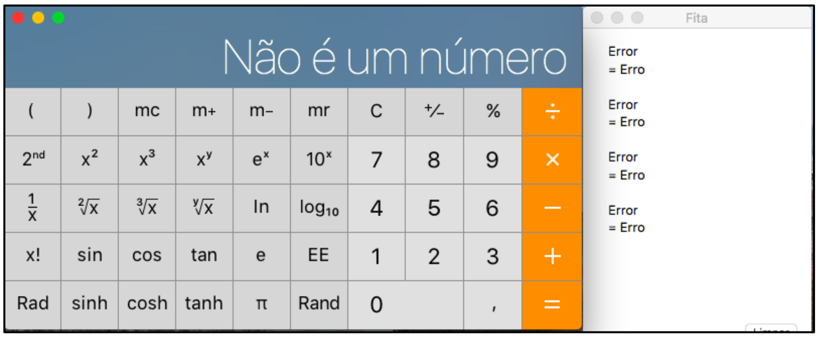
Calculadora do celular Asus Zenfone

Figura 20: Telas de celulares
(Fonte: Fotos do autor)

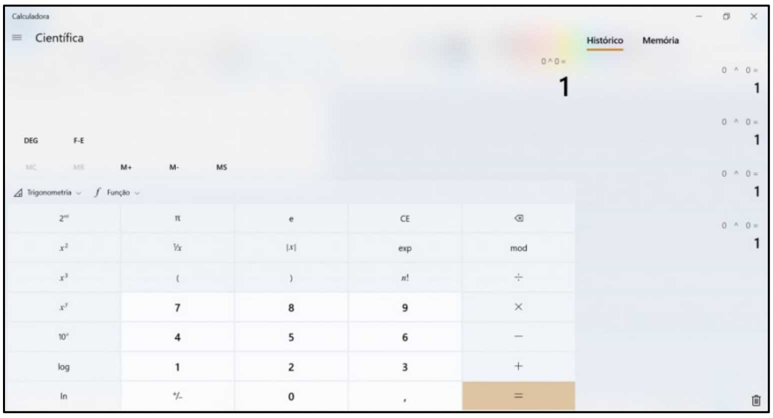
Os computadores pessoais também possuem frequentemente calculadoras instaladas em seus *softwares* originais que permitem a operação aritmética de potenciação. A figura 21 exibe as telas como os resultados do cálculo dos valores de 0^0, inteiros e em ponto flutuante, de dois computadores pessoais Mac (*Macintosh*), fabricados pela empresa Apple Inc e um computador pessoal Samsung com sistema operacional *microsoft windows*. Enquanto o computador de mesa *iMac* e Samsung (windows) exibem valores unitários, o *iMac Book Air* apresenta a solução como indefinida.



Calculadora do *iMac*



Calculadora do *iMac Book Air*



Calculadora do Samsung (windows)

Figura 21: Telas de computadores pessoais
(Fonte: Fotos do autor)

A disponibilidade ampla e numerosa de recursos digitais permite a qualquer interessado recorrer a distintas fontes e obter resultados diversos para o valor de 0º e sem uniformidade nas soluções, pois cada *software* adota a solução conforme seus particulares critérios.

Tabela 3 – Comparação dos resultados para os valores digitais

RECURSO DIGITAL	**POSSIBILIDADES DE VALORES**			
	$\mathbf{0^0}$	$\mathbf{0,0^0}$	$\mathbf{0^{0,0}}$	$\mathbf{0,0^{0,0}}$
Calculadora Google	1	1	1	1
Maple	1	1	Indefinido	Indefinido
WolfranAlpha	Indefinido	Indefinido	Indefinido	Indefinido
Calculadora HP 50g	Indefinido	1	1	1
MATLAB	1	1	1	1
Geogebra	1	1	1	1
wxMaxima	Indefinido	Indefinido	Indefinido	Indefinido
Celular iPhone	Indefinido	Indefinido	Indefinido	Indefinido
Celular Samsung	1	1	1	1
Celular Xiaomi	1	1	1	1
Celular Motorola	1 ou indefinido	1 ou indefinido	1 ou indefinido	1 ou indefinido
Celular Asus Zenfone	1	1	1	1
iMac	1	1	1	1
iMac Book Air	Indefinido	Indefinido	Indefinido	Indefinido
Samsung (windows)	1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo Autor

A tabela 3 exibe um resumo dos resultados para os quinze recursos digitais utilizados para comparação neste trabalho, permitindo uma análise ampla das possíveis soluções. A disparidade em respostas fortalece a noção de que não existe consenso sobre uma solução única para a expressão 0^0, fator que contribui para a perpetuação da dúvida e o dissenso comum.

5
Métodos de abordagens válidos

Existem múltiplas alternativas para a busca do valor de 0^0 e é nesta variedade em que reside a controvérsia aqui discutida já que diversos raciocínios corretos podem conduzir a soluções contraditórias. Nesta seção iremos apresentar sete métodos de abordagens válidos. Os três primeiros apresentam desenvolvimentos matemáticos que levam a atribuir o valor indeterminado para 0^0, os três seguintes, também com argumentos matemáticos válidos, concluem que 0^0 é a unidade e o último apresenta dois exemplos interessantes e contextualizados que permitem inferir que o valor de 0^0 é igual a um. Depois de cada uma das abordagens, algumas considerações relevantes são realizadas.

5.1 Abordagem numérica

Esta abordagem busca entender o significado de 0^0 trabalhando os expoentes e bases com números fracionários e decimais, utilizando as regras da operação de potenciação. Inspirado em Kaplan (2001), página 117, vamos empregar neste item uma abordagem numérica, o que permite a apresentação do assunto em diversos níveis da educação matemática.

O objetivo é a aproximação ao valor de 0^0 através da redução do valor dos expoentes fixando a base em zero. Sabendo que $0^3 = 0$, pois $0^3 = 0 \times 0 \times 0$, e $0^2 = 0$, e $0^1 = 0$. Poderíamos descobrir que $0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$ e da mesma forma $0^{\frac{1}{3}} = 0$, bem como, $0^{\frac{1}{100}} = 0$ e assim sucessivamente. Esta aproximação em direção ao zero indicaria que o valor de $0^0 = 0$ (primeira coluna, tabela 4).

O que pode ser mais convincente é a aproximação com a redução da base, por exemplo, sabe-se que $3^0 = 1$, que pode ser comprovado pelas propriedades de potenciação, assim como $2^0 = 1$ e $1^0 = 1$. Prosseguindo com as aproximações como, por exemplo, em $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$, e $\left(\frac{1}{100}\right)^0 = 1$, observa-se que cada uma dessas potências também vale 1. A aproximação para base zero dessa forma, sempre mantendo o expoente igual a zero, mas diminuindo gradativamente a base, daria que o valor de $0^0 = 1$ (segunda coluna, tabela 4).

Igualmente, de modo concludente, a aproximação pode ser feita com as reduções simultâneas da base e do expoente, por exemplo, tendo como início o valor de $1^1 = 1$ e prosseguindo com o fracionamento da base e expoente, efetuando as operações de potenciação com auxílio de uma calculadora, podemos obter as potências, por exemplo: $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = 0{,}72477\ldots$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} = 0{,}79432\ldots$, $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{100}} = 0{,}95499\ldots$, $\left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{1000}} = 0{,}99321\ldots$, $\left(\frac{1}{100000000}\right)^{\frac{1}{100000000}} = 0{,}99999\ldots$, $\left(\frac{1}{10000000000000000}\right)^{\frac{1}{10000000000000000}} = 1$ e observamos que as reduções simultâneas das bases e expoentes em aproximação ao zero resultaria o valor de $0^0 = 1$ (terceira coluna, tabela 4).

Tabela 4: Análise de convergência, expoente x e base y

$x \to 0$ $y = 0$	$x = 0$ $y \to 0$	$x \to 0$ $y \to 0$
$0^3 = 0$	$3^0 = 1$	$(1/5)^{1/5} = 0{,}72477\ldots$
$0^2 = 0$	$2^0 = 1$	$(1/10)^{1/10} = 0{,}79432\ldots$
$0^1 = 0$	$1^0 = 1$	$(1/100)^{1/100} = 0{,}95499\ldots$
$0^{1/2} = 0$	$(1/2)^0 = 1$	$(1/1000)^{1/1000} = 0{,}99321\ldots$
$0^{1/3} = 0$	$(1/3)^0 = 1$	$(1/100000000)^{1/100000000} = 0{,}99999\ldots$
$0^{1/100} = 0$	$(1/100)^0 = 1$	$(1/10000000000000000)^{1/10000000000000000} = 1$
$\mathbf{0^0 = ?\,(0)}$	$\mathbf{0^0 = ?\,(1)}$	$\mathbf{0^0 = ?\,(1)}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Os valores expressos na tabela 4 permitem a visualização da convergência para cada situação selecionada. A última linha da tabela apresenta dois possíveis candidatos a nossa solução, 0 ou 1. Neste cenário, chegamos a um impasse, será 0 ou 1, ou ambos, ou nenhum do dois. A condição do valor de 0^0 não possuir uma solução prontamente identificável conduz a considerá-lo como uma expressão indeterminada por abordagem numérica.

Este tipo de abordagem possui a limitação de considerar somente valores positivos e pode ser reforçada com a aplicação de regras usualmente apresentadas no ensino fundamental, $0^x = 0$ para qualquer $x \neq 0$ e $y^0 = 1$ para todo $y \neq 0$, neste caso a apresentação deste assunto pode ser resumida somente as duas primeiras colunas.

5.2 Abordagem por limite

O Professor Elon Lages aplicou esta abordagem, utilizando o conceito de limites em funções, no primeiro exemplar da RPM, páginas 7 e 8.

Podemos escrever que o $\lim_{x\to a} f(x) = A$ para expressar que o número A é o limite para o qual se aproxima a função $f(x)$ quando x se aproxima de um número qualquer a. Então, definindo duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ podemos encontrar o número real positivo c tal que $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = c$.

Vamos apresentar um exemplo aplicando esta abordagem:

Considerando as funções $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{\log(c)}{\log(x)}$, teremos que $f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\log(c)}{\log(x)}}$ para x positivo pertencente ao conjunto dos números reais. Temos então que $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} x^{\frac{\log(c)}{\log(x)}} = \lim_{x\to a} e^{\ln\left(x^{\frac{\log(c)}{\log(x)}}\right)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\log(c)}{\log(x)}\times\ln(x)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\log(c)}{\log(x)}\times\frac{\log(x)}{\log(e)}} = \lim_{x\to a} e^{\ln(c)} = c$, sendo c um número arbitrário positivo no conjunto dos números reais.

Portando, nesta avaliação por limite, o valor de 0^0 pode convergir para um valor c selecionado previamente, ressaltando as limitações de domínio impostas aos valores de c e x. Neste tipo de abordagem temos que a expressão 0^0 é indeterminada, pois c pode se qualquer número real positivo.

5.3 Abordagem gráfica

Vamos utilizar a abordagem gráfica inspirado em Kaplan (2001), página 159, para permitir a análise do assunto sob a perspectiva visual e que pode ser explorado em diversos níveis da educação.

O gráfico da figura 21 permite visualizar o comportamento da função $f(x) = x^x$, no plano real. Conforme nos aproximamos no eixo x pela direita em direção ao zero, a curva é contínua e se aproxima de um. Porém quando se aproxima pela esquerda, ocorrem três situações distintas, os valores podem ser negativos, positivos ou mesmo expressos em números imaginários que nem são observados no plano da figura 22.

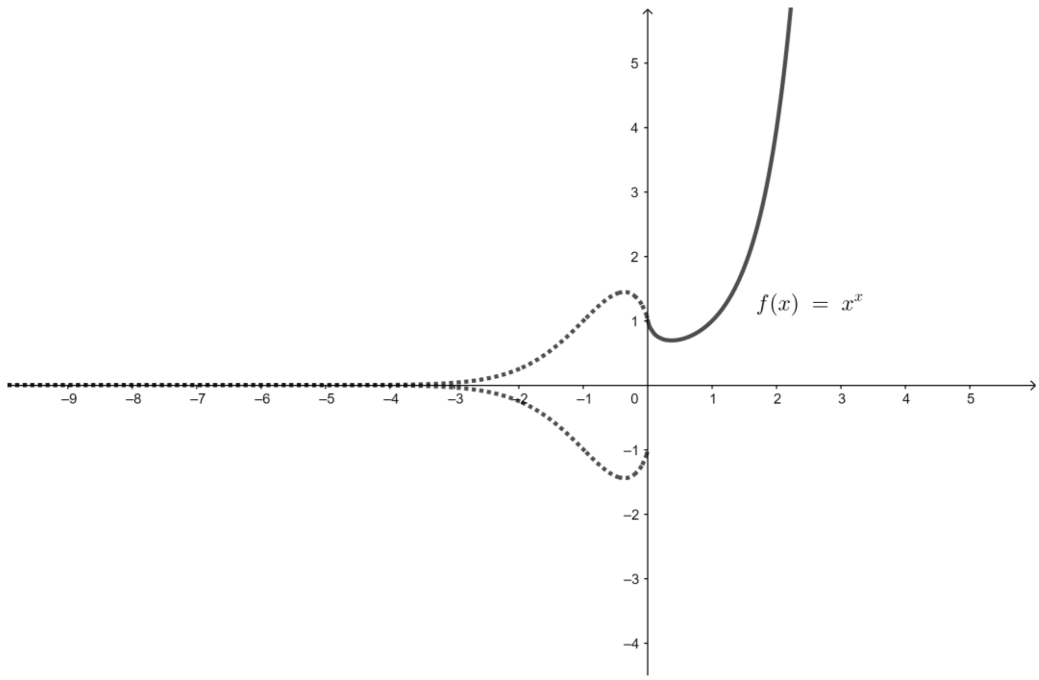


Figura 22: Gráfico de $f(x) = x^x$
(Fonte: Gráfico elaborado pelo autor no *software* Geogebra)

Existe uma simetria entre os ramos do gráfico para quando os valores de x são inferiores a zero, porém não existe a convergência para um único ponto quando o valor de x se aproxima da fronteira do valor zero. Não podemos concluir qual o valor de 0^0 observando somente o gráfico da função $f(x) = x^x$, pois na vizinhança do zero, o gráfico possui ambiguidade, logo 0^0 é uma expressão indefinida graficamente.

