

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

A Proporção Divina: Estudando a Beleza do Número de Ouro na Matemática

Tiego de Moraes Andrade



PROFMAT

Rio Claro
2020



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

A Proporção Divina: Estudando a Beleza do Número de Ouro na Matemática

Tiego de Moraes Andrade

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Érika Capelato

Rio Claro
2020

A553p

Andrade, Tiago de Moraes

A Proporção Divina: Estudando a Beleza do Número de Ouro na Matemática / Tiago de Moraes Andrade. -- Rio Claro, 2020

101 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Érika Capelato

1. Segmento áureo. 2. Números de Fibonacci. 3. GeoGebra (Software de computador). 4. Educação Básica. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Tiego de Moraes Andrade

A PROPORÇÃO DIVINA: ESTUDANDO A BELEZA DO NÚMERO
DE OURO NA MATEMÁTICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Érika Capelato
Orientadora

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
CCET/UFSCar/São Carlos (SP)

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rio Claro, 13 de agosto de 2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Pai (Deus) pela força e sabedoria.

Aos meus pais José e Valdelice por terem me criado com todo amor e carinho.

Aos meus filhos João Gabriel e Heloisa Helena e a minha esposa Carolina pelo apoio, motivação e muita compreensão durante estes anos de estudo.

Aos meus colegas de curso pela troca de experiências e apoio durante todos esses anos de estudo.

A todos os professores do curso, pela dedicação e paciência, o meu aprendizado foi além dos conteúdos.

Em especial a minha orientadora Érika Capelato pelo apoio, conselhos e orientação para realização desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“... não há beleza e deleite sem proporção,
e a proporção encontra-se em primeiro lugar nos números.”*
Bonaventura (1221 - 1274)

Resumo

O Número de Ouro, também conhecido, por exemplo como, Número Áureo, Razão Áurea, Seção Áurea, Proporção Áurea e Média e Extrema Razão é o número irracional 1,6180339887... Este número que fascinou muitos matemáticos ao longo da história da humanidade como Pitágoras, Platão, Euclides, Fibonacci e o matemático italiano Luca Pacioli ainda hoje, desperta a curiosidade de muitos estudantes de matemática. Assim, o objetivo deste trabalho é estudar o número de ouro destacando seu contexto histórico; as propriedades geométricas da divina proporção (como o triângulo e o retângulo áureo, o pentágono regular e a sequência de Fibonacci) e a descrição de exemplos encontrados na literatura, da presença da Razão Áurea na natureza, arte e arquitetura. A metodologia escolhida foi a revisão bibliográfica de materiais relacionados ao tema e, uma pergunta norteadora foi, como este tema pode contribuir no ensino da matemática para os alunos da Educação Básica. Assim, finalizamos esse trabalho apresentando um conjunto de atividades didáticas que podem ser usadas por professores da Educação Básica para trabalhar, juntamente com o *software GeoGebra*, o Número de Ouro na sala de aula.

Palavras-chave: Número de Ouro, Razão Áurea, Fibonacci, Geogebra, Educação básica.

Abstract

The Golden Number, also known, for example as, Golden Number, Golden Ratio, Golden Section, Golden Ratio and Average and Extreme Ratio is the irrational number 1.6180339887 ... This number that has fascinated many mathematicians throughout human history like Pythagoras, Plato, Euclid, Fibonacci and the Italian mathematician Luca Pacioli even today, arouses the curiosity of many mathematics students. Thus, the objective of this work is to study the gold number highlighting its historical context; the geometric properties of the divine proportion (such as the golden triangle and rectangle, the regular pentagon and the Fibonacci sequence) and the description of examples found in the literature, of the presence of the Golden Reason in nature, art and architecture. The chosen methodology was the bibliographic review of materials related to the theme and, a guiding question was, how this theme can contribute in the teaching of mathematics to students of Basic Education. Thus, we finished this work presenting a set of didactic activities that can be used by teachers of Basic Education to work, together with *GeoGebra software*, the Golden Number in the classroom.

Keywords: Number of Gold, Golden Ratio, Fibonacci, Geogebra, Basic education.

Lista de Figuras

1.1	Reta e proporção	21
2.1	Pentágono regular e Pentagrama	24
2.2	Os cinco sólidos platônicos	26
2.3	Icosaedro	26
2.4	Dodecaedro	27
2.5	Partenon	27
2.6	Partenon no retângulo áureo	28
2.7	Divisão Áurea	28
3.1	Razão Áurea: Construção geométrica	31
3.2	Triângulos Áureos semelhantes	32
3.3	Retângulo Áureo	34
3.4	O Olho de Deus	35
3.5	Espiral Logarítmica no Retângulo Áureo	36
3.6	Espiral Logarítmica no Triângulo Áureo	36
3.7	Falcões atacando sua presa	37
3.8	Pentágono Regular com três diagonais	38
3.9	Pentágono Regular e Pentagrama	39
3.10	Pentagrama	39
3.11	Pentagrama	40
4.1	Leonardo Fibonacci	42
4.2	Sofisma geométrico	49
4.3	Encaixe perfeito	50
4.4	Retângulo de Fibonacci	52
4.5	Espiral de Fibonacci	53
5.1	Filotaxia	55
5.2	Razão Filotáxica	56
5.3	Filotaxia no abacaxi	57
5.4	Ângulo Áureo	57
5.5	Arranjo das pétalas de rosa	58
5.6	Girassol	58
5.7	Via Láctea	59
5.8	O Batismo de Cristo de Piero della	60
5.9	Monalisa e os Retângulos Áureos	61
5.10	São Jerônimo de Leonardo da Vinci	61
5.11	O Homem Vitruviano	62

5.12	O Homem Vitruviano	63
5.13	Virgem dos Rochedos	64
5.14	uma cabeça de anção	65
5.15	A Última Ceia	66
5.16	Modulor	67
5.17	Capitólio	68
6.1	Tela do <i>GeoGebra</i> - segmento AB	70
6.2	Tela do <i>GeoGebra</i> - mediatriz do segmento AB	71
6.3	Tela do <i>GeoGebra</i> - reta perpendicular	71
6.4	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	72
6.5	Tela do <i>GeoGebra</i> - triângulo	72
6.6	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	73
6.7	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	73
6.8	Divisão de um segmento em extrema e média razões	74
6.9	Tela do <i>GeoGebra</i> - segmento	76
6.10	Tela do <i>GeoGebra</i> - segmento perpendicular	76
6.11	Tela do <i>GeoGebra</i> - mediatriz do segmento	77
6.12	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	77
6.13	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	78
6.14	Tela do <i>GeoGebra</i> - triangulo	78
6.15	Tela do <i>GeoGebra</i> - bissetriz do ângulo	79
6.16	Tela do <i>GeoGebra</i> - bissetriz do ângulo	79
6.17	Tela do <i>GeoGebra</i> - bissetriz do ângulo	80
6.18	Tela do <i>GeoGebra</i> - bissetriz do ângulo	80
6.19	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	81
6.20	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	81
6.21	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	82
6.22	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	82
6.23	Tela do <i>GeoGebra</i> - quadrado	83
6.24	Tela do <i>GeoGebra</i> - ponto médio	84
6.25	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	84
6.26	Tela do <i>GeoGebra</i> - segmento	85
6.27	Tela do <i>GeoGebra</i> - reta perpendicular	85
6.28	Tela do <i>GeoGebra</i> - segmento	86
6.29	Tela do <i>GeoGebra</i> - Retângulo Áureo	86
6.30	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	87
6.31	Tela do <i>GeoGebra</i> - quadrado	87
6.32	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	88
6.33	Tela do <i>GeoGebra</i> - quadrado	88
6.34	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	89
6.35	Tela do <i>GeoGebra</i> - quadrado	89
6.36	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	90
6.37	Tela do <i>GeoGebra</i> - quadrado	90
6.38	Tela do <i>GeoGebra</i>	91
6.39	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	91
6.40	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	92
6.41	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	92

6.42	Tela do <i>GeoGebra</i> - arco	93
6.43	Tela do <i>GeoGebra</i> - Espiral áurea no retângulo áureo	93
6.44	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	94
6.45	Tela do <i>GeoGebra</i> - ponto médio	95
6.46	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculo	95
6.47	Tela do <i>GeoGebra</i> - círculos	96
6.48	Tela do <i>GeoGebra</i> - Pentágono Regular	96
6.49	Tela do <i>GeoGebra</i> - Pentagrama	97

Lista de Tabelas

4.1	Pares de coelhos	43
4.2	A razão F_{n+1}/F_n	46

Sumário

1	Introdução	21
2	Contexto histórico e o valor numérico de Φ	23
2.1	Pitágoras e o Pentagrama	23
2.2	Platão e os poliedros	25
2.3	O Partenon e a Razão Áurea?	27
2.4	Euclides e a definição formal da Razão Áurea	28
2.5	O valor numérico de Φ	29
3	A geometria da Proporção Divina	31
3.1	Como dividir um segmento na Razão Áurea	31
3.2	Triângulo Áureo	32
3.3	Retângulo Áureo	33
3.4	Espiral Logarítmica	35
3.5	O Pentágono Regular e o Pentagrama	37
4	A Proporção Divina e Fibonacci	41
4.1	Leonardo Fibonacci e o problema dos coelhos	41
4.2	Recorrências	43
4.3	Relações entre Φ e a sequência de Fibonacci	45
4.3.1	O sofisma geométrico	49
4.3.2	O retângulo e a espiral de Fibonacci	51
5	A Onipresença da Proporção Divina	55
5.1	O Número de Ouro na Natureza	55
5.2	O Número de Ouro na Arte	59
5.3	O Número de Ouro na Arquitetura	66
6	Sugestões de atividades para a sala de aula	69
6.1	Atividade 1: O que é a Razão Áurea?	69
6.2	Atividade 2: Determinando o valor numérico do Número de Ouro	74
6.3	Atividade 3: Construção do Triângulo Áureo e da Espiral Áurea	75
6.4	Atividade 4: Construção do Retângulo Áureo e da Espiral Áurea	82
6.5	Atividade 5: Construção do Pentágono Regular e do Pentagrama	93
6.6	Atividade 6: A Razão Áurea na Sequência de Fibonacci	97
7	Conclusão	101

1 Introdução

Existem alguns números na matemática que fascinam seus amantes e despertam a curiosidade por suas propriedades enigmáticas. Ao longo da história nenhum número tem intrigado tanto os homens como o Número de Ouro. Segundo Livio (2006) o número Φ (Φ) é menos conhecido que o número π , mas em muitos aspectos é mais fascinante.

[...] Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Seção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina” (Livio, 2006, p.13).

Em Livio (2006) o autor escreve que a primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.c. por Euclides de Alexandria. Euclides definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua “razão extrema e média”. Nas palavras de Euclides:

Uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento o maior segmento está para o menor.

Figura 1.1: Reta e proporção



Fonte: Livio, 2006, p.14

Em outras palavras, se observarmos a Figura 1.1 a linha AB certamente é maior que o segmento AC . Ao mesmo tempo, o segmento AC é maior que o CB . Se a razão do comprimento de AC para o comprimento de CB for igual à razão de AB para AC então a linha foi cortada na razão extrema e média, ou numa Razão Áurea. Como veremos, o valor da Razão Áurea (a razão de AC para CB na Figura 1.1) é o número irracional 1,6180339887...

Ainda segundo Livio (2006) o autor comenta que na literatura matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau (τ , do grego significa “o corte” ou “a seção”). Entretanto no início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de Φ (Φ), a primeira letra grega do nome de Fídias, o grande escultor

grego que viveu entre 490 e 430 a.c. e fazia uso frequente da Razão Áurea em suas esculturas. As maiores realizações de Fídias foram o “Paternon de Atenas” e o “Zeus” no templo de Olímpia.

O objetivo desta dissertação é contribuir com a vasta literatura sobre o tema que busca fornecer, aos professores da educação básica e aos estudantes de matemática, sugestões para estudar e preparar atividades que abordem a Razão Áurea. Ao longo deste texto, usarei livremente os nomes Proporção Divina, Razão Áurea, Seção Áurea, Número de Ouro, Número Áureo, Φ e o símbolo Φ , pois esses são os nomes encontrados frequentemente na literatura.

Além deste primeiro capítulo, onde fazemos uma introdução do assunto, esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos uma abordagem histórica do Número de Ouro desde de Pitágoras, passando por Platão até chegar em Euclides. Na sequência calculamos o valor numérico de Φ . No Capítulo 3 apresentamos algumas figuras geométricas como o retângulo e o triângulo áureo, o pentágono regular e o pentagrama e a espiral logarítmica. No Capítulo 4 mostramos as relações existentes entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci. No Capítulo 5 mostramos a presença do Número de Ouro na natureza, na arquitetura e na arte. O Capítulo 6 é dedicado a apresentar uma série de atividades sobre a Proporção Áurea na educação básica onde destacamos, principalmente, o uso do *software GeoGebra*. Finalmente, no Capítulo 7 fazemos as considerações finais desta dissertação.

2 Contexto histórico e o valor numérico de Φ

A história da Razão Áurea está diretamente relacionada com grandes matemáticos de nossa história. Huntley [8] cita, por exemplo, a seguinte declaração de Kepler sobre esta razão:

A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.
Kepler (1571 - 1630)

Até a primeira definição formal de Razão Áurea aparecer com Euclides [6], por volta do ano 300 a.c., o Número de Ouro aparece em outras situações antes dessa época. Neste capítulo descreveremos, de forma breve, esse caminhar histórico até Euclides, e depois mostraremos como chegar ao seu valor numérico.

2.1 Pitágoras e o Pentagrama

Algumas das referências mais antigas relacionadas aos prazeres da matemática estão ligadas ao filósofo e matemático grego Pitágoras que observou a ocorrência na natureza de certas combinações e relações entre números.

Segundo Livio (2006) Pitágoras nasceu por volta de 570 a.C. na ilha de Samos, no mar Egeu (a alguma distância da Ásia Menor), e emigrou em algum momento entre 530 e 510 para Crotona, no sul da Itália. Antes disso, talvez seguindo o conselho de seu suposto professor Tales de Mileto, Pitágoras viveu durante algum tempo no Egito, onde teria aprendido matemática, filosofia e temas religiosos com os sacerdotes egípcios. Depois disso, Pitágoras passou pela Babilônia onde entrou em contato com o conhecimento matemático mesopotâmico. Em Crotona, Pitágoras começou a dar aulas de matemática e filosofia, atraindo rapidamente uma multidão entusiástica de seguidores. Sua influência foi tão grande que seus seguidores mais aplicados formaram uma sociedade secreta, ou irmandade, que ficou conhecida como os pitagóricos.

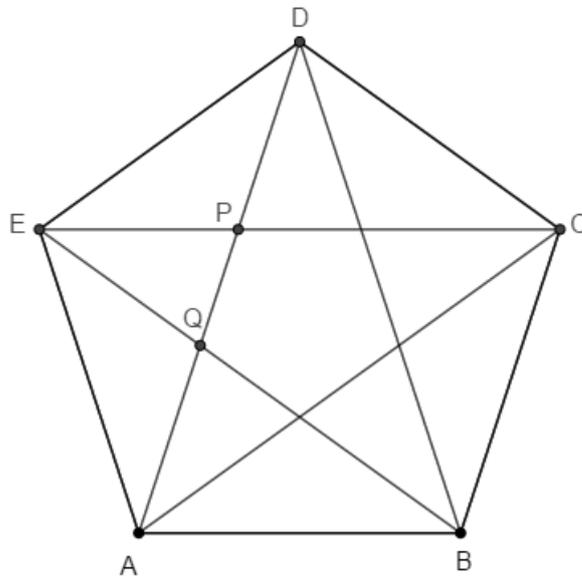
Uma pergunta natural a ser feita é: qual a relação dos pitagóricos com o Número de Ouro? Segundo Livio (2006) os pitagóricos usavam o pentagrama¹ como o símbolo de sua irmandade. Podemos observar que o pentagrama tem estreita relação com o pentágono regular². Conectando-se todos os vértices do pentágono regular por diagonais, obtém-se um pentagrama.

¹estrela de cinco pontas

²figura plana que tem cinco lados e ângulos iguais

Segundo Huntley (1985), cada face pentagonal associada a divisão áurea era de um interesse especial para os pitagóricos. Na Figura 2.1 vemos o pentagrama dentro do pentágono regular. O ponto de interseção P das diagonais AD e CE divide cada uma delas na proporção áurea. P divide AD e QD internamente e AQ externamente nessa proporção.

Figura 2.1: Pentágono regular e Pentagrama



Fonte: Elaboração própria

Segundo Huntley [8] o pentagrama, entre outras coisas, era considerado pelos membros da sociedade de Pitágoras, um símbolo de boa saúde. Iamblicos, um escritor grego, relata uma curiosidade a respeito da relação dos pitagóricos com o pentagrama. Conta ele que um membro da comunidade de Pitágoras, durante uma viagem, passou uma noite em uma estalagem de beira de estrada e caiu enfermo. Mesmo com os cuidados do estalajadeiro, que tentou com consideráveis despesas restaurar lhe a saúde, faleceu. Antes de morrer, vendo que a sua situação era desesperadora e vendo-se incapaz de recompensar seu anfitrião, ele conseguiu uma tábua e nela escreveu um pentagrama. Entregou a tábua ao estalajadeiro e pediu-lhe que fosse afixada num local onde todos os viajantes pudessem ver. Pouco tempo depois, um cavaleiro de passagem avistou o símbolo. Desmontou do cavalo, fez perguntas e, ao ouvir a história do estalajadeiro, recompensou-o generosamente. Podemos presumir, em vista de ter ele tratado de forma generosa e desinteressada um estudioso viandante, que o dono da estalagem não utilizou mais a tábua inscrita com a estrela tripla.

Segundo Livio (2006) apesar do fato das estrelas de cinco pontas aparecerem em artefatos egípcios antigos, pentagramas geométricos não são muito comuns, embora tenha sido encontrado um pentagrama datando de aproximadamente 3100 a.c. numa jarra em Naqada, perto de Tebas. Porém, além das importantes descobertas matemáticas antigas (área do pentágono de lado unitário e aproximação para π) e da íntima relação entre o sistema pentágono-pentagrama não existe absolutamente qualquer evidência de que os babilônios conheçam a Razão Áurea. Em Lívio (2006) o autor descreve, com bastante contextualização de obras, a discussão sobre a existência (ou não) da razão áurea na construção da Grande Pirâmide de Gisé (por volta de 2500 a.C.) pelos egípcios.

2.2 Platão e os poliedros

Os poliedros de Platão também têm relação com o Número de Ouro. Esses sólidos eram conhecidos pelos pitagóricos que atribuíam um significado especial ao dodecaedro: as doze faces regulares correspondiam aos doze signos do zodíaco e eram, para eles, um símbolo do universo.

Livio (2006) descreve em seu livro que Platão (428/427 a.C. - 348/347 a.C.) foi uma das mentes mais influentes da Grécia antiga e da civilização ocidental em geral. Considerando o papel de Platão na matemática em geral, e em relação à Razão Áurea em particular, temos que examinar não só suas contribuições puramente matemáticas, que não foram muito significativas, mas os efeitos de sua influência e de seu estímulo para a matemática de outras pessoas da sua e de gerações seguintes.

Foi Theaetetus (417 a.C. – 369 a.C.), segundo Lívio (2006), o primeiro a construir os cinco chamados sólidos regulares. Platão, em *Timaeus* se dedica a explicar a estrutura da matéria usando os cinco sólidos regulares (ou poliedros), que já tinham sido investigados até certo ponto pelos pitagóricos e inteiramente por Theaetetus.

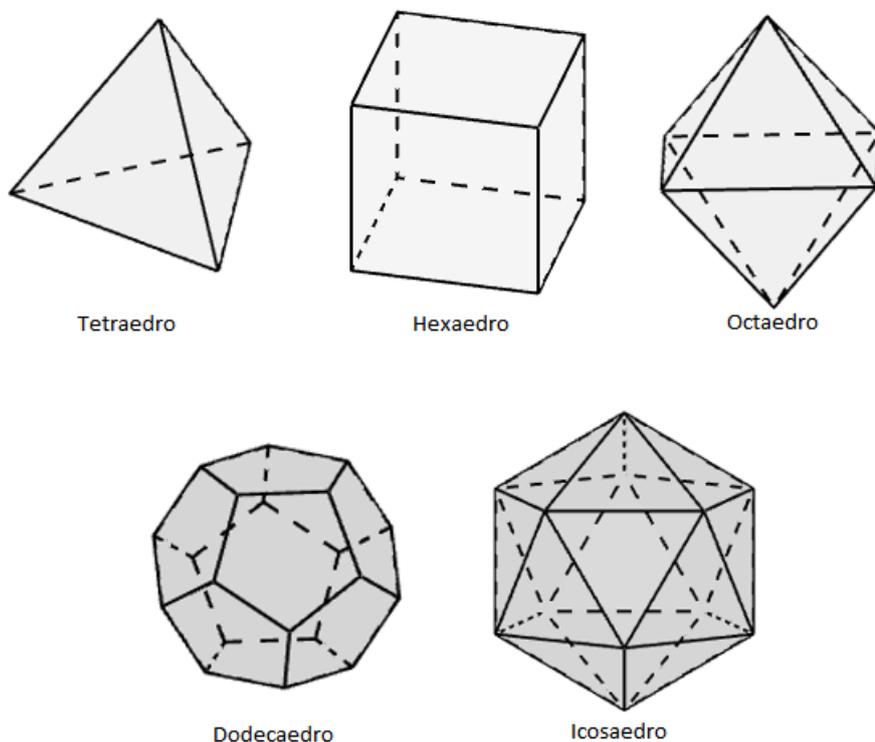
Para Huntley [8], os gregos possuíam uma ideia mística dos cinco sólidos regulares. Isso não surpreende, pois as formas em si mesmas são bonitas. Não é necessário nenhuma sofisticação matemática para a apreciação e fascínio de suas aparências externas. Os cinco sólidos regulares foram estudados por Euclides no livro XIII de Os Elementos [6], mas estão associados ao nome de Platão por causa de seu esforço para relacioná-los com os elementos importantes dos quais supunha que o mundo fosse feito.

