PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Lucas Pereira Silva

Modelagem da dinâmica social do fenômeno do bullying com conceitos da Teoria dos Jogos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro

Rio de Janeiro
Julho de 2020

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Lucas Pereira Silva

Modelagem da dinâmica social do fenômeno do bullying com conceitos da Teoria dos Jogos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Emília Carolina Santana Teixeira Alves
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Mariana Gesualdi Villapouca
Departamento de Matemática – UERJ

Rio de Janeiro, 22 de julho de 2020

Lucas Pereira Silva

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estácio de Sá (UNESA). Atualmente trabalha como técnico no centro de pesquisa da PETROBRAS.

Ficha Catalográfica

Silva, Lucas Pereira

Modelagem da dinâmica social do fenômeno do bullying com conceitos da Teoria dos Jogos / Lucas Pereira Silva ; orientador: Eduardo Barbosa Pinheiro. – 2020.
232 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Matemática. 3. Teoria dos Jogos. 4. Bullying. 5. Comportamento agressivo. I. Pinheiro, Eduardo Barbosa. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha amada esposa Mariana, pelo apoio, paciência e compreensão, sem os quais este trabalho não teria sido possível.

Aos meus pais, Fábio e Fátima, pela educação, carinho e dedicação.

À minha irmã Gabriela, pela amiza de e companheirismo.

Ao PROFMAT e à PUC-Rio, pela administração do curso, bem como aos professores dos dois anos letivos.

Ao meu orientador Eduardo Barbosa pelo estímulo e parceria desde o início até a conclusão deste trabalho. Aos membros da banca, pela disponibilidade.

A todos os familiares, amigos e colegas de trabalho que de uma forma ou de outra me estimularam e me ajudaram.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Silva, Lucas Pereira; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Orientador). **Modelagem da dinâmica social do fenômeno do bullying com conceitos da Teoria dos Jogos**. Rio de Janeiro, 2020. 232p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Este trabalho possui como principal propósito a utilização da teoria dos jogos para modelar interações estratégias entre participantes de atos de bullying. Primeiramente, exporemos tópicos e conceitos importantes no campo da teoria dos jogos, tais como jogo, classificação de estratégias, formas de encontrar soluções dos jogos, dentre outros. Em seguida, abordaremos de forma introdutória aspectos referentes a temática do bullying, particularmente quanto a definição e estatísticas de ocorrência. Finalmente, os jogos modelados são apresentados, onde os comportamentos dos jogadores são avaliados em diferentes cenários, uma vez que esses possuem diferentes características que variam em função do grau de atenção que as autoridades escolares atribuem ao bullying.

Palavras-chave

Matemática; Teoria dos jogos; Bullying; Comportamento Agressivo

Abstract

Silva, Lucas Pereira; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Advisor). **Modeling the social dynamics of the bullying phenomenon with concepts from Game Theory**. Rio de Janeiro, 2020. 232p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

This work has as main purpose the use of game theory to model strategic interactions between participants in acts of bullying. To begin with, we will expose important topics and concepts in the field of game theory, such as games, classification of strategies, and ways to find game solutions, among others. Then, we will exhibit in an introductory way aspect related to the theme of bullying, particularly regarding the definition and statistics of occurrence. Finally, the modeled games are presented, where the behaviors of the players are evaluated in different scenarios, since they have different characteristics that vary according to the degree of importance that the school authorities attribute to bullying.

Keywords

Mathematics; Game Theory; Bullying; Aggressive Behaviour

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

“A hipocrisia é
uma homenagem que o vício
presta à virtude."

François La Rochefoucauld

1
Introdução

Tentar antever o resultado que um conjunto de comportamentos provocará em um dado contexto é uma atividade que está na essência da natureza humana. Essa avaliação pode se dar de várias maneiras, e considerando aquelas que levam em consideração que os agentes decisórios são racionais, existe uma distinção entre dois tipos principais: o primeiro se dá através da chamada teoria de decisão, onde o estado do ambiente influencia a escolha do comportamento, e a teoria dos jogos, onde a escolha da melhor decisão possível é uma função das interações desta decisão com as possíveis escolhas de outros agentes do meio.

A formalização da Teoria dos Jogos ocorreu entre os séculos XIX e XX, com os trabalhos de John von Neumann e John Forbes Nash Junior, dentre outros, e desde então é aplicada em diversas áreas do conhecimento, tais como Biologia, Engenharia e Sociologia. Essa grande penetração em diversas áreas permite que essa teoria seja utilizada para modelar interações do convívio social, e mesmo em ambiente escolar, onde a problemática da violência escolar é particularmente sensível.

O fenômeno do bullying é uma das formas de violência escolar que mais geram preocupação das autoridades nacionais e internacionais, uma vez que seu caráter repetitivo produz impactos sobre as vítimas que em muitos casos se propagam até a vida adulta. Desse modo, o motivo da seleção deste tópico como objeto de análise se dá pela complexidade de fatores que permitem a sua existência, assim como os impactos que gera e pela sua abrangência mundial.

Assim, o principal objetivo deste trabalho é apresentar modelos de comportamentos de indivíduos envolvidos em casos de bullying, com o subsídio dos conhecimentos oferecidos pela Teoria dos Jogos, e para tanto, faremos uma divisão dos diversos tópicos em capítulos.

No Capítulo 2 são abordados conceitos básicos em Teoria dos Jogos que são necessários para operacionalizar modelos de interação estratégica, começando pelas definições básicas, passando pelas formas que um jogo pode assumir e em quais tipos podem ser classificados, fechando com uma breve compilação sobre como encontrar solução, com particular ênfase para o conceito de Equilíbrio de Nash.

No Capítulo 3, as questões da violência escolar e do bullying são exploradas, com destaque para o delineamento da frequência de ocorrência desses atos em âmbito internacional. Diversos fatores que alteram a conjuntura são apresentados, tais como a idade e a nacionalidade dos indivíduos envolvidos, questões de gênero, dentre outros.

Sequencialmente, no Capítulo 4 são feitas as análises dos comportamentos dos indivíduos envolvidos no bullying em diversos cenários, e com diversas formas de atuação dos jogadores envolvidos, destacando-se especialmente a ordem de atuação dos agentes, explicitando como a variação do número de indivíduos envolvidos altera com os atos ocorrem, e como as crenças deles afetam os resultados das interações.

Por fim, no último capítulo são expostas algumas aplicações de jogos em sala de aula, onde se pontua quais são as possíveis consequências das decisões nos jogos, enfatizando como a cooperação dos jogadores afeta o resultado, além de mostrar a interdisciplinaridade intrínseca que a Teoria dos Jogos possui.

2
Tópicos em Teoria dos Jogos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos e tópicos no âmbito da Teoria dos Jogos, que formarão a base teórica dos jogos modelos neste trabalho.

2.1 Definições

2.1.1 Jogo

Um **jogo** pode ser definido com uma descrição formal de uma situação de interação estratégica entre agentes, denominados **jogadores**. Dessa forma, existe o reconhecimento pelos agentes de que os atos realizados possuem uma relação de interdependência, ou seja, o comportamento de um agente leva em conta os atos dos outros.

No âmbito deste trabalho, o aspecto da estruturação de um jogo tem os seguintes elementos:

- uma lista de jogadores, sendo estes agentes individuais ou grupos;
- a definição completa do que cada um dos jogadores pode fazer durante o andamento do jogo, ou seja, o conjunto de todas as estratégias possíveis;
- a descrição das informações que os jogadores conhecem sobre os outros jogadores e sobre o ambiente onde as interações ocorrem;
- a descrição das correlações de como as ações dos jogadores conduzem as recompensas disputadas nos jogos;
- uma relação de preferências dos jogadores sobre as recompensas estabelecidas nas interações do jogo.

Cada um dos cinco elementos será mais explicitamente abordado nos próximos tópicos.

2.1.2 Jogador

Jogadores são indivíduos ou grupos que tomam decisões durante o desenvolvimento das interações estratégicas de um jogo. Tem-se que todo jogador procura escolher o comportamento que traga a melhor recompensa possível, levando-se em conta as decisões dos outros jogadores.

No tocante aos jogos modelados neste trabalho, deve-se ressaltar que isso pode levar um jogador a escolher um comportamento agressivo e violento contra um outro jogador, desde que isso o leve a obter o melhor ganho possível. Embora atos de violência claramente não constituam atitudes éticas, os critérios definidos para modelar como os jogadores agem não julgam a finalidade de um comportamento, mas apenas os modos como cada agente procura obter a recompensa máxima.

2.1.3 Recompensas e Relações de preferência

Uma **recompensa** ou um **ganho** é o que um jogador obtém ao final das interações presentes em um jogo, ou no término de uma rodada de um jogo que se repete.

Os ganhos podem estar associados a objetos não-quantificáveis ou a variáveis quantificáveis, sendo que neste último caso o jogador escolherá o maior ganho, considerando as escolhas dos outros jogadores. Já na outra situação, as recompensas são ranqueadas em função das preferências dos jogadores, sempre de forma transitiva, ou seja, se o jogador prefere a recompensa A quando comparada ao ganho B, e prefere B quando comparada a recompensa C, então A sempre será mais vantajoso do que C. Também é possível atribuir um valor numérico a uma preferência não-quantificável, a fim de facilitar a comparação.

Uma outra categorização possível do conceito de recompensa está relacionada ao sistema de ranqueamento: se existe uma relação única entre um conjunto de decisões de um grupo de jogadores e um conjunto de resultados respectivos, então esse ganho é denominado ordinário. Alternativamente, uma recompensa é considerada como sendo cardinal quando esta se define através de uma relação na qual a escolha de comportamento leva a uma incerteza da quantificação do ganho, ou seja, quando não existe uma relação única entre um conjunto de decisões de um grupo de jogadores e um conjunto de resultados respectivos.

2.1.4 Estratégias

Estratégia é a maneira pela qual um jogador escolhe agir em uma interação de um jogo, considerando todas as informações disponíveis. Como normalmente um jogador pode escolher atuar de mais de um modo, a estratégia deste é representada como um conjunto de decisões, onde encontram-se descritas todas as formas pela qual é possível atuar.

Se o conjunto de decisões de um jogador é descrito de forma que cada uma dessas escolhas é independente umas das outras, tem-se que este é denominado como um conjunto de **estratégias puras**. Por outro lado, um jogador pode escolher uma determinada decisão em uma interação baseada na crença de que essa é melhor do que uma outra opção no seu conjunto de estratégias, ou seja, é atribuída uma probabilidade sobre esse comportamento. Assim, um jogador pode atribuir a um conjunto de decisões, uma distribuição de probabilidades sobre estas, e definirá o conceito de **estratégia mista**.

2.1.5 Estruturação formal de jogos

Utilizando uma notação mais aderente a teoria dos conjuntos, tem-se a seguintes representações dos elementos descritos até este ponto:

$$J = \{ j_1, j_2, ..., j_n \}$$

é o conjunto de n jogadores que existem em um jogo. Denotamos por:

$$E_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{ik_i}\}$$

o conjunto de estratégias puras, que descreve todas as possibilidades de comportamento de um jogador j_i do conjunto J, onde em s_{ij}, o primeiro índice indica o jogador, e o segundo, indica um possível comportamento.

Como em um jogo as escolhas dos jogadores se influenciam mutuamente, em um primeiro momento é razoável supor que qualquer combinação de decisões dos jogadores é possível. Mais formalmente, isso é representado pelo produto cartesiano dos conjuntos de estratégia dos jogadores, e isso gerará o chamado espaço de estratégias do jogo, conforme simbologia a seguir:

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_{\mathrm{i}} = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n.$$

Exemplo 1 da seção 2.1.5 (Jogo das Moedas): Considere a seguinte situação: dois jogadores, doravante denominados Jogador1 e Jogador2 escondem cada um, uma moeda comum, e ambos interagem da seguinte forma: ambos exibem uma face da moeda que esconderam, e se ambas as faces forem iguais, o Jogador2 entrega sua moeda ao Jogador1, já se faces forem diferentes, o Jogador1 entrega sua moeda ao Jogador2. Diante disso, temos que:

$$J = \{j_1, j_2\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o Jogador1, e j_2, o Jogador2. Denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1 e j_2, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{21} representam a decisão Mostrar Cara dos jogadores j_1 e j_2, respectivamente, e s_{12} e s_{22} representam a decisão Mostrar Coroa dos mesmos jogadores, na mesma ordem. Ademais, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{2} E_i = E_1 \times E_2$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

Cada elemento do conjunto que descreve o espaço de estratégias de um jogo é um vetor com *n* coordenadas. Dessa forma, cada um desses vetores é denominado como um perfil de estratégias puras, uma vez que todos eles guardam a informação de uma possível decisão de cada jogador. Mais formalmente, temos que:

$$\boldsymbol{e} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{nj_n}) \in E.$$

Além disso, em qualquer jogo, temos que as recompensas obtidas pelos jogadores sempre se encontram condicionadas a existência de interações estratégicas entre eles. Dessa forma, cada perfil de estratégias é associado de forma biunívoca a recompensa que cada jogador recebe. Essa relação se dá através de uma função denominada função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_i: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \ \mapsto \ u_i(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_i é a função utilidade associada ao jogador j_1 do conjunto J. Essa função associa a recompensa $u_i(\boldsymbol{e})$ que o jogador j_1 recebe a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo.

Retomando o exemplo 1 da seção 2.1.5 (Jogo das Moedas): Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \ \mapsto \ u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \ \mapsto \ u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 e u_2 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1 e j_2 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$ e $u_2(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1 e j_2 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em equações cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos que:

$$u_1(\text{Cara, Cara}) = 1$$
$$u_1(\text{Cara, Coroa}) = -1$$
$$u_1(\text{Coroa, Cara}) = -1$$
$$u_1(\text{Coroa, Coroa}) = 1$$
$$u_2(\text{Cara, Cara}) = -1$$
$$u_2(\text{Cara, Coroa}) = 1$$
$$u_2(\text{Coroa, Cara}) = 1$$
$$u_2(\text{Coroa, Coroa}) = -1$$

Uma vez que os elementos já se encontram definidos, exploraremos como os jogos são representados. São duas possíveis organizações: uma denominada de forma estratégica, e outra chamada de forma estendida.

2.1.5.1 Forma estratégica

A forma estratégica é uma representação de um jogo que consiste de uma tabela, onde as estratégias de um jogador encontra-se dispostas nas linhas, e as estratégias do outro jogador nas colunas. Assim, os campos da tabela representam um perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo, e apresentam as recompensas que cada jogador recebe.

Retomando o exemplo 1 da seção 2.1.5 (Jogo das Moedas): Compilando as informações na forma de uma tabela, tem-se a representação do Jogo das Moedas na forma estratégica, conforme tabela a seguir.

		Jogador2	
		Cara	Coroa
Jogador1	Cara	(1, -1)	(-1, 1)
	Coroa	(-1, 1)	(1, -1)

Tabela 1: Representação do Jogo das Moedas na forma estratégica

2.1.5.2 Forma estendida

A forma estendida é uma representação de um jogo que consiste de uma árvore de possibilidade. Uma árvore de possibilidade é formada por nós e ramos, onde os nós representam a etapa do jogo na qual um jogador deve escolher uma ação dentro do seu conjunto de estratégias, e um ramo é a representação dessa escolha, sendo que os ramos onde as possibilidades de interações estratégicas se encerram contém as recompensas dos jogadores.

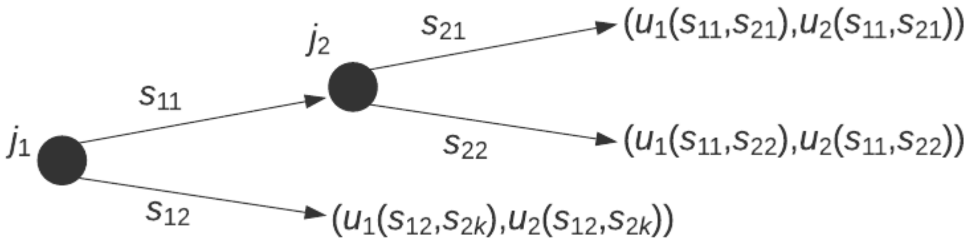

Figura 1: Representação de uma árvore de possibilidade

Cabe ressaltar que as árvores de possibilidades possuem regras para uma representação adequada de um jogo, conforme a seguir:

- todos os nós da árvore podem ser precedidos por apenas um outro nó;
- nenhum ramo pode ligar um nó a ele próprio;
- deve existir uma relação entre sucessão única entre os nós.

Exemplo 2 da seção 2.1.5 (Jogo de Entrada): Uma empresa monopoliza um mercado de distribuição de internet em uma região, e uma possível concorrente avalia se é vantajoso competir, fazendo a sua entrada nesse mercado. O lucro atual da monopolista é de 8 milhões de reais, e um cenário onde a concorrente decida entrar no mercado, leva a uma divisão nos consumidores e um aumento dos gastos em publicidade de ambas as empresas pela disputa dos clientes, diminuindo assim o lucro da monopolista para 3 milhões, e da concorrente para 1 milhão. Ainda assim, a monopolista pode escolher entre apenas se adequar a entrada da concorrente no mercado, onde seu lucro diminui para 5 milhões, e a concorrente fica com o resto dos consumidores, e um lucro de 3 milhões. Os elementos necessários para a formalização se encontram a seguir:

$$J = \{j_1, j_2\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa a empresa concorrente, e j_2, a empresa monopolista. Denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1 e j_2, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Entrar e Não Entrar do jogador j_1, e s_{21} e s_{22} representam as decisões Disputar e Acomodar do jogador j_2. Ademais, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{2} E_i = E_1 \times E_2$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 e u_2 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1 e j_2 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$ e $u_2(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1 e j_2 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em equações cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos que:

$$u_1(\text{Entrar, Disputar}) = 1$$
$$u_1(\text{Entrar, Acomodar}) = 3$$
$$u_1(\text{Não Entrar, Disputar}) = 0$$

$$u_1(\text{Não Entrar, Acomodar}) = 0$$
$$u_2(\text{Entrar, Disputar}) = 3$$
$$u_2(\text{Entrar, Acomodar}) = 5$$
$$u_2(\text{Não Entrar, Disputar}) = 8$$
$$u_2(\text{Não Entrar, Acomodar}) = 8$$

É possível perceber que as ações possíveis do jogador que possui a função Monopolista só se tornam factíveis caso o jogador que possui a função Concorrente escolha a decisão Entrar, e ainda assim os perfis de estratégia que representam as sequencias de decisões (Não Entrar, Disputar) e (Não Entrar, Acomodar) são formalmente descritos. Esse fato será explorado com mais profundidade nos próximos tópicos.

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre Monopolista e Concorrente na forma estendida, conforme figuras a seguir.

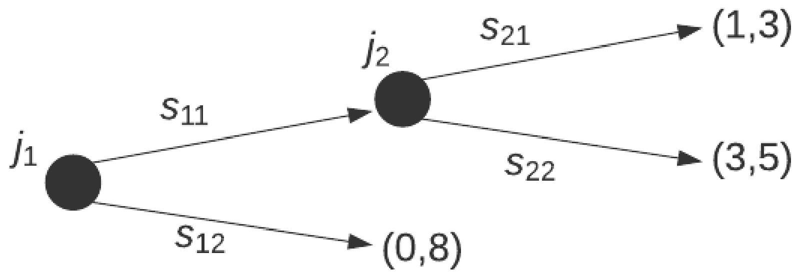

Figura 2: Representação na forma estendida do Jogo de Entrada com simbologia formal

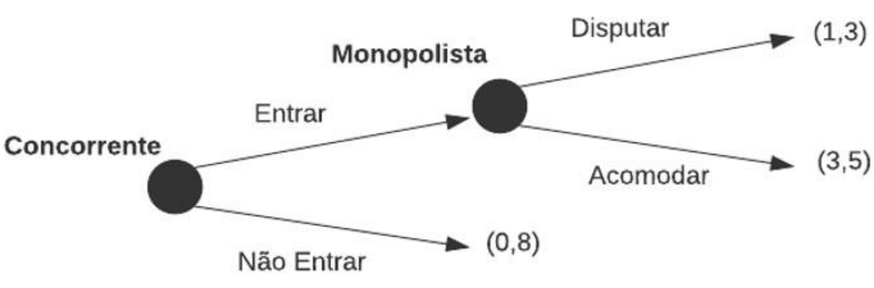

Figura 3: Representação na forma estendida do Jogo de Entrada

2.2 Tipologia e classificação de jogos

A modelagem de interações estratégicas no âmbito da Teoria dos Jogos pode comtemplar uma série de características, tanto no que se refere aos constituintes de um jogo, quanto no que tange ao ambiente onde a interação estratégica ocorre. Assim, o jogo poderá captar aspectos tais como o nível de cooperação entre os jogadores, como as decisões dos jogadores se realizam, qual é o grau de conhecimento que os jogadores possuem sobre a história do jogo, dentre outras características, conforme tópicos a seguir.

2.2.1 Classificação quanto a interação mútua dos jogadores

Os jogos permitem a caracterização das situações onde os jogadores formam acordos sobre qual ação tomar, ou onde tais acordos são proibidos, ou considerados como tal. Os casos nos quais os jogadores podem combinar os seus comportamentos previamente são denominados de jogos cooperativos, e ocorrem em cartéis e eleições, dentre outros exemplos.

No que se refere as situações modeladas neste trabalho, o comportamento dos jogadores contempla a hipótese na qual esses não formam alianças, e agem somente motivados pelas informações coletadas, sempre buscando a maximização das recompensas. Nos cenários em que essa premissa é verdadeira, caracteriza-se o denominado jogo não-cooperativo.

O grau de interação entre os jogadores pode mudar completamente o resultado esperado de um jogo. Um exemplo dessa influência será verificado mais adiante, no exemplo 1 da seção 2.3.1 (Jogo da Divisão).

2.2.2 Classificação quanto a ordem de ação dos jogadores

Em alguns processos de interação, os agentes não conseguem determinar com exatidão quando algum deles já escolheu qual atitude tomar. Desse modo, pode-se postular que todas as decisões foram feitas ao mesmo tempo, definindo o chamado **Jogo Simultâneo**. Jogos simultâneos são frequentemente representados na forma estratégica, uma vez que a matriz característica desta não representa nenhuma relação de ordem entre os jogadores. O exemplo 1 da seção 2.1.5 (Jogo das Moedas) encontra-se nessa classificação.

Outra possibilidade de interação entre os jogadores ocorre quando a ordem de decisão é predeterminada no decorrer do jogo, sendo esse aspecto que estabelece o denominado **Jogo Sequencial**. A forma estendida registra uma relação de ordem entre os jogadores, e por esse motivo, é frequentemente utilizada para representar jogos desse tipo, como é possível observar no exemplo 2 da seção 2.1.5 (Jogo de Entrada).

É importante ressaltar que tanto jogos simultâneos quanto jogos sequenciais podem ser representados em qualquer forma, conforme exemplos a seguir.

		Monopolista	
		Disputar	Acomodar
Concorrente	Entrar	(1, 3)	(3, 5)
	Não Entrar	(0, 8)	(0, 8)

Tabela 2: Representação na forma estratégica do Jogo de Entrada

Quando um jogo sequencial é representado na forma estratégica, todos os perfis de estratégia do espaço de estratégias são registrados na tabela, fato que cria mais uma possibilidade de avaliação do jogo.

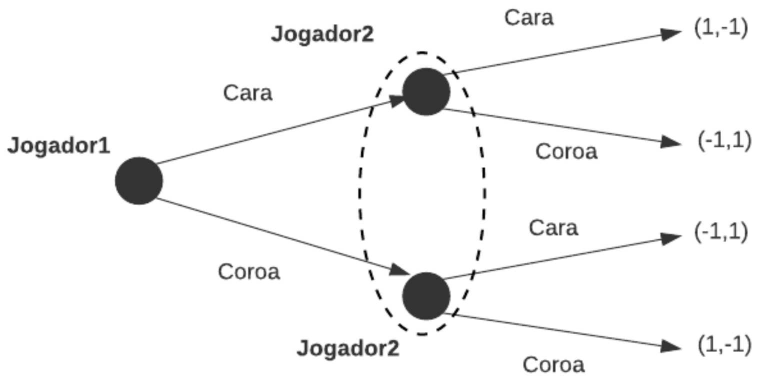

Figura 4: Representação na forma estendida do Jogo das Moedas

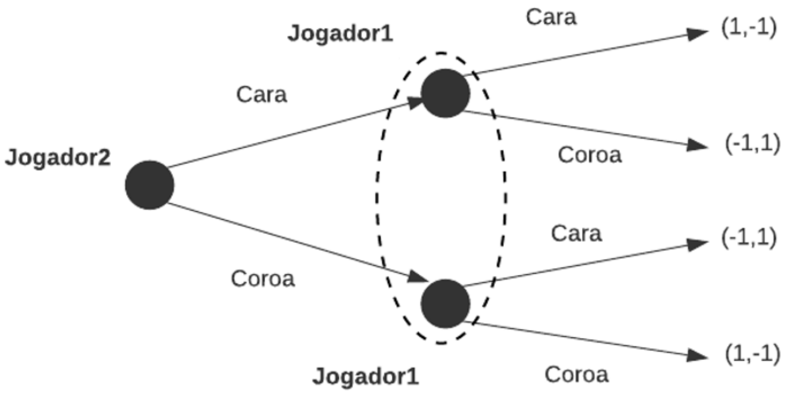

Figura 5: Representação na forma estendida do Jogo das Moedas

A representação de um jogo simultâneo na forma estendida é constituída de um conjunto de informação não-unitário, ou seja, um nó é sucedido por pelo menos dois nós que sinalizam opções do mesmo jogador. A ordem na qual os jogadores são registrados na árvore é irrelevante, uma vez que o segundo jogador na ordem sempre possui um conjunto de informação com dois nós.

2.2.3 Classificação quanto ao tipo de informação

Uma **informação** é um fator que caracteriza os jogadores e o ambiente onde o jogo se desenrola, sendo dessa forma, um conceito que abrange todos os modelos e exemplos apresentados neste trabalho. De maneira geral, um conjunto de informações classifica um tipo de jogo em função do que os jogadores podem ou não conhecer. Dessa forma, uma informação possui características de conhecimento comum quando todos os jogadores sabem dela.

Uma primeira divisão surge quando se analisa o quanto um jogador conhece a história prévia do jogo quando esse deve escolher uma opção dentro do seu conjunto de estratégias. Na situação de um jogo que postula um cenário onde todos os jogadores sabem toda a história prévia do jogo antes de jogarem, temos o chamado jogo de informação perfeita. Caso contrário, ou seja, quando as jogadas anteriores não são conhecidas por todos os jogadores, temos o denominado jogo de informação imperfeita.

De modo mais abrangente, no momento em que consideramos outros aspectos, tais como conhecimento das recompensas e das funções dos jogadores, por exemplo, um jogo é denominado como um jogo de informação completa quando todos conhecem todas as estratégias e todos os ganhos possíveis dos outros agentes da interação, mesmo que as decisões ainda não sejam conhecidas, como nos jogos simultâneos. Em um cenário onde existem incertezas de pelo menos um dos jogadores quanto aos aspectos anteriormente mencionados, o jogo é classificado como um jogo de informação incompleta.

No aspecto da estruturação formal, o ferramental descrito até este ponto do trabalho lida adequadamente com jogos de informação completa, uma vez que neles os jogadores fazem suas decisões baseados apenas nos seus respectivos conjuntos de estratégias puras. Jogos sequenciais de informação perfeita também são devidamente representados, uma vez que estes só existem quando todos os jogadores operam com estratégias puras.

Todas as outras tipologias de jogo necessitam da definição mais categórica do conceito de estratégias mistas. Desse modo, para um jogador $j_i \in J$, existe uma distribuição de probabilidades g_i sobre o respectivo conjunto de estratégias puras E_i. Cada g_i é um elemento de um conjunto, conforme simbologia a seguir:

$$\Delta_{k_i} = \{(x_1, ..., x_{k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i} | x_1 \geq 0, ..., x_{k_i} \geq 0\} \text{ e } \sum_{o=1}^{k_i} x_o = 1$$

, que descreve todas as possíveis distribuições que o perfil g_i pode assumir. Logo, denotamos g_i por:

$$g_i = (g_{i1}, g_{i2}, ..., g_{ik_i}).$$

Cada perfil g_i corresponde a um conjunto de estratégias de um jogador $j_i \in J$, conforme simbologia a seguir:

$$E_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{ik_i}\}.$$

Ademais, cada um dos componentes do perfil g_i deve possuir um valor entre zero e um, e a soma deles será sempre igual a um, a fim de cobrir todas as possibilidades de ação, conforme simbologia a seguir:

$$g_{i1} \geq 0, ... , g_{ik_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{o=1}^{k_i} g_o = 1.$$

Cabe ressaltar que todas as distribuições que possuem uma componente com valor igual 1, e, portanto, todas as outras iguais a zero, simbolizam os cenários de estratégias puras.

Assim, dados um conjunto de estratégias puras E_i e uma distribuição g_i, o conjunto de estratégias mistas M_i de um jogador $j_i \in J$ é descrito por a seguir:

$$M_i = \begin{pmatrix} s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ik_i} \\ g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ik_i} \end{pmatrix}.$$

Retomando o Exemplo 1 da seção 2.1.5 (Jogo das Moedas), contudo agora os jogadores escolhem aleatoriamente qual face da moeda exibem um ao outro, ou seja, cada face possui a probabilidade de 0,5 de aparecer. Formalizando a situação, temos que:

$$g_1 = (g_{11}, g_{12})$$
$$g_2 = (g_{21}, g_{22})$$

são as distribuições de probabilidades que incidem sobre os conjuntos de estratégias puras E_1 e E_2, respectivamente. Na situação específica, g_{11}, g_{12}, g_{21} e g_{22} possuem valor igual a 0,5. Ademais, temos que:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \text{Mostrar Cara} & \text{Mostrar Coroa} \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} \text{Mostrar Cara} & \text{Mostrar Coroa} \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

são os conjuntos de estratégias mistas do jogadores j_1 e j_2, respectivamente.

Uma possibilidade da utilização de estratégias mistas ocorre na modelagem de jogos de informação incompleta. Nessa situação, um jogo de informação incompleta é convertido em um jogo de informação imperfeita, convertendo a incerteza de um aspecto do jogo para uma indeterminação da história prévia. Essa transformação se torna operacionalizável através da introdução de um pseudojogador, geralmente denominado Natureza, que não possui recompensas designadas, e por isso, considera-se que ele é neutro e atribui de maneira totalmente aleatória os valores nas distribuições de probabilidades nas estratégias dos jogadores que interagem.

Exemplo 1 da seção 2.2.3 (Jogo das Balas): Um adulto coloca diante de duas crianças em pote com uma quantidade indeterminada de balas, e estas podem ter dois sabores: doce ou azedo, e sabe-se que as duas crianças preferem a bala doce quando comparada a azeda. Considera-se que o pote pode conter balas de diferentes sabores em qualquer proporção. Uma das crianças é seleciona para retirar uma bala do recipiente, e a mesma pode agir de duas maneiras: ela pode escolher ficar com a bala retirada, ou oferece-la a outra criança, que por sua vez pode ou não aceitar essa bala. Ao final desse processo, a criança que ficou a bala mostra a mesma ao adulto, e este identifica o sabor daquela. Diante disso, o adulto distribui outras balas da seguinte maneira: no caso da bala original ter sido oferecida, ele dá uma outra bala do sabor diferente para a criança que ficou sem bala alguma. Alternativamente, caso a criança que retirou a bala do pote escolha não oferecer a bala, a outra ganha duas balas do sabor oposto.

Temos que o adulto da situação descrita é neutro e não participa da interação estratégica propriamente dita. Ademais, como não é possível afirmar com exatidão qual é a proporção de cada tipo de bala no pote, afirmaremos que a criança que retira a bala tem chance igual a p de encontrar uma bala doce, e consequentemente, uma probabilidade complementar (1-p) de achar uma azeda. No aspecto da estruturação formal, inicialmente definimos que a relação de preferência dos ganhos: uma vez que as crianças preferem a bala doce quando comparada a azeda, receber balas doces gerará recompensas positivas, sendo atribuído valor de 1 por bala obtida desse tipo, e receber balas azedas gerará recompensas negativas, sendo atribuído valor de -1 por bala obtida desse tipo. Temos que a interação pode ser modelada como um jogo sequencial de informação incompleta, uma vez que não é possível determinar como exatidão as recompensas no cenário. Para que ocorra a conversão para um modelo com informação imperfeita, primeiramente devemos modelar dois jogos sequenciais de informação perfeita: um onde todas as crianças sabem que todas as balas são doces, e outra, onde todas as balas são azedas. Esses dois modelos possuem os mesmos jogadores, e esses possuem as mesmas estratégias, variando somente nas funções utilidade, conforme estruturação formal a seguir:

$$J = \{j_1, j_2\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa a primeira criança, e j_2, a segunda criança. Denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1 e j_2, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Oferecer e Manter do jogador j_1, e s_{21} e s_{22} representam as decisões Aceitar e Recusar do jogador j_2. Ademais, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{2} E_i = E_1 \times E_2$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

- Cenário balas doces

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1 : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2 : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 e u_2 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1 e j_2 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$ e $u_2(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1 e j_2 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em equações cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos que:

$$u_1(\text{Oferecer, Aceitar}) = -1$$

$$u_1(\text{Oferecer, Recusar}) = 1$$
$$u_1(\text{Manter, Aceitar}) = 1$$
$$u_1(\text{Manter, Recusar}) = 1$$
$$u_2(\text{Oferecer, Aceitar}) = 1$$
$$u_2(\text{Oferecer, Recusar}) = -1$$
$$u_2(\text{Manter, Aceitar}) = -2$$
$$u_2(\text{Manter, Recusar}) = -2$$

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica na forma estendida, conforme figura a seguir.

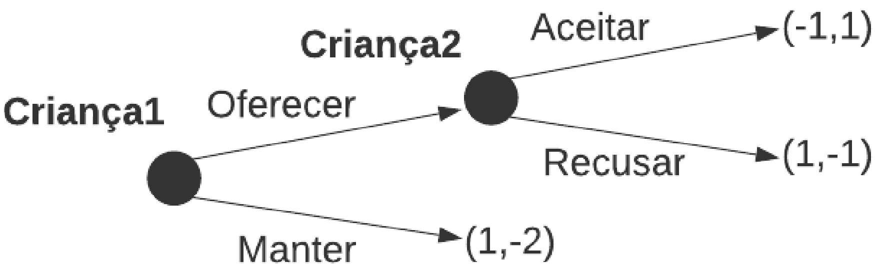

Figura 6: Representação na forma estendida do cenário de balas doces do Jogo das Balas

- Cenário balas azedas

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 e u_2 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1 e j_2 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$ e $u_2(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1 e j_2 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em equações cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos que:

u_1(Oferecer, Aceitar) = 1

u_1(Oferecer, Recusar) = -1

u_1(Manter, Aceitar) = -1

u_1(Manter, Recusar) = -1

u_2(Oferecer, Aceitar) = -1

u_2(Oferecer, Recusar) = 1

u_2(Manter, Aceitar) = 2

u_2(Manter, Recusar) = 2

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica na forma estendida, conforme figura a seguir.

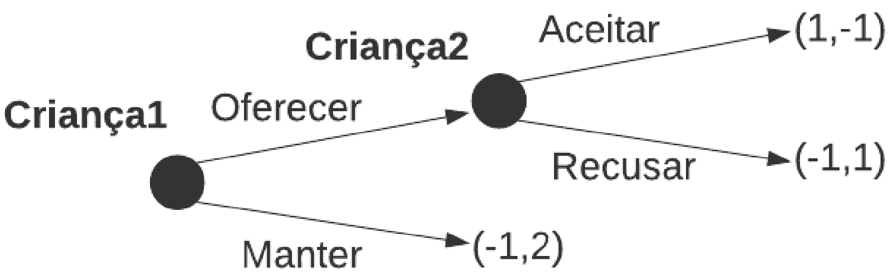

Figura 7: Representação na forma estendida do cenário de balas azedas do Jogo das Balas

Uma vez definidos os jogos-base, a modelagem da situação é completada com a adição de pseudojogador Natureza, que atribui de forma neutra uma probabilidade *p* do jogo se encontrar no cenário de balas totalmente doces, e (1-*p*) para o cenário de balas completamente azedas.

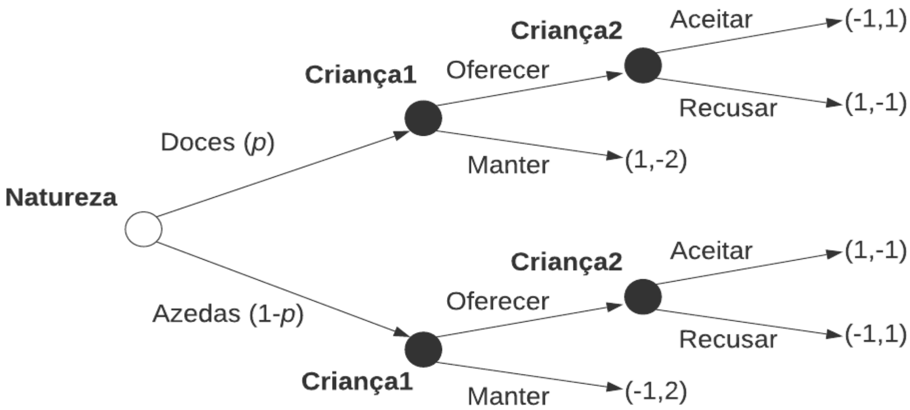

Figura 8: Representação na forma estendida do Jogo das Balas

2.2.4 Jogos com sinalização de expectativa

Em jogos sequenciais, um jogador pode utilizar o que ele sabe sobre a história do jogo como informação para subsidiar a sua tomada de decisão. Dessa forma, o jogador condiciona sua estratégia a uma probabilidade de inferir corretamente qual é a melhor estratégia em função da sinalização coletada do ambiente. A formalização dessa atribuição se dá com a utilização do teorema de Bayes, que é representado a seguir, com os eventos A e B de um espaço amostral S

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B}|\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}$$

, onde $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ representa a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B já aconteceu, $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ representa a probabilidade do evento B ocorrer, dado que o evento A já aconteceu, e $P(\mathrm{A})$ representa a probabilidade do evento A ocorrer.

Retomando o exemplo 1 da seção 2.2.3 (Jogo das Balas), os mesmos pressupostos continuam válidos, contudo a segunda criança tenta deduzir alguma informação do cenário em função da escolha Oferecer da primeira criança. Para tanto, conferi uma probabilidade q de se encontrar no cenário de balas doces. Dessa maneira, temos que:

$$q = P(\text{Bala Doce}|\text{Oferecer}) = \frac{P(\text{Oferecer}|\text{Bala Doce})\cdot P(\text{Bala Doce})}{P(\text{Bala Doce})}.$$

A forma estendida do Jogo das Balas com sinalização contempla um conjunto não-unitário de informação em nós que descrevem as decisões da segunda criança, simbolizando a indefinição de localização entre os cenários.

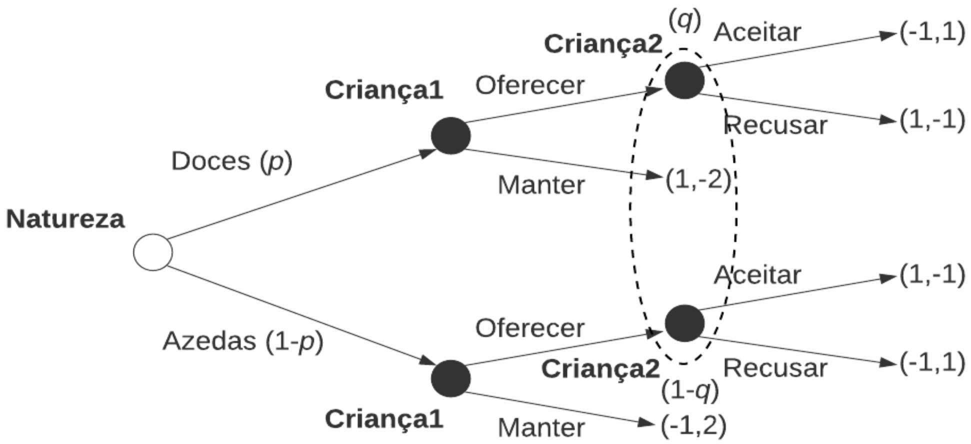

Figura 9: Representação na forma estendida do Jogo das Balas com sinalização de expectativas

2.3 Solução de jogos

A modelagem de uma interação estratégica permiti a visualização do ambiente onde o jogo se desenvolve, mas somente isso não nos permite inferir qual seria o resultado mais provável. Para tanto, devemos ter métodos que nos propiciam a avaliação dos jogos, sempre tendo em mente que os jogadores sempre buscam maximizar seus ganhos.

2.3.1 Dominância estrita e Dominância fraca entre estratégias

Nos processos de interação estratégica, um jogador sempre escolhe o comportamento que gera o melhor ganho possível. Contudo, dentro de um conjunto de estratégias, o jogador se deparar com comportamentos que produzem a mesma recompensa, ou uma escolha que sempre produz o melhor ganho, independente das escolhas dos outros jogadores. Para avaliar como as opções de um jogador se hierarquizam, utiliza-se um perfil de estratégias que possui escolhas de todos os outros jogadores, menos o jogador $j_i \in J$, conforme simbologia a seguir:

$$\mathbf{e}_{-i} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, ..., s_{nj_n}) \in E_{-i}.$$

Adicionalmente, denotamos por:

$$E_{-i} = E_1 \times E_2 \times E_{(i-1)} \times E_{(i+1)} \times ... \times E_n$$

o espaço de estratégias de todos os outros jogadores, sem contar com o jogador $j_i \in J$.

Consequentemente, um perfil de estratégias completo de um jogo pode ser reescrito como se segue:

$$\boldsymbol{e} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{(i\text{-}1)j_{(i\text{-}1)}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \ldots, s_{nj_n}) \in E.$$

Do ponto de vista formal, as relações entre os elementos de um conjunto de estratégias de um jogador $j_i \in J$ podem ser dos seguintes tipos:

Estratégia estritamente dominante

Pode-se dizer que um comportamento $s_{ik} \in E_i$ é estritamente dominante com relação ao $s_{ik_0} \in E_i$ quando aquele sempre gera um maior ganho, independentemente das escolhas dos outros jogadores. Isso significa que essa relação se reflete a função utilidade para o jogador $j_i \in J$, conforme simbologia a seguir:

$$u_i(s_{ik},\mathbf{e}_{\text{-}i}) > u_i(s_{ik_0},\mathbf{e}_{\text{-}i}).$$

Estratégia fracamente dominante

Pode-se dizer que um comportamento $s_{ik} \in E_i$ é fracamente dominante com relação ao $s_{ik_0} \in E_i$ quando o primeiro gera um ganho maior ou igual ao obtido pelo outro, independentemente das escolhas dos outros jogadores. Isso significa que essa relação se reflete a função utilidade para o jogador $j_i \in J$, conforme simbologia a seguir:

$$u_i(s_{ik},\mathbf{e}_{\text{-}i}) \geq u_i(s_{ik_0},\mathbf{e}_{\text{-}i}).$$

2.3.2 Processos de eliminação iterativa e Equilíbrio de Nash

Os procedimentos que buscam encontrar soluções de um jogo sempre possuem como premissa a obtenção de perfis de estratégias, doravante denominado genericamente $\boldsymbol{e}^*$, que maximizam os ganhos de todos os jogadores, levando em conta a interação mútua dos mesmos. O processo de eliminação dos perfis com estratégias dominadas é denominado **processo de eliminação iterativa**. Na forma estratégica, a determinação dos possíveis $\boldsymbol{e}^*$ é feita pela eliminação dos perfis com estratégias dominadas, e caso essas combinações descrevam o comportamento que produz a melhor recompensa para um jogador dadas as estratégias dos outros jogadores, e o mesmo ocorre para todos os outros jogadores, então esses perfis se constituirão como sendo os **Equilíbrios de Nash** do jogo, ou seja, serão suas soluções mais estáveis.

Exemplo 1 da seção 2.3.2 (Jogo da Divisão): Considere a seguinte situação: dois indivíduos disputam um prêmio de 10 reais, ambos podem escolher agir de duas maneiras: diante dos dois existem duas cartas, uma onde se lê Dividir, e outra, Roubar. A escolha da primeira implica numa disposição de dividir o prêmio, enquanto a escolha da segunda implica que o jogador quer uma proporção maior do montante, enquanto incorre no risco de receber uma quantia menor. Os jogadores tomam suas decisões ao mesmo tempo, e os resultados possíveis são os seguintes: se ambos escolhem a carta Dividir, o prêmio é dividido igualmente; alternativamente, se ambos escolhem Roubar, cada um recebe 2 reais de prêmio; finalmente, se opta por Dividir, e o outro por Roubar, o primeiro recebe 3 reais, e o segundo, 6 reais. Formalmente, a situação é modelável, conforme simbologia a seguir:

$$J = \{j_1, j_2\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o primeiro jogador, e j_2, o segundo jogador. Ademais, denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1 e j_2, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{21} representam a decisão Dividir dos jogadores j_1 e j_2, respectivamente, e s_{12} e s_{22} representam a decisão Roubar dos mesmos jogadores, na mesma ordem. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{2} E_i = E_1 \times E_2$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 e u_2 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1 e j_2 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$ e $u_2(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1 e j_2 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em equações cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

u_1(Dividir, Dividir) = 5

u_1(Dividir, Roubar) = 3

u_1(Roubar, Dividir) = 6

u_1(Roubar, Roubar) = 2

u_2(Dividir, Dividir) = 5

u_2(Dividir, Roubar) = 6

u_2(Roubar, Dividir) = 3

u_2(Roubar, Roubar) = 2

Compilando as informações na forma de uma tabela, tem-se a representação da interação na forma estratégica, conforme visualização a seguir.

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)
	Roubar	(6, 3)	(2, 2)

Tabela 3: Representação do Jogo da Divisão na forma estratégica

A solução dessa interação estratégica pode ser obtida por eliminação de estratégias estritamente dominadas, conforme procedimentos a seguir.

O comportamento Dividir sempre gera um ganho melhor para o primeiro jogador, então as entradas correspondentes a estratégia Roubar desse jogador podem ser eliminadas da matriz.

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)

Tabela 4: Representação da eliminação da estratégia Roubar do primeiro jogador

Então, analisando a tabela 4, temos que o comportamento Dividir produz uma maior recompensa ao segundo jogador, implicando na exclusão da coluna que representa a decisão Roubar do segundo jogador da tabela

		Jogador2
		Dividir
Jogador1	Dividir	(5, 5)

Tabela 5: Representação da eliminação da estratégia Roubar do segundo jogador

Desse modo, o perfil de estratégias $\boldsymbol{e}^*$, que descreve o Equilibro de Nash do jogo, nos diz que a melhor opção possível para os dois jogadores é dividir igualmente o prêmio, conforme simbologia a seguir:

$$\boldsymbol{e}^* = (\text{Dividir, Dividir}) \in E.$$

- Solução do Jogo da Divisão com novos parâmetros

A fim de exemplificar o processo de eliminação para estratégias fracamente dominadas, retomamos Exemplo 1 da seção 2.3.2 (Jogo da Divisão), alterando as recompensas apenas na situação onde ambos os jogadores escolhem Roubar, passando de 2 reais para 4 reais de prêmio para cada. Dessa forma, teremos novas funções utilidades, conforme é possível verificar a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 e u_2 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1 e j_2 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$ e $u_2(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1 e j_2 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em equações cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

$$u_1(\text{Dividir, Dividir}) = 5$$
$$u_1(\text{Dividir, Roubar}) = 3$$
$$u_1(\text{Roubar, Dividir}) = 6$$
$$u_1(\text{Roubar, Roubar}) = 4$$
$$u_2(\text{Dividir, Dividir}) = 5$$
$$u_2(\text{Dividir, Roubar}) = 6$$
$$u_2(\text{Roubar, Dividir}) = 3$$
$$u_2(\text{Roubar, Roubar}) = 4$$

Compilando as informações na forma de uma tabela, tem-se a representação da interação na forma estratégica, conforme visualização a seguir.

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)
	Roubar	(6, 3)	(4, 4)

Tabela 6: Representação do Jogo da Divisão com novos parâmetros na forma estratégica

Analisando a tabela 6, temos que só existem estratégias fracamente dominantes para os dois jogadores. Diante disso, se aplicará a seguinte metodologia: se fixará um comportamento de um jogador, e se verificará qual opção do outro produzirá o melhor ganho, marcando na matriz, repetindo-se esse procedimento até que todas as combinações estejam contempladas. Começando por fixar as escolhas de j_2, temos

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)
	Roubar	(6, 3)	(4, 4)

Tabela 7: Representação da melhor escolha possível para o primeiro jogador, dado que o segundo jogador escolheu Dividir

As marcações são registradas, e permanecem nas matrizes subsequentes.

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)
	Roubar	(6, 3)	(4, 4)

Tabela 8: Representação da melhor escolha possível para o primeiro jogador, dado que o segundo jogador escolheu Roubar

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)
	Roubar	(6, 3)	(4, 4)

Tabela 9: Representação da melhor escolha possível para o segundo jogador, dado que o primeiro jogador escolheu Dividir

		Jogador2	
		Dividir	Roubar
Jogador1	Dividir	(5, 5)	(3, 6)
	Roubar	(6, 3)	(4, 4)

Tabela 10: Representação da melhor escolha possível para o segundo jogador, dado que o primeiro jogador escolheu Roubar

Analisando a tabela 10, temos que somente o campo do perfil de estratégias

$$\boldsymbol{e} = (\text{Roubar, Roubar}) \in E$$

possui as marcações referentes as melhores escolhas de dois jogadores. Logo, temos que:

$$\boldsymbol{e}^* = (\text{Roubar, Roubar}) \in E$$

é o Equilíbrio de Nash nesse cenário, ou seja, dado que os jogadores se encontram em uma situação não-cooperativa, ambos escolheram Roubar. Neste ponto cabe comentar o impacto que a cooperação entre os jogadores possui no resultado de um jogo, pois um cenário no qual fosse permitida a comunicação entre os jogadores aumentaria de forma significativa a probabilidade de que ambos escolhessem Dividir, uma vez que essa combinação traria uma recompensa maior para ambos.

2.3.3 Divisão em subjogos e algoritmo de indução reversa

Em jogos sequenciais, a busca da solução mais estável deve levar em conta não apenas a maximização dos ganhos em função das interações mútuas, mas também a ordem na qual essas interações se desenrolam. Para tanto, a metodologia utilizada para a eliminação das estratégias dominadas será uma que dividi o jogo em conjuntos de informação, partindo da representação na forma estendida. Esse processo de partição é denominado de **divisão em subjogos**, e ele se dá sempre começando pelos nós terminais de uma árvore de possibilidades.

Um subjogo deve ter as seguintes características:

- um único nó deve ser o inicial de um subjogo;

- deve conter todos os nós subsequentes do nó inicial;
- conterá todos os nós de um conjunto de informação.

Seguindo um exemplo genérico com estruturação temos as seguintes partições.

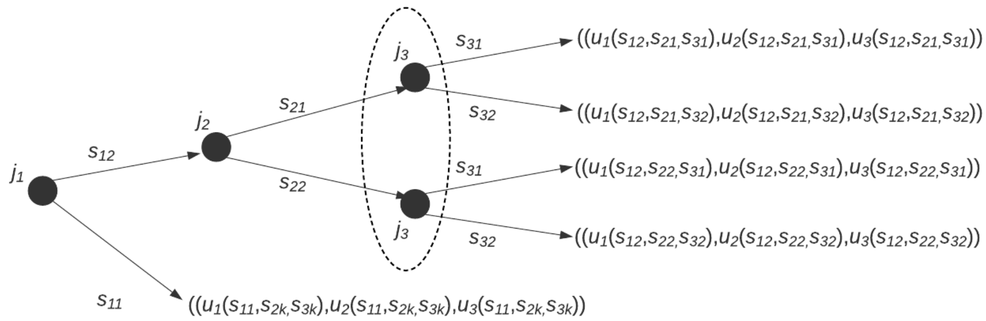

Figura 10: Representação de um jogo genérico sequencial na forma estendida

Uma vez que existem dois nós que representam o j_3, esses não podem iniciar um subjogo. Logo, o primeiro subjogo começará no nó que simboliza o j_2, e conterá os nós subsequentes. Em seguida, o segundo e último subjogo se inicia no nó do j_1.

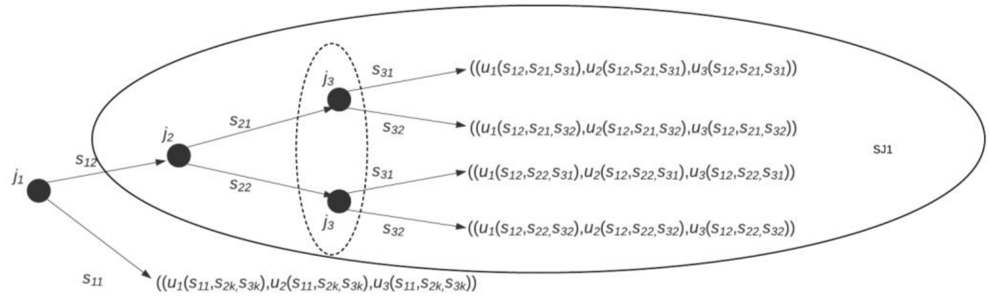

Figura 11: Representação de um jogo genérico sequencial na forma estendida – Partição do primeiro subjogo (SJ1)

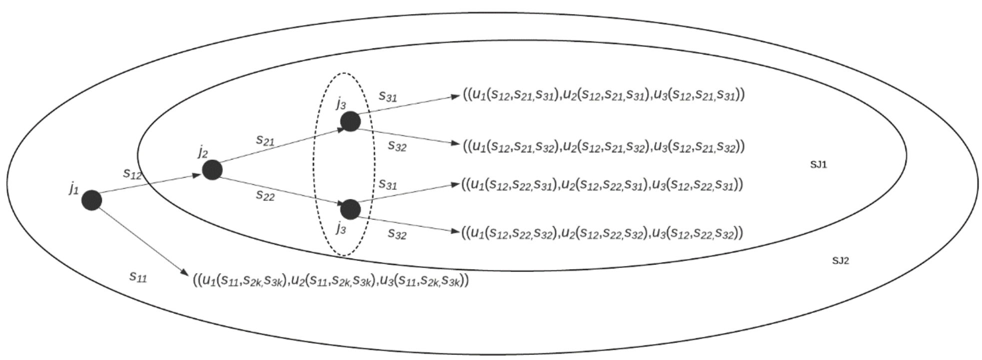

Figura 12: Representação de um jogo genérico sequencial na forma estendida – Partição do segundo subjogo (SJ2)

A divisão em subjogos permite verificação dos possíveis perfis de estratégias que produziriam as soluções mais estáveis em cada partição do um jogo, e a progressão dessas determinações gera a solução mais estável da totalidade da interação. Assim, se um determinado perfil de estratégias é um Equilíbrio de Nash em cada subjogo e no jogo em sua totalidade, esse será denominado como sendo um **Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos**.