5.4 Abordagem por Binômio de Newton

Esta abordagem foi proposta pelo Professor Euclides Rosa no sétimo exemplar da RPM, página 17.

O número binomial $\binom{n}{k}$ representa, em análise combinatória, o número de subconjuntos com k elementos num conjunto com n elementos. Logo $\binom{n}{0} = 1$, pois em qualquer conjunto existe como subconjunto o conjunto vazio. Particularmente, observa-se que o conjunto vazio é subconjunto do próprio conjunto vazio e consequentemente $\binom{0}{0} = 1$.

Observando a expressão e os termos do binômio de Newton, temos:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$

Portanto, para $a = -b \neq 0$ e $n = 0$, observa-se:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(a-a)^0 = \binom{0}{0}(a)^0(-a)^0 = 1$$

Logo, na abordagem pelo binômio de Newton, o valor de $0^0 = 1$.

Também podemos efetuar uma análise em casos particulares do binômio de Newton, por exemplo, para $n = 2$, temos que $(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$, mantendo os expoentes nulos no início e fim do desenvolvimento. Agora considerando $b = 0 \ e \ a \neq 0$, teremos $b^1 = b^2 = 0$. Então: $(a+0)^2 = a^2 0^0 + 2a^1 \times 0 + a^0 \times 0 = a^2 0^0$ e mais uma vez encontramos que $0^0 = 1$.

5.5 Abordagem por função

Esta abordagem por função é inspirada na proposta pelo Professor Euclides Rosa no sétimo exemplar da RPM, página 17.

Seja uma função $f: X \to Y$, definida no conjunto X e tomando elementos do conjunto Y, e um subconjunto F do produto cartesiano $X \times Y$ com as seguintes características:

(i) Para todo $x \in X$ e $y \in Y$, existe um único par $(x, y) \in F$ cujo primeiro elemento é x e o segundo é y.

(ii) Se os pares ordenados (x', y') e $(x'', y'') \in F$ representam o mesmo par ordenado então $x' = x''$ e $y' = y''$.

Temos ainda como resultado desta definição de função que, quando $X = \emptyset$ (conjunto vazio), então existe uma única função $f: X \to Y$, a saber, o conjunto vazio $F \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Então, sejam $x_1, x_2, \dots, x_m$ os elementos de X e $y_1, y_2, \dots, y_n$ os elementos de Y. Temos que toda a função f é um subconjunto de F (produto cartesiano $X \times Y$), sendo que F pode ser qualquer par ordenado com n elementos de Y, o que representam n possibilidades para F e o mesmo ocorre para os demais elementos de X. Logo, pelo princípio multiplicativo, a potência n^m representa o número de funções possíveis definidas entre um conjunto com m elementos em um conjunto com n elementos conforme representação gráfica da figura 23.

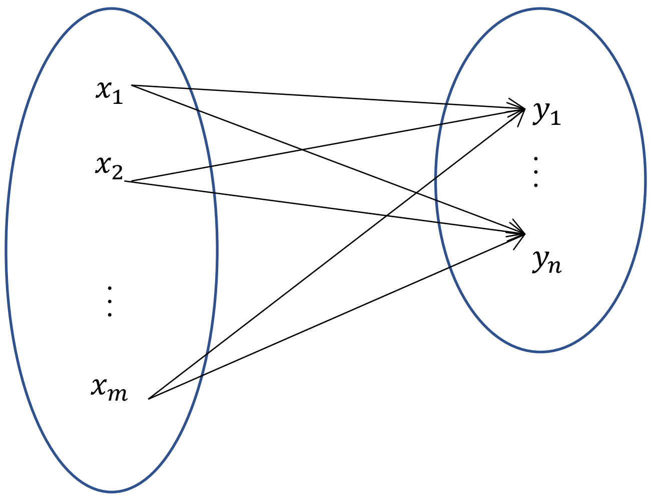


Figura 23: Representação gráfica de F (produto cartesiano $X \times Y$)
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Agora, considerando um conjunto X com m elementos num conjunto Y com n elementos e sabendo que a potência n^m é o número de funções definidas num conjunto X e tomando elementos num conjunto Y. Para $m \neq 0$, não existe como definir uma função do conjunto X com m elementos e tomando valores no conjunto Y vazio $(n = 0)$, temos então que $0^m = 0$ para $m \neq 0$. Em contrapartida, mesmo que seja o conjunto Y $(n = 0)$, existe uma única função definida no conjunto X vazio $(m = 0)$ e tomando valores num conjunto com conjunto n elementos. Temos então que $n^0 = 1$ para n maior ou igual a zero. Logo por esta abordagem temos que $0^0 = 1$.

5.6 Abordagem em polinômios

Esta abordagem é inspirada em Kaplan (2001), página 160, e se refere à análise de detalhes que envolvem o valor do zero elevado a zero e às funções polinomiais.

Um polinômio ou função polinomial pode ser representado da seguinte forma (Hefez *et al*, 2018, p. 79):

$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$,

onde $\mathrm{j}, \mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_j \in \mathbb{R}$, para $0 \leq j \leq n$.

É usual não escrever o monômio a_jx^j quando $a_j = 0$. O grau do polinômio é a maior potência da variável x quando o coeficiente a_n é não nulo. Por teorema, temos que qualquer função polinomial é continua em $\mathbb{R}$ (Stewart, 2013, p. 112), ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $p(x) \in \mathbb{R}$.

Vamos selecionar três exemplos de polinômios como usualmente são exibidos:

a) $p_1(x) = 5x^3 + 2x$

b) $p_2(x) = 97x^4 + 37x^3 + 17x^2 + 7$

c) $p_3(x) = x^5 + 16x^2 + 4x + 6$

Calculando os valores destes polinômios para $x = 0$, obtemos:

a) $p_1(x) = 5 \times 0^3 + 2 \times 0 = 0$

b) $p_2(x) = 97 \times 0^4 + 37 \times 0^3 + 17 \times 0^2 + 7 = 7$

c) $p_3(x) = 0^5 + 16 \times 0^2 + 4 \times 0 + 6 = 6$

Porém podemos efetuar os cálculos após rescrever nossos polinômios conforme a representação polinomial apresentada no início deste item, então:

a) $p_1(x) = 0 \times x^0 + 2 \times x^1 + 0 \times x^2 + 5 \times x^3$

b) $p_2(x) = 7 \times x^0 + 0 \times x^1 + 17 \times x^2 + 37 \times x^3 + 97 \times x^4$

c) $p_3(x) = 6 \times x^0 + 4 \times x^1 + 16 \times x^2 + 0 \times x^3 + 0 \times x^4 + 1 \times x^5$

Recalculando os valores destes polinômios para $x = 0$, temos:

a) $p_1(x) = 0 \times 0^0 + 2 \times 0^1 + 0 \times 0^2 + 5 \times 0^3$

b) $p_2(x) = 7 \times 0^0 + 0 \times 0^1 + 17 \times 0^2 + 37 \times 0^3 + 97 \times 0^4$

c) $p_3(x) = 6 \times 0^0 + 4 \times 0^1 + 16 \times 0^2 + 0 \times 0^3 + 0 \times 0^4 + 1 \times 0^5$

Podemos observar que o primeiro termo de cada polinômio possui o valor 0^0 para cálculo e que necessariamente deve ser unitário, a fim de preservar a continuidade das funções polinomiais consideradas.

A figura 24 ilustra uma questão envolvendo função polinomial e a expressão 0^0. Podemos observar que o cálculo de um possível resultado para $f(x)$ demanda o estabelecimento do valor para o 0^0. Qual será a solução da questão?

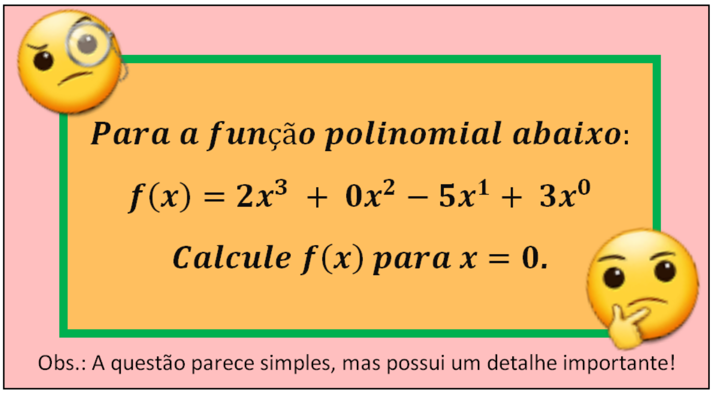


Figura 24: Postagem *Web* (fonte: internet)

Vamos efetuar os cálculos em dois *softwares* diferentes e comparar os resultados. As figuras 25 e 26 exibem os resultados nos *softwares* Geogebra e WolframAlpha, respectivamente.

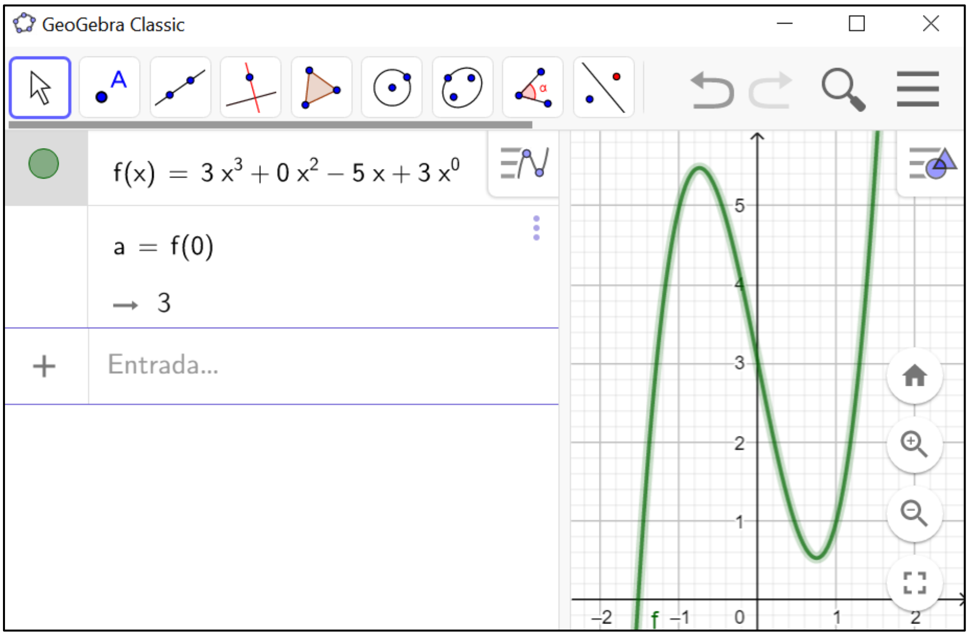


Figura 25: Tela do Geogebra para $f(0)$
(Fonte: Elaborado pelo autor no *software* Geogebra)

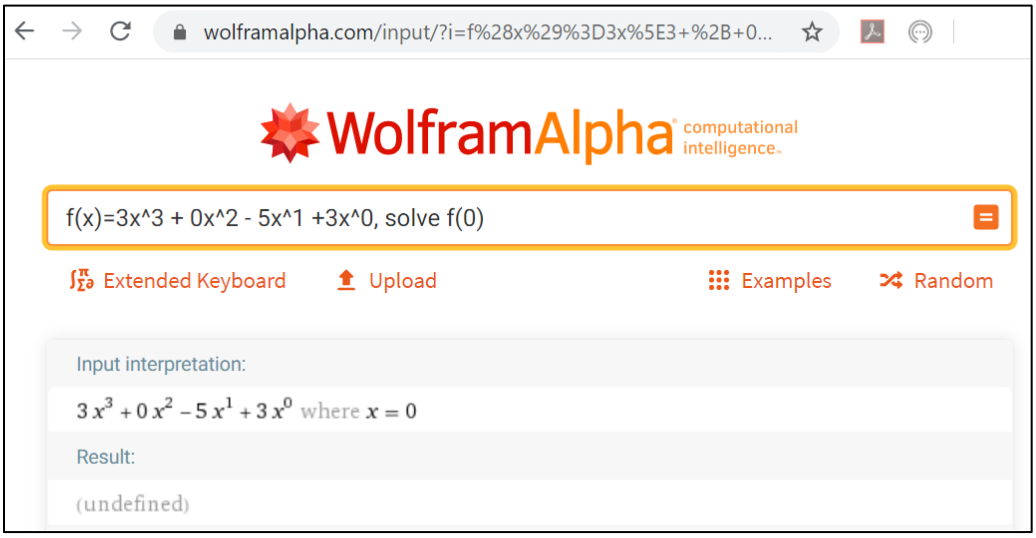


Figura 26: Tela do WolframAlpha para $f(0)$
(Fonte: Elaborado pelo autor no *software* WolframAlpha)

Podemos observar que os resultados são diferentes, o Geogebra exibe que $f(0) = 3$ e o WolframAlpha informa que a função é indefinida para $x = 0$. Podemos constatar que a utilização de softwares para análise do valor da função não permite uma conclusão definitiva. Qual solução deve ser selecionada? Devemos observar que a questão informa que se trata de uma função polinomial e, por definição, sabemos que a função polinomial é continua, logo o autor da questão considerou que $0^0 = 1$, pois somente deste modo é possível preservar a continuidade da função e por seguinte $f(0) = 3$.

Cabe ressaltar que o fato central desta abordagem esta na definição do termo independente ou de grau zero dos polinômios. Existem autores que define o termo independente como o monômio a_0x^0, onde a_0 é um número qualquer (Hefez *et al*, 2018, p. 79), porém há outros autores que definem o termo independente somente como um número qualquer a_0 (Lima *et al*, 2006, pp. 160-163).

5.7 Abordagem por exemplos para inferir que $0^0 = 1$

Foram elaborados três exemplos de questões que permitem inferir ou atribuir valor unitário à expressão 0^0.