Um primeiro aspecto para destacar acerca dos sólidos platônicos regulares apresentados na Figura 2.2 é que eles são precisamente em número de cinco: tetraedro (com quatro faces triangulares), o cubo (ou hexaedro, com seis faces quadradas), octaedro (com oito faces triangulares), dodecaedro (com doze faces pentagonais) e icosaedro (com vinte faces triangulares).

Enquanto se pode desenhar um número infinito de polígonos regulares em duas dimensões, não é possível construir mais que cinco poliedros regulares no espaço tridimensional. A superfície do poliedro regular é feita com polígonos regulares congruentes.

Observamos pela Figura 2.2, que não podemos formar o vértice de um poliedro com menos de três faces, e que um vértice pode ser formado com a junção de três, quatro ou cinco triângulos equiláteros. Com seis triângulos, o vértice achata-se em um plano. O mesmo ocorre unindo-se quatro quadrados. De forma semelhante, só podemos unir três pentágonos regulares em um vértice. Os hexágonos e os outros polígonos regulares com mais de cinco lados estão todos excluídos. Este raciocínio sobre a limitação a cinco sólidos regulares é a fonte da fórmula de Euler, $V + F = A + 2$, onde as letras correspondem ao número de vértices, faces e arestas, respectivamente.

Figura 2.2: Os cinco sólidos platônicos

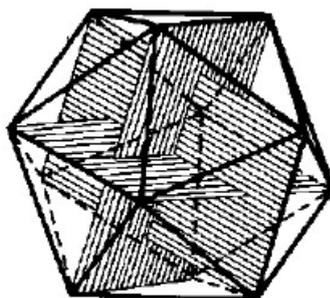


Fonte: Elaboração Própria

O segundo ponto de interesse é que dois pares de sólidos de Platão são recíprocos e o quinto apresenta auto reciprocidade: se unidos, os centros dos lados do cubo formam um octaedro, enquanto que a união dos centróides das superfícies do octaedro forma um cubo. Relação semelhante verifica-se entre o icosaedro e o dodecaedro, e a junção dos quatro centróides dos lados do tetraedro forma um outro tetraedro.

O terceiro aspecto digno de nota é a relação dos dois pares de poliedros recíprocos com o retângulo áureo (retângulo cujos lados estão em proporção áurea). Os doze vértices do icosaedro regular são divisíveis em três grupos coplanares de quatro. Eles situam-se nos cantos de três retângulos áureos que acham-se colocados simetricamente um em relação ao outro, sendo mutuamente perpendiculares e tendo como ponto comum o centróide do icosaedro (Figura 2.3). Pode-se inscrever um icosaedro em um octaedro de modo que cada vértice do primeiro divida um lado do segundo na Seção Áurea.

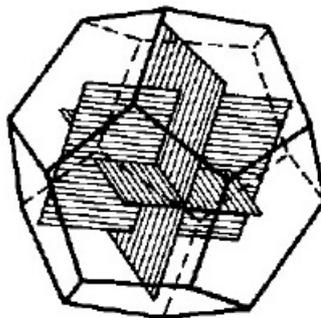
Figura 2.3: Icosaedro



Fonte: Huntley [8]

Os centróides dos doze lados pentagonais do dodecaedro são divisíveis em três grupos coplanares de quatro. Esses quadrângulos situam-se nos cantos de três retângulos áureos colocados simétrica e mutuamente perpendiculares, tendo como ponto comum o centróide do dodecaedro (Figura 2.4).

Figura 2.4: Dodecaedro



Fonte: Huntley [8]

2.3 O Partenon e a Razão Áurea?

As associações entre algumas figuras planas, como o pentágono e o pentagrama, e alguns sólidos, como os platônicos com a Razão Áurea, levam a inevitável conclusão de que o interesse grego pela Razão Áurea provavelmente começou com tentativas de se construir figuras planas e sólidos desses tipos. Grande parte desse esforço matemático ocorreu por volta do começo do século IV a.C., mas existem afirmações de que a Razão Áurea está embutida no projeto arquitetônico do Partenon, que foi construído e decorado entre 447 e 432 a.C. Será que essas afirmações são verdadeiras?

Segundo Livio (2006) o Partenon (“o lugar da virgem” em grego) foi construído na Acrópole de Atenas como um templo sagrado para o culto de Atenas Partenos (Atenas, a Virgem). Os arquitetos foram Íctino e Calícrates e Fídias e seus assistentes foram incumbidos de supervisionar as esculturas. A Figura 2.5 mostra o Partenon.

Figura 2.5: Partenon

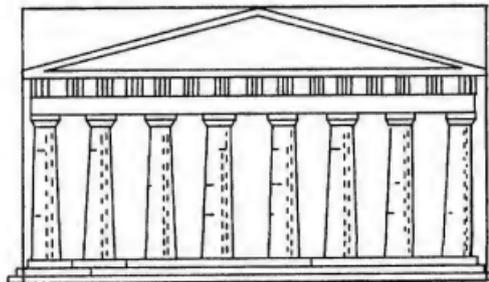


Fonte: viagemgrafia.com.br/tag/partenon/

Livio (2006) descreve em sua obra que o surgimento da Razão Áurea no Partenon foi seriamente questionado por alguns matemáticos pelo fato de que, invariavelmente, partes

do Partenon ultrapassarem o esboço do retângulo áureo, um fato ignorado por todos os entusiastas da Razão Áurea.

Figura 2.6: Partenon no retângulo áureo



Fonte: Livio, 2006, p.91

Segundo Livio (2006) as dimensões do Partenon variam de fonte para fonte, provavelmente por que foram usados diferentes pontos de referência nas medições e isto dá oportunidade de malabarismo numérico. O autor ainda apresenta outras discussões sobre a existência (ou não) Razão Áurea no Partenon.

2.4 Euclides e a definição formal da Razão Áurea

Euclides de Alexandria foi um professor, matemático platônico e escritor grego, muitas vezes referido como o “Pai da Geometria”. Não se sabe exatamente sua data de nascimento, mas apenas que viveu durante o reinado de Ptolomeu I (entre 323 a.C. e 283 a.C.). O problema de determinar a Razão Áurea de uma reta foi descrito formalmente por ele no livro *Os Elementos* [6], portanto, este tem sido um ponto de interesse dos matemáticos durante mais de vinte séculos. *Os Elementos*, o mais conhecido livro da história da matemática, é uma obra de treze volumes sobre Geometria e Teoria dos Números.

Segundo Livio (2006) a Razão Áurea aparece em *Os Elementos* em vários momentos. A primeira definição da Razão Áurea (“razão extrema e média”) relacionada a áreas aparece de forma indireta no livro II. Em seguida, uma definição mais clara relacionada a proporção aparece no livro VI.

Podemos reescrever a definição geométrica dada por Euclides para “Seção Áurea” ou “Divisão Áurea” de um segmento como segue:

Definição 2.1. Tomemos o segmento de reta AB , dividido em dois segmentos pelo ponto C (Figura 2.7). Se C é tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, então C é a “Seção Áurea” ou “Divisão Áurea” de AB .

Figura 2.7: Divisão Áurea



Fonte: Elaboração própria

A razão $\frac{AB}{AC}$ ou $\frac{AC}{CB}$, é chamada de Razão Áurea. Na terminologia usada pelos matemáticos antigos, AB está dividida pelo ponto C em “extrema e média razões”.

2.5 O valor numérico de Φ

Segundo Huntley (1985), no início do século atual, sugeriu-se que a letra grega Φ fosse adotada para designar a razão áurea ou o número de ouro.

Assim, considerando a Definição 2.1 tomemos, conforme a Figura 2.7, $AC = x$ e $CB = 1$. Consideremos também que C divide AB em extrema e média razões. Então teremos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação acima obtemos as seguintes raízes:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339887\dots$$

Como x é a medida de um segmento de reta, seu valor não pode ser negativo. Assim, a solução positiva

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

será o valor numérico do número de ouro, Φ . Chamaremos a solução negativa de Φ' .

Se, ao considerarmos a Definição 2.1 tomarmos, conforme a Figura 2.7, $AC = 1$ e $CB = x'$ e ainda considerarmos que C divide AB em extrema e média razões, teremos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{x'+1}{1} = \frac{1}{x'} \Leftrightarrow x'^2 + x' - 1 = 0$$

A solução positiva desta equação é $x' = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339887\dots$, valor que, precedido do sinal negativo, chamamos de Φ' . Assim, curiosamente, verificamos que Φ' é o recíproco negativo de Φ , isto é, $\Phi \cdot \Phi' = -1$ pois:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339887\dots = -\Phi'$$

Com isso

$$\Phi \cdot \Phi' = \Phi \cdot \left(-\frac{1}{\Phi}\right) = -1.$$

Sabendo que Φ e Φ' são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, fica evidente a partir das propriedades das raízes da equação quadrática que $\Phi \cdot \Phi' = -1$ e

$$\Phi + \Phi' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

O Φ é o único número positivo que tem a propriedade de que, diminuindo, em uma unidade seu valor, torna-se seu próprio recíproco. Provamos isso usando as propriedades acima:

$$\Phi + \Phi' = 1 \Leftrightarrow \Phi - 1 = -\Phi' \Leftrightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

Para provar a unicidade vamos supor que existe um número real positivo k tal que $k - 1 = \frac{1}{k}$. Porém, esta igualdade é equivalente à seguinte equação

$$k^2 - k - 1 = 0 \tag{2.1}$$

Resolvendo a equação (2.1) obtemos os seguintes valores

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Logo, a raiz positiva da equação (2.1) coincide com Φ e a raiz negativa com Φ' .

3 A geometria da Proporção Divina

Vimos no capítulo anterior que Euclides definiu a razão áurea usando o segmento de reta assim, neste capítulo vamos mostrar como dividir uma reta na razão áurea. Esta seção será feita baseada em Contador(2015) e Huntley (1985).

Em seguida, falaremos do triângulo e retângulo áureo e utilizaremos Livio (2006). Uma apresentação da espiral logarítmica também será feita.

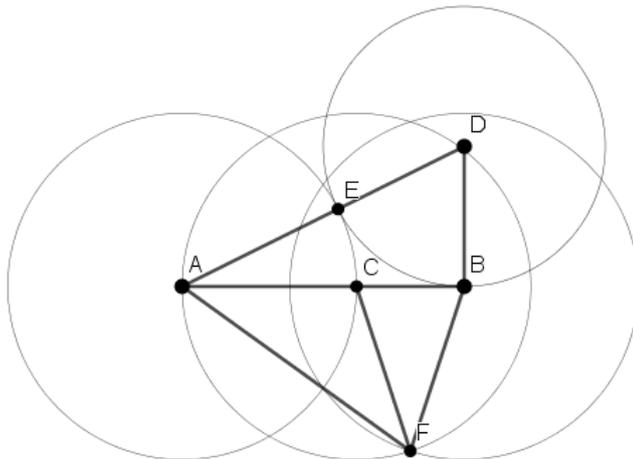
Finalizaremos este capítulo discutindo as relação do pentágono regular e a razão áurea. Nesta seção também utilizaremos Livio (2006).

3.1 Como dividir um segmento na Razão Áurea

Tomemos um segmento de reta AB e, em seguida, traçamos um segmento BD perpendicular à AB com comprimento $\frac{AB}{2}$. Unimos AD .

Com centro em D , e raio DB traçamos um arco cortando DA em E . Com centro em A e raio AE , traçamos um arco cortando AB em C . Então, C é a Seção Áurea de AB , veja a Figura 3.1

Figura 3.1: Razão Áurea: Construção geométrica



Fonte: Elaboração própria

Para verificarmos que $\frac{AB}{AC}$ é a Seção Áurea de AB , vamos supor que o comprimento de $AB = 1$. Assim, o comprimento de $DB = ED = \frac{1}{2}$.

Por Pitágoras temos $AD^2 = AB^2 + BD^2$ e, então, o comprimento de AD é $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Assim, o comprimento de AE é $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Logo,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \Phi$$

Depois de dividir o segmento AB na Razão Áurea, ainda na Figura 3.1, com centro em C e raio AC descreva um arco. Com o mesmo raio e centro em B , corte o arco em F .

Usando a ideia da divisão do segmento em extrema e média razões temos que $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{FB} = \Phi$ e $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \frac{FC}{CB} = \Phi$.

Com isso temos que os triângulos ABF e FCB são semelhantes pois a razão entre os seus lados é igual a Φ .

Triângulos com essas características são chamados de *triângulos áureos*, vamos abordá-los na próxima seção.

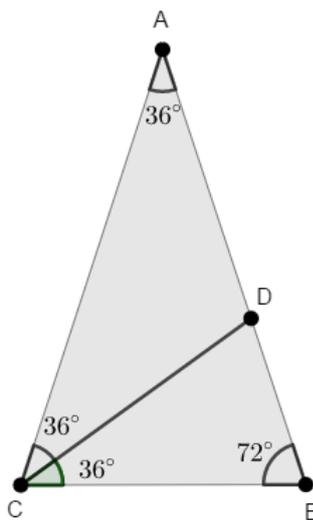
3.2 Triângulo Áureo

Definição 3.1. Chama-se triângulo áureo todo triângulo isósceles cujos ângulos internos são 36° , 72° e 72° .

No triângulo áureo os lados congruentes estão em Razão Áurea com a base. De fato.

Na Figura 3.2, temos o triângulo ABC com $AB = AC$ e ângulo $\angle BCD = 36^\circ$, onde CD é a bissetriz do ângulo $\angle BCA$.

Figura 3.2: Triângulos Áureos semelhantes



Fonte: Elaboração própria

Observe que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo BCD , pois seus ângulos correspondentes são congruentes. Adotemos $BC = x$, $DB = y$, $AD = DC = BC = x$ e $AB = x + y$. Assim, a razão de semelhança $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB} = k$. Com isso temos:

$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{k} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{k} = k$$

$$\Leftrightarrow k+1 = k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k - 1 = 0$$

Resolvendo a equação acima, temos para $k > 0$:

$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Com isso provamos que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB} = \Phi$. Isso mostra que em todo triângulo áureo, a razão entre os lados congruentes e a base é igual a Φ . Mostra também que, em um triângulo áureo, a bissetriz interna de um dos ângulos da base divide o lado oposto em média e extrema razão, pois $\Phi = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AD}$.

Ainda analisando a Figura 3.2, o triângulo ADC é chamado de *Gnômon Áureo* com razão de semelhança $\frac{1}{\Phi}$. Os triângulos áureos e gnômions áureos apresentam a propriedade de serem bissectados em triângulos menores que também são triângulos áureos e gnômions áureos. Esses triângulos podem ser encontrados também traçando as diagonais do pentágono regular e construindo assim o pentagrama.

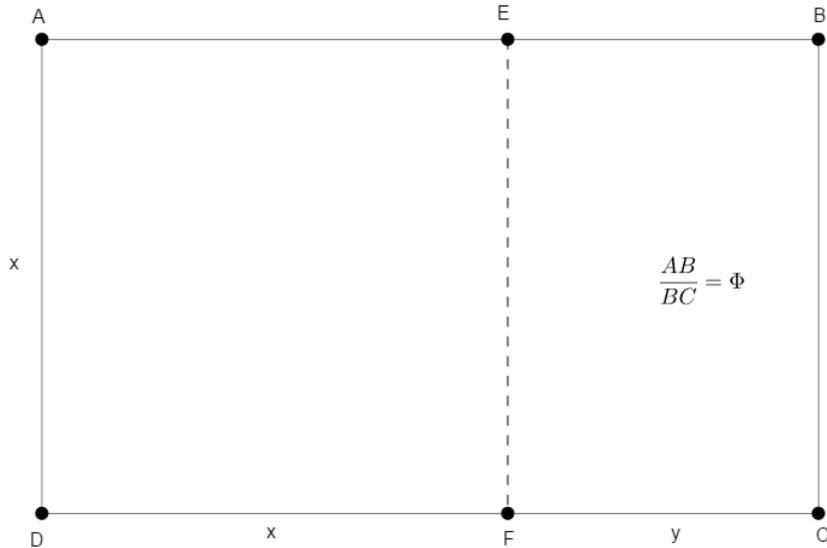
3.3 Retângulo Áureo

Nesta seção usaremos como bibliografia Avila (1985).

Definição 3.2. Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo $ABCD$ com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado como $AEFD$, o retângulo restante $BCFE$, será semelhante ao retângulo original.

Na Figura 3.3, considere o retângulo $ABCD$ e o quadrado $AEFD$.

Figura 3.3: Retângulo Áureo



Fonte: Elaboração própria

Seja $DA = DF = AE = BC = x$ e $CF = EB = y$ então $x + y$ e x são as dimensões do retângulo original. A definição de retângulo áureo acima se traduz na relação

$$\frac{x}{x + y} = \frac{y}{x}$$

De onde segue que

$$x^2 = xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau na incógnita $x > 0$, temos

$$x = \frac{-y + y\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Se invertermos a razão entre os segmentos teremos

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Com isto provamos que a razão obtida entre os lados do retângulo é Φ .

Agora suponha que o retângulo $ABCD$ da Figura 3.3 é áureo. Então se $x + y$ e x são os comprimentos dos lados do retângulo original, a Definição 3.2 significa que

$$\frac{x}{x + y} = \frac{y}{x} \tag{3.1}$$

De (3.1) decorre, por uma propriedade conhecida de proporções, que

$$\frac{x}{x + y} = \frac{y}{x} = \frac{x - y}{(x + y) - x} \tag{3.2}$$

ou seja

$$\frac{y}{x} = \frac{x - y}{(x + y) - x}$$

Disto concluímos que, se o retângulo de lados $x + y$ e x é áureo, então também o é o retângulo de lados x e y .

Evidentemente, o mesmo raciocínio se aplica para mostrar que também são áureos os retângulos de lados y e $x - y$, $x - y$ e $2y - x$, etc.

Em outras palavras, dados os números positivos x e y satisfazendo a relação (3.1), formemos a sequência $x + y, x, y, x_2, x_3, \dots$, onde

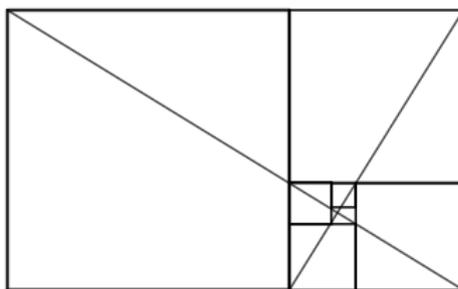
$$x_2 = x - y, \quad a_3 = y - x_2 = 2y - x, \quad \text{e, em geral } x_n = x_{n-2} - x_{n-1}.$$

Assim temos a sequência

$$x + y, x, y, x - y, 2y - x, 2x - 3y, 5y - 3x, 5x - 8y, 13y - 8x, \dots$$

O raciocínio anterior estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos desta sequência são lados de um retângulo áureo com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

Figura 3.4: O Olho de Deus



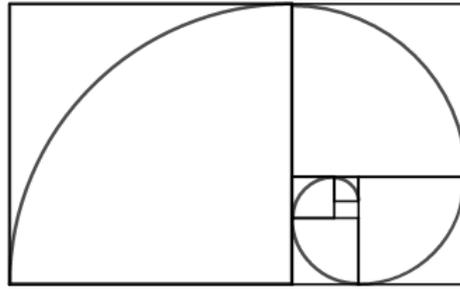
Fonte: Elaboração própria

As dimensões do retângulo “filho” são menores que as do retângulo “pai” exatamente pelo fator Φ . Continuando o processo e retirando um quadrado do retângulo “filho”, teremos um outro retângulo áureo, com dimensões menores geradas novamente pelo fator Φ . Continuando o processo “infinitamente”, produziremos Retângulos Áureos cada vez menores (cada vez com dimensões deflacionadas por um fator Φ). O retângulo áureo é o único que possui a propriedade de que, ao se cortar um quadrado, forma-se outro retângulo similar. Desenhando duas diagonais em qualquer par de retângulos áureos “pai” e “filho” da série (Figura 3.4), elas irão se cruzar no mesmo ponto. A série de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável. Devido a essas propriedades “divinas” atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como O Olho de Deus. (LIVIO, [10], p.104)

3.4 Espiral Logarítmica

A partir da sequência infinita de retângulos áureos (Figura 3.4), quando unimos os cantos dos quadrados gerados, obtém-se uma espiral chamada “espiral logarítmica” ou “espiral áurea”, veja a Figura 3.5. Esta espiral se enrola para o interior na direção do *polo* (o ponto dado pela intersecção das diagonais, veja a Figura 3.4).