O método que congrega e operacionaliza a obtenção do Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos em uma forma estendida é denominado de algoritmo da indução reversa, e este consiste em determinar as melhores recompensas para os jogadores do primeiro subjogo e carregar essa informação para o próximo subjogo, até que se chegue ao último.

- Solução do Jogo de Entrada

Retomando o exemplo 3 da seção 2.1.5 (Jogo de Entrada), reproduzimos sua forma estendida na figura a seguir:

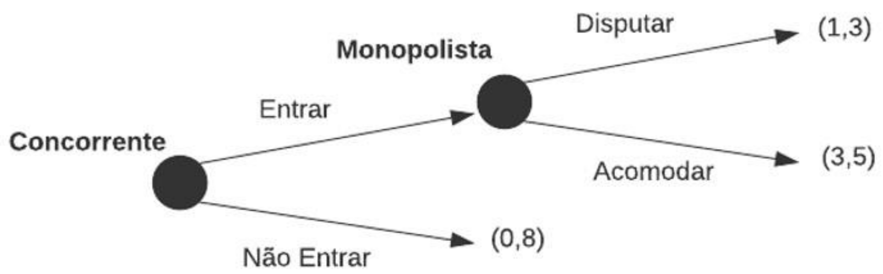

Figura 13: Representação na forma estendida do Jogo de Entrada

Para iniciar a aplicação do algoritmo da indução reversa, inicialmente particionamos o jogo em subjogos, conforme figura a seguir.

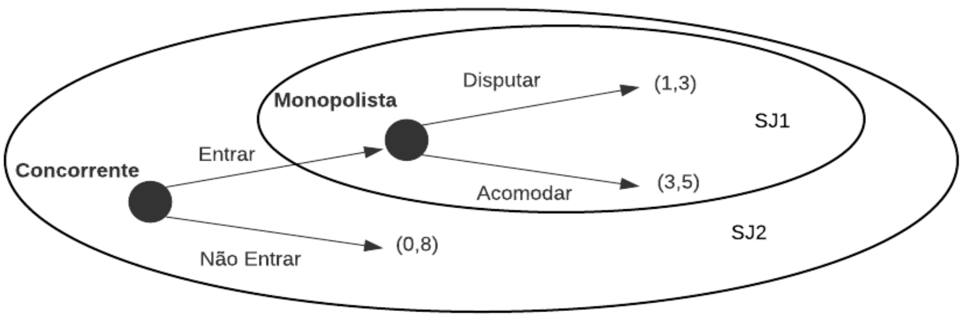

Figura 14: Representação na forma estendida do Jogo de Entrada – Divisão em subjogos

A análise do primeiro subjogo nos leva a conclusão de que o comportamento Acomodar é dominante com relação ao comportamento Disputar, levando a eliminação deste. A recompensa associada a escolha Acomodar será carregada no próximo subjogo.

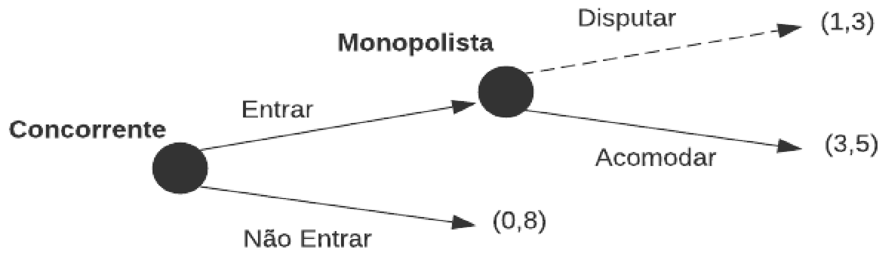

Figura 15: Resolução do SJ1 do Jogo de Entrada

A análise do segundo e último subjogo nos leva a conclusão o comportamento Entrar é dominante com relação ao comportamento Não Entrar, levando a eliminação deste.

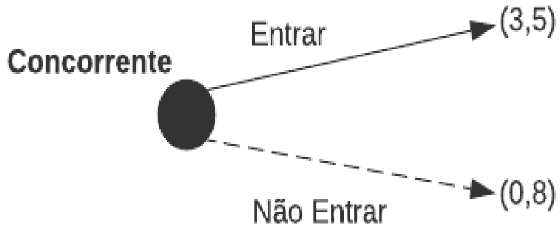

Figura 16: Resolução do SJ2 do Jogo de Entrada

Assim, o algoritmo resulta na obtenção do perfil de estratégias que representa a solução mais estável do jogo, e, portanto, a interação terá como resultado mais consistente a entrada da empresa concorrente no mercado e a simples acomodação deste fato pela empresa monopolista.

2.3.4 Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas

No âmbito deste trabalho, trataremos da solução de jogos com estratégias mistas de apenas um tipo, que ocorre na modelagem da conversão de um jogo de informação incompleta em um jogo de informação imperfeita, onde há a inserção do pseudojogador Natureza, que introduz uma variável probabilística. Nesse caso, essa variável incide diretamente sobre as recompensas dos cenários que formam o jogo de informação incompleta.

- Solução do Jogo das Balas

Retomando o exemplo 2 da seção 2.2.3 (Jogo das Balas). A variável *p* incide sobre as recompensas do cenário Doces, e (1-*p*), sobre o cenário Azedas, conforme tabelas a seguir. Cabe esclarecer que o símbolo • tem a função de designar uma estratégia qualquer do jogador no perfil de estratégia analisado.

Perfis de estratégia	**Ganhos da Criança-1**
(Manter, •)	$(1)\cdot(p)+(-2)\cdot(1-p) = 3p - 2$
(Oferecer, Aceitar)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Oferecer, Recusar)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$

Tabela 11: Recompensas ponderadas da primeira criança no Jogo das Balas

Perfis de estratégia	**Ganhos da Criança-1**
(Manter, •)	$(-1)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 3p$
(Oferecer, Aceitar)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Oferecer, Recusar)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 12: Recompensas ponderadas da segunda criança no Jogo das Balas

Compilando as funções que produzem os ganhos dos dois jogadores em uma tabela e em uma árvore de possibilidades, temos as formas estratégica e estendida, respectivamente, com recompensas ponderadas do jogo.

		Criança2	
		Aceitar	Recusar
Criança1	Oferecer	$(1 - 2p, 2p - 1)$	$(2p - 1, 1 - 2p)$
	Manter	$(3p - 2, 2 - 3p)$	$(3p - 2, 2 - 3p)$

Tabela 13: Representação esquemática das recompensas ponderadas do Jogo das Balas

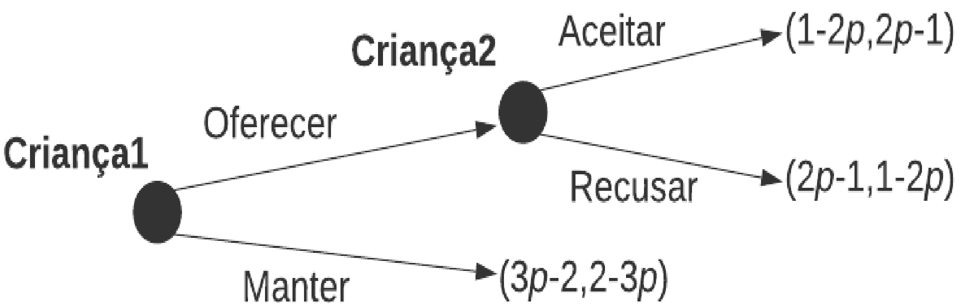

Figura 17: Representação na forma estendida do Jogo das Balas com recompensas ponderadas

Essa abordagem permite determinar os equilíbrios de Nash para diversos valores de *p*, permitindo a avaliação para valores de *p* maiores do que zero e menores do que um.

Primeiramente, a forma estendida é particionada em subjogos para permitir a aplicação do algoritmo da indução reversa, conforme figura a seguir.

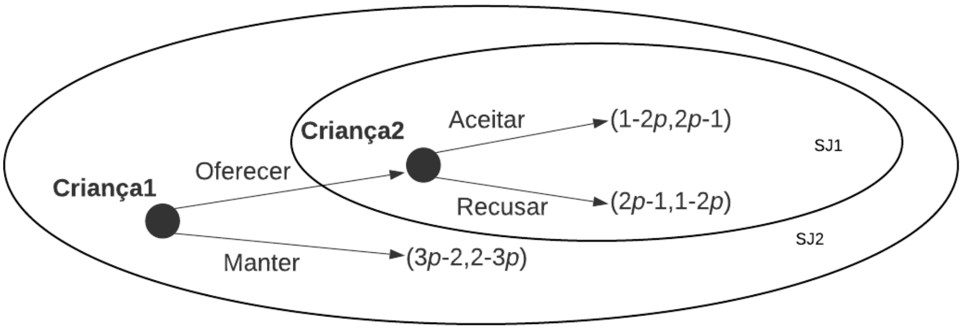

Figura 18: Representação na forma estendida do Jogo das Balas com recompensas ponderadas - Partição em subjogos

A resolução de cada um dos subjogos se dará pela comparação entre os ganhos associados as estratégias do jogador presente. Nessas análises, as relações entre as recompensas são estruturadas em igualdades ou desigualdades, consequentemente gerando equações e inequações, onde encontram-se, entre parênteses, as escolhas possíveis de cada jogador. Naturalmente, a solução das equações trará valores de *p* que igualam o valor dos ganhos analisados, redundando que o jogador não terá nenhuma preferência entre as escolhas. Assim, o símbolo (Indiferente) será utilizado para designar a situação onde o jogador pode escolher qualquer decisão indistintamente, e os valores de *p* que recebem essa sinalização são desconsiderados nas análises dos subjogos subsequentes.

Iniciando a análise do primeiro subjogo, tem-se que a mesma se dá através da comparação dos ganhos que a Criança2 pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de *p*, devemos proceder uma comparação entre os ganhos da Criança2 para valores de *p* maiores do que 0 e maiores do que 1. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de *p* que igualam os ganhos associados as estratégias da Criança2, conforme equação a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Recusar)} = 2p - 1 \text{ (Aceitar)} \leftrightarrow p = 1/2 \text{ (Indiferente).}$$

Posteriormente, são analisados os valores de *p*, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Recusar)} > 2p - 1 \text{ (Aceitar)} \leftrightarrow p < 1/2 \text{ (Recusar)},$$

$$1 - 2p \text{ (Recusar)} < 2p - 1 \text{ (Aceitar)} \leftrightarrow p > 1/2 \text{ (Aceitar)}.$$

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma decisão da Criança2 que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa da Criança2
Valores de *p*	$p < 1/2$	Recusar
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	Aceitar

Tabela 14: Representação esquemática das escolhas da Criança2 em função do valor de *p*

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual a Criança2 escolhe Recusar para valores de *p* menores do que 1/2, e outra na qual a Criança2 escolhe Aceitar para valores de *p* maiores do que 1/2, conforme figuras a seguir.

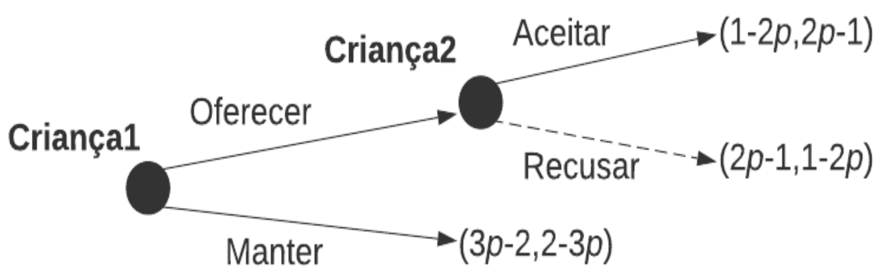

Figura 19: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo das Balas para valores de *p* maiores do que 0,5

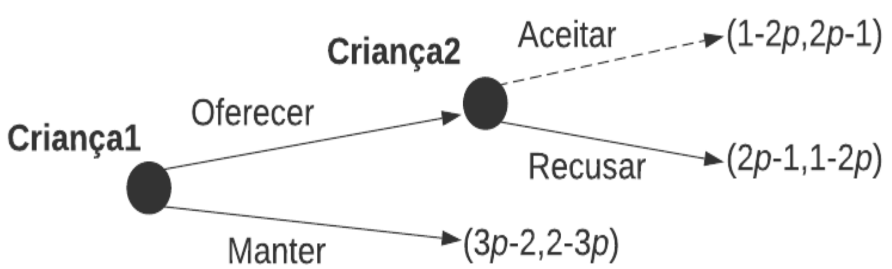

Figura 20: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo das Balas para valores de *p* menores do que 0,5

A resolução do segundo subjogo se balizará nos intervalos de variação de p definidos na resolução do primeiro subjogo. Para valores de p menores do que 1/2, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos da Criança1, conforme relação a seguir:

$$p < 1/2 \Leftrightarrow 2p - 1 \text{ (Oferecer)} > 3p - 2 \text{ (Manter)}.$$

Alternativamente, para valores de p maiores do que 1/2, obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias da Criança1, conforme equação a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Oferecer)} = 3p - 2 \text{ (Manter)} \leftrightarrow p = 3/5 \text{ (Indiferente)}.$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Oferecer)} > 3p - 2 \text{ (Manter)} \leftrightarrow p < 3/5 \text{ (Oferecer)},$$
$$1 - 2p \text{ (Oferecer)} < 3p - 2 \text{ (Manter)} \leftrightarrow p > 3/5 \text{ (Manter)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão da Criança1 que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa da Criança1
Valores de *p*	$p < 1/2$	Oferecer
	$1/2 < p < 3/5$	Oferecer
	$p = 3/5$	Indiferente
	$p > 3/5$	Manter

Tabela 15: Representação esquemática das escolhas da Criança1 em função do valor de p

Portanto, o segundo subjogo possui três soluções, uma na qual a Criança1 escolhe Oferecer para valores de p menores do que 1/2; outra na qual a Criança1 escolhe Oferecer para valores de p maiores do que 1/2 e menores do que 3/5; e finalmente, uma na qual a Criança1 escolhe Manter para valores de p maiores do que 3/5. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

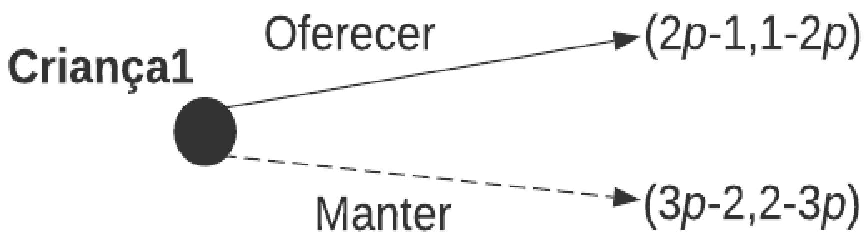

Figura 21: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo das Balas para valores de *p* menores do que 0,5

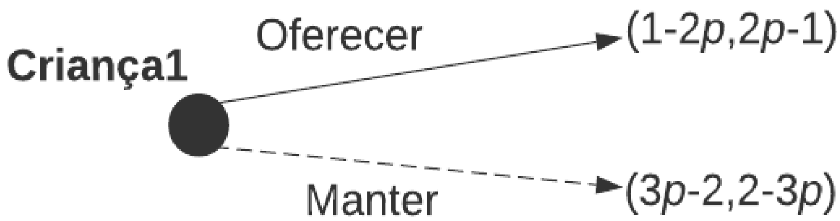

Figura 22: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo das Balas para valores de *p* maiores do que 0,5 e menores do que 0,6

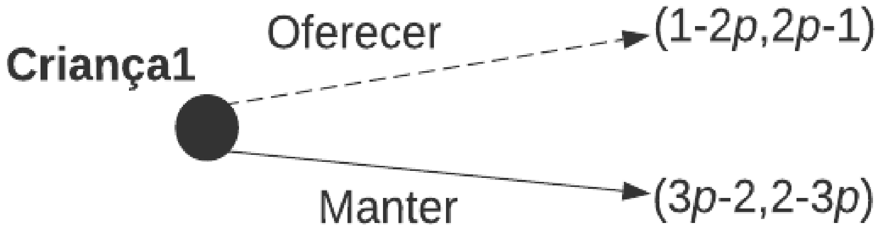

Figura 23: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo das Balas para valores de *p* maiores do que 0,6

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo das Balas nos diferentes valores de *p*.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 0{,}5$	(Oferecer, Recusar)
	$0{,}5 < p < 0{,}6$	(Oferecer, Aceitar)
	$0{,}6 < p \leq 1$	(Manter, Aceitar) (Manter, Recusar)

Tabela 16: Representação esquemática da resolução do Jogo das Balas

A conclusão do processo de indução reversa permite a análise do cenário sinalizado do Jogo das Balas, que se encontra descrito na seção 2.2.4, e cuja a equação do Teorema de Bayes está reproduzida a seguir:

$$q = P(\text{Bala Doce}|\text{Oferecer}) = \frac{P(\text{Oferecer}|\text{Bala Doce})\cdot P(\text{Bala Doce})}{P(\text{Bala Doce})}.$$

O componente $P(\text{Bala Doce})$ é descrito pela associação com a decisão do pseudojogador Natureza, e desse modo, temos que $P(\text{Bala Doce}) = p$. Com relação a componente $P(\text{Oferecer}|\text{Bala Doce})$ designa a probabilidade do primeiro jogador oferecer a bala, dado que essa é doce. Para garantir que a bala seja doce, o valor de p deve ser igual a 1, e pela resolução descrita acima, somente estratégias com o comportamento Manter da primeira criança são possíveis. Logo, $P(\text{Oferecer}|\text{Bala Doce}) = 0$. Assim, reunindo as informações na equação que descreve q, temos que:

$$q = \frac{P(\text{Oferecer}|\text{Bala Doce})\cdot P(\text{Bala Doce})}{P(\text{Bala Doce})} = \frac{0\cdot p}{p} = 0.$$

Esse resultado significa que a segunda criança interpretará a decisão Oferecer da primeira como um sinal de que a bala deve ser azeda, e então escolherá o comportamento Recusar.

3
Tópicos em Bullying e Violência Escolar

Essa seção vamos apresentar uma série de aspectos introdutórios sobre a temática de violência no ambiente escolar e bullying. Os conceitos apresentados e os dados expostos nessa seção são baseados em [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] e [25].

3.1 Definição de Bullying

De acordo com a Organização para Educação, Ciência e Cultura das Nações Unidas (UNESCO), o bullying é um tipo de violência escolar, que se caracteriza por ser um padrão de comportamento agressivo. Esse fenômeno é definido como um comportamento indesejado e agressivo entre indivíduos de idade escolar, que ocorre repetidamente contra a vítima. O bullying sempre contempla uma realidade onde existe um desequilíbrio de poder, sendo que esse pode ser real ou apenas percebido assim pelos agentes.

No âmbito nacional, a Lei número 13.185/2016 instituiu o Programa de Combate à Intimidação Sistemática, onde o bullying é definido como “todo ato de violência física ou psicológica, intencional e repetitivo que ocorre sem motivação evidente, praticado por indivíduo ou grupo, contra uma ou mais pessoas, com o objetivo de intimidá-la ou agredi-la, causando dor e angústia à vítima, em uma relação de desequilíbrio de poder entre as partes envolvidas”.

De todo modo, o bullying envolve um ato de violência, onde existe uma assimetria de poder entre um agressor ou um grupo de agressores, contra uma vítima, geralmente com a presença de testemunhas.

3.2 Papéis dos estudantes

O bullying é um tipo de violência escolar que tipicamente envolve uma dinâmica de comportamento de grupo, onde os estudantes são classificados em três categorias: agressores, vítimas e espectadores.

De forma geral, o comportamento do agressor está frequentemente associado a ganho de status e de poder no grupo, e essa tática possui alguma efetividade, uma vez que ele é habitualmente percebido como popular em um grupo de indivíduos. Também é frequentemente associada ao agressor características como falta de empatia e participação em atividades que não exigem cooperação, tais como esportes individuais.

Já com relação às vítimas, essas têm como atributos mais citados na bibliografia especializada a falta de confiança e baixa estima no grupo de estudantes. Isso as torna alvos preferenciais dos agressores, que praticam o ato repetidamente contra essas, renovando seu status no grupo. Também vale ressaltar que as vítimas frequentemente escondem que sofreram abuso, conforme tabela a seguir.

Grupo acolhedor das denúncias	**Percentual**
Ninguém	30%
Adulto	30%
Amigo	30%
Professor	10%

Tabela 17: Percentual de grupos que acolhem denúncias das vítimas

Finalmente, o grupo dos espectadores possui uma série de clivagens, que se diferenciam em função da disposição em ajudar às vítimas, com um espectro abrangendo uma atitude de defesa total da vítima, até um alinhamento completo com os agressores. Ressalta-se que o ambiente condiciona de maneira significativa o comportamento dos espectadores, uma vez que até mesmo aqueles de índole empática com a vítima podem escolher não denunciar o ato. A tabela a seguir sintetiza uma modelagem com percentuais para diversos papéis nos atos de bullying.

Papeis assumidos pelos estudantes	Percentual
Vítimas	8%
Agressores	12%
Defensores	17%
Apoiadores	20%
Neutros	7%
Sem papel	24%

Tabela 18: Divisão percentual de alunos por papel

3.3 Estatísticas gerais

Uma vez que o bullying é uma questão que afeta os ambientes de convivência em escala internacional, diversos órgãos se dedicam a compilar dados de diferentes, com metodologias de medição variáveis. Um primeiro exemplo de metodologia utilizado é questionar aos diretores ou as autoridades escolares se existe regularidade na ocorrência de atos nas escolas por esses administradas. Esse critério é utilizado pelo relatório Teachers and School Leaders as Lifelong Learners (TALIS), produzido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Na versão TALIS 2018, 14% dos diretores relataram que tinham atos de bullying regulares ocorrendo nas escolas por eles administradas, apresentando variabilidade regional, conforme é possível observar na tabela a seguir. Também é possível observar que na maioria dos países pesquisados houve redução no percentual de diretores que relatavam casos recorrentes nas suas escolas, quando comparamos os dados de 2013 e 2018.

País	Percentual de diretores que relatavam casos recorrentes nas suas escolas por ano	
	2013	2018
Brasil	29,5	28,3
Nova Zelândia	23,5	42,8
Dinamarca	8,9	4,6
Suécia	30,4	27,9
Finlândia	26,6	29,4
Reino Unido	14,5	29,0
Bulgária	24,5	25,6
Letônia	23,4	9,4
Portugal	15,3	7,3
Noruega	15,5	15,4
França	21,2	27,2
Islândia	6,7	3,3
Espanha	11,9	5,7
Itália	9,3	3,6
Japão	2,0	0,5
México	23,4	17,3
Chile	15,6	3,7
Coreia do Sul	6,6	0,4
Israel	12,3	27,2
Croácia	14,4	4,3
Holanda	27,5	14,7
Cingapura	2,0	5,4

Tabela 19: Quadro comparativo entre países pela metodologia usada no TALIS de 2013 e de 2018

Quanto ao Brasil, o país apresentou leve redução no percentual entre 2013 e 2018, mas o número de 28,3% ainda é o dobro da média dos países da OCDE no ano de 2018.

Uma outra metodologia é questionar diretamente os alunos se esses foram vítimas de algum ato. Esse critério é utilizado pela UNESCO e pela Health Behavior in School-Aged Children (HBSC), sendo esta uma organização que realiza levantamentos transnacionais sobre saúde de crianças em idade escolar. O levantamento realizado pelo HBSC propõe a seguinte questão aos estudantes “Você sofreu pelo menos dois atos de bullying no último mês? ”, e os resultados por país em diferentes períodos de tempo pesquisado podem ser visualizados na tabela a seguir.

País	Percentual de alunos que relataram ter sofrido bullying por intervalo de tempo		
	2001-2002	2005-2006	2009-2010
Áustria	16,50	15,85	17,50
Canadá	15,40	14,15	15,45
Croácia	9,30	8,40	6,85
Dinamarca	11,25	8,05	6,35
Inglaterra	13,00	9,75	9,45
Estônia	18,70	21,55	18,30
Finlândia	9,20	8,00	10,85
França	13,15	13,60	14,00
Alemanha	13,15	13,90	10,20
Grécia	8,00	22,95	8,55
Hungria	6,05	6,50	7,55
Irlanda	8,35	8,65	8,90
Itália	10,30	8,35	3,85
Letônia	19,95	21,35	19,30
Lituânia	34,35	27,25	25,95
Macedônia	10,65	9,25	7,95
Holanda	10,00	8,50	7,60
Noruega	10,95	8,30	8,85
Polônia	10,25	9,35	10,50
Portugal	18,85	14,55	13,95
Rússia	17,65	16,45	17,55
Escócia	8,75	9,40	9,15
Eslovênia	7,10	9,30	7,15
Espanha	8,80	4,60	5,90
Suécia	4,75	4,05	3,95
Suíça	13,95	12,10	13,30
Ucrânia	17,50	19,80	16,55
Estados Unidos	12,60	11,40	11,00
País de Gales	9,50	11,35	8,85

Tabela 20: Quadro comparativo entre países pela metodologia usada no HBSC de 2001 a 2010

A UNESCO, no seu relatório School violence and bullying: Global status and trends, drivers and consequences de 2018 disponibiliza uma abordagem mais abrangente mundialmente, onde as informações são compiladas por continentes, e contabilizam o percentual de estudantes que relataram serem vítimas de pelo menos um ato de bullying no último mês.

Região do mundo	Percentual de alunos que relataram ter sofrido bullying
Caribe	35
América do Norte	31,7
América Central	22,8
América do Sul	30,2
Europa	25
Oriente Médio	41,1
Ásia	30,3
África Saariana	42,7
África Subsaariana	48,1
Pacífico	36,8

Tabela 21: Quadro comparativo entre regiões do mundo pela metodologia usada pela UNESCO – 2018

É possível perceber que existe alguma variância entre os dados de medição de bullying, o que provavelmente ocorre por diferenças metodológicas na coleta de dados. De qualquer modo, é possível afirmar que o problema atinge pelo menos cerca de um quarto dos estudantes em idade escolar.

Além disso, é importante notar que não existe uma correlação direta entre desempenho acadêmico e atos de bullying, conforme é possível observar pelo cruzamento dos dados da pesquisa HBSC de 2014 com os do PISA 2018 – Habilidade Leitura.

País	**Percentual de bullying no levantamento HBSC 2014**	**Nota obtida no PISA 2018 - Leitura**
Áustria	10	484
Croácia	8	479
Dinamarca	6	501
Estônia	12	523
Finlândia	11	520
França	13	493
Alemanha	10	498
Grécia	7	457
Hungria	11	476
Irlanda	8	518
Itália	6	476
Letônia	19	479
Lituânia	25	476
Holanda	9	485
Noruega	7	499
Polônia	13	512
Portugal	14	492
Rússia	16	479
Eslovênia	9	495
Suécia	5	506
Suíça	11	484
Ucrânia	12	466
Bulgária	12	420
Eslováquia	11	458
Israel	10	470
Canada	15	520

Tabela 22: Correlação de dados – HBSC 2014 e PISA 2018

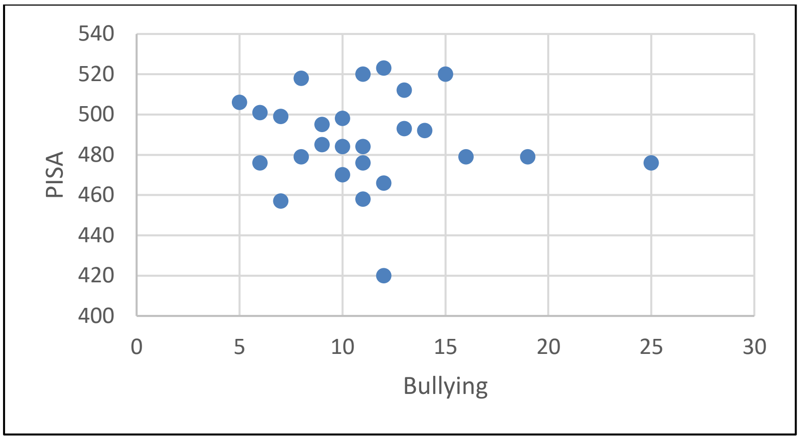

Figura 24: Correlação de dados – HBSC 2014 e PISA 2018

3.4 Tipologias

O universo tipológico da violência pode ser dividido em três grandes conjuntos: violência física, violência psicológica, e violência sexual, sendo que os fenômenos dos atos de bullying são enquadrados apenas nos dois primeiros conjuntos. Assim, os atos de bullying são enquadrados de acordo com a ocorrência de uma ou mais infrações listadas a seguir:

- ataques físicos;
- lutas e brigas;
- punição corporal;
- destruição de propriedade;
- abuso verbal;
- abuso emocional;
- exclusão do convívio.

A tabela a seguir compila os tipos de atos mais comuns em escala global no ano de 2018, segundo o levantamento realizado pela UNESCO.

Tipos de bullying mais praticados	**Percentual**
Ataques físicos	25%
Abusos verbal e emocional	25%
Exclusão do convívio social	25%

Tabela 23: Quadro comparativo de tipos mais comuns no mundo no ano de 2018

3.5 Fatores causais

Conforme a definição de bullying, sempre existe uma assimetria de poder no grupo entre agressores e vítimas, e essa diferença é explicitada nos grupos de agressores-vítimas mais comuns. Portanto, os fatores causais são aqueles que geralmente sinalizam aos agressores uma relação desigual de poder, tais como: pessoas portadoras de necessidades especiais e pessoas sem essas especificidades; bullying entre indivíduos de diferentes gêneros; pobreza ou diferença muito acentuada de status social; diferenças de nacionalidade, linguísticas e culturais; aparência física; e orientação sexual e identidade de gênero. Em âmbito global, não há um tipo de motivação prevalente para que um agressor inicie um ato de bullying, conforme tabela a seguir.

Fatores causais mais frequentes	Percentual
Aparência física	25%
Orientação sexual e gênero	25%
Nacionalidade	25%
Outros	25%

Tabela 24: Quadro comparativo de fatores motivadores de bullying

3.6 Fatores condicionantes

Para os fins a que destinam este trabalho, fatores condicionantes são aqueles que, isoladamente, alteram de maneira rastreável as estatísticas de bullying, mantidos constantes os outros fatores. Dois dos principais fatores serão analisados neste trabalho: o sexo dos componentes do grupo, e as idades dos componentes.

3.6.1 Sexo

De maneira geral, grupos de indivíduos do sexo masculino tendem a ter taxas de bullying um pouco maiores do que grupos do sexo feminino, contudo essa diferença não é muito significativa, e as taxas para ambos os sexos não costuma variar muito com relação a taxa geral. Nas tabelas a seguir, é possível observar essas correlações, com as mesmas condições de contorno descritas no tópico 3.3 – Estatísticas Gerais.

País	Percentual de meninos que relataram ter sofrido bullying por intervalo de tempo			Percentual de meninas que relataram ter sofrido bullying por intervalo de tempo		
	2001-2002	2005-2006	2009-2010	2001-2002	2005-2006	2009-2010
Áustria	19,50	19,60	21,60	13,50	12,10	13,40
Canadá	16,40	15,20	16,00	14,40	13,10	14,90
Croácia	11,70	9,40	7,50	6,90	7,40	6,20
Dinamarca	11,40	8,30	6,60	11,10	7,80	6,10
Inglaterra	14,40	10,80	9,00	11,60	8,70	9,90
Estônia	21,70	23,90	20,50	15,70	19,20	16,10
Finlândia	10,40	9,10	11,50	8,00	6,90	10,20
França	13,40	13,90	14,80	12,90	13,30	13,20
Alemanha	15,20	14,90	10,60	11,10	12,90	9,80
Grécia	9,30	23,00	9,40	6,70	22,90	7,70
Hungria	5,70	6,30	8,70	6,40	6,70	6,40
Irlanda	10,20	10,00	10,90	6,50	7,30	6,90
Itália	12,10	10,10	4,80	8,50	6,60	2,90
Letônia	23,70	23,40	20,50	16,20	19,30	18,10
Lituânia	36,40	28,00	28,50	32,30	26,50	23,40
Macedônia	11,80	12,00	10,60	9,50	6,50	5,30
Holanda	11,30	9,70	8,40	8,70	7,30	6,80
Noruega	12,00	9,70	9,50	9,90	6,90	8,20
Polônia	12,50	11,40	13,20	8,00	7,30	7,80
Portugal	24,30	16,50	16,80	13,40	12,60	11,10
Rússia	18,50	17,20	17,80	16,80	15,70	17,30
Escócia	8,40	9,30	9,80	9,10	9,50	8,50
Eslovênia	7,40	11,10	8,20	6,80	7,50	6,10
Espanha	10,10	5,60	7,50	7,50	3,60	4,30
Suécia	5,40	4,60	3,90	4,10	3,50	4,00
Suíça	16,20	13,70	14,90	11,70	10,50	11,70
Ucrânia	17,20	19,40	16,20	17,80	20,20	16,90
Estados Unidos	14,80	11,90	11,30	10,40	10,90	10,70
País de Gales	9,30	11,10	9,50	9,70	11,60	8,20

Tabela 25: Quadro comparativo de atos de bullying entre meninos e meninas

No tocante à tipologia, meninos tendem as sofrer mais atos que envolvam algum tipo de violência física, enquanto meninas são mais afetadas por atos de bullying com violência psicológica, bem com o cyberbullying.

3.6.2 Idade

De forma geral, a idade dos estudantes cresce de maneira inversamente proporcional a variação da ocorrência de atos de bullying. Esse fenômeno está relacionado a taxa de denúncia dos atos, que tende a ser maior em idades menores. De todo modo, existem uma grande amplitude regional nos dados, o que sugere que fatores culturais dos diversos países influenciam nos dados.

País	**Percentual de alunos que relataram ter sofrido bullying por faixa etária**		
	11 anos	13 anos	15 anos
Áustria	10	19	10
Croácia	7	10	8
Dinamarca	9	6	4
Inglaterra	11	12	10
Estônia	12	16	9
Finlândia	12	11	8
França	13	13	10
Alemanha	10	11	7
Grécia	6	8	7
Hungria	12	11	6
Irlanda	9	8	7
Itália	7	6	3
Letônia	19	25	18
Lituânia	18	30	25
Holanda	11	9	6
Noruega	8	7	5
Polônia	15	13	10
Portugal	14	15	11
Rússia	16	18	14
Escócia	16	16	9
Eslovênia	11	9	6
Espanha	7	6	4
Suécia	5	5	3
Suíça	15	11	9
Ucrânia	10	15	12
País de Gales	14	16	12
Romênia	13	14	8
Bulgária	12	16	11
Eslováquia	12	11	10
Israel	10	11	7
Canadá	15	15	11

Tabela 26: Quadro comparativo de atos de bullying em função da idade

3.7 Impactos

As consequências do bullying sobre as vítimas são significativas, uma vez que essas começam a desenvolver sintomas como medo e pânico, o que afeta a capacidade de concentração e diminui a qualidade da participação nas aulas. No âmbito deste trabalho, os impactos são divididos em dois grupos: impactos acadêmicos e impactos de saúde pública.

3.7.1 Acadêmicos

Indivíduos que sofreram bullying possuem uma maior chance de evadir da escola antes do final do ensino médio, além de apresentarem menores taxas de assiduidade. Ademais, esses estudantes se tornam mais ansiosos e inseguros quando de realização de provas e avaliações.

		Classificação percentual por tipo de indivíduos	
		Sofreu bullying nos últimos 30 dias	Não sofreu
Impactos nos indivíduos	Expectativa de completar o ensino médio	44,50%	34,80%
	Falta as aulas de 3 a 4 vezes por semana	9,20%	4,10%
	Sente-se ansioso antes de avaliações	63,90%	54,60%
	Sente-se excluído de atividades escolares	42,40%	14,90%

Tabela 27: Quadro comparativo de impactos acadêmicos do bullying

3.7.2 Saúde Pública

Indivíduos que sofreram uma maior de chance de desenvolver condições psíquicas patológicas, como depressão e distúrbios do sono, bem como apresentam mais disposição para o uso de drogas ilícitas. Com isso, temos que o bullying não prejudica o convívio social entre crianças e adolescentes, mas possui efeitos que se propagam durante toda a vida de quem foi submetido a violência escolar.

		Classificação percentual por tipo de indivíduos	
		Sofreu bullying nos últimos 30 dias	Não sofreu
Impactos na saúde dos indivíduos	Sente-se solitário	18,30%	8,20%
	Distúrbios de sono	17,20%	7%
	Consideração de suicídio	23,40%	12%
	Consumo de tabaco	19,70%	8,60%
	Consumo de álcool	30,30%	18,60%
	Consumo de maconha	7,90%	1,70%
	Iniciação sexual precoce	27,40%	18,90%

Tabela 28: Quadro comparativo de impactos em saúde pública do bullying

4
Modelagem dos jogos

4.1 Caracterização geral

De maneira geral, a modelagem dos jogos que serão descritos terá como foco o processo de bullying no contexto escolar, embora existam outros mecanismos que descrevem esse fenômeno. Dessa forma, todos os jogos terão como pré-condição a presença de pelo menos um adulto responsável dentro do ambiente escolar.

Ademais, também estará postulado que os jogadores manterão suas funções fixadas durante o decorrer dos jogos, ou seja, um jogador que sofre o bullying não se tornará aquele que o executa, ou aquele que apenas assiste o ato, bem como nenhuma outra mudança de qualquer tipo de função entre os jogadores será permitida.

Quanto a ordem de ação dos jogadores, temos que o bullying só existirá caso o jogador que executa o ato efetivamente o faça, não cabendo nenhuma ação de nenhum outro indivíduo antes ou simultaneamente a esse momento. Portanto, todos os jogos expostos serão do tipo sequencial.

4.1.1 Características dos jogadores e de suas estratégias

Estará estipulado que os jogadores podem ser dos seguintes tipos: um jogador será aquele que pratica o bullying contra um outro, e esse será denominado Promotor; um jogador será a vítima do ato, e esse será denominado Receptor; e finalmente um grupo de jogadores que observa o ato se desenrolando, que serão denominados Espectadores, representados pelos símbolos de formato geral Espectador(i), onde i é um índice que diferencia os integrantes desse grupo. Ademais, existirá a presunção de que os indivíduos não cooperam mutuamente, combinando comportamentos, ou seja, os modelos se caracterizarão como jogos não-cooperativos.

Quanto as estratégias que cada jogador poderá utilizar, temos que o jogador Promotor terá duas possíveis decisões: fazer ou não fazer o bullying; no caso do grupo de jogadores Espectadores, cada jogador terá duas possíveis escolhas: apenas Assistir ao ato, ou denunciar a autoridade na sala de aula; e finalmente o jogador Receptor terá duas decisões possíveis: denunciar ao professor ou ao adulto presente, ou consentir em sofrer o ato sem se manifestar. Todas as possíveis estratégias encontram-se sumarizadas na tabela a seguir.

		Estratégias possíveis
Função do Jogador	Promotor	{Faz, Não Faz}
	Espectador	{Assiste, Denuncia}
	Receptor	{Denuncia, Acomoda}

Tabela 29: Resumo das estratégias utilizáveis pelos jogadores nos modelos

4.1.2 Caracterização das recompensas

A modelagem de qualquer jogo no âmbito da Teoria dos Jogos pressupõe a existência de um objeto que possua valor intrínseco para todos os jogadores, de modo que todos busquem portar a maior quantidade possível do mesmo. Esse objeto pode ser material, como por exemplo dinheiro, ou imaterial, tais como intervalo de tempo e percepção social.

Quanto aos jogos apresentados, o bullying existe em um ambiente de grupos de alunos com diversas funções, onde tem-se que o ato é tido como bem-sucedido ou fracassado conforme a percepção intersubjetiva dos componentes desses grupos. Assim, o objeto que possui valor intrínseco para todos as possíveis funções dos jogadores nos jogos de bullying é a percepção social, que doravante será denominada como Status.

As recompensas terão as seguintes possibilidades: o jogador como a função Promotor ganhará status caso consiga executar o ato do bullying de maneira bem-sucedida, perderá caso o ato seja fracassado, ou permanecerá sem alteração se o ato não for iniciado. Já o jogador com a função Receptor terá sua percepção social melhorada caso o ato seja fracassado, piorada caso a prática seja bem-sucedida, e se conservará inalterada caso nada aconteça.

		Caracterização do ato praticado		
		Sucesso	Fracasso	Inexistente
Função do jogador	Promotor	Aumenta	Diminui	Inalterado
	Receptor	Diminui	Aumenta	Inalterado

Tabela 30: Variabilidade das recompensas de jogadores com as funções promotor e receptor

Mais especificamente, a variabilidade das recompensas será expressa quantitativamente das seguintes formas: tanto o promotor quanto o receptor receberão recompensas iguais a 0 no cenário onde o bullying não é praticado. Nos outros casos, o promotor receberá uma recompensa máxima igual a -1 quando o ato fracassar, que será diminuída em -1 por espectador aliado, ou o promotor receberá um ganho mínimo igual a 1 quando o ato for bem-sucedido, que será acrescida em 1 por espectador aliado, aumentado ainda uma unidade quando o Receptor escolhe Denuncia. Dessa forma, quando o bullying ocorre, tem-se que as recompensas associadas ao Promotor podem ser calculadas através de relações de recorrência. Iniciando pela representação da recorrência para o cálculo da recompensa do Promotor quando o bullying fracassa, temos que:

$$RPF_{z+1} = RPF_z - 1$$
$$RPF_0 = -1$$

, onde RPF_z representa a recompensa obtido pelo Promotor quando o bullying fracassa e quando z espectadores se alinham a ele. Alternativamente, para a representação da recorrência para o cálculo da recompensa do Promotor quando o bullying ocorre de forma bem-sucedida, temos que:

$$RPB_{z+1} = RPB_z + 1$$
$$RPB_0 = 1$$

, onde RPB_z representa a recompensa obtido pelo Promotor quando o bullying ocorre de forma bem-sucedida e quando z espectadores se alinham a ele. Cabe ressaltar que, quando o Receptor escolhe a decisão Denuncia, o resultado do cálculo da recorrência é acrescido em uma unidade.

Com relação aos ganhos referentes ao jogador com a função Receptor, este receberá uma recompensa máxima igual a -1 quando o ato for bem-sucedido, que será diminuída em -1 por espectador aliado ao Promotor, ou receberá um ganho igual a 1 quando o bullying fracassar. Quanto a esta última possibilidade, cabe ressaltar que o bullying gera impactos negativos nos estudantes que dele sofrerem, mas considerou-se que o ato fracassado trará apoio institucional da escola ao Receptor, fazendo com seu ganho seja positivo. Quando o bullying ocorre de forma bem-sucedida, tem-se que as recompensas associadas ao Receptor podem ser calculadas através de uma relação de recorrência, conforme formulação a seguir:

$$RRB_{z+1} = RRB_z - 1$$
$$RRB_0 = -1$$

, onde RRB_z representa a recompensa obtido pelo Receptor quando o bullying ocorre de forma bem-sucedida e quando z espectadores se alinham ao jogador com a função Promotor. Cabe ressaltar que, quando o Receptor escolhe a decisão Denuncia, o resultado do cálculo da recorrência é diminuído em uma unidade.

Finalmente, na situação onde o jogador tem a função Espectador, o crescimento do status ficará condicionado ao apoio que esse prestará ao longo do desenvolvimento dos jogos. No cenário onde o bullying é bem-sucedido, o espectador perde -1 na circunstância de apoiar o receptor, e ganha 1 ao apoiar o promotor; já no cenário onde a prática fracassa, ocorre exatamente o inverso. Se o bullying não ocorrer, os espectadores receberão recompensas iguais a 0.

		Caracterização do ato praticado		
		Sucesso	Fracasso	Inexistente
Função do jogador aliado ao espectador	Promotor	Aumenta	Diminui	Inalterado
	Receptor	Diminui	Aumenta	Inalterado

Tabela 31: Variabilidade dos ganhos de espectadores em função das alianças firmadas

4.1.3 Caracterização de cenários

A existência de um jogo pressupõe que uma série de condições, especialmente no tocante ao grau de conhecimento que os jogadores possuem da história pregressa do jogo. Assim, um cenário será definido como o conjunto de regras que regulam o ambiente onde o jogo se desenvolverá, e serão de quatro tipos:

Cenário Vigilante: Tem como características possuir o caráter de informação perfeita e completa, onde todos os jogadores sabem que uma vez existindo a denúncia de um ato de bullying, as autoridades responsáveis pelo ambiente punirão os promotores e os espectadores de forma efetiva, evitando a ocorrência de novos atos. Este cenário terá estruturação formal e solução similares ao descritos no exemplo 2 de seção 2.1.5 (Jogo de Entrada).

Cenário Desatento: Tem como características possuir o caráter de informação perfeita e completa, onde todos os jogadores sabem que uma vez existindo a denúncia de um ato de bullying, as autoridades responsáveis pelo ambiente não punirão os promotores e os espectadores efetivamente, estimulando um ambiente de impunidade. Este cenário terá estruturação formal e solução similares ao descritos no exemplo 2 de seção 2.1.5 (Jogo de Entrada).

Cenário Natureza Simples: Esse cenário contempla a presunção de que os jogadores não podem determinar com certeza como será o comportamento das autoridades responsáveis, ou seja, o jogo modelado será do tipo de informação incompleta. Por isso, existirá um processo de conversão da informação incompleta para informação imperfeita, com a introdução de um pseudojogador que possui a função de inserir uma variável que regula a probabilidade da autoridade punir bullying ou não, e esse pseudojogador será sempre denominado Natureza. Este cenário terá estruturação formal e solução similares ao descritos no exemplo 1 de seção 2.2.3 (Jogo das Balas).

Cenário Natureza Sinalizado: Possui as mesmas características do cenário Natureza Simples, com a incorporação de uma nova maneira de avaliar os comportamentos dos jogadores com a função espectador, uma vez que estes avaliam as condutas de outros jogadores como uma sinalização para as suas próprias decisões. Este cenário terá estruturação formal e solução similares ao descritos no exemplo 1 de seção 2.2.3 (Jogo das Balas).

A tabela a seguir condensa os principais atributos dos cenários descritos nos itens acima:

Cenário	Tipo	Principais características
Vigilante	Perfeita	Existe sistema de punição adequado. Proatividade para reprimir novas ocorrências.
Desatento	Perfeita	Inexiste sistema de punição adequado. Inepto em reprimir novas ocorrências.
Natureza Simples	Imperfeita	Incerteza quanto a efetividade da punição. Introdução de uma variável probabilística.
Natureza Sinalizado	Imperfeita	Incerteza quanto a efetividade da punição. Análise de comportamentos ao longo do jogo.

Tabela 32: Tipologia dos cenários e seus principais atributos

4.2 Modelagem com tratamento sequencial dos espectadores

4.2.1 Fatores específicos

Todos os jogos modelados terão o pressuposto de que cada um dos espectadores escolherá suas decisões quando o jogador anterior escolher uma estratégia que permita a continuidade do processo de interação, ou seja, quando o Promotor escolhe a decisão Faz, ou quando um outro Espectador decidir pela estratégia Assiste. Dessa forma, os modelos considerarão que o comportamento dos espectadores se dará de modo sequencial.

Os jogos receberão as designações que sinalizam a quantidade de espectadores presentes, sendo denominado como Unitário, quando apenas existirá um espectador nos modelos, Duplo, que representa a existência de dois espectadores, e com *m* Espectadores, com uma quantidade finta de espectadores.

4.2.2 Jogos com um espectador

Nesta seção, todos os jogos modelados terão como condição a existência de um promotor, um espectador, e um receptor. Uma vez que todos terão apenas um espectador, todos receberão a designação Unitário em razão disso. No aspecto da estruturação formal, todos os jogos terão as características em comum. Iniciando pela representação dos jogadores, temos que:

$$J = \{j_1, j_2, j_3\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o jogador Promotor, j_2, o jogador Espectador, e j_3, o jogador Receptor. Ademais, denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$E_3 = \{s_{31}, s_{32}\}$$

sos conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1, j_2 e j_3, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Faz e Não Faz do jogador j_1, s_{21} e s_{22} representam as decisões Assiste e Denuncia do jogador j_2, e, s_{31} e s_{32} representam as decisões Acomoda e Denuncia do jogador j_3. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{3} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3$$
$$=\{(s_{11}, s_{21}, s_{31}),(s_{11}, s_{21}, s_{32}),(s_{11}, s_{22}, s_{31}),(s_{11}, s_{22}, s_{32}),(s_{12}, s_{21}, s_{31}),$$
$$(s_{12}, s_{21}, s_{32}),(s_{12}, s_{22}, s_{31}),(s_{12}, s_{22}, s_{32})\}$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

4.2.2.1 Jogo Vigilante Unitário

Tal jogo supõe a existência de uma condição conhecida por todos os jogadores, que é a certeza de que se o bullying for denunciado, os promotores e os espectadores serão devidamente punidos, tornando atos futuros mais improváveis. Esta regra definirá um jogo de informação perfeita que se chamará de Jogo Vigilante Unitário, onde o professor ou responsável adulto pelo ambiente escolar coíbe e pune infratores, e vigia para que novos atos não voltem a acontecer.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1, u_2 e u_3 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2 e j_3 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$ e $u_3(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2 e j_3 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade		
		u_1	u_2	u_3
Perfis de estratégias	(Faz, Assiste, Acomoda)	2	1	-2
	(Faz, Assiste, Denuncia)	-2	-1	1
	(Faz, Denuncia, Acomoda)	-1	1	1
	(Faz, Denuncia, Denuncia)	-1	1	1
	(Não Faz, Assiste, Acomoda)	0	0	0
	(Não Faz, Assiste, Denuncia)	0	0	0
	(Não Faz, Denuncia, Acomoda)	0	0	0
	(Não Faz, Denuncia, Denuncia)	0	0	0

Tabela 33: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2 e j_3 no Jogo Vigilante Unitário

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1 , j_2 e j_3 na forma estendida, conforme figura a seguir.

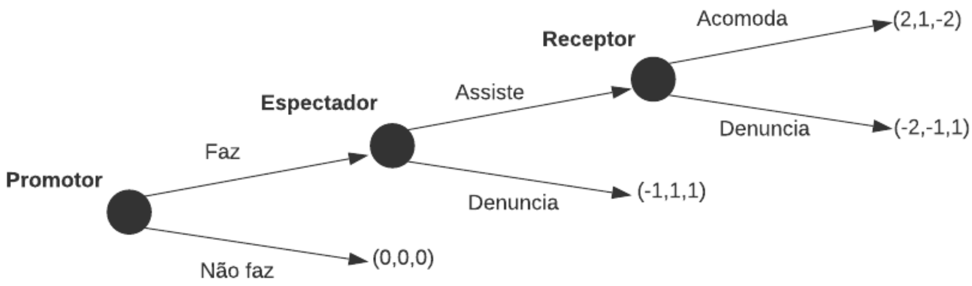

Figura 25: Jogo Vigilante Unitário – Representação na forma estendida

Para determinar qual combinação de estratégias resultará na sequencia mais estável possível na resolução do jogo, se analisará qual é a melhor decisão que cada jogador poderá tomar, começando pelo último jogador. Desse modo, o jogo pode ser dividido em subjogos, conforme figura a seguir.

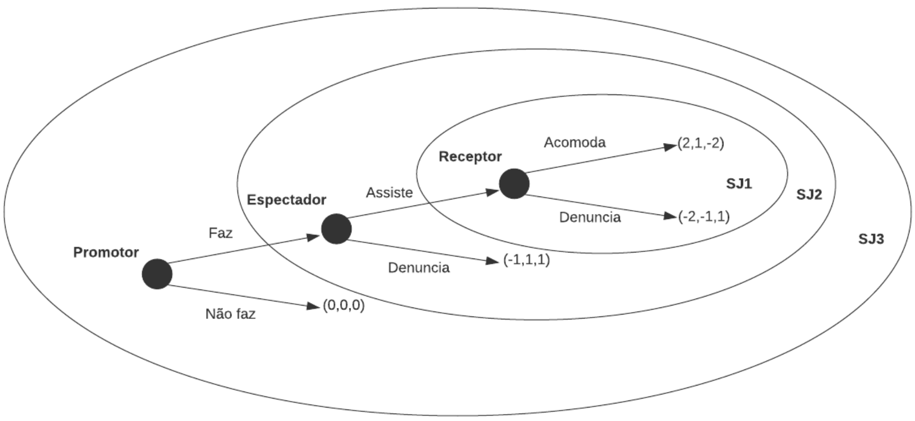

Figura 26: Jogo Vigilante Unitário – Partição em subjogos

Analisando o primeiro subjogo, tem-se que o Receptor maximiza o ganho na decisão Denuncia, resultando no descarte das outras opções.

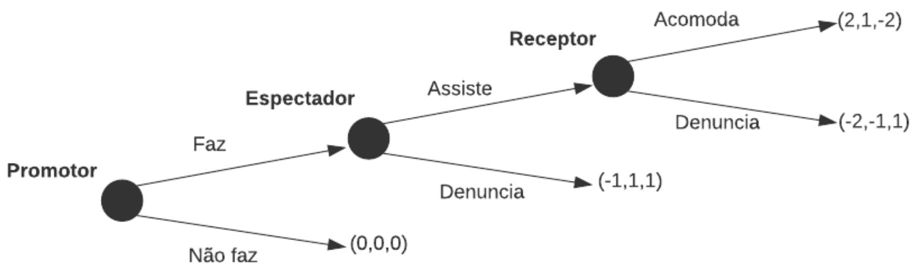

Figura 27: Jogo Vigilante Unitário – SJ1 resolvido

No processo de resolução do segundo subjogo, as recompensas do resultado de maximização do primeiro subjogo são consideradas, e o processo de determinação da melhor escolha possível é realizado para o jogador com a função Espectador.

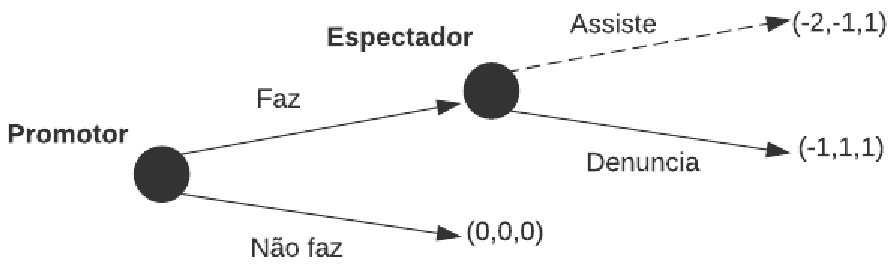

Figura 28: Jogo Vigilante Unitário – SJ2 resolvido

Conforme análise do terceiro subjogo, o Promotor maximiza o ganho quando escolhe não praticar o bullying. Assim, tem-se que os estabelecimentos de uma regra clara quanto a proibição do bullying e de sistema de vigilância persistente do professor concorrem para o cenário mais estável do jogo modelado seja aquele onde o próprio ato não ocorre.