5.7.1 As palavras de um alfabeto

As diferentes letras de um alfabeto se combinam para formar as suas possíveis palavras. Cada letra pode ocupar o princípio, o meio ou o término das palavras. Vamos imaginar um alfabeto com α letras e queremos descobrir quantas palavras podemos escrever com β letras desse alfabeto. Então a primeira letra teria α possibilidades, a segunda também teria a mesma α possibilidades e assim por diante até a β-ésima posição. Logo, pelo princípio multiplicativo, a potência α^{β} representa o número de palavras procuradas.

Exemplificando, vamos imaginar que um alfabeto que possui um conjunto de três letras, por exemplo: $\{$a, b, c$\}$.

Quantas palavras com três letras podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras com três letras será: $\{$aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc$\}$, um total de 27 palavras ou seja, 3^3.

Quantas palavras com duas letras podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras com duas letras será: $\{$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$\}$, um total de 9 palavras, ou seja, 3^2.

Quantas palavras com uma letra podemos escrever com este alfabeto?

O nosso conjunto de palavras com uma letra será: $\{$a, b, c$\}$, um total de 3 palavras, ou seja, 3^1.

E finalmente, quantas palavras sem nenhuma letra podemos escrever com este alfabeto?

Utilizando nossa expressão de cálculo (a potência α^{β}) teríamos 3^0, ou seja, nosso conjunto de palavras sem nenhuma letra será um espaço vazio, um total de 1 palavra.

Agora caso nosso alfabeto não possuísse letras e tivéssemos que escrever palavras com uma letra ou mais, não seria possível, ou seja, $0^{\,a} = 0$, sendo $a > 0$ o número de letras das palavras. E finalmente, com um alfabeto vazio é possível escrever uma única palavra, o espaço vazio ou o próprio alfabeto seria a palavra, ou seja, $0^{\,0} = 1$.

5.7.2 Os caminhos em um labirinto

A figura 27 representa um labirinto que possui três paredes com duas portas cada uma, que se deseja percorrer da esquerda para direita em um único sentido conforme indicado pelas setas.

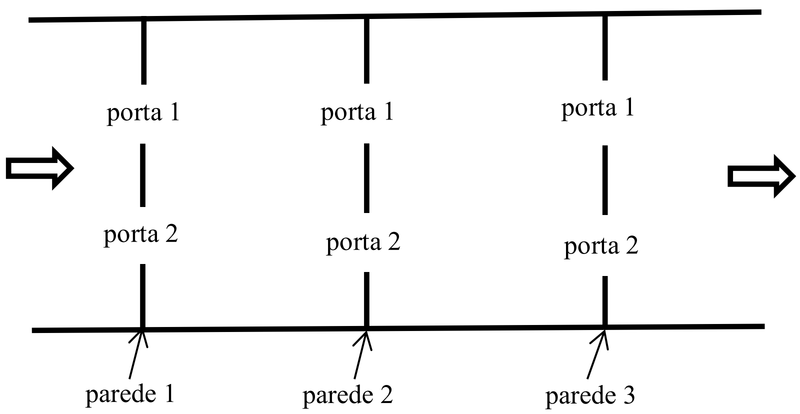


Figura 27: Labirinto com três paredes com duas portas
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Representando as possibilidades pelos números de cada porta teremos a seguinte coleção de caminhos: {111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222}, um total de 8 possibilidades de caminhos, ou seja, 2^3 caminhos.

A figura 28 representa um labirinto que possua m paredes com n portas em cada parede, que se deseja calcular as possibilidades de caminho que nós teríamos para percorrer da esquerda para a direita.

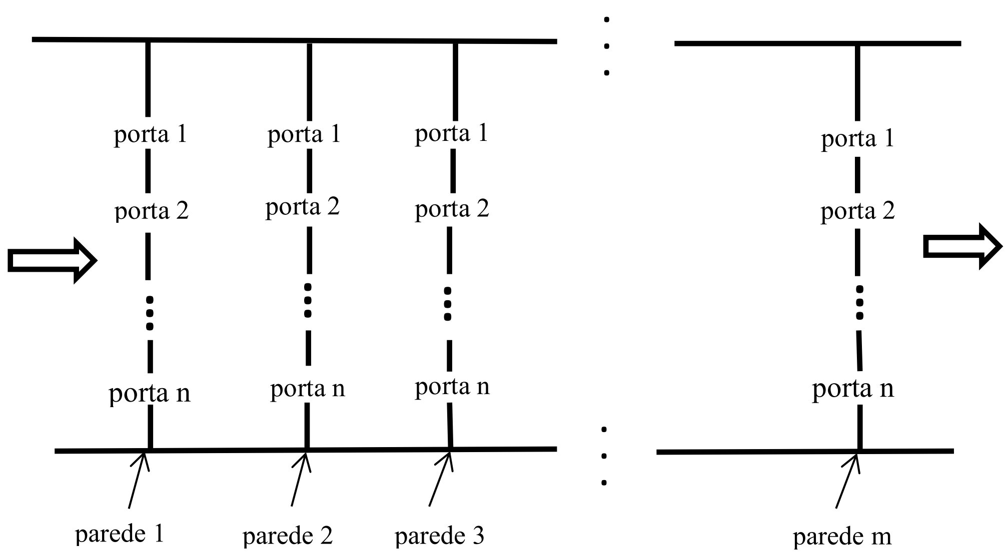


Figura 28: Labirinto com m paredes com n portas
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Sejam n as opções de portas em cada uma das m paredes e aplicando o princípio multiplicativo, a quantidade total de caminhos seriam: $n \times n \ldots \times n$ (m vezes) ou seja, n^m. Logo a potência n^m representa o número de caminhos possíveis que podemos percorrer no labirinto.

Vamos testar a nossa expressão (a potência n^m). A figura 29 representa, mais uma vez, o nosso labirinto como uma porta em cada uma das m paredes com $m > 0$, deste modo, nós teríamos um único caminho, ou seja, $1^m = 1$ e nossa expressão continua válida.

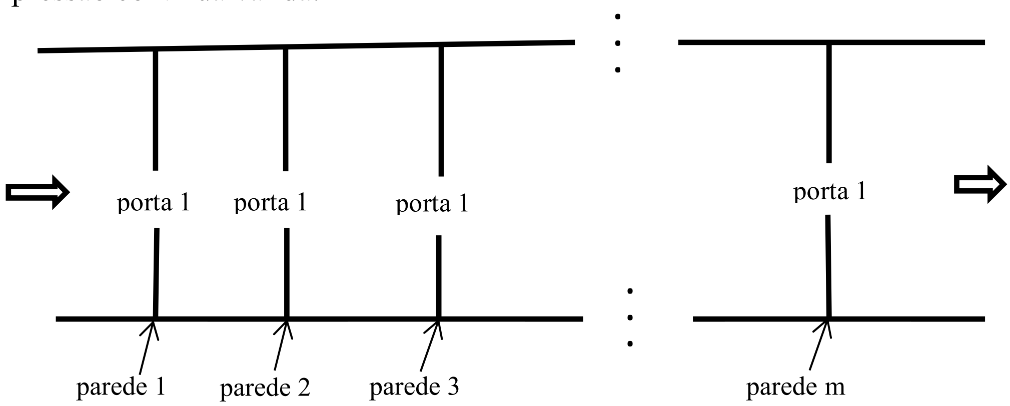


Figura 29: Labirinto com m paredes com uma porta
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Vamos testar, mais uma vez, a nossa expressão (a potência n^m). A próxima figura representa, mais uma vez, o nosso labirinto e sem porta em todas as m paredes com $m > 0$, deste modo, nós não teríamos caminho, ou seja, $0^m = 0$ e nossa expressão contínua válida.

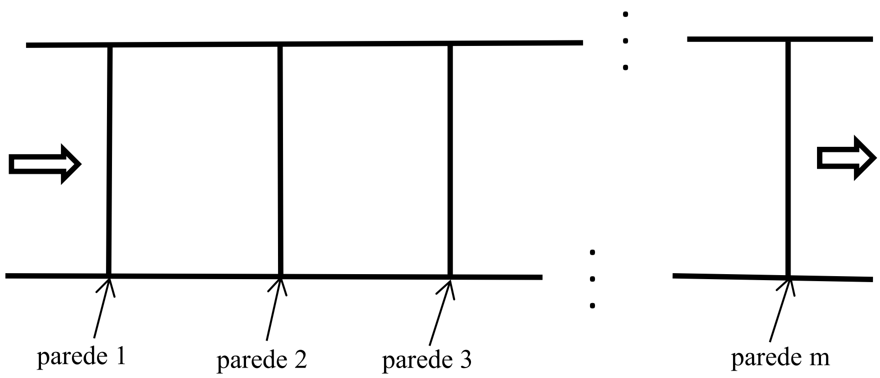


Figura 30: Labirinto com m paredes e sem porta
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Por fim, caso nosso labirinto não tivesse porta e nem parede, teríamos um único caminho, o indicado pelas setas na figura 31 e aplicando a nossa expressão (a potência n^m), teríamos $0^0 = 1$.

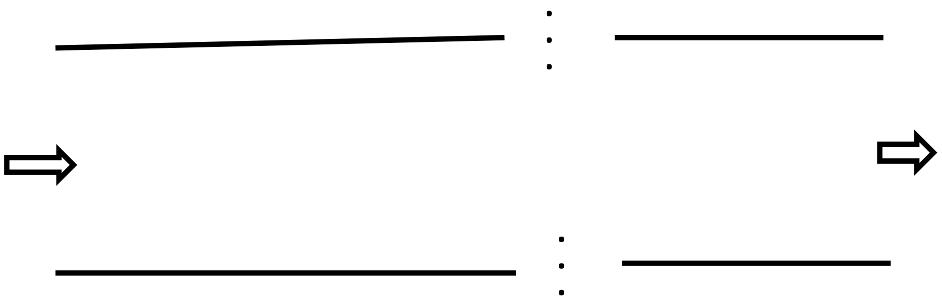


Figura 31: Labirinto com sem paredes e portas
(Fonte: Elaborado pelo autor)

5.7.2 A queda de uma bola

A figura 32 representa a queda da bola azul que avança aos pisos inferiores com ajuda de tubos que se dividem sucessivamente em ramos. O objetivo é calcular a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul em cada piso p ($p = 0, 1, 2, \ldots$). Observe que quando a rede de tubo é uma árvore binária, cada ramo se divide em exatamente dois ramos. Podemos expressar a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul com a expressão 2^{piso} (mesmo acrescentando outros pisos após o quarto piso).

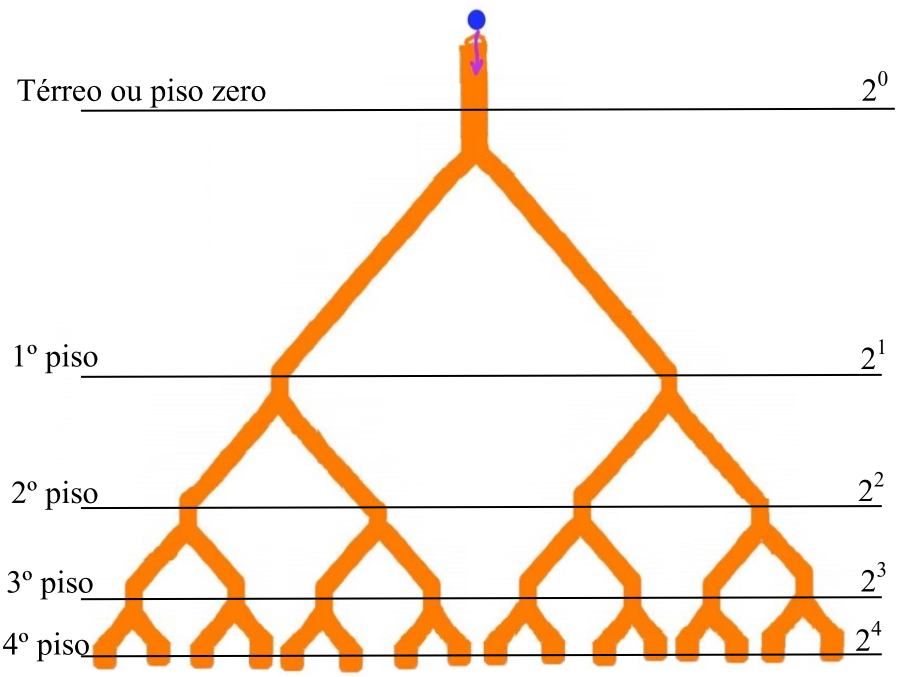


Figura 32: Árvore binária
(Fonte: Elaborado pelo autor)

A figura 33 representa a queda da bola azul que avança aos pisos inferiores com ajuda de tubos que se dividem sucessivamente em ramos. O objetivo é calcular a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul em cada piso p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$. Observe que quando a rede de tubo é uma árvore ternária, cada ramo se divide em exatamente três ramos. Podemos expressar a quantidade de posições possíveis de serem alcançadas pela bola azul com a expressão 3^{piso} (mesmo acrescentando outros pisos após o segundo piso).