Figura 3.5: Espiral Logarítmica no Retângulo Áureo

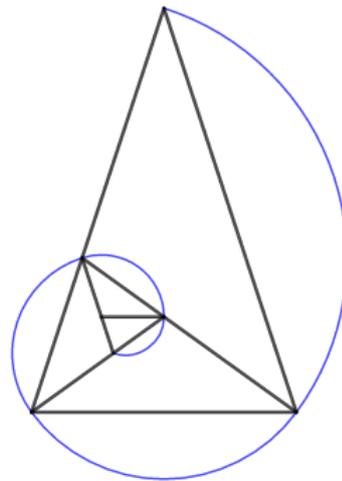


Fonte: Elaboração própria

Como curiosidade, podemos citar que a Figura 3.5 é usada como símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)¹.

Podemos obter uma espiral logarítmica também a partir de um triângulo áureo. Para isto, basta ligar os vértices de um triângulo áureo progressivamente, veja a Figura 3.6.

Figura 3.6: Espiral Logarítmica no Triângulo Áureo



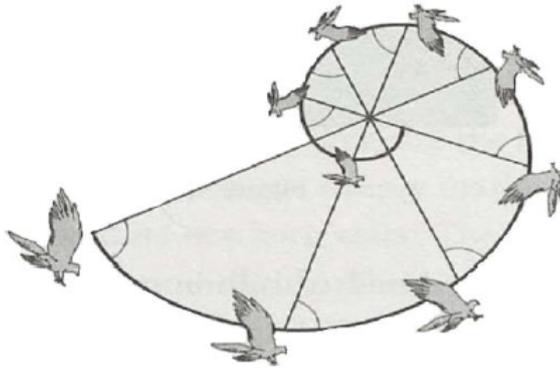
Fonte: Elaboração própria

A espiral logarítmica possui uma propriedade exclusiva, ela não altera seu formato à medida que seu tamanho aumenta. A espiral logarítmica também é conhecida como espiral *equiangular*. O nome *equiangular* foi dado pelo matemático e filósofo francês René Descartes (1569 - 1650), por causa de uma outra propriedade única da espiral logarítmica: se desenharmos uma linha reta do *polo* até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo.

Ainda segundo Livio (2006, p.141), os falcões usam essa propriedade quando atacam a sua vítima, veja a Figura 3.7.

¹<https://www.sbm.org.br/>

Figura 3.7: Falcões atacando sua presa



Fonte: Livio [10], p.141

A natureza ama espirais logarítmicas. De girassóis, conchas do mar e redemoinhos a furacões e galáxias espirais gigantes, parece que a natureza escolheu esta forma magnífica como seu “ornamento” favorito. O formato constante da espiral logarítmica em todas as escalas de tamanho se revela como beleza na natureza na forma de minúsculos fósseis ou de organismos unicelulares conhecidos como foraminíferas. Embora as conchas espirais neste caso sejam compostas (e não um tubo contínuo), imagens de raios X da estrutura interna desses fósseis mostram que o formato da espiral logarítmica permaneceu inalterado por milhões de anos (LIVIO, 2006, p.138).

3.5 O Pentágono Regular e o Pentagrama

Um polígono regular possui lados e ângulos internos congruentes com isso, suas diagonais tem os mesmos comprimentos. Sabemos também que a soma de todos os seus ângulos internos é igual a $(n - 2) \cdot 180^\circ$, onde n é o número de lados.

Por exemplo, num triângulo $n = 3$ a soma dos ângulos internos é 180° e num pentágono $n = 5$ a soma dos ângulos internos é 540° . Cada ângulo do pentágono é, portanto, igual a $540/5 = 108^\circ$.

Consideremos o pentágono regular $ABCDE$ (Figura 3.8). Traçando as diagonais adjacentes, AD e AC , construímos o triângulo isósceles ACD (com dois lados iguais). Como os dois ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, os ângulos da base nos dois triângulos sobre os lados são de 36° cada - metade de $180^\circ - 108^\circ$. Obtemos assim, os ângulos do triângulo do meio, 36° , 72° e 72° .

Se bissectarmos um dos dois ângulos da base de 72° , obteremos um triângulo menor DCF com os mesmos ângulos (36° , 72° e 72°) do triângulo maior ADC .

Podemos mostrar que o ponto F divide a linha AC exatamente na razão áurea. Além disso, AD e CD é Φ .

De fato. Um dos teoremas da geometria euclidiana é que, quando dois triângulos tem os mesmos ângulos eles são similares, ou seja, possuem a mesma forma, sendo todos os seus lados proporcionais entre si. Os dois triângulos ACD e CDF são similares, pois possuem os mesmos ângulos. Portanto, a razão AC/CD (razão entre os lados dos dois triângulos) é igual a CD/CF (razão entre as bases dos mesmos dois triângulos):

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF}$$

Mas os dois triângulos são também isósceles, de modo que

$$CD = DF = AF$$

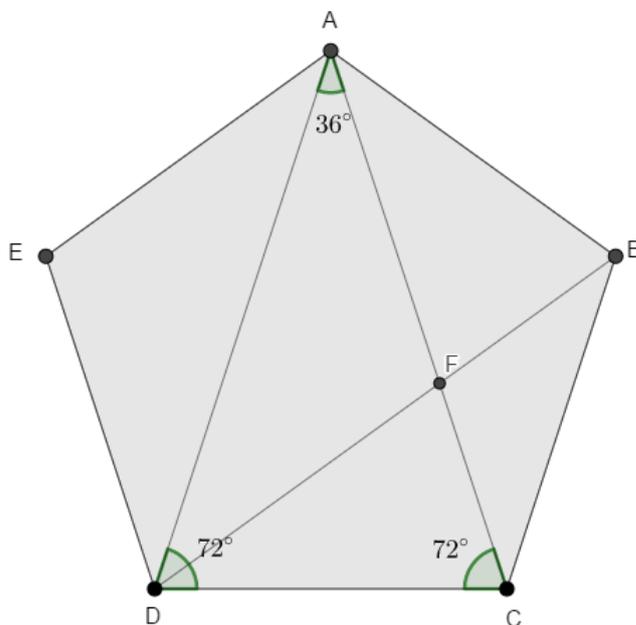
Portanto encontramos a partir das duas igualdades acima que

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AC}{AF}$$

O que significa (pela definição euclidiana) que o ponto F divide a linha AC em uma razão áurea. Como $AD = AC$ e $DC = AF$, temos ainda que $AD/DC = \Phi$.

Em outras palavras, num pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é Φ . O triângulo ACD é triângulo áureo e os triângulos ABC e EAD são *Gnômons* áureos.

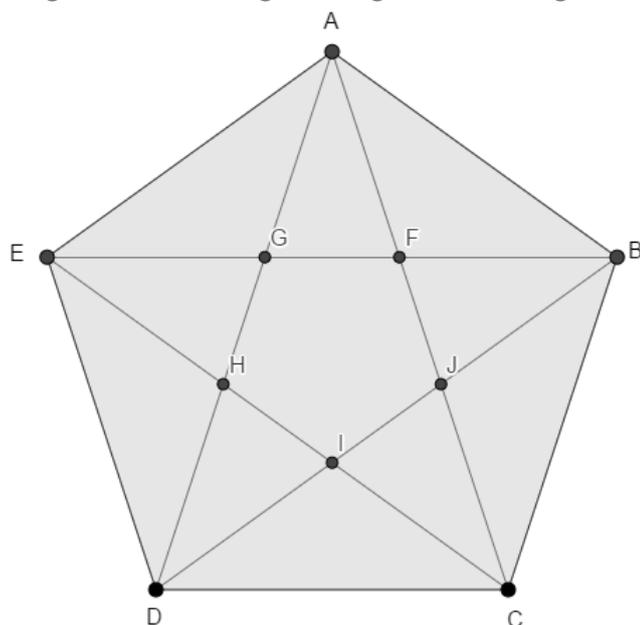
Figura 3.8: Pentágono Regular com três diagonais



Fonte: Elaboração própria

Agora traçando todas as diagonais do Pentágono $ABCDE$ obtemos o Pentagrama (Figura 3.9).

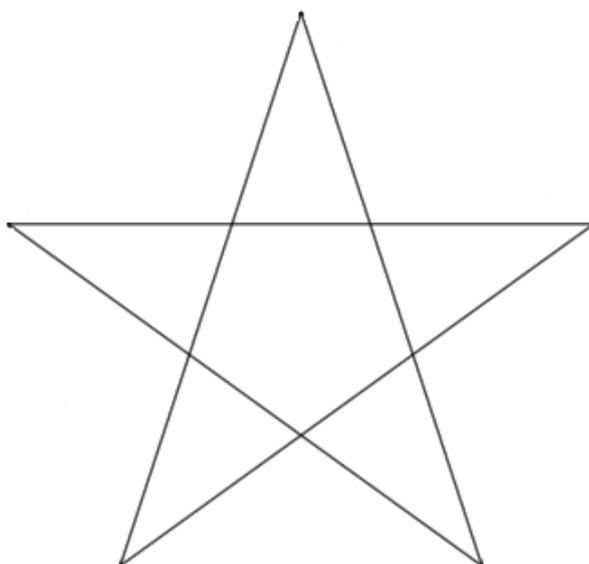
Figura 3.9: Pentágono Regular e Pentagrama



Fonte: Elaboração própria

Analisando o pentagrama da Figura 3.9, podemos ver que o triângulo AGF é semelhante ao triângulo ADC , pois a diagonal EB é paralela ao lado DC do pentágono $ABCDE$, com isso os ângulos dos dois triângulos são congruentes. Assim, concluímos que o triângulo AGF é áureo, e isso vale para todos os triângulos do pentagrama. Conclui-se também que o novo pentágono formado com as bases dos triângulos áureos do pentagrama é regular (Figura 3.10).

Figura 3.10: Pentagrama



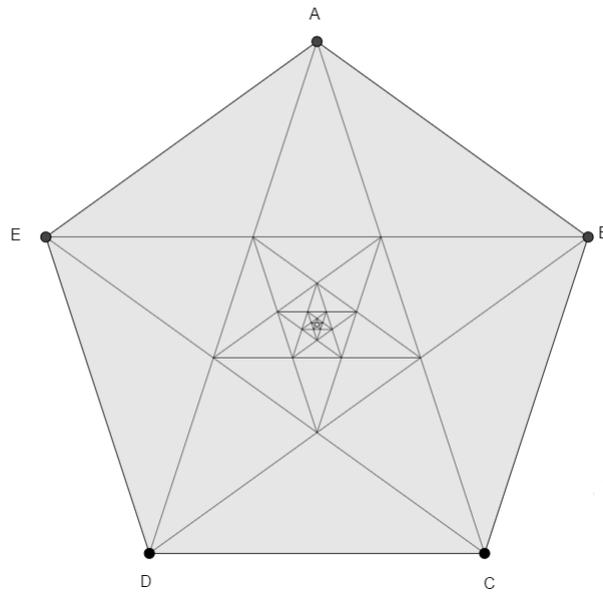
Fonte: Elaboração própria

Assim, vemos que o pentagrama é formado pelas diagonais do pentágono regular, que também forma outro pentágono menor no seu interior, e continuando o processo,

as diagonais desse pentágono menor, formam em seu interior outro pentagrama e outro pentágono menor ainda, e essa progressão segue para o infinito (Figura 3.11).

A pergunta que podemos fazer é: qual a relação dessa progressão de pentágonos e pentagramas com a Razão Áurea? A razão entre o lado do pentágono maior com o do pentágono imediatamente menor é justamente o número Φ , e essa razão se conserva por toda a sequência de figuras.

Figura 3.11: Pentagrama



Fonte: Elaboração própria

4 A Proporção Divina e Fibonacci

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações (LIVIO, 2006, p.115).

Segundo Livio (2006) as contribuições diretas de Fibonacci para a literatura da Razão Áurea apareceram no livro *Prática da Geometria* publicado em 1223. Fibonacci apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área de um pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do círculo circunscrito, e computação de volumes do dodecaedro e do icosaedro, todos estão intimamente ligados à Razão Áurea. Porém, muitos estudantes ouviram falar de Fibonacci por causa do seguinte problema publicado no seu famoso livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco):

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Esse capítulo tem como principal objetivo estudar este problema, ou seja, as relações existentes entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. As referências usadas serão Contador (2015), Huntley (1985) e Livio (2006).

4.1 Leonardo Fibonacci e o problema dos coelhos

Leonardo de Pisa (em latim Leonardo Pisanus), mais conhecido como Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) foi um matemático italiano considerado o primeiro grande matemático europeu da idade média. o apelido Fibonacci vem do latim *filius Bonacci*, filho da família Bonacci, ou “filho da boa natureza”.

Fibonacci (Figura 4.1), que por algum tempo viveu com o seu pai, um funcionário de comércio da alfândega, em Bugia (atualmente na Argélia) e mais tarde viajou por alguns países mediterrâneos como Grécia, Egito e Síria, teve a oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas de numeração e concluir que, os numerais indo-arábicos, que incluíam o princípio de valor de lugar, eram muito superiores a todos os outros. Por isso ele dedicou os sete primeiros capítulos de seu primeiro e mais conhecido livro, *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), publicado em 1202, a explicações sobre a notação indo-árábica.

Figura 4.1: Leonardo Fibonacci



Fonte: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/biografia>

Vamos retornar ao problema que aparece no capítulo XII do livro *Liber Abaci*, o qual deu origem ao que conhecemos por sequência de Fibonacci.

Um homem pois um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dará luz um novo par, que será fértil a partir do segundo mês?

Analisando o problema, vamos acompanhar o acontece nos seis primeiros meses:

1. No primeiro mês, temos apenas um par de coelhos que ainda são filhotes;
2. No segundo mês continuamos com um par de coelhos, mas agora são adultos;
3. No terceiro mês nasce um par de filhotes, logo, temos dois pares de coelhos, um par de adultos e um par de filhotes;
4. No quarto mês o par mais velho gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos, ou seja, o par mais velho, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes;
5. No quinto mês o par mais velho gera o seu terceiro par de filhotes. O par de filhotes gerado no terceiro mês, que agora é adulto e fértil gera o seu primeiro par de filhotes, e o par de filhotes gerado no mês anterior agora é adulto. Portanto temos cinco pares de coelhos, três pares de adultos e dois pares de filhotes e
6. No sexto mês os três pares de adultos geram, cada um, um par de filhotes, e os dois pares de filhotes do mês anterior, agora estão adultos. Totalizamos assim oito pares de coelhos, cinco de adultos e três de filhotes.

Seguindo a análise que descrevemos acima, percebemos que, no próximo mês, o número de pares de coelhos será a soma do número de pares de coelhos do mês anterior mais o número de pares de coelhos adultos existentes no mês anterior. Assim, no sétimo mês teremos treze pares de coelhos: oito pares de coelhos do sexto mês, mais cinco pares de

coelhos filhotes gerados pelos pares de coelhos adultos do sexto mês. Com isso, vemos que o número de casais de coelhos, a cada mês, seguindo a observação acima, geram a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 e 144. Assim, vemos que o número de pares de coelhos ao final de um ano será 144, veja a construção da Tabela 4.1 na qual descrevemos o passo a passo mensal para responder ao problema de Fibonacci.

Tabela 4.1: Pares de coelhos

Mês	Número de pares adultos	Número de pares filhotes	Total
1°	0	1	1
2°	1	0	1
3°	1	1	2
4°	2	1	3
5°	3	2	5
6°	5	3	8
7°	8	5	13
8°	13	8	21
9°	21	13	34
10°	34	21	55
11°	55	34	89
12°	89	35	144
...

A sequência formada pelos números

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots,$$

gerada pelo problema do número de pares de coelhos existentes a cada mês, é uma sequência na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois termos anteriores.

Segundo Livio (2006) esta sequência foi chamada de *sequência de Fibonacci* no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842–1891). Sequências desse tipo, nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas ou sequências obtidas por recorrência.

Livio (2006) aponta que a sequência de Fibonacci foi a primeira dessas sequências recursivas conhecidas na Europa.

Assim, se denotarmos os termos desta sequência por F_n , ou seja, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, \dots , $F_{12} = 144$, \dots , temos que o termo geral desta sequência é

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{4.1}$$

Aqui F_n representa o n -ésimo número na sequência, F_{n+1} é o termo que segue F_n e F_{n+2} é o termo que vem depois de F_{n+1} . Segundo Livio (2006) esta notação introduzida em 1634 pelo matemático Albert Girard.

4.2 Recorrências

Uma sequência é dita *sequência de recorrência* (ou simplesmente, *recorrência*) quando cada termo é definido como função de termos anteriores. Quando para calcular um novo

termo da sequência precisamos conhecer o termo que o antecede, dizemos que a recorrência é de primeira ordem. Quando para calcularmos um novo termo de uma sequência precisamos conhecer os dois termos que o antecedem, esta é uma sequência de recorrência de segunda ordem. Além disso, a recorrência é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos seus anteriores é linear.

Por exemplo, a sequência abaixo é uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

À esta equação podemos associar a equação quadrática, $r^2 + pr + q = 0$, com $q \neq 0$, chamada *equação característica*.

Teorema 4.1. *Se r_1 e r_2 são duas raízes reais e distintas da equação $r^2 + pr + q = 0$, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é a solução geral da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração. Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, após algumas manipulações algébricas, o resultado pretendido:

$$\begin{aligned} & C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = \\ &= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n = \\ &= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = \\ &= C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Da equação (4.1) temos a equação de recorrência para a sequência de Fibonacci, ou seja,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ com } F_1 = F_2 = 1$$

A equação característica correspondente a recorrência é $r^2 = r + 1$ e suas raízes são dadas por:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Com isso, a solução geral da sequência de recorrência de Fibonacci será da forma:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Para determinar os valores de C_1 e C_2 , podemos usar $F_1 = F_2 = 1$, mas é mais conveniente usar $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Assim, chegamos a:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (4.2)$$

A equação (4.2), que representa o termo geral da sequência de Fibonacci, é conhecida com *fórmula de Binet*. Esta fórmula é extremamente interessante, pois aparentemente não parece que, após a substituição dos diversos valores de n , ela produziria valores inteiros, como são todos os termos da sequência de Fibonacci.

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillippe Marie Binet (1786 - 1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707 - 1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667 - 1754). A fórmula permite que se encontre o valor de qualquer número de Fibonacci, F_n , se seu lugar na sequência, n , for conhecido. A fórmula de Binet se apoia inteiramente na Razão Áurea. (LIVIO, 2006, p.128)

4.3 Relações entre Φ e a sequência de Fibonacci

Como vimos, a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987... , é chamada sequência de Fibonacci.

Neste texto, vamos denotar os termos desta sequência por F_n , ou seja, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, ... , $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$,

Neste ponto, uma pergunta natural a ser feita é a seguinte: qual a relação existente entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci?

Podemos provar que a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci, ou seja, F_{n+1}/F_n , oscila em torno da Razão Áurea.

Primeiramente, com o objetivo de ilustrar a afirmação anterior, construímos a Tabela 4.2 considerando os valores dos dezesseis primeiros termos da sequência de Fibonacci e calculamos a razão F_{n+1}/F_n . Com isso, construímos os quinze primeiros termos de uma nova sequência.

Tabela 4.2: A razão F_{n+1}/F_n

Termos	F_{n+1}/F_n
a_1	$1/1 = 1$
a_2	$2/1 = 2$
a_3	$3/2 = 1,5$
a_4	$5/3 = 1,666666$
a_5	$8/5 = 1,6$
a_6	$13/8 = 1,625$
a_7	$21/13 = 1,615385$
a_8	$34/21 = 1,619048$
a_9	$55/34 = 1,617647$
a_{10}	$89/55 = 1,618182$
a_{11}	$144/89 = 1,617978$
a_{12}	$233/144 = 1,618056$
a_{13}	$377/233 = 1,618026$
a_{14}	$610/377 = 1,618037$
a_{15}	$987/610 = 1,618033$
\dots	\dots

Analisando a Tabela 4.2 podemos observar que a sequência gerada,

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \frac{233}{144}, \frac{377}{233}, \frac{610}{377}, \frac{987}{610}, \dots$$

tem as seguintes propriedades:

1. Os termos de ordem par da sequência são decrescentes, ou seja, $a_2 > a_4 > a_6 > \dots$.
2. Os termos de ordem ímpar são crescentes, ou seja, $a_1 < a_3 < a_5 < \dots$.
3. Os termos consecutivos aparecem em ordem alternada, ou seja, $a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4, \dots$.