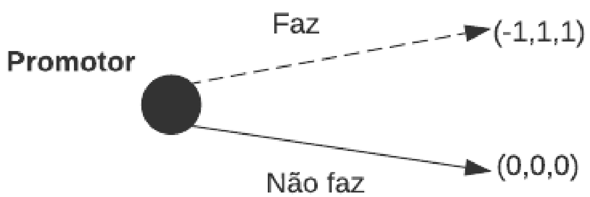

Figura 29: Jogo Vigilante Unitário – SJ3 resolvido

4.2.2.2 Jogo Desatento Unitário

Nesse cenário tem-se que um jogo de informação perfeita cuja a regra característica é a existência de um responsável pelo ambiente que não atua preventivamente para evitar, ou possui disposição para punir o bullying, e essa condição é de conhecimento de todos os jogadores. Tal princípio define o jogo que será de Jogo Desatento Unitário.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1, u_2 e u_3 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2 e j_3 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$ e $u_3(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2 e j_3 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade		
		u_1	u_2	u_3
Perfis de estratégias	(Faz, Assiste, Acomoda)	2	1	-2
	(Faz, Assiste, Denuncia)	3	1	-3
	(Faz, Denuncia, Acomoda)	1	-1	-1
	(Faz, Denuncia, Denuncia)	1	-1	-1
	(Não Faz, Assiste, Acomoda)	0	0	0
	(Não Faz, Assiste, Denuncia)	0	0	0
	(Não Faz, Denuncia, Acomoda)	0	0	0
	(Não Faz, Denuncia, Denuncia)	0	0	0

Tabela 34: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2 e j_3 no Jogo Desatento Unitário

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1 , j_2 e j_3 na forma estendida, conforme figura a seguir.

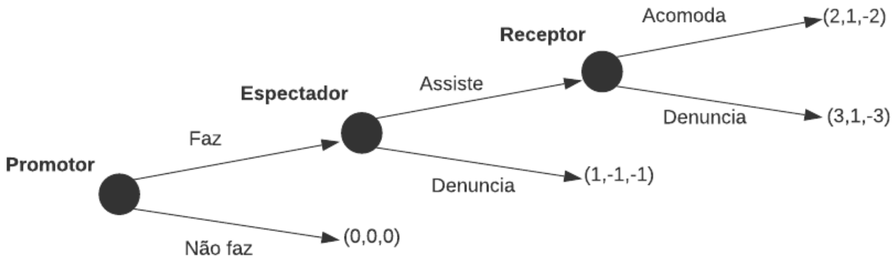

Figura 30: Jogo Desatento Unitário – Representação na forma estendida

Aplicando o algoritmo da indução reversa para determinar a melhor escolha de cada jogador em cada subjogo, tem-se as resoluções descritas nas árvores de decisão a seguir.

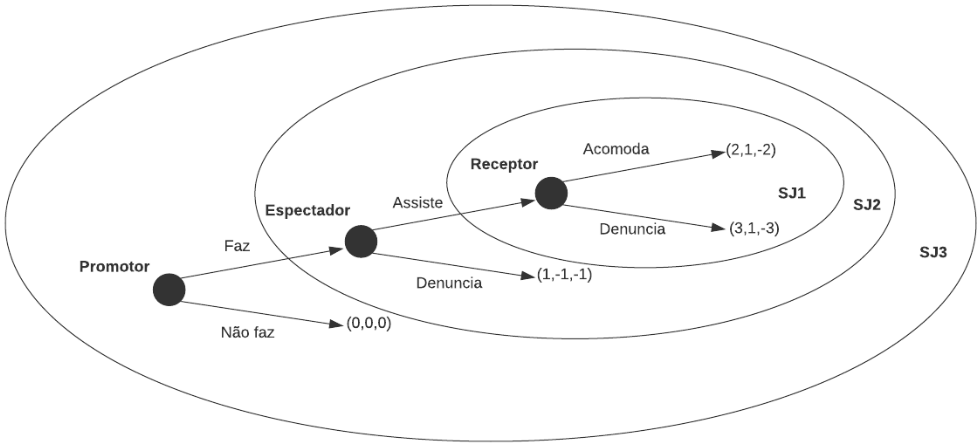

Figura 31: Jogo Desatento Unitário – Partição em subjogos

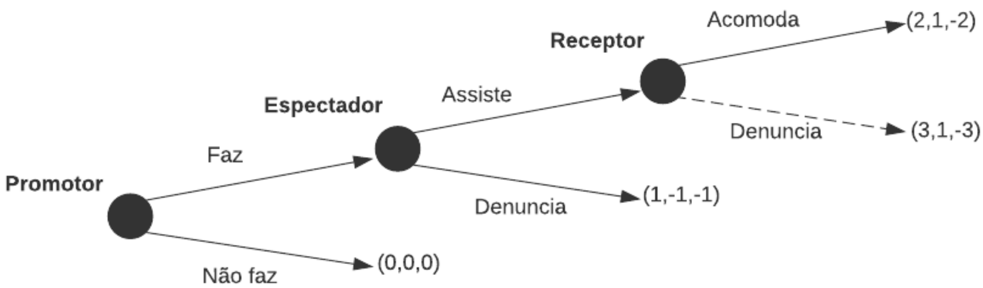

Figura 32: Jogo Desatento Unitário – SJ1 resolvido

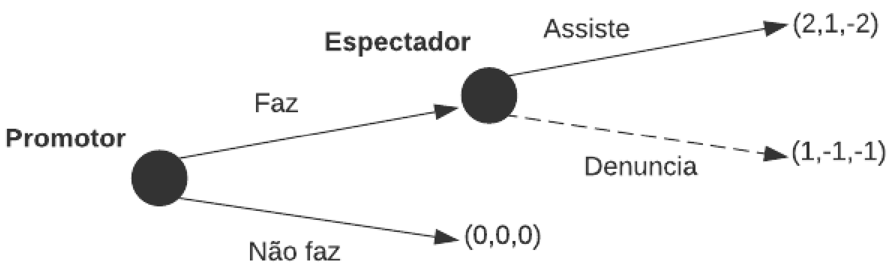

Figura 33: Jogo Desatento Unitário – SJ2 resolvido

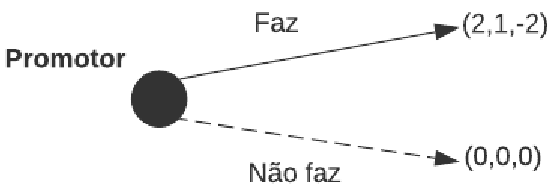

Figura 34: Jogo Desatento Unitário – SJ3 resolvido

O jogo possui como solução mais estável aquela que premia a prática de bullying e dos alunos que apoiam o infrator, prejudicando o convívio social daquele que foi vitimado pelo ato.

4.2.2.3 Jogo Natureza Simples Unitário

Os jogos Vigilante Unitário e Desatento Unitário têm como condição necessária para existência o pressuposto de que a informação sobre o tipo de tratamento que o responsável pelo ambiente escolar dará ao bullying caso este venha ao conhecimento dele. Contudo nem sempre a efetividade da punição de um ato de violência é uma informação de conhecimento comum pelos alunos, como por exemplo, no caso de um professor substituto. Nesse cenário, pode-se modelar o bullying com um jogo de informação imperfeita, no qual se atribui uma probabilidade *p* do professor ser do tipo vigilante, e uma probabilidade (1-*p*) de ser desatento. Portanto, o Jogo Natureza Simples Unitário será formado pela junção dos jogos modelados em 4.2.2.1 – Jogo Vigilante Unitário e 4.2.2.2 – Jogo Desatento Unitário, com pseudojogador Natureza, que atribuirá as probabilidades. A modelagem do jogo na forma estendida está reproduzida na figura a seguir.

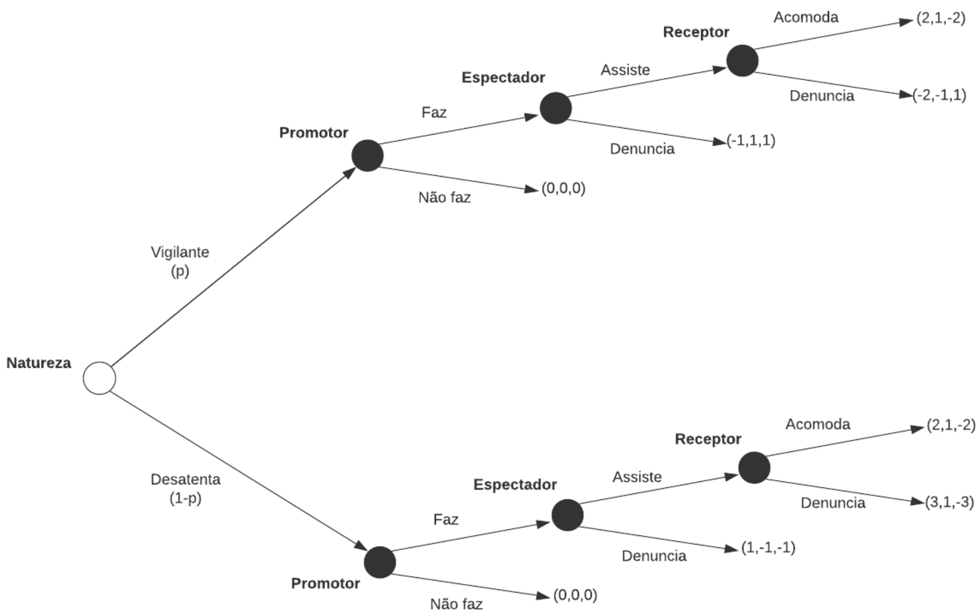

Figura 35: Jogo Natureza Simples Unitário – Representação na forma estendida

Essa modelagem abrange a presença de um pseudojogador que escolhe uma das tipologias existentes. Essa escolha é feita de maneira neutra, ou seja, esse pseudojogador não busca a maximização de uma recompensa com a sua escolha, apenas postula as possibilidades presentes no ambiente do jogo, e por isso será denominado Natureza. Analisando a árvore de decisões, tem-se que p = 1 gera o jogo Vigilante Unitário, e p = 0, o jogo Desatento Unitário, com seus respectivos equilíbrios já determinadas nas seções correspondentes.

Para um valor de p maior do que zero e menor do que um, essa variável deve ser ponderada nas recompensas dos cenários previstos pelas possibilidades da Natureza, seguindo o mesmo procedimento apresentado em 2.3.4 – Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas.

Perfis de estratégia	**Ganhos do Promotor**
(Não Faz, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia,•)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Assiste, Acomoda)	$(2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2$
(Faz, Assiste, Denuncia)	$(-2)\cdot(p)+(3)\cdot(1-p) = 3 - 5p$

Tabela 35: Recompensas Ponderadas do jogador Promotor no Jogo Natureza Simples Unitário

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador**
(Não Faz, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia,•)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 36: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador no Jogo Natureza Simples Unitário

Perfis de estratégia	**Ganhos do Receptor**
(Não Faz, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia,•)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Acomoda)	$(-2)\cdot(p)+(-2)\cdot(1-p) = -2$
(Faz, Assiste, Denuncia)	$(1)\cdot(p)+(-3)\cdot(1-p) = 4p - 3$

Tabela 37: Recompensas Ponderadas do jogador Receptor no Jogo Natureza Simples Unitário

Compilando as funções que produzem os ganhos dos três jogadores em uma árvore de possibilidades, com recompensas ponderadas do jogo, temos a forma de visualização a seguir

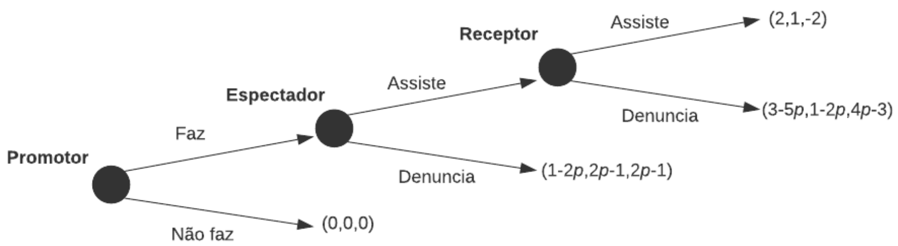

Figura 36: Representação na forma estendida do Jogo Natureza Simples Unitário com recompensas ponderadas

Essa abordagem permite determinar os equilíbrios de Nash para diversos valores de p, uma vez que este pode variar entre qualquer maior do que zero e menor do que um. Além disso, a resolução possui os mesmos pressupostos considerados na solução do Jogo das Balas, conforme encontra-se na seção 2.3.4 - Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas.

Primeiramente, a forma estendida é particionada em subjogos para permitir a aplicação do algoritmo da indução reversa, conforme figura a seguir.

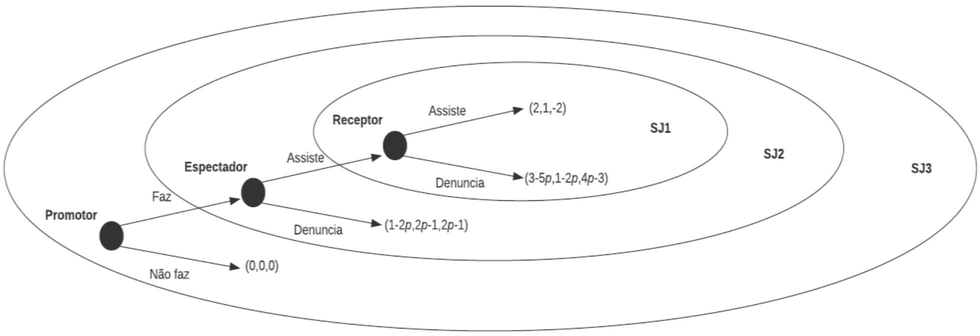

Figura 37: Representação na forma estendida do Jogo Natureza Simples Unitário com recompensas ponderadas – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo se dá através da comparação dos ganhos que o Receptor pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de p, devemos proceder uma comparação entre os ganhos do Receptor para valores de p maiores do que zero e menores do que um. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Receptor, conforme equação a seguir:

$$- 2 \text{ (Acomoda)} = 4p - 3 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/4 \text{ (Indiferente).}$$

Posteriormente, são analisados os valores de *p* onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

- 2 (Acomoda) > 4*p* - 3 (Denuncia) ↔ *p* < 1/4 (Acomoda),
- 2 (Acomoda) < 4*p* - 3 (Denuncia) ↔ *p* > 1/4 (Denuncia).

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma decisão do Receptor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Receptor
Valores de *p*	$p < 1/4$	Acomoda
	$p = 1/4$	Indiferente
	$p > 1/4$	Denuncia

Tabela 38: Representação esquemática das escolhas do Receptor em função do valor de *p* no SJ1 do Jogo Natureza Simples Unitário

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual o Receptor escolhe Acomodar quando *p* < 1/4, e outra na qual o Receptor escolhe Denunciar quando *p* > 1/4, conforme figuras a seguir.

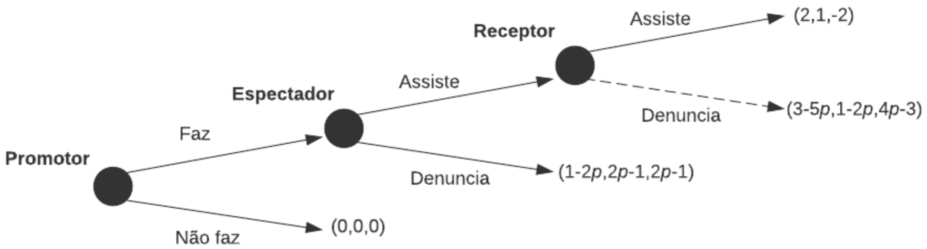

Figura 38: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando *p* < 1/4

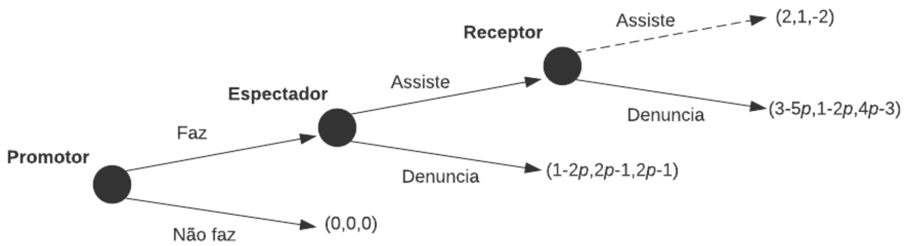

Figura 39: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando *p* > 1/4

A resolução do segundo subjogo se balizará nos intervalos de variação de p definidos na resolução do primeiro subjogo. Iniciando onde $p < 1/4$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Espectador, conforme relação a seguir:

$$p < 1/4 \Leftrightarrow 2p - 1 \text{ (Denuncia)} < 1 \text{ (Assiste).}$$

Alternativamente, quando $p > 1/4$, obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Espectador, conforme equação a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} = 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/2 \text{ (Indiferente).}$$

Posteriormente, são analisados os valores de p onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} > 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/2 \text{ (Assiste),}$$
$$1 - 2p \text{ (Assiste)} < 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/2 \text{ (Denuncia).}$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Espectador que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Espectador
Valores de *p*	$p < 1/4$	Assiste
	$1/4 < p < 1/2$	Assiste
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	Denuncia

Tabela 39: Representação esquemática das escolhas do Espectador em função do valor de p no SJ2 do Jogo Natureza Simples Unitário

Portanto, o segundo subjogo possui três soluções, uma na qual o Espectador escolhe Assiste quando $p < 1/4$; outra na qual o Espectador escolhe Assiste quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/4 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Espectador escolhe Denuncia quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

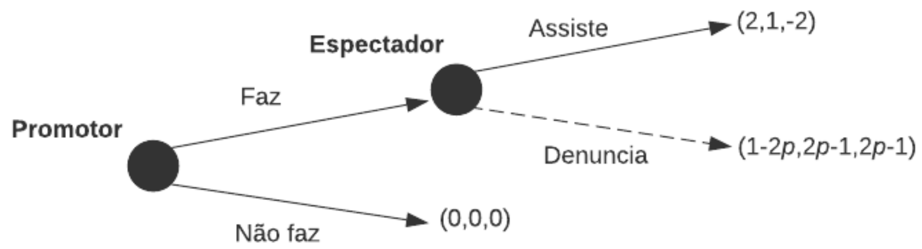

Figura 40: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando p < 1/4

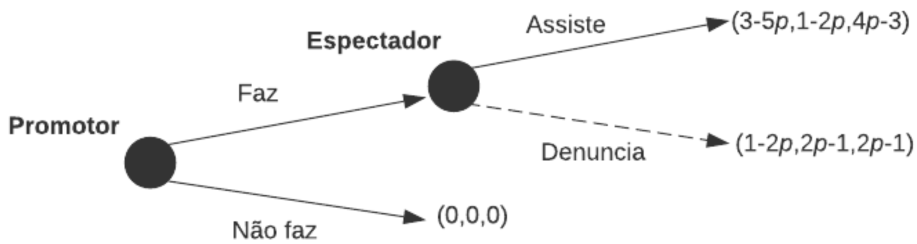

Figura 41: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/4 e menor do que 1/2

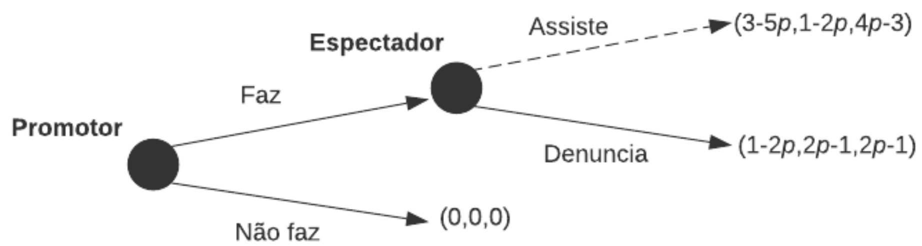

Figura 42: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando p > 1/2

Finalmente, a análise da resolução do terceiro subjogo seguirá nos mesmos intervalos de variação de p definidos nos subjogos anteriores. Iniciando onde $p < 1/4$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p < 1/4 \Leftrightarrow 0 \text{ (Não Faz)} < 2 \text{ (Faz)}.$$

Em segundo cenário, onde $1/4 < p < 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$1/4 < p < 1/2 \Leftrightarrow 3 - 5p \text{ (Faz)} > 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Finalmente, onde $p > 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - 2p \text{ (Faz)} < 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma decisão do Promotor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Promotor
Valores de *p*	$p < 1/4$	Faz
	$1/4 < p < 1/2$	Faz
	$p > 1/2$	Não Faz

Tabela 40: Representação esquemática das escolhas do Promotor em função do valor de *p* no SJ3 do Jogo Natureza Simples Unitário

Portanto, o terceiro subjogo possui três soluções, uma na qual o Promotor escolhe Faz quando $p < 1/4$; outra na qual o Promotor escolhe Faz quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/4 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Promotor escolhe Não Faz quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

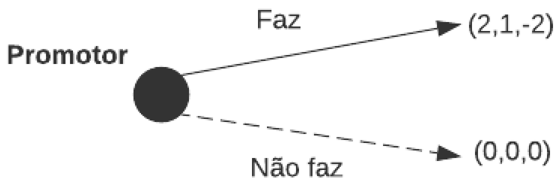

Figura 43: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando $p < 1/4$

Figura 44: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/4 e menor do que 1/2

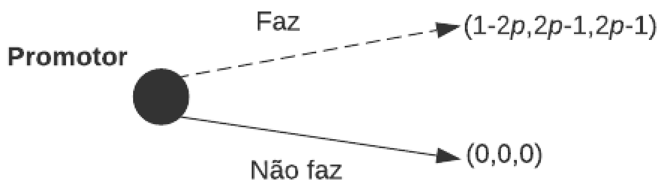

Figura 45: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Unitário quando $p > 1/2$

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo Natureza Simples Unitário nos diferentes valores de *p*.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 1/4$	(Faz, Assiste, Acomoda)
	$1/4 < p < 1/2$	(Faz, Assiste, Denuncia)
	$1/2 < p \leq 1$	(Não Faz, •, •)

Tabela 41: Representação esquemática da resolução do Jogo Natureza Simples Unitário

4.2.2.4 Jogo Natureza Sinalizado Unitário

A impossibilidade de se obter a informação do tipo de tratamento que será dado pelo professor ao ato não necessariamente impede que os jogadores atribuam uma probabilidade sobre essa condição, baseando-se na história conhecida até então, ou seja, nas próprias jogadas realizadas. Assim, pode-se modelar o jogo do tipo Natureza com a introdução da expectativa do jogador Espectador quanto ao jogo se desenrolar no subjogo Vigilante ou no subjogo Desatento. Essa expectativa é condicionada a decisão Fazer do jogador Promotor, e funcionará como uma sinalização que o Espectador utilizará para subsidiar sua análise, e devido a esta característica, o jogo será nomeado de Natureza Sinalizado Unitário, que se apresenta na sua forma estendida conforme figura a seguir.

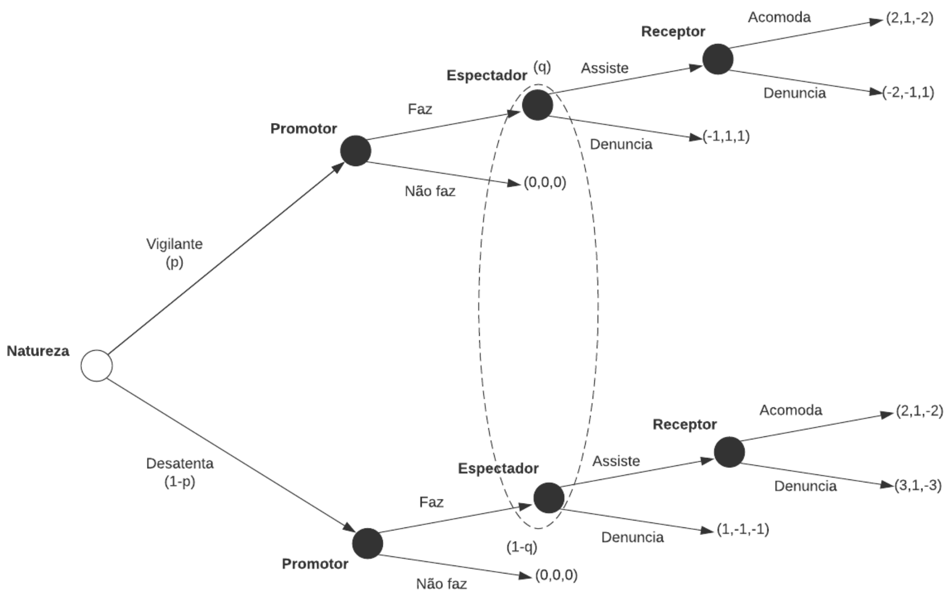

Figura 46: Jogo Natureza Sinalizado Unitário – Representação na forma estendida

Conforme a árvore de decisões, a variável q indica a probabilidade que o jogador Espectador atribui de se encontrar no cenário Vigilante do jogo, e que (1-q) é a probabilidade no cenário Desatento. Por se tratar de uma tentativa de prever o caráter do pseudojogador Natureza, partindo-se da ação do jogador Promotor, pode-se examinar q a partir de sua relação com p. Essa associação se efetivará com a utilização do Teorema de Bayes, conforme equação a seguir:

$$q = P(\text{Vigilante}|\text{Fazer}) =$$
$$= \frac{P(\text{Fazer}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Fazer}|\text{Desatento})\cdot P(\text{Desatento}) + P(\text{Fazer}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}.$$

Assim, o significado de q é dado por P(Vigilante|Fazer), onde q é a probabilidade do jogador Espectador encontrar-se no cenário Vigilante, dado com certeza que o jogador Promotor escolhe a decisão Fazer. Os termos P(Desatento) e P(Vigilante) se relacionam diretamente com as possíveis decisões do pseudojogador Natureza, logo P(Vigilante) = p e P(Desatento) = (1-p). Finalmente, P(Fazer|Desatento) designa a probabilidade do jogador Promotor escolher a estratégia Fazer quando se está no cenário Desatento, e P(Fazer|Vigilante) designa a probabilidade do jogador Promotor escolher a estratégia Fazer quando se está no cenário Vigilante. Avaliando as análises de indução reversa nos jogos Vigilante Unitário e Desatento Unitário, tem-se que P(Fazer|Desatento) = 1, e P(Fazer|Vigilante) = 0.

Compilando todas as informações na equação que determina q, temos que:

$$q = P(\text{Vigilante}|\text{Fazer}) = 0.(p) \,/\, (1\cdot(1\text{-}p)+0\cdot p) \Rightarrow q = 0.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: dado que os jogadores se comportam de maneira a maximizar suas recompensas, $q = 0$ significa que o jogador Espectador se encontrará no cenário Desatento, e escolherá a decisão Assistir, independente da escolha do jogador Receptor. Desse modo, é preciso que o professor deixe bem claro que é do tipo vigilante, pois uma vez que o jogador Promotor escolhe a estratégia Fazer, o jogador Espectador sempre interpretará isso com um sinal do cenário Desatento, escolherá Assistir.

4.2.3 Jogos com mais de um espectador

Nesta seção, todos os jogos modelados terão como condição a existência de mais de um espectador, bem como um promotor e um receptor. Uma vez que todos terão mais de um espectador, todos receberão designações remetendo ao número de espectadores (Duplo e com *m* Espectadores).

4.2.3.1 Jogos Duplos

Essas modelagens pressupõem a existência de duas testemunhas oculares ao ato, que serão denominados como Espectador(1) e Espectador(2), bem como os jogadores com as funções Promotor e Receptor. No aspecto da estruturação formal, todos os jogos terão características em comum. Iniciando pela representação dos jogadores, temos que:

$$J = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o jogador Promotor, j_2, o jogador Espectador(1), j_3, o jogador Espectador(2), e j_4, o jogador Receptor. Ademais, denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$E_3 = \{s_{31}, s_{32}\}$$
$$E_4 = \{s_{41}, s_{42}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Fazer e Não Fazer do jogador j_1, s_{21} e s_{22} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_2, s_{31} e s_{32} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_3, e, s_{41} e s_{42} representam as decisões Acomodar e Denunciar do jogador j_4. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{4} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$$
$$= \{(s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}),(s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{41}),(s_{11}, s_{22}, s_{31}, s_{41}),(s_{11}, s_{22}, s_{32}, s_{41}),$$
$$(s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{41}),(s_{12}, s_{21}, s_{32}, s_{41}),(s_{12}, s_{22}, s_{31}, s_{41}),(s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{41}),$$
$$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{42}),(s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{42}),(s_{11}, s_{22}, s_{31}, s_{42}),(s_{11}, s_{22}, s_{32}, s_{42}),$$
$$(s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{42}),(s_{12}, s_{21}, s_{32}, s_{42}),(s_{12}, s_{22}, s_{31}, s_{42}),(s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42})\}$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

4.2.3.1.1 Jogo Vigilante Duplo

O cenário contemplado nessa modelagem é o Vigilante, conforme informações no tópico 4.1.3 - Caracterização de cenários

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \quad \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_4: \quad \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_4(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1, u_2, u_3 e u_4 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$, $u_3(\boldsymbol{e})$ e $u_4(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade			
		u_1	u_2	u_3	u_4
Perfis de estratégias	(Não Faz, •, •, •)	0	0	0	0
	(Faz, Denuncia, •, •)	-1	1	0	1
	(Faz, Assiste, Denuncia, •)	-2	-1	1	1
	(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	3	1	1	-3
	(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	-3	-1	-1	1

Tabela 42: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 no Jogo Vigilante Duplo

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 na forma estendida, conforme figura a seguir.

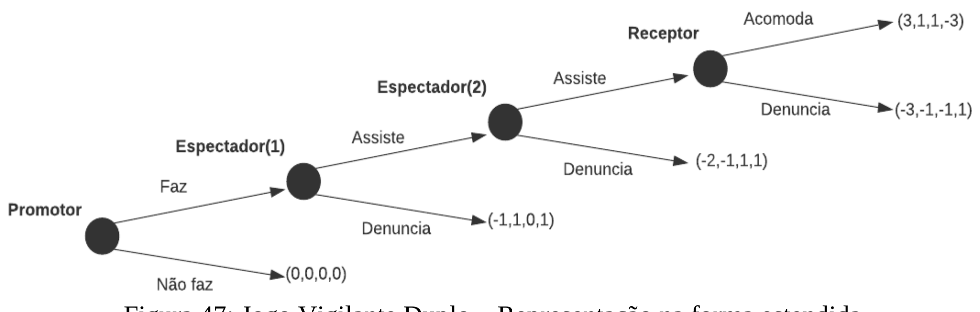

Figura 47: Jogo Vigilante Duplo – Representação na forma estendida

Para determinar qual combinação de estratégias resultará na sequencia mais estável possível na resolução do jogo, se analisará qual é a melhor decisão que cada jogador poderá tomar, começando pelo último jogador. Desse modo, o jogo pode ser dividido em subjogos, conforme e figura a seguir. O processo de indução reversa seguirá o mesmo procedimento presente no tópico 4.2.2.1 – Jogo Vigilante Unitário.

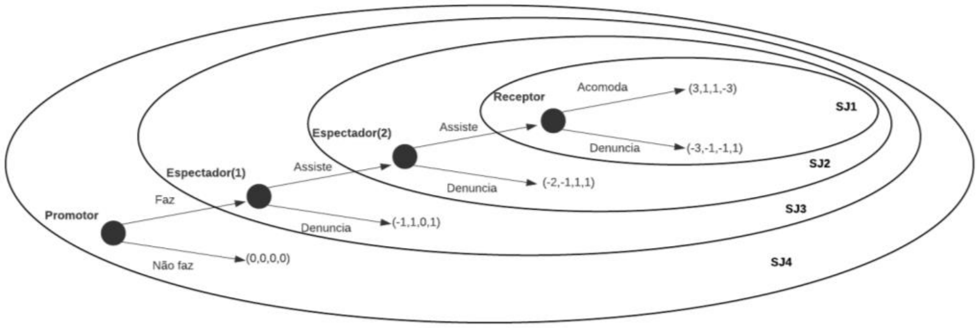

Figura 48: Jogo Vigilante Duplo – Partição em subjogos

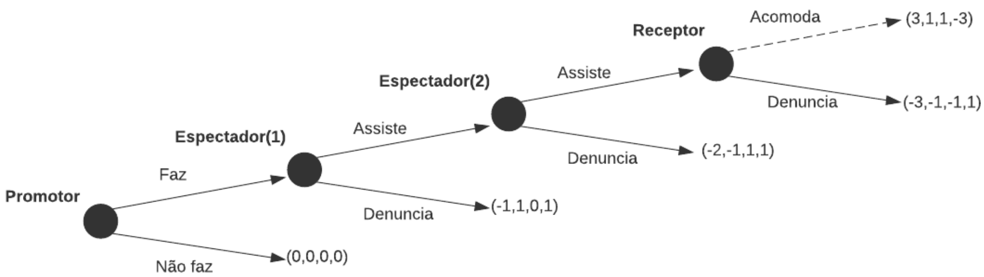

Figura 49: Jogo Vigilante Duplo – SJ1 resolvido

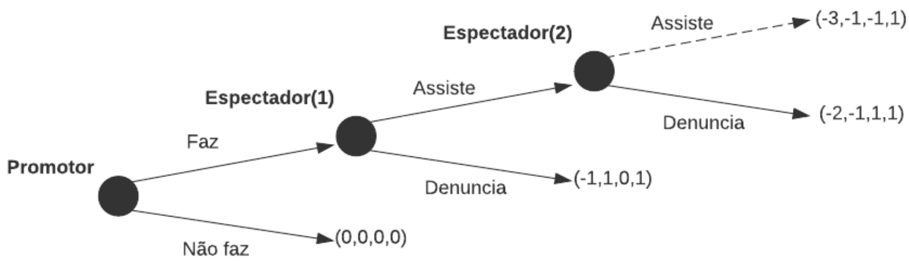

Figura 50: Jogo Vigilante Duplo – SJ2 resolvido

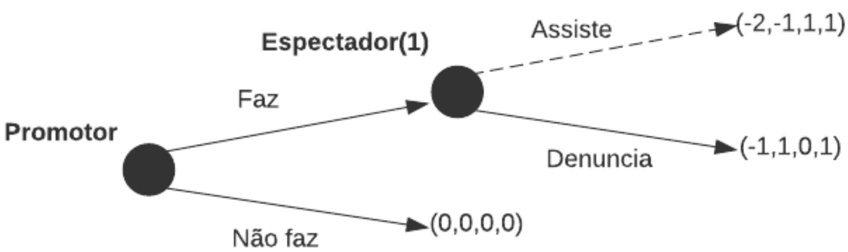

Figura 51: Jogo Vigilante Duplo – SJ3 resolvido

Figura 52: Jogo Vigilante Duplo – SJ4 resolvido

Conforme é possível concluir a partir do resultado do método de indução reversa, o cenário Vigilante tem com configuração mais estável a não-ocorrência do bullying.

4.2.3.1.2 Jogo Desatento Duplo

O cenário contemplado nessa modelagem é o Desatento, conforme informações no tópico 4.1.3 - Caracterização de cenários

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1 : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2 : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3 : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_4 : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_4(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 , u_2 , u_3 e u_4 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$, $u_3(\boldsymbol{e})$ e $u_4(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade			
		u_1	u_2	u_3	u_4
Perfis de estratégias	(Não Faz, •, •, •)	0	0	0	0
	(Faz, Denuncia, •, •)	1	-1	0	-1
	(Faz, Assiste, Denuncia, •)	2	1	-1	-2
	(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	3	1	1	-3
	(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	4	1	1	-4

Tabela 43: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 no Jogo Desatento Duplo

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 na forma estendida, conforme figura a seguir.

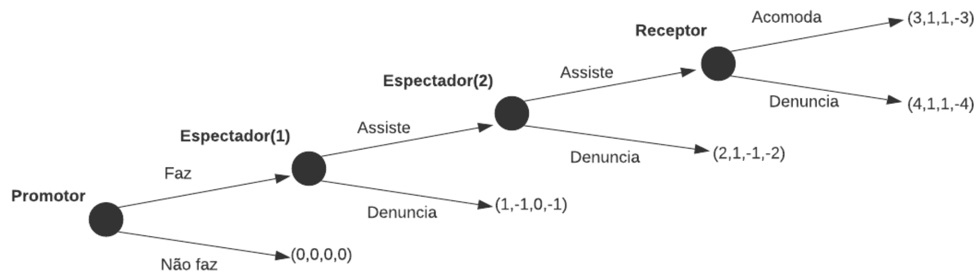

Figura 53: Jogo Desatento Duplo – Representação na forma estendida

Para determinar qual combinação de estratégias resultará na sequencia mais estável possível na resolução do jogo, se analisará qual é a melhor decisão que cada jogador poderá tomar, começando pelo último jogador. Desse modo, o jogo pode ser dividido em subjogos, conforme e figura a seguir. O processo de indução reversa seguirá o mesmo procedimento presente no tópico 4.2.2.2 – Jogo Desatento Unitário.

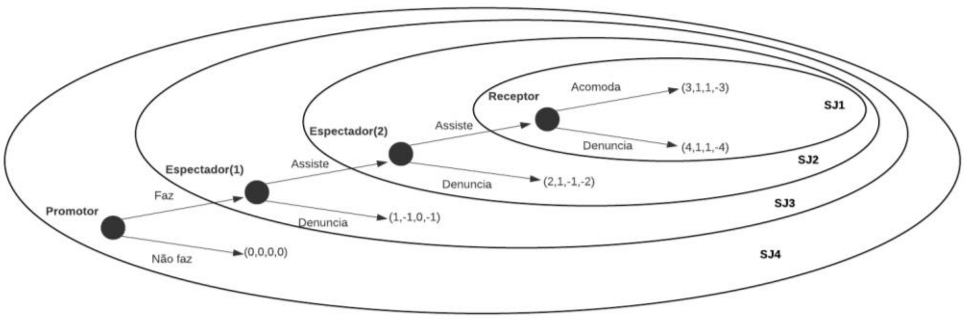

Figura 54: Jogo Desatento Duplo – Partição em subjogos

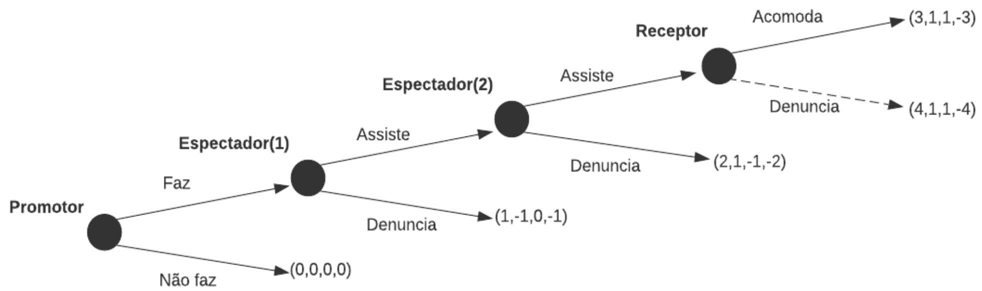

Figura 55: Jogo Desatento Duplo – SJ1 resolvido

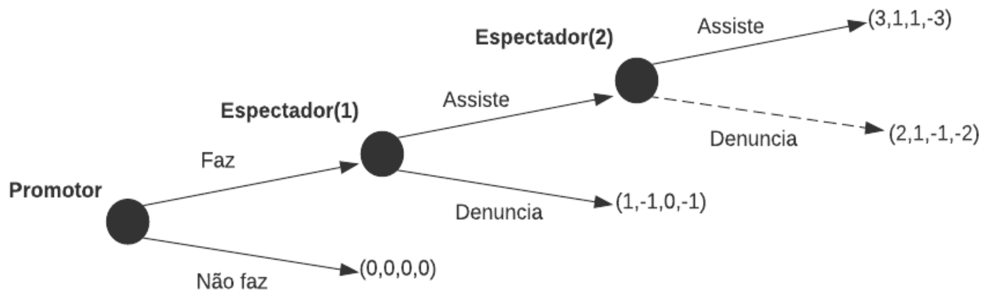

Figura 56: Jogo Desatento Duplo – SJ2 resolvido

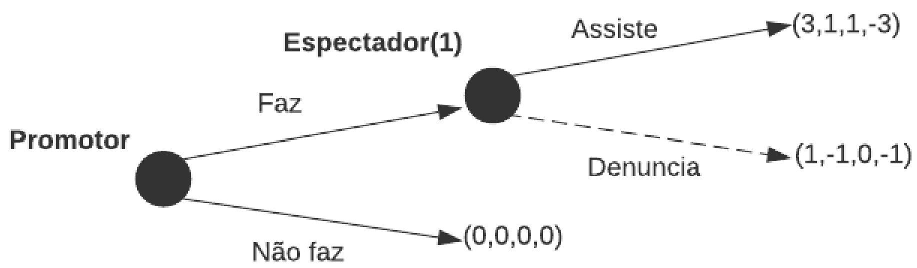

Figura 57: Jogo Desatento Duplo – SJ3 resolvido

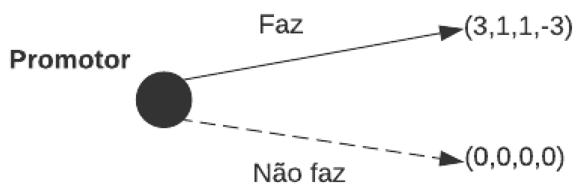

Figura 58: Jogo Desatento Duplo – SJ4 resolvido

Conforme é possível concluir a partir do resultado do método de indução reversa, que o Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é o perfil de estratégias (Faz, Assiste, Assiste, Acomoda), o que implica que não somente o ato de violência é executado, mas que é mais provável que a autoridade escolar não fique sabendo da sua existência.

4.2.3.1.3 Jogo Natureza Simples Duplo

Essa modelagem pressupõe o cenário Natureza Simples, onde existe um jogo de informação incompleta, e os jogadores não conseguem determinar certamente o caráter das autoridades competentes quanto a punição do bullying. A modelagem do jogo na forma estendida está reproduzida na figura a seguir.

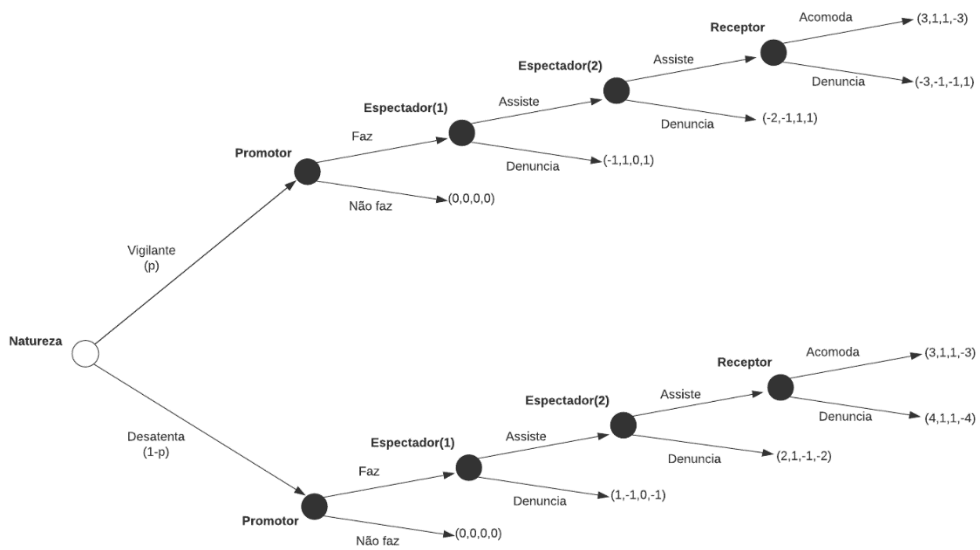

Figura 59: Jogo Natureza Simples Duplo - Representação na forma estendida

Uma vez que existe a introdução de variável p, que postula a probabilidade do jogo encontrar-se em uma conjuntura punitiva ou não, a mesma deve ser ponderada nos ganhos dos jogos Vigilante Duplo e Desatento Duplo, conforme tabelas a seguir.

Perfis de estratégia	**Ganhos do Promotor**
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia, •, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(3)\cdot(p)+(3)\cdot(1-p) = 3$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-3)\cdot(p)+(4)\cdot(1-p) = 4 - 7p$

Tabela 44: Recompensas Ponderadas do jogador Promotor no Jogo Natureza Simples Duplo

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(1)**
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia, •, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 45: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(1) no Jogo Natureza Simples Duplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Espectador(2)
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 46: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(2) no Jogo Natureza Simples Duplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Receptor
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Denuncia, •, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-2)\cdot(1-p) = 3p - 2$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(-3)\cdot(p)+(-3)\cdot(1-p) = -3$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(1)\cdot(p)+(-4)\cdot(1-p) = 5p - 4$

Tabela 47: Recompensas Ponderadas do jogador Receptor no Jogo Natureza Simples Duplo

Compilando as funções que produzem os ganhos dos quatro jogadores em uma árvore de possibilidades, com recompensas ponderadas do jogo, temos a forma de visualização a seguir.

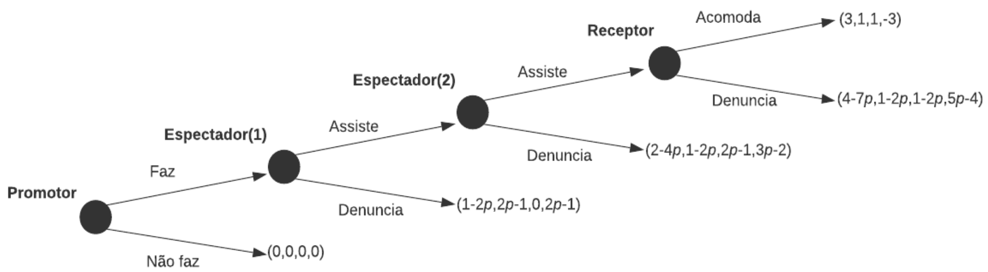

Figura 60: Representação na forma estendida do Jogo Natureza Simples Duplo com recompensas ponderadas

A forma estendida do jogo deve ser particionada em subjogos, possibilitando a aplicação do algoritmo da indução reversa, e em seguida, a verificação da existência de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos. Além disso, a resolução possui os mesmos pressupostos considerados na solução do Jogo das Balas, conforme encontra-se na seção 2.3.4 - Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas.

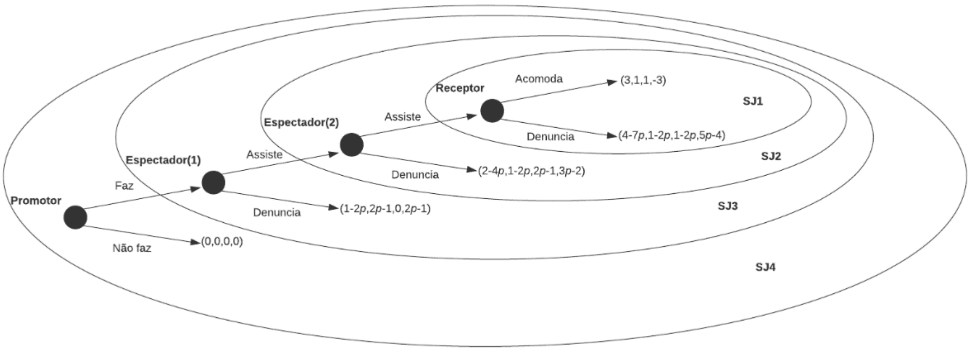

Figura 61: Representação na forma estendida do Jogo Natureza Simples Duplo com recompensas ponderadas – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo se dá através da comparação dos ganhos que o Receptor pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de *p*, devemos proceder uma comparação entre os ganhos do Receptor para valores de *p* maiores do que zero e maiores do que um. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de *p* que igualam os ganhos associados as estratégias do Receptor, conforme equação a seguir:

$$- 3 \text{ (Acomoda)} = 5p - 4 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/5 \text{ (Indiferente)}.$$

Posteriormente, são analisados os valores de *p*, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$- 3 \text{ (Acomoda)} > 5p - 4 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/5 \text{ (Acomoda)},$$
$$- 3 \text{ (Acomoda)} < 5p - 4 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/5 \text{ (Denuncia)}.$$

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma decisão do Receptor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Receptor
Valores de *p*	$p < 1/5$	Acomoda
	$p = 1/5$	Indiferente
	$p > 1/5$	Denuncia

Tabela 48: Representação esquemática das escolhas do Receptor em função do valor de *p* no SJ1 do Jogo Natureza Simples Duplo

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual o Receptor escolhe Acomodar quando $p < 1/5$, e outra na qual o Receptor escolhe Denunciar quando $p > 1/5$, conforme figuras a seguir.