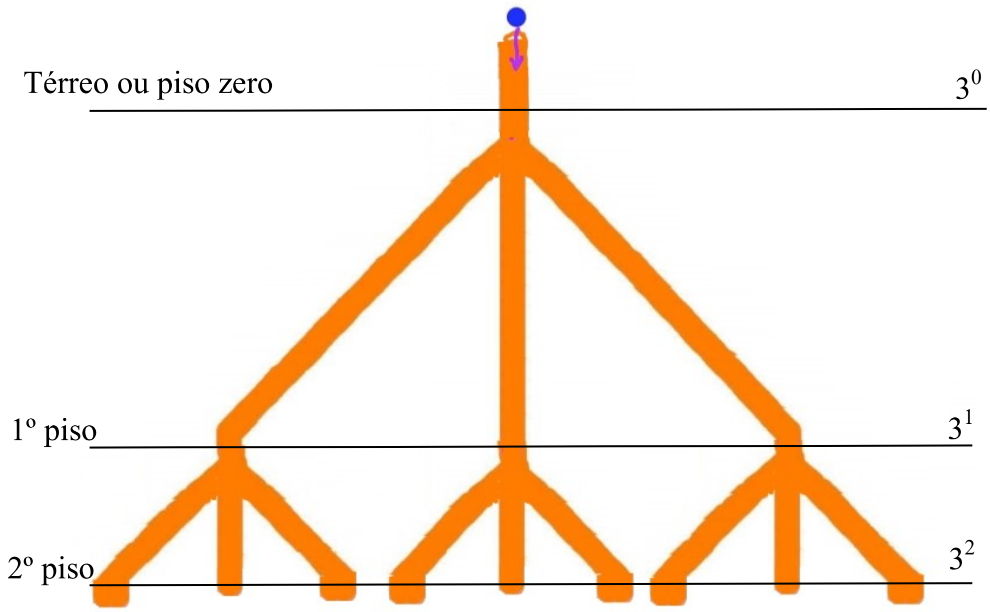


Figura 33: Árvore ternária
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Podemos inferir, pelos exemplos anteriores, que o número (n) de posições alcançadas pela bola pode ser representado pela expressão $n = r^{piso}$, onde r é o número de ramos.

Vamos testar a nossa expressão. A figura 34 representa, mais uma vez, a queda da bola azul que avança aos andares inferiores com ajuda de tubos e, desta vez, a árvore é unária, possui somente um ramo. Podemos observar que a quantidade de posições possíveis alcançadas pela bola azul é representada pela expressão 1^{piso}, ou seja, a bola só atinge uma posição em cada piso e nossa expressão continua válida.

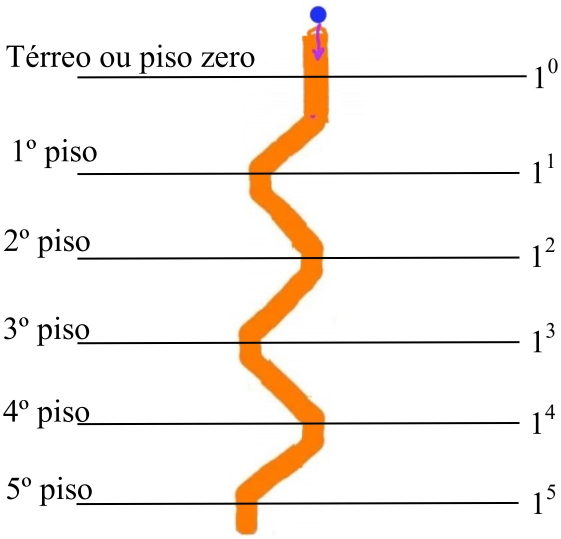


Figura 34: Árvore unária
(Fonte: Elaborado pelo autor)

A figura 35 representa, mais uma vez, a queda da bola azul que tenta avançar aos andares inferiores sem os tubos e ramos (árvore vazia). Observe que a bola não conseguirá atingir nenhuma posição nos demais pisos além do térreo. Portanto, para o valor do $piso \geq 1$, a bola azul não atingiria estes pisos, ou seja, $0^{piso} = 0$ e nossa expressão continua válida. Observe também que a bola atingirá somente o térreo ou piso zero, ou seja, uma posição no piso zero e aplicando a nossa expressão, teríamos que $0^0 = 1$.

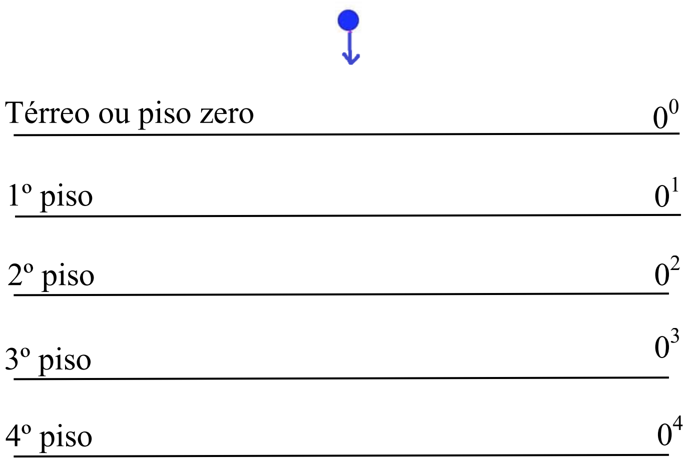


Figura 35: Árvore vazia
(Fonte: Elaborado pelo autor)

Os três exemplos apresentados neste item podem ser abordados e discutidos na educação básica. Também permitem a elaboração de atividades lúdicas tais como construções de labirintos diversos em sala de aula e o estudo das possibilidades de caminhos existentes nos mesmos ou propostas de atividades interdisciplinar tal com a contagem das palavras do nosso alfabeto ou de um alfabeto fictício criado para mensagens secretas, entre outras.

6
Análise pontual de livros didáticos

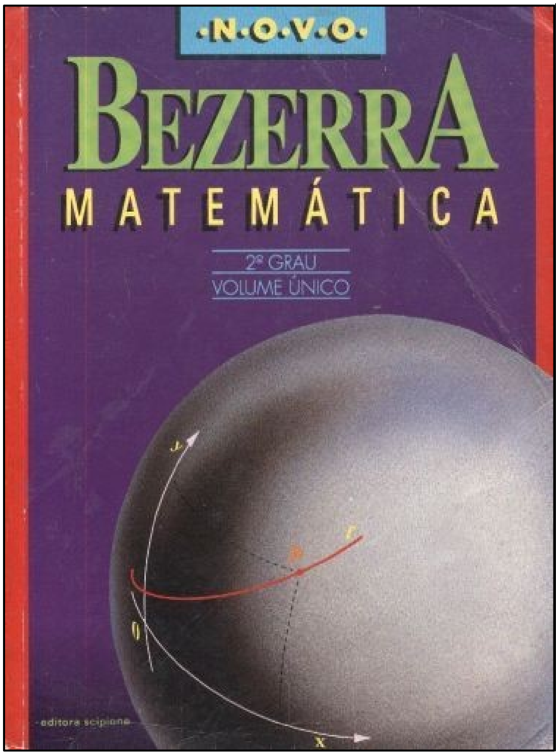
A proposta deste item é fazer uma análise pontual do tratamento da expressão 0^0 em alguns livros didáticos brasileiros. Vamos definir que existem dois modos básicos de apresentação deste assunto, o direto e o indireto. O direto ocorre quando a expressão 0^0 é apresentada (ou omitida) juntamente com as regras de potenciação. O indireto ocorre quando a expressão 0^0 pode aparecer na solução de problemas que exige este cálculo, tais como nas funções polinomiais ou séries numéricas, nesta situação o texto deve possuir coerência com a solução adotada pelo autor. Convém ressaltar que admitimos a existência de duas respostas plausíveis para a expressão 0^0, o valor um ou indefinido, e este fato norteará as observações deste item.

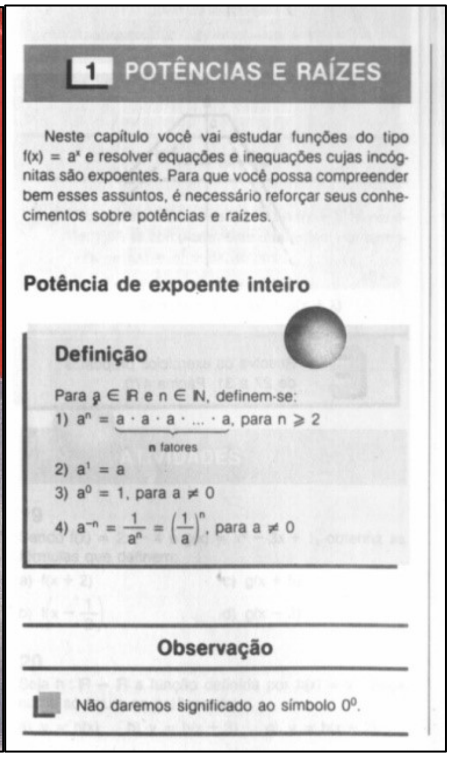
Ao final apresentaremos uma análise de livros pertencentes ao último Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). O PNLD importante programa do governo federal brasileiro que avalia de forma sistemática as obras didáticas destinadas à prática educativa nas escolas públicas ou conveniadas com o Poder Público da educação básica dos diversos segmentos. É executado de forma periódica e alternada, e os livros são disponibilizados para os quatro segmentos: educação infantil, anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental e ensino médio. Os três últimos PNLD para o ensino médio foram em 2012, 2015 e 2018, já para os anos finais do ensino fundamental foram em 2014, 2017 e 2020; estes segmentos são os concernentes ao estudo deste item.

6.1 Modo direto de apresentação

O objetivo deste item é realizar uma exposição atemporal de uma variedade de exemplos de modos diretos encontrados nos livros didáticos brasileiros.

A figura 36 apresenta uma definição para a potenciação de expoente inteiro, exclui o caso de base igual a zero e informa que não se dará significado matemático ao símbolo 0^0. O texto indica que Bezerra (1999, p. 76) realizou a opção de não atribuir significado a expressão.





1 POTÊNCIAS E RAÍZES

Neste capítulo você vai estudar funções do tipo $f(x) = a^x$ e resolver equações e inequações cujas incógnitas são expoentes. Para que você possa compreender bem esses assuntos, é necessário reforçar seus conhecimentos sobre potências e raízes.

Potência de expoente inteiro

Definição

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definem-se:

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$, para $n \geq 2$

2) $a^1 = a$

3) $a^0 = 1$, para $a \neq 0$

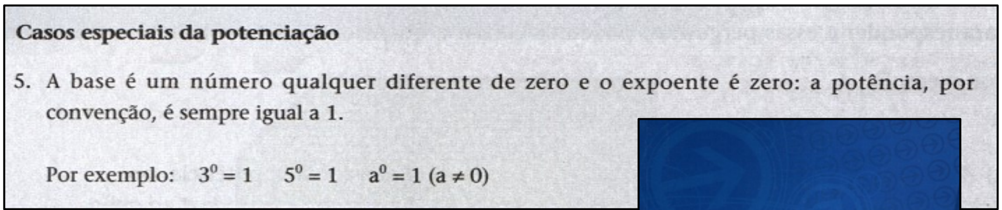
4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, para $a \neq 0$

Observação

Não daremos significado ao símbolo 0^0.

Figura 36: Potência de expoente inteiro
(Fonte: Bezerra, 1999, p. 76)[17]

A figura 37 exibe o quinto dentre os casos especiais de potenciação apresentados por Wilmer *et al* (2008, p. 96), porém não realiza nenhum comentário sobre a expressão 0^0. A omissão de qualquer abordagem a expressão 0^0 é situação usual nos livros didáticos brasileiros da educação básica.



Casos especiais da potenciação

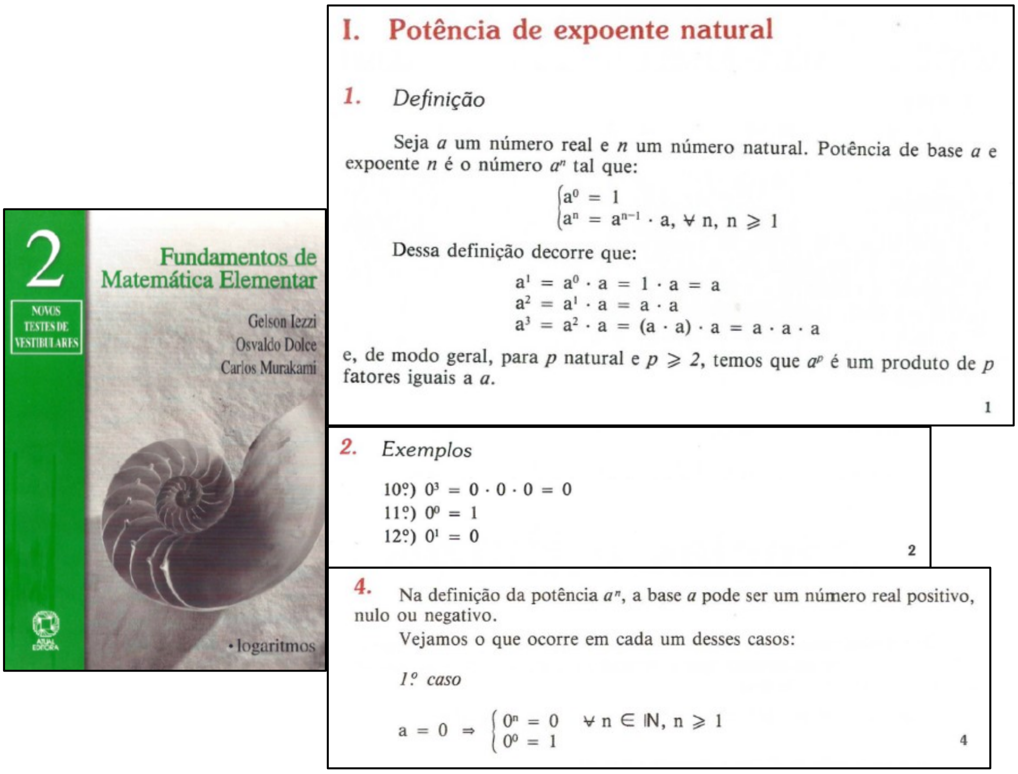
5. A base é um número qualquer diferente de zero e o expoente é zero: a potência, por convenção, é sempre igual a 1.

Por exemplo: $3^0 = 1$ $5^0 = 1$ $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

Figura 37: Casos especiais da potenciação
(Fonte: Wilmer *et al*, 2008, p. 96)[18]

[17] Livro publicado em volume único e destinado aos alunos dos três anos do ensino médio.
[18] Livro pertencente a uma coleção de oito livros destinados ao Telecurso (projeto de educação da Federação das Indústrias do Estado de São Paulo e da Fundação Roberto Marinho).