A seguir vamos provar que, para a sequência de Fibonacci, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

De fato. Vamos calcular o limite usando a fórmula de Binet

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \right]} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}}{1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

Sabendo que $-1 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n < 0$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}{1} = \Phi \end{aligned}$$

Assim provamos que a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci oscila em torno da Razão Áurea. Essa relação vale para qualquer sequência com a mesma regra da sequência de Fibonacci, só que com termos iniciais diferentes, como podemos observar nos dois exemplos que estão na sequência.

Exemplo 4.2. Conforme vimos, considere F_n a sequência de Fibonacci, onde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e para $n \geq 3$ temos que o termo geral da sequência de Fibonacci é da forma $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Assim, obtemos os seguintes números para esta sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 \dots,$$

Agora considere a sequência dada pela seguinte relação

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \quad (4.3)$$

onde F_{n+1} e F_{n-1} são termos da sequência de Fibonacci. A relação (4.3) é válida para n inteiro com $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$. Os números obtidos desta relação são

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, \dots$$

e a sequência é conhecida como *sequência de Lucas*.

Claramente, podemos observar que a sequência de Lucas e a de Fibonacci usam a mesma lei de recorrência porém, com condições iniciais diferentes. Assim, podemos escrever a lei de formação da recorrência da sequência de Lucas por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \quad (4.4)$$

É possível mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \Phi.$$

Para isto, vamos utilizar o artigo de Parker (1964) para obtermos a fórmula de Binet para a sequência de Lucas. Em seu artigo o autor parte da equação de recorrência

$$F(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Admitindo as condições iniciais $F(0) = 2$ e $F(1) = 1$ podemos obter o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 \end{cases}$$

desde que $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ então $r_1 - r_2 = \sqrt{5}$ e $r_1 + r_2 = 1$ e fazendo as contas encontramos $c_1 = c_2 = 1$. Assim, a solução da equação de recorrência (4.4) é

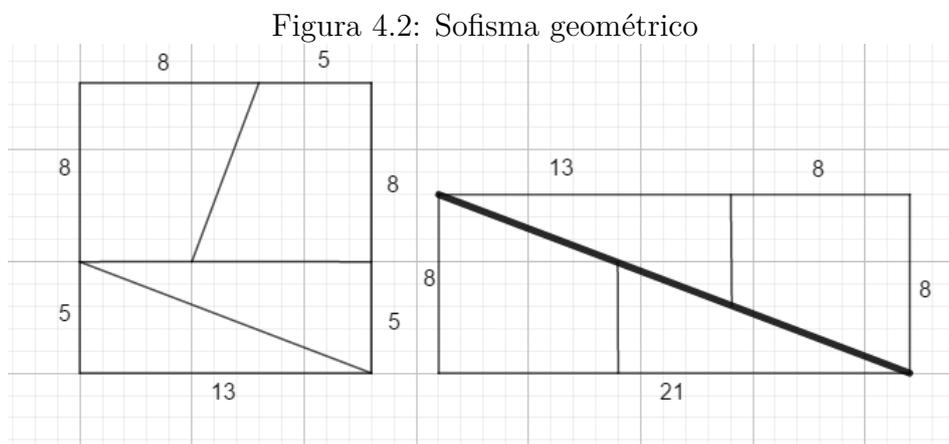
$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Com contas semelhantes as feitas anteriormente, é possível mostrar que o limite da razão L_{n+1}/L_n converge a Φ quando $n \rightarrow \infty$.

4.3.1 O sofisma geométrico

Uma outra relação entre Φ e a sequência de Fibonacci diz respeito a um velho sofisma geométrico, o qual foi apresentado pela primeira vez pelo grande criador de quebra-cabeças matemáticos, Sam Loyd (1841-1911).

Consideremos um quadrado cujos lados tenham comprimento igual à soma de dois números de Fibonacci consecutivos. O quadrado da Figura 4.2 apresenta lados iguais a $5 + 8 = 13$ e área igual a $13^2 = 169$. Recorte o quadrado nas quatro partes indicadas. Reagrupando podemos formar o retângulo, também contido na Figura 4.2 de lados 21 e 8 e área $21 \times 8 = 168$.



Fonte: Elaboração própria

Verificamos que a área das duas figuras diferem em uma unidade, sendo a área do retângulo menor que a área do quadrado.

Se tivéssemos escolhido os números 3 e 5, teríamos verificado que a área do retângulo seria maior que a do quadrado em uma unidade, pois a área do retângulo será, $8 \times 5 = 65$ e a área do quadrado, $8^2 = 64$. Assim, observamos que a figura de maior área depende da ordem dos números de Fibonacci escolhidos.

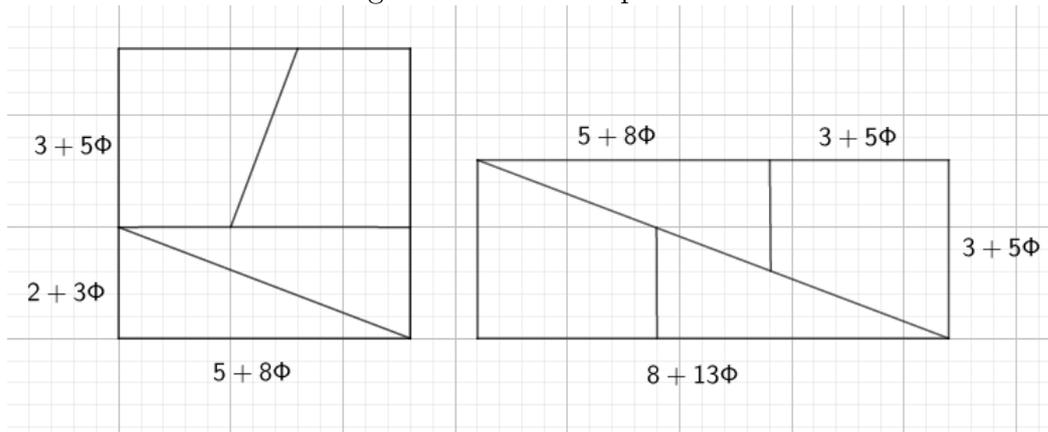
A depender dos números de Fibonacci escolhidos, quando reagrupamos para formar o retângulo, ficará uma folga ou uma sobreposição (escondida sob a linha grossa que marca a longa diagonal) de uma unidade de área.

Existe uma, e somente uma, série somatória como a de Fibonacci que proporciona um encaixe exato. É uma série que utiliza a razão áurea e é chamada de *série áurea*:

$$1, \Phi, 1 + \Phi, 1 + 2\Phi, 2 + 3\Phi, 3 + 5\Phi, 5 + 8\Phi, \dots$$

Se construirmos um quadrado cujos lados tenham comprimento igual à soma de dois números consecutivos desta série, o encaixe será exato: a área do quadrado coincidirá com a área do retângulo. Se tivermos escolhido $3 + 5\Phi$, $5 + 8\Phi$ como dois números consecutivos da série e feito o quadrado de lado igual a $5 + 8\Phi$, conforme a Figura 4.3, é possível mostrar que sua área é igual à área do retângulo de lados $8 + 13\Phi$ e $3 + 5\Phi$.

Figura 4.3: Encaixe perfeito



Fonte: Elaboração própria

De fato, lembrando que $\Phi^2 = \Phi + 1$, a área do quadrado é:

$$(5 + 8\Phi)^2 = 25 + 80\Phi + 64\Phi^2 = 25 + 80\Phi + 64(1 + \Phi) = 89 + 144\Phi \quad (4.5)$$

Já a área do retângulo é:

$$(8 + 13\Phi) \cdot (3 + 5\Phi) = 24 + 40\Phi + 39\Phi + 65\Phi^2 = 24 + 40\Phi + 39\Phi + 65(1 + \Phi) \quad (4.6)$$

$$= 24 + 40\Phi + 39\Phi + 65(1 + \Phi) = 89 + 144\Phi \quad (4.7)$$

Como $\Phi^2 = \Phi + 1$ podemos mostrar a seguinte relação entre as potências Φ e os números de Fibonacci:

- Φ^0
- $\Phi = \Phi^1$
- $(1 + \Phi) = \Phi^2$
- $(1 + 2\Phi) = 1 + \Phi + \Phi = \Phi^2 + \Phi = \Phi(1 + \Phi) = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi^3$
- $(2 + 3\Phi) = 1 + \Phi + 1 + 2\Phi = \Phi^2 + \Phi^3 = \Phi^2 \cdot (1 + \Phi) = \Phi^2 \cdot \Phi^2 = \Phi^4$
- $(3 + 5\Phi) = (1 + 2\Phi) + (2 + 3\Phi) = \Phi^3 + \Phi^4 = \Phi^3 \cdot (1 + \Phi) = \Phi^3 \cdot \Phi^2 = \Phi^5$
- $(5 + 8\Phi) = (2 + 3\Phi) + (3 + 5\Phi) = \Phi^4 + \Phi^5 = \Phi^4 \cdot (1 + \Phi) = \Phi^4 \cdot \Phi^2 = \Phi^6$

- e assim sucessivamente.

Assim, vemos que a série áurea também pode ser escrita da seguinte forma:

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \Phi^6, \dots$$

Com essa maneira diferente de escrever a série áurea que relaciona a sequência de Fibonacci com o número Φ , também podemos mostrar uma outra característica interessante, ela é a única série que é ao mesmo tempo somatória, pois reúne três termos consecutivos de acordo com a fórmula $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, e geométrica pois a razão de qualquer termo para o termo anterior é constante, isto é u_{n+1}/u_n é uma constante.

Como Φ' também é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, então temos também que $(1 + \Phi') = \Phi'^2$. Com isso temos uma outra série com as mesmas propriedades da série áurea, só que ela é oscilante, alternando valores positivos e negativos:

$$1, \Phi', 1 + \Phi', 1 + 2\Phi', 2 + 3\Phi', 3 + 5\Phi', 5 + 8\Phi', \dots$$

E porque $(1 + \Phi') = \Phi'^2$, ela pode ser escrita assim:

$$1, \Phi', \Phi'^2, \Phi'^3, \Phi'^4, \Phi'^5, \Phi'^6, \dots$$

4.3.2 O retângulo e a espiral de Fibonacci

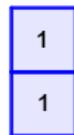
A sequência de Fibonacci possibilita construirmos um retângulo que se assemelha ao retângulo áureo. Como sabemos, cada termo da sequência, a partir do terceiro termo, é obtido pela soma dos dois antecessores. Assim, é possível construir quadrados e organizá-los do seguinte modo:

1º passo - Construir um quadrado de lado 1.



Fonte: Elaboração própria

2º passo - Construir outro quadrado de lado 1.



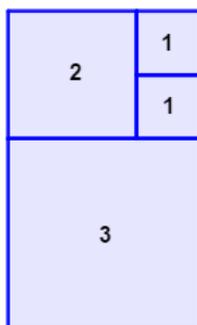
Fonte: Elaboração própria

3º passo - Construir um quadrado de lado 2.



Fonte: Elaboração própria

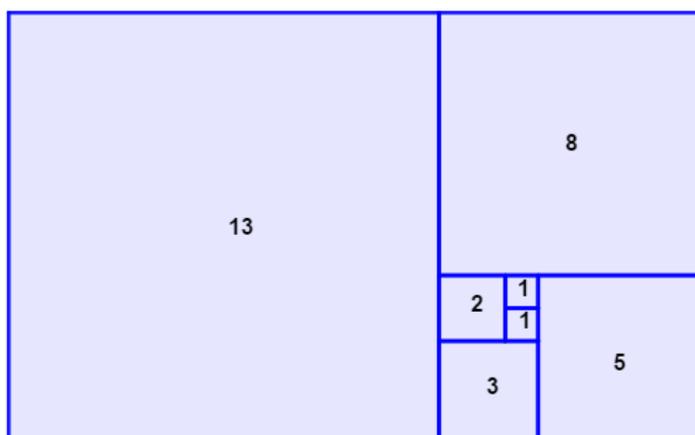
4º passo - Construir um quadrado de lado 3.



Fonte: Elaboração própria

Se continuarmos construindo, no sentido anti-horário, quadrados cujos lados sejam, na sequência, os números da sequência de Fibonacci, obteremos retângulos que, quanto maiores forem, mais se aproximam do retângulo áureo, veja Figura 4.4.

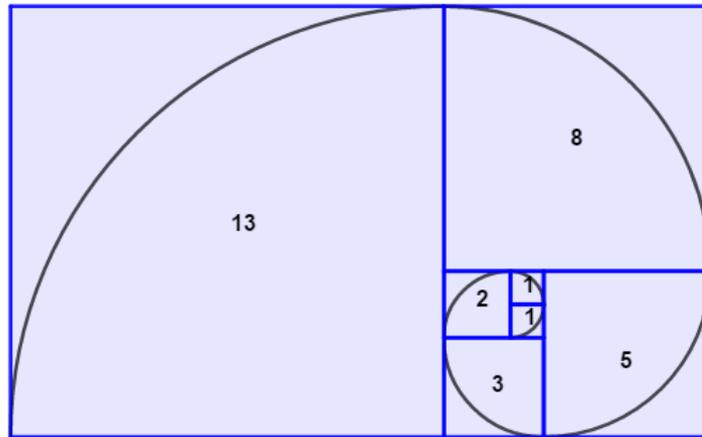
Figura 4.4: Retângulo de Fibonacci



Fonte: Elaboração própria

É possível também construir uma espiral nesse retângulo semelhante à espiral áurea. Ela é conhecida como espiral de Fibonacci, veja Figura 4.5.

Figura 4.5: Espiral de Fibonacci



Fonte: Elaboração própria

5 A Onipresença da Proporção Divina

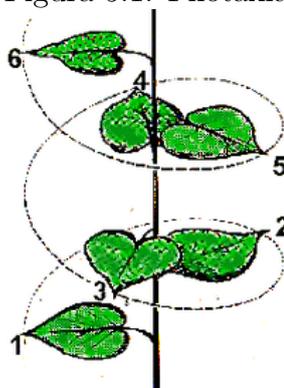
Segundo Huntley (1985), o número Φ possui a propriedade da ubiquidade, que é a propriedade de estar presente em todos os lugares, ou seja, podemos dizer que Φ é um número onipresente.

Neste capítulo apresentaremos, usando a literatura, a presença do número Φ em diversos lugares como na natureza, na arte e na arquitetura.

5.1 O Número de Ouro na Natureza

Livio (2006) em seu livro, descreve que na natureza vemos a presença de Φ em inúmeras situações como, por exemplo, as folhas no galho de uma planta tendem a crescer em posições que otimizam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. A medida que o tronco vertical cresce, ele produz folhas em pontos com espaçamento bem regular. No entanto, as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra, pois isso impede que as folhas de baixo recebam a umidade e a luz do Sol que elas necessitam. A passagem de uma folha para a seguinte é caracterizada por espaçamentos do tipo parafuso em volta do tronco (veja a Figura 5.1). Este fenômeno é chamado *filotaxia*, e vem do grego *Phyllotaxis* que significa arranjo de folhas.

Figura 5.1: Filotaxia

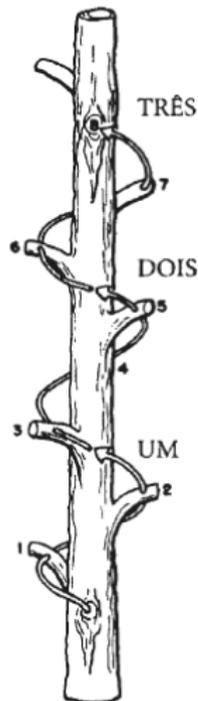


Fonte: daniлоabrito.wixsite.com/mundodafolha/filotaxia

A figura 5.2 mostra uma situação em que são necessárias três voltas completas para passar por oito ramos (razão filotáxica $\frac{3}{8}$). Podemos ainda citar alguns exemplos como as tílias americanas, onde as folhas aparecem geralmente em dois lados opostos, ou seja,

metade de uma volta, que corresponde a razão filotáxica $\frac{1}{2}$. A macieira, o carvalho e o damasqueiro têm passagem de uma folha para outra em $\frac{2}{5}$ de uma volta (razão filotáxica $\frac{2}{5}$). Podemos observar que as frações obtidas são razões de números alternados da sequência Fibonacci.

Figura 5.2: Razão Filotáxica



Fonte: Livio [10]

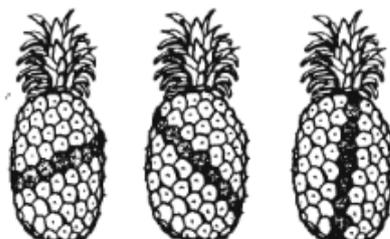
Segundo Livio [10] essa observação de que as folhas seguem certos padrões foi feita pela primeira vez em por Teofrasto (372 a.C. - 287 a.C.) em investigação sobre plantas. O estudo da filotaxia não foi muito além dessas observações até o século XV, quando Leonardo da Vinci (1452 - 1519) notou que os arranjos das folhas se distribuíam em padrões espirais, com ciclos de cinco (correspondendo a um ângulo de $\frac{2}{5}$ por volta).

O astrônomo Johannes Kepler foi o primeiro a descobrir (intuitivamente) a relação entre a filotaxia e a sequência de Fibonacci. A história da filotaxia verdadeiramente matemática começou no século XIX com os trabalhos dos botânicos Karl Friedric Schimper, Alexander Braun e do cristalógrafo Augustre Bravais e seu irmão botânico Louis. Eles descobriram a regra geral de que os quocientes filotáxicos poderiam ser expressos por razões de termos da série de Fibonacci (como $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$) e também observaram a aparição de números de Fibonacci consecutivos em conjuntos de linhas espirais (conhecidos como *parastichies*) de pinhas e abacaxis.

Podemos ver uma manifestação bela de filotaxia baseada em Fibonacci nos abacaxis. A superfície do abacaxi é formada por camadas hexagonais e, cada camada, faz parte de três espirais diferentes, veja Figura 5.3. Podemos ver uma espiral de oito linhas paralelas subindo suavemente da esquerda inferior para a direita superior, uma das treze linhas paralelas que sobem de forma mais inclinada da direita inferior até a esquerda superior,

e uma das vinte e uma linhas paralelas que são bastante inclinadas (da esquerda inferior até a direita superior). Grande parte dos abacaxis apresentam cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescente na sua superfície, que são números de Fibonacci.

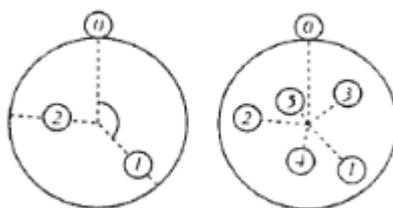
Figura 5.3: Filotaxia no abacaxi



Fonte: Livio, 2006, p.131

Voltando a analisar as plantas, a Figura 5.4 mostra o tronco de uma árvore visto de cima, e as folhas estão numeradas de baixo para cima na ordem em que aparecem. Observamos que as folhas sucessivas se encontram ao longo de uma espiral firmemente enrolada, conhecida como espiral generativa. Os irmãos Bravais descobriram em 1837 que as folhas avançam mais ou menos no mesmo ângulo em volta do círculo, em geral próximo à $137,5^\circ$, que é conhecido como ângulo áureo. Obtemos esse ângulo dividindo 360° por Φ , o resultado é $222,5^\circ$. Como ele é maior que a metade de um círculo (180°), devemos usar seu suplemento (valor que falta para 360°), que é $137,5^\circ$.

Figura 5.4: Ângulo Áureo

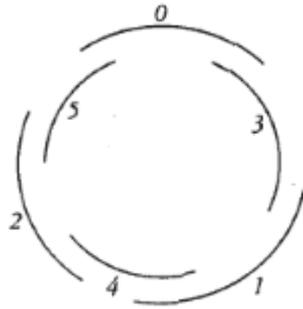


Fonte: Livio, 2006, p.131

O arranjo das pétalas de uma rosa também está baseada na Proporção Áurea e no ângulo áureo. A Figura 5.5 mostra as posições e os ângulos dessas pétalas.

Cálculos mostram que os ângulos que definem essas posições (em frações de uma volta completa) são as partes fracionárias de múltiplos simples de Φ . A pétala 1 está $0,6180$ (a parte fracionária $1 \times \Phi$) de volta da pétala 0, a pétala 2 está $0,236$ (a parte fracionária de $2 \times \Phi$) de uma volta da pétala 1, e assim por diante.

Figura 5.5: Arranjo das pétalas de rosa



Fonte: Livio, 2006, p.134

Outras flores também apresentam relações com os números de Fibonacci e com a Razão Áurea. O arranjo dos flósculos nos girassóis apresentam padrões espirais, tanto no sentido horário quanto no anti-horário (Figura 5.6). A quantidade de espirais depende do tamanho do girassol. Os girassóis mais comuns tem 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mas existem também girassóis com 55 e 89 espirais, 89 e 144 e alguns mais raros com 144 e 233 espirais. Todos esses valores são números de Fibonacci adjacentes, portanto a razão entre o número maior e o menor se aproxima da Razão Áurea.

As margaridas apresentam treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas, todos números de Fibonacci.