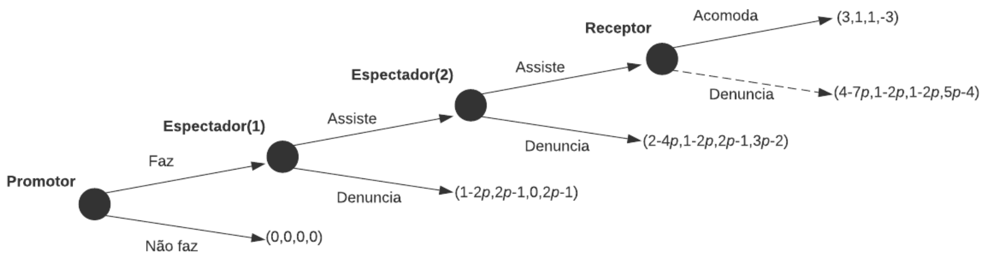

Figura 62: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p < 1/5$

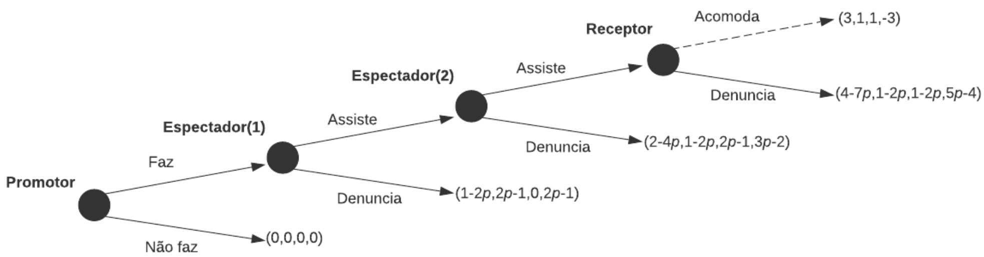

Figura 63: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p > 1/5$

A resolução do segundo subjogo se balizará nos intervalos de variação de p definidos na resolução do primeiro subjogo. Iniciando quando $p < 1/5$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Espectador(2), conforme relação a seguir:

$$p < 1/5 \Leftrightarrow 2p - 1 \text{ (Denuncia)} < 1 \text{ (Assiste)}.$$

Alternativamente, quando $p > 1/5$, obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Espectador(2), conforme equação a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} = 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/2 \text{ (Indiferente)}.$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} > 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/2 \text{ (Assiste)},$$
$$1 - 2p \text{ (Assiste)} < 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/2 \text{ (Denuncia)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Espectador(2) que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Espectador(2)
Valores de *p*	$p < 1/5$	Assiste
	$1/5 < p < 1/2$	Assiste
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	Denuncia

Tabela 49: Representação esquemática das escolhas do Espectador(2) em função do valor de p no SJ2 do Jogo Natureza Simples Duplo

Portanto, o segundo subjogo possui três soluções, uma na qual o Espectador(2) escolhe Assiste quando $p < 1/5$; outra na qual o Espectador(2) escolhe Assiste quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Espectador(2) escolhe Denuncia quando $p > 1/5$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

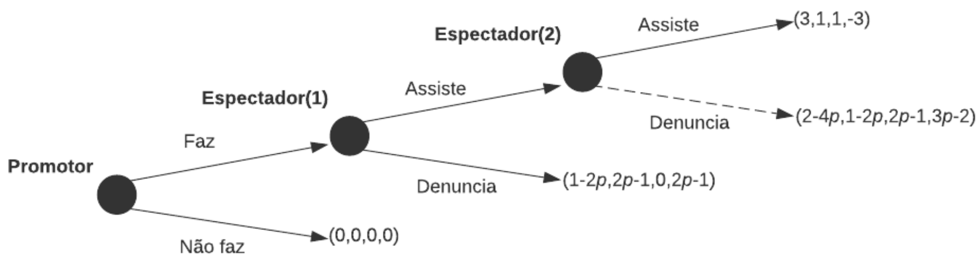

Figura 64: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p < 1/5$

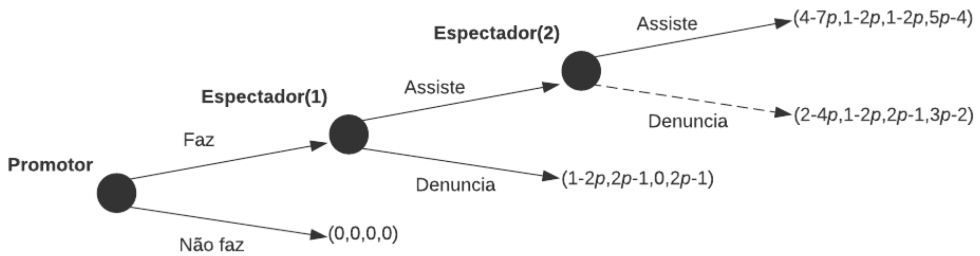

Figura 65: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

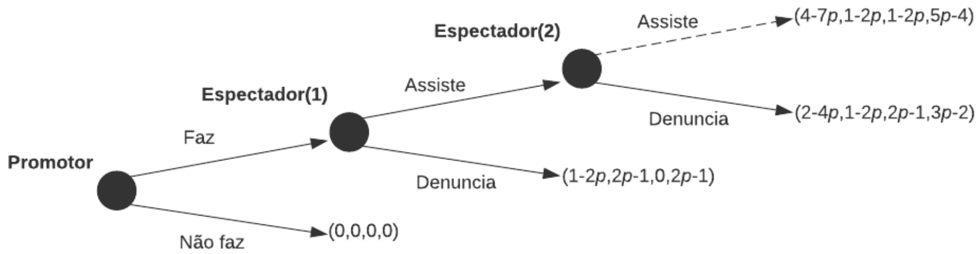

Figura 66: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p > 1/2$

A resolução do terceiro subjogo se balizará nos intervalos de variação de p definidos na resolução dos subjogos anteriores. Iniciando quando $p < 1/5$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Espectador(1), conforme relação a seguir:

$$p < 1/5 \Leftrightarrow 2p - 1 \text{ (Denuncia)} < 1 \text{ (Assiste)}.$$

Alternativamente, quando $p > 1/5$, obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Espectador(1), conforme equação a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} = 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/2 \text{ (Indiferente)}.$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} > 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/2 \text{ (Assiste)},$$
$$1 - 2p \text{ (Assiste)} < 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/2 \text{ (Denuncia)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Espectador(1) que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Espectador(1)
Valores de *p*	$p < 1/5$	Assiste
	$1/5 < p < 1/2$	Assiste
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	Denuncia

Tabela 50: Representação esquemática das escolhas do Espectador(1) em função do valor de *p* no SJ3 do Jogo Natureza Simples Duplo

Portanto, o terceiro subjogo possui três soluções, uma na qual o Espectador(1) escolhe Assiste quando $p < 1/5$; outra na qual o Espectador(1) escolhe Assiste quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Espectador(1) escolhe Denuncia quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

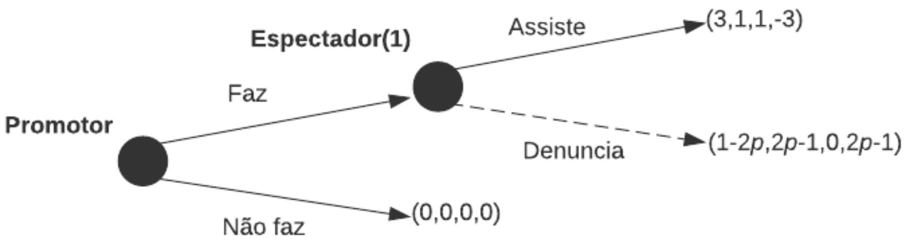

Figura 67: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p < 1/5$

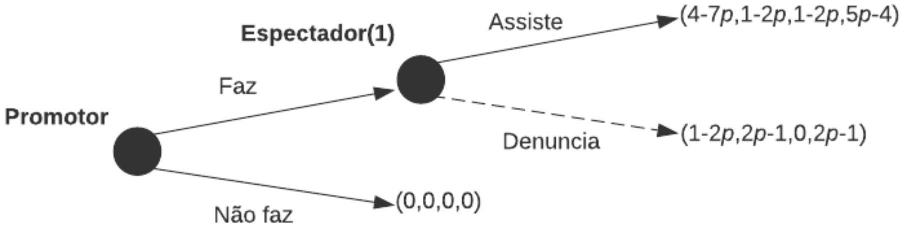

Figura 68: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

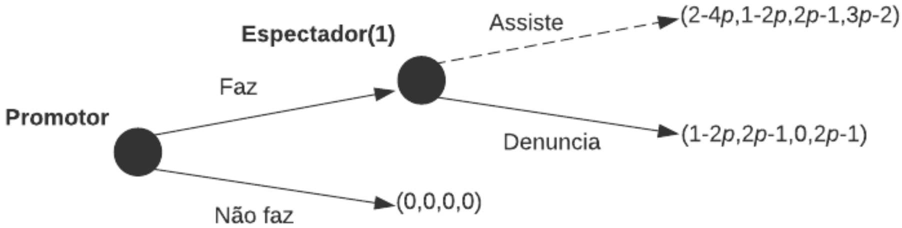

Figura 69: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p > 1/2$

Finalmente, a análise da resolução do quarto subjogo seguirá nos mesmos intervalos de variação de *p* definidos nos subjogos anteriores. Iniciando quando $p < 1/5$, não existe nenhum valor de *p* que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p < 1/5 \Leftrightarrow 0 \text{ (Não Faz)} < 3 \text{ (Faz)}.$$

Em segundo cenário, onde $1/5 < p < 1/2$, também não existe nenhum valor de *p* que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$1/5 < p < 1/2 \Leftrightarrow 4 - 7p \text{ (Faz)} > 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Finalmente, quando $p > 1/2$, também não existe nenhum valor de *p* que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - 2p \text{ (Faz)} < 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma decisão do Promotor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Promotor
Valores de *p*	$p < 1/5$	Faz
	$1/5 < p < 1/2$	Faz
	$p > 1/2$	Não Faz

Tabela 51: Representação esquemática das escolhas do Promotor em função do valor de *p* no SJ4 do Jogo Natureza Simples Duplo

Portanto, o quarto subjogo possui três soluções, uma na qual o Promotor escolhe Faz quando $p < 1/5$; outra na qual o Promotor escolhe Faz quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Promotor escolhe Não Faz quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

Figura 70: Representação da solução do quarto subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p < 1/5$

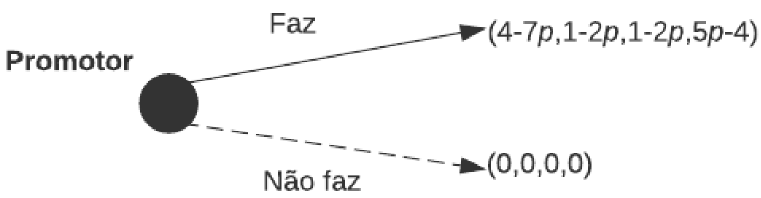

Figura 71: Representação da solução do quarto subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

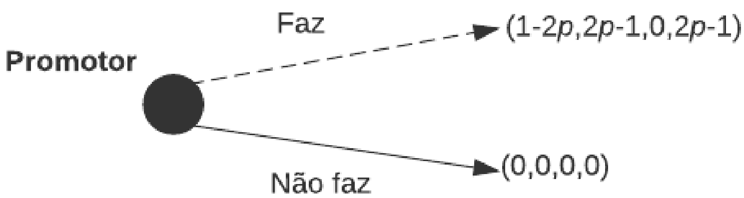

Figura 72: Representação da solução do quarto subjogo do Jogo Natureza Simples Duplo quando $p > 1/2$

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo Natureza Simples Duplo nos diferentes valores de *p*.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 1/5$	(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)
	$1/5 < p < 1/2$	(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)
	$1/2 < p \leq 1$	(Não Faz, •, •)

Tabela 52: Representação esquemática da resolução do Jogo Natureza Simples Duplo

4.2.3.1.4 Jogo Natureza Sinalizado Duplo

A introdução dos dois espectadores na modelagem traz a possibilidade de análise de dois tipos de sinalização: uma similar a modelada no tópico 4.2.2.4 – Jogo Natureza Sinalizado Unitário, com o primeiro espectador atribuindo uma probabilidade *q* para punição do ato em função da estratégia escolhida pelo

Promotor. Um outro viés concebível é que os dois espectadores elaborem interpretações quanto a natureza da punição em função do comportamento do Promotor, dado que o ato é visualizado por eles ao mesmo tempo. Assim, cada espectador atribuirá uma chance que será quantificada nas variáveis q_1 e q_2, respectivamente. Logo, onde apenas o primeiro espectador elabora sinalização é chamado de Sinalização Simples, onde os dois espectadores fazem isso é nominado de Sinalização Composta. As formas estendidas das duas alternativas de modelagens encontram-se nas figuras a seguir.

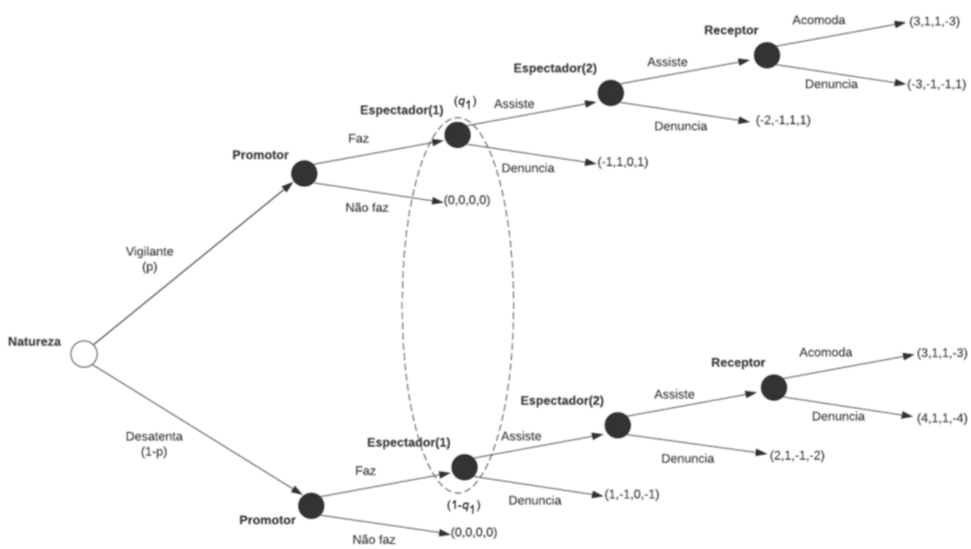

Figura 73: Jogo Natureza Sinalizado Duplo – Sinalização Simples – Representação na forma estendida

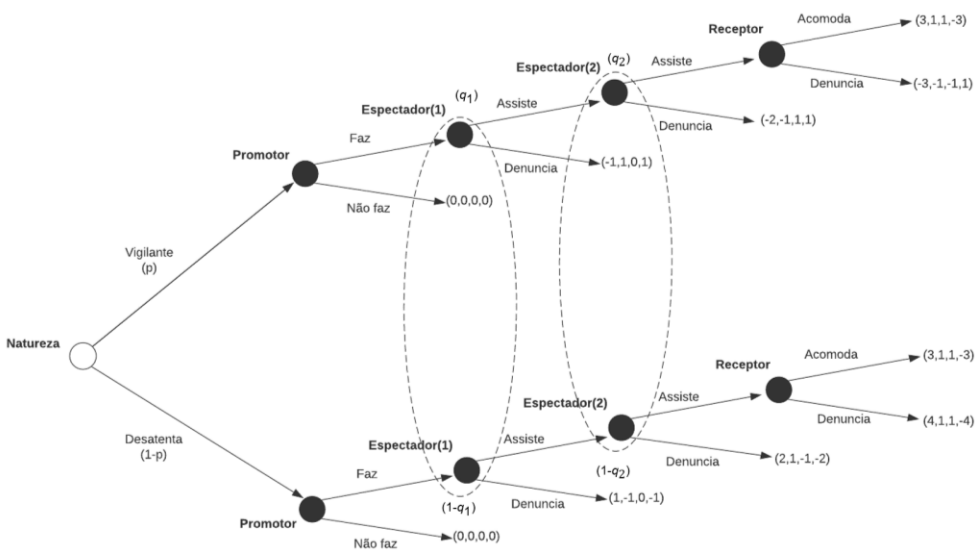

Figura 74: Jogo Natureza Sinalizado Duplo – Sinalização Composta – Representação na forma estendida

O Jogo Natureza Simples Duplo Sinalizado e com Sinalização Simples possui o mesmo tipo de análise, com conclusões similares aquelas presentes no tópico 4.2.2.4 – Jogo Natureza Sinalizado Unitário, onde de maneira resumida, a escolha da estratégia Fazer pelo Promotor é interpretado pelo Espectador(1) como uma indicação que de as autoridades escolares não punirão o bullying, fazendo-o escolher a estratégia Assistir.

Com relação ao Jogo Natureza Simples Duplo Sinalizado e com Sinalização Composta, tanto q_1 quanto q_2 indicarão a indicação dos jogadores Espectador(1) e Espectador(2) quanto ao cenário Desatento, e os complementares de q_1 e q_2, ao Vigilante, bem como terão suas relações com *p* partindo da utilização do Teorema de Bayes, conforme equações a seguir:

$$q_1 = P(\text{Vigilante}|\text{Fazer}) =$$
$$= \frac{P(\text{Fazer}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Fazer}|\text{Desatento})\cdot \text{P}(\text{Desatento}) + P(\text{Fazer}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})},$$

$$q_2 = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E1]}) =$$
$$= \frac{P(\text{Assistir [E1]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Assistir [E1]}|\text{Desatento})\cdot P(\text{Desatento}) + P(\text{Assistir [E1]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}.$$

Assim, o significado de q_1 é dado por *P*(Vigilante|Fazer), onde q_1 é a probabilidade do jogador Espectador1 encontrar-se no cenário Desatento, dado com certeza que o jogador Promotor escolhe a decisão Fazer. Os termos *P*(Desatento) e *P*(Vigilante) se relacionam diretamente com as possíveis decisões do pseudojogador Natureza, logo *P*(Vigilante) = *p* e *P*(Desatento) = (1-*p*). Finalmente, *P*(Fazer|Desatento) designa a probabilidade do jogador Promotor escolher a estratégia Fazer quando se está no cenário Desatento, e *P*(Fazer|Vigilante) designa a probabilidade do jogador Promotor escolher a estratégia Fazer quando se está no cenário Vigilante. Avaliando as análises de indução reversa nos jogos Vigilante e Desatento, tem-se que *P*(Fazer|Desatento) = 1, e *P*(Fazer|Vigilante) = 0.

Similarmente, a variável q_2 é representada por *P*(Vigilante|Assistir [E1]), onde q_2 é a probabilidade do jogador Espectador(2) encontrar-se no cenário Desatento, dado com certeza que o jogador Espectador(1) escolhe a decisão

Assistir. Adicionalmente, P(Assistir [E1]|Desatento) designa a probabilidade do jogador Espectador(1) escolher a estratégia Assistir quando se está no cenário Desatento, e P(Assistir [E1]/Vigilante) designa a probabilidade do jogador Espectador(1) escolher a estratégia Assistir quando se está no cenário Vigilante. Avaliando as análises de indução reversa nos jogos Vigilante Duplo e Desatento Duplo, tem-se que P(Assistir [E1]|Desatento) = 1, e P(Assistir [E1]|Vigilante) = 0.

Com base nas informações, pode-se realizar nas equações que representam q_1 e q_2, tem-se os seguintes resultados, conforme equações a seguir:

$$q_1 = P(\text{Vigilante}|\text{Fazer}) = 0 \cdot p \,/\, (1 \cdot (1-p)+0 \cdot p) \Rightarrow q_1 = 0,$$
$$q_2 = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E1]}) = 0 \cdot p \,/\, (1 \cdot (1-p)+0 \cdot p) \Rightarrow q_2 = 0.$$

Portanto, os resultados de q_1 e q_2 indicam que o jogador Espectador(1) sempre escolherá Assistir, dado que esse interpreta que jogador Promotor só escolherá a estratégia Fazer em um cenário Desatento, e que o jogador Espectador(2) sempre adotará a opção Assistir, uma vez que esse também deduz que se encontra em um cenário Desatento em função da escolha Assistir do jogador Espectador(1). Essas conclusões reforçam a necessidade do ambiente escolar ter uma postura clara que o bullying será devidamente punido.

4.2.3.2 Jogos com quantidade finita de espectadores

Os modelos apresentados para situações onde existem uma ou duas testemunhas oculares de um ato de violência escolar podem ser generalizados para uma quantidade qualquer de espectadores, mantendo a mesma formulação, ou seja, existem os mesmos cenários, os jogadores possuem funções similares, e as recompensas são distribuídas seguindo a lógica exposta no tópico 4.1.2 – Caracterização das recompensas. A variável m será utilizada para simbolizar essa quantidade finita de espectadores. Quanto ao aspecto da estruturação formal dos modelos, os jogos terão características em comum. Iniciando pela representação dos jogadores, temos que:

$$J = \{j_1, j_2, ..., j_m, j_{m+1}, j_{m+2}\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o jogador Promotor, os elementos entre j_2 e j_{m+1}, os jogadores com a função Espectador, e j_{m+2}, o jogador Receptor. Ademais, denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$\vdots$$
$$E_m = \{s_{m1}, s_{m2}\}$$
$$E_{m+1} = \{s_{(m+1)1}, s_{(m+1)2}\}$$
$$E_{m+2} = \{s_{(m+2)1}, s_{(m+2)2}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores do conjunto J. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Fazer e Não Fazer do jogador j_1, e $s_{(m+2)1}$ e $s_{(m+2)2}$ representam as decisões Acomodar e Denunciar do jogador j_{m+2}. Os outros conjuntos descrevem os comportamentos dos jogadores com função Espectador, sendo que elementos da forma s_{k1} representam a escolha Assistir, e elementos da forma s_{k2}, a escolha Denunciar. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{(m+2)} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m \times E_{m+1} \times E_{m+2}$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

4.2.3.2.1 Jogo Vigilante com *m* Espectadores

Esse modelo extrapola a noção de uma quantidade indefinida de testemunhas do ato de bullying, contemplando as características descritas no cenário Vigilante, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários.

Uma vez que existem decisões que encerram os processos decisórios, será utilizada a mesma termologia em 2.3.1 – Dominância estrita e Dominância fraca entre estratégias para descreve perfis de estratégias.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_2: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_3: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$u_i: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_i(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$u_m: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_m(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_{(m+1)}: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+1)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_{(m+2)}: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+2)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

, onde as funções utilidade são associadas aos respectivos jogadores do conjunto J. Essas funções associam as recompensas que os respectivos jogadores recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

Perfis de estratégias	Valor da função utilidade								
	u_1	u_2	u_3	…	u_i	…	u_m	$u_{(m+1)}$	$u_{(m+2)}$
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k}, \dots, s_{ik}, \dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	0	0	0	…	0	…	0	0	0
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k}, \dots, s_{ik}, \dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	-1	1	0	…	0	…	0	0	1
$(s_{11}, s_{21}, s_{32}, \dots, s_{ik}, \dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	-2	-1	1	…	0	…	0	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k}, \dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$-i$	-1	-1	…	1	…	0	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{i1}, \dots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$-m$	-1	-1	…	-1	…	-1	1	1
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{i1}, \dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(m+1)$	1	1	…	1	…	1	1	$-(m+1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{i1}, \dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$-(m+1)$	-1	-1	…	-1	…	-1	-1	1

Tabela 53: Valores das funções utilidade para dos jogadores no Jogo Vigilante com m Espectadores, onde k = 1 ou k = 2

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores na forma estendida, conforme figura a seguir.

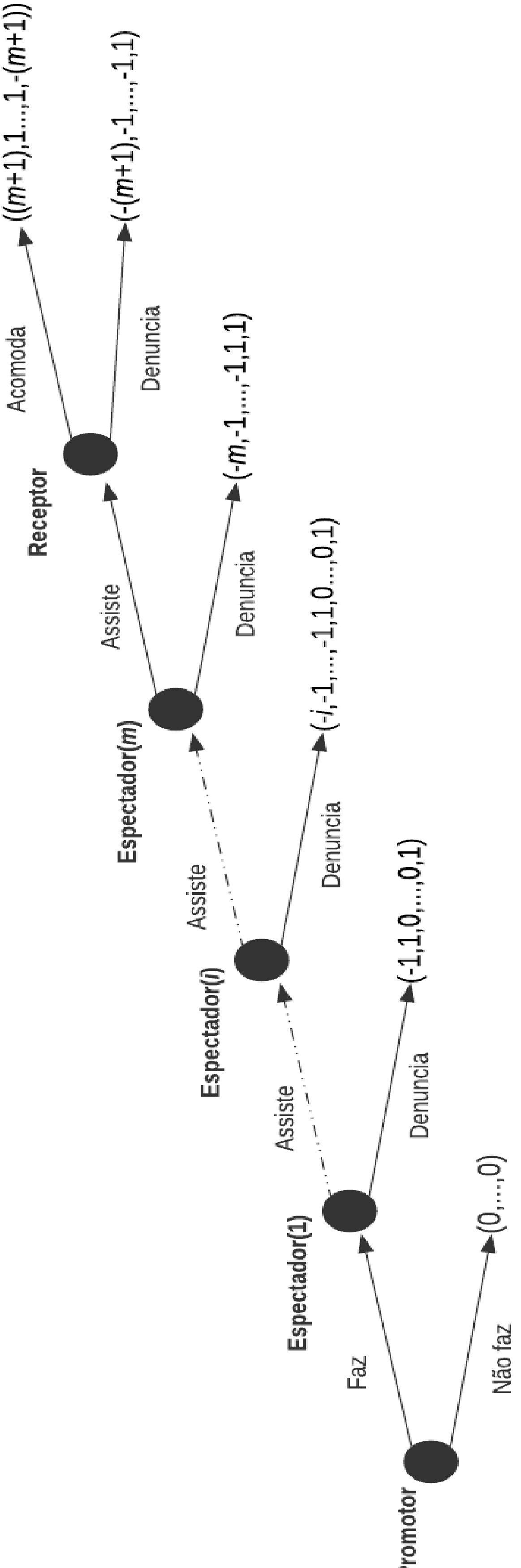

Figura 75: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – Representação na forma estendida

Os perfis de estratégias podem ser decompostos para apresentação em forma de tabela, juntamente com seus ganhos respectivos determinados pelas funções utilidades de cada jogador, conforme organização a seguir, onde k = 1 ou k = 2.

Perfis de estratégia	**Ganhos Associados**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(0,…, 0)
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-1, 1, 0,…, 0, 1)
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-2, -1, 1, 0,…, 0, 1)
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-*i*,-1,…,-1,1,0,…,0,1)
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	(-*m*, -1,…, -1, 1, 1)
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	((*m*+1), 1,…, 1, -(*m*+1))
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	(-(*m*+1), -1,…, -1, 1)

Tabela 54: Representação esquemática das recompensas do Jogo Vigilante com *m* Espectadores

O processo de definição da solução mais estável é feito primeiramente com a determinação dos subjogos na forma estendida do jogo modelado, de forma similar ao feito em 4.2.2.1 - Jogo Vigilante Unitário e 4.2.3.1.1 - Jogo Vigilante Duplo, conforme figura a seguir.

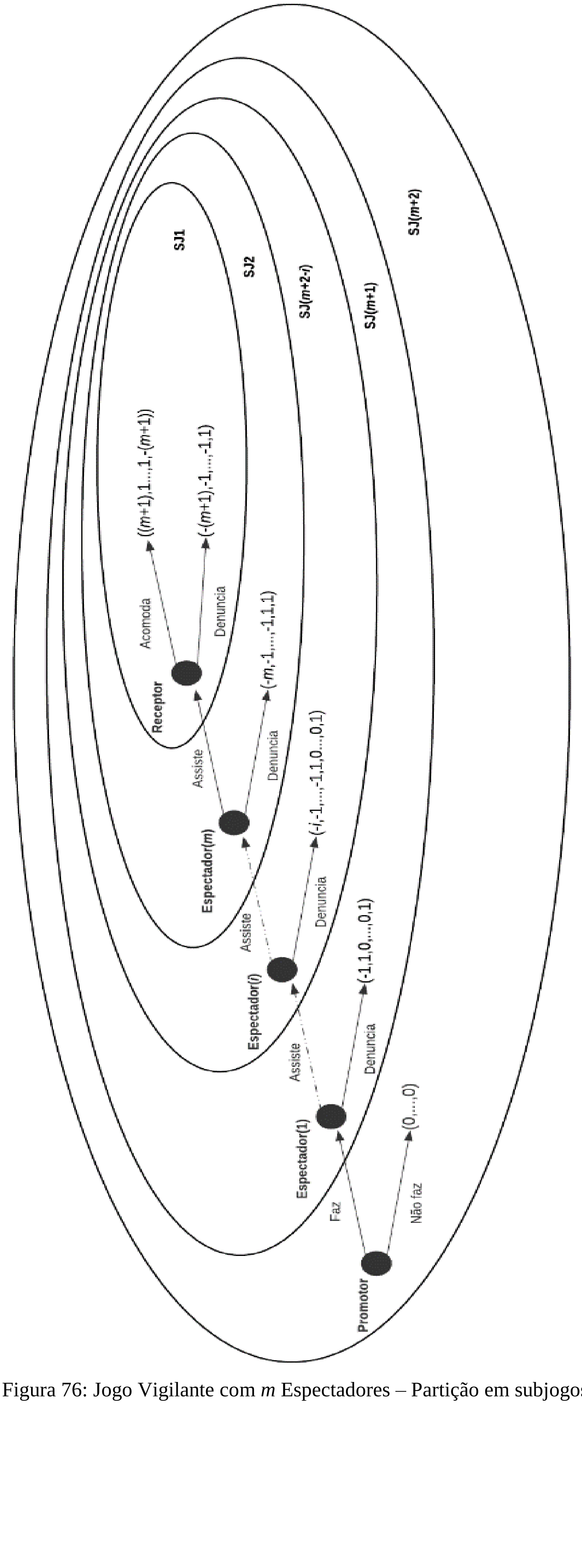

Figura 76: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – Partição em subjogos

A eliminação mais estratégias dominadas pelo algoritmo da indução reversa resultará nos resultados descritos em 4.2.2.1 – Jogo Vigilante Unitário e 4.2.3.1.1 – Jogo Vigilante Duplo, ou seja, o resultado mais provável é aquele onde o bullying não ocorre.

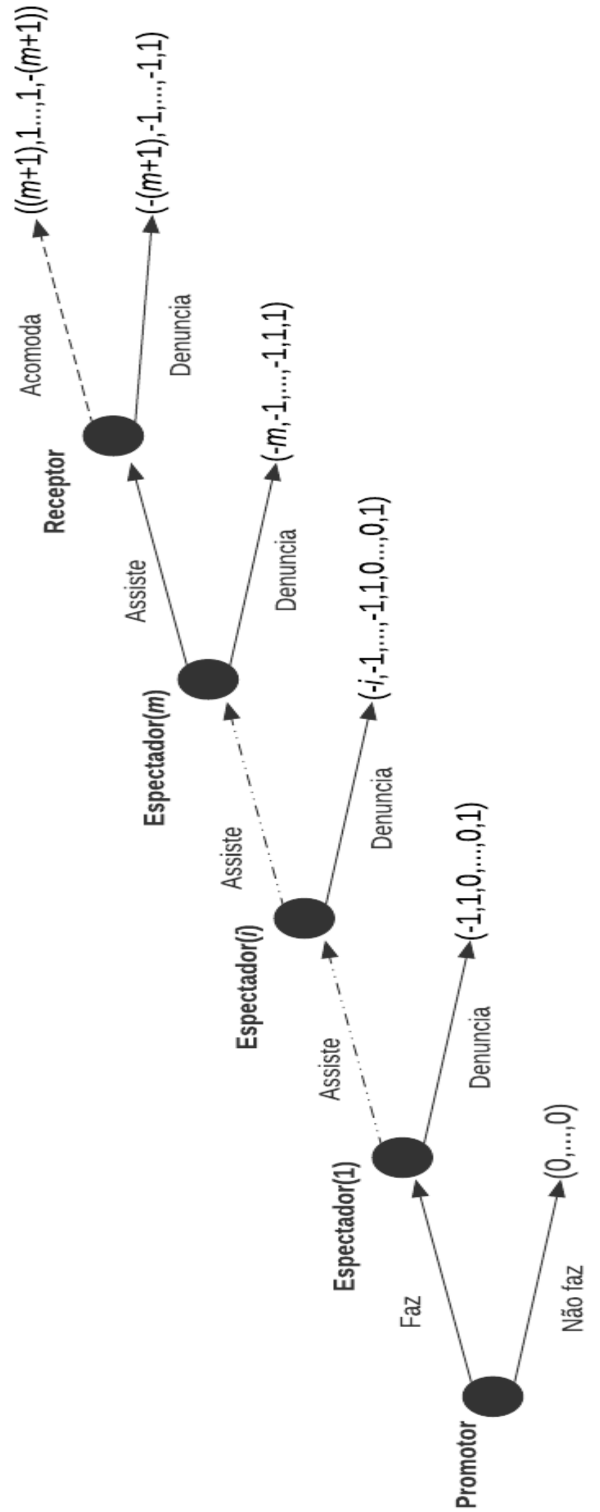

Figura 77: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – SJ1 resolvido

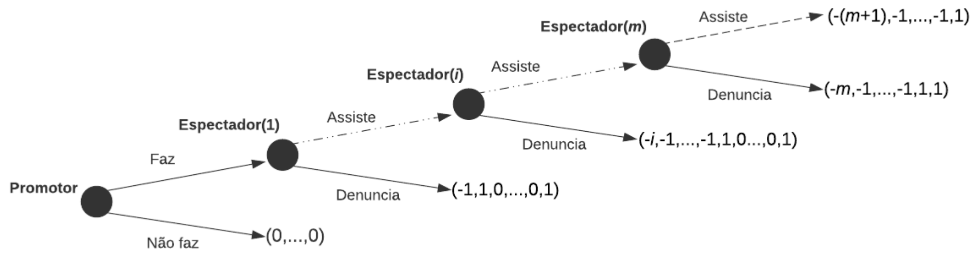

Figura 78: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – SJ2 resolvido

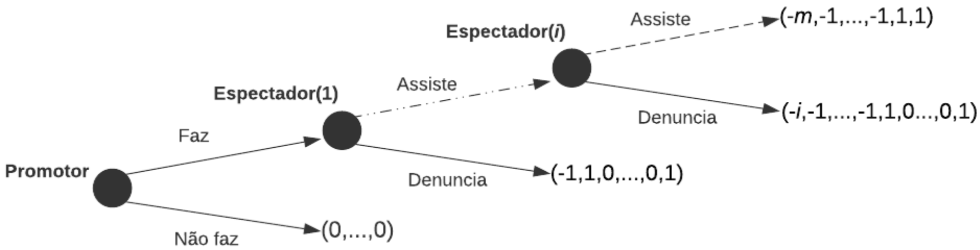

Figura 79: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – SJ(*m*+2-*i*) resolvido, onde *i* pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que *m*

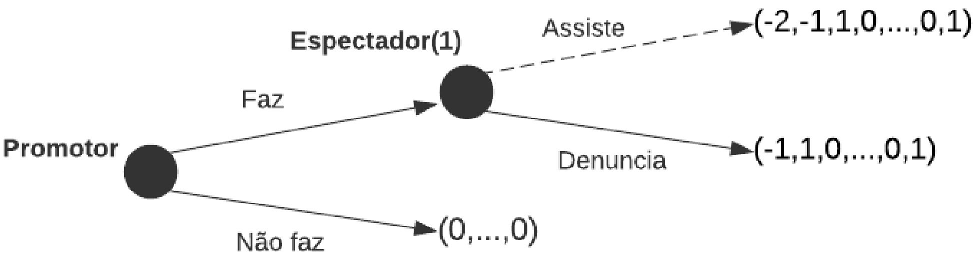

Figura 80: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – SJ(*m*+1) resolvido

Figura 81: Jogo Vigilante com *m* Espectadores – SJ(*m*+2) resolvido

4.2.3.2.2 Jogo Desatento com *m* Espectadores

O jogo contém na modelagem um número indefinido de testemunhas do ato de bullying, contemplando as características descritas no cenário Desatento, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários.

Uma vez que existem decisões que encerram os processos decisórios, será utilizada a mesma termologia em 2.3.1 – Dominância estrita e Dominância fraca entre estratégias para descreve perfis de estratégias.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_2: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_3: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$u_i: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_i(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$u_m: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_m(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_{(m+1)}: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+1)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_{(m+2)}: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+2)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

, onde as funções utilidade são associadas aos respectivos jogadores do conjunto *J*. Essas funções associam as recompensas que os respectivos jogadores recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade								
		u_1	u_2	u_3	...	u_i	...	u_m	$u_{(m+1)}$	$u_{(m+2)}$
Perfis de estratégias	$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	0	0	0	...	0	...	0	0	0
	$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\dots, s_{i2},\dots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	1	-1	-1		-1		-1	-1	-1
	$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	*t*	1	-*h*	...	-*h*	...	-*h*	-*h*	-*t*
	$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	*t*	1	-*h*	...	-*h*	...	-*h*	-*h*	-*t*
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
	$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{(i-1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	*t*	-*h*	-*h*	...	-1	...	-*h*	-*h*	-*t*
	$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{(i-1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	*t*	-*h*	-*h*	...	1	...	-*h*	-*h*	-*t*
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
	$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	*m*	1	1	...	1	...	1	-1	-*m*
	$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	(*m*+1)	1	1	...	1	...	1	1	-(*m*+1)
	$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	(*m*+2)	1	1	...	1	...	1	1	-(*m*+2)

Tabela 55: Valores das funções utilidade dos jogadores no Jogo Desatento com *m* Espectadores, onde $k = 1$ ou $k = 2$

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores na forma estendida, conforme figura a seguir.

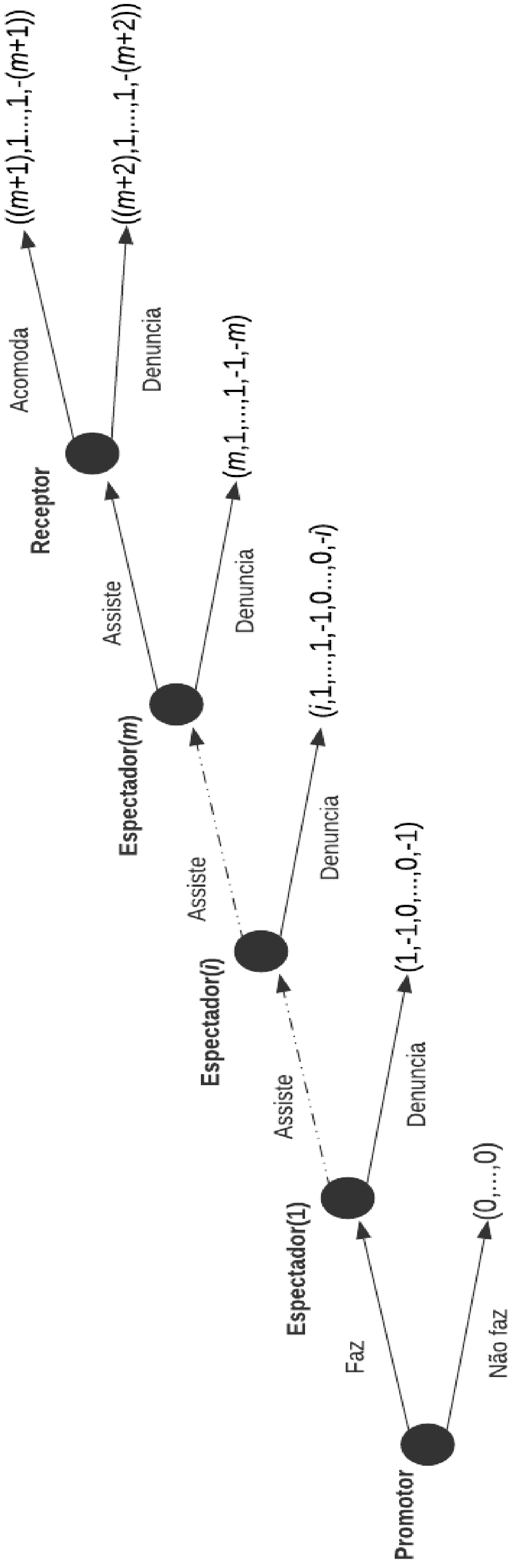

Figura 82: Jogo Desatento com *m* Espectadores – Representação na forma estendida

A mesma formatação em tabela exposta em 4.2.3.2.1 – Jogo Vigilante com *m* Espectadores é reproduzida a seguir para compilar as informações do jogo descrito, onde $k = 1$ ou $k = 2$.

Perfis de estratégia	**Ganhos Associados**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0,\ldots,0)$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1,-1,0,\ldots,0,-1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(2,1,-1,0,\ldots,0,-2)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(i,1,\ldots,1,-1,0,\ldots,0,1)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(m,1,\ldots,1,-1,-m)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$((m+1),1,\ldots,1,-(m+1))$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$((m+2),1,\ldots,1,-(m+2))$

Tabela 56: Representação esquemática das recompensas do Jogo Desatento com *m* Espectadores

O processo de definição da solução mais estável é feito primeiramente com a determinação dos subjogos na forma estendida do jogo modelado, de forma similar ao feito em 4.2.2.2 – Jogo Desatento Unitário e 4.2.3.1.2 – Jogo Desatento Duplo, conforme figura a seguir.

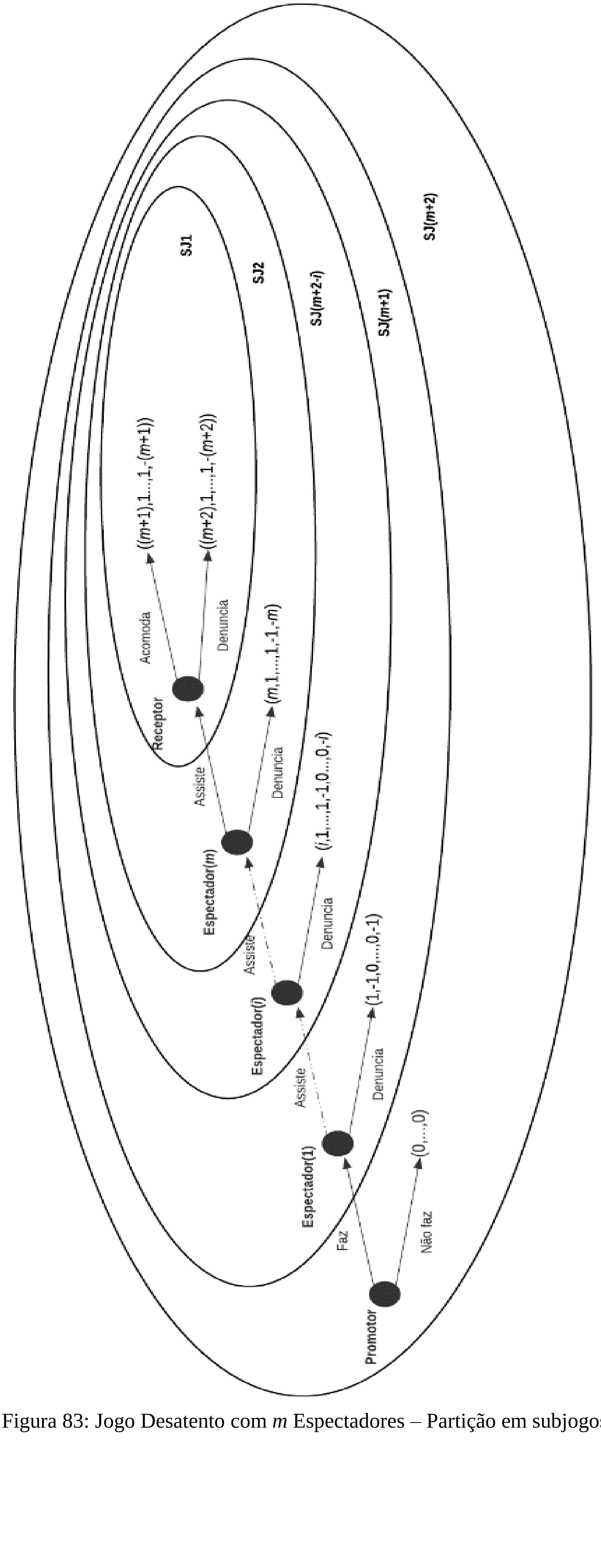

Figura 83: Jogo Desatento com *m* Espectadores – Partição em subjogos

A eliminação mais estratégias dominadas pelo algoritmo da indução reversa resultará nos resultados descritos em 4.2.2.2 – Jogo Desatento Unitário e 4.2.3.1.2 – Jogo Desatento Duplo, ou seja, o resultado mais provável é aquele onde o jogador com a função promotor pratica violência, os espectadores não denunciam, e o receptor acomoda, uma vez que a denúncia deste produzirá uma consequência ainda pior.

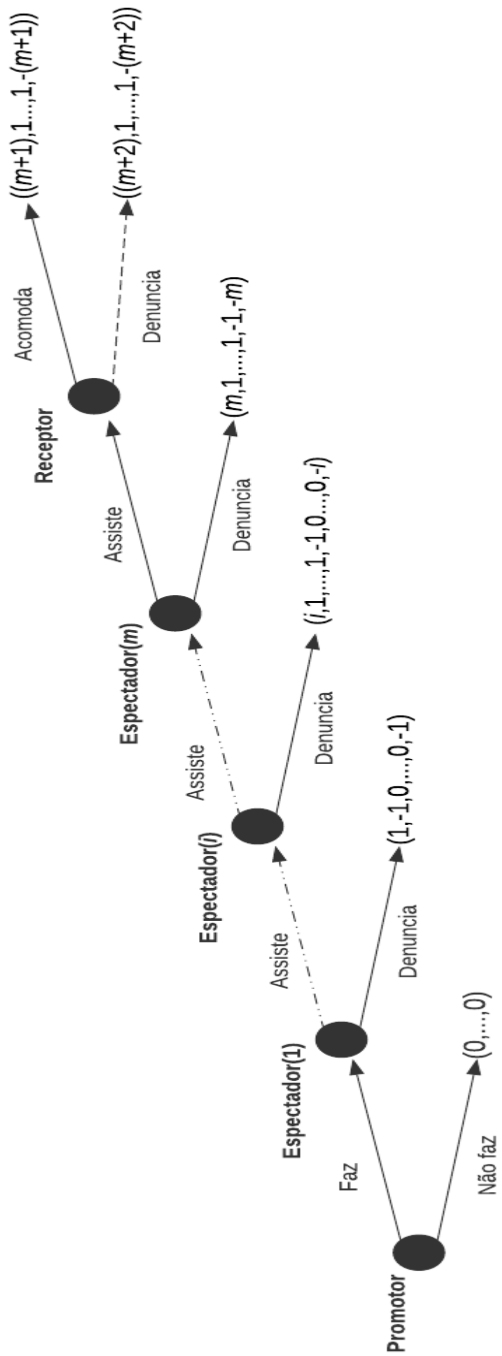

Figura 84: Jogo Desatento com *m* Espectadores – SJ1 resolvido

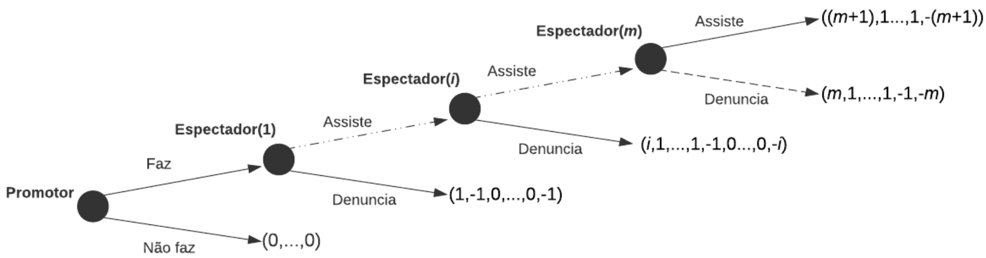

Figura 85: Jogo Desatento com *m* Espectadores – SJ2 resolvido

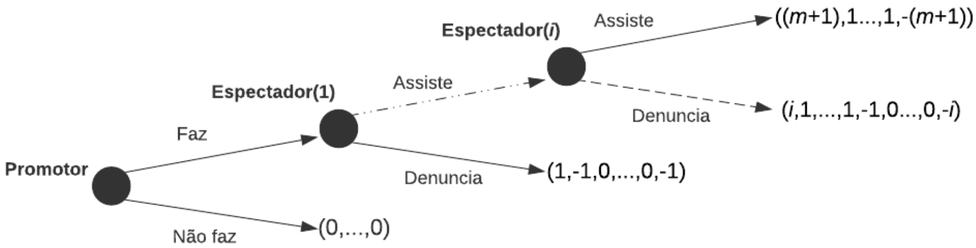

Figura 86: Jogo Desatento com *m* Espectadores – SJ(*m*+2-*i*) resolvido, onde *i* pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que *m*

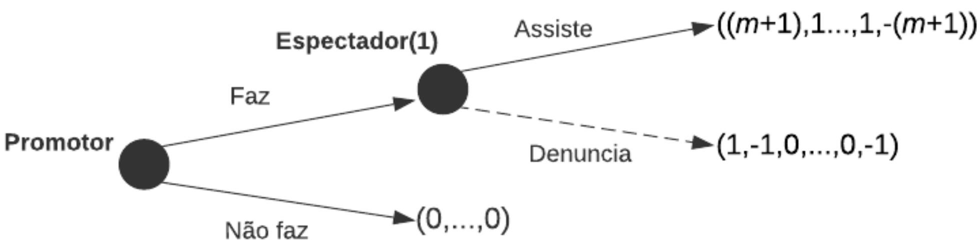

Figura 87: Jogo Desatento com *m* Espectadores – SJ(*m*+1) resolvido

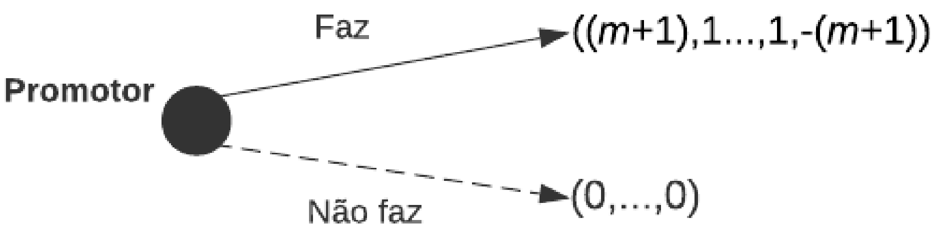

Figura 88: Jogo Desatento com *m* Espectadores – SJ(*m*+2) resolvido

4.2.3.2.3 Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

Os jogos apresentados em 4.2.3.2.1 – Jogo Vigilante com *m* Espectadores e 4.2.3.2.2 – Jogo Desatento com *m* Espectadores são insumos para a modelagem dessa interação, concatenado com as características descritas no cenário Natureza Simples, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários. A representação do jogo na forma estendida encontra-se na figura a seguir.

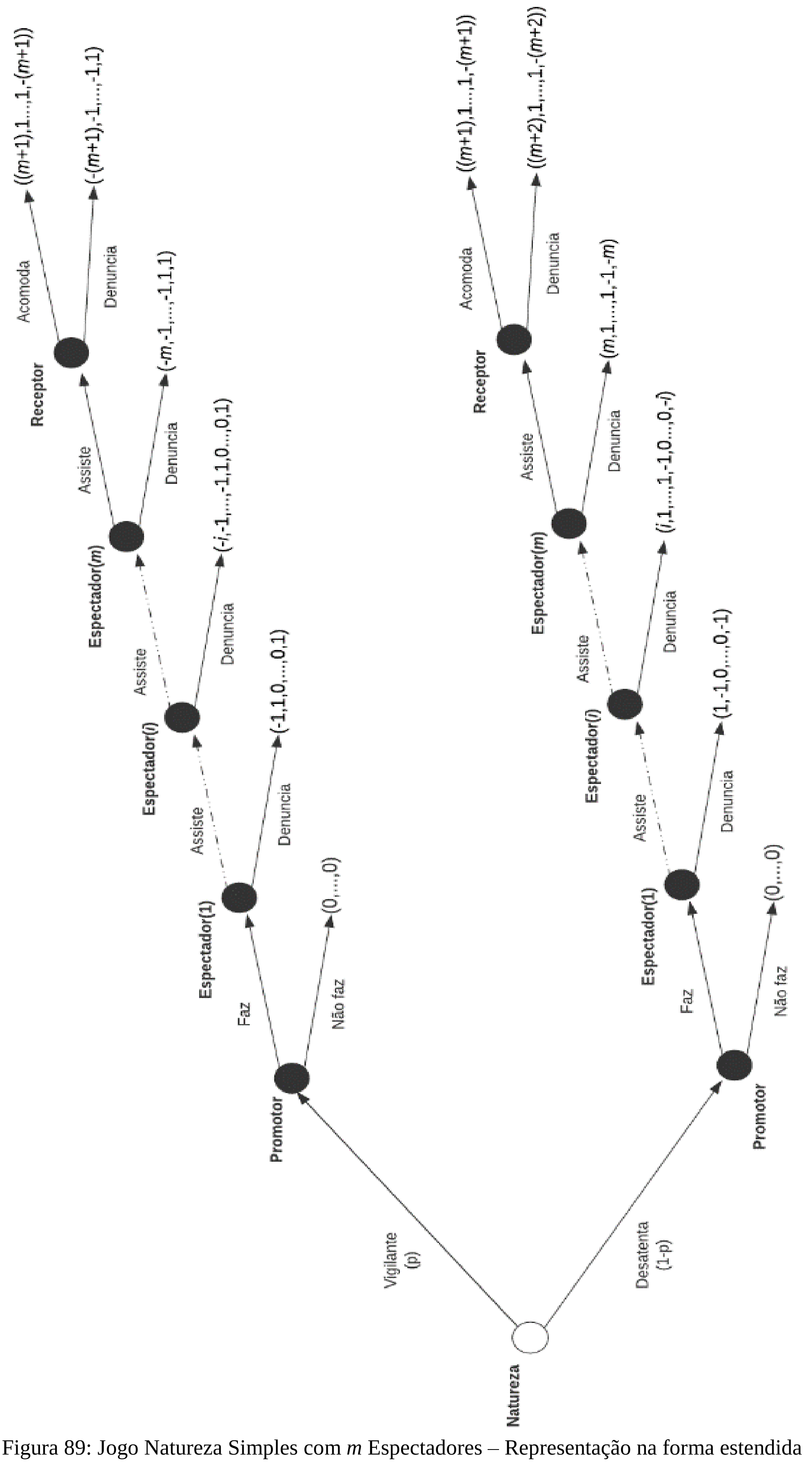

Figura 89: Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores – Representação na forma estendida

Uma vez que existe a introdução de variável *p*, que postula a probabilidade do jogo encontrar-se em uma conjuntura punitiva ou não, a mesma deve ser ponderada nos ganhos dos jogos Vigilante com *m* Espectadores e Desatento com *m* Espectadores, conforme tabelas a seguir, onde $k = 1$ ou $k = 2$.

Perfis de estratégia	**Ganhos do Promotor**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-i)\cdot(p)+(i)\cdot(1-p) = i - 2ip$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-m)\cdot(p)+(m)\cdot(1-p) = m - 2mp$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(m+1)\cdot(p)+(m+1)\cdot(1-p) = (m+1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-(m+1))\cdot(p)+(m+2)\cdot(1-p) = (m+2) - (2m+3)p$

Tabela 57: Recompensas Ponderadas do jogador Promotor no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(1)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 58: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(1) no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(2)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$

Tabela 59: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(2) no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(*i*)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$

Tabela 60: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(*i*) no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores, onde *i* pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que *m*

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(*m*)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$

Tabela 61: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(*m*) no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	Ganhos do Receptor
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-2)\cdot(1\text{-}p) = 3p - 2$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-i)\cdot(1\text{-}p) = (i+1)p - (i)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-m)\cdot(1\text{-}p) = (m+1)p - (m)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(-(m+1))\cdot(p)+(-(m+1))\cdot(1\text{-}p) = -(m+1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(1)\cdot(p)+(-(m+2))\cdot(1\text{-}p) = (m+3)p - (m+2)$

Tabela 62: Recompensas Ponderadas do jogador Receptor no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

Os perfis de estratégias podem ser decompostos para apresentação em forma de tabela, juntamente com seus ganhos respectivos de cada jogador, conforme organização a seguir.

Perfis de estratégia	Ganhos Associados
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0,\dots, 0)$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1 - 2p, 2p - 1, 0,\dots, 0, 2p - 1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{32},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(2 - 4p, 1 - 2p, 2p - 1, 0,\dots, 0, 3p - 2)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{(i-1)1}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(i - 2(i)\text{p}, 1 - 2p, ..., 1 - 2p, 2p - 1, 0,\dots, 0, (i+1)p - i)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(m - 2mp, 1 - 2p, ..., 1 - 2p, 2p - 1, (m+1)p - m)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$((m+1), 1, \dots, 1, -(m+1))$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\dots, s_{i1},\dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$((m+2) - (2m+3)p, 1 - 2p, ..., 1 - 2p, (m+3)p - (m+2))$

Tabela 63: Representação esquemática das recompensas ponderadas do Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores

A combinação das estratégias dos jogadores e das recompensas ponderadas no Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores em uma árvore de possibilidades gera a representação da interação estratégica na forma estendida, conforme figura a seguir.

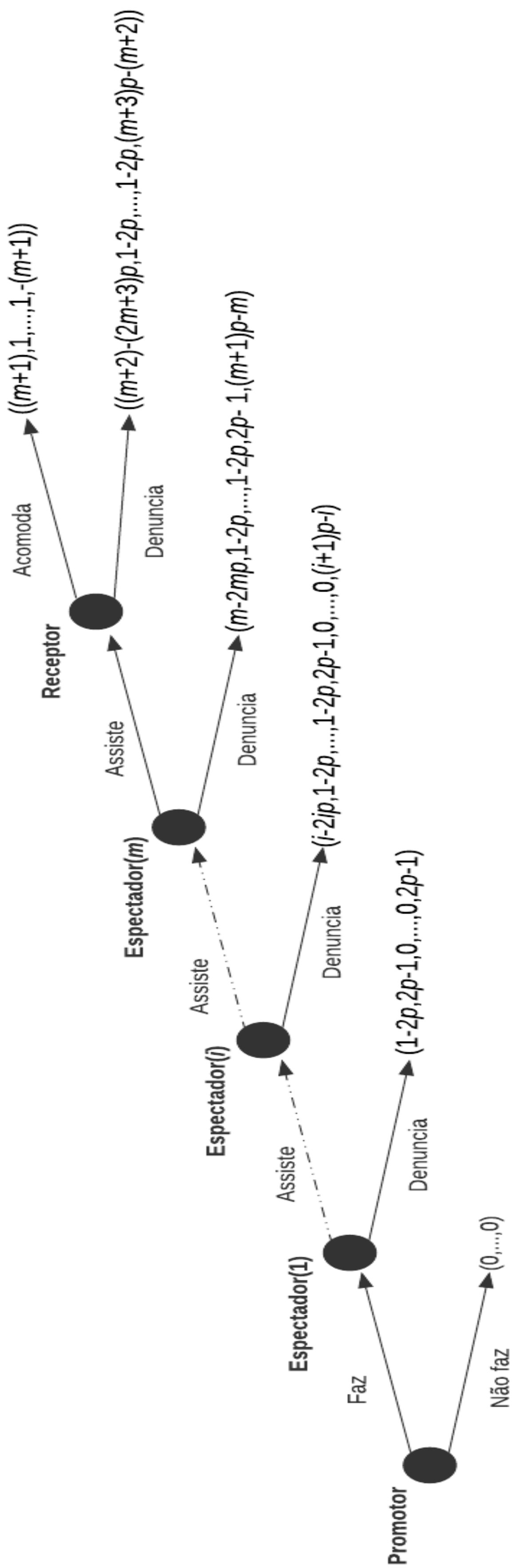

Figura 90: Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores – Representação na forma estendida com recompensas ponderadas

A forma estendida do jogo deve ser particionada em subjogos, possibilitando a aplicação do algoritmo da indução reversa, e em seguida, a verificação da existência de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos. Além disso, a resolução possui os mesmos pressupostos considerados na solução do Jogo das Balas, conforme encontra-se na seção 2.3.4 – Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas.