As figuras 38 (Iezzi *et al*, 2004, pp. 1-2-4) e 39 (Iezzi *et al*, 2013, pp. 1-2-4) apresentam a definição para a potenciação de expoente natural com exemplos em edições consecutivas de uma mesma coleção. A definição exposta na figura 38 inclui o caso de base igual à zero. A figura 39, por sua vez, exclui o caso de base zero e não expõe qualquer solução ou comentário. As figuras exibem seleções correspondentes das duas edições, a figura 38 permite concluir que de acordo com a definição, a expressão 0^0 possui valor unitário. Em contrapartida, a figura 39 é omissa em relação à expressão 0^0. A comparação entre as edições permite constatar que os autores comutaram o entendimento que possuíam em relação à expressão 0^0 depois da publicação de nove edições, passando a adotar a omissão da abordagem, situação usual nos livros didáticos brasileiros da educação básica.



I. Potência de expoente natural

1. *Definição*

Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \ \forall n, n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$
$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

e, de modo geral, para p natural e $p \geqslant 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

1

2. *Exemplos*

10º) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
11º) $0^0 = 1$
12º) $0^1 = 0$

2

4. Na definição da potência a^n, a base a pode ser um número real positivo, nulo ou negativo.
Vejamos o que ocorre em cada um desses casos:

1º caso

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^n = 0 & \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1 \\ 0^0 = 1 \end{cases}$$

4

Figura 38: Potência de expoente natural (9º edição)
(Fonte: IEZZI, *et al*, 2004, pp. 1-2-4)[19]

[19] Livro pertencente à nona edição de uma coleção de onze livros destinados ao ensino médio ou superior.

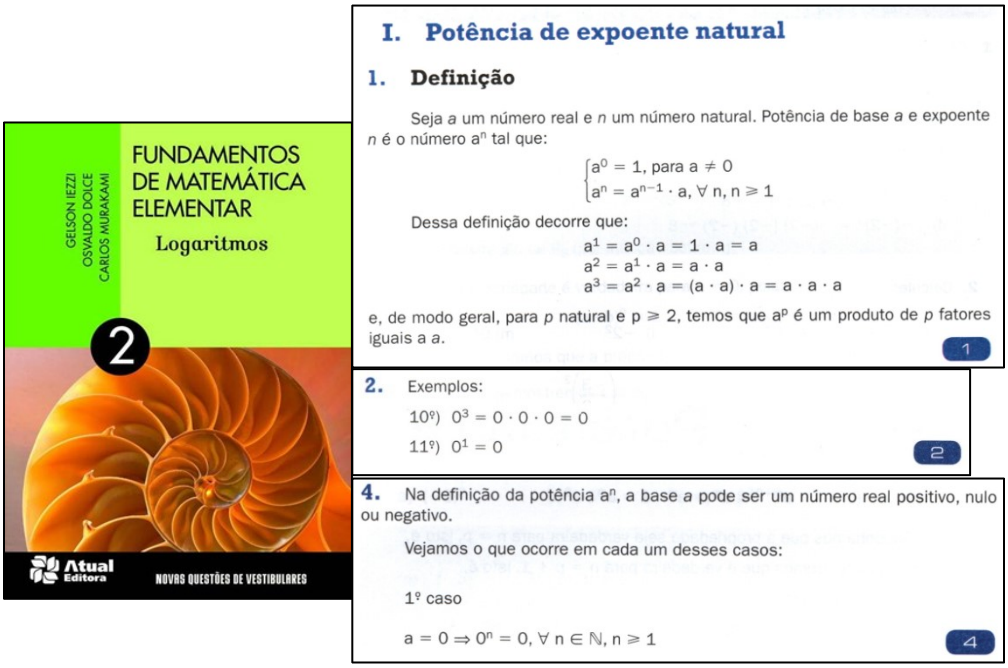


Figura 39: Potência de expoente natural (10º edição)
(Fonte: IEZZI, *et al*, 2013, pp. 1-2-4)[20]

A figura 40 apresenta um procedimento para cálculo das situações específicas para o expoente zero e um. Andrini *et al* (2015, p. 82) realizam a observação que a expressão 0^0 é uma situação complicada, informam ainda que, para os autores, essa expressão não terá significado, mesmo existindo duas soluções.

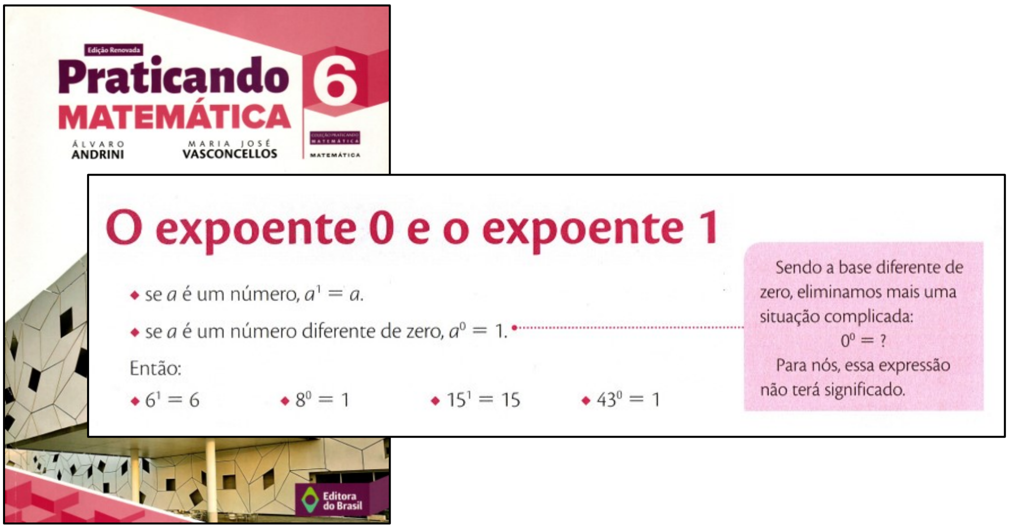


Figura 40: O expoente 0 e o expoente 1
(Fonte: Andrini *et al*, 2015, p. 82)[21]

[20] Livro pertencente a decima edição de uma coleção de onze livros destinados ao ensino médio ou superior.
[21] Livro pertencente ao PNLD 2017 e destinado ao aluno sexto ano dos anos finais do ensino fundamental.

A figura 41, encontrada em Silveira (2015, v. 4, p. 13) exibe uma definição para a potenciação de expoente zero e base não nula e apenas afirma ludicamente que a potência 0^0 não está definida.

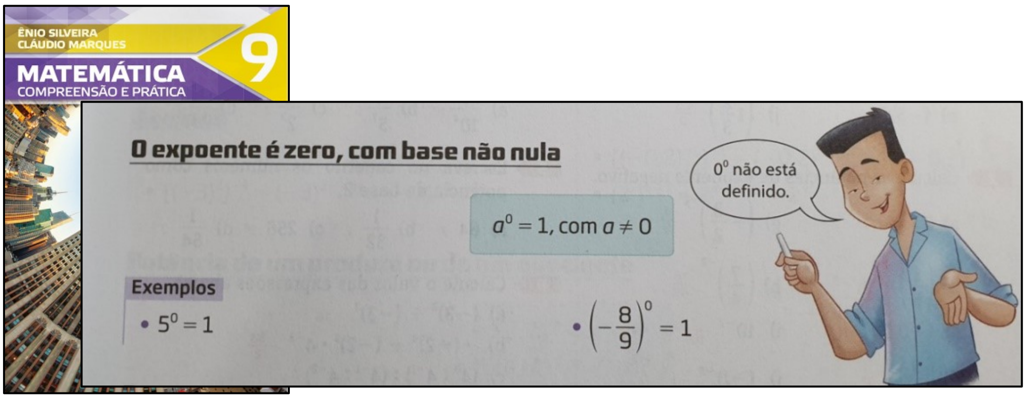


Figura 41: O expoente é zero, com base não nula.
(Fonte: Silveira, 2015, v. 4, p. 13)[22]

A figura 42, extraída de outro volume de Silveira (2015, v. 1, p. 75), exemplifica e apresenta uma definição para a potenciação de expoente zero e exclui o caso em que a base é nula, mas inclui a observação que não se atribui sentido a expressão 0^0.

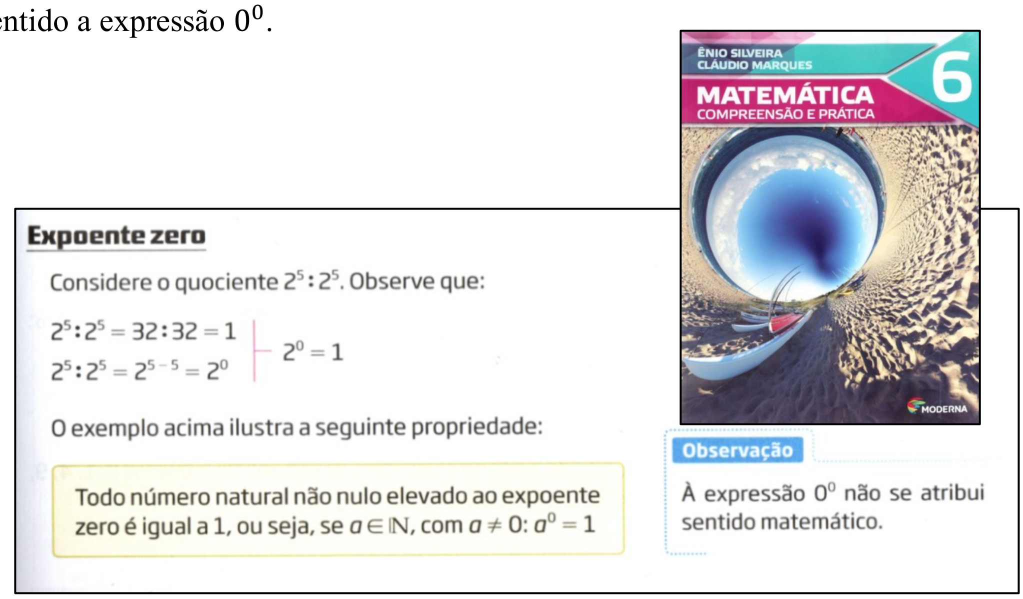


Figura 42: Expoente zero
(Fonte: Silveira, 2015, v. 1, p. 75)[23]

Destacamos que as figuras 41 e 42 apresentam abordagens distintas realizadas por Silveira à expressão 0^0 em dois volumes de uma mesma obra. As

[22] Livro pertencente ao PNLD 2017 e destinado ao aluno do nono ano dos anos finais do ensino fundamental.
[23] Livro pertencente ao PNLD 2017 e destinado ao aluno do sexto ano dos anos finais do ensino fundamental.

afirmações que a expressão 0^0 não está definida ou que não possui sentido matemático são equivocadas, pois existem duas possíveis soluções.

A figura 43 (Oliveira, 2018, v. 3, p. 11, v. 4, p. 25) apresenta duas regras para a potência de expoente zero em dois volumes de uma mesma coleção, a primeira regra para um número racional diferente de zero e a segunda para qualquer número real. Oliveira *et al* realizam duas abordagens contraditórias sem qualquer justificativa, na primeira a expressão 0º é excluída e na segunda a expressão 0º é igual a um.

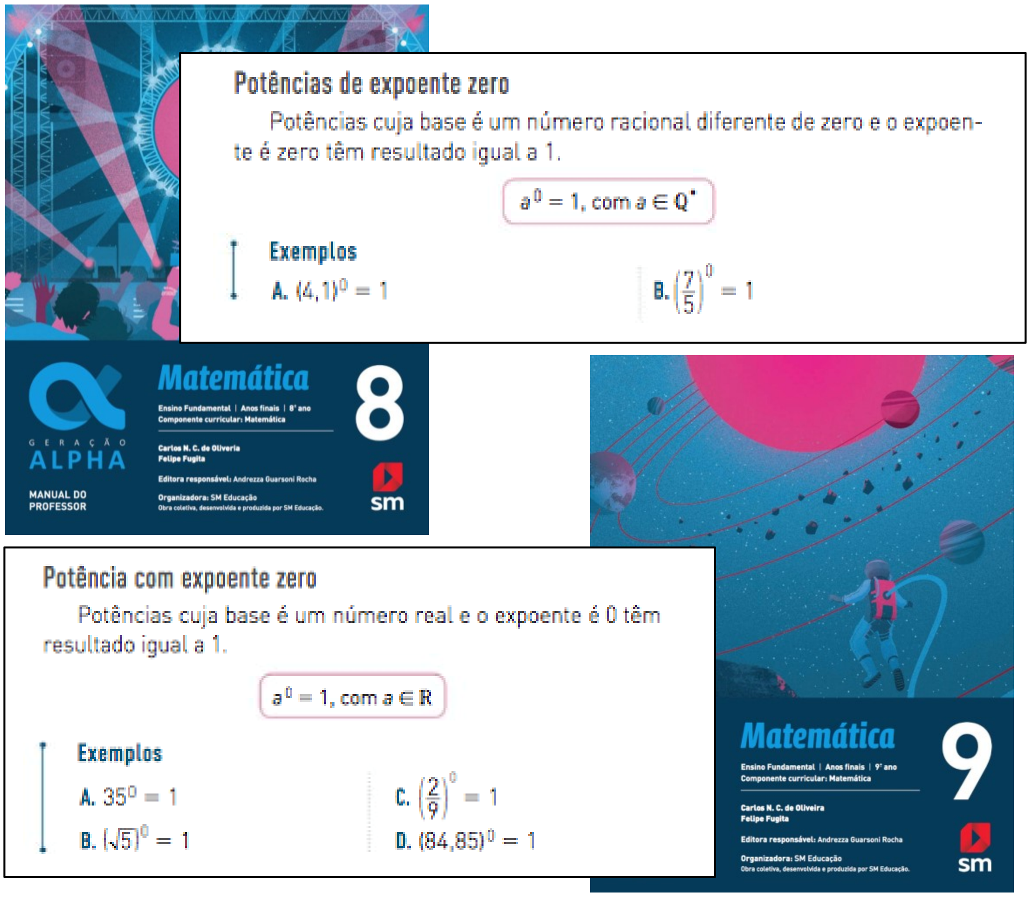


Figura 43: Potência com expoente zero.
(Fonte: OLIVEIRA, 2018, v. 3, p. 11 (superior), v. 4, p. 25 (inferior))[24]

A figura 44 (Silveira, 2018, p. 34) apresenta um questionamento sobre a expressão 0º e orienta ao professor que o esperado do aluno é a impossibilidade de cálculo.