Figura 5.6: Girassol



Fonte: girasol-fibonacci.blogspot.com/

Além destes exemplos, as espirais também são observadas em vários outros lugares: nas galáxias como a Via Láctea (ver Figura 5.7), na concha marinha *Nautilus pompilius* e nos chifres de uma cabra por exemplo.

Figura 5.7: Via Láctea



Fonte: www.misteriosdouniverso.net

5.2 O Número de Ouro na Arte

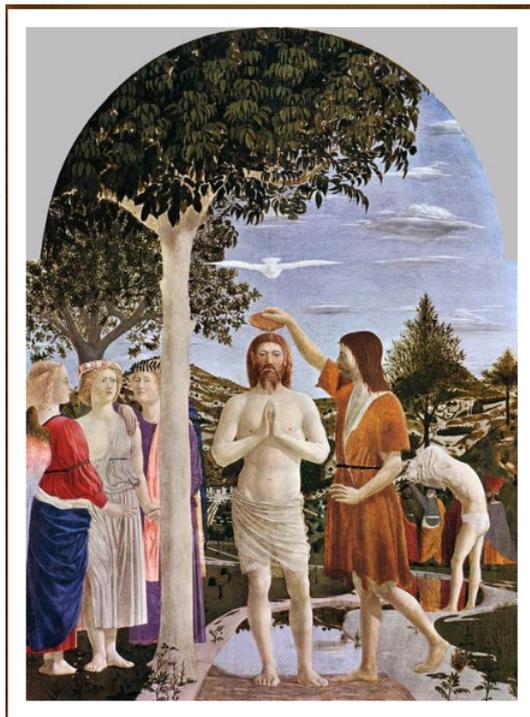
Foi na Europa renascentista que a Proporção Áurea deixou de ser apenas um ente matemático e rumou de forma definitiva em direção às artes. E, através da pintura, o homem pôde exprimir as verdadeiras proporções do corpo humano e de tudo aquilo que tem vida.

O homem renascentista começou a enxergar a Razão Áurea como um recurso para se alcançar, através da proporcionalidade, a estética de beleza. Além da proporção outro conceito importante que foi introduzido nessa época foi o de perspectiva, pois através desse conceito o artista passou a representar o espaço tridimensional no espaço bidimensional.

Assim a arte da pintura deixou de ser apenas traços reunidos de forma quase aleatória numa tela. Os pintores desse período passaram a usar em seus trabalhos métodos baseados nas relações matemáticas e na Razão Áurea. Porém, existem algumas ideias diferentes sobre quem foram os primeiros artistas da renascença a usar a Razão Áurea em suas obras.

Segundo Contador (2015) o primeiro exemplo notável do uso de conceitos matemáticos na pintura é a obra *O batismo de Cristo* (Figura 5.8), do pintor e matemático italiano Piero della Francesca (1410 - 1492). O autor acredita que, baseado no simbolismo geométrico da Proporção Áurea, o quadro tem sua imagem principal contida num quadrado que representa a Terra e num círculo que representa o Céu.

Figura 5.8: O Batismo de Cristo de Piero della



Fonte: wahooart.com

Se considerarmos o valor do lado do quadrado igual a 1, o corpo de Cristo estará na área $1 \cdot \frac{1}{\Phi^3}$ e sua altura será igual a $\frac{3}{\Phi^3}$, o Espírito Santo, localizado bem no centro do círculo, tem uma área exatamente de $\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi^2}$. Já a mão de João Batista, está a $\frac{1}{\Phi^2}$ de distância do umbigo assim como a púbis de Cristo está a $\frac{1}{\Phi^2}$ de distância dos pés.

Piero della Francesca usava a matemática em suas obras e conhecia a Proporção Áurea, porém não temos evidências de que ele tenha usado essa proporção na obra *O batismo de Cristo*. Piero Della Francesca, assim como Leonardo da Vinci e o alemão Albrecht Durer foram três dos mais conhecidos pintores renascentistas que também deram contribuições interessantes a matemática.

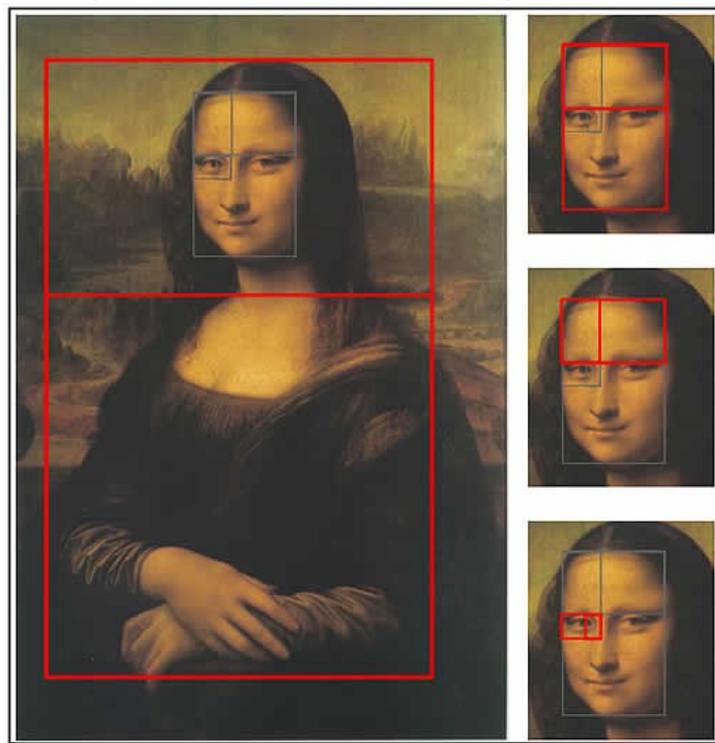
Além deles, outro importante pintor e matemático italiano renascentista foi Luca Pacioli. Influenciado por Piero, Luca Pacioli foi o autor de *De Divina Proportione*, um trabalho de três volumes que trata da Razão Áurea. O primeiro volume contém um sumário detalhado das propriedades da Razão Áurea e um estudo dos sólidos platônicos e outros poliedros. O segundo volume de *A Proporção Divina* é um tratado sobre proporção e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. O terceiro volume é essencialmente uma tradução, palavra por palavra, para o italiano de *Cinco sólidos regulares*, de Piero, escrito em latim.

Leonardo Da Vinci, que conheceu Pacioli em 1496 na Corte de Milão, forneceu sessenta ilustrações de sólidos para o livro *A Proporção Divina* e provavelmente graças a Pacioli, Leonardo foi apresentado a Razão Áurea.

Ao contrário de muitos autores, Contador (2015) também entende que Leonardo Da Vinci usou a Proporção Áurea em várias de suas obras. Para ele, no quadro mais conhecido de Leonardo da Vinci, *Monalisa* (Figura 5.9), é fácil verificar o emprego de vários retângulos áureos em torno de seu rosto e, subdividindo o retângulo que tem a linha dos

olhos como referência, novamente encontramos retângulos áureos.

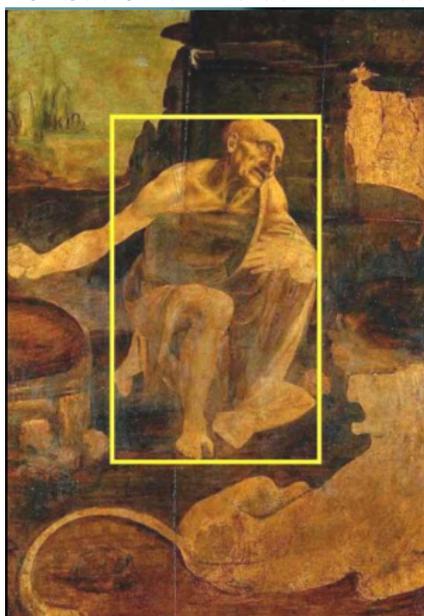
Figura 5.9: Monalisa e os Retângulos Áureos



Fonte: Lawlor, 1996

Em Contador (2015) o autor também defende que, em outro quadro de Leonardo da Vinci, este inacabado, *São Jerônimo* (Figura 5.10), a figura principal está perfeitamente contida num Retângulo Áureo.

Figura 5.10: São Jerônimo de Leonardo da Vinci



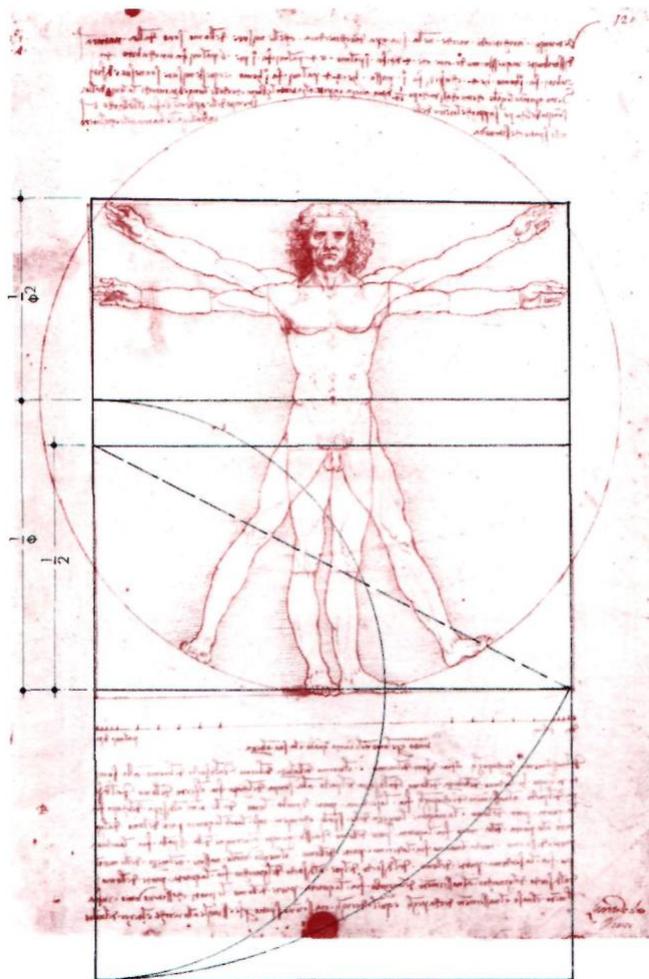
Fonte: slideplayer.com.br/slide/11884155/

Outra obra de Leonardo da Vinci que gera dúvidas e merece atenção especial é o *Homem Vitruviano* onde, segundo Contador [3], podemos ver a Proporção Áurea relacionada com a estrutura ideal do corpo humano. O desenho foi proposto por Marcus Vitruvius Pollio em sua obra *Os Dez Livros da Arquitetura* no século I a.C.

Ao longo da história o homem vem buscando regularidades matemáticas e proporções no próprio corpo. O *Homem Vitruviano* associa o corpo humano à geometria e ao número. Leonardo mostrou que o corpo humano é mensurável e que suas linhas e formas são pura geometria, além de que, sua proporcionalidade e harmonia são exemplos de perfeição, estética e beleza.

Contador (2015) entende que em *Homem Vitruviano* podemos ver a Proporção Áurea relacionada com a estrutura ideal do corpo humano. Segundo o autor, várias tradições antigas dizem que o umbigo divide o corpo humano segundo a Proporção Áurea, ou seja, o resultado da divisão da altura total pela altura do umbigo, deve ser o Número de Ouro. Assim, se a altura total for 1, a altura até o umbigo será $\frac{1}{\Phi}$ e do umbigo até o alto da cabeça será $\frac{1}{\Phi^2}$, e o órgão genital terá altura $\frac{1}{2}$ (Figura 5.11).

Figura 5.11: O Homem Vitruviano



Fonte: Lawlor, 1996

Ao contrário do que encontramos em Contador (2015), em Livio (2006) o autor ques-

tiona o uso da Razão Áurea nas obras do início da renascença:

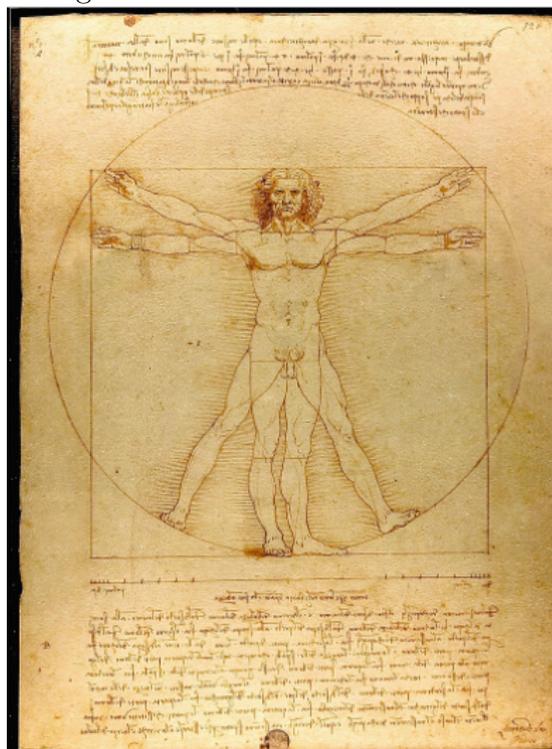
será que algum pintor renascentista ou pré-renascentista realmente baseou sua composição artística no Retângulo Áureo?

Em Livio (2006) o autor traz alguns argumentos para justificar seu questionamento. Como vimos, Leonardo da Vinci é um nome que aparece com frequência para justificar o uso da Razão Áurea em obras renascentistas. O autor analisa cinco obras de da Vinci: *O Homem Vitruviano*, *Virgem dos Rochedos*, *São Jerônimo*, o desenho de *uma cabeça de ancião* e a famosa *Monalisa*.

Segundo Livio (2006), Luca de Pacioli, que foi quem apresentou a Razão Áurea a Leonardo da Vinci, no segundo livro de *A Proporção Divina* fala do conceito do *Homem Vitruviano*, lindamente desenhado por da Vinci (Figura 5.12, atualmente na Galleria dell'Accademia, Veneza) discutindo sobre as proporções do corpo humano, mas não relaciona com a Razão Áurea. Em vez disso, ao lidar com desenho e proporção ele defende que o sistema vitruviano é baseado em razões simples (racionais).

Pesquisando em outras literaturas, percebemos que não existe provas de que Leonardo Da Vinci tenha usado a Razão Áurea no *Homem Vitruviano*. Existe um texto que acompanha a imagem, mas ele não diz nada sobre essa relação, nem sobre a distância do umbigo até os pés. O texto não contém nenhuma menção de Φ . Não há nenhuma sugestão na imagem de que Leonardo estava fazendo algo mais profundo do que relacionar o homem a um círculo e um quadrado.

Figura 5.12: O Homem Vitruviano



Fonte: wikipedia

Outro quadro que gera questionamentos segundo Livio (2006) é *Monalisa*. A obra foi tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca. E supõe-se que a

Razão Áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto de Monalisa. Na falta de qualquer indicação clara e documentada do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa ideia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos.

O caso das duas versões da *Virgem dos Rochedos* (uma no Louvre, em Paris, e a outra na National Gallery, em Londres, como podemos ver na figura 5.13), não é particularmente convincente com relação ao uso da Razão Áurea. A razão entre a altura e a largura da pintura feita no Louvre é de cerca de 1,64 m e a outra, de 1,56 m, ambas próximas de Φ , mas próximas também da razão 1,6.

Figura 5.13: Virgem dos Rochedos



Fonte: leonardodavinci.cc/a-virgem-dos-rochedos/

Outros aspectos que deixam dúvidas da utilização da Razão Áurea na obra *Virgem do Rochedos* são a datação e a autenticidade. Especialistas que estudaram as duas pinturas concluíram que a versão do Louvre foi feita inteiramente por Leonardo, enquanto a versão da National Gallery pode ter sido um esforço conjunto e é ainda motivo de debates. Acredita-se que a versão de Louvre tenha sido produzida por Leonardo em Milão, provavelmente entre 1483 e 1486, enquanto a pintura da National Gallery foi concluída por volta de 1506. A primeira versão (aquela cuja autenticidade é certa) da *Virgem dos Rochedos* foi concluída antes de Leonardo conhecer Pacioli, que foi quem lhe apresentou a Proporção Divina. Assim, a afirmação de que Leonardo Da Vinci usava a Razão Áurea na *Virgem dos Rochedos* significa acreditar que o artista adotou essa proporção antes mesmo de começar sua colaboração com Pacioli. Apesar disto não ser impossível, não existe evidência que sustente esta interpretação.

Em Livio (2006) o autor diz que há uma incerteza semelhante a respeito do inacabado *São Jerônimo* (Figura 5.10). Não só a pintura que é de 1483, muito antes da ida de Pacioli para para Milão, como a afirmação feita em alguns livros de que um retângulo áureo se encaixa tão bem em volta de *São Jerônimo*, exige um excesso de imaginação.

O desenho *uma cabeça de ancião* (Figura 5.14), também é um possível exemplo do uso da Razão Áurea por Leonardo. O desenho está atualmente na Galleria dell'Academia, em

Veneza. O perfil e o diagrama de proporções foram desenhados a lápis por volta de 1490, e alguns complementos foram feitos com uma grade superposta por volta de 1503-1504, quando Leonardo produziu a *Batalha de Anghiari*.

Embora a grade superposta deixe muito poucas dúvidas de que Leonardo estava realmente interessado nas várias proporções da face, não dá para fazer qualquer conclusão definitiva desse estudo. O retângulo no meio, à esquerda, por exemplo, é aproximadamente um retângulo áureo, mas as linhas estão desenhadas de modo tão grosseiro, que não podemos ter certeza. Ainda sim, este desenho é o que mais se aproxima de uma demonstração de que Leonardo usou retângulos para determinar as dimensões na suas pinturas e que até pode ter considerado a aplicação da Razão Áurea na sua arte.

Figura 5.14: uma cabeça de anção



Fonte: Livio, 2006, p.189

Ainda que existam dúvidas sobre a utilização da Razão Áurea por Leonardo nas suas pinturas, mesmo ele sendo não apenas amigo de Pacioli, mas também ilustrador de *A Proporção Divina*, isso não significa que nenhum outro artista jamais tenha usado.

Com a onda de trabalhos acadêmicos sobre a Razão Áurea no fim do século XIX, os artistas também passaram a tomar conhecimento. O primeiro artista proeminente e teórico da arte a utilizar a razão provavelmente foi Paul Sérusier (1864 - 1927). Embora o interesse de Sérusier pela Razão Áurea pareça ter sido mais filosófico do que prático, ele realmente usou essa proporção em algumas de suas obras, principalmente para “verificar, e ocasionalmente checar, suas invenções de formas e suas composições”.

Depois de Sérusier vários outros artistas usaram comprovadamente a Razão Áurea em suas obras, como o escultor James Lipchitz (1891-1973), os pintores Juan Gris (1887-1927), Gino Severini (1883-1966), entre outros. O pintor espanhol Salvador Dalí (1904-1989) também usou a Razão Áurea em suas obras, como no quadro *A Última Ceia* de 1955 (Figura 5.15).

Figura 5.15: A Última Ceia



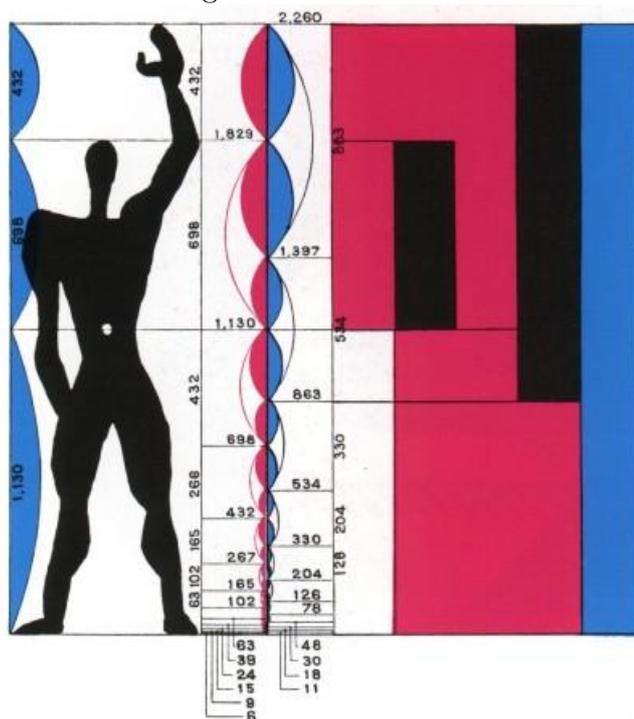
Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/>

5.3 O Número de Ouro na Arquitetura

Um dos grandes defensores da aplicação da Razão Áurea na arte e na arquitetura foi o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Le Corbusier (Charles Édouard Jeanneret, 1887-1965).

A busca de Le Corbusier por uma proporção padronizada resultou na introdução de um novo sistema proporcional chamado *modulor*. Segundo Livio (2006) o modulor forneceria uma medida harmônica para a escala humana, universalmente aplicável na arquitetura e na mecânica. Isso nada mais é do que uma outra versão do famoso ditado de Protágoras, do século V a.C., *O homem é a medida de todas as coisas*. Com isso, no espírito do Homem Vitruviano e do compromisso filosófico geral de descobrir um sistema de proporções equivalentes ao da criação natural, o modulor era baseado nas proporções humanas (Figura 5.16).