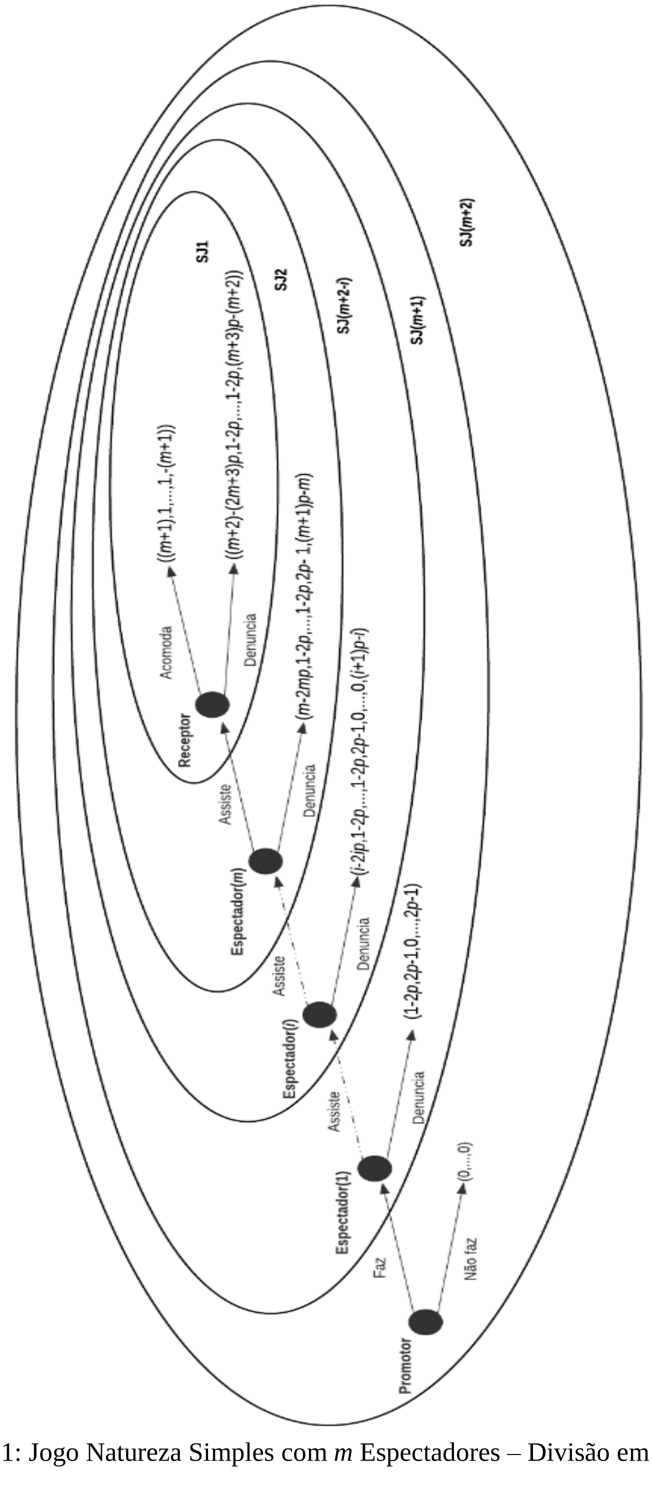

Figura 91: Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores – Divisão em subjogos

A análise do primeiro subjogo se dá através da comparação dos ganhos que o Receptor pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de p, devemos proceder uma comparação entre os ganhos do Receptor para valores de p maiores do que zero e menores do que um. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Receptor, conforme equação a seguir:

$$-(m+1) \text{ (Acomoda)} = (m+3)p - (m+2) \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/(m+3) \text{ (Indiferente).}$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$-(m+1) \text{ (Acomoda)} > (m+3)p - (m+2) \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/(m+3) \text{ (Acomoda),}$$
$$-(m+1) \text{ (Acomoda)} < (m+3)p - (m+2) \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/(m+3) \text{ (Denuncia).}$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Receptor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Receptor
Valores de *p*	$p < 1/(m+3)$	Acomoda
	$p = 1/(m+3)$	Indiferente
	$p > 1/(m+3)$	Denuncia

Tabela 64: Representação esquemática das escolhas do Receptor em função do valor de p no SJ1 do Jogo Natureza Simples com m Espectadores

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual o Receptor escolhe Acomodar quando $p < 1/(m+3)$, e outra na qual o Receptor escolhe Denunciar quando $p > 1/(m+3)$, conforme figuras a seguir.

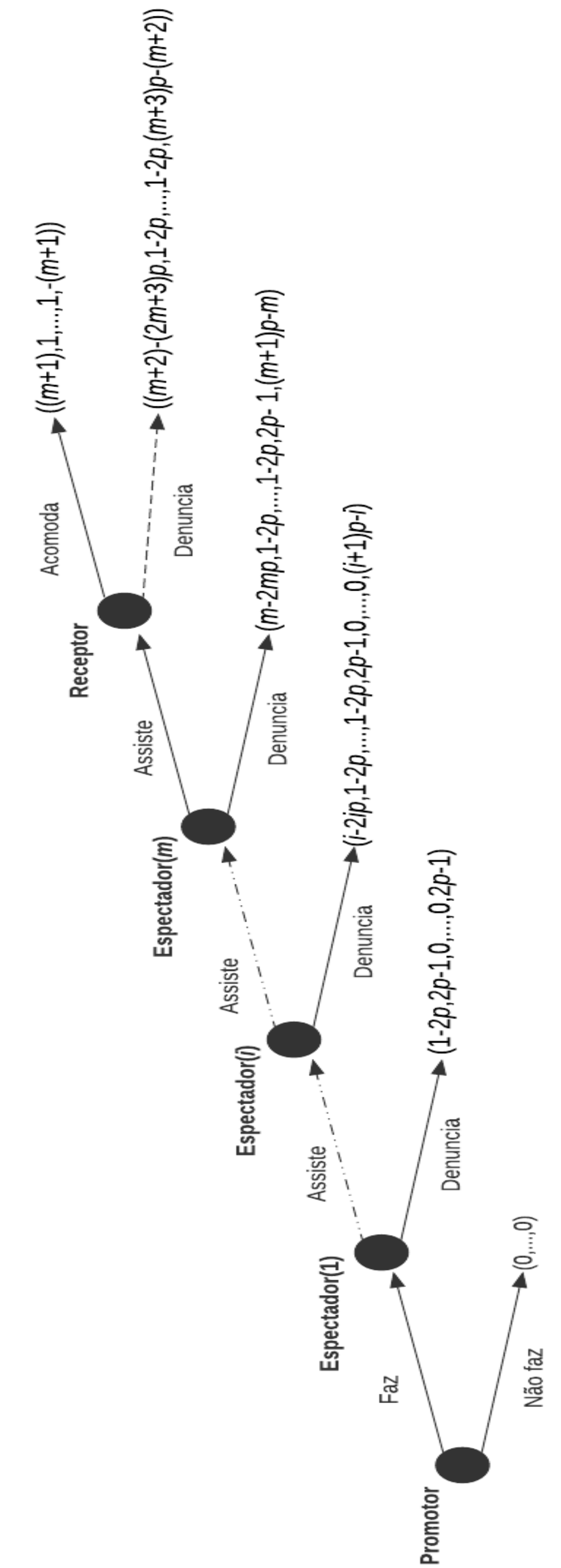

Figura 92: Representação da solução do SJ1 do Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

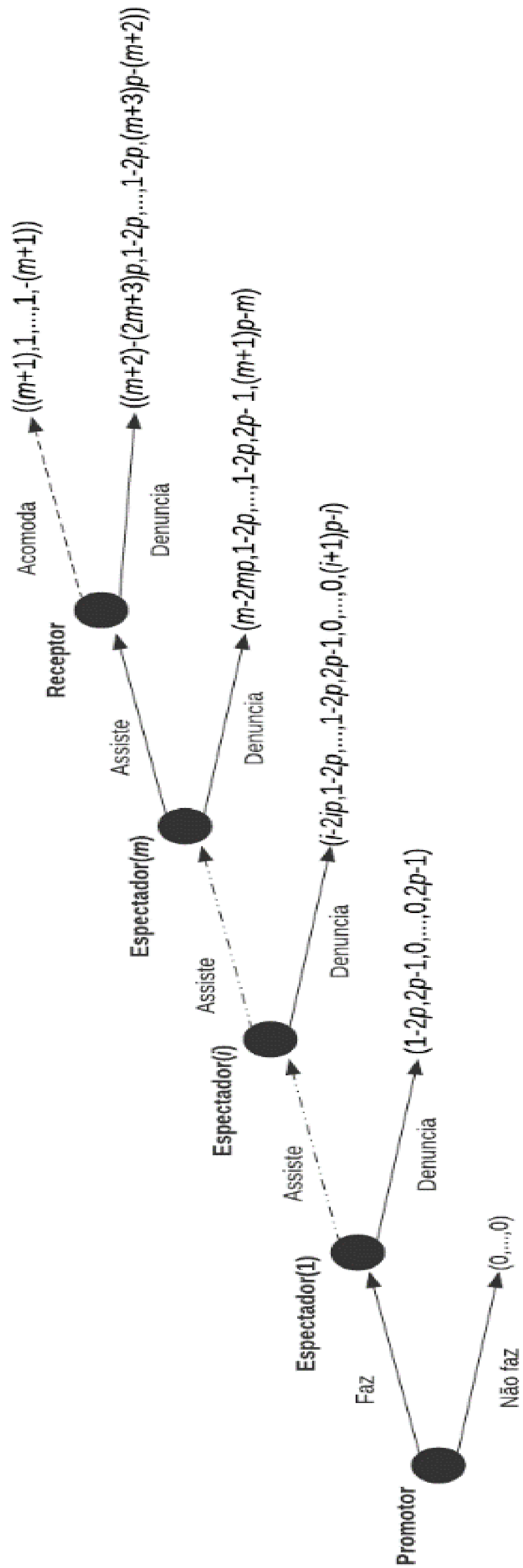

Figura 93: Representação da solução do SJ1 do Jogo Natureza Simples com *m* Espectadores quando $p > 1/(m+3)$

Os subjogos intermediários do jogo, que são todos entre SJ2 e SJ(m+1), se referem a escolhas tomadas pelos jogadores com a função Espectador, e todos resultam nas mesmas conclusões e nos mesmos intervalos de variação de p, sendo todos balizados pelos intervalos já definidos no SJ1. Iniciando quando $p < 1/(m+3)$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos dos jogadores com a função Espectador, conforme relação a seguir:

$$p < 1/(m+3) \Leftrightarrow 2p - 1 \text{ (Denuncia)} < 1 \text{ (Assiste).}$$

Alternativamente, quando $p > 1/(m+3)$, obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias dos jogadores com a função Espectador, conforme equação a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} = 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/2 \text{ (Indiferente).}$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$1 - 2p \text{ (Assiste)} > 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/2 \text{ (Assiste),}$$
$$1 - 2p \text{ (Assiste)} < 2p - 1 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/2 \text{ (Denuncia).}$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão dos jogadores com a função Espectador que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa dos jogadores com a função Espectador
Valores de *p*	$p < 1/(m+3)$	Assiste
	$1/(m+3) < p < 1/2$	Assiste
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	Denuncia

Tabela 65: Representação esquemática das escolhas dos jogadores com a função Espectador em função do valor de p nos subjogos existentes entre SJ2 e SJ(m+1) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores

Portanto, todos os subjogos existentes entre SJ2 e SJ(m+1) possuem três soluções, uma na qual os jogadores com a função Espectador escolhem Assiste quando $p < 1/(m+3)$; outra na qual os jogadores com a função Espectador escolhem Assiste quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual os jogadores com a função Espectador escolhem Denuncia quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

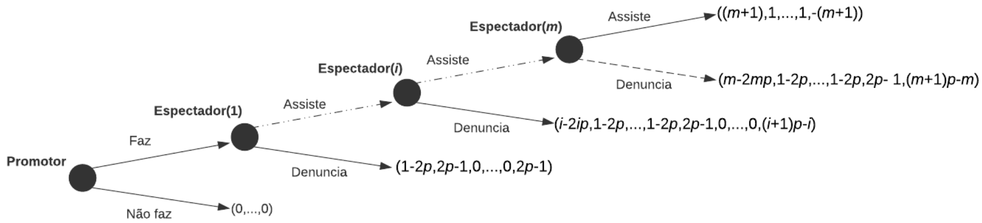

Figura 94: Representação da solução do SJ2 do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

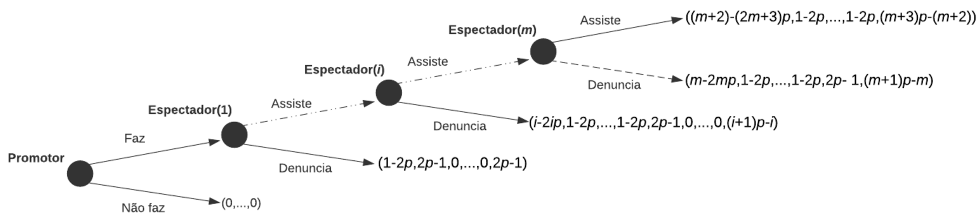

Figura 95: Representação da solução do SJ2 do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que 1/2

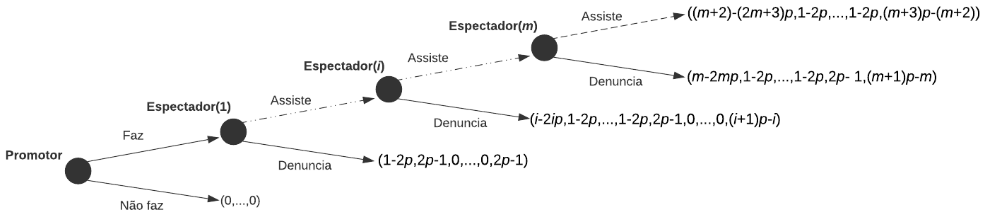

Figura 96: Representação da solução do SJ2 do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando $p > 1/2$

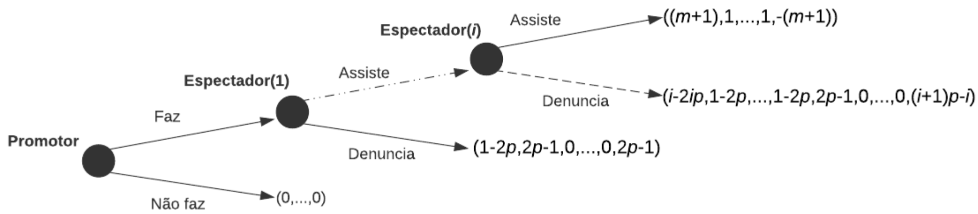

Figura 97: Representação da solução do SJ(m+2-i) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando $p < 1/(m+3)$, e onde i pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que m

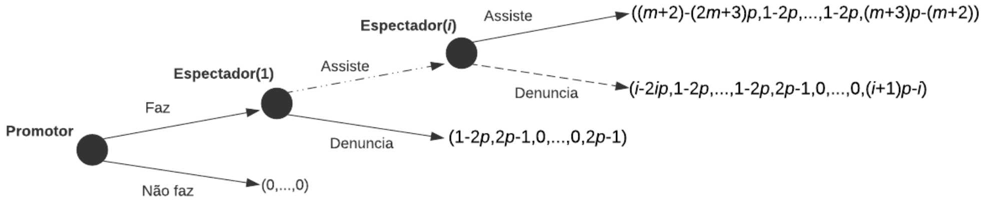

Figura 98: Representação da solução do SJ(m+2-i) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/(m+3) e menor do que 1/2, e onde i pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que m

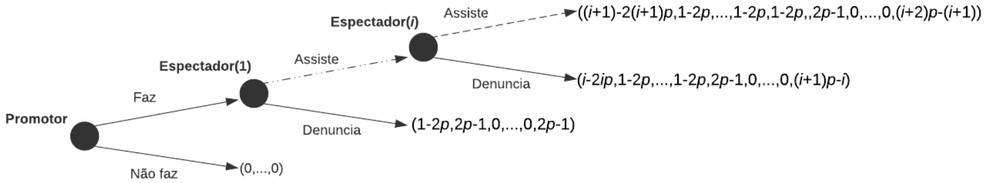

Figura 99: Representação da solução do SJ(m+2-i) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p > 1/2, e onde i pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que m

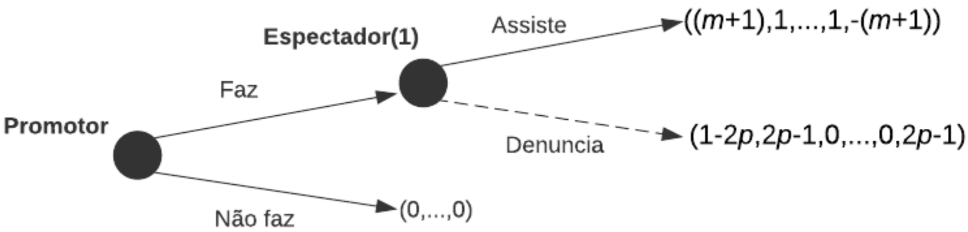

Figura 100: Representação da solução do SJ(m+1) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p < 1/(m+3)

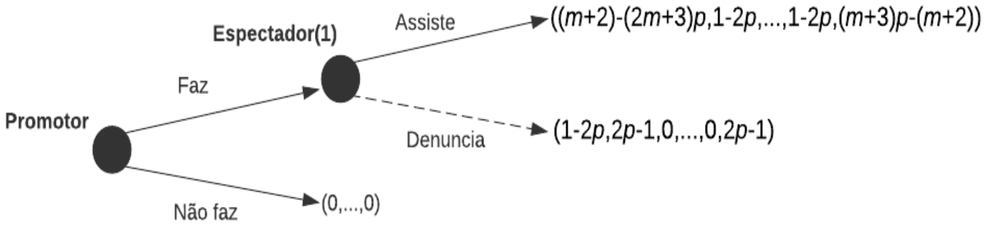

Figura 101: Representação da solução do SJ(m+1) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/(m+3) e menor do que 1/2

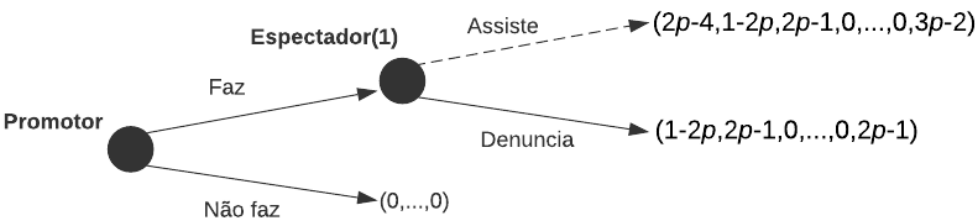

Figura 102: Representação da solução do SJ(m+1) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p > 1/2

Finalmente, a análise da resolução do último subjogo seguirá nos mesmos intervalos de variação de p definidos nos subjogos anteriores. Iniciando quando p

$< 1/(m+3)$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p < 1/(m+3) \Leftrightarrow 0 \text{ (Não Faz)} < (m+1) \text{ (Faz)}.$$

Em segundo cenário, onde $1/(m+3) < p < 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$1/(m+3) < p < 1/2 \Leftrightarrow (m+2) - (2m+3)p \text{ (Faz)} > 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Finalmente, onde $p > 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - 2p \text{ (Faz)} < 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Promotor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Promotor
Valores de *p*	$p < 1/(m+3)$	Faz
	$1/(m+3) < p < 1/2$	Faz
	$p > 1/2$	Não Faz

Tabela 66: Representação esquemática das escolhas do Promotor em função do valor de p no SJ(m+2) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores

Portanto, o último subjogo possui três soluções, uma na qual o Promotor escolhe Faz quando $p < 1/(m+3)$; outra na qual o Promotor escolhe Faz quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que $1/2$; e finalmente, uma na qual o Promotor escolhe Não Faz quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

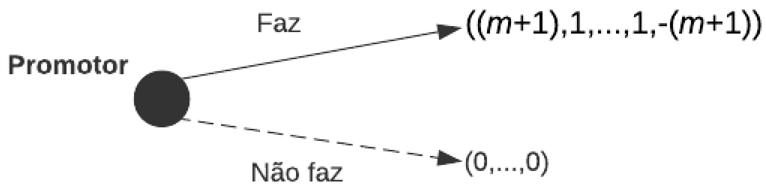

Figura 103: Representação da solução do SJ(m+2) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

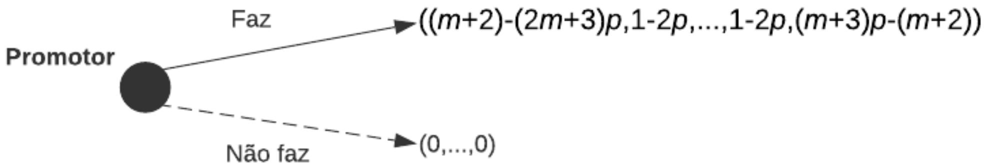

Figura 104: Representação da solução do SJ(m+2) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que 1/2

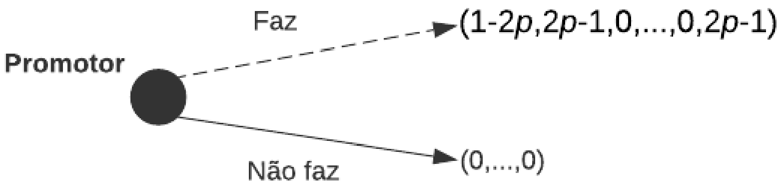

Figura 105: Representação da solução do SJ(m+2) do Jogo Natureza Simples com m Espectadores quando $p > 1/2$

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo Natureza Simples com m Espectadores nos diferentes valores de p.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 1/(m+3)$	$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{(i\text{-}1)1}, s_{i1}, s_{(i+1)1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$
	$1/(m+3) < p < 1/2$	$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{(i\text{-}1)1}, s_{i1}, s_{(i+1)1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$
	$1/2 < p \leq 1$	$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$

Tabela 67: Representação esquemática da resolução do Jogo Natureza Simples com m Espectadores

Deve-se ressaltar que os resultados podem ser interpretados da seguinte forma: a chance de que as autoridades escolares venham a receber uma denúncia de bullying aumenta de forma diretamente proporcional ao aumento do número de espectadores, e que a existência de um ambiente que predominantemente pune o ato de violência escolar é condição suficiente para que o promotor da ação violenta não pratique o ato.

4.2.3.2.4 Jogo Natureza Sinalizado com *m* Espectadores

Neste tópico será abordado como os espectadores podem atualizar suas crenças sobre em qual tipo de cenário o ato de violência escolar se desenrola. Essas sinalizações são do mesmo tipo expostos em 4.2.3.1.4 – Jogo Natureza Sinalizado Duplo, onde resumidamente temos um modelo que contem a expectativa somente do primeiro espectador, e um para a atualização das crenças de todos os jogadores, definindo as designações Sinalização Simples e Sinalização Composta, respectivamente. As formas estendidas das duas alternativas de modelagens encontram-se nas figuras a seguir.

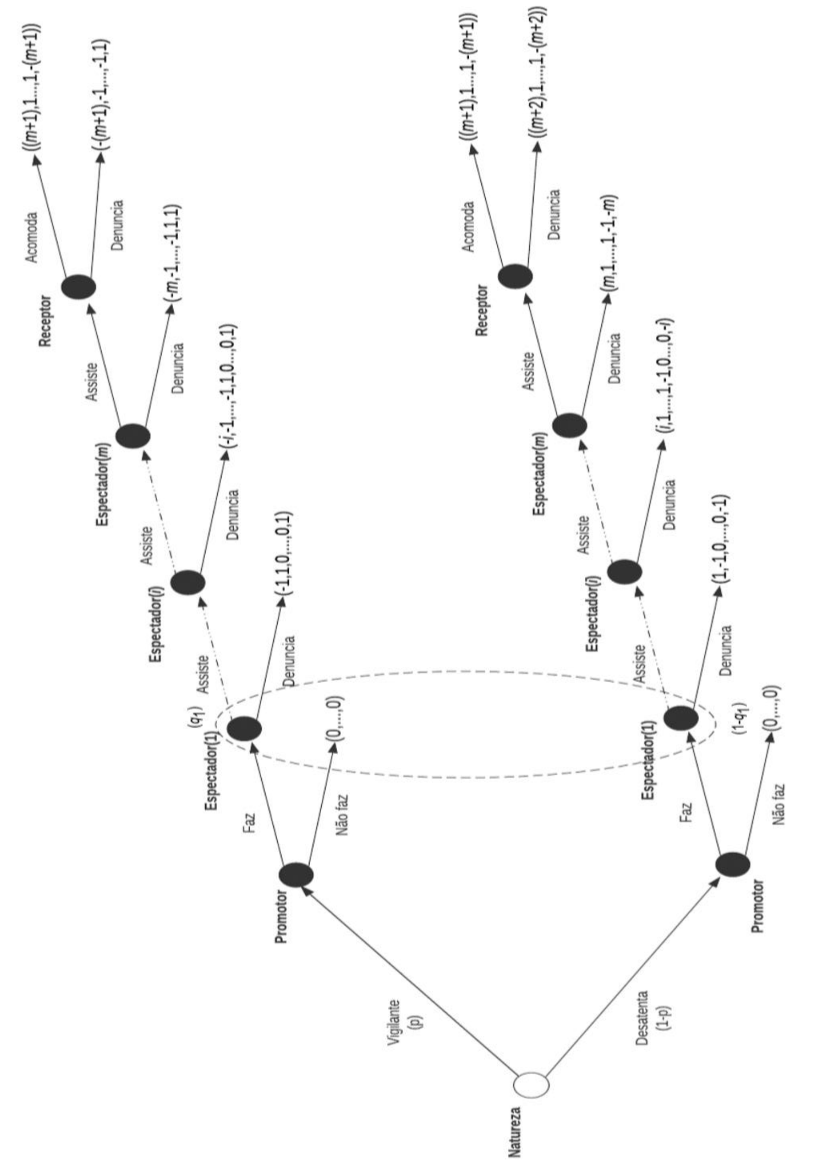

Figura 106: Jogo Natureza Sinalizado com *m* Espectadores – Sinalização Simples – Representação na forma estendida

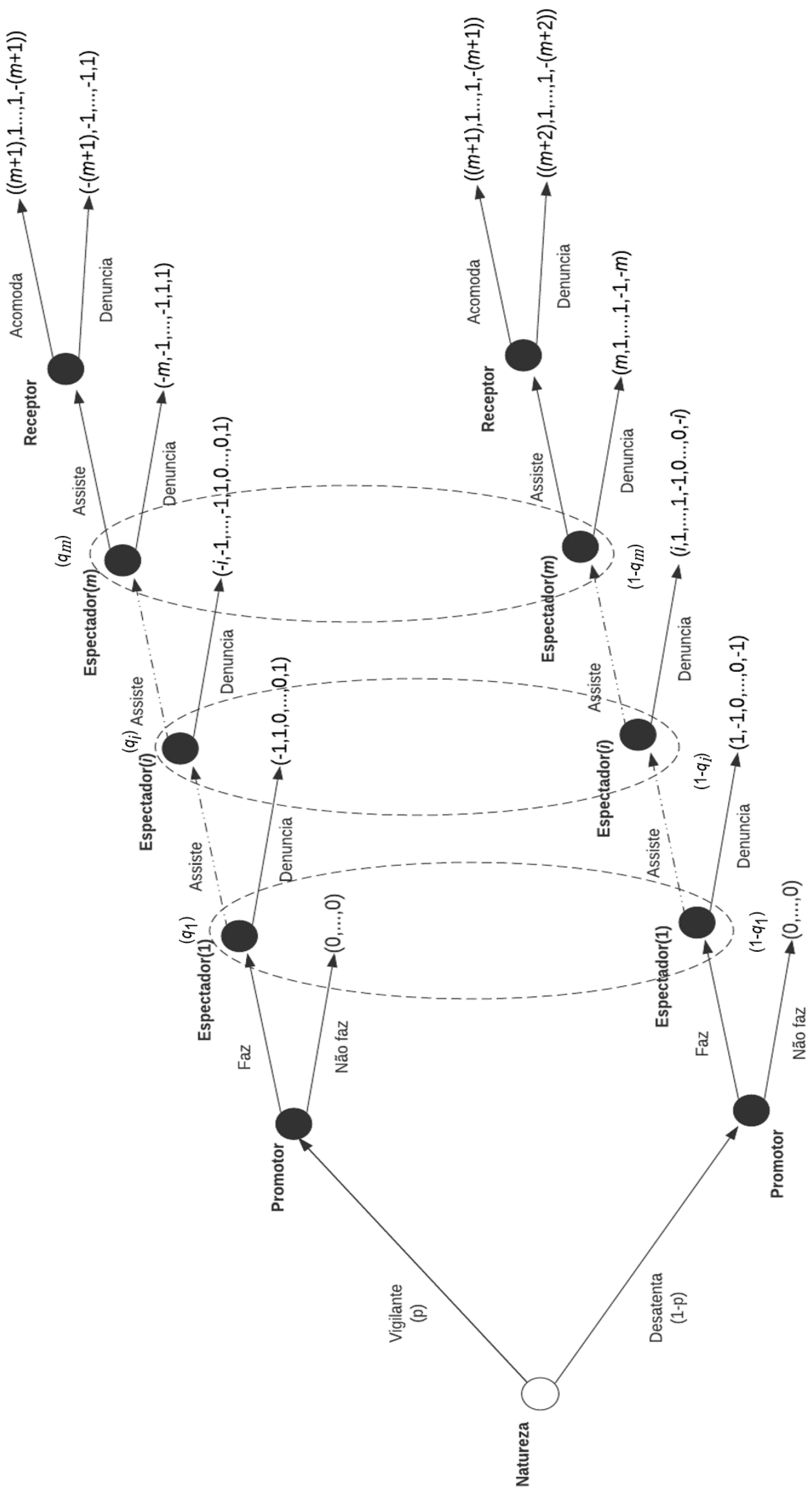

Figura 107: Jogo Natureza Sinalizado com *m* Espectadores – Sinalização Composta – Representação na forma estendida

As soluções Jogo Natureza Sinalizado com *m* Espectadores – Sinalização Simples são exatamente iguais as expostas em 4.2.2.4 – Jogo Natureza Sinalizado Unitário.

Com relação ao Jogo Natureza Sinalizado com *m* Espectadores – Sinalização Composta, para cada jogador com a função espectador é atribuída uma variável na forma q_k, que indicará a expectativa do jogo se encontrar no cenário Desatento, e essas variáveis terão suas relações com *p* partindo da utilização do Teorema de Bayes, conforme equações a seguir:

$$q_1 = P(\text{Vigilante}|\text{Fazer}) =$$
$$= \frac{P(\text{Fazer}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Fazer}|\text{Desatento})\cdot P(\text{Desatento}) + P(\text{Fazer}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})},$$
$$\vdots$$
$$q_2 = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E1]}) =$$
$$= \frac{P(\text{Assistir [E1]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Assistir [E1]}|\text{Desatento})\cdot P(\text{Desatento}) + P(\text{Assistir [E1]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})},$$
$$\vdots$$
$$q_i = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir[E(}i\text{-1)]}) =$$
$$= \frac{P(\text{Assistir [E(}i\text{-1)]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Assistir [E(}i\text{-1)]}|\text{Desatento})\cdot P(\text{Desatento}) + P(\text{Assistir [E(}i\text{-1)]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})},$$
$$\vdots$$
$$q_m = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E(}m\text{-1)]}) =$$
$$= \frac{P(\text{Assistir [E(}m\text{-1)]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}{P(\text{Assistir [E(}m\text{-1)]}|\text{Desatento})\cdot P(\text{Desatento}) + P(\text{Assistir [E(}m\text{-1)]}|\text{Vigilante})\cdot P(\text{Vigilante})}.$$

Nessas equações, os termos *P*(Desatento) e *P*(Vigilante) se relacionam diretamente com as possíveis decisões do pseudojogador Natureza, logo *P*(Vigilante) = *p* e *P*(Desatento) = (1-*p*). Os outros termos que compõe q_1 possuem a mesma interpretação exposta 4.2.3.4 - Jogo Natureza Sinalizado Duplo, bem como as mesmas conclusões.

Para todo q_i entre q_2 e q_m, o termo de forma geral *P*(Assistir [E*i*] | Desatento) designa a probabilidade do jogador Espectador(*i*) escolher a estratégia Assistir quando se está no cenário Desatento, e o termo de forma geral *P(*Assistir [E*i*]|Vigilante) designa a probabilidade do jogador Espectador(*i*) escolher a estratégia Assistir quando se está no cenário Vigilante. Avaliando as análises de indução reversa nos jogos Vigilante com m Espectadores e Desatento com m Espectadores, tem-se que $P($Assistir [Ei]|Desatento) = 1, e P(Assistir [Ei]|Vigilante) = 0.

Compilando as informações acima, temos que:

$$q_1 = P(\text{Vigilante}|\text{Fazer}) = 0 \cdot p \ / \ (1 \cdot (1-p) + 0 \cdot p) \Rightarrow q_1 = 0,$$
$$q_2 = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E1]}) = 0 \cdot p \ / \ (1 \cdot (1-p) + 0 \cdot p) \Rightarrow q_2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$q_i = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E}(i\text{-1})]) = 0 \cdot p \ / \ (1 \cdot (1-p) + 0 \cdot p) \Rightarrow q_i = 0,$$
$$\vdots$$
$$q_m = P(\text{Vigilante}|\text{Assistir [E}(m\text{-1})]) = 0 \cdot p \ / \ (1 \cdot (1-p) + 0 \cdot p) \Rightarrow q_m = 0.$$

Portanto, pela análise das equações acima, tem-se que todos os espectadores terão a percepção de que as decisões tomadas pelo jogador imediatamente anterior só fariam sentido em um cenário Desatento, implicando que o bullying ocorreria e seria estimulado pelo ambiente.

4.3 Modelagem com tratamento simultâneo dos espectadores

4.3.1 Fatores específicos

Dada a natureza específica do bullying, a modelagem geral sempre será do tipo sequencial, uma vez que qualquer ato dos espectadores e dos receptores só se dará mediante a existência do ato. Contudo, todos os jogos modelados nos tópicos acima consideravam que o comportamento dos espectadores se dava de modo sequencial, ou seja, o jogo somente permitia a ação de um outro espectador quando existia o comportamento Assistir ao ato anteriormente.

Uma modelagem alternativa para a dinâmica do comportamento dos espectadores será proposta com a condição de que o bullying existiu, e que a decisão de cada espectador será considerada simultânea com relação as dos demais espectadores, e, além disso, suas escolhas interagem estrategicamente com os jogadores das funções promotor e receptor.

Evidentemente, só existirão modelagens onde os espectadores interagem simultaneamente quando o número desse tipo de jogador for maior ou igual a dois. Dessa forma, os jogos receberão as designações Simultâneo Duplo, Simultâneo Triplo e Simultâneo com *m* Espectadores.

4.3.2 Jogos Simultâneos Duplos

Essas modelagens pressupõem a existência de duas testemunhas oculares ao ato, que serão denominados como Espectador(1) e Espectador(2), bem como os jogadores com as funções Promotor e Receptor. No aspecto da estruturação formal, todos os jogos terão características em comum. Iniciando pela representação dos jogadores, temos que:

$$J = \{ j_1, j_2, j_3, j_4 \}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o jogador Promotor, j_2, o jogador Espectador(1), j_3, o jogador Espectador(2), e j_4, o jogador Receptor. Ademais, denotamos que:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$E_3 = \{s_{31}, s_{32}\}$$
$$E_4 = \{s_{41}, s_{42}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Fazer e Não Fazer do jogador j_1, s_{21} e s_{22} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_2, s_{31} e s_{32} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_3, e, s_{41} e s_{42} representam as decisões Acomodar e Denunciar do jogador j_4. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{4} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$$

$$= \{(s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}),(s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{41}),(s_{11}, s_{22}, s_{31}, s_{41}),(s_{11}, s_{22}, s_{32}, s_{41}),$$
$$(s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{41}),(s_{12}, s_{21}, s_{32}, s_{41}),(s_{12}, s_{22}, s_{31}, s_{41}),(s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{41}),$$
$$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{42}),(s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{42}),(s_{11}, s_{22}, s_{31}, s_{42}),(s_{11}, s_{22}, s_{32}, s_{42}),$$
$$(s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{42}),(s_{12}, s_{21}, s_{32}, s_{42}),(s_{12}, s_{22}, s_{31}, s_{42}),(s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42})\}$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

4.3.2.1 Jogo Vigilante Simultâneo Duplo

O cenário contemplado nessa modelagem é o Vigilante, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_4: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_4(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 , u_2 , u_3 e u_4 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$, $u_3(\boldsymbol{e})$ e $u_4(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade			
		u_1	u_2	u_3	u_4
Perfis de estratégias	(Não Faz, •, •, •)	0	0	0	0
	(Faz, Assiste, Denuncia, •)	-2	-1	1	1
	(Faz, Denuncia, Assiste, •)	-2	1	-1	1
	(Faz, Denuncia, Denuncia, •)	-1	1	1	1
	(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	3	1	1	-3
	(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	-3	-1	-1	1

Tabela 68: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 no Jogo Vigilante Simultâneo Duplo

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 na forma estendida, conforme figura a seguir.

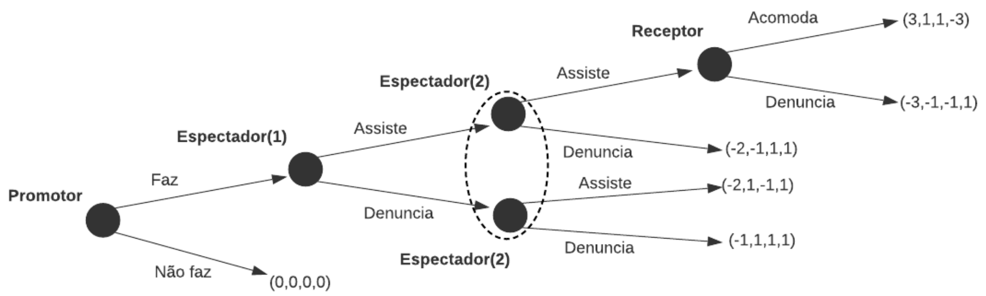

Figura 108: Jogo Vigilante Simultâneo Duplo – Representação na forma estendida

A forma estendida do jogo deve ser particionada em subjogos, possibilitando a aplicação do algoritmo da indução reversa, e em seguida, a verificação da existência de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.

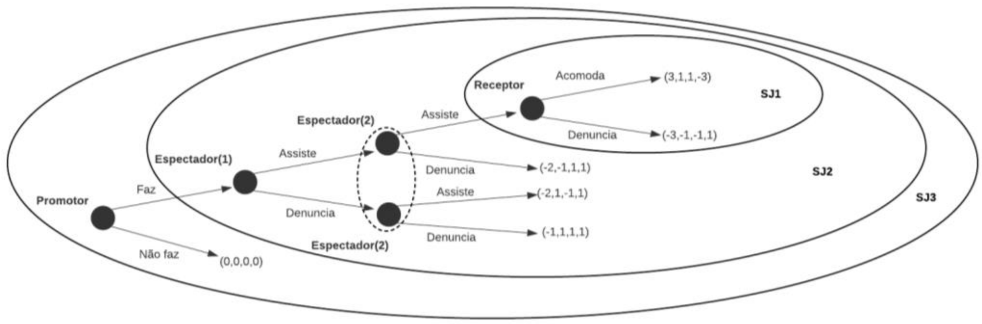

Figura 109: Jogo Vigilante Simultâneo Duplo – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo nos permite afirmar que o jogador Receptor escolherá Denunciar, e as recompensas associadas a essa decisão serão repassadas ao próximo subjogo, conforme figura a seguir.

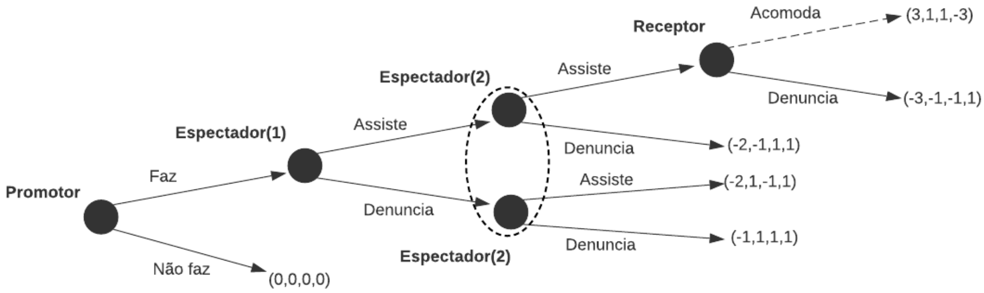

Figura 110: Jogo Vigilante Simultâneo Duplo – Primeiro subjogo resolvido

O segundo subjogo envolve a resolução de uma situação onde os jogadores escolhem suas decisões simultaneamente, logo, as recompensas associadas aos jogadores com a função Espectador são dispostas em uma tabela, assim como ocorre no exemplo 1 da seção 2.3.2 (Jogo da Divisão). A resolução do subjogo também segue a mesma lógica do exemplo citado, conforme tabelas a seguir.

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Assiste	(-1, -1)	(-1, 1)
	Denuncia	(1, -1)	(1, 1)

Tabela 69: Representação na forma estratégica do segundo subjogo do Jogo Vigilante Simultâneo Duplo

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Denuncia	(1, -1)	(1, 1)

Tabela 70: Representação da eliminação de decisão Assiste referente ao jogador Espectador(1)

		Espectador(2)
		Denuncia
Espectador(1)	Denuncia	(1, 1)

Tabela 71: Representação da eliminação de decisão Assiste referente ao jogador Espectador(2)

Dessa forma, as recompensas associadas aos comportamentos tomados simultaneamente Denunciar dos jogadores com a função Espectador são registradas para a resolução do próximo subjogo, conforme figura a seguir.

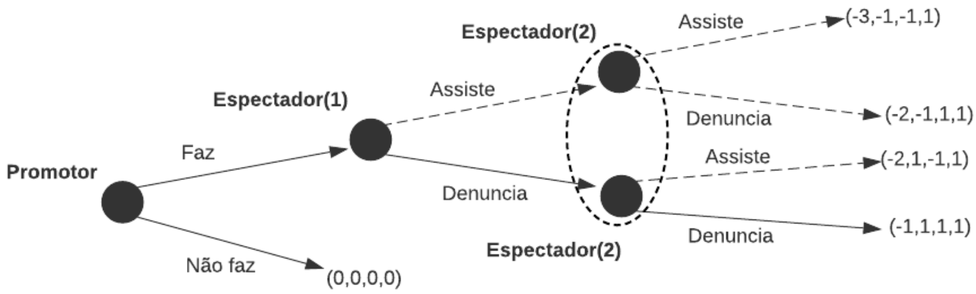

Figura 111: Jogo Vigilante Simultâneo Duplo – Segundo subjogo resolvido

Finalmente, o jogador Promotor escolherá a estratégia Não Fazer, uma vez que esse comportamento gerará a melhor recompensa possível, conforme figura a seguir.

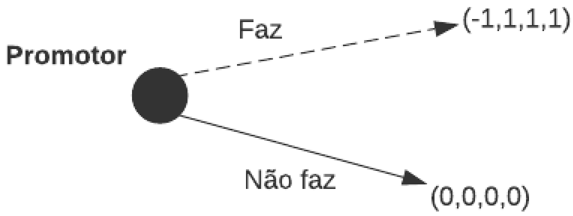

Figura 112: Jogo Vigilante Simultâneo Duplo – Terceiro subjogo resolvido

Portanto, a partir da análise da resolução do Jogo Vigilante Simultâneo Duplo é possível extrair conclusões similares as dos outros jogos com modelagem que contemplam o cenário Vigilante, ou seja, o ato de violência escolar tenderá a não acontecer.

4.3.2.2 Jogo Desatento Simultâneo Duplo

O cenário contemplado nessa modelagem é o Desatento, conforme informações no tópico 4.1.3 - Caracterização de cenários.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_2: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_3: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_4: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_4(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1 , u_2 , u_3 e u_4 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$, $u_3(\boldsymbol{e})$ e $u_4(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade			
		u_1	u_2	u_3	u_4
Perfis de estratégias	(Não Faz, •, •, •)	0	0	0	0
	(Faz, Assiste, Denuncia, •)	2	-1	1	-2
	(Faz, Denuncia, Assiste, •)	2	1	-1	-2
	(Faz, Denuncia, Denuncia, •)	1	-1	-1	-1
	(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	3	1	1	-3
	(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	4	1	1	-4

Tabela 72: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 no Jogo Desatento Simultâneo Duplo

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1, j_2, j_3 e j_4 na forma estendida, conforme figura a seguir.

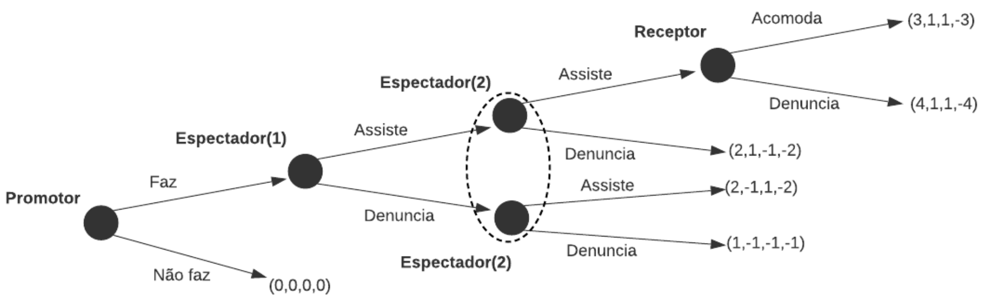

Figura 113: Jogo Desatento Simultâneo Duplo – Representação na forma estendida

A forma estendida do jogo deve ser particionada em subjogos, possibilitando a aplicação do algoritmo da indução reversa, e em seguida, a verificação da existência de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.

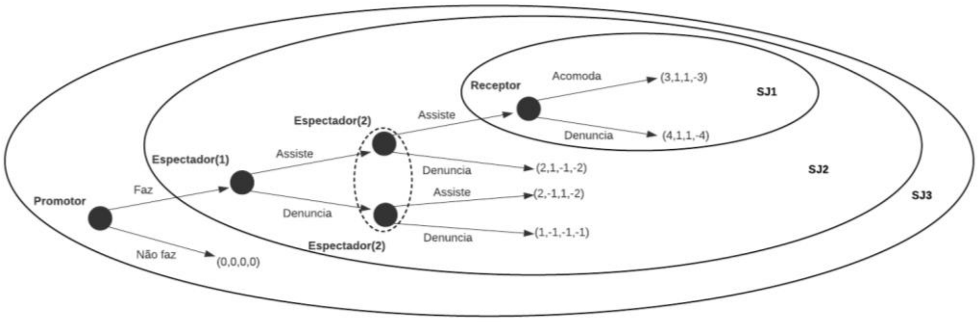

Figura 114: Jogo Desatento Simultâneo Duplo – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo nos permite afirmar que o jogador Receptor escolherá Acomodar, e as recompensas associadas a essa decisão serão repassadas ao próximo subjogo, conforme figura a seguir.

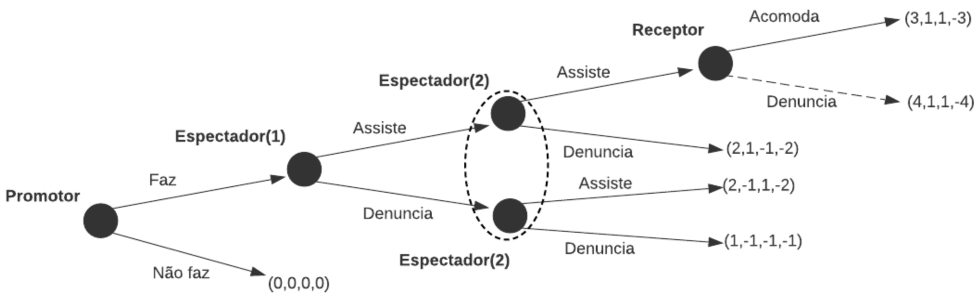

Figura 115: Jogo Desatento Simultâneo Duplo – Primeiro subjogo resolvido

O segundo subjogo envolve a resolução de uma situação onde os jogadores escolhem suas decisões simultaneamente, logo, as recompensas associadas aos jogadores com a função Espectador são dispostas em uma tabela, assim como ocorre no exemplo 1 da seção 2.3.2 (Jogo da Divisão). A resolução do subjogo também segue a mesma lógica do exemplo citado, conforme tabelas a seguir.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Espectador(2)</td></tr>
<tr><td>Assiste</td><td>Denuncia</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Espectador(1)</td><td>Assiste</td><td>(1, 1)</td><td>(1, -1)</td></tr>
<tr><td>Denuncia</td><td>(-1, 1)</td><td>(-1, -1)</td></tr>
</table>

Tabela 73: Representação na forma estratégica do segundo subjogo do Jogo Desatento Simultâneo Duplo

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Assiste	(1, 1)	(1, -1)

Tabela 74: Representação da eliminação de decisão Denuncia referente ao jogador Espectador(1)

		Espectador(2)
		Assiste
Espectador(1)	Assiste	(1, 1)

Tabela 75: Representação da eliminação de decisão Denuncia referente ao jogador Espectador(2)

Dessa forma, as recompensas associadas aos comportamentos tomados simultaneamente Assistir dos jogadores com a função Espectador são registradas para a resolução do próximo subjogo, conforme figura a seguir.

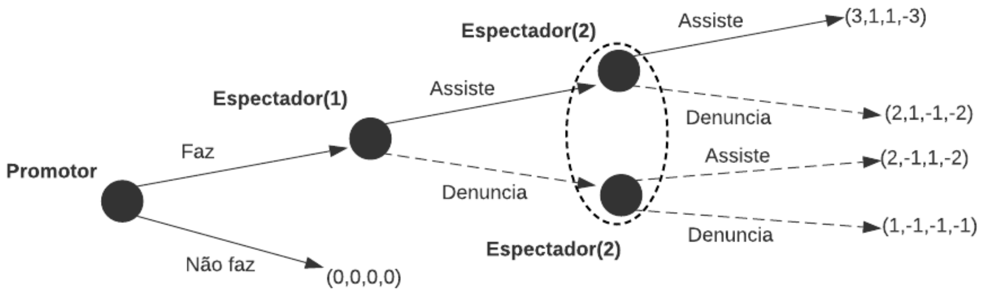

Figura 116: Jogo Desatento Simultâneo Duplo – Segundo subjogo resolvido

Finalmente, o jogador Promotor escolherá a estratégia Fazer, uma vez que esse comportamento gerará a melhor recompensa possível, conforme figura a seguir.

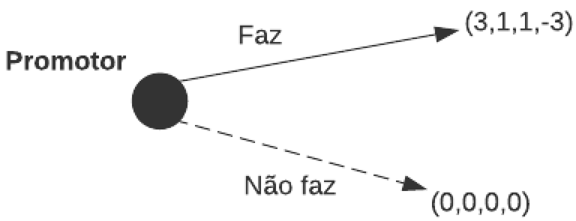

Figura 117: Jogo Desatento Simultâneo Duplo – Terceiro subjogo resolvido

Portanto, a partir da análise da resolução do Jogo Desatento Simultâneo Duplo é possível extrair conclusões similares as dos outros jogos com modelagem que contemplam o cenário Desatento, ou seja, o ato de violência escolar acontecerá, e existirá uma grande chance de repetição no futuro.

4.3.2.3 Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Essa modelagem pressupõe o cenário Natureza Simples, onde existe um jogo de informação incompleta, e os jogadores não conseguem determinar certamente o caráter das autoridades competentes quanto a punição do bullying. A representação do jogo na forma estendida está reproduzida na figura a seguir.

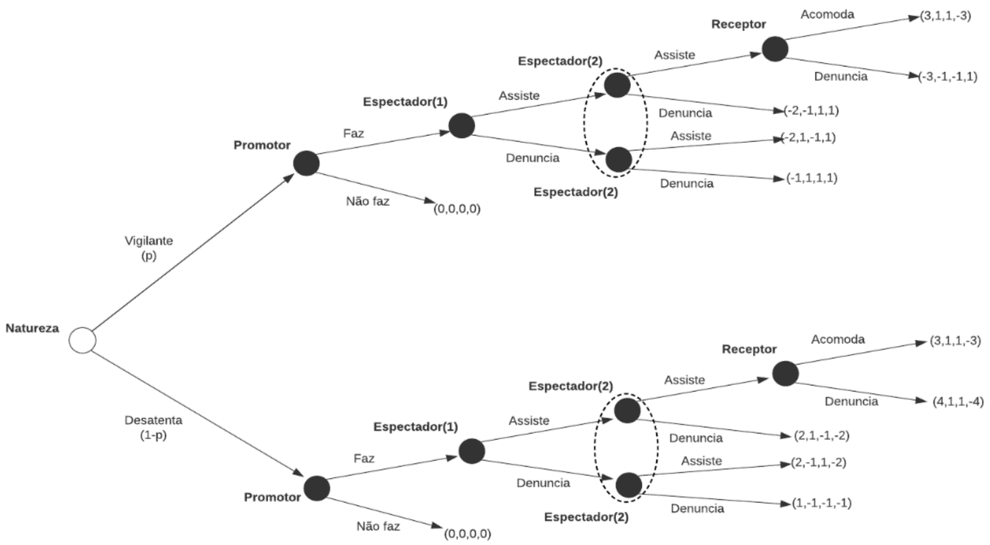

Figura 118: Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo - Representação na forma estendida

Uma vez que existe a introdução de variável p, que postula a probabilidade do jogo encontrar-se em uma conjuntura punitiva ou não, a mesma deve ser ponderada nos ganhos dos jogos Vigilante Simultâneo Duplo e Desatento Simultâneo Duplo, conforme tabelas a seguir.

Perfis de estratégia	**Ganhos do Promotor**
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
(Faz, Denuncia, Assiste, •)	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
(Faz, Denuncia, Denuncia, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(3)\cdot(p)+(3)\cdot(1-p) = 3$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-3)\cdot(p)+(4)\cdot(1-p) = 4 - 7p$

Tabela 76: Recompensas Ponderadas do jogador Promotor no Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Espectador(1)
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Denuncia, Assiste, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 77: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(1) no Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Espectador(2)
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Assiste, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Denuncia, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 78: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(2) no Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Receptor
(Não Faz, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-2)\cdot(1-p) = 3p - 2$
(Faz, Denuncia, Assiste, •)	$(1)\cdot(p)+(-2)\cdot(1-p) = 3p - 2$
(Faz, Denuncia, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(-3)\cdot(p)+(-3)\cdot(1-p) = -3$
(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(1)\cdot(p)+(-4)\cdot(1-p) = 5p - 4$

Tabela 79: Recompensas Ponderadas do jogador Receptor no Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Compilando as funções que produzem os ganhos dos quatro jogadores em uma árvore de possibilidades, com as recompensas ponderadas do jogo, temos a forma de visualização a seguir.