[24] Livros pertencentes ao PNLD 2020 e destinados aos alunos do oitavo e nono anos dos anos finais do ensino fundamental.

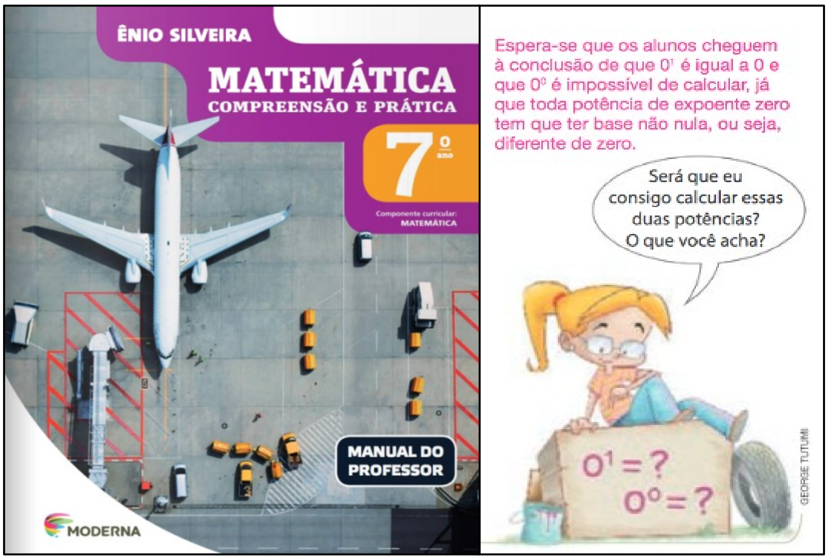


Figura 44: Será que consigo calcular 0º?
(Fonte: Silveira, 2018, p. 34)[25]

Podemos observar pelos exemplos apresentados que não existe uniformidade na abordagem a expressão 0^0 nos livros didáticos brasileiros. Acreditamos que seria interessante acrescentar a todos os textos, no momento em que se apresenta a operação de potenciação, que existe uma controvérsia envolvendo a expressão 0^0, pois há duas soluções possíveis e adoção de uma pode influenciar em determinados cálculos ou definições.

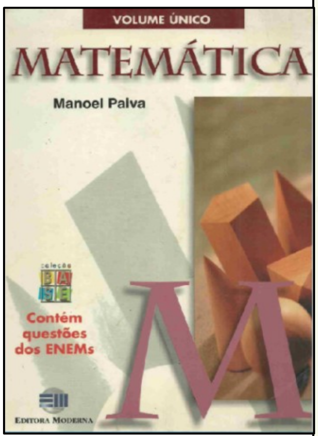
6.2 Modo indireto de apresentação

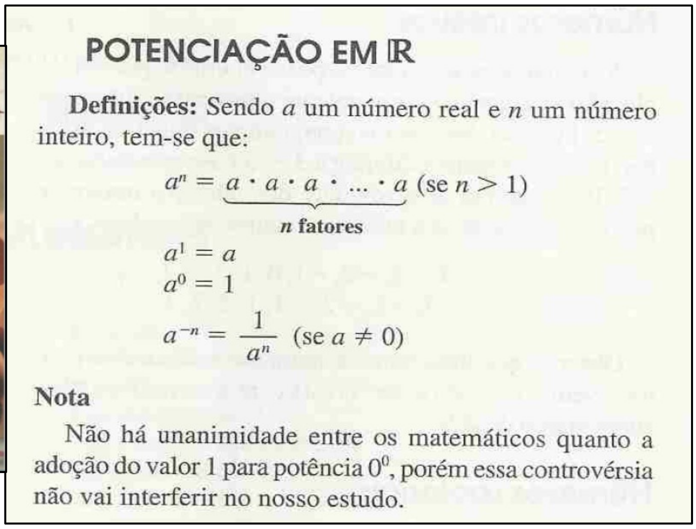
Vamos realizar análises de possíveis modos indiretos de abordagens da expressão 0^0 que podem ser encontradas nos livros didáticos brasileiros. Este tipo de análise exige a apresentação da solução adotada pelo autor para expressão 0^0 e em seguida o exame da coerência do texto matemático elaborado conforme a proposta apresentada no capitulo 6 deste trabalho. Exemplificando, caso o autor opte por não definir ou considere a expressão 0^0 indeterminada, a opção escolhida deve nortear a elaboração do texto com objetivo de evitar contradições. Também cabe ressaltar que o modo indireto ocorre no desenvolvimento de conteúdos afetos ao ensino médio, quando a expressão 0^0 pode ocorrer na solução de problemas que exige este cálculo, tais como nas funções polinomiais, binômio de Newton, progressão geométrica ou séries numéricas.

[25] Livro pertencente ao PNLD 2020 e destinado ao professor do sétimo ano dos anos finais do ensino fundamental.

Vamos apresentar três exemplos aplicando esta análise:

Primeiro exemplo, a figura 45 (Paiva, 1999, p. 2) exibe uma definição para a potenciação[26] em $\mathbb{R}$ e não exclui a base igual à zero para o caso a^0. Em seguida Paiva exibe uma nota onde afirma que não existe unanimidade quanto à adoção do valor unitário para a expressão 0^0, porém não informa as possibilidades existentes. Paiva conclui a nota informando que a controvérsia não irá interferir em seu estudo, ou seja, infere que a expressão 0º não estará presente no conteúdo apresentado em seu livro.





POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{R}$

Definições: Sendo a um número real e n um número inteiro, tem-se que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \text{ (se } n > 1)$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (se } a \neq 0)$$

Nota

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto a adoção do valor 1 para potência 0^0, porém essa controvérsia não vai interferir no nosso estudo.

Figura 45: Potenciação em $\mathbb{R}$
(Fonte: Paiva, 1999, p. 2)[27]

Vamos destacar quatro abordagens realizadas por Paiva na elaboração do seu texto:

> "Note que qualquer termo da P.G. (progressão geométrica) é igual ao produto do primeiro termo (a_1) por uma potência de q: $a_1 = a_1q^0$, $a_2 = a_1q^1$, $a_3 = a_1q^2$, $a_4 = a_1q^3$, $a_1 = a_5q^4$, ... " (Paiva, 1999, p. 140)
>
> Teorema: O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ de razão q, $-1 < q < 1$, é dado por: $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$. (Paiva, 1999, p. 144)
>
> "Teorema de Newton para o desenvolvimento da potência $(x + a)^n$: Para resolver certos problemas de matemática, necessitamos de potências do tipo $(x + a)^n$, em que x e a são números quaisquer e n $\in \mathbb{N}$. Algumas dessas potências são: $(x + a)^0 = 1$, $(x + a)^1 = x + a$, $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$..." (Paiva, 1999, p. 269)

---

[26] A potenciação no conjunto dos números reais, conforme apresentado no item 3.2 deste trabalho, considera que a base e o expoente são números reais com a base maior que zero.

[27] Livro publicado em volume único e destinado aos três anos do ensino médio.

> "Equação polinomial é toda equação que pode ser apresentada sob a forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$ em que $p(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$ é um polinômio de grau n, $n \geq 1$." (Paiva, 1999, p. 414)

Utilizando as duas primeiras abordagens podemos reescrever a soma dos termos de uma P.G. com razão $q = 0$ $(-1 < q < 1)$ do seguinte modo:

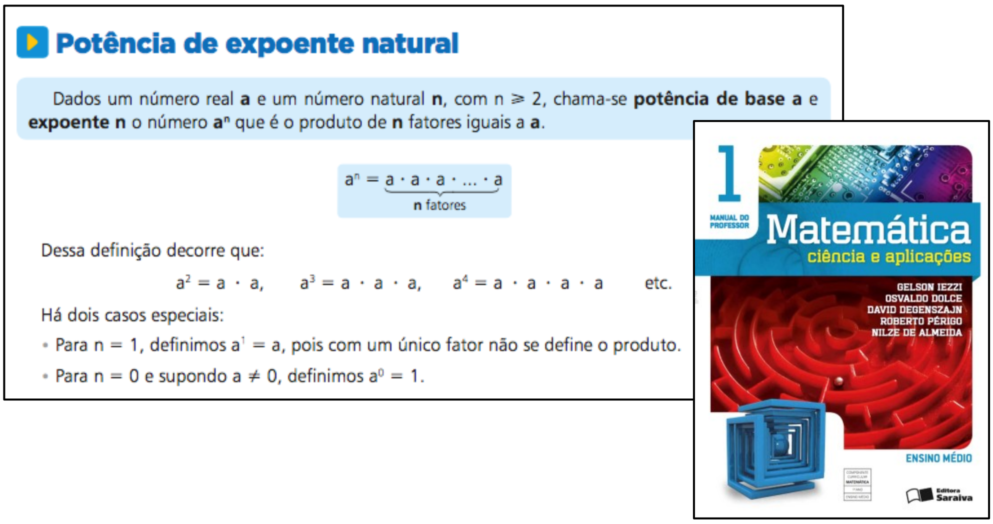
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-0} = a_1 0^0 + a_1 0^1 + a_1 0^2 + a_1 0^3 + a_5 0^4 + \cdots$$

Podemos observar que a expressão é verdadeira somente para $0^0 = 1$.

A terceira apresentação trata do Binômio de Newton considerando que x e a são números quaisquer, n ∈ ℕ e que $(x + a)^0 = 1$. Logo, podemos observar que para $x = -a$, teremos que $0^0 = 1$.

A última abordagem exibe uma definição para a equação polinomial e o cuidado do autor na definição do termo independente com a exclusão o grau zero dos polinômios evitando, desta maneira, esbarrar na controvérsia do 0^0. É interessante alertar ao leitor que existem autores que consideram o polinômio de grau zero conforme apresentado no item 5.3 deste trabalho.

Segundo exemplo, a figura 46 exibe a definição apresentada por Iezzi *et al* (2016, v. 1, p. 128) para a potenciação de expoente natural e exclui o caso de base igual à zero. Indicando que os autores optaram por não atribuir solução a expressão 0^0.


Potência de expoente natural

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com n ⩾ 2, chama-se **potência de base a** e **expoente n** o número **a**ⁿ que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

$a^2 = a \cdot a$, $\quad a^3 = a \cdot a \cdot a$, $\quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad$ etc.

Há dois casos especiais:

- Para n = 1, definimos $a^1 = a$, pois com um único fator não se define o produto.
- Para n = 0 e supondo a ≠ 0, definimos $a^0 = 1$.

Figura 46: Potência de base a e expoente natural.
(Fonte: Iezzi *et al*, 2016, v. 1, p. 128)[28]

[28] Livro pertencente ao PNLD 2018 e destinado ao aluno do primeiro ano do ensino médio.

Prosseguindo com o segundo exemplo, a figura 47 (Iezzi *et al*, 2016, v. 3, pp. 201-202) exibe a definição para polinômio que permite incluir o expoente zero. A figura também exibe um dos exemplos de polinômio apresentados pelos autores, -7, que também pode ser escrito na forma, $-7x^0$. Estes dois polinômios podem ser associado às funções $f(x) = -7$ e $f(x) = -7x^0$. Logo, podemos observar para o caso de $x = 0$, teremos que ter $0^0 = 1$ para preservar a igualdade das funções.

Definição

Um **polinômio** na variável complexa **x** é uma expressão dada por:

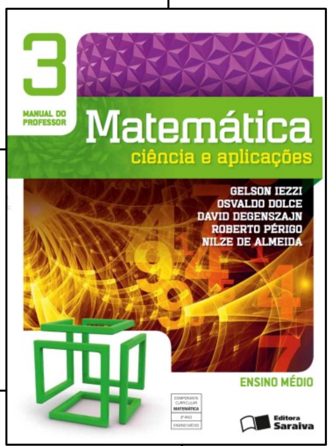
$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números complexos chamados **coeficientes** do polinômio; a_0 é o **coeficiente independente** do polinômio;
- todos os expoentes de **x**: n, n − 1, ..., 2, 1, 0 são números naturais;
- cada uma das parcelas, $a_n \cdot x^n$, $a_{n-1} \cdot x^{n-1}$, ..., $a_1 \cdot x$, a_0, corresponde a um termo do polinômio;
- o **grau** do polinômio é o número natural igual ao maior expoente de **x**, cujo termo apresenta coeficiente não nulo;
- **x** pode assumir qualquer valor complexo.

EXEMPLO 1

- -7 é um polinômio de grau 0, pois podemos escrevê-lo na forma $-7 \cdot x^0$.



Função polinomial

Vamos considerar uma função f: ℂ → ℂ, que a cada x ∈ ℂ associa o polinômio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, isto é, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
A função **f** recebe o nome de **função polinomial**.