Figura 5.16: Modulor



Fonte: Coisas da Arquitetura

Um homem medindo seis pés (cerca de 1,83 m), parecendo um pouco com o familiar logotipo do “Homem do Michelin”, com seu braço erguido (até uma altura de 2,26 m), foi inserido em um quadrado. A razão entre a altura do homem (183 cm) e a altura até o umbigo (no ponto médio de 113 cm) foi escolhida precisamente em uma Razão Áurea. A altura total (dos pés até o braço levantado) também estava dividida em uma Razão Áurea (em 140 cm e 86 cm) no nível do pulso de um braço solto para baixo.

Le Corbusier sugeriu que o modulor daria proporções harmoniosas a tudo, em tamanhos de gabinetes e maçanetas a edifícios e espaços urbanos. Com uma crescente necessidade de produção em massa no mundo, esperava-se que o modulor fornecesse um modelo de padronização.

As obras Corbusier (1954) e Corbusier (1980), recebeu grande atenção dos estudiosos dos círculos da arquitetura e eles continuaram a aparecer em qualquer discussão sobre proporção.

Segundo Livio (2006) Le Corbusier traduziu na prática sua teoria do modulor em muitos de seus projetos. Por exemplo, em suas notas para o impressionante layout urbano de Chandigarh, cidade da Índia que ele ajudou a projetar, encontramos: *Mas é claro, o modulor veio no momento de dividir a área da janela... Na seção geral do prédio destinada a proporcionar proteção contra o sol aos escritórios e tribunais, o modulor dará unidade estrutural a todos os lugares.* Podemos ver o Capitólio, prédio projetado por Le Corbusier e construído na Cidade de Chandigarh na Figura 5.17.

Figura 5.17: Capitólio



Fonte: chandigarh-unicamp

6 Sugestões de atividades para a sala de aula

Acreditamos que a Proporção Áurea é um rico tema para explorar o ensino de Matemática na Educação Básica devido a diversidade de propriedades, problemas nos quais aparece e diversas aplicações em elementos do cotidiano dos alunos. O professor pode usar esse tema como motivação para trabalhar: geometria, razão e proporção, sequências numéricas e equação quadrática, por exemplo.

Nesse capítulo apresentaremos seis propostas de atividades para o 9º ano do Ensino Fundamental pois, teoricamente, os estudantes já apresentam os pré-requisitos necessários para desenvolvê-las. Porém, com algumas adaptações, estas atividades podem ser utilizadas para outras séries.

- Atividade 1 - O que é a Razão Áurea?
- Atividade 2 - Determinando o valor numérico do Número de Ouro.
- Atividade 3 - Construção do Triângulo Áureo e da Espiral Áurea.
- Atividade 4 - Construção do Retângulo Áureo e da Espiral Áurea.
- Atividade 5 - Construção do Pentágono Regular e do Pentagrama.
- Atividade 6 - A Razão Áurea na Sequência de Fibonacci.

As construções das figuras que produzimos podem ser feitas com instrumentos geométricos no papel, porém construiremos com o *software GeoGebra*. Este *software* é livre com comandos relativamente fáceis para os alunos da educação básica. Possui uma série de ferramentas que possibilitam trabalhar com os elementos e conceitos da geometria euclidiana e analítica, polígonos, cônicas, medidas de comprimento, área, ângulo entre outros recursos. Com este *software* é possível observar, de modo dinâmico, diferentes variações de uma figura, medidas de comprimento e de ângulo, coordenadas, rotações, simetrias, translações etc. O *software* pode ser obtido na página www.geogebra.org/ na opção *downloads* e, na literatura, existem vários tutoriais disponíveis mostrando como se trabalhar com o *GeoGebra*.

6.1 Atividade 1: O que é a Razão Áurea?

Objetivo: Apresentar a definição de Razão Áurea dada por Euclides e identificar sua presença no cotidiano.

Conteúdos abordados: construções geométricas; ponto médio de um segmento e mediatriz; razão e proporção; razão áurea; retas perpendiculares.

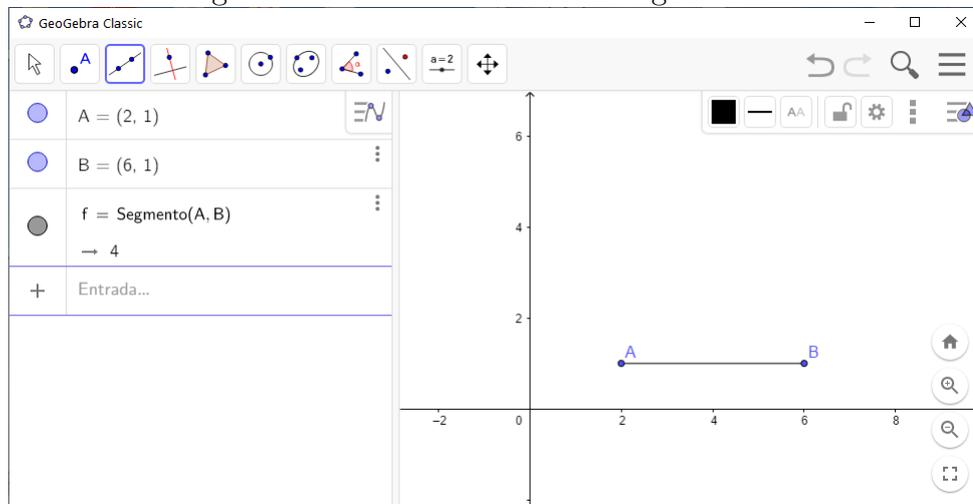
Desenvolvimento: Para desenvolver esta atividade sugerimos o seguinte roteiro, o qual deve durar, aproximadamente, duas aulas.

1º momento - Proporcionar aos alunos oportunidade de conhecer o que é a Razão Áurea e onde podemos encontrá-la no cotidiano. Esse momento pode durar aproximadamente uma aula. Sugerimos que sejam explorados vídeos e materiais disponíveis, por exemplo, o curta, *Donald no País da Matemática*¹. Lançado nos EUA em 1959, ele é um filme educativo que aborda, além da razão áurea, outras curiosidades da Matemática.

2º momento - Apresentar o *software GeoGebra* através da atividade onde apresentaremos a definição de Euclides para a Razão Áurea. Ou seja, através de sete passos realizados no *software*, vamos mostrar como dividir um segmento na razão áurea.

1º Passo - Construa um segmento AB . Para isso, na barra de ferramentas, clique no terceiro ícone, depois clique em segmento. Em seguida, na janela de visualização, clique em dois pontos A e B que serão os pontos extremos do seu segmento. Na Figura 6.1 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

Figura 6.1: Tela do *GeoGebra* - segmento AB

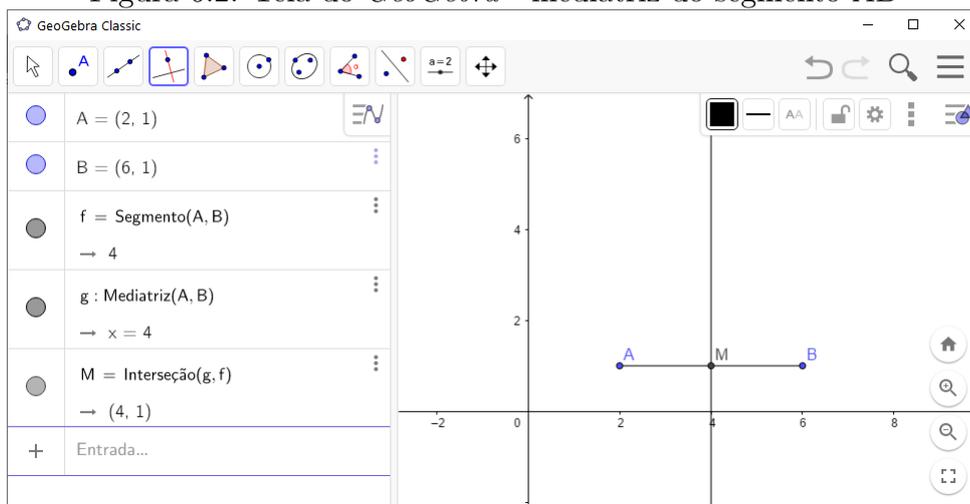


Fonte: Elaboração própria

2º Passo - Construa a mediatriz do segmento AB , determinando o ponto médio M . Na barra de ferramentas clique no quarto ícone e depois em mediatriz. Em seguida, clique nos dois pontos A e B do segmento. Na sequência, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, depois em ponto e clique no ponto médio do segmento AB . Renomeie o ponto médio, chamando-o de ponto M . Na Figura 6.2 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

¹Disponível em: [youtube.com/watch?v=PCswgW6cA6w](https://www.youtube.com/watch?v=PCswgW6cA6w).

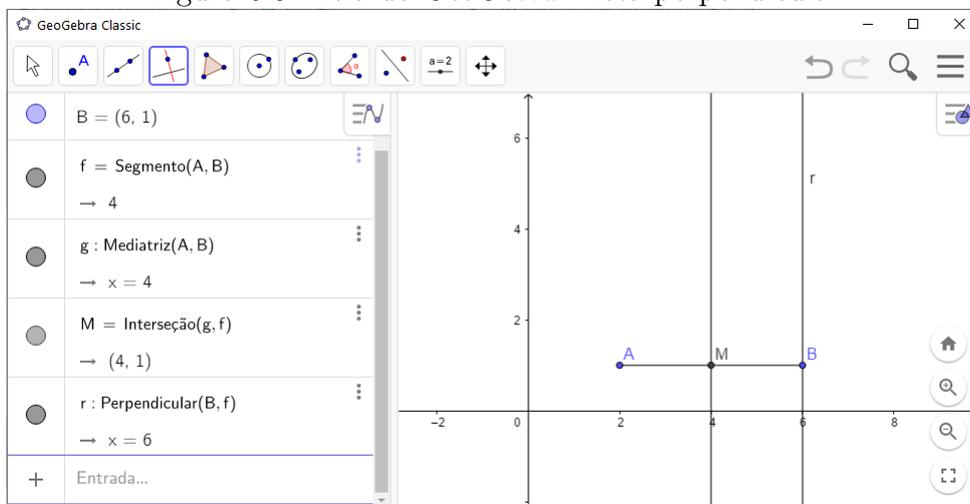
Figura 6.2: Tela do *GeoGebra* - mediatriz do segmento AB



Fonte: Elaboração própria

3º Passo - Pelo ponto B , trace a reta r perpendicular a AB . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em reta perpendicular. Na sequência, clique no ponto B e no segmento AB . Na Figura 6.3 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

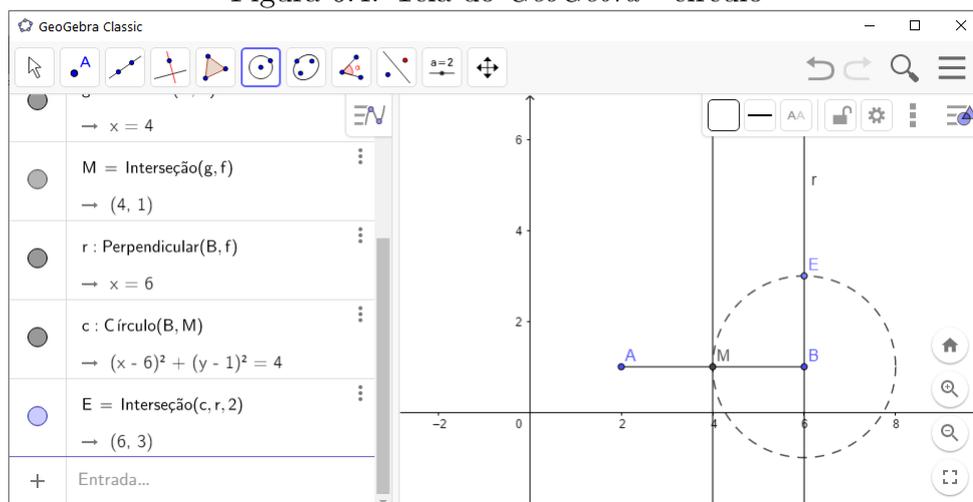
Figura 6.3: Tela do *GeoGebra* - reta perpendicular



Fonte: Elaboração própria

4º Passo - Com o centro em B e raio BM , trace um círculo e marque sobre a reta r o segmento BE . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo, dados centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no ponto B e no ponto M . Na sequência, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, depois em ponto e clique no ponto de interseção da reta r com o círculo de raio BM , criando o ponto E . Na Figura 6.4 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

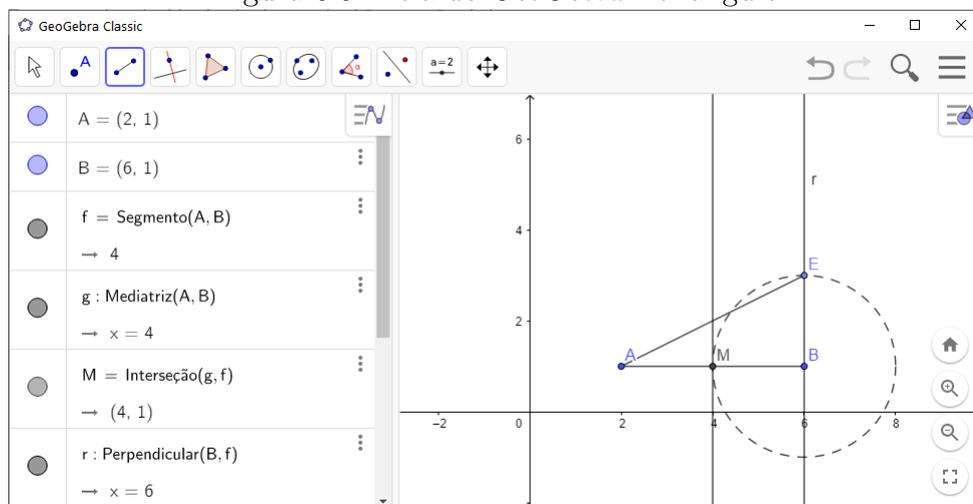
Figura 6.4: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

5º Passo - Ligue o ponto A ao ponto E , determinando o triângulo ABE retângulo em B . Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em segmento. Na sequência clique nos pontos E e A . Na Figura 6.5 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

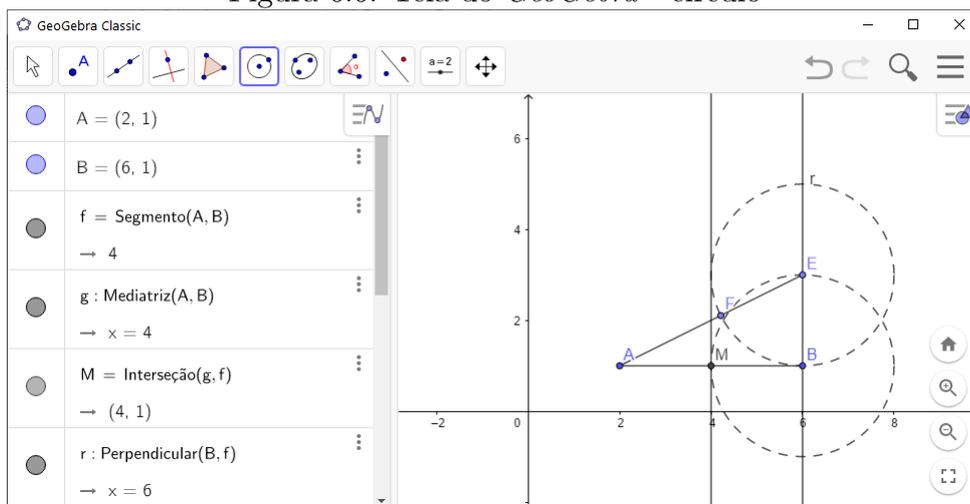
Figura 6.5: Tela do *GeoGebra* - triângulo



Fonte: Elaboração própria

6º Passo - Com centro em E e raio EB , trace um círculo e marque sobre o segmento AE , o ponto F . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo, dados centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no ponto E e no ponto B . Na sequência, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, depois em ponto e clique no ponto de interseção do segmento AE com o círculo de raio EB , criando o ponto F . Na sequência clique nos pontos E e A . Na Figura 6.6 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

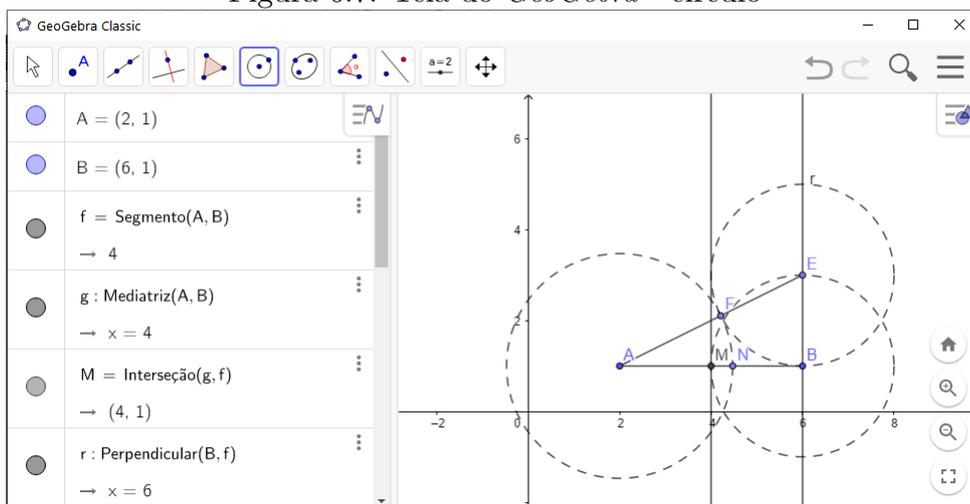
Figura 6.6: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

7º Passo - Com centro em A e raio AF , trace um círculo e marque sobre o segmento AB , o ponto N . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo, dados centro e um de seus pontos. Depois disso clique no ponto A e no ponto F . Na sequência, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, depois em ponto e clique no ponto de interseção do segmento AB com o círculo de raio AF , criando o ponto N . Na sequência clique nos pontos E e A . Na Figura 6.7 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

Figura 6.7: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

O ponto N obtido, é o ponto que divide AB na Razão Áurea ou seja, o ponto N divide o segmento de reta AB , de modo que $\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{NB} = \Phi$. A prova de que essa razão é igual a Φ já foi dada na Seção 3.1.

Figura 6.8: Divisão de um segmento em extrema e média razões



Fonte: Elaboração própria

6.2 Atividade 2: Determinando o valor numérico do Número de Ouro

Objetivo: Encontrar o valor numérico do Número de Ouro por meio da equação quadrática.

Conteúdo desenvolvido: Raízes de equação quadrática.

Desenvolvimento: Apresentar na lousa ou numa folha impressa as seguintes questões:

Questão 1) Sabendo que na figura abaixo, o ponto C divide o segmento AB em extrema e média razões, escreva as razões que determinam a Razão Áurea.



Fonte: Elaboração própria

Resposta:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Questão 2) Sabendo que, na figura abaixo, $AC = x$ e $CB = 1$, substitua os valores nas razões da questão 1 e encontre uma equação que determina o valor de x .



Fonte: Elaboração própria

Resposta:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Questão 3) Encontre as Raízes da equação determinada na Questão 2.

Resposta:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Questão 4) O Número de Ouro é a raiz positiva da equação quadrática da Questão 2 e vamos denotá-lo por Φ . Qual o valor numérico do Número de Ouro?

Resposta:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

6.3 Atividade 3: Construção do Triângulo Áureo e da Espiral Áurea

Objetivo: Definir e construir um triângulo áureo e, a partir dele, a espiral áurea.

Conteúdos desenvolvidos: Ângulos; Arco de circunferência; Semelhança de triângulos; Ponto médio de um segmento e mediatriz; Razão e Proporção; Razão Áurea; Espiral Áurea e Retas perpendiculares.

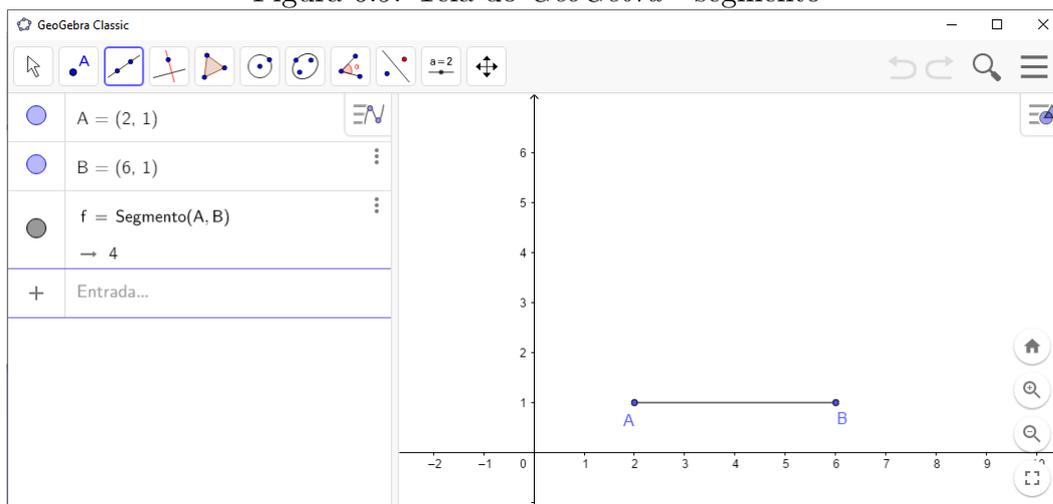
Desenvolvimento da atividade: O professor pode iniciar a aula trazendo exemplos de situações em que vemos o triângulo áureo e a espiral áurea. Por exemplo, no voo dos falcões ao atacar suas vítimas e nos sistemas de estrelas agrupadas em um plano comum, como as da Via Láctea.