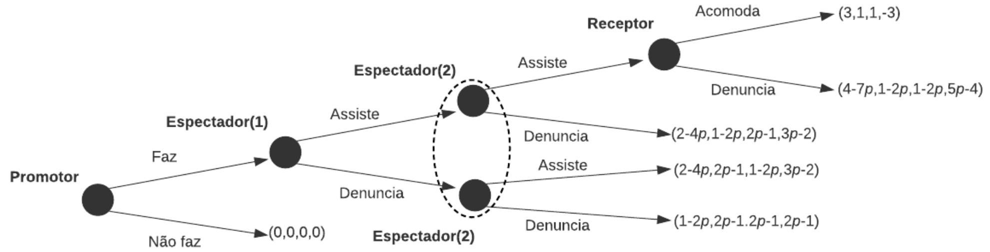

Figura 119: Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo - Representação na forma estendida com recompensas ponderadas

A forma estendida do jogo deve ser particionada em subjogos, possibilitando a aplicação do algoritmo da indução reversa, e em seguida, a verificação da existência de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos, de forma similar ao exposto na seção 4.2.3.1.3 – Jogo Natureza Simples Duplo. Uma vez que os espectadores escolhem as suas respectivas estratégias ao mesmo tempo, cabe ressaltar que que não é possível enquadrar esses jogadores em um conjunto de informação unitária, conforme representação a seguir.

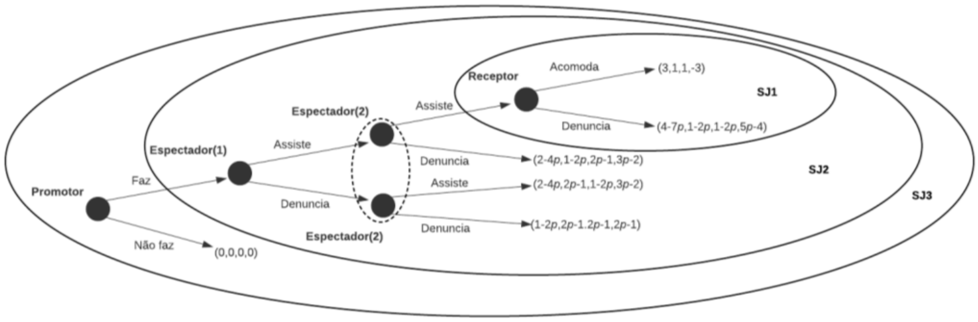

Figura 120: Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo se dá através da comparação dos ganhos que o Receptor pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de *p*, devemos proceder uma comparação entre os ganhos do Receptor para valores de *p* maiores do que zero e menores do que um. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de *p* que igualam os ganhos associados as estratégias do Receptor, conforme equação a seguir:

$$- 3 \text{ (Acomoda)} = 5p - 4 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/5 \text{ (Indiferente)}.$$

Posteriormente, são analisados os valores de *p*, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$- 3 \text{ (Acomoda)} > 5p - 4 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/5 \text{ (Acomoda)},$$
$$- 3 \text{ (Acomoda)} < 5p - 4 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/5 \text{ (Denuncia)}.$$

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma decisão do Receptor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Receptor
Valores de *p*	$p < 1/5$	Acomoda
	$p = 1/5$	Indiferente
	$p > 1/5$	Denuncia

Tabela 80: Representação esquemática das escolhas do Receptor em função do valor de *p* no primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual o Receptor escolhe Acomodar quando $p < 1/5$, e outra na qual o Receptor escolhe Denunciar quando $p > 1/5$, conforme figuras a seguir.

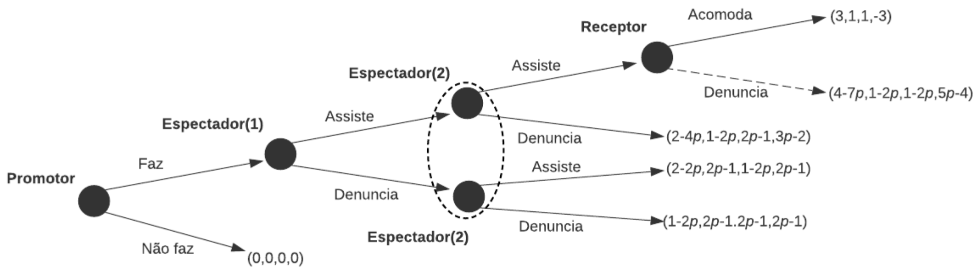

Figura 121: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p < 1/5$

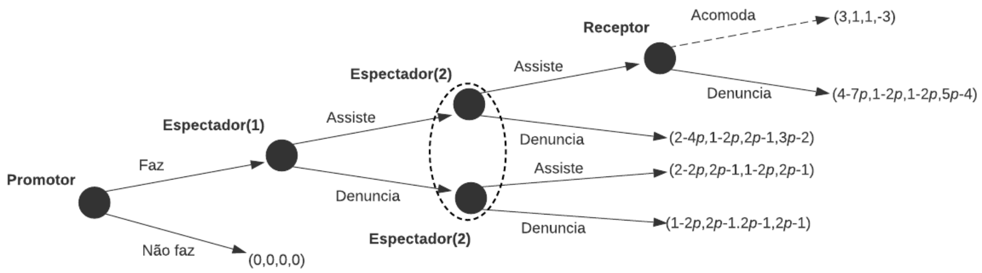

Figura 122: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p > 1/5$

A resolução do segundo subjogo se balizará nos intervalos de variação de *p* definidos na resolução do primeiro subjogo. Uma vez que o segundo subjogo é caracterizado por um conjunto de informação não-unitário, constituído por uma interação estratégica de caráter simultâneo entre os espectadores, se utilizará da forma estratégica para a obtenção da resolução, similarmente ao descrito na solução do Jogo da Divisão, conforme exposto na seção 2.3.2 – Processos de eliminação iterativa e Equilíbrio de Nash. Iniciando quando $p < 1/5$, temos as representações do segundo subjogo nas formas estendida e estratégica, conforme exposto a seguir.

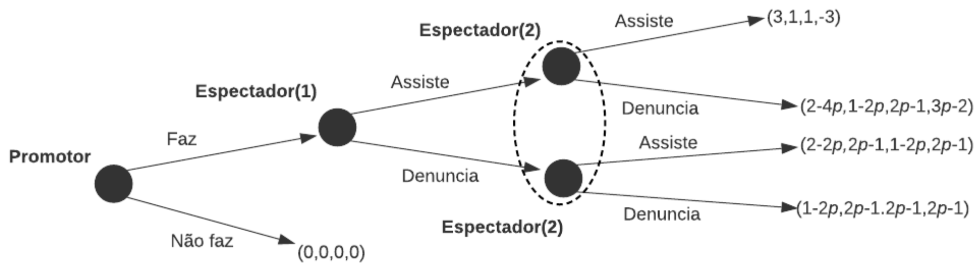

Figura 123: Representação na forma estendida do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando p < 1/5

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Assiste	(1, 1)	(1-2p, 2p-1)
	Denuncia	(2p-1, 1-2p)	(2p-1, 2p-1)

Tabela 81: Representação na forma estratégica do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando p < 1/5

A obtenção da combinação de estratégias que trará a solução mais estável do segundo subjogo segue o mesmo procedimento descrito na resolução do Jogo da Divisão, conforme exposto na seção 2.3.2 – Processos de eliminação iterativa e Equilíbrio de Nash.

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Assiste	(1, 1)	(1-2p, 2p-1)

Tabela 82: Representação da eliminação de decisão Denuncia referente ao jogador Espectador(1), quando p < 1/5

		Espectador(2)
		Assiste
Espectador(1)	Assiste	(1, 1)

Tabela 83: Representação da eliminação de decisão Denuncia referente ao jogador Espectador(2), quando p < 1/5

Por outro lado, quando p > 1/5, temos as representações do segundo subjogo nas formas estendida e estratégica, conforme exposto a seguir.

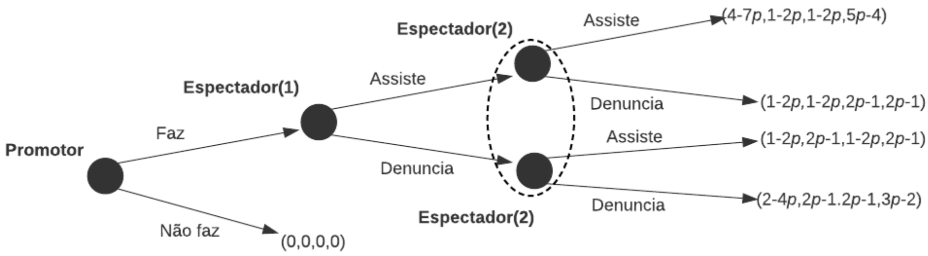

Figura 124: Representação na forma estendida do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p > 1/5$

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Assiste	$(1-2p, 1-2p)$	$(1-2p, 2p-1)$
	Denuncia	$(2p-1, 1-2p)$	$(2p-1, 2p-1)$

Tabela 84: Representação na forma estratégica do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p > 1/5$

Analisando as combinações de recompensas na tabela 84 em função da variação de p, é possível verificar que o valor $p = 1/2$ faz com que todas as representações de recompensas fiquem na forma (0, 0), impossibilitando a determinação de um perfil de estratégias que resolveria o subjogo. Consequentemente, esse valor receberá a designação Indiferente e será desconsiderado na resolução do subjogo subsequente, seguido a mesma finalidade descrita na resolução no Jogo das Balas, conforme exposto na seção 2.3.4 – Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas. Diante disso, a solução do segundo subjogo se dividirá em duas partes: uma considerando valores de p maiores do que 1/5 e menores do que 1/2, e outra para valores de p maiores do que 1/2.

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Assiste	$(1-2p, 2p-1)$	$(1-2p, 2p-1)$

Tabela 85: Representação da eliminação de decisão Denuncia referente ao jogador Espectador(1), quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

		Espectador(2)
		Assiste
Espectador(1)	Assiste	(1-2p, 2p-1)

Tabela 86: Representação da eliminação de decisão Denuncia referente ao jogador Espectador(2), quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

		Espectador(2)	
		Assiste	Denuncia
Espectador(1)	Denuncia	(2p-1, 1-2p)	(2p-1, 2p-1)

Tabela 87: Representação da eliminação de decisão Assiste referente ao jogador Espectador(1), quando $p > 1/2$

		Espectador(2)
		Denuncia
Espectador(1)	Denuncia	(2p-1, 2p-1)

Tabela 88: Representação da eliminação de decisão Assiste referente ao jogador Espectador(2), quando $p > 1/2$

Logo, cada valor de *p* pode ser associado a uma combinação de estratégias dos espectadores que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Combinação de estratégias que maximiza a recompensa dos Espectadores
Valores de *p*	$p < 1/5$	(Assiste, Assiste)
	$1/5 < p < 1/2$	(Assiste, Assiste)
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	(Denuncia, Denuncia)

Tabela 89: Representação esquemática das combinações de estratégias que maximizam as recompensas dos espectadores em função do valor de *p* no segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Portanto, o segundo subjogo possui três soluções, uma na qual os espectadores escolhem Assiste quando $p < 1/5$; outra na qual os espectadores escolhem Assiste quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual os espectadores escolhem Denuncia quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

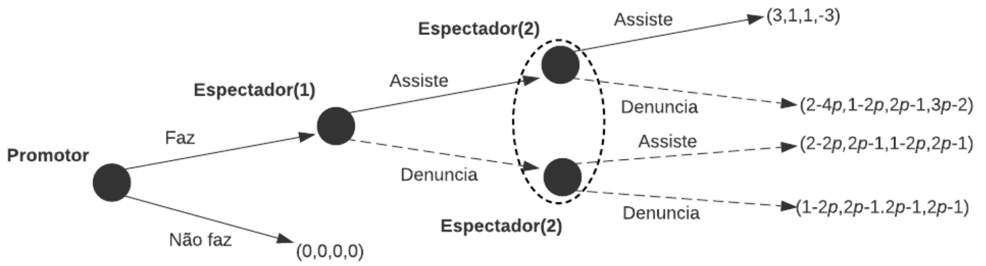

Figura 125: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p < 1/5$

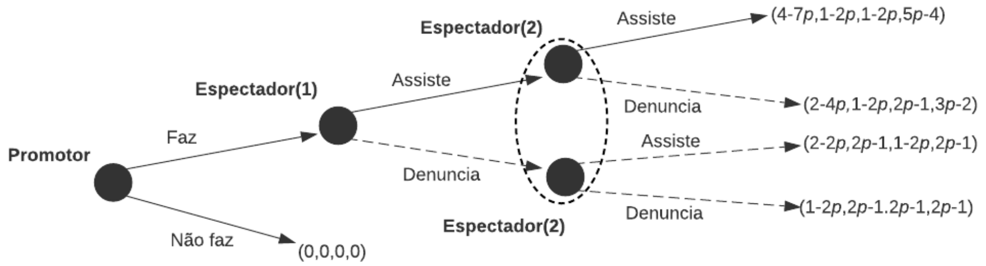

Figura 126: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

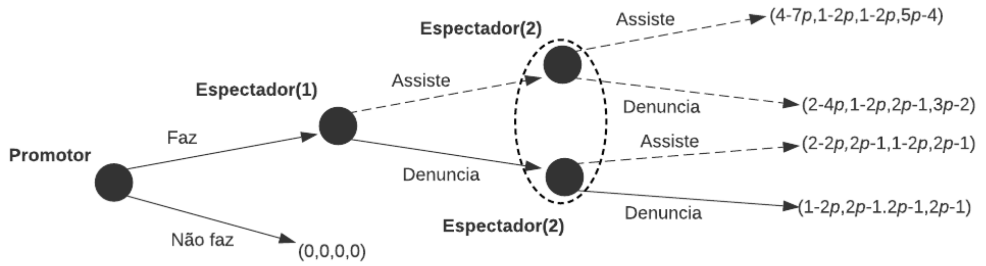

Figura 127: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p > 1/2$

Finalmente, a análise da resolução do terceiro subjogo seguirá nos mesmos intervalos de variação de p definidos nos subjogos anteriores. Iniciando quando $p < 1/5$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p < 1/5 \Leftrightarrow 0 \text{ (Não Faz)} < 3 \text{ (Faz)}.$$

Em segundo cenário, onde $1/5 < p < 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$1/5 < p < 1/2 \Leftrightarrow 4 - 7p \text{ (Faz)} > 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Finalmente, onde $p > 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - 2p \text{ (Faz)} < 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Promotor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Promotor
Valores de *p*	$p < 1/5$	Faz
	$1/5 < p < 1/2$	Faz
	$p > 1/2$	Não Faz

Tabela 90: Representação esquemática das escolhas do Promotor em função do valor de p no terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

Portanto, o terceiro subjogo possui três soluções, uma na qual o Promotor escolhe Faz quando $p < 1/5$; outra na qual o Promotor escolhe Faz quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Promotor escolhe Não Faz quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

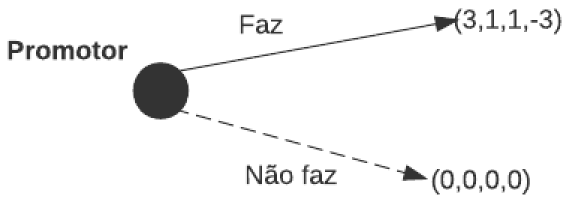

Figura 128: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p < 1/5$

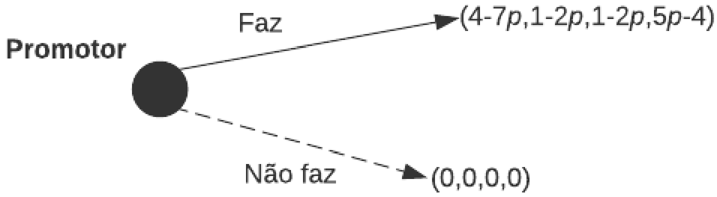

Figura 129: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/5 e menor do que 1/2

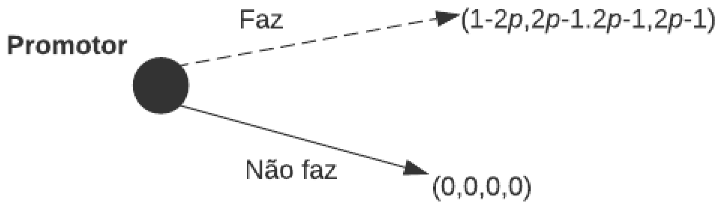

Figura 130: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo quando $p > 1/2$

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo nos diferentes valores de p.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 1/5$	(Faz, Assiste, Assiste, Acomoda)
	$1/5 < p < 1/2$	(Faz, Assiste, Assiste, Denuncia)
	$1/2 < p \leq 1$	(Não Faz, •, •, •)

Tabela 91: Representação esquemática da resolução do Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo

4.3.3 Jogos Simultâneos Triplos

Essas modelagens pressupõem a existência de três testemunhas oculares ao ato, que serão denominados como Espectador(1), Espectador(2) e Espectador(3), bem como os jogadores com as funções Promotor e Receptor. No aspecto da estruturação formal, todos os jogos terão características em comum. Iniciando pela representação dos jogadores, temos que:

$$J = \{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o jogador Promotor, j_2, o jogador Espectador(1), j_3, o jogador Espectador(2), j_4, o jogador Espectador(3), e j_5, o jogador Receptor. Ademais, denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$E_3 = \{s_{31}, s_{32}\}$$

$$E_4 = \{s_{41}, s_{42}\}$$
$$E_5 = \{s_{51}, s_{52}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5, respectivamente. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Fazer e Não Fazer do jogador j_1, s_{21} e s_{22} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_2, s_{31} e s_{32} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_3, s_{41} e s_{42} representam as decisões Assistir e Denunciar do jogador j_4, e, s_{51} e s_{52} representam as decisões Acomodar e Denunciar do jogador j_5. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{5} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \times E_5$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

4.3.3.1 Jogo Vigilante Simultâneo Triplo

O modelo aqui apresentado está baseado nas ideais constituintes do cenário Vigilante, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_4: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_4(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_5: \quad \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_5(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 do conjunto *J*. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$, $u_3(\boldsymbol{e})$, $u_4(\boldsymbol{e})$ e $u_5(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade				
		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Perfis de estratégias	(Não Faz, •, •, •, •)	0	0	0	0	0
	(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	-3	-1	1	-1	1
	(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	-2	-1	1	1	1
	(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	-3	1	-1	-1	1
	(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	-2	1	-1	1	1
	(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	-2	1	1	-1	1
	(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	-1	1	1	1	1
	(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	4	1	1	1	-4
	(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	-4	-1	-1	-1	1

Tabela 92: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 no Jogo Vigilante Simultâneo Triplo

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 na forma estendida, conforme figura a seguir.

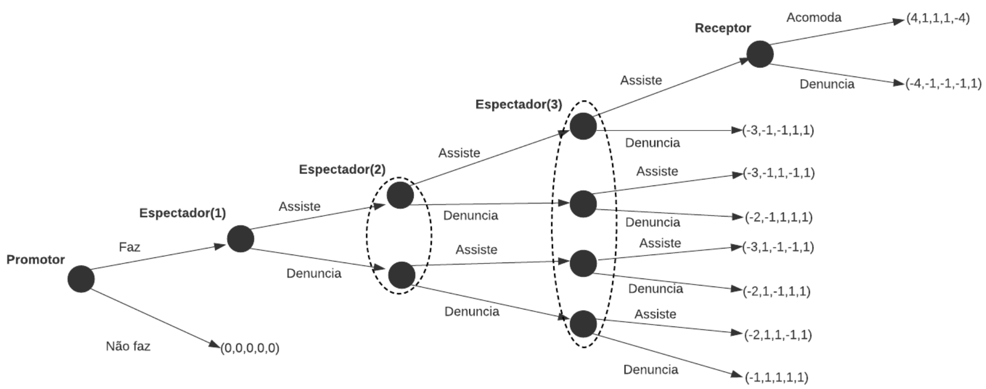

Figura 131: Jogo Vigilante Simultâneo Triplo – Representação na forma estendida

A resolução do jogo seguirá a mesma lógica aplicada ao Jogo Vigilante Simultâneo Duplo, ou seja, a determinação de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos se dará através do método da indução reversa, após determinação dos subjogos presentes na forma estendida, conforme figura a seguir.

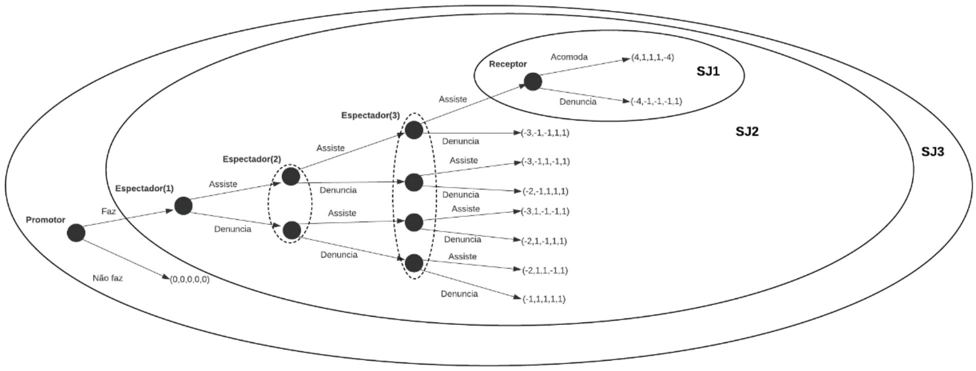

Figura 132: Jogo Vigilante Simultâneo Triplo – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo nos permite afirmar que o jogador Receptor escolherá Denuncia, e os ganhos associados a essa decisão serão repassados ao próximo subjogo, conforme figura a seguir.

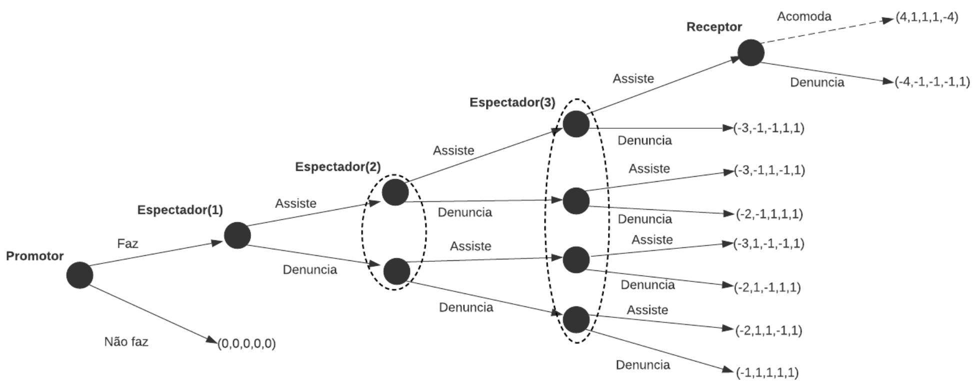

Figura 133: Jogo Vigilante Simultâneo Triplo – Primeiro subjogo resolvido

A resolução do segundo subjogo levará em consideração apenas a interação estratégica entre os espectadores, avaliando as recompensas que são obtidas, partindo das diferentes possibilidades de comportamento. A comparação entre os ganhos dos espectadores leva a conclusão que da estratégia Denuncia é estritamente dominante com relação a estratégia Assiste, uma vez que essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente. Logo, tendo em conta a interação mútua das decisões dos espectadores, tem-se que todos escolheram Denuncia, e somente os perfis de estratégias (Não Faz, •, •, •, •), quando o Promotor decide não praticar o bullying, e (Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, Denuncia) são candidatos a Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.

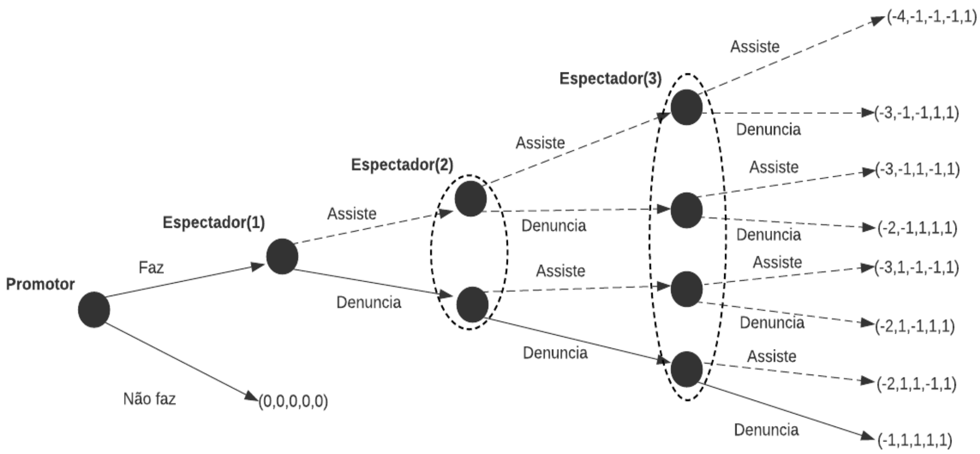

Figura 134: Jogo Vigilante Simultâneo Triplo – Segundo subjogo resolvido

Finalmente, o terceiro subjogo terá o jogador com a função Promotor escolhendo a estratégia Não Faz, uma vez que esse comportamento gerará a melhor recompensa possível, conforme figura a seguir.

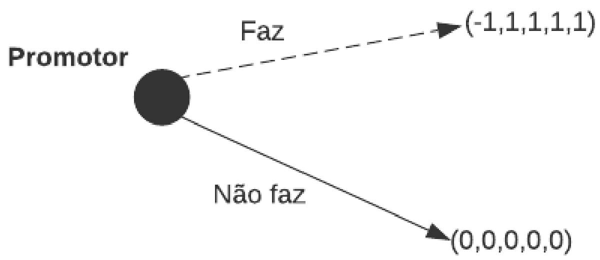

Figura 135: Jogo Vigilante Simultâneo Triplo – Terceiro subjogo resolvido

Desprende-se da solução do Jogo Vigilante Simultâneo Triplo que os perfis de estratégias (Não Faz, •, •, •, •) são os Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos, e isso implica nas mesmas considerações já mencionadas nos jogos que contemplam o cenário Vigilante, ou seja, o bullying tenderá a não ocorrer.

4.3.3.2 Jogo Desatento Simultâneo Triplo

O modelo aqui apresentado está baseado nas ideais constituintes do cenário Desatento, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1 : \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2 : \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3 : \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_4 : \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_4(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_5 : \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_5(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

, onde u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 são as funções utilidade associadas aos respectivos jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 do conjunto J. Essas funções associam as recompensas $u_1(\boldsymbol{e})$, $u_2(\boldsymbol{e})$, $u_3(\boldsymbol{e})$, $u_4(\boldsymbol{e})$ e $u_5(\boldsymbol{e})$ que os respectivos jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

		Valor da função utilidade				
		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Perfis de estratégias	(Não Faz, •, •, •, •)	0	0	0	0	0
	(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	-3	1	-1	1	-3
	(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	-2	1	-1	-1	-2
	(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	-3	-1	1	1	-3
	(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	-2	-1	1	-1	-2
	(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	-2	-1	-1	1	-2
	(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	-1	-1	-1	-1	-1
	(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	4	1	1	1	-4
	(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	5	1	1	1	-5

Tabela 93: Valores das funções utilidade para os jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 no Jogo Desatento Simultâneo Triplo

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores j_1, j_2, j_3, j_4 e j_5 na forma estendida, conforme figura a seguir.

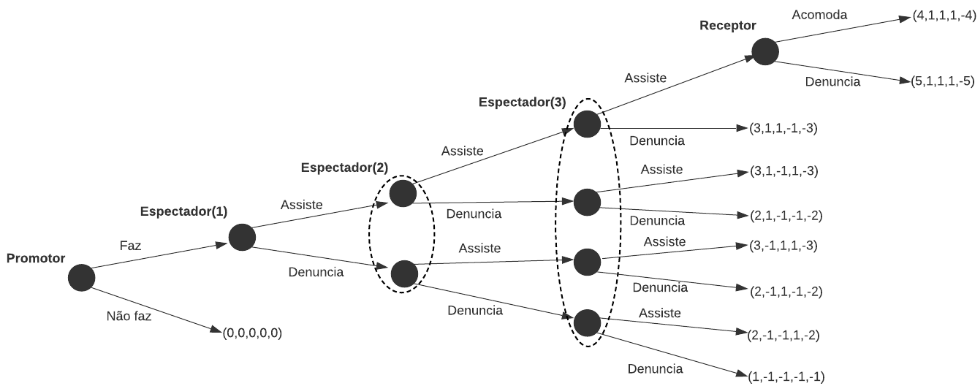

Figura 136: Jogo Desatento Simultâneo Triplo – Representação na forma estendida

A resolução do jogo seguirá a mesma lógica aplicada ao Jogo Desatento Simultâneo Duplo, ou seja, a determinação de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos se dará através do método da indução reversa, após determinação dos subjogos presentes na forma estendida, conforme figura a seguir.

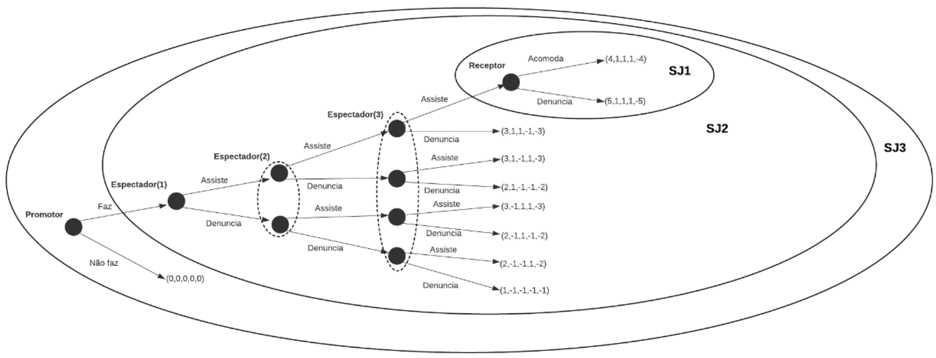

Figura 137: Jogo Desatento Simultâneo Triplo – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo nos permite afirmar que o jogador Receptor escolherá Acomoda, e os ganhos associados a essa decisão serão repassados ao próximo subjogo, conforme figura a seguir.

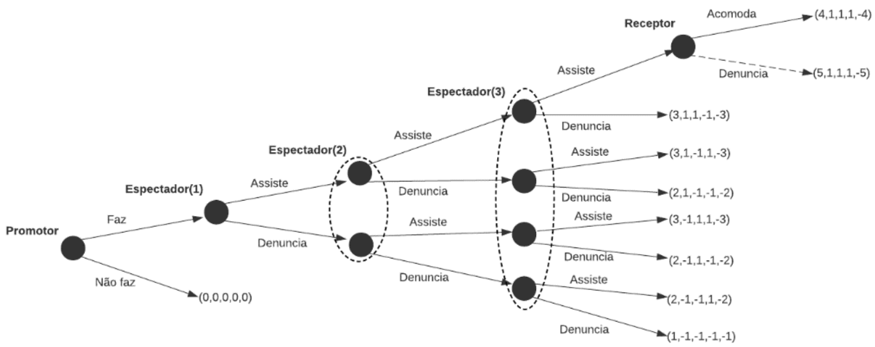

Figura 138: Jogo Desatento Simultâneo Triplo – Primeiro subjogo resolvido

A resolução do segundo subjogo levará em consideração apenas a interação estratégica entre os espectadores, avaliando as recompensas que são obtidas, partindo das diferentes possibilidades de comportamento. A comparação entre os ganhos dos espectadores leva a conclusão que da estratégia Assiste é estritamente dominante com relação a estratégia Denuncia, uma vez que essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente. Logo, tendo em conta a interação mútua das decisões dos espectadores, tem-se que todos escolheram Denuncia, e somente os perfis de estratégias (Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda) e (Não Faz, •, •, •, •) são candidatos a Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.

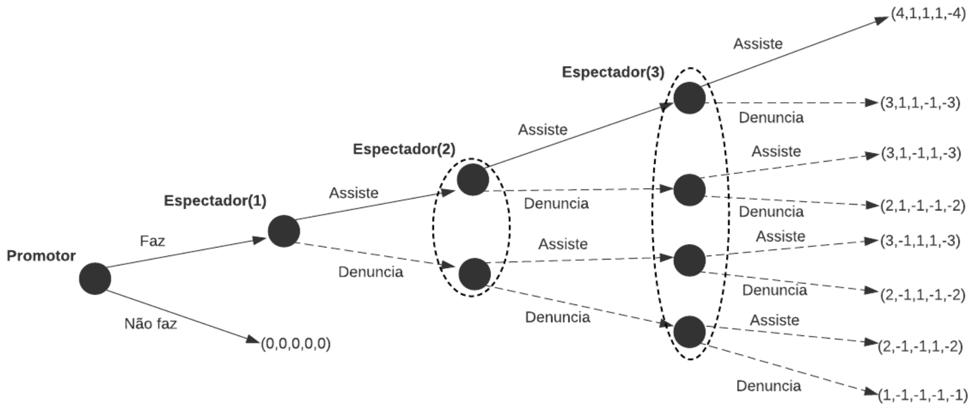

Figura 139: Jogo Desatento Simultâneo Triplo – Segundo subjogo resolvido

Finalmente, o terceiro subjogo terá o jogador com a função Promotor escolhendo a estratégia Faz, uma vez que esse comportamento gerará a melhor recompensa possível, conforme figura a seguir.

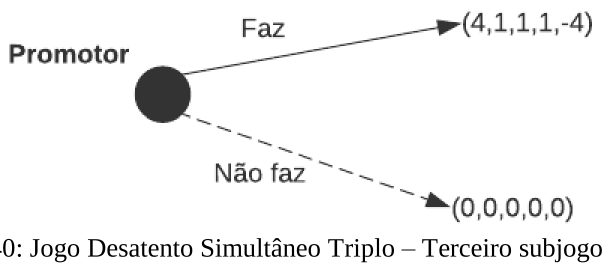

Figura 140: Jogo Desatento Simultâneo Triplo – Terceiro subjogo resolvido

Desprende-se da solução do Jogo Desatento Simultâneo Triplo que o perfil de estratégias (Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda) é o Equilíbrio de Nash perfeitos em subjogos, e isso implica nas mesmas considerações já mencionadas nos jogos que contemplam o cenário Desatento, ou seja, o ato de violência escolar ocorrerá.

4.3.3.3 Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Essa modelagem pressupõe o cenário Natureza Simples, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários. A representação do jogo na forma estendida está reproduzida na figura a seguir.

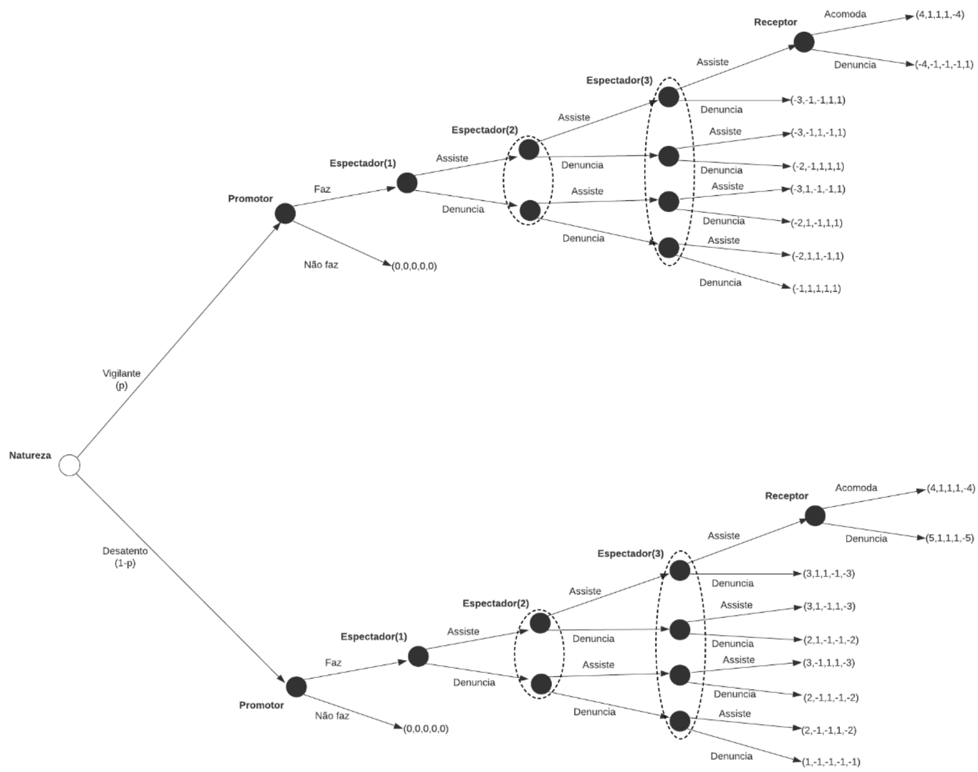

Figura 141: Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo – Representação na forma estendida

A introdução de variável *p* tem a função de atribuir a probabilidade do jogo se encontrar em uma conjuntura punitiva ou não, e dessa maneira, a mesma deve ser ponderada nos ganhos dos jogos Vigilante Simultâneo Triplo e Desatento Simultâneo Triplo, conforme tabelas a seguir.

Perfis de estratégia	Ganhos do Promotor
(Não Faz, •, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	$(-3)\cdot(p)+(3)\cdot(1-p) = 3 - 6p$
(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	$(-3)\cdot(p)+(3)\cdot(1-p) = 3 - 6p$
(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	$(-2)\cdot(p)+(2)\cdot(1-p) = 2 - 4p$
(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(4)\cdot(p)+(4)\cdot(1-p) = 4$
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-4)\cdot(p)+(5)\cdot(1-p) = 5 - 9p$

Tabela 94: Recompensas Ponderadas do jogador Promotor no Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Espectador(1)
(Não Faz, •, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 95: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(1) no Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Espectador(2)
(Não Faz, •, •, •, •)	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 96: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(2) no Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Espectador(3)
(Não Faz, •, •, •, •)	(0)·(*p*)+(0)·(1-*p*) = 0
(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	(-1)·(*p*)+(1)·(1-*p*) = 1 - 2*p*
(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	(1)·(*p*)+(-1)·(1-*p*) = 2*p* - 1
(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	(-1)·(*p*)+(1)·(1-*p*) = 1 - 2*p*
(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	(1)·(*p*)+(-1)·(1-*p*) = 2*p* - 1
(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	(-1)·(*p*)+(1)·(1-*p*) = 1 - 2*p*
(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	(1)·(*p*)+(-1)·(1-*p*) = 2*p* - 1
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	(1)·(*p*)+(1)·(1-*p*) = 1
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	(-1)·(*p*)+(1)·(1-*p*) = 1 - 2*p*

Tabela 97: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(3) no Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Perfis de estratégia	Ganhos do Receptor
(Não Faz, •, •, •, •)	(0)·(*p*)+(0)·(1-*p*) = 0
(Faz, Assiste, Denuncia, Assiste, •)	(1)·(*p*)+(-3)·(1-*p*) = 4*p* - 3
(Faz, Assiste, Denuncia, Denuncia, •)	(1)·(*p*)+(-2)·(1-*p*) = 3*p* - 2
(Faz, Denuncia, Assiste, Assiste, •)	(1)·(*p*)+(-3)·(1-*p*) = 4*p* - 3
(Faz, Denuncia, Assiste, Denuncia, •)	(1)·(*p*)+(-2)·(1-*p*) = 3*p* - 2
(Faz, Denuncia, Denuncia, Assiste, •)	(1)·(*p*)+(-2)·(1-*p*) = 3*p* - 2
(Faz, Denuncia, Denuncia, Denuncia, •)	(1)·(*p*)+(-1)·(1-*p*) = 2*p* - 1
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)	(-4)·(*p*)+(-4)·(1-*p*) = -4
(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)	(1)·(*p*)+(-5)·(1-*p*) = 6*p* - 5

Tabela 98: Recompensas Ponderadas do jogador Receptor no Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Compilando as funções que produzem os ganhos dos cinco jogadores em uma árvore de possibilidades, com as recompensas ponderadas do jogo, temos a forma de visualização a seguir.

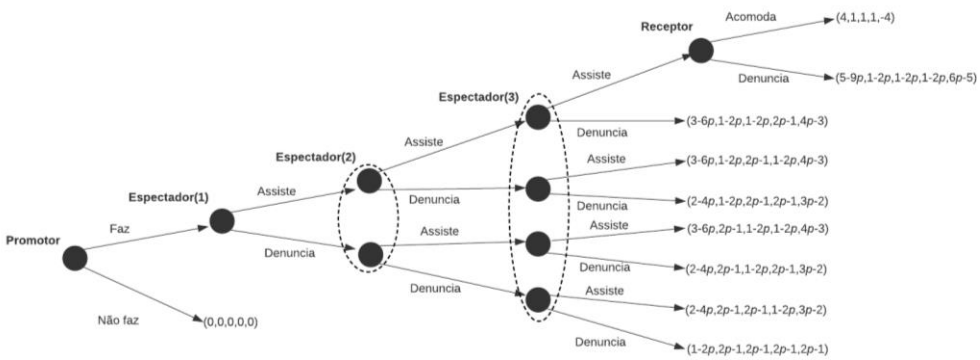

Figura 142: Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo – Representação na forma estendida com recompensas ponderadas

Para que a obtenção da solução do jogo seja possível, aplicaremos o mesmo procedimento exposto na resolução dos modelos que contemplam o cenário Natureza Simples, de forma similar ao exposto na seção 4.3.2.3 – Jogo Natureza Simples Simultâneo Duplo, conforme representação a seguir.

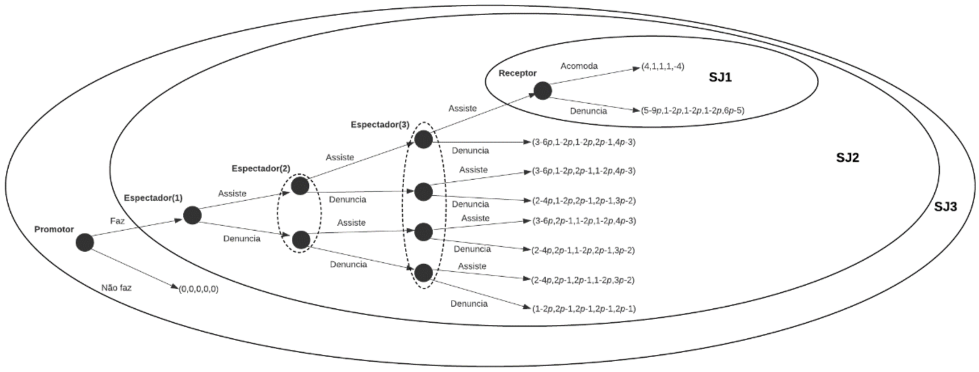

Figura 143: Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo se dá através da comparação dos ganhos que o Receptor pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de p, devemos proceder uma comparação entre os ganhos do Receptor para valores de p maiores do que zero e menores do que um. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Receptor, conforme equação a seguir:

$$- 4 \text{ (Acomoda)} = 6p - 5 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/6 \text{ (Indiferente)}.$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$- 4 \text{ (Acomoda)} > 6p - 5 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/6 \text{ (Acomoda)},$$
$$- 4 \text{ (Acomoda)} < 6p - 5 \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/6 \text{ (Denuncia)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Receptor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Receptor
Valores de *p*	$p < 1/6$	Acomoda
	$p = 1/6$	Indiferente
	$p > 1/6$	Denuncia

Tabela 99: Representação esquemática das escolhas do Receptor em função do valor de *p* no primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual o Receptor escolhe Acomodar quando $p < 1/6$, e outra na qual o Receptor escolhe Denunciar quando $p > 1/6$, conforme figuras a seguir.

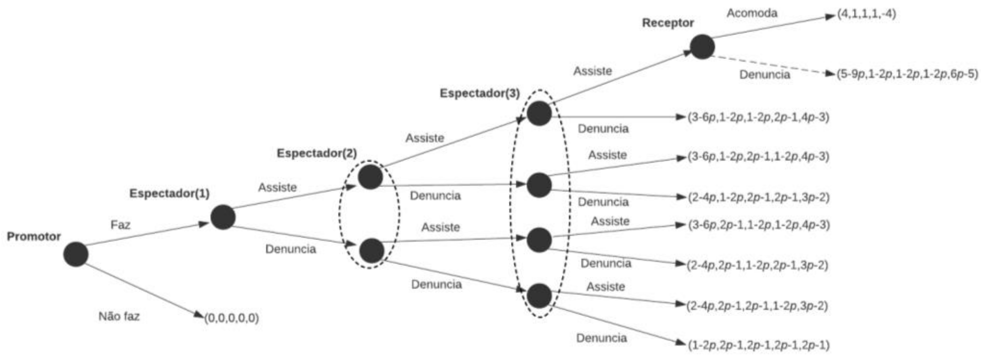

Figura 144: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando $p < 1/6$

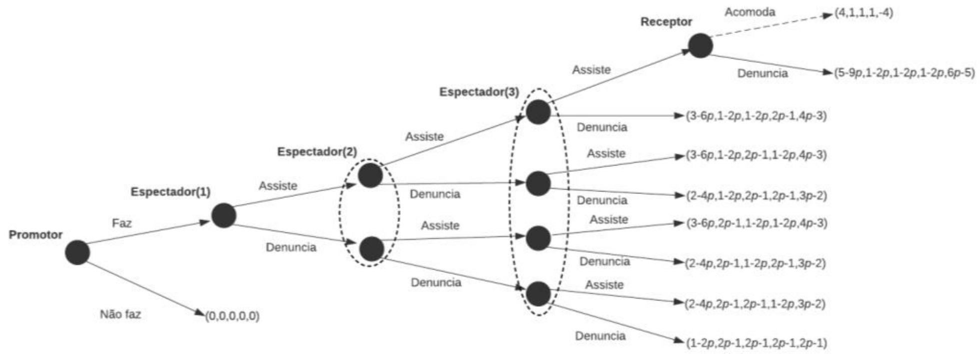

Figura 145: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando $p > 1/6$

A resolução do segundo subjogo se balizará nos intervalos de variação de *p* definidos na resolução do primeiro subjogo. Iniciando quando $p < 1/6$, temos a representação do segundo subjogo na forma estendida, conforme exposto a seguir.

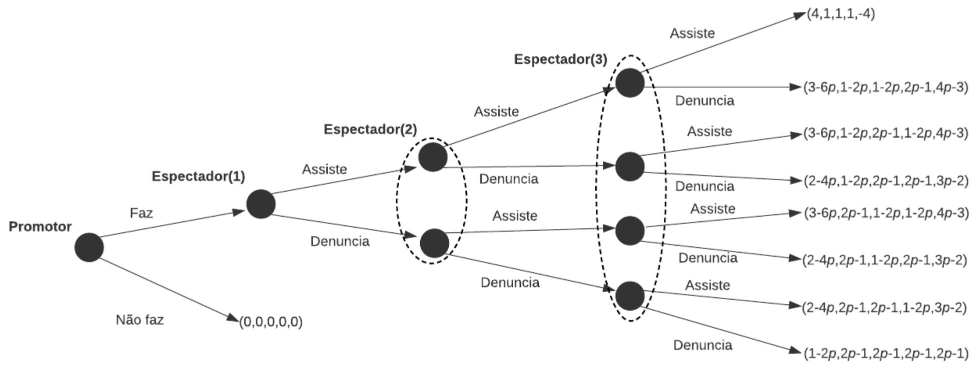

Figura 146: Representação na forma estendida do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando p < 1/6

A comparação entre os ganhos dos espectadores leva a conclusão que da estratégia Assiste é estritamente dominante com relação a estratégia Denuncia, uma vez que essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente.

Por outro lado, quando p > 1/6, temos as representações do segundo subjogo nas formas estendida, conforme exposto a seguir.

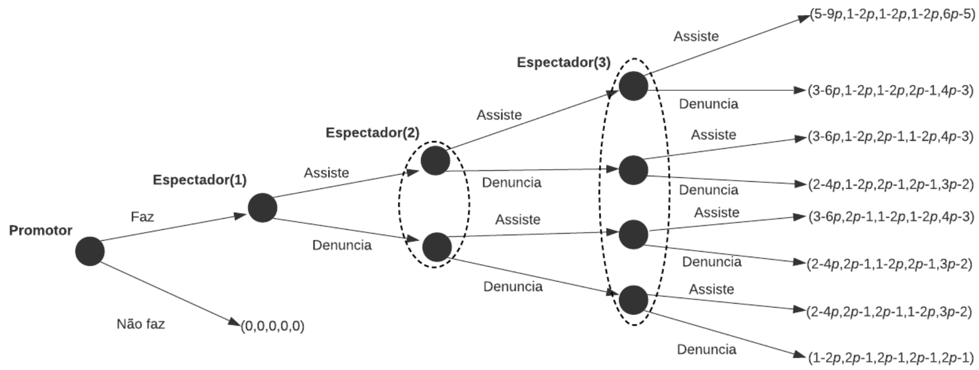

Figura 147: Representação na forma estendida do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando p > 1/6

Analisando as combinações de recompensas em função da variação de p, é possível verificar que o valor p = 1/2 faz com que todas as recompensas fiquem iguais, impossibilitando a determinação de um perfil de estratégias que resolveria o subjogo. Consequentemente, esse valor receberá a designação Indiferente e será desconsiderado na resolução do subjogo subsequente, seguido a mesma finalidade descrita na resolução no Jogo das Balas, conforme exposto na seção 2.3.4 – Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas. Diante disso, a solução do segundo subjogo se dividirá em duas partes: uma considerando valores de *p* maiores do que 1/6 e menores do que 1/2, e outra para valores de *p* maiores do que 1/2.

Começando em valores de *p* maiores do que 1/6 e menores do que 1/2, tem-se que a estratégia Assiste é estritamente dominante com relação a estratégia Denuncia, uma vez que essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente. Por outro lado, ocorre exatamente o oposto quando $p > 1/2$, onde a estratégia Denuncia é estritamente dominante com relação a estratégia Assiste, pois essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente.

Dessa forma, cada valor de *p* pode ser associado a uma combinação de estratégias dos espectadores que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Combinação de estratégias que maximiza a recompensa dos Espectadores
Valores de *p*	$p < 1/6$	(Assiste, Assiste, Assiste)
	$1/6 < p < 1/2$	(Assiste, Assiste, Assiste)
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	(Denuncia, Denuncia, Denuncia)

Tabela 100: Representação esquemática das combinações de estratégias que maximizam as recompensas dos espectadores em função do valor de *p* no segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Portanto, o segundo subjogo possui três soluções, uma na qual os espectadores escolhem Assiste quando $p < 1/6$; outra na qual os espectadores escolhem Assiste quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/6 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual os espectadores escolhem Denuncia quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

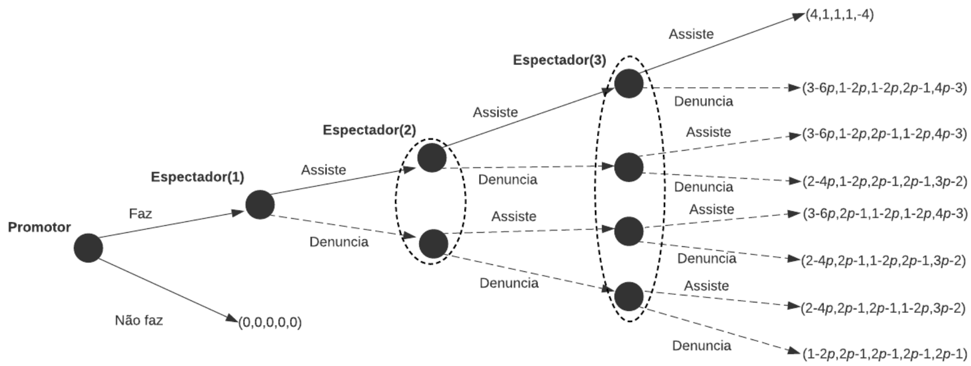

Figura 148: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando p < 1/6

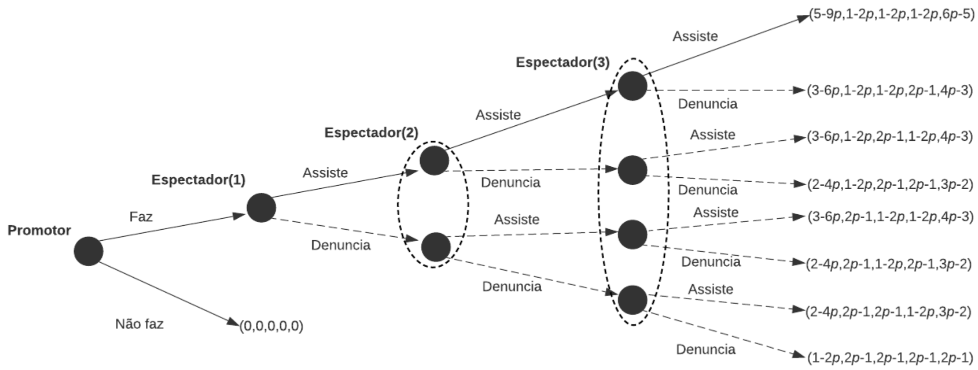

Figura 149: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/6 e menor do que 1/2

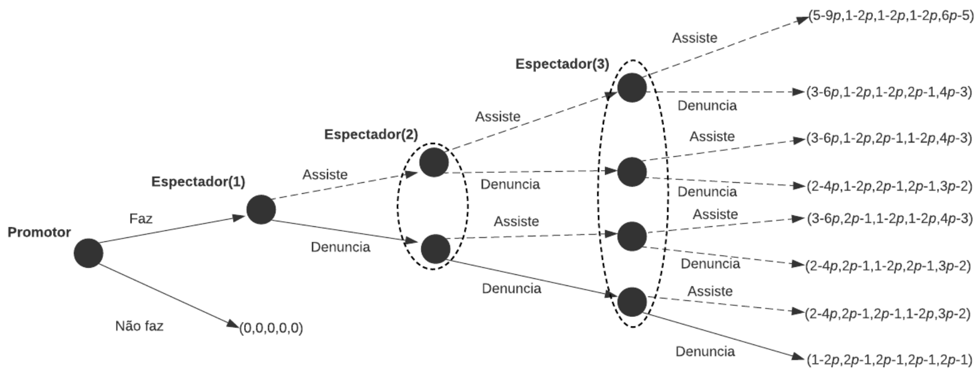

Figura 150: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando p > 1/2

Finalmente, a análise da resolução do terceiro subjogo seguirá nos mesmos intervalos de variação de p definidos nos subjogos anteriores. Iniciando quando p < 1/6, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p < 1/6 \Leftrightarrow 0 \text{ (Não Faz)} < 4 \text{ (Faz)}.$$

Em segundo cenário, onde $1/6 < p < 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$1/6 < p < 1/2 \Leftrightarrow 5 - 9p \text{ (Faz)} > 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Finalmente, onde $p > 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - 2p \text{ (Faz)} < 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Promotor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Promotor
Valores de *p*	$p < 1/6$	Faz
	$1/6 < p < 1/2$	Faz
	$p > 1/2$	Não Faz

Tabela 101: Representação esquemática das escolhas do Promotor em função do valor de *p* no terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

Portanto, o terceiro subjogo possui três soluções, uma na qual o Promotor escolhe Faz quando $p < 1/6$; outra na qual o Promotor escolhe Faz quando p apresenta qualquer valor maior do que 1/6 e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual o Promotor escolhe Não Faz quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

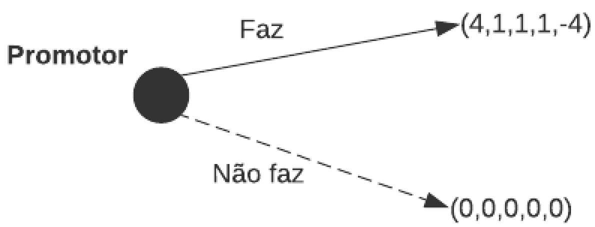

Figura 151: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando $p < 1/6$

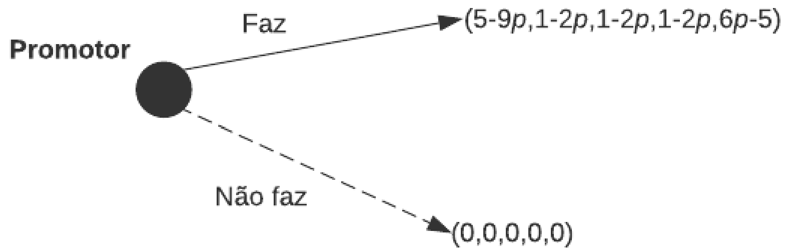

Figura 152: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/6 e menor do que 1/2

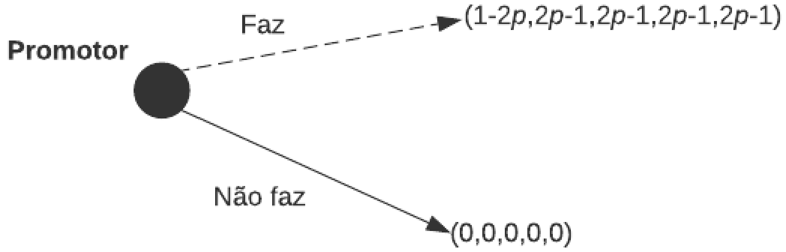

Figura 153: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo quando $p > 1/2$

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo nos diferentes valores de *p*.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 1/6$	(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Acomoda)
	$1/6 < p < 1/2$	(Faz, Assiste, Assiste, Assiste, Denuncia)
	$1/2 < p \leq 1$	(Não Faz, •, •, •, •)

Tabela 102: Representação esquemática da resolução do Jogo Natureza Simples Simultâneo Triplo

4.3.4 Jogos Simultâneos com *m* Espectadores

Os jogos modelados nessa seção possuem as mesmas características descritas em 4.2.3.2 – Jogos com quantidade finita de espectadores, com a diferença que as escolhas dos espectadores terão tratamento simultâneo. Quanto ao aspecto da estruturação formal dos modelos, os jogos compartilharão aspectos comuns. Iniciando pela representação dos jogadores, temos que:

$$J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m, j_{m+1}, j_{m+2}\}$$

é o conjunto de jogadores, onde j_1 representa o jogador Promotor, os elementos entre j_2 e j_{m+1}, os jogadores com a função Espectador, e j_{m+2}, o jogador Receptor. Ademais, denotamos por:

$$E_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$$
$$E_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$\vdots$$
$$E_m = \{s_{m1}, s_{m2}\}$$
$$E_{m+1} = \{s_{(m+1)1}, s_{(m+1)2}\}$$
$$E_{m+2} = \{s_{(m+2)1}, s_{(m+2)2}\}$$

os conjuntos de estratégias puras do jogadores do conjunto J. Neles, s_{11} e s_{12} representam as decisões Fazer e Não Fazer do jogador j_1, e $s_{(m+2)1}$ e $s_{(m+2)2}$ representam as decisões Acomodar e Denunciar do jogador j_{m+2}. Os outros conjuntos descrevem os comportamentos dos jogadores com função Espectador, sendo que elementos da forma s_{k1} representam a escolha Assistir, e elementos da forma s_{k2}, a escolha Denunciar. Finalmente, temos que:

$$E = \prod_{i=1}^{(m+2)} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m \times E_{m+1} \times E_{m+2}$$

simboliza o espaço de estratégias do jogo.