Figura 47: Polinômio e função polinomial.
(Fonte: Iezzi *et al*, 2016, v. 3, p. 201 (superior), p. 202 (inferior))[29]

Terceiro exemplo, a figura 48 (Leonardo *et al*, 2016, v. 1, p. 207) exibe a expressão para cálculo da soma de infinitos termos de uma PG com razão $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$. Destacamos duas abordagens realizadas por Leonardo *et al* (2016) na elaboração da obra coletiva:

> "Dados um número real a e um número natural n, com $n \geq 2$, a potência de base a e expoente n é indicada por a^n e é o produto de n fatores iguais a a. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n fatores). Para

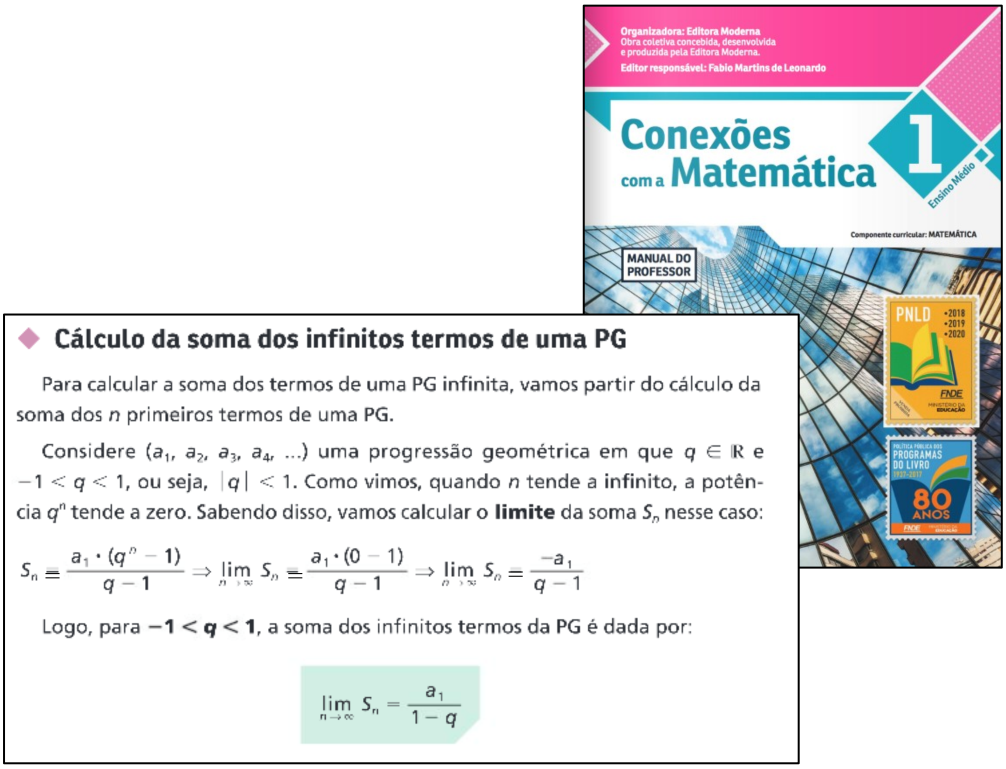
[29] Livro pertencente ao PNLD 2018 e destinado ao aluno do terceiro ano do ensino médio.

$n = 1$ e $n = 0$, definimos: $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, para $a \neq 0$." (Leonardo, 2016, p. 150).
"Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos o termo geral, que ocupa a enésima posição na PG: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com n $\in \mathbb{N}^*$." (Leonardo, 2016, p. 201)

A primeira abordagem exclui o caso de base igual à zero para a potenciação de expoente natural, não definindo a expressão 0^0. A segunda abordagem permite reescrever à soma dos termos de uma P.G. com razão $q = 0$ $(-1 < q < 1)$ do seguinte modo:

$$\lim_{n\to\infty} S_\infty = \frac{a_1}{1-0} = a_1 0^0 + a_1 0^1 + a_1 0^2 + a_1 0^3 + a_5 0^4 + \cdots$$

Observamos que a expressão é verdadeira somente para $0^0 = 1$.



◆ **Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG**

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ uma progressão geométrica em que $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$. Como vimos, quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma S_n nesse caso:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $\mathbf{-1 < q < 1}$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Figura 48: Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG.
(Fonte: Leornado *et al*, 2016, v. 1, p. 207)[30]

Podemos observar pelos exemplos apresentados que a expressão 0^0 pode comprometer a precisão do texto matemático. Acreditamos que seria interessante definir uma solução para a expressão 0^0 e perseguir a consonância com o texto para que não ocorram contradições.

[30] Livro pertencente ao PNLD 2018 e destinado aos alunos do primeiro ano ensino médio.

6.3 Análise de livros do Plano Nacional do Livro Didático

O objetivo deste item é fazer uma análise comparativa em relação ao valor da expressão 0^0 entre todas as coleções pertencentes ao último PNLD para os anos finais do ensino fundamental (2020) e também para o ensino médio (2018).

A análise de todas as coleções pertencentes ao PNLD-2020 percorreu os quatros volumes e examinou como os autores abordam a operação de potenciação e em seguida verificou como a expressão 0^0 é abordada na obra. Os seguintes questionamentos foram elaborados para os conteúdos das coleções pertencentes ao PNLD 2020:

1. A operação de potenciação é apresentada nos quatro volumes da coleção?
2. As propriedades da potenciação são apresentadas na coleção?
3. É definido que $a^0 = 1$, para $a \neq 0$?
4. A expressão 0^0 é apresentada ao aluno ou professor?
5. É informado ao aluno ou professor que existe uma controvérsia na solução da expressão 0^0?
6. É atribuído significado a expressão 0^0?

Em seguida foi elaborada a tabela abaixo com o resumo das respostas, “S” representa resposta afirmativa e “N” representa negativa.

Tabela 4 – Análise de livros do PNLD 2020[31]

Anos finais do ensino fundamental		CONTEÚDO					
EDITORA	COLEÇÃO	1	2	3	4	5	6
MODERNA	Matemática Compreensão e Prática	S	S	S	S	N	S[a]
	Matemática Bianchini	S	S	S	N	N	N
	Araribá mais matemática	S	S	S	N	N	N
FTD	A Conquista da Matemática	S	S	S	N	N	N
	Matemática Realidade & Tecnologia	S	S	S	N	N	N
SM	Geração alpha matemática	S	S	S	N	N	S[b]
	Convergências Matemática	S	S	S	S	N	S[c]
SCIPIONE	Matemática Essencial	S	S	S	N	N	N
DO BRASIL	Apoema Matemática	S	S	S	N	N	N
ÁTICA	Teláris Matemática	S	S	S	S	N	S[d]
SARAIVA	Trilhas da Matemática	S	S	S	S	N	S[e]

Fonte: Elaborada pelo autor

[31] Disponível em: <https://pnld.nees.com.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2020_pnld2020-matematica.pdf>. Acesso em 17 jul. 2020.

Observações sobre as legendas da tabela 4:

a) O livro do professor destinado ao sétimo ano orienta que 0^0 é impossível de calcular e o livro do aluno destinado ao nono ano informa que 0^0 não está definida.

b) O livro do aluno destinado ao nono ano define que $a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R}$ (figura 34).

c) O livro do professor destinado ao sexto ano informa que a expressão 0^0 é indeterminada.

d) O livro do professor destinado ao sétimo ano informa que a expressão 0^0 é indeterminada.

e) Os livros dos alunos destinados aos oitavo e nono anos informam que 0^0 não está definida.

A análise de todas as coleções pertencentes ao PNLD-2018 consistiu em percorrer os três volumes e examinou como os autores abordam a expressão 0^0. Todas as coleções revisaram a operação de potenciação antes de apresentar o conceito de função exponencial e esta é a oportunidade considerada propicia de apresentação da expressão 0^0. Em seguida, considerando a solução dada à expressão 0^0, foi analisada a apresentação de duas definições sensíveis ao assunto: “soma dos infinitos termos de uma PG convergente” e “função polinomial de grau n”. Os seguintes questionamentos foram elaborados para aos conteúdos das coleções pertencentes ao PNLD 2018:

1. A operação de potenciação é reapresentada ao aluno?
2. Regras algébricas de potenciação são apresentadas ao aluno?
3. É definido que $a^0 = 1$, para $a \neq 0$?
4. A expressão 0^0 é apresentada ao aluno?
5. É informado ao aluno que existe uma controvérsia na solução da expressão 0^0?
6. É atribuído significado a expressão 0^0?
7. A definição da soma dos infinitos termos de uma PG convergente com razão q com $-1 < q < +1$ ou $0 <|q|< 1$ permite abordar a expressão 0^0?
8. A definição da função polinomial de grau n, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$, permite abordar a expressão zero elevado a zero?

Em seguida foi elaborada a tabela abaixo com o resumo das respostas, “S” representa resposta afirmativa e “N” representa negativa.

Tabela 5 – Análise de livros do PNLD 2018[32]

Ensino Médio		Respostas às perguntas							
EDITORA	COLEÇÃO	1	2	3	4	5	6	7	8
MODERNA	Matemática Paiva	S	S	S	S[a]	S	N	S	S
	Conexões com a Matemática	S	S	S	N	N	N	S	S
SM	Quadrante Matemática	S	S	S	N	N	N	N	S
SARAIVA	Matemática: ciência e aplicações	S	S	S	N	N	N	N	S
	Matemática para compreender o mundo	S	S	S	N	N	N	N	S
ÁTICA	Matemática Contexto & Aplicações	S	S	S	N	N	N	S	S
LEYA	Matemática: Interação e Tecnologia	S	S	S	S[b]	N	S[b]	N	S
FTD	#Contato Matemática	S	S	S	N	N	N	N	S

Fonte: Elaborada pelo autor

Observações sobre as legendas da tabela 5:

a) O livro do aluno destinado ao primeiro ano informa que não existe unanimidade quanto à adoção do valor unitário para expressão 0^0 e esta possibilidade foi excluída da definição.

b) O livro do professor destinado ao primeiro ano informa que 0^0 é uma indeterminação.

A análise das coleções pertencentes aos últimos PNLD destinados aos anos finais do ensino fundamental (2020) e ao ensino médio (2018) permite constatar que não existe qualquer uniformidade na abordagem do assunto nos livros didáticos brasileiros. A exclusão da abordagem da expressão 0^0 pode provocar inconsistências em determinados assuntos que por vezes são quase imperceptíveis a um olhar atento. Verificamos também que a controvérsia da expressão 0º que permeia os livros didáticos brasileiros, requer dos professores o domínio da existência de duas opções válidas, a clareza de que cada opção reivindica um tratamento diferente e que esta informação deve ser do conhecimento do aluno ou estudante.

[32] Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=10744:guia-pnld-2018-matematica>. Acesso em 17 jul. 2020.

7
Considerações finais

A polêmica do valor 0^0 é antiga. Esta controvérsia permaneceu durante todo o décimo nono século e, atualmente, é, por vezes, negligenciada ou abordada em poucos livros. Alguns matemáticos renomados, entre eles N. Bourbaki, P. R. Halmos e P. Supes, desenvolveram teoremas para provar que $0^0 = 1$. No entanto, em cálculo de limites ou análise matemática, quando se opera com o conjunto dos números reais, a expressão 0^0 é considerada uma expressão indeterminada.

Atualmente, esta controvérsia permanece e não existe consenso único e conclusivo para a questão, podendo gerar debates acalorados e improfícuos sobre a questão. A dúvida persiste pela carência da correta abordagem do assunto em diversos níveis da educação, com o estabelecimento de regras que excluem o valor da expressão 0º.

A questão primordial não é o valor a ser atribuído a expressão 0^0, mas sim, uma vez adotada uma das alternativas, manter a coerência no contexto matemático, seja considerando $0^0 = 1$, seja considerando 0^0 como indeterminação. Portanto, ambas as posições podem estar corretas, desde que sejam coerentes com as proposições anteriormente aceitas como verdadeiras. Logo a questão de qual o valor 0^0 só pode ser respondida após a fixação da estrutura algébrica envolvida (a operação e seu conjunto suporte) conforme afirmou o professor Paulo Moacyr Libramento Prado na décima primeira edição da RPM.

Indubitavelmente, o zero é uma abstração[33], pois representar a inexistência de algo é pura sofisticação e poucas civilizações ousaram esta façanha (Garbi, 2007, p. 136; Rooney, 2012, p. 23). Aceitar que o zero existe, exigiu um longo caminho para humanidade no universo dos números e podemos dizer que a concepção do valor para a expressão 0^0 é um nível superior de abstração[33] do que se exigiu para a criação do zero.

Pedagogicamente, podemos construir o consenso de que o valor da expressão 0^0 é 1. Esta construção favorece e amplia a validade e eficácia de diversos conceitos e fórmulas matemáticas, e é aplicada em inúmeros softwares

[33] Abstração é o procedimento mental que isola, para considera-lo à parte, um elemento de uma representação, ou ainda, processo pelo qual o espírito se desvincula das significações familiares do vivido e do mundo das percepções para construir conceitos (Japiassú, 2001).

sem comprometimento. Entretanto, a expressão 0^0 também pode ser uma indeterminação, por exemplo, quando em operações com limites, pois a singularidade deve ser removida para identificação da convergência. As duas possibilidades fazem parte do conjunto solução desta expressão.

Acreditamos que uma educação moderna deva ter entre seus objetivos o preparo dos estudantes para situações em que não exista resposta definitiva para tudo e que o valor de uma operação aritmética pode se prestar a este objetivo. Espera-se que as reflexões e abordagens apresentadas neste trabalho permitam aos professores mais subsídios para exporem a seus alunos a riqueza de detalhes existente na matemática.

8
Referências bibliográficas

ANDRINI, A., VASCONCELLOS M. J., **Praticando matemática 6**, v. 6, São Paulo: Editora do Brasil, 4. ed., 2015.

BALESTRI, R. Matemática: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. 3v.

BARON, G., **The Mathematical Correspondent: A short Disquisition, concerning the Definition, of the word Power, in Arithmetic and Algebra**, NEW-YORK: Sage and Clough, 1804. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dxoAAAAAMAAJ&pg=PP15&hl=pt-BR&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 20 jul. 2020.

BEMERKUNGEN zu dem Aufsatze überschrieben "Beweis der Gleichung $0^0 = 1$, nach J. F. Pfaff," im zweiten Hefte dieses Bandes, S. 134. ***Journal de Crelle***. Berlin, v.12, 1834. pp. 292-294. Disponível em: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0012?tify={%22pages%22:[300],%22view%22:%22thumbnails%22}>. Acesso em: 20 jul. 2020.

BEZERRA, M. J.; PUTNOKI. J. C. **Novo Bezerra: Matemática**. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1999.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. São Paulo: Moderna, 9. ed., 2018. 4 v.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. Revisão técnica Uta C. Merzbach. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

BOURBAKI, N. **Élements de Mathématique: Théorie des Ensembles Chapitre 3**. 2. ed. Paris: Ed. Hermann, 1963.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2018**: matemática. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=10744:guia-pnld-2018-matematica>. Acesso em 20 jul. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2020:** matemática. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: Secretária de Educação Básica, 2019. Disponível em: <https://pnld.nees.com.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2020_pnld2020-matematica.pdf>. Acesso em 20 jul. 2020.