Na sequência, usando o *software GeoGebra*, o professor deve seguir os passos abaixo para construir as figuras. Essa atividade deve durar, aproximadamente, duas aulas.

Construção do triângulo áureo

1º Passo - Construa um segmento AB . Este segmento será o lado menor do triângulo. Para isso, na barra de ferramentas clique no terceiro ícone, depois clique em segmento. Em seguida, na janela de visualização, clique em dois pontos A e B que serão os pontos extremos do seu segmento. Na Figura 6.9 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

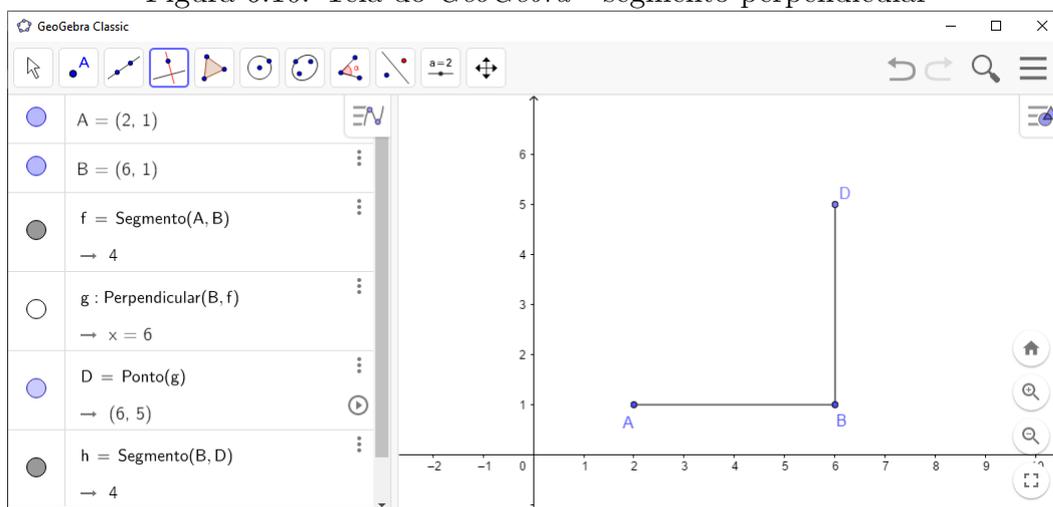
Figura 6.9: Tela do *GeoGebra* - segmento



Fonte: Elaboração própria

2º Passo - Construa um segmento BD perpendicular e congruente a AB . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em reta perpendicular. Na sequência, clique no ponto B e no segmento AB . Com isso construímos a reta g perpendicular ao segmento AB . Na sequência clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, em segmento e construa o segmento BD congruente ao segmento AB em cima da reta perpendicular g . Na sequência, clique com o botão direito na reta g e clique em exibir objeto para que a reta g não fique visível. Na Figura 6.10 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

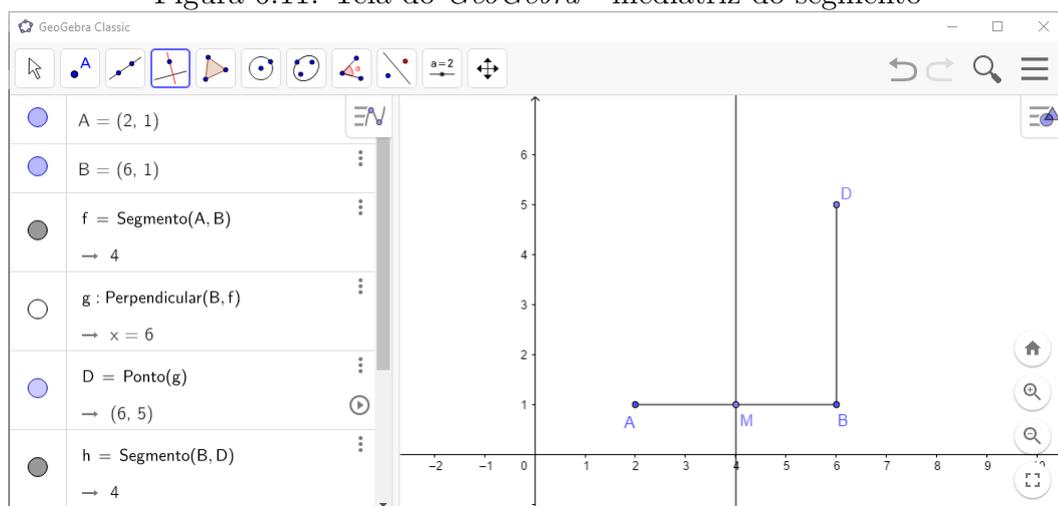
Figura 6.10: Tela do *GeoGebra* - segmento perpendicular



Fonte: Elaboração própria

3º Passo - Trace a mediatriz do segmento AB , determinando seu ponto médio M . Para isso, na barra de ferramentas clique no quarto ícone e depois em mediatriz. Em seguida, clique nos dois pontos A e B do segmento. Na sequência clique no segundo ícone da barra de ferramentas, depois em ponto e clique no ponto médio do segmento AB . Renomeie o ponto médio, chamando-o de ponto M . Na Figura 6.11 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

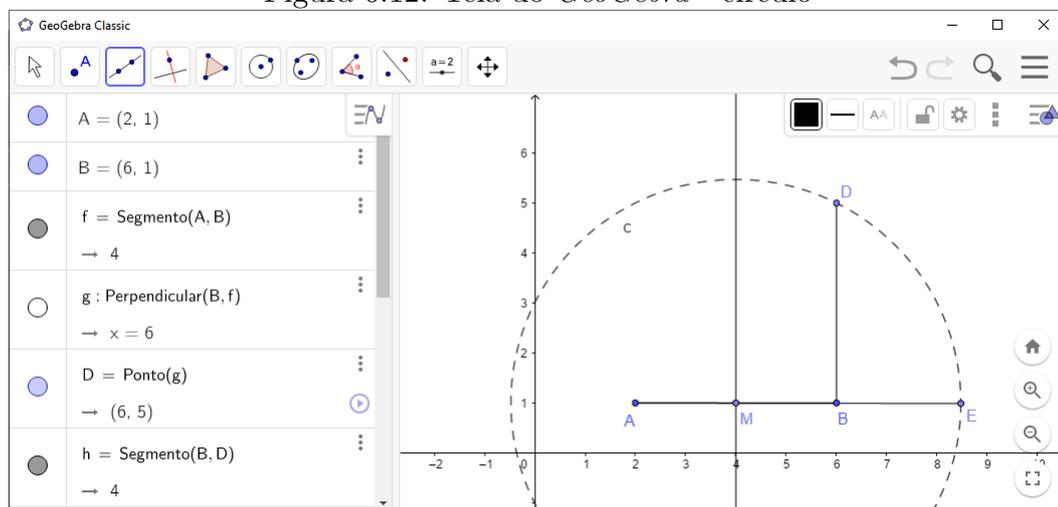
Figura 6.11: Tela do *GeoGebra* - mediatriz do segmento



Fonte: Elaboração própria

4º Passo - Trace um círculo de centro em M e raio MD , de modo a encontrar o segmento AB no ponto E . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no ponto M e no ponto D . Na sequência clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, depois em segmento e clique no ponto A e no círculo c de modo que esse novo segmento se sobreponha ao segmento AB . Na sequência renomeie o ponto desse novo segmento que está sobre o círculo, chamando-o de E . Na Figura 6.12 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

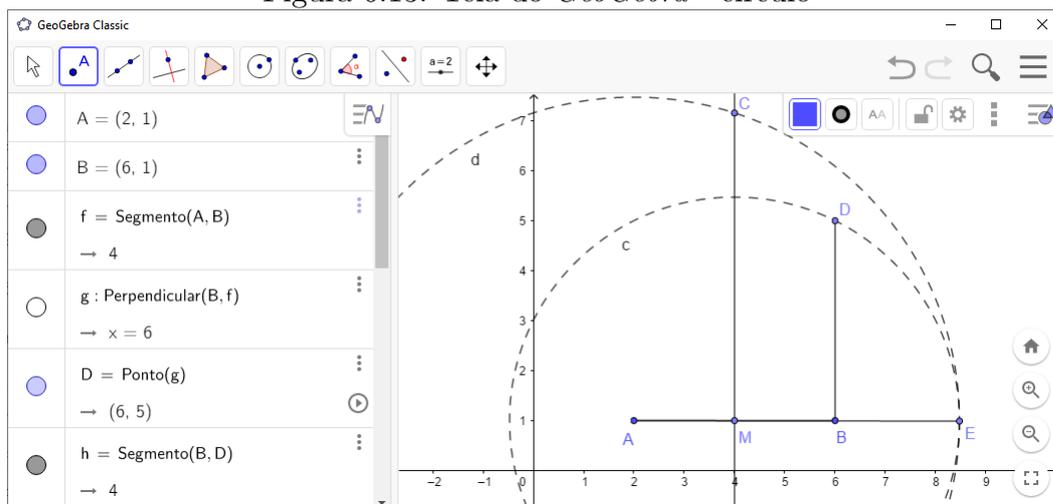
Figura 6.12: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

5º Passo - Trace um círculo de centro A e raio AE , até encontrar a reta mediatriz no ponto C . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Em seguida, clique no ponto A e no ponto E . Na sequência, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, ponto, e clique na interseção do círculo d com a mediatriz do segmento AB . Na Figura 6.13 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

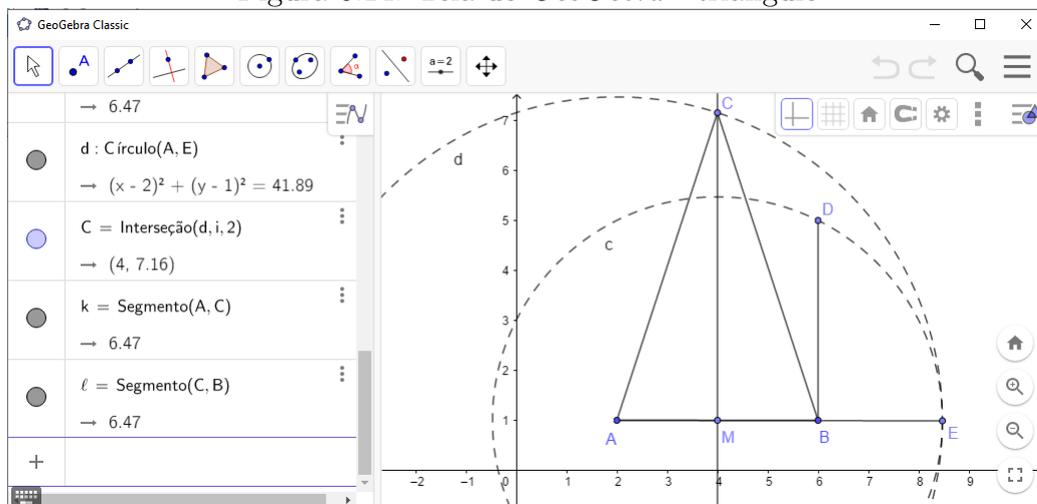
Figura 6.13: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

6º Passo - Construa o triângulo ABC . Para isso, na barra de ferramentas clique no terceiro ícone, depois em segmento. Na sequência, clique nos pontos A e C e depois, nos pontos C e B . Na Figura 6.14 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

Figura 6.14: Tela do *GeoGebra* - triângulo



Fonte: Elaboração própria

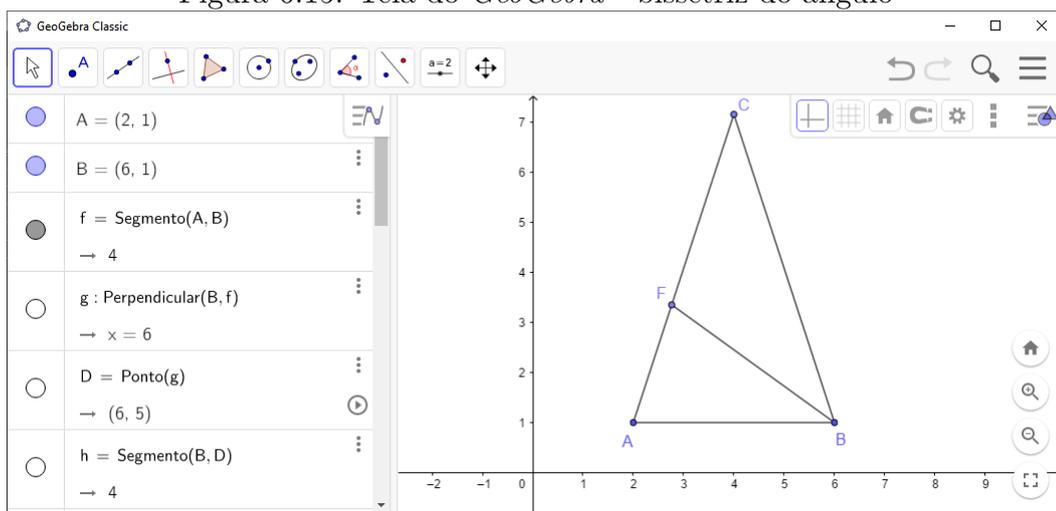
7º Passo - Fazer, juntamente com os alunos, a prova que o triângulo ABC é um triângulo áureo. Veja a prova na Seção 3.2.

Construção da espiral áurea

Agora, para determinar a espiral áurea devemos construir triângulos semelhantes ao triângulo ABC , dentro do próprio triângulo, partindo de um dos vértices com ângulo de 72° . Depois de construído o triângulo áureo ABC , vamos seguir os seguintes passos para determinar a espiral áurea.

1º Passo - Trace a bissetriz do ângulo $\angle ABC$, cortando o lado AC em F . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em bissetriz. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos A , B e C do triângulo. Depois disso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas depois, em segmento, clique nos pontos B e na interseção da bissetriz m com o lado AC . Para finalizar, clique com o botão direito na bissetriz m e em exibir objeto para que a bissetriz não fique visível. Na Figura 6.15 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

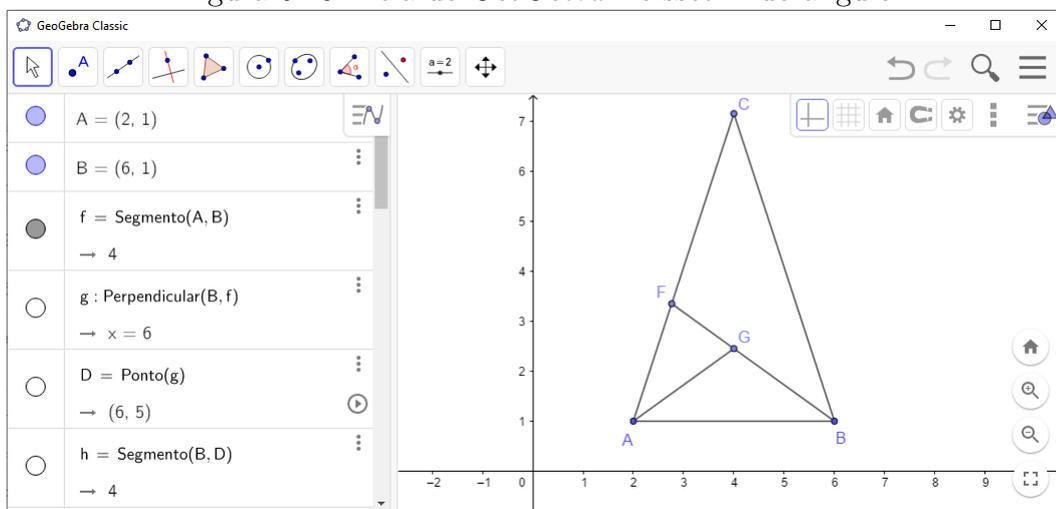
Figura 6.15: Tela do *GeoGebra* - bissetriz do ângulo



Fonte: Elaboração própria

2º Passo - Trace a bissetriz do ângulo $\angle FAB$, cortando o lado FB em G . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em bissetriz. Na sequência, clique, respectivamente, nos pontos B , A e F do triângulo. Depois disso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas depois, em segmento, clique nos pontos A e na interseção da bissetriz p com o lado FB . Para finalizar, clique com o botão direito na bissetriz p e em exibir objeto para que a bissetriz não fique visível. Na Figura 6.16 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

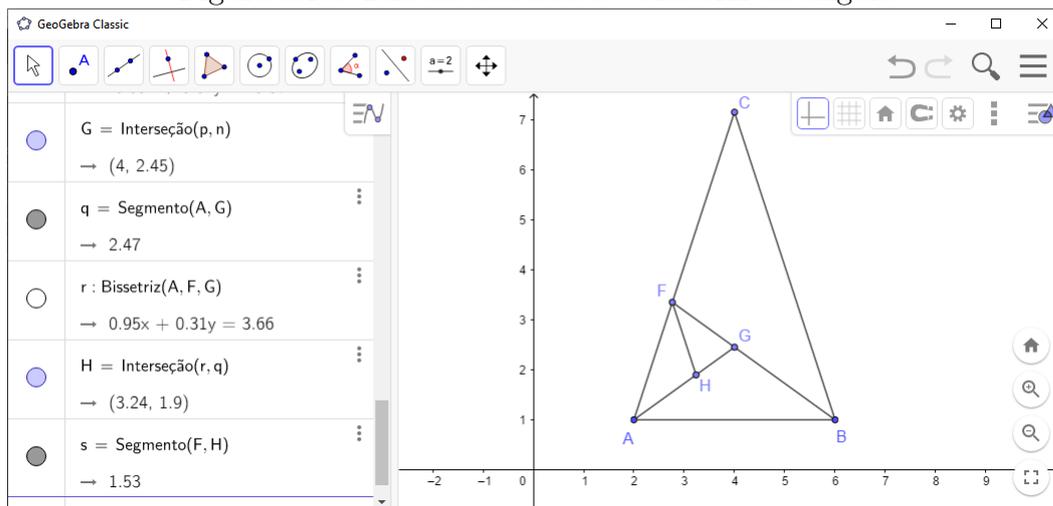
Figura 6.16: Tela do *GeoGebra* - bissetriz do ângulo



Fonte: Elaboração própria

3º Passo - Trace a bissetriz do ângulo $\angle AFG$, cortando o lado AG em H . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em bissetriz. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos A , F e G do triângulo. Depois disso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas depois, em segmento, clique nos pontos F e na interseção da bissetriz r com o lado AG . Para finalizar, clique com o botão direito na bissetriz r e em exibir objeto para que a bissetriz não fique visível. Na Figura 6.17 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

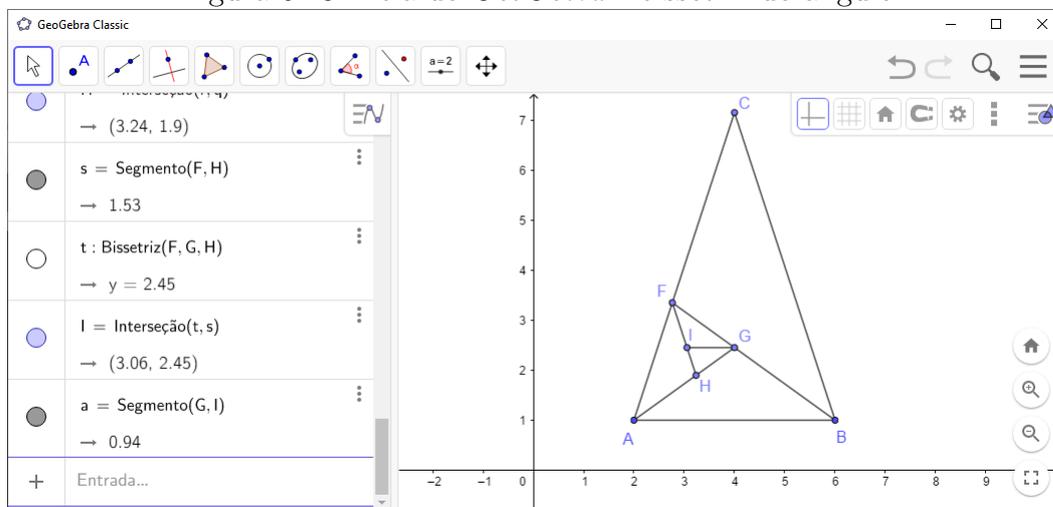
Figura 6.17: Tela do *GeoGebra* - bissetriz do ângulo