Dado que maneira como se computa as recompensas dos jogadores é equivalente a exposta em todos os tópicos de 4.3 - Modelagem com tratamento simultâneo dos espectadores até este ponto descrito, nota-se que a demonstração de todos os possíveis resultados em uma árvore de possibilidades torna-se impraticável para interações, onde existem uma quantidade de espectadores maior do que três. Portanto, com o objetivo de manter o meio de visualização dos modelos até aqui apresentados, utilizou-se nas seções subsequentes as variáveis *k*, *h* e *t*, sendo que a primeira será utilizada nos índices das representações das estratégias, apresentando valor igual a zero ou igual a um. A variável *h* terá a função de indicar a recompensa dos jogadores com a função espectador, e logo apresentará um valor igual a 1 ou igual a -1. Finalmente, a variável *t* representará a recompensa dos jogadores com as funções promotor e receptor, podem assumir qualquer valor presente no conjunto dos números naturais que seja maior ou igual a 1, e menor ou igual a quantidade de espectadores presente na interação estratégica.

4.3.4.1 Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores

Esse modelo conterá uma quantidade indefinida de testemunhas do ato de bullying, contemplando as características descritas no cenário Vigilante, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários.

Uma vez que existem decisões que encerram os processos decisórios, será utilizada a mesma termologia em 2.3.1 – Dominância estrita e Dominância fraca entre estratégias para descreve perfis de estratégias.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$\vdots$$

$$u_i: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_i(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$\vdots$$

$$u_m: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_m(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_{(m+1)}: \begin{array}{l} E \to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_{(m+1)}(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_{(m+2)}: \quad \begin{aligned} E &\to \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+2)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

, onde as funções utilidade são associadas aos respectivos jogadores do conjunto *J*. Essas funções associam as recompensas que os respectivos jogadores recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

	Valor da função utilidade								
Perfis de estratégias	u_1	u_2	u_3	…	u_i	…	u_m	$u_{(m+1)}$	$u_{(m+2)}$
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	0	0	0	…	0	…	0	0	0
$(s_{11}, s_{22}, s_{32}, \ldots, s_{i2}, \ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	-1	1	1		1		1	1	1
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	-t	1	h	…	h	…	h	h	1
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	-t	-1	h	…	h	…	h	h	1
…	…	…	…	⋰	…	⋰	…	…	…
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	-t	h	h	…	1	…	h	h	1
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	-t	h	h	…	-1	…	h	h	1
…	…	…	…	⋰	…	⋰	…	…	…
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{i1}, \ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	-m	-1	-1	…	-1	…	-1	1	1
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{i1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	(m+1)	1	1	…	1	…	1	1	-(m+1)
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{i1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	-(m+1)	-1	-1	…	-1	…	-1	-1	1

Tabela 103: Valores das funções utilidade para dos jogadores no Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores; onde k = 1 ou k = 2, h = 1 ou h =-1, e t = {2, 3, ..., (m-1), m}

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores na forma estendida, conforme figura a seguir.

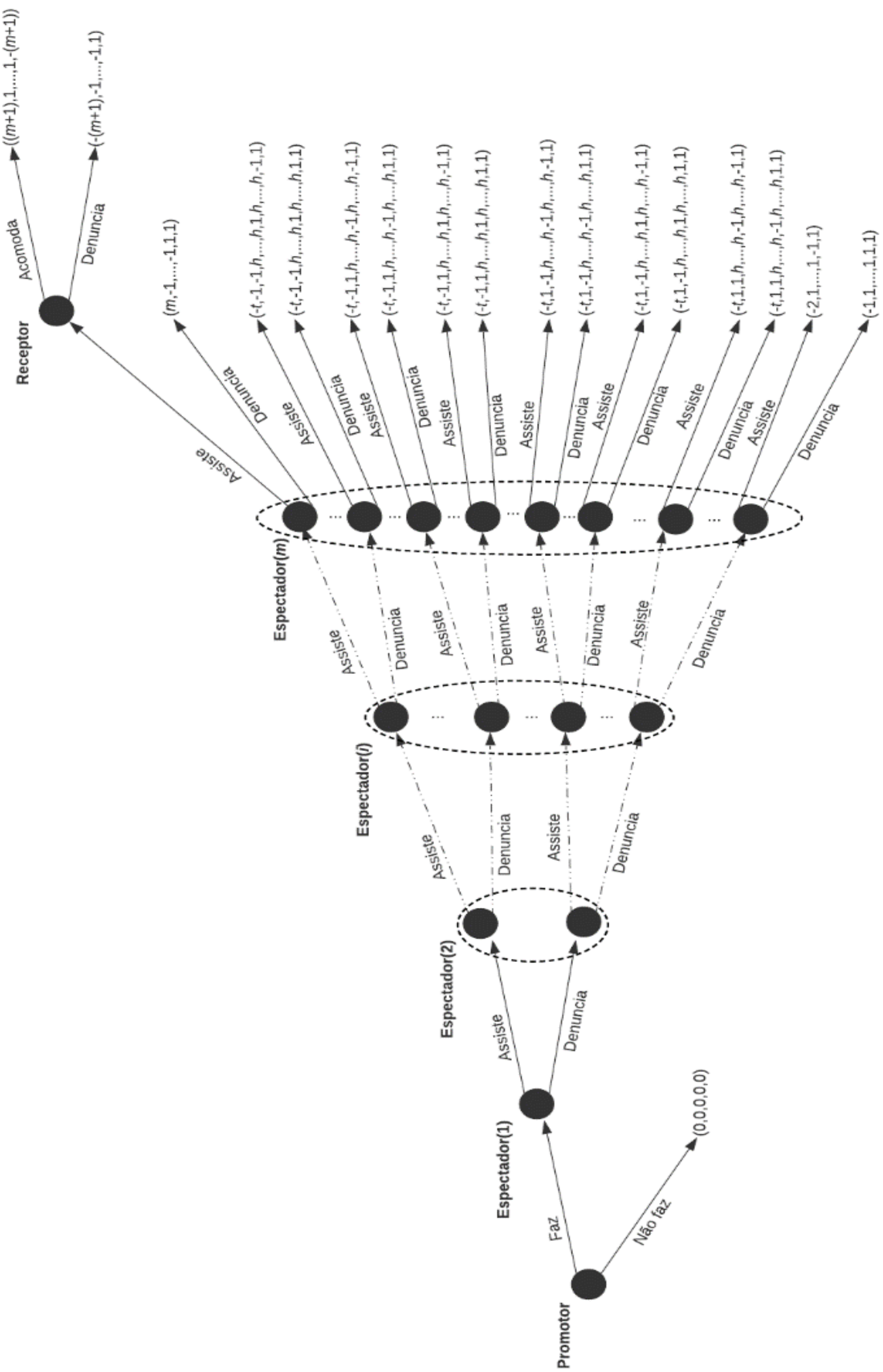

Figura 154: Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores – Representação na forma estendida

Os perfis de estratégias podem ser decompostos para apresentação em forma de tabela, juntamente com seus ganhos respectivos determinados pelas funções utilidades de cada jogador, conforme organização a seguir, onde k = 1 ou k = 2, h = 1 ou h = -1, e t = {2, 3, ..., (m-1), m}.

Perfis de estratégia	**Ganhos Associados**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(0, …, 0)
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\dots, s_{i2},\dots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	(-1, 1, ..., 1, 1)
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-t, 1, h, ..., h, 1)
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\dots, s_{ik},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-t, -1, h, ..., h, 1)
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-t, h, h, ..., h, 1, h, ..., h, 1)
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\dots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\dots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(-t, h, h, ..., h, -1, h, ..., h, 1)
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{i1}, \dots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	(-m, -1, …, -1, 1, 1)
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{i1}, \dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	((m+1), 1, …, 1, -(m+1))
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \dots, s_{i1}, \dots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	(-(m+1), -1, …, -1, 1)

Tabela 104: Representação esquemática das recompensas do Jogo Vigilante Simultâneo com m Espectadores

O processo de definição da solução mais estável é feito primeiramente com a determinação dos subjogos na forma estendida do jogo modelado, de forma similar ao feito em 4.3.2.1 – Jogo Vigilante Simultâneo Duplo e 4.3.3.1 – Jogo Vigilante Simultâneo Triplo, conforme figura a seguir.

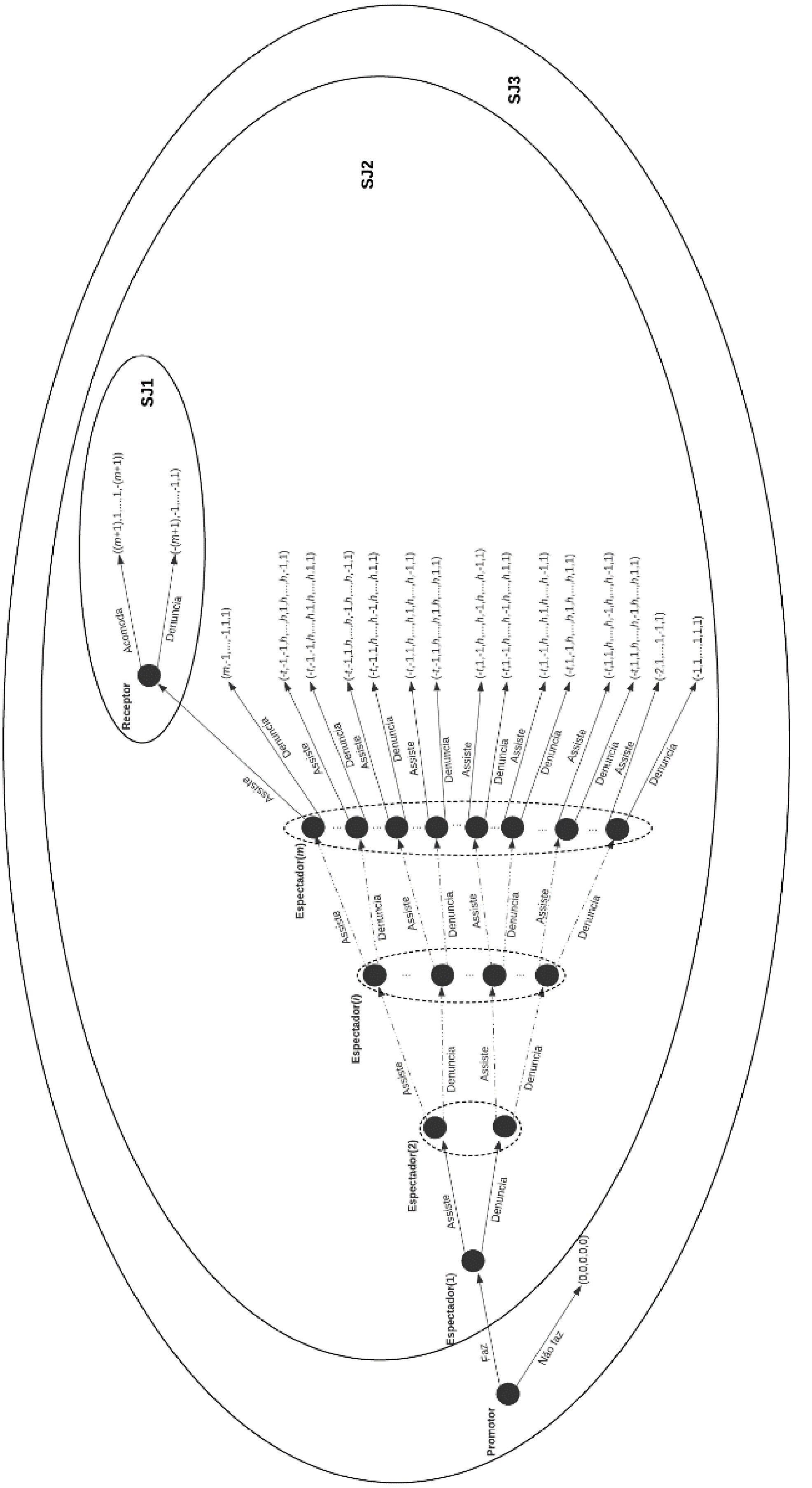

Figura 155: Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores – Partição em subjogos

A eliminação mais estratégias dominadas pelo algoritmo da indução reversa resultará nos resultados descritos em 4.3.2.1 – Jogo Vigilante Simultâneo Duplo e 4.3.3.1 – Jogo Vigilante Simultâneo Triplo, ou seja, o resultado mais provável é aquele onde o bullying não ocorre.

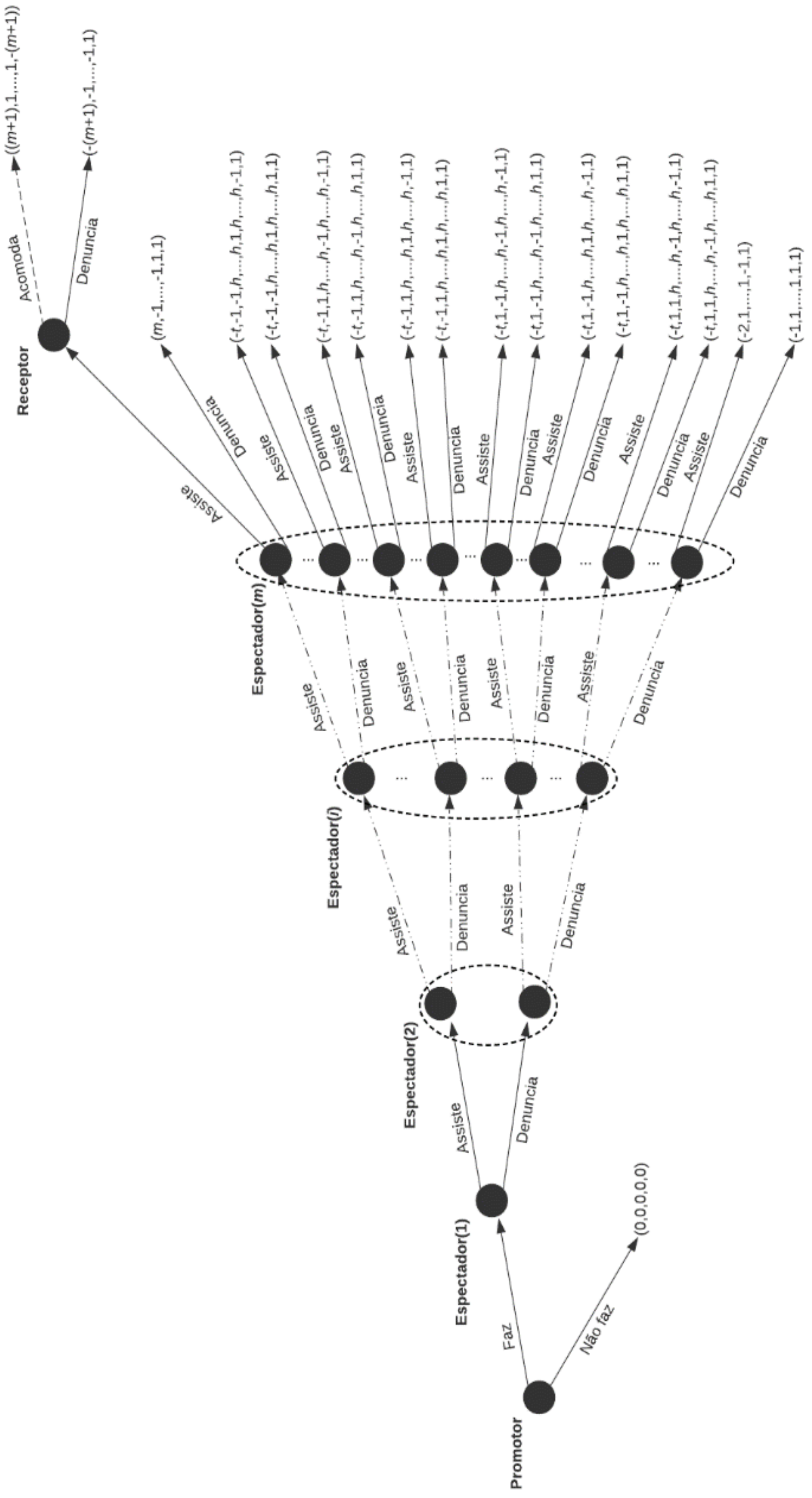

Figura 156: Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores – Primeiro subjogo resolvido

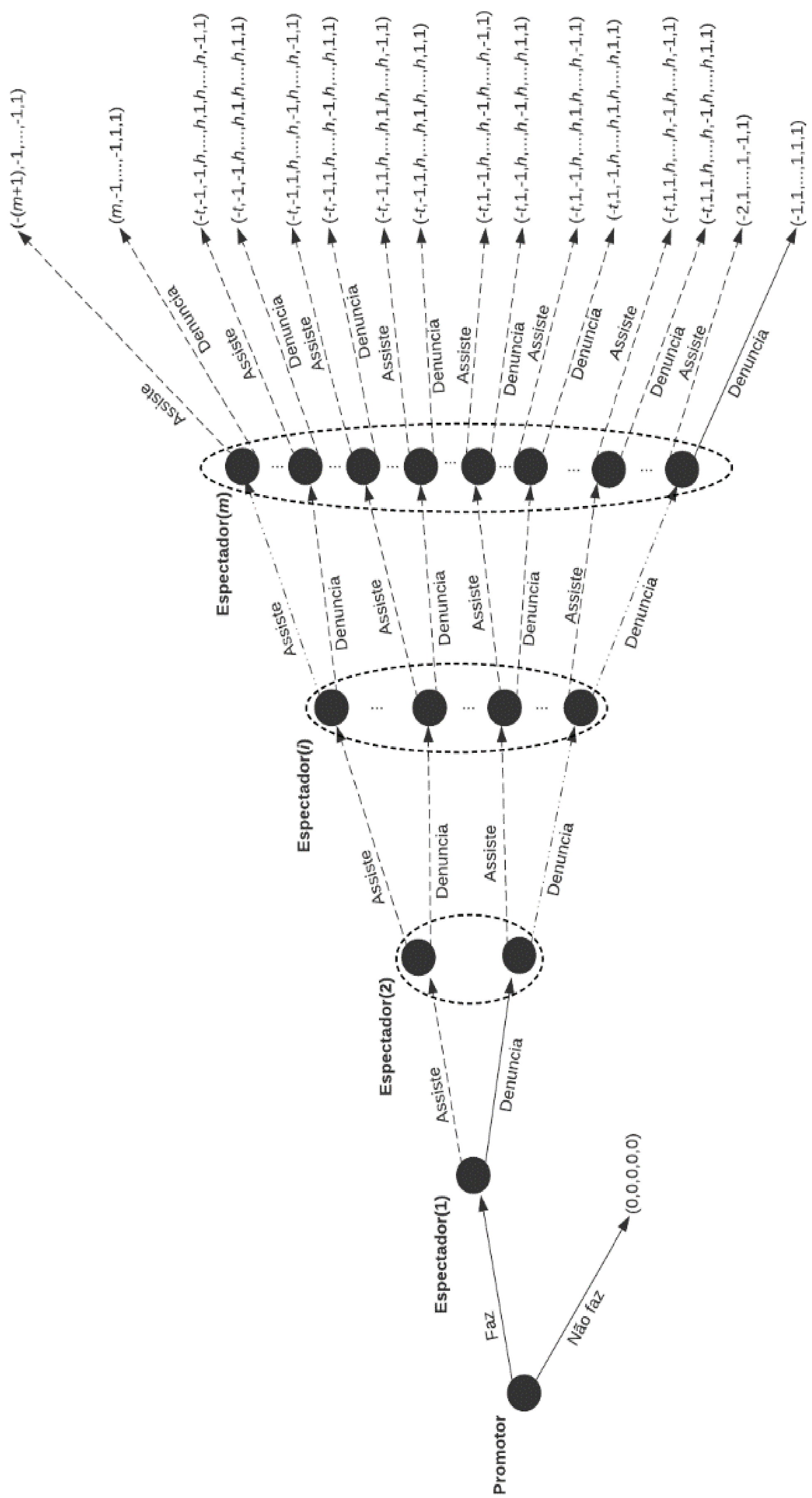

Figura 157: Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores – Segundo subjogo resolvido

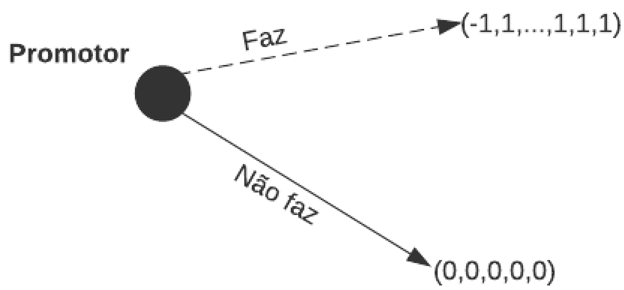

Figura 158: Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores – Terceiro subjogo resolvido

4.3.4.2 Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores

Esse modelo conterá uma quantidade finita de testemunhas do ato de bullying, contemplando as características descritas no cenário Desatento, conforme informações no tópico 4.1.3 - Caracterização de cenários.

Uma vez que existem decisões que encerram os processos decisórios, será utilizada a mesma termologia em 2.3.1 – Dominância estrita e Dominância fraca entre estratégias para descreve perfis de estratégias.

Cada jogador terá sua própria função utilidade, conforme simbologia a seguir:

$$u_1: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_1(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_2: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_2(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_3: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_3(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$\vdots$$

$$u_i: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_i(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$\vdots$$

$$u_m: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} \mapsto u_m(\boldsymbol{e}) \end{array}$$

$$u_{(m+1)}: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+1)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

$$u_{(m+2)}: \quad \begin{aligned} E &\rightarrow \mathrm{R} \\ \boldsymbol{e} &\mapsto u_{(m+2)}(\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

, onde as funções utilidade são associadas aos respectivos jogadores do conjunto *J*. Essas funções associam as recompensas que os respectivos jogadores recebem a cada perfil de estratégias presente no espaço de estratégias do jogo. Organizando em uma tabela cada possível correlação entre os perfis de estratégias e as recompensas dos jogadores, temos:

Perfis de estratégias	Valor da função utilidade								
	u_1	u_2	u_3	…	u_i	…	u_m	$u_{(m+1)}$	$u_{(m+2)}$
$(s_{12},s_{2k},s_{3k},\ldots,s_{ik},\ldots,s_{(m+1)k},s_{(m+2)k})$	0	0	0	…	0	…	0	0	0
$(s_{11},s_{22},s_{32},\ldots,s_{i2},\ldots,s_{m2},s_{(m+1)2},s_{(m+2)k})$	1	-1	-1		-1		-1	-1	-1
$(s_{11},s_{22},s_{3k},\ldots,s_{ik},\ldots,s_{(m+1)k},s_{(m+2)k})$	*t*	1	*-h*	…	*-h*	…	*-h*	*-h*	*-t*
$(s_{11},s_{21},s_{3k},\ldots,s_{ik},\ldots,s_{(m+1)k},s_{(m+2)k})$	*t*	1	*-h*	…	*-h*	…	*-h*	*-h*	*-t*
⋯	⋯	⋯	⋯	⋱	⋯	⋱	⋯	⋯	⋯
$(s_{11},s_{2k},s_{3k},\ldots,s_{(i-1)k},s_{i2},s_{(i+1)k},\ldots,s_{(m+1)k},s_{(m+2)k})$	*t*	*-h*	*-h*	…	-1	…	*-h*	*-h*	*-t*
$(s_{11},s_{2k},s_{3k},\ldots,s_{(i-1)k},s_{i1},s_{(i+1)k},\ldots,s_{(m+1)k},s_{(m+2)k})$	*t*	*-h*	*-h*	…	1	…	*-h*	*-h*	*-t*
⋯	⋯	⋯	⋯	⋱	⋯	⋱	⋯	⋯	⋯
$(s_{11},s_{21},s_{31},\ldots,s_{i1},\ldots,s_{m1},s_{(m+1)2},s_{(m+2)k})$	*m*	1	1	…	1	…	1	-1	*-m*
$(s_{11},s_{21},s_{31},\ldots,s_{i1},\ldots,s_{(m+1)1},s_{(m+2)1})$	(*m*+1)	1	1	…	1	…	1	1	-(*m*+1)
$(s_{11},s_{21},s_{31},\ldots,s_{i1},\ldots,s_{(m+1)1},s_{(m+2)2})$	(*m*+2)	1	1	…	1	…	1	1	-(*m*+2)

Tabela 105: Valores das funções utilidade para dos jogadores no Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores; onde *k* = 1 ou *k* = 2, *h* = 1 ou *h* = -1, e *t* = {2, 3, ..., (*m*-1), *m*}

Compilando as informações em uma árvore de possibilidades, temos a representação da interação estratégica entre os jogadores na forma estendida, conforme figura a seguir.

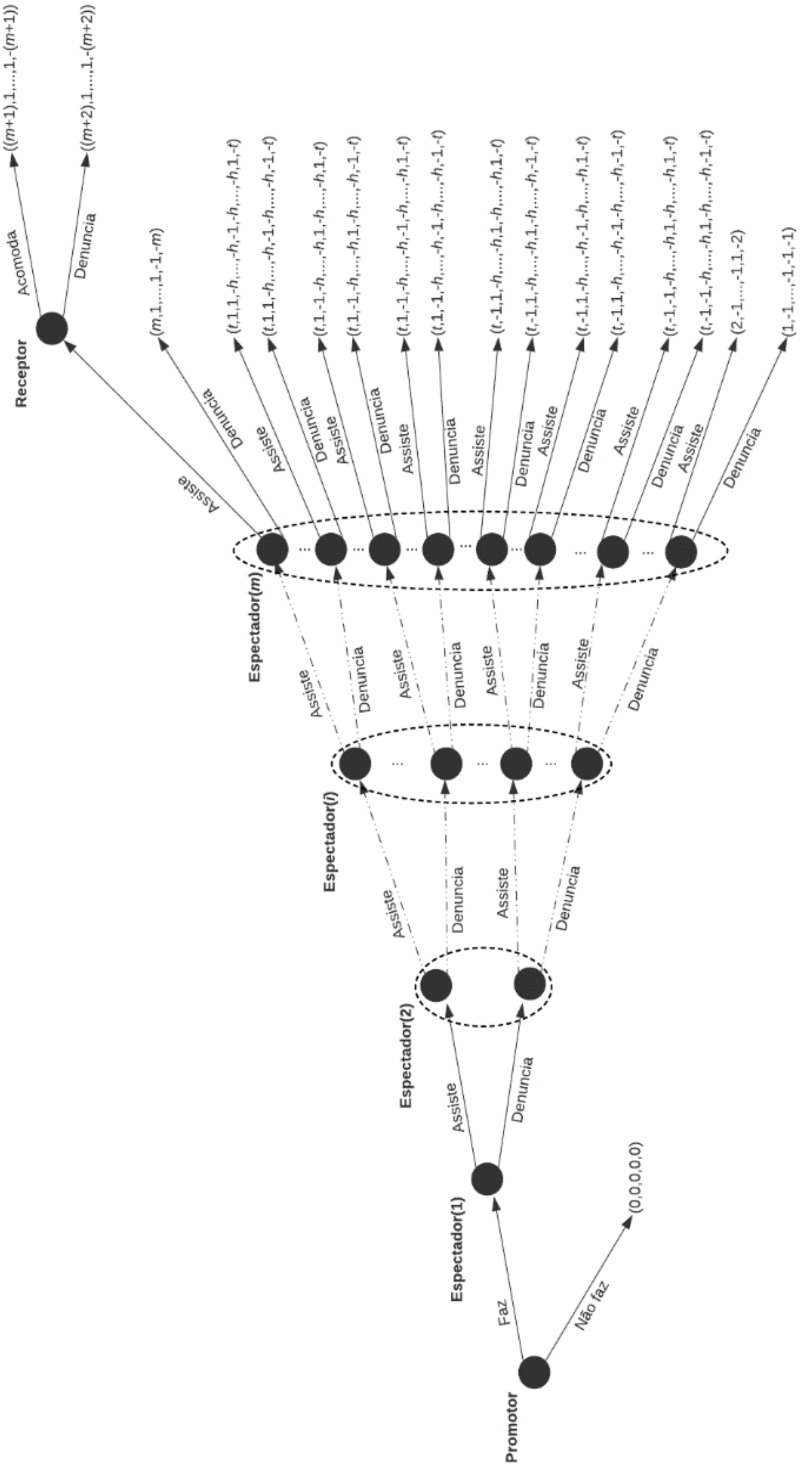

Figura 159: Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores – Representação na forma estendida

Os perfis de estratégias podem ser decompostos para apresentação em forma de tabela, juntamente com seus ganhos respectivos determinados pelas funções utilidades de cada jogador, conforme organização a seguir, onde $k = 1$ ou $k = 2$, $h = 1$ ou $h = -1$, e $t = \{2, 3, ..., (m-1), m\}$.

Perfis de estratégia	**Ganhos Associados**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	(0, …, 0)
$(s_{11}, s_{22}, s_{32}, \ldots, s_{i2}, \ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	(1, -1, ..., -1, -1)
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t, -1, -h, ..., -h, -t)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t, 1, -h, ..., -h, -t)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{(i-1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t, -h, -h, ..., -h, -1, -h, ..., -h, -t)$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{(i-1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t, -h, -h, ..., -h, 1, -h, ..., -h, -t)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{i1}, \ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(m, 1, \ldots, 1, -1, -m)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{i1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$((m+1), 1, \ldots, 1, -(m+1))$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{i1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$((m+2), 1, \ldots, 1, 1, -(m+2))$

Tabela 106: Representação esquemática das recompensas do Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores

O processo de definição da solução mais estável é feito primeiramente com a determinação dos subjogos na forma estendida do jogo modelado, de forma similar ao feito em 4.3.2.2 – Jogo Desatento Simultâneo Duplo e 4.3.3.2 – Jogo Desatento Simultâneo Triplo, conforme figura a seguir.

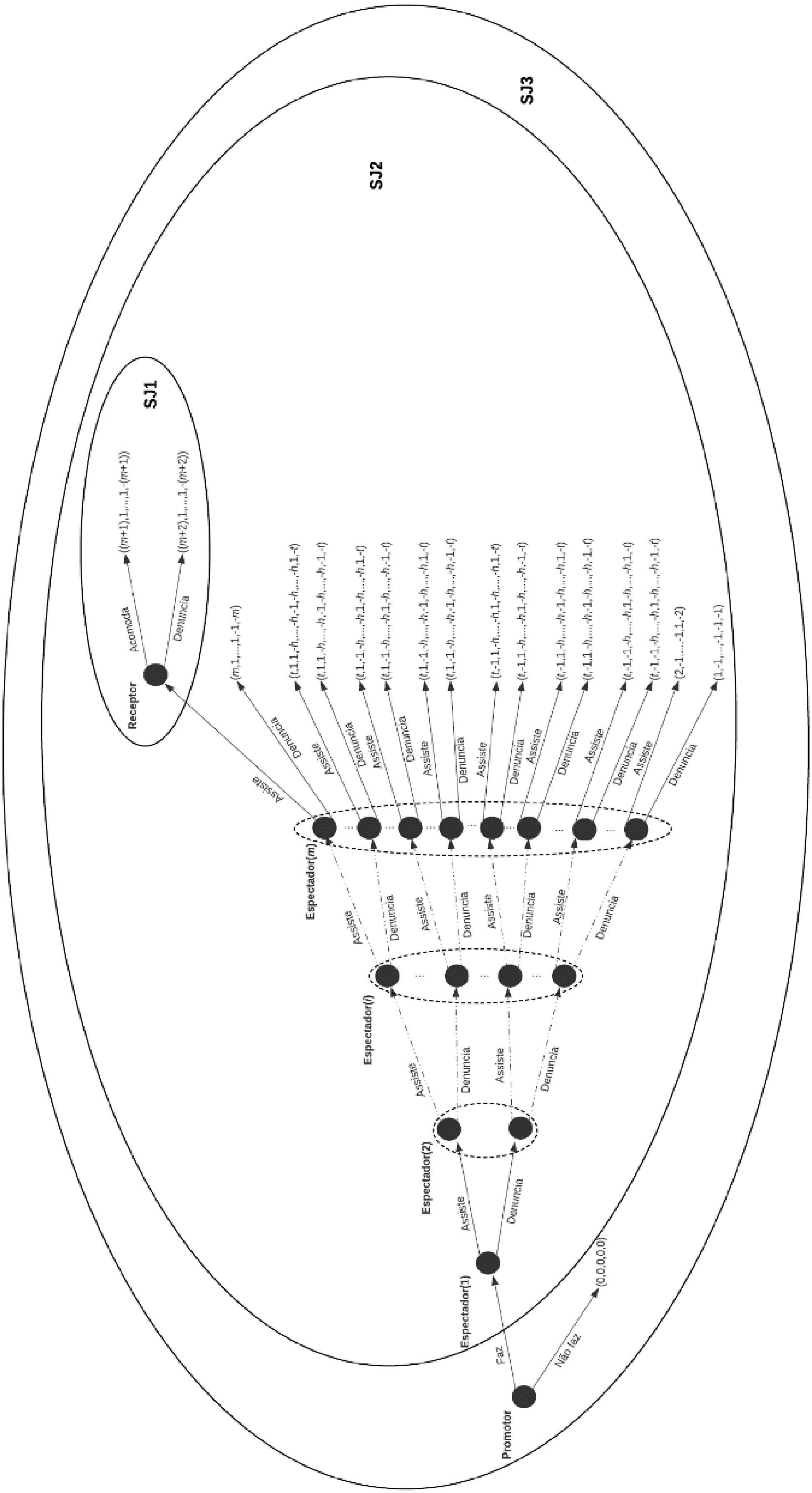

Figura 160: Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores – Partição em subjogos

A eliminação mais estratégias dominadas pelo algoritmo da indução reversa resultará nos resultados descritos em 4.3.2.2 – Jogo Desatento Simultâneo Duplo e 4.3.3.2 – Jogo Desatento Simultâneo Triplo, ou seja, o resultado mais provável é aquele onde o bullying ocorre.

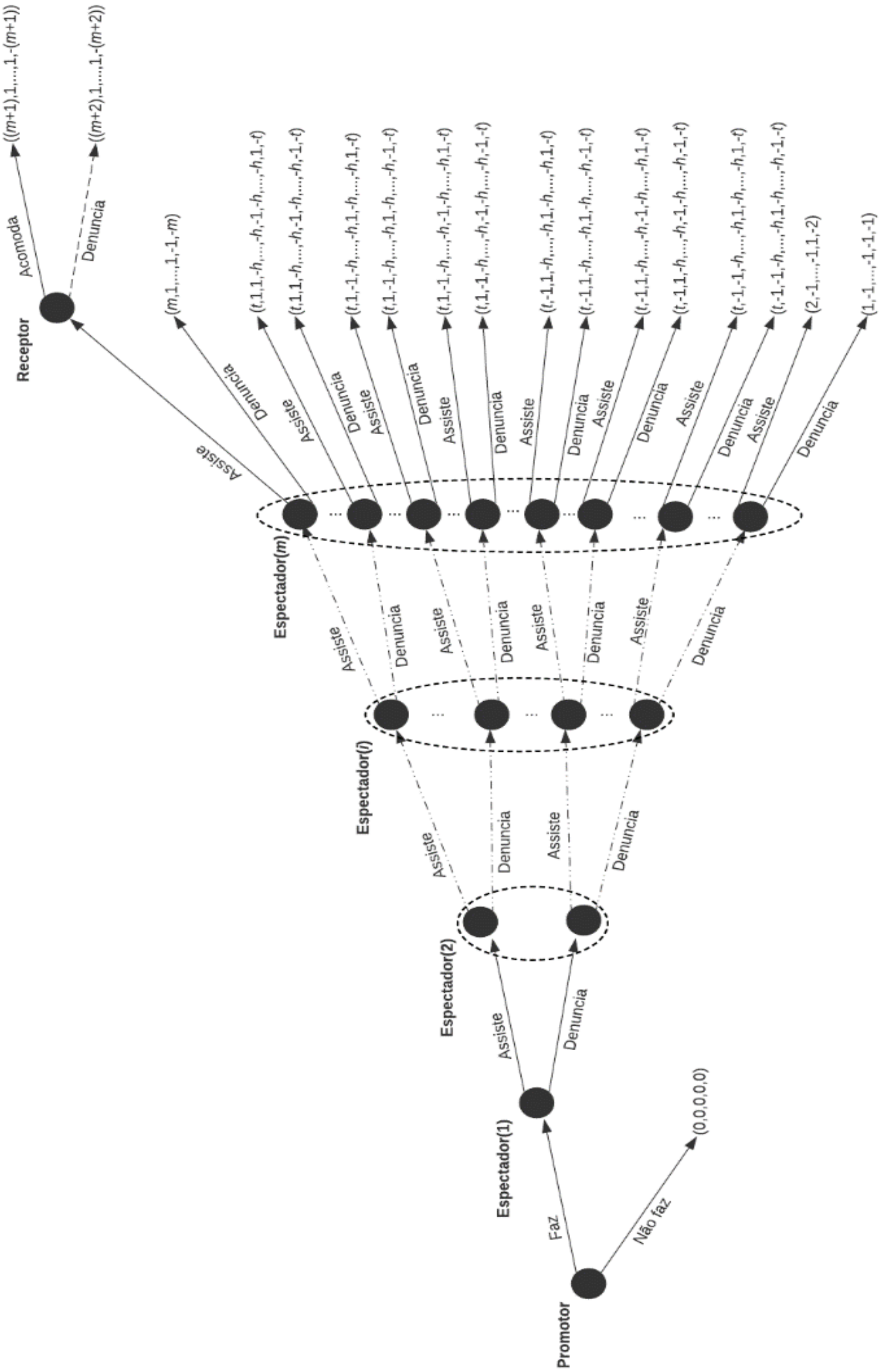

Figura 161: Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores – Primeiro subjogo resolvido

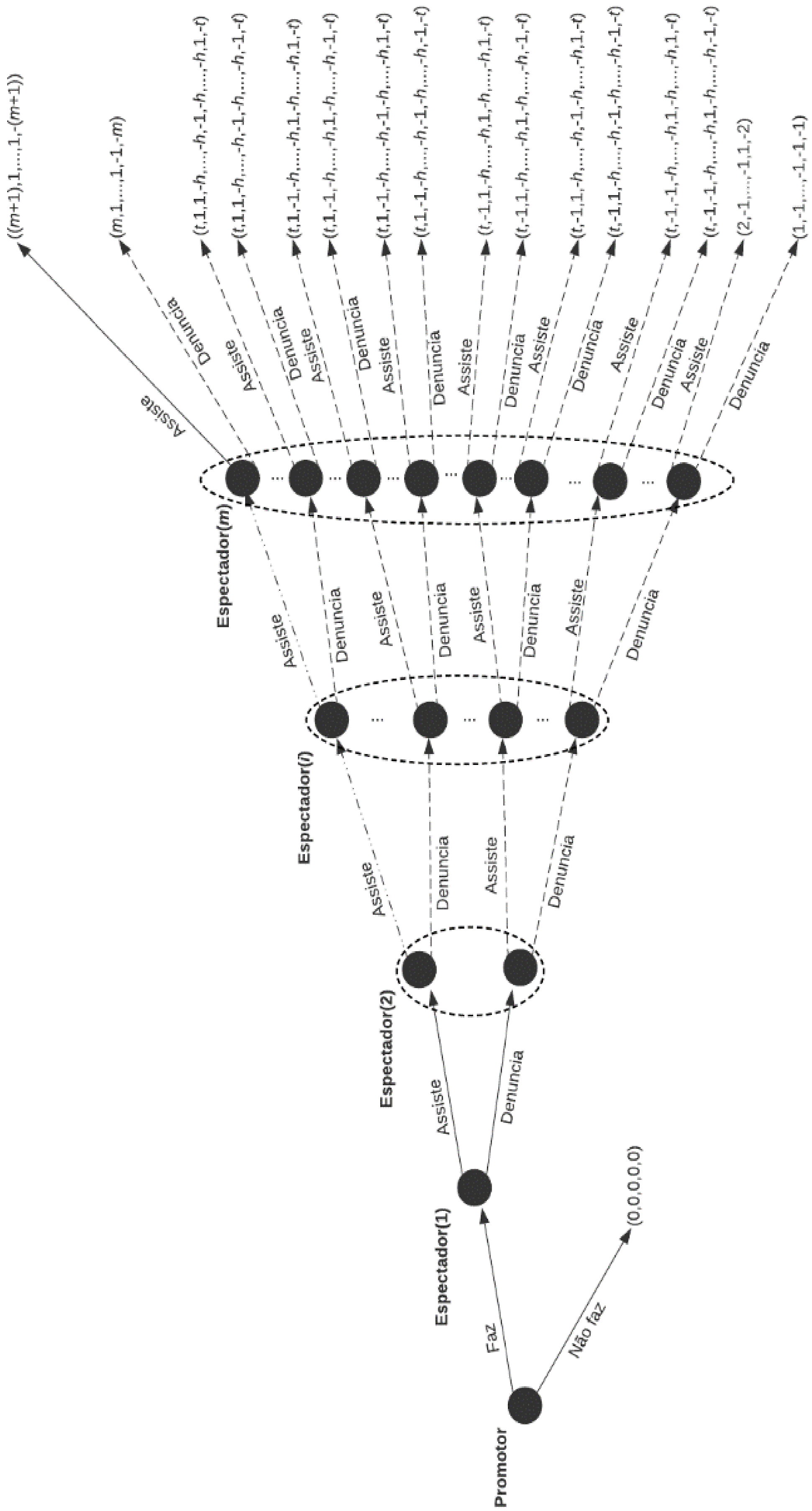

Figura 162: Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores – Segundo subjogo resolvido

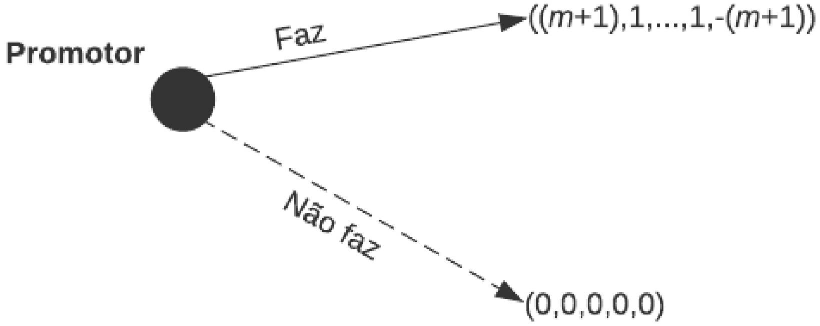

Figura 163: Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores – Terceiro subjogo resolvido

4.3.4.3 Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

Os jogos apresentados em 4.3.4.1 – Jogo Vigilante Simultâneo com *m* Espectadores e 4.3.4.2 – Jogo Desatento Simultâneo com *m* Espectadores são insumos para a modelagem dessa interação, concatenado com as características descritas no cenário Natureza Simples, conforme informações no tópico 4.1.3 – Caracterização de cenários. A representação do jogo na forma estendida encontra-se na figura a seguir.

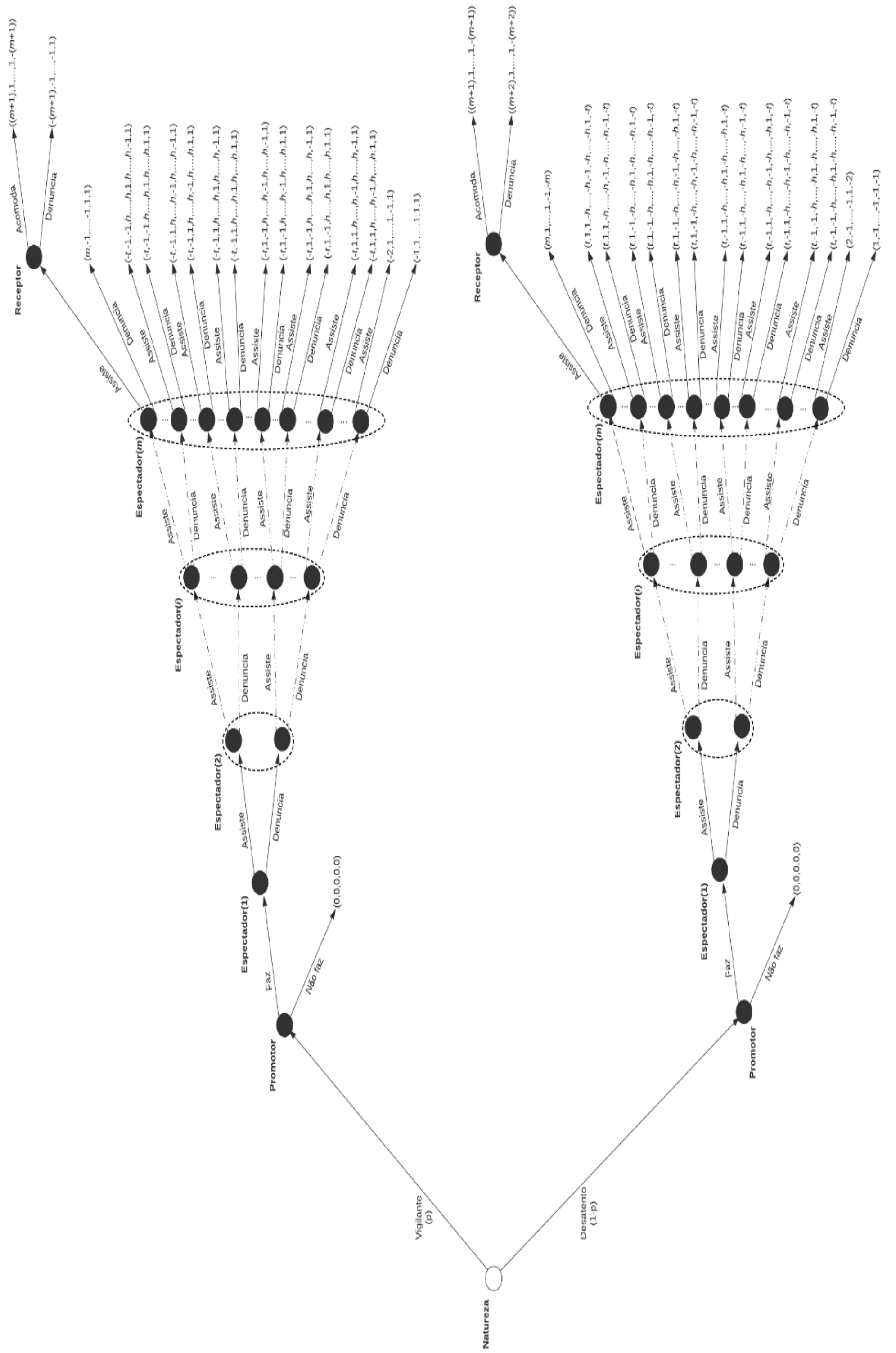

Figura 164: Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores – Representação na forma estendida

Uma vez que existe a introdução de variável *p*, que postula a probabilidade do jogo encontrar-se em uma conjuntura punitiva ou não, a mesma deve ser ponderada nos ganhos dos jogos Vigilante com *m* Espectadores e Desatento com *m*

Espectadores, conforme tabelas a seguir, onde k = 1 ou k = 2, h = 1 ou h = -1, e t = {2, 3, ..., (m-1), m}.

Perfis de estratégia	**Ganhos do Promotor**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-t)\cdot(p)+(t)\cdot(1-p) = t - 2tp$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-t)\cdot(p)+(t)\cdot(1-p) = t - 2tp$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-t)\cdot(p)+(t)\cdot(1-p) = t - 2tp$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-t)\cdot(p)+(t)\cdot(1-p) = t - 2tp$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-m)\cdot(p)+(m)\cdot(1-p) = m - 2mp$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(m+1)\cdot(p)+(m+1)\cdot(1-p) = (m+1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-(m+1))\cdot(p)+(m+2)\cdot(1-p) = (m+2) - (2m+3)p$

Tabela 107: Recompensas Ponderadas do jogador Promotor no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(1)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1-p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1-p) = 2hp - h$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1-p) = 2hp - h$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1-p) = 1 - 2p$

Tabela 108: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(1) no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(2)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$

Tabela 109: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(2) no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(*i*)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$

Tabela 110: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(*i*) no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores, e onde *i* pode assumir qualquer valor maior do que 1 e menor do que *m*

Perfis de estratégia	**Ganhos do Espectador(*m*)**
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1\text{-}p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i\text{-}1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(h)\cdot(p)+(-h)\cdot(1\text{-}p) = 2hp - h$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-1)\cdot(1\text{-}p) = 2p - 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(-1)\cdot(p)+(1)\cdot(1\text{-}p) = 1 - 2p$

Tabela 111: Recompensas Ponderadas do jogador Espectador(*m*) no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

Perfis de estratégia	Ganhos do Receptor
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0)\cdot(p)+(0)\cdot(1-p) = 0$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-t)\cdot(1-p) = (1+t)p - t$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-t)\cdot(1-p) = (1+t)p - t$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-t)\cdot(1-p) = (1+t)p - t$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-t)\cdot(1-p) = (1+t)p - t$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-t)\cdot(1-p) = (1+t)p - t$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1)\cdot(p)+(-m)\cdot(1-p) = (m+1)p - (m)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$(-(m+1))\cdot(p)+(-(m+1))\cdot(1-p) = -(m+1)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$(1)\cdot(p)+(-(m+2))\cdot(1-p) = (m+3)p - (m+2)$

Tabela 112: Recompensas Ponderadas do jogador Receptor no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

Os perfis de estratégias podem ser decompostos para apresentação em forma de tabela, juntamente com seus ganhos respectivos de cada jogador, conforme organização a seguir.

Perfis de estratégia	Ganhos Associados
$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(0, \ldots, 0)$
$(s_{11}, s_{22}, s_{32},\ldots, s_{i2},\ldots, s_{m2}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(1 - 2p, 2p - 1, ..., 2p - 1, (1+t)p - t)$
$(s_{11}, s_{22}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t - 2tp, 2p - 1, 2hp - h, ..., 2hp - h, (1+t)p - t)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{3k},\ldots, s_{ik},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t - 2tp, 1 - 2p, 2hp - h, ..., 2hp - h, (1+t)p - t)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i2}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t - 2tp, 2hp - h, 2hp - h, ..., 2hp - h, 2p - 1, 2hp - h, ..., 2hp - h, (1+t)p - t)$
$(s_{11}, s_{2k}, s_{3k},\ldots, s_{(i-1)k}, s_{i1}, s_{(i+1)k},\ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$	$(t - 2tp, 2hp - h, 2hp - h, ..., 2hp - h, 1 - 2p, 2hp - h, ..., 2hp - h, (1+t)p - t)$
$\vdots$	$\vdots$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{m1}, s_{(m+1)2}, s_{(m+2)k})$	$(m - 2mp, 1 - 2p, ..., 1 - 2p, 2p - 1, (m+1)p - m)$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$	$((m+1), 1, \ldots, 1, -(m+1))$
$(s_{11}, s_{21}, s_{31},\ldots, s_{i1},\ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$	$((m+2) - (2m+3)p, 1 - 2p, ..., 1 - 2p, (m+3)p - (m+2))$

Tabela 113: Representação esquemática das recompensas ponderadas do Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores

A combinação das estratégias dos jogadores e das recompensas ponderadas no Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores em uma árvore de possibilidades gera a representação da interação estratégica na forma estendida, conforme figura a seguir.