CHAVANTE, E. R.; PRESTES, D. **Quadrante matemática: ensino médio.** 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016. 3 v.

CHAVANTE, E. R. **Convergências matemática: ensino fundamental.** 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. 4 v.

CAUCHY, A.L. ***Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique***. 1. ed. Paris: L'Imprimerie Royale, 1821. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f9.item.zoom > Acesso em: 20 jul. 2020.

______. **Leçons sur le Calcul Différentiel**, 1. ed. Paris: Ed. Libraires du Roi, 1829.

______. **Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral.** 1. ed. Paris: Ed. Bachelier, 1840.

DANTE, L. R. **Teláris matemática: ensino fundamental: anos finais.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2018. 4 v.

______. **Matemática: contexto e aplicações: ensino médio.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2018. 3 v.

EULER, L. **Elements of Algebra**. 5. ed. Londres: Ed. Longman Orme And Companyrevista, 1840. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=aPWcyZiGB7IC&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Joseph+Louis+Lagrange%22&hl=pt-BR&sa=X&ved=2ahUKEwj9i6LRxNTqAhUSILkGHYRoAxYQ6AEwAXoECAAQAg#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 20 jul. 2020.

______. **Introductio in analysin infinitorum.** Lausannae : apud Marcum-MIchaelem Bousquet & socios, v. 1, 1748. Disponível em: <https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1100&context=euler-works>. Acesso em: 20 jul. 2020.

______. **Introduction to Analysis of the Infinite**. Tradução John D. Blanton. New York: Ed. Springer-Verlag, v. 1, 1988.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FIGUEIREDO D. G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996.

GARBI, G. G., **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2007.

GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da matemática: ensino fundamental: anos finais.** 4. ed. São Paulo: FDT, 2018. 4 v.

GAY, M. R. G., SILVA, W. R., **Araribá Mais Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 4 v.

GODEMENT, R. **Cours d'algèbre**. 3. ed. Paris: Ed. Hermann, 1997.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômio e Equações Algébricas: Coleção PROFMAT**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.

IEZZI, G.; DOLCE, O; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar: logaritmos**. 9. ed. São Paulo: Editora Atual, v. 2, 2004.

______.______. 10. ed. São Paulo: Editora Atual, v. 2, 2013.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio.** 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. 3 v.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de Filosofia**. 5. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

KAPLAN, R. **O nada que existe: uma história natural do zero.** Tradução Laura Neves. Revisão técnica Walter Maciel. Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

LEORNADO, F. M. (Ed.). **Conexões com a matemática.** 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. 3 v.
LIBRI, G. *Mémoire sur les fonctions discontinues.* ***Journal de Crelle***, Berlin, v. 11, 1833. pp. 303-316 Disponível em: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0010?tify={%22pages%22:[315],%22view%22:%22thumbnails%22}>. Acesso em: 20 jul. 2020.
LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias: Qual o valor de 0^0? **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 1, pp. 07-08, 1982. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/1/2.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.
______. Conceitos e Controvérsias: Novamente 0^0. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 7, pp. 17-20, 1985. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/7/4.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.
______. **Curso de análise.** 10. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, v. 1, 2002.
______. Conceitos e Controvérsias: Qual o valor de 0^0? **Explorando o Ensino da Matemática.** Brasília: Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica. v. 1., 2004, pp. 78-79.
______. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.
LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., **A Matemática do Ensino Médio: Coleção do Professor de Matemática.** 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 1, 2006.
LONGEN, A. **Apoema: Matemática.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2018. 4 v.
MÖBIUS, A. F. *Beweis der Gleichung* $0^0 = 1$*, nach J. F. Pfaff.* ***Journal de Crelle***. Berlin, v.12, 1834. pp. 134-136. Disponível em: < https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0012?tify={%22pages%22:[140],%22view%22:%22thumbnails%22}>. Acesso em: 20 jul. 2020.
OLIVEIRA, C. N. C.; FUGITA, F. **Geração alpha matemática: ensino fundamental.** 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. 4 v.
PATARO, P. M., BALESTRI, R. **Matemática essencial ensino fundamental.** São Paulo: Scipione, 1. ed., 2018. 4 v.
PAIVA, M. **Coleção base: matemática**. São Paulo: Moderna, 1. ed.,v. único, 1999.
______. **Matemática: Paiva**, 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. 3 v.
PRADO, P. M. L. Conceitos e Controvérsias: Voltando ao 0^0. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 11, p. 17-18, 1987. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/11/4.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.
ROONEY, A. **A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.** 1. ed. São Paulo: Ed. M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.
ROSSER, J. B. **Logic for Mathematicians.** 2. ed. New York: Chelsea Publishing Co, 1978
SAFIER, F. **Pré-Cálculo: Coleção Schaum**. Tradução Adonai Schlup Sant'Anna. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

SAMPAIO, F. A., **Trilhas da matemática: ensino fundamental.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018. 4 v.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. 4 v.

______. ______. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 4 v.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução Seije Hariki. Revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto. 1. ed. São Paulo: Ed. McGraw-Hill, v. 1, 1987.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo.** 1. ed. São Paulo: Saraira, 2016. 3 v.

SOUZA, J. R.; Garcia, J. S. R. **#Contato matemática.** 1. ed. São Paulo: FDT, 2016. 3 v.

SOUZA, J. R. **Matemática realidade & tecnologia.** 1. ed. São Paulo: FDT, 2018. 4 v.

SOUZA, M. H. **21 Teoremas Matemáticos que Revolucionaram o Mundo**. 1. ed. São Paulo: Ed. Planeta do Brasil, 2018.

STEWART, J. **CÁLCULO**, Tradução EZ2Translate. Revisão técnica Eduardo Garibaldi. 7. ed., São Paulo: Ed. Cengage Learning, v. 1, 2013.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**. New York: Dover Publications, 1960.

SUR LA VALUER de 0^0*.* ***Journal de Crelle***. Berlin, v.11, 1834. pp. 272-273 Disponível em: < https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0011?tify={%22pages%22:[282],%22view%22:%22thumbnails%22}>. Acesso em: 20 jul. 2020.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução Alfredo Alves de Faria. Revisão técnica Victor Hugo Teixeira Rodrigues, Antonio Gabriel da Silva St. Aubyn. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, v. 1, 1983.

VERMA, S. **Ideias geniais na matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências.** Tradução Amanda Pavani. 2. ed. Belo Horizonte: Ed. Gutenberg, 2016.

WILMER, C. *et al*. **Telecurso: Matemática ensino fundamental.** 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, v. 2, 2008.

9
Anexos

TABELAS PARA CÁLCULO DE POTÊNCIAS
(Elaboradas pelo autor)

Raiz Quadrada de y										
y	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	0,000	0,316	0,447	0,548	0,632	0,707	0,775	0,837	0,894	0,949
1	1,000	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378
2	1,432	1,449	1,483	1,517	1,549	1,581	1,612	1,643	1,673	1,703
3	1,732	1,761	1,789	1,817	1,844	1,871	1,897	1,924	1,949	1,975
4	2,000	2,025	2,049	2,074	2,098	2,121	2,145	2,168	2,191	2,214
5	2,236	2,258	2,280	2,302	2,324	2,345	2,366	2,387	2,408	2,429
6	2,449	2,470	2,490	2,510	2,530	2,550	2,569	2,588	2,608	2,627
7	2,646	2,665	2,683	2,702	2,720	2,739	2,757	2,775	2,793	2,811
8	2,828	2,846	2,864	2,881	2,898	2,915	2,932	2,950	2,966	2,983
9	3,000	3,017	3,033	3,050	3,066	3,082	3,098	3,114	3,130	3,146
10	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302
11	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450
12	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592
13	3,606	3,619	3,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728
14	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860
15	3,873	3,886	3,899	3,912	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987
16	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111
17	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231
18	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347
19	4,356	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461
20	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,591	4,572

TABELAS PARA CÁLCULO DE POTÊNCIAS
(Elaboradas pelo autor)

Logaritmo natural de n										
n	0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0*	------	2,697	3,391	3,796	4,084	4,307	4,489	4,643	4,777	4,895
1	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642
2	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,955	0,993	1,030	1,065
3	1,099	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361
4	1,386	1,411	1,435	1,459	1,482	1,504	1,526	1,548	1,569	1,589
5	1,609	1,629	1,649	1,668	1,686	1,705	1,723	1,740	1,758	1,775
6	1,792	1,808	1,825	1,841	1,856	1,872	1,887	1,902	1,917	1,932
7	1,946	1,960	1,974	1,988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067
8	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,174	2,186
9	2,197	2,208	2,219	2,230	2,241	2,251	2,262	2,272	2,282	2,293
10	2,303	2,313	2,322	2,332	2,342	2,351	2,361	2,370	2,380	2,389
11	2,398	2,407	2,416	2,425	2,434	2,442	2,451	2,496	2,468	2,477
12	2,485	2,493	2,501	2,510	2,518	2,526	2,534	2,542	2,549	2,557
13	2,565	2,573	2,580	2,588	2,595	2,603	2,610	2,617	2,625	2,632
14	2,639	2,646	2,653	2,660	2,667	2,674	2,681	2,688	2,695	2,701
15	2,708	2,715	2,721	2,728	2,734	2,741	2,747	2,754	2,760	2,766
16	2,773	2,779	2,785	2,791	2,797	2,803	2,809	2,815	2,821	2,827
17	2,833	2,839	2,845	2,851	2,856	2,862	2,868	2,874	2,879	2,885
18	2,890	2,896	2,901	2,907	2,912	2,918	2,923	2,928	2,934	2,939
19	2,944	2,950	2,955	2,960	2,965	2,970	2,976	2,981	2,986	2,991
20	2,996	3,001	3,006	3,011	3,016	3,020	3,025	3,030	3,035	3,040
* Para n $<$ 1 subtrair 5, por exemplo: ln 0,3 $\approx 3{,}796 - 5 = -1{,}204$										

TABELAS PARA CÁLCULO DE POTÊNCIAS
(Elaboradas pelo autor)

Função exponencial								
x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,025	1,0253	0,9753	1,025	2,7871	0,3588	2,025	7,5761	0,1312
0,050	1,0513	0,9512	1,050	2,8577	0,3499	2,050	7,7679	0,1287
0,075	1,0779	0,9277	1,075	2,9300	0,3413	2,075	7,9645	0,1256
0,100	1,1052	0,9048	1,100	3,0042	0,3329	2,100	8,1662	0,1225
0,125	1,1331	0,8825	1,125	3,0802	0,3247	2,125	8,3729	0,1194
0,150	1,1618	0,8607	1,150	3,1582	0,3166	2,150	8,5849	0,1165
0,175	1,1912	0,8395	1,175	3,2381	0,3088	2,175	8,8022	0,1136
0,200	1,2214	0,8187	1,200	3,3201	0,3012	2,200	9,0250	0,1108
0,225	1,2523	0,7985	1,225	3,0442	0,2938	2,225	9,2535	0,1081
0,250	1,2840	0,7788	1,250	3,4903	0,2865	2,250	9,4877	0,1054
0,275	1,3165	0,7596	1,275	3,5787	0,2794	2,275	9,7279	0,1028
0,300	1,3499	0,7408	1,300	3,6693	0,2725	2,300	9,9742	0,1003
0,325	1,3840	0,7225	1,325	3,7622	0,2658	2,325	10,2267	0,0978
0,350	1,4191	0,7047	1,350	3,8574	0,2592	2,350	10,4856	0,0954
0,375	1,4550	0,6873	1,375	3,9551	0,2528	2,375	10,7510	0,0930
0,400	1,4918	0,6703	1,400	4,0552	0,2466	2,400	11,0232	0,0907
0,425	1,5296	0,6538	1,425	4,1579	0,2405	2,425	11,3022	0,0885
0,450	1,5683	0,6376	1,450	4,2631	0,2346	2,450	11,5883	0,0863
0,475	1,6080	0,6219	1,475	4,3710	0,2288	2,475	11,8817	0,0842
0,500	1,6487	0,6065	1,500	4,4817	0,2231	2,500	12,1825	0,0821
0,525	1,6905	0,5915	1,525	4,5951	0,2176	2,525	12,4909	0,0800
0,550	1,7333	0,5769	1,550	4,7115	0,2122	2,550	12,8071	0,0781
0,575	1,7771	0,5627	1,575	4,8307	0,2070	2,575	13,1313	0,0762
0,600	1,8221	0,5488	1,600	4,9530	0,2019	2,600	13,4637	0,0743
0,625	1,8682	0,5353	1,625	5,0784	0,1969	2,625	13,8046	0,0724
0,650	1,9155	0,5205	1,650	5,2070	0,1920	2,650	14,1540	0,0707
0,675	1,9640	0,5092	1,675	5,3388	0,1873	2,675	14,5123	0,0689
0,700	2,0138	0,4966	1,700	5,4739	0,1827	2,700	14,8797	0,0672
0,725	2,0647	0,4843	1,725	5,6113	0,1782	2,725	15,2564	0,0655
0,750	2,1170	0,4724	1,750	5,7546	0,1738	2,750	15,6426	0,0639
0,775	2,1706	0,4607	1,775	5,9003	0,1695	2,775	16,0386	0,0623
0,800	2,2255	0,4493	1,800	6,0496	0,1653	2,800	16,4446	0,0608
0,825	2,2819	0,4382	1,825	6,2028	0,1612	2,825	16,8609	0,0593
0,850	2,3396	0,4274	1,850	6,3598	0,1572	2,850	17,2878	0,0578
0,875	2,3989	0,4169	1,875	6,5208	0,1534	2,875	17,7254	0,0564
0,900	2,4596	0,4066	1,900	6,6859	0,1496	2,900	18,1741	0,0550
0,925	2,5219	0,3953	1,925	6,8551	0,1459	2,925	18,6342	0,0537
0,950	2,5857	0,3867	1,950	7,0287	0,1423	2,950	19,1060	0,0523
0,975	2,6512	0,3772	1,975	7,2066	0,1388	2,975	19,5896	0,0510
1,000	2,7183	0,3678	2,000	7,3891	0,1353	3,000	20,0855	0,0498