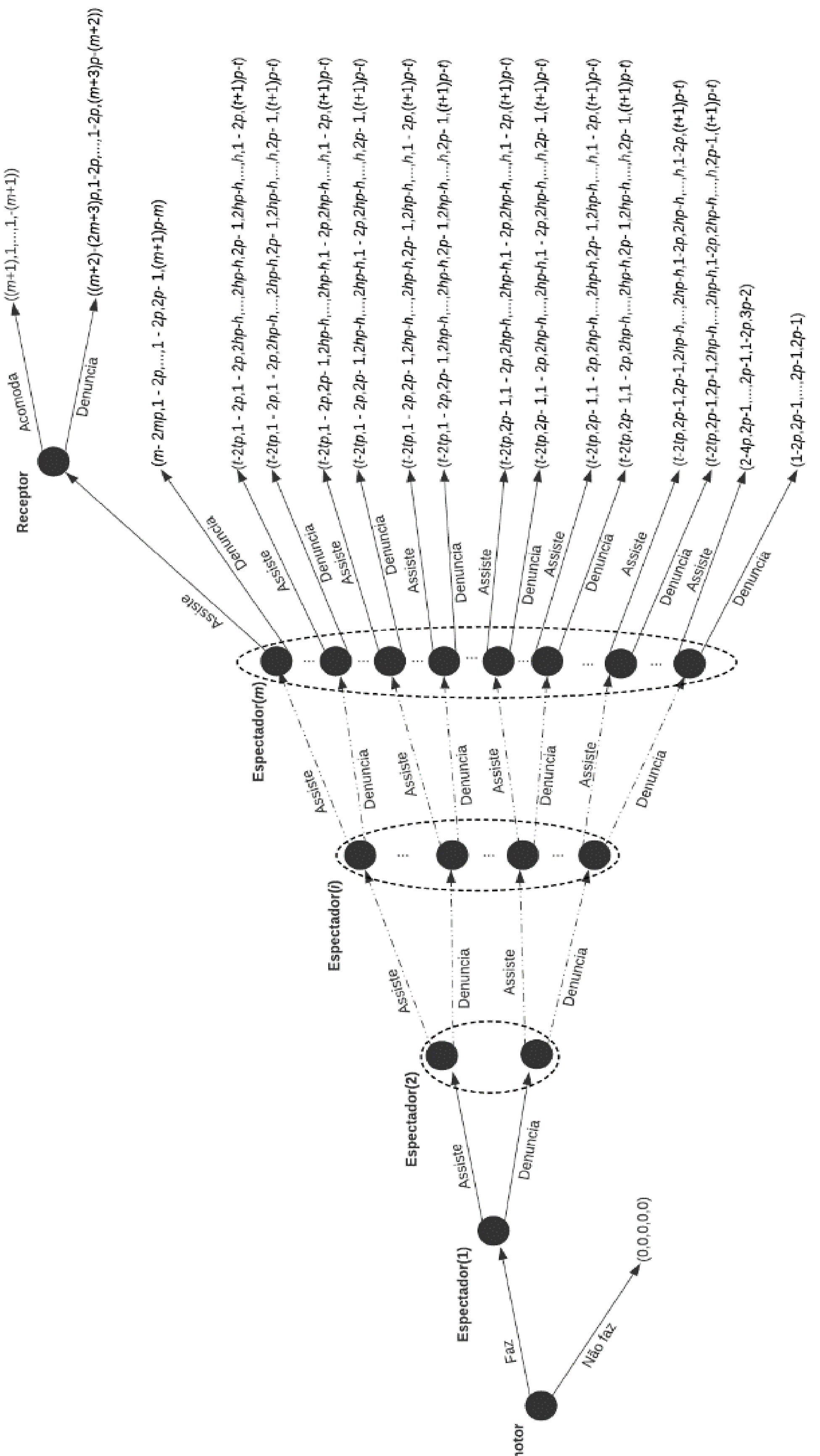

Figura 165: Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores – Representação na forma estendida com recompensas ponderadas

A forma estendida do jogo deve ser particionada em subjogos, possibilitando a aplicação do algoritmo da indução reversa, e em seguida, a verificação da existência de possíveis Equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos. Além disso, a resolução possui os mesmos pressupostos considerados na solução do Jogo das Balas, conforme encontra-se na seção 2.3.4 – Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas.

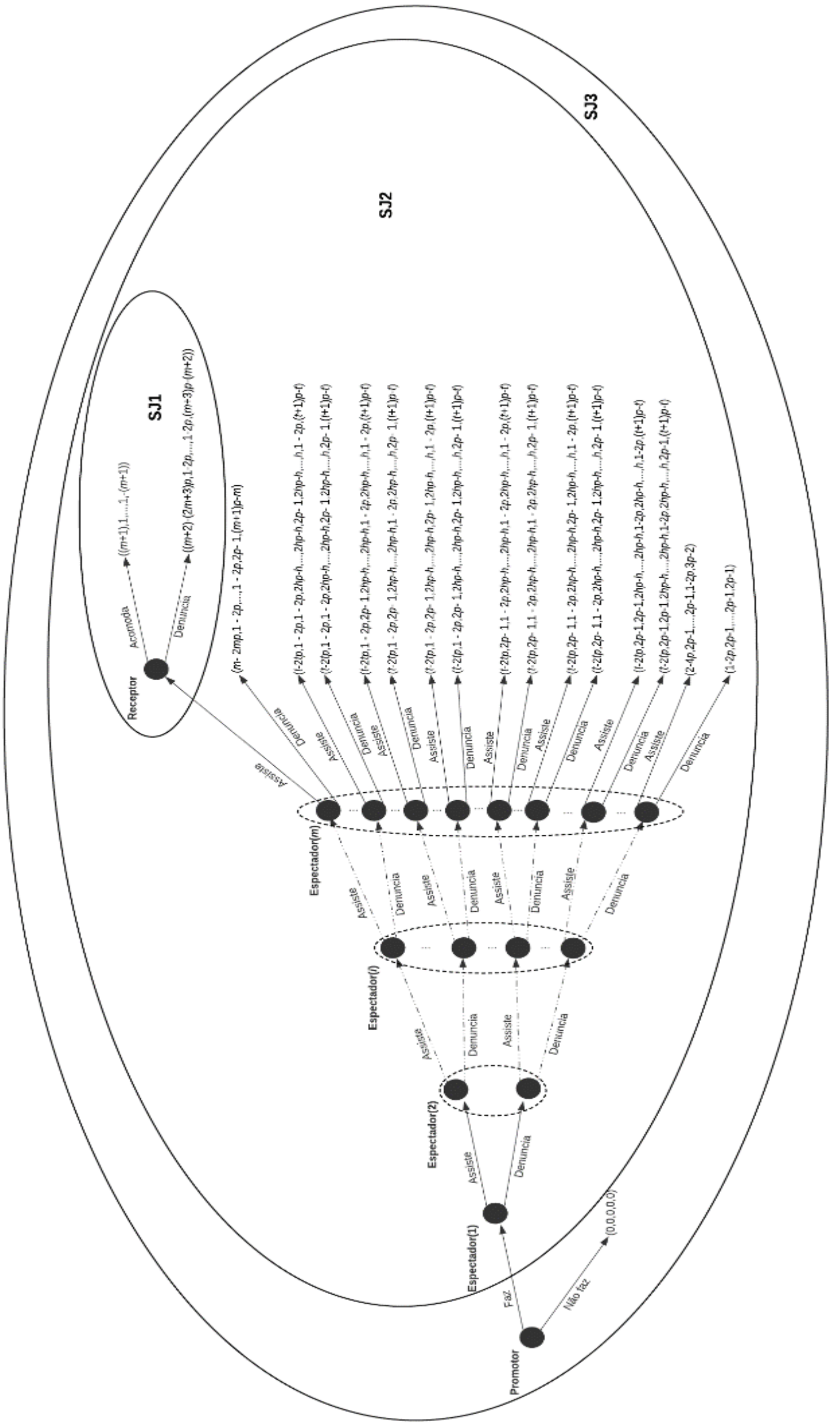

Figura 166: Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores – Partição em subjogos

A análise do primeiro subjogo se dá através da comparação dos ganhos que o Receptor pode receber, dadas as suas possíveis escolhas de comportamento. Uma vez que essas recompensas variam em função do valor de p, devemos proceder uma comparação entre os ganhos do Receptor para valores do p maiores do que zero e menores do que um. Dessa forma, primeiramente obteremos os possíveis valores de p que igualam os ganhos associados as estratégias do Receptor, conforme equação a seguir:

$$-(m+1) \text{ (Acomoda)} = (m+3)p - (m+2) \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p = 1/(m+3) \text{ (Indiferente).}$$

Posteriormente, são analisados os valores de p, onde os ganhos são diferentes entre si, e isso pode ocorrer duas maneiras, conforme inequações a seguir:

$$-(m+1) \text{ (Acomoda)} > (m+3)p - (m+2) \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p < 1/(m+3) \text{ (Acomoda),}$$
$$-(m+1) \text{ (Acomoda)} < (m+3)p - (m+2) \text{ (Denuncia)} \leftrightarrow p > 1/(m+3) \text{ (Denuncia).}$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Receptor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Receptor
Valores de *p*	$p < 1/(m+3)$	Acomoda
	$p = 1/(m+3)$	Indiferente
	$p > 1/(m+3)$	Denuncia

Tabela 114: Representação esquemática das escolhas do Receptor em função do valor de p no primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores

Portanto, o primeiro subjogo possui duas soluções, uma na qual o Receptor escolhe Acomodar quando $p < 1/(m+3)$, e outra na qual o Receptor escolhe Denunciar quando $p > 1/(m+3)$, conforme figuras a seguir.

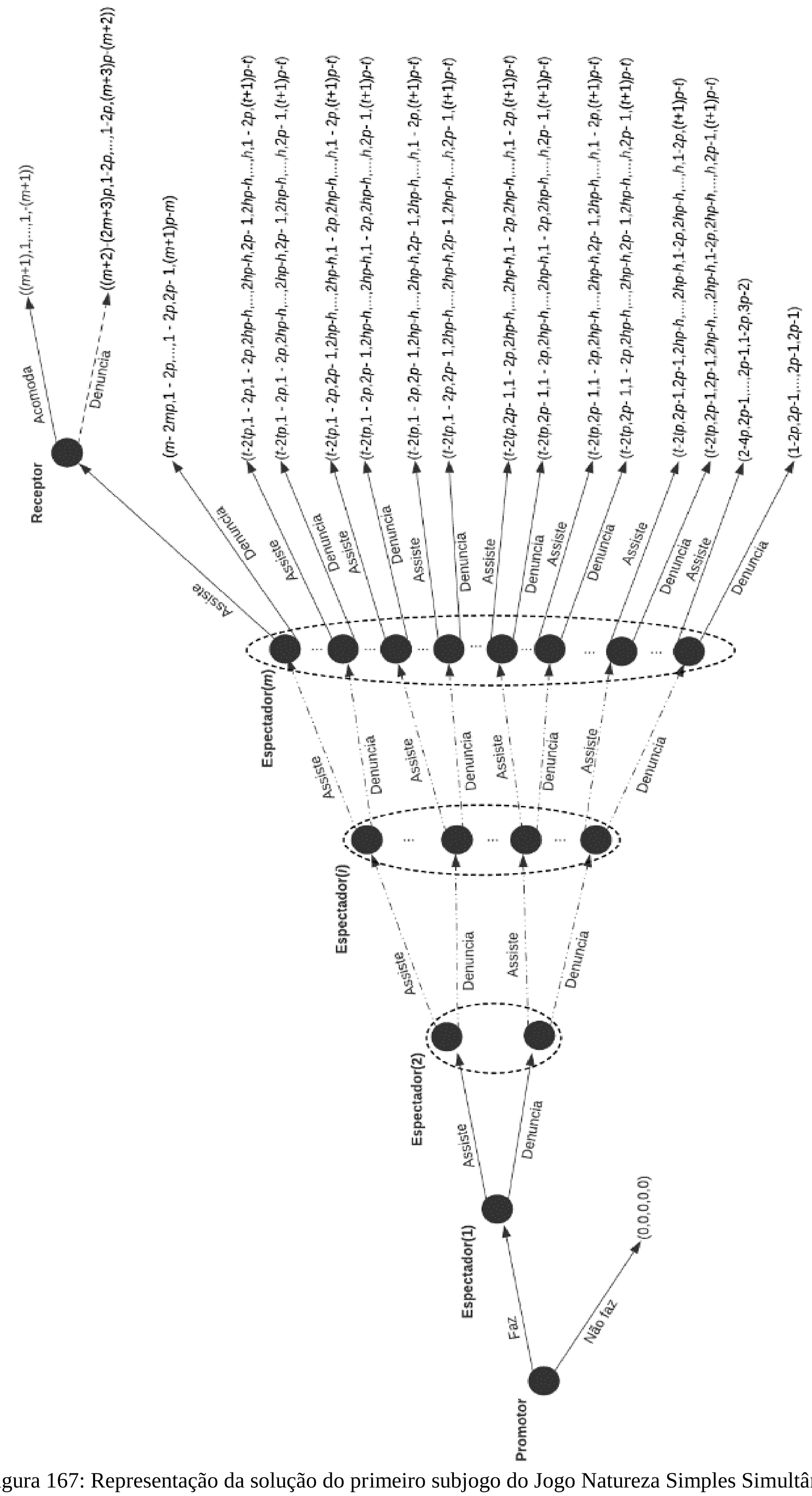

Figura 167: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

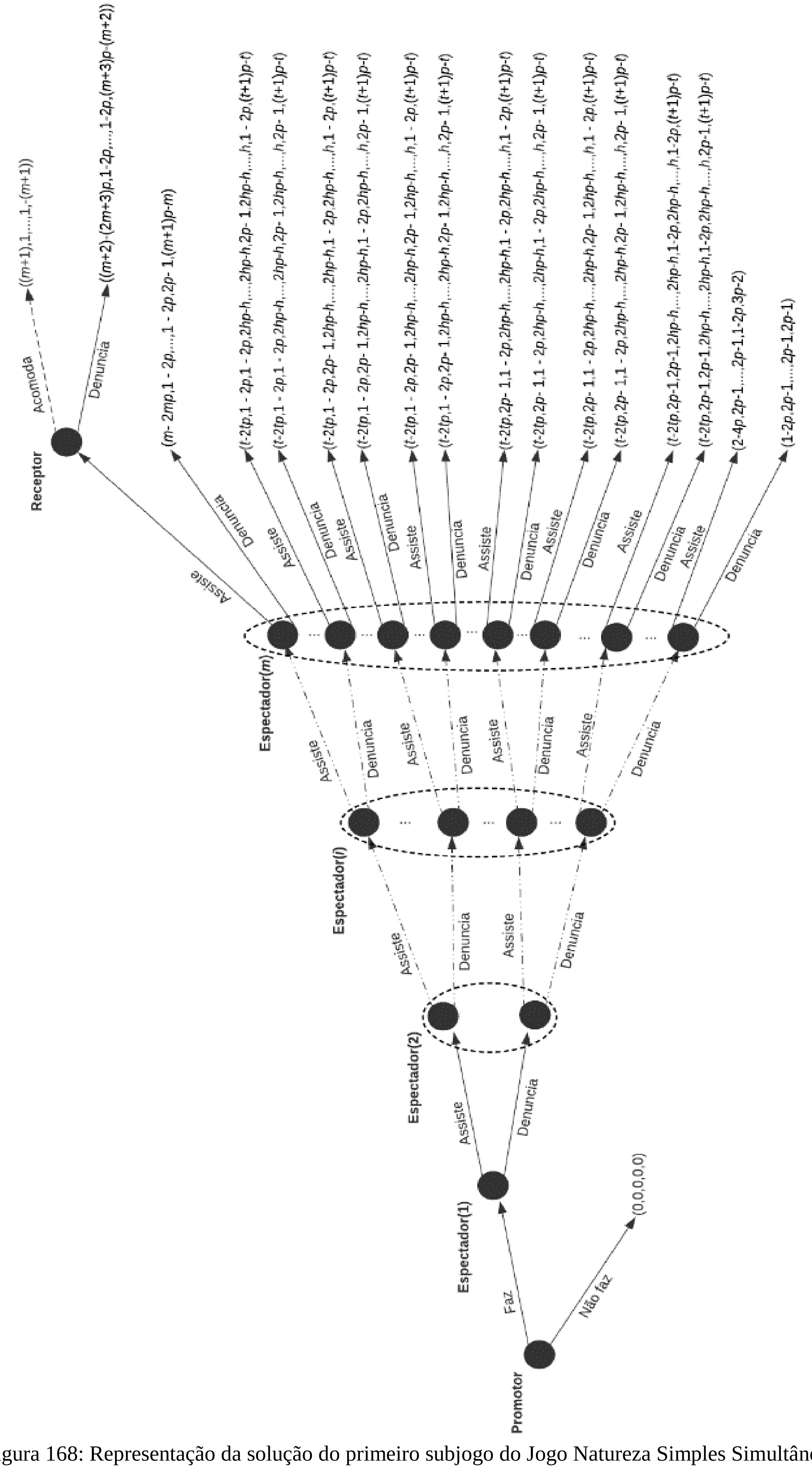

Figura 168: Representação da solução do primeiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores quando $p > 1/(m+3)$

A resolução do segundo subjogo se balizará nos intervalos de variação de p definidos na resolução do primeiro subjogo. Iniciando quando $p < 1/(m+3)$, temos a representação do segundo subjogo na forma estendida, conforme exposto a seguir.

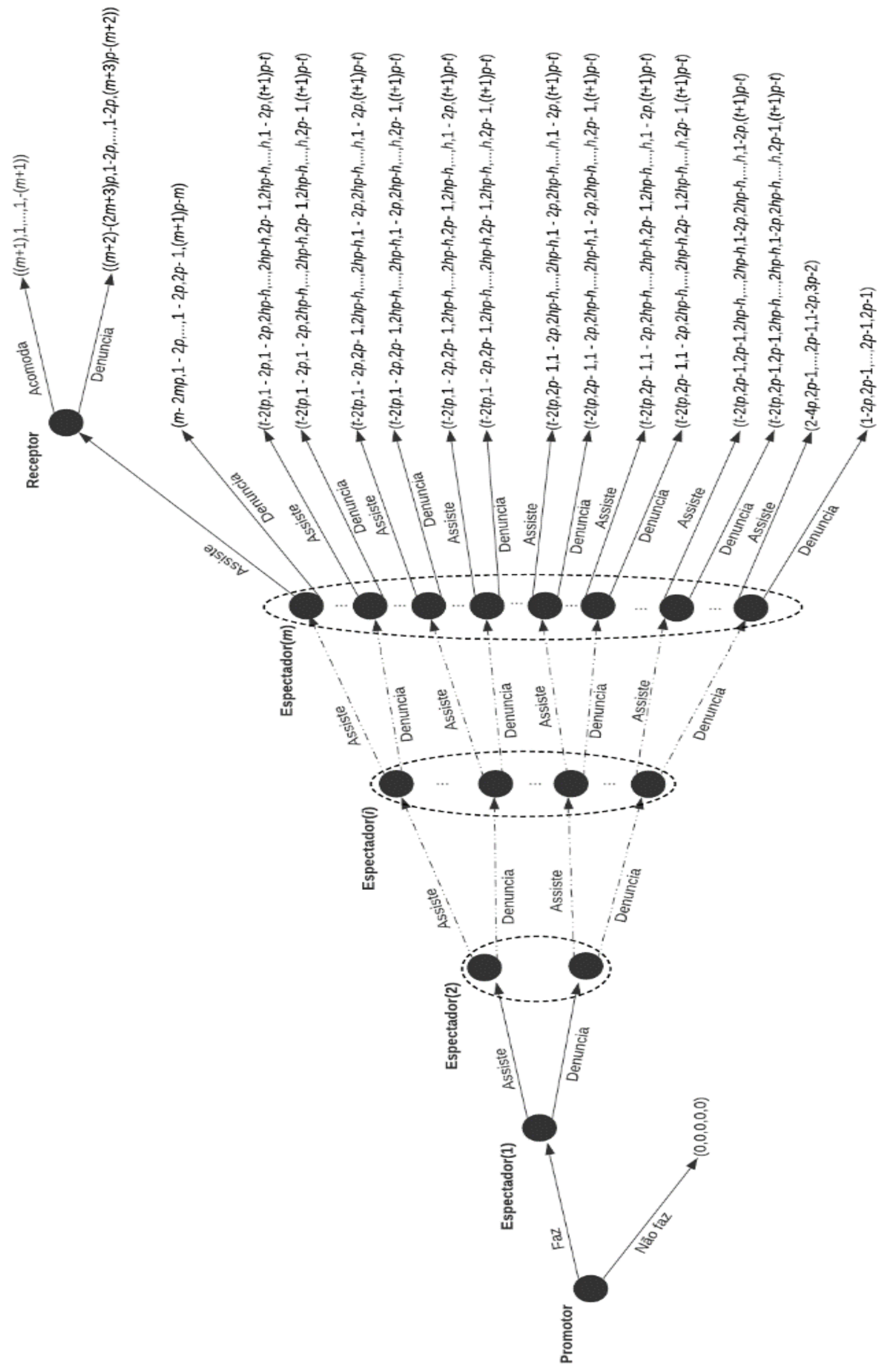

Figura 169: Representação na forma estendida do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

A comparação entre os ganhos dos espectadores leva a conclusão que da estratégia Assiste é estritamente dominante com relação a estratégia Denuncia, uma vez que essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente.

Por outro lado, quando p > 1/(m+3), temos as representações do segundo subjogo nas formas estendida, conforme exposto a seguir.

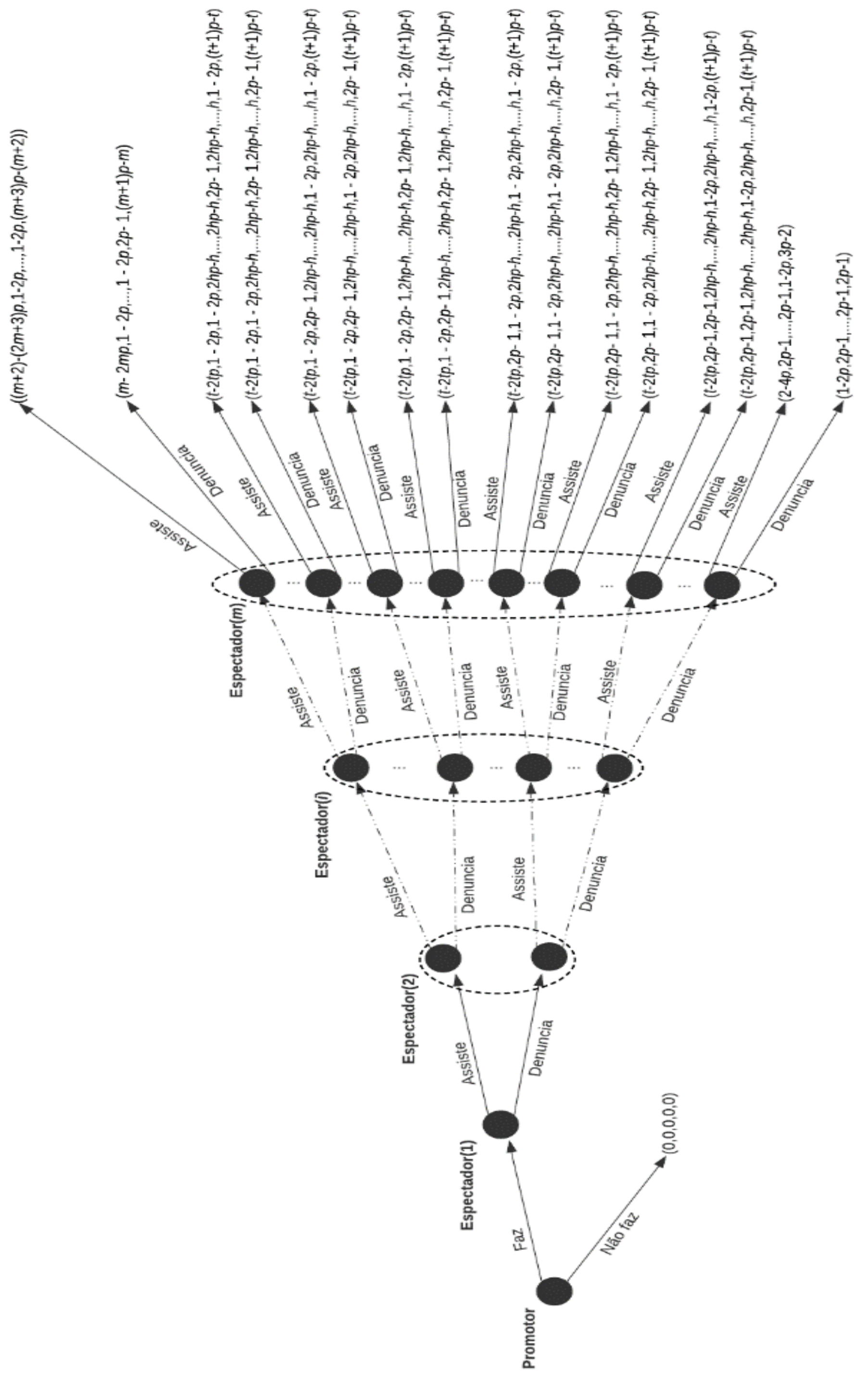

Figura 170: Representação na forma estendida do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores quando p > 1/(m+3)

Analisando as combinações de recompensas em função da variação de p, é possível verificar que o valor $p = 1/2$ faz com que todas as recompensas fiquem iguais, impossibilitando a determinação de um perfil de estratégias que resolveria o subjogo. Consequentemente, esse valor receberá a designação Indiferente e será desconsiderado na resolução do subjogo subsequente, seguido a mesma finalidade descrita na resolução no Jogo das Balas, conforme exposto na seção 2.3.4 – Considerações sobre soluções de jogos com estratégias mistas. Diante disso, a solução do segundo subjogo se dividirá em duas partes: uma considerando valores de p maiores do que $1/(m+3)$ e menores do que 1/2, e outra para valores de p maiores do que 1/2.

Começando em valores de p maiores do que $1/(m+3)$ e menores do que 1/2, tem-se que a estratégia Assiste é estritamente dominante com relação a estratégia Denuncia, uma vez que essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente. Por outro lado, ocorre exatamente quando $p > 1/2$, onde a estratégia Denuncia é estritamente dominante com relação a estratégia Assiste, pois essas decisões geram recompensas iguais a 1 e -1, respectivamente.

Dessa forma, cada valor de p pode ser associado a uma combinação de estratégias dos espectadores que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Combinação de estratégias que maximiza a recompensa do Espectadores
Valores de p	$p < 1/(m+3)$	$(s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{(i\text{-}1)1}, s_{i1}, s_{(i+1)1}, \ldots, s_{(m+1)1})$
	$1/(m+3) < p < 1/2$	$(s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{(i\text{-}1)1}, s_{i1}, s_{(i+1)1}, \ldots, s_{(m+1)1})$
	$p = 1/2$	Indiferente
	$p > 1/2$	$(s_{22}, s_{32}, \ldots, s_{(i\text{-}1)2}, s_{i2}, s_{(i+1)2}, \ldots, s_{(m+1)2})$

Tabela 115: Representação esquemática das combinações de estratégias que maximizam as recompensas dos espectadores em função do valor de p no segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores

Portanto, o segundo subjogo possui três soluções, uma na qual os espectadores escolhem Assiste quando $p < 1/(m+3)$; outra na qual os espectadores escolhem Assiste quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que 1/2; e finalmente, uma na qual os espectadores escolhem Denuncia quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

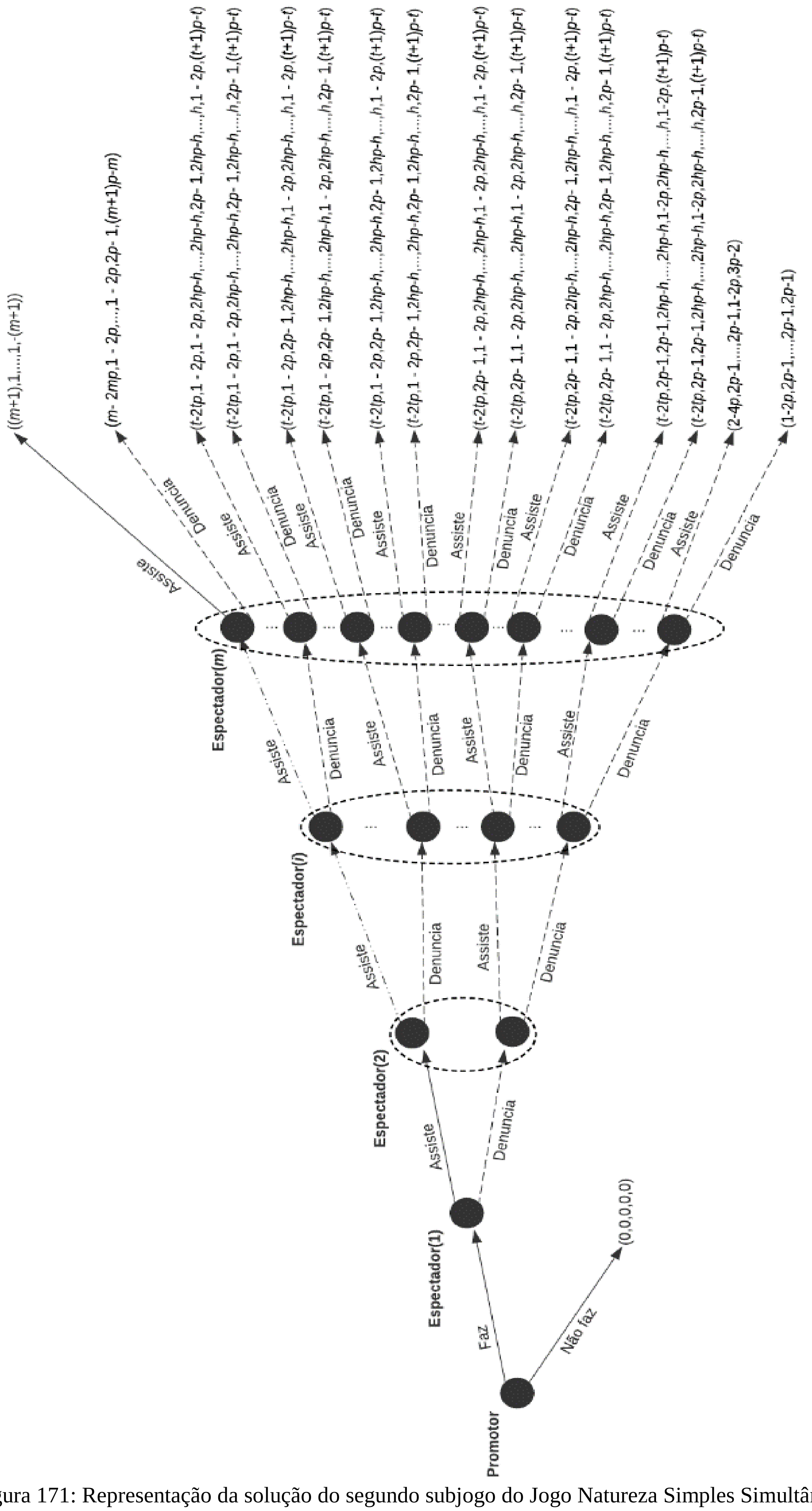

Figura 171: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

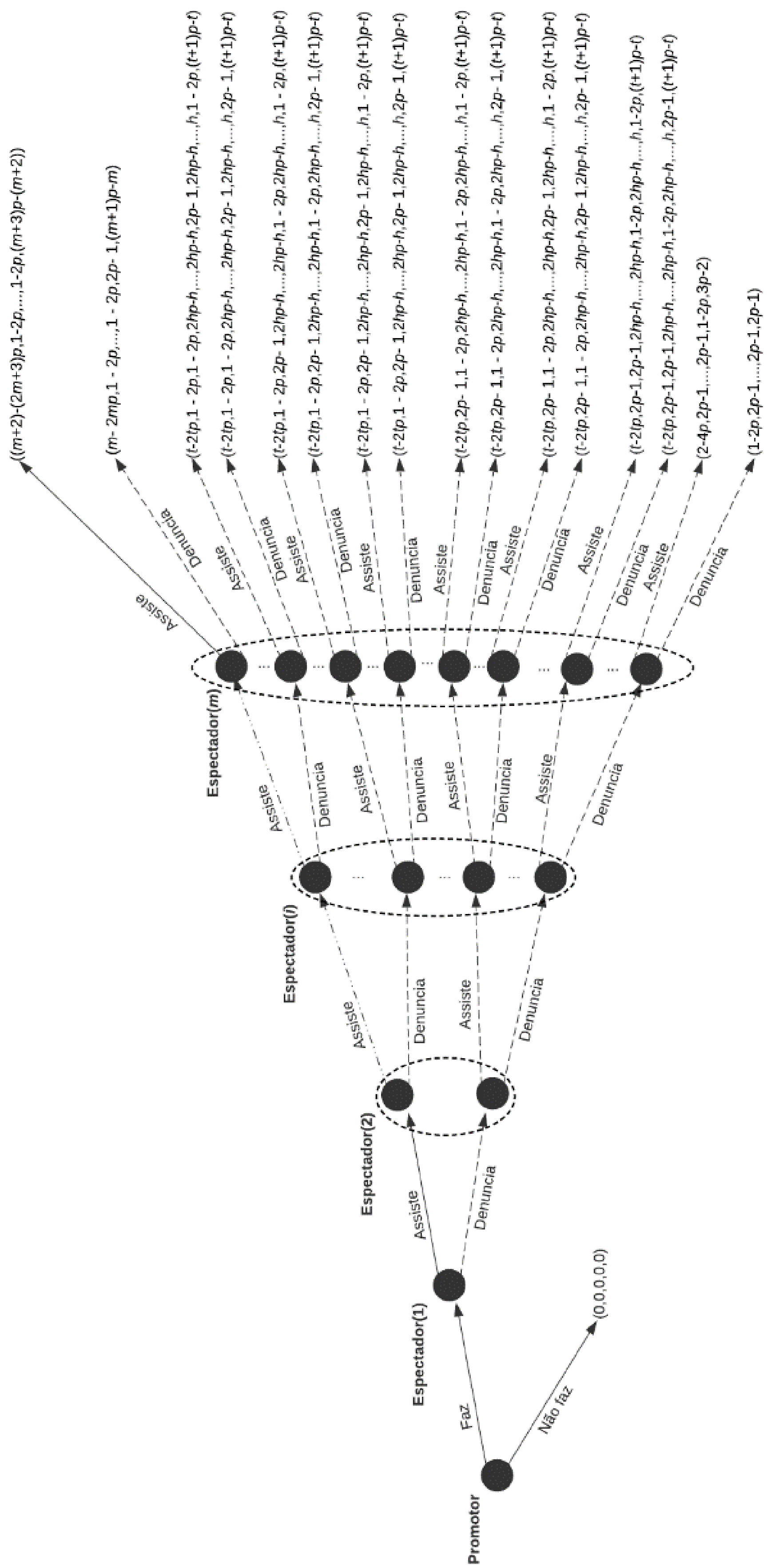

Figura 172: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores quando *p* apresenta qualquer valor maior do que 1/(*m*+3) e menor do que 1/2

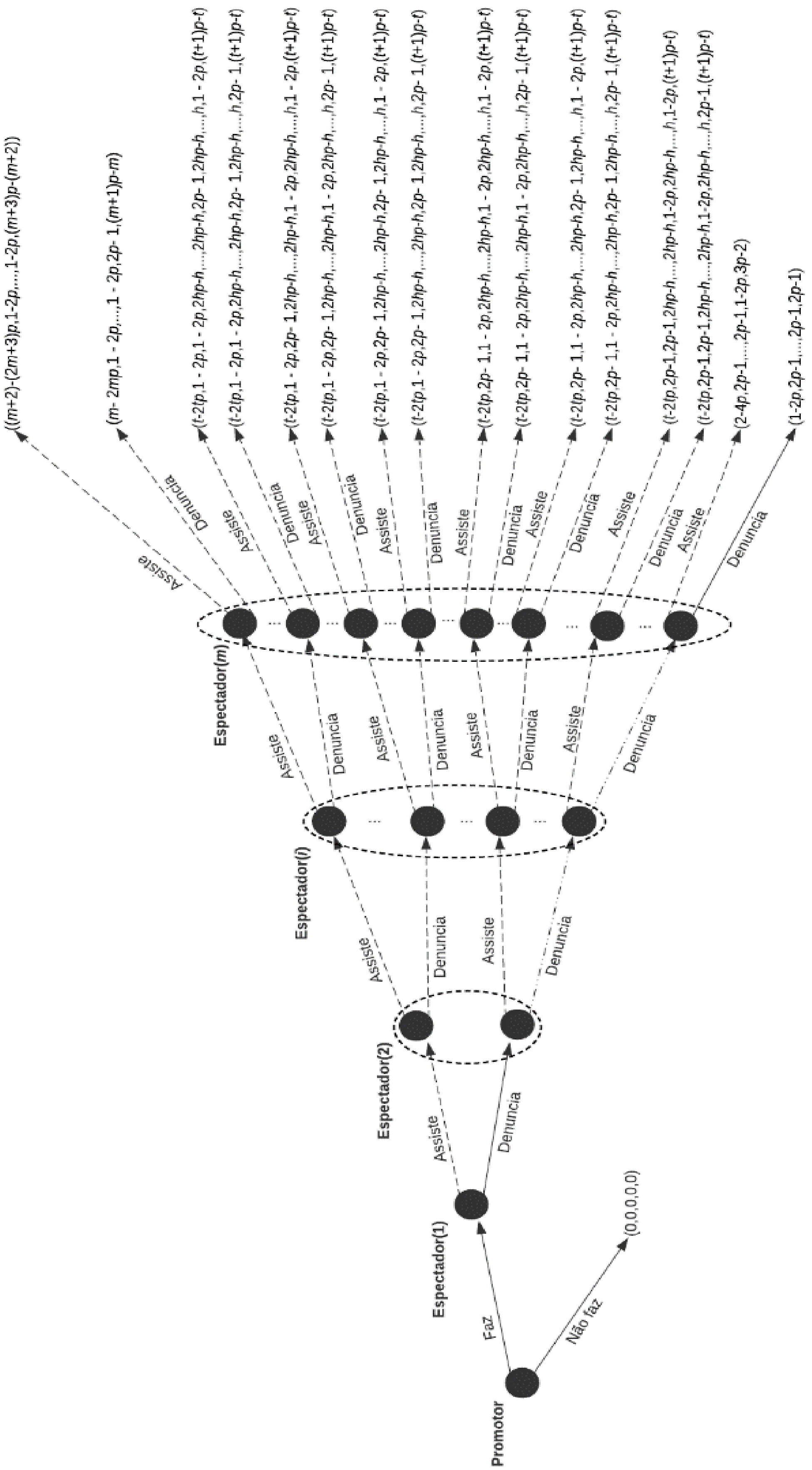

Figura 173: Representação da solução do segundo subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com *m* Espectadores quando $p > 1/2$

Finalmente, a análise da resolução do terceiro subjogo seguirá nos mesmos intervalos de variação de p definidos nos subjogos anteriores. Iniciando quando $p < 1/(m+3)$, não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p < 1/(m+3) \Leftrightarrow 0 \text{ (Não Faz)} < (m+1) \text{ (Faz)}.$$

Em segundo cenário, onde $1/(m+3) < p < 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$1/(m+3) < p < 1/2 \Leftrightarrow (m+2) - (2m+3)p \text{ (Faz)} > 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Finalmente, onde $p > 1/2$, também não existe nenhum valor de p que iguala os ganhos do Promotor, conforme relação a seguir:

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - 2p \text{ (Faz)} < 0 \text{ (Não Faz)}.$$

Logo, cada valor de p pode ser associado a uma decisão do Promotor que gerará a melhor recompensa possível, conforme tabela a seguir.

		Escolha que maximiza a recompensa do Promotor
Valores de *p*	$p < 1/(m+3)$	Faz
	$1/(m+3) < p < 1/2$	Faz
	$p > 1/2$	Não Faz

Tabela 116: Representação esquemática das escolhas do Promotor em função do valor de p no terceiro do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores

Portanto, o último subjogo possui três soluções, uma na qual o Promotor escolhe Faz quando $p < 1/(m+3)$; outra na qual o Promotor escolhe Faz quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que $1/2$; e finalmente, uma na qual o Promotor escolhe Não Faz quando $p > 1/2$. As resoluções implicam na exclusão das escolhas que não maximizam os ganhos, conforme figuras a seguir.

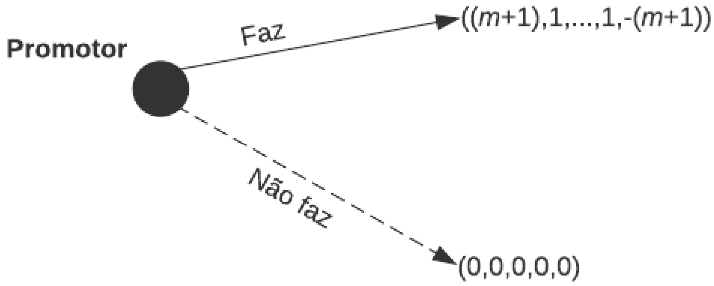

Figura 174: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores quando $p < 1/(m+3)$

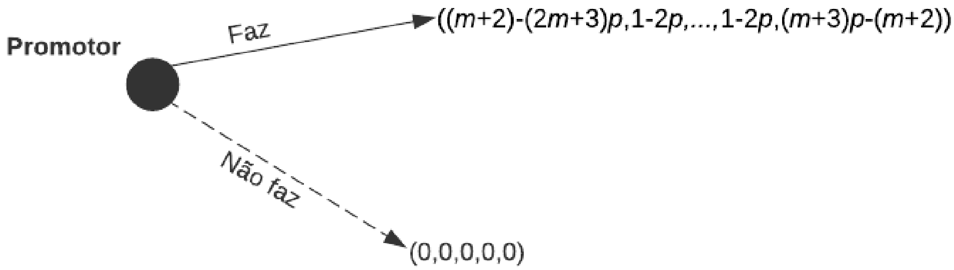

Figura 175: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores quando p apresenta qualquer valor maior do que $1/(m+3)$ e menor do que $1/2$

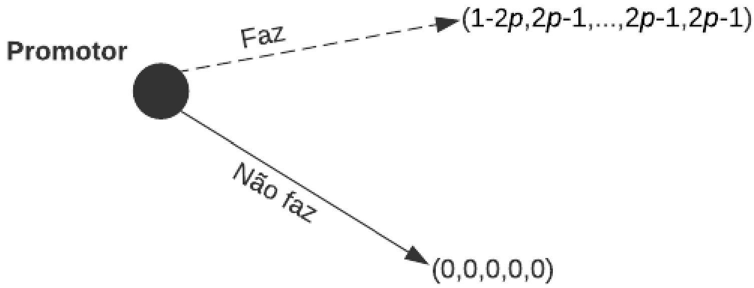

Figura 176: Representação da solução do terceiro subjogo do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores quando $p > 1/2$

A reunião dos resultados da aplicação do algoritmo da indução reversa em uma tabela permite uma visualização alternativa dos perfis de estratégia que resolvem o Jogo Natureza Simples com m Espectadores nos diferentes valores de p.

		Perfis de estratégia que solucionam os diferentes cenários
Valores de *p*	$0 \leq p < 1/(m+3)$	$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{(i-1)1}, s_{i1}, s_{(i+1)1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)1})$
	$1/(m+3) < p < 1/2$	$(s_{11}, s_{21}, s_{31}, \ldots, s_{(i-1)1}, s_{i1}, s_{(i+1)1}, \ldots, s_{(m+1)1}, s_{(m+2)2})$
	$1/2 < p \leq 1$	$(s_{12}, s_{2k}, s_{3k}, \ldots, s_{ik}, \ldots, s_{(m+1)k}, s_{(m+2)k})$

Tabela 117: Representação esquemática da resolução do Jogo Natureza Simples Simultâneo com m Espectadores

Os resultados podem ser interpretados da seguinte maneira: o ambiente não precisa ser estritamente vigilante para coibir atos de violência escolar, uma vez que a expectativa maior de punição (valores de p maiores do que 1/2) já é suficiente para desestimular o promotor. Outra observação importante é que um maior número de espectadores na interação aumenta a chance do receptor denunciar o bullying, caso o mesmo ocorra, permitindo que as autoridades competentes trabalhem para evitar futuras infrações.

5
Comentários sobre a aplicação da Teoria dos Jogos e dos jogos modelados com atos de bullying no contexto escolar

Fazer escolhas conscientes sobre os melhores jeitos de agir é uma atividade corriqueira para qualquer indivíduo, especialmente em ambientes onde os comportamentos de outros é um fator que deve ser levado em consideração. Esse fato invariavelmente aproxima a aplicação dos conhecimentos da Teoria dos Jogos de públicos leigos, e até mesmo de crianças, uma vez que é possível modelar uma infinidade de situações, mesmo algumas mais corriqueiras e cotidianas. Qualquer adulto que conhece jogos como o xadrez e o pôquer reconhece facilmente que suas decisões durante as partidas afetam o andamento posterior, e os comportamentos dos outros jogadores interagem com o dele, de formas variadas dependendo do nível de habilidade e da sorte, dentre outros fatores possíveis. Crianças também tem noção dessa interação mútua que os comportamentos têm em determinadas situações, ainda que em nível intuitivo. Assim, é razoável afirmar que a área do saber matemático Teoria dos Jogos possui não somente uma dimensão teórica e formalmente estruturada, mas também pode ter aplicações práticas e de fácil entendimento, sendo que alguns jogos podem ser facilmente reproduzidos em qualquer ambiente.

No contexto escolar, um primeiro contato pode se dar através de três exemplos já expostos neste trabalho, uma vez que todos eles são de fácil entendimento e aplicação, sendo o primeiro é o exemplo 1 da seção 2.1.5 (Jogo das Moedas); o segundo é o exemplo 1 da seção 2.2.3 (Jogo das Balas). E finalmente, o exemplo 1 da seção 2.3.2 (Jogo da Divisão). Especialmente o último é muito ilustrativo do impacto que a cooperação recíproca provoca no resultado das interações de comportamentos escolhidos, pois dependendo das personalidades dos indivíduos envolvidos e de outros fatores, os jogadores podem combinar de maneira proposital suas escolhas, possivelmente gerando resultados diferentes dos apresentados com a presunção de não-cooperação, conforme resolução do exemplo na seção 2.3.2.

Com relação aos jogos propostos para modelar atos de violência escolar e bullying, obviamente não é eticamente adequada qualquer tentativa de aplicação em ambiente, pelo evidente caráter abusivo dos atos que se encaixam nessas categorias. De toda maneira, uma exposição explicativa de um modelo do cenário Vigilante, por exemplo, devidamente concatenado com uma manifestação clara das autoridades escolares de que tipo de atividade violenta produzirá consequências e punições, pode desencorajar alguns alunos de praticarem comportamentos agressivos no futuro.

Finalmente, cabe ressaltar que diversas aplicações no campo da Teoria dos Jogos possuem interseção com outras áreas do conhecimento que constam no currículo escolar, tais como Biologia, Geografia e Filosofia, por exemplo.

6
Considerações Finais

Tendo em vista que este trabalho teve a intenção de se fazer compreensível em sua totalidade para todos os leitores possíveis, ou seja, sem contar com a pretensão de um conhecimento prévio significativo, a estruturação do mesmo teve a pretensão de fornecer, em um primeiro momento, um repertório teórico e formal em Teoria dos Jogos para facilitar a apreensão dos modelos que seriam apresentados em um momento posterior, tendo sempre o cuidado da apresentar exemplos, a fim de ressaltar a aplicabilidade prática dos jogos, nas diversas áreas e situações onde eles ocorrem.

Na sequência, a problemática da violência escolar e do bullying foi delineada, com foco na exposição das estatísticas produzidas por diferentes organismos internacionais. A questão foi abordada por diversos ângulos, contando com aspectos como abrangência regional de ocorrência, a descrição de algumas das causas do comportamento agressivo, como e com que frequência os atos variam com idade e sexo, e como isso influencia negativamente os comportamentos das vítimas em fases posteriores de suas vidas.

A exposição dos jogos modelados com atos de violência escolar apresentou os objetivos específicos deste trabalho, que foram contemplados na determinação das soluções mais prováveis nos diversos cenários expostos, contando com o princípio da não-cooperação dos jogadores nas interações. Em linhas gerais, temos que a propensão, prevista pelos modelos expostos, da ocorrência de atos de bullying está intimamente ligada a percepção que os indivíduos possuem sobre a tendência do ambiente, ou seja, quanto mais claro for a perspectiva de punição, menos a violência escolar será estimulada.

Finalmente, cabe enfatizar que a erradicação da violência escolar passa pela ação coordenada e interligada de diversos atores, com a adoção de diversas práticas, das quais destacam-se: a presença de uma legislação que iniba efetivamente possíveis atos, puna os agressores, e proteja as vítimas; treinamento de professores e autoridades escolares, capacitando-os para um enfrentamento adequado da questão; promoção e fomento de canais para que vítimas se sintam seguras e confiantes para procurar ajuda e denunciar; promoção de campanhas de conscientização para priorizar um convívio saudável entre os alunos, especialmente quando existem grupos mais vulneráveis, tais como imigrantes; dentre outros exemplos. Levando-se estes pontos em consideração, tem-se que este trabalho não teve como pretensão a apresentação de uma solução completa que tivesse a ambição de resolver o problema da violência no ambiente escolar, e o bullying em particular, mas apenas de se constituir com um subsídio para o tratamento da questão, ampliando a discussão da Teoria dos Jogos para outras áreas do conhecimento.

7
Referências bibliográficas

1. BORTOLOSSI, H.; GARBUGIO, G.; SARTINI, B. Uma introdução à Teoria Econômica dos Jogos. IMPA, 2017.
2. FIANI, R. Teoria dos Jogos, 4ª edição. Elsevier, 2015.
3. BONANNO, R. Game Theory. Second Edition, 2018. Disponível em http://faculty.econ.ucdavis.edu/faculty/bonanno/PDF/GT_book.pdf. Acessado em 24/02/2020.
4. WATSON, J. Strategy: An Introduction to Game Theory, Third Edition. W. W. Norton & Company, 2013.
5. OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. Strategy: A Course in Game Theory,
6. DIXIT, A. Restoring Fun to Game Theory, Journal of Economic Education, Vol. 36, p. 205-219, 2015.
7. OLIVEIRA, D. Teoria econômica dos jogos e o ensino médio. Dissertação de Mestrado. UFG, 2017. Disponível em https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/7146. Acessado em 24/02/2020.
8. ISADA, Y.; IGAKI, N.; SHIBATA, A. A Game-Theoretic Model for Bystanders' Behavior in Classes with Bullying, Open Journal of Social Sciences, vol. 3, pp. 97-102, 2015. Disponível em http://dx.doi.org/10.4236/jss.2015. Acessado em 24/02/2020.
9. PACUIT, E.; ROY, O. Epistemic Foundations of Game Theory, The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/epistemic-game/. Acessado em 24/02/2020.
10. ROSS, D. Game Theory, The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/game-theory/. Acessado em 24/02/2020.
11. UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION (UNESCO). School Violence and Bullying: Global Status Report, 2017. Disponível em

https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246970. Acessado em 24/02/2020.

12. UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION (UNESCO). Behind the numbers: Ending school violence and bullying, 2019. Disponível em https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000366483. Acessado em 24/02/2020.
13. UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION (UNESCO). School violence and bullying:Global status and trends,drivers and consequences, 2018. Disponível em http://www.infocoponline.es/pdf/BULLYING.pdf. Acessado em 24/02/2020.
14. BRASIL. Lei n. 13.185 de 2015. Institui o Programa de Combate à Intimidação Sistemática (Bullying). Diário Oficial da União, Brasília, 9 novembro 2015.
15. LOPES NETO, A. A. Bullying: comportamento agressivo entre estudantes. J. Pediatr. (Rio J.), Porto Alegre, v. 81, n. 5, supl. p. s164-s172, 2005. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0021-75572005000700006&lng=en&nrm=iso. Acessado em 24/02/2020.
16. CHESTER, L. K.; CALLAGHAN, M.; COSMA, A.; DONNELLY, P.; CRAIG, W.; WALSH, S.; MOLCHO, M.; Cross-national time trends in bullying victimization in 33 countries among children aged 11, 13 and 15 from 2002 to 2010, European Journal of Public Health, vol. 25, p. 61–64, 2015. Disponível em https://academic.oup.com/eurpub/article/25/suppl_2/61/590463. Acessado em 24/02/2020.
17. Thornberg, R.; Tenenbaum L.; Varjas K.; Meyers J.; Jungert T.; Vanegas G. Bystander motivation in bullying incidents: to intervene or not to intervene? West J Emerg Med, p. 247-52, 2012. Disponível em https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3415829/. Acessado em 24/02/2020.
18. WORLD HEALTH ORGANIZATION (WHO). BULLYING AND PHYSICAL FIGHTS AMONG ADOLESCENTS, 2016. Disponível em http://www.euro.who.int/__data/assets/pdf_file/0005/303485/HBSC-No.7_factsheet_Bullying.pdf?ua=1. Acessado em 24/02/2020.

19. WORLD HEALTH ORGANIZATION (WHO). Growing up unequal:gender and socioeconomic differences in young people's health and well-being, 2016. Disponível em http://www.euro.who.int/__data/assets/pdf_file/0003/303438/HSBC-No.7-Growing-up-unequal-Full-Report.pdf?ua=1. Acessado em 24/02/2020.
20. MITSOPOULOU, E.; GIOVAZALIAS, T. Personality traits, empathy and bullying behavior: A meta-analytic approach, Aggression and Violent Behavior, vol. 21, pp. 61-72, Elsevier, 2015.
21. SALMIVALLI, C. Personality traits, empathy and bullying behavior: A meta-analytic approach, Aggression and Violent Behavior, vol. 15, pp. 112-120, Elsevier, 2010.
22. SALMIVALLI, C. Participant role approach to school bullying: implications for interventions, vol. 22, pp. 453-459, Elsevier, 2010.
23. ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OCDE). Programme for International Student Assessment-2018, 2019. Disponível em https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf. Acessado em 24/02/2020.
24. ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OCDE). TALIS 2018 Results, vol. 1, 2019. Disponível em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pesquisa_talis/resultados/2018/talis2018_results_volume_I_teachers_and_schools_leaders_as_lifelong_learners.pdf. Acessado em 24/02/2020.
25. ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OCDE). OECD Multilingual Summaries, TALIS 2018 Results, 2019. Disponível em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pesquisa_talis/resultados/2018/talis2018_vol_I_executive_summary_english.pdf. Acessado em 24/02/2020.