Fonte: Elaboração própria

4º Passo - Trace a bissetriz do ângulo $\angle FGH$, cortando o lado FH em I . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em bissetriz. Na sequência, clique, respectivamente, nos pontos F , G e H do triângulo. Depois disso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, depois em segmento e clique nos pontos G e na interseção da bissetriz t com o lado FH . Para finalizar, clique com o botão direito na bissetriz t e em exibir objeto para que a bissetriz não fique visível. Na Figura 6.18 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

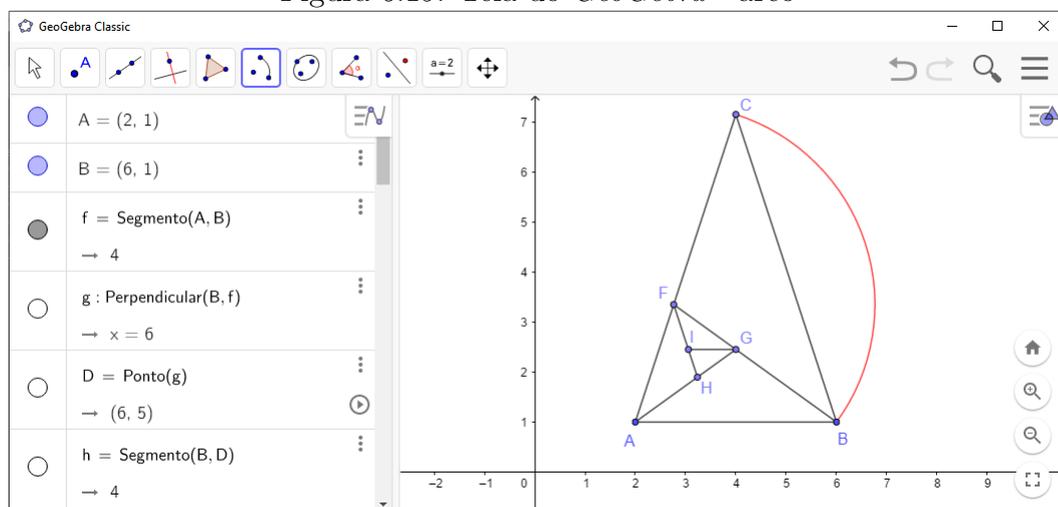
Figura 6.18: Tela do *GeoGebra* - bissetriz do ângulo



Fonte: Elaboração própria

5º Passo - Com centro em F trace o arco CB . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos F , B e C . Na Figura 6.19 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

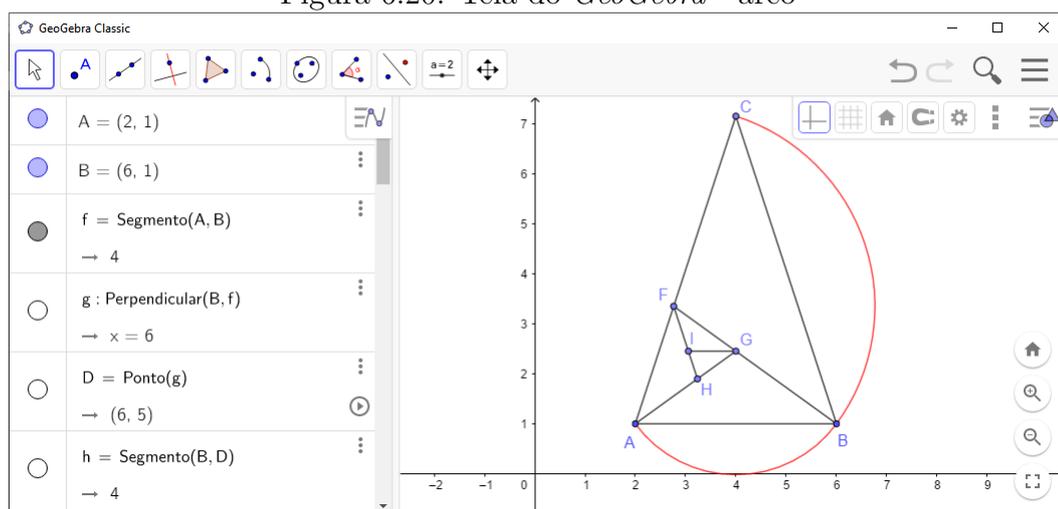
Figura 6.19: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

6º Passo - Com centro em G trace o arco BA . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência, clique, respectivamente, nos pontos G , A e B . Na Figura 6.20 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

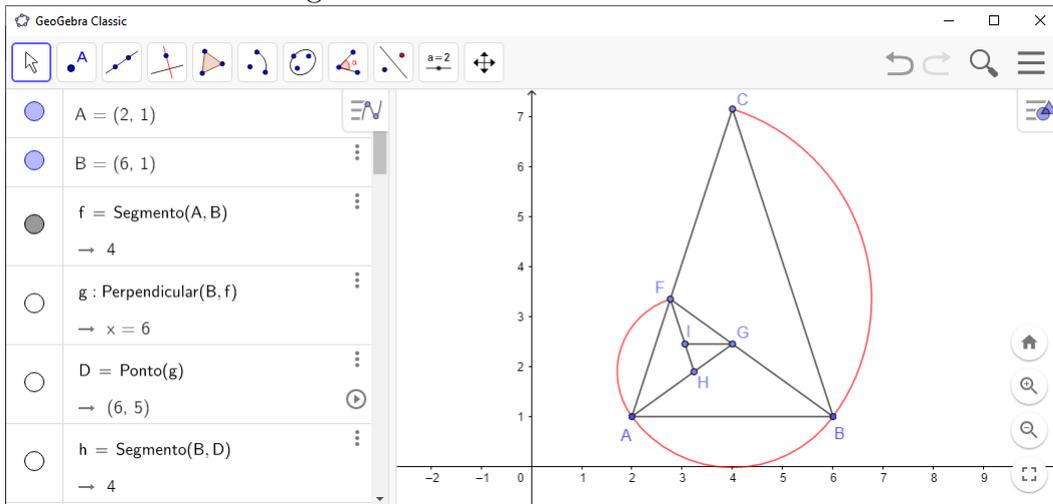
Figura 6.20: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

7º Passo - Com centro em H trace o arco AF . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência, clique, respectivamente, nos pontos H , F e A . Na Figura 6.21 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

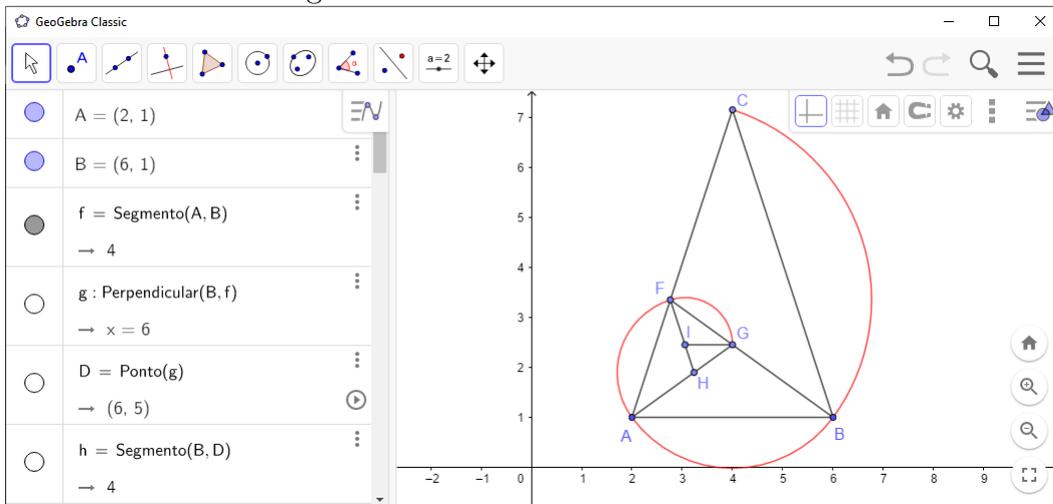
Figura 6.21: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

8º Passo - Com centro em I trace o arco FG . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos I , G e F . Na Figura 6.22 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

Figura 6.22: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

6.4 Atividade 4: Construção do Retângulo Áureo e da Espiral Áurea

Objetivo: Definir e construir um retângulo áureo e, a partir dele, obter a espiral áurea.

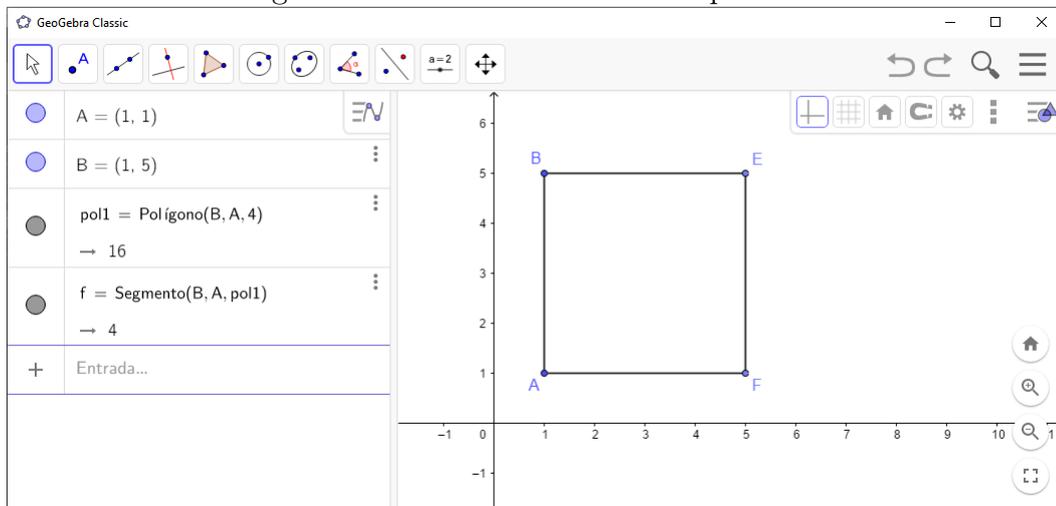
Conteúdos desenvolvidos: arco de circunferência; semelhança de figuras; quadriláteros; ponto médio de um segmento e mediatriz; razão e proporção; retângulo áureo; espiral áurea e retas perpendiculares.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode iniciar a aula trazendo exemplos de situações em que vemos o retângulo áureo e a espiral áurea. Por exemplo, na arquitetura nas obras de Le Corbusier e na arte, nas obras de vários artistas como Salvador Dalí. Na sequência, usando o *software GeoGebra*, o professor deve seguir os passos abaixo para construir as figuras. Essa atividade deve durar aproximadamente duas aulas.

Construção do retângulo áureo

1º Passo - Construa o quadrado $ABEF$. Para isso, clique no quinto ícone da barra ferramentas e em polígono regular. Na sequência, clique nos pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(1, 1)$ e em número de vértices digite 4. Em seguida renomeie os vértices do quadrado colocando A , B , E e F . Na Figura 6.23 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

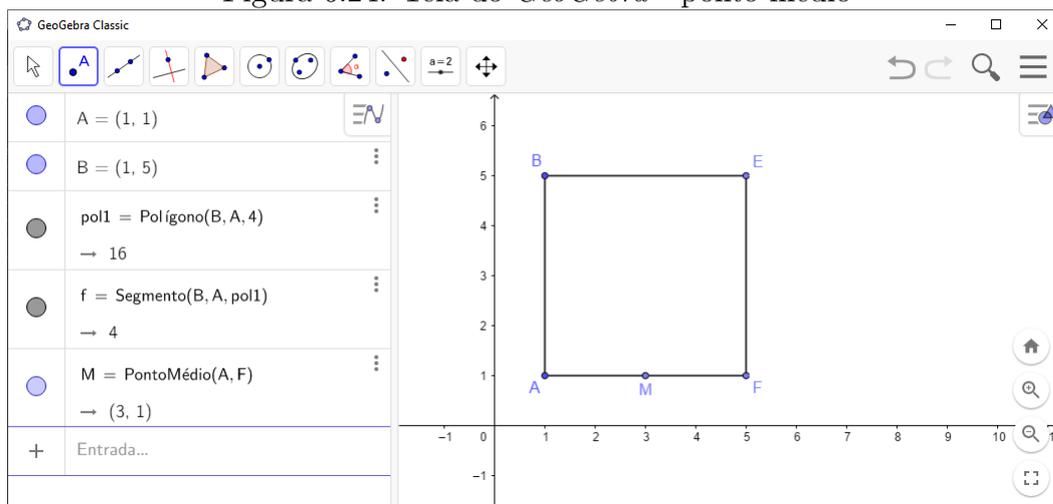
Figura 6.23: Tela do *GeoGebra* - quadrado



Fonte: Elaboração própria

2º Passo - Determine o ponto médio M do segmento AF . Para isso, clique no segundo ícone da barra de ferramentas e depois em ponto médio ou centro. Na sequência clique nos pontos A e F . Na Figura 6.24 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

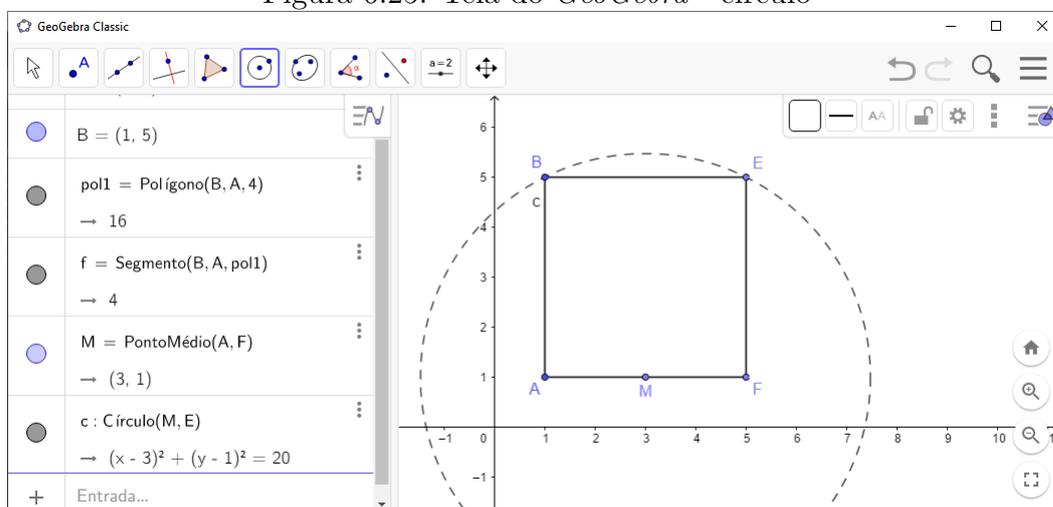
Figura 6.24: Tela do *GeoGebra* - ponto médio



Fonte: Elaboração própria

3º Passo - Com o centro em M e raio ME , trace o círculo c . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Em seguida, clique nos pontos M e E . Na Figura 6.25 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

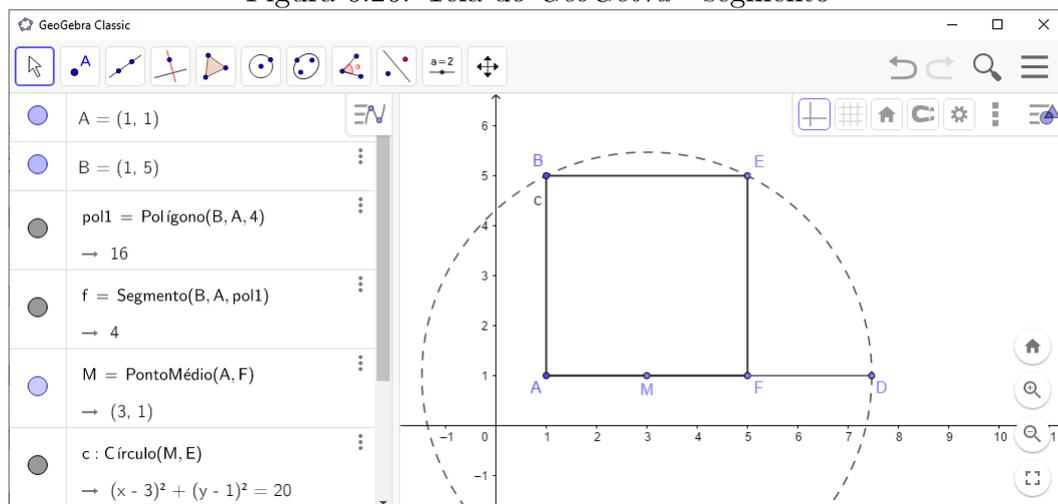
Figura 6.25: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

4º Passo - Construa o segmento AD sobre o segmento AF , de modo que D esteja contido no círculo c . Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em segmento. Na sequência, clique no ponto A e no círculo c de modo que o novo segmento fique sobre o segmento AF . Renomeie o ponto do segmento no círculo chamando-o de D . Na Figura 6.26 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

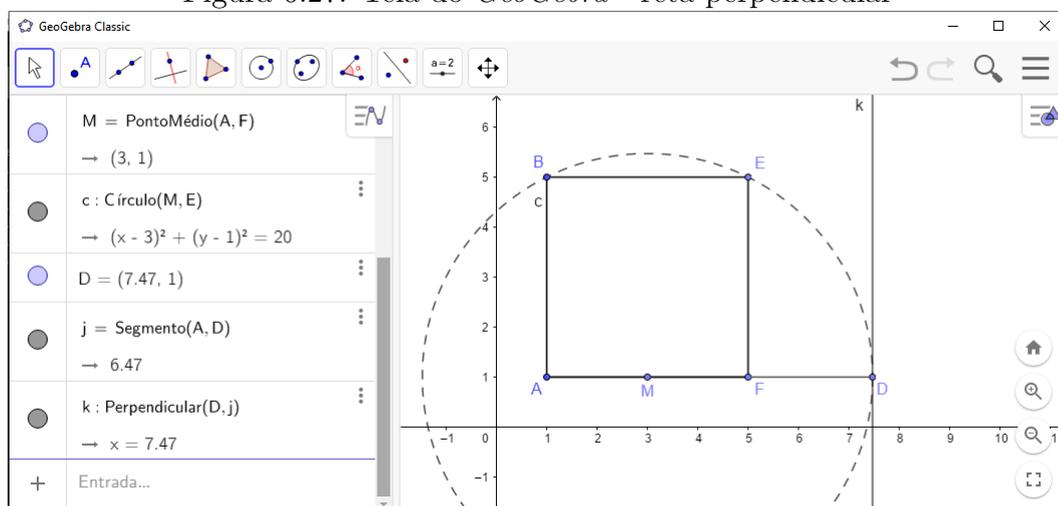
Figura 6.26: Tela do *GeoGebra* - segmento



Fonte: Elaboração própria

5º Passo - Pelo ponto D trace a reta k perpendicular ao segmento AD . Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e em reta perpendicular. Em seguida, clique no ponto D e no segmento AD . Na Figura 6.27 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

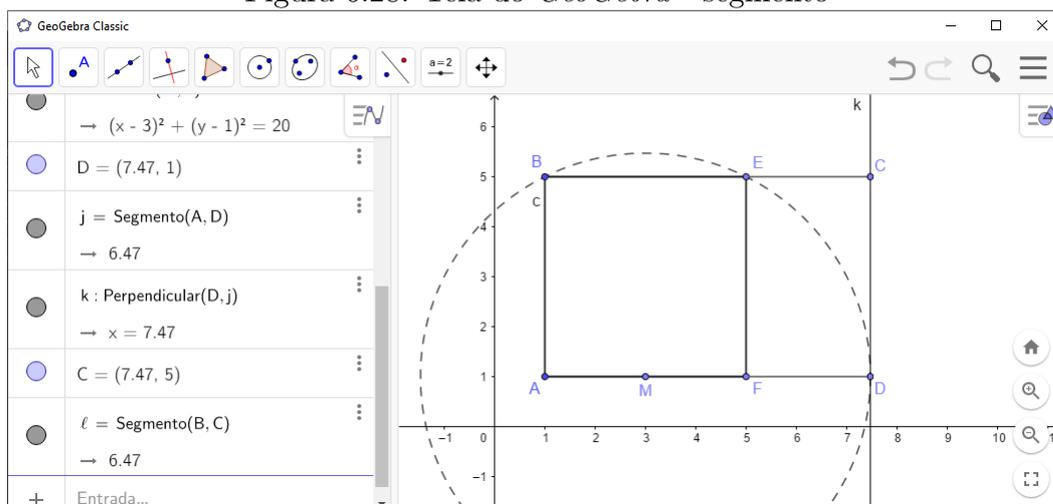
Figura 6.27: Tela do *GeoGebra* - reta perpendicular



Fonte: Elaboração própria

6º Passo - Construa o segmento BC sobre o segmento BE , de modo que C esteja contido na reta k . Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e em segmento. Na sequência, clique no ponto B e no ponto c contido na reta k , de modo que BC fique sobre BE . Na Figura 6.28 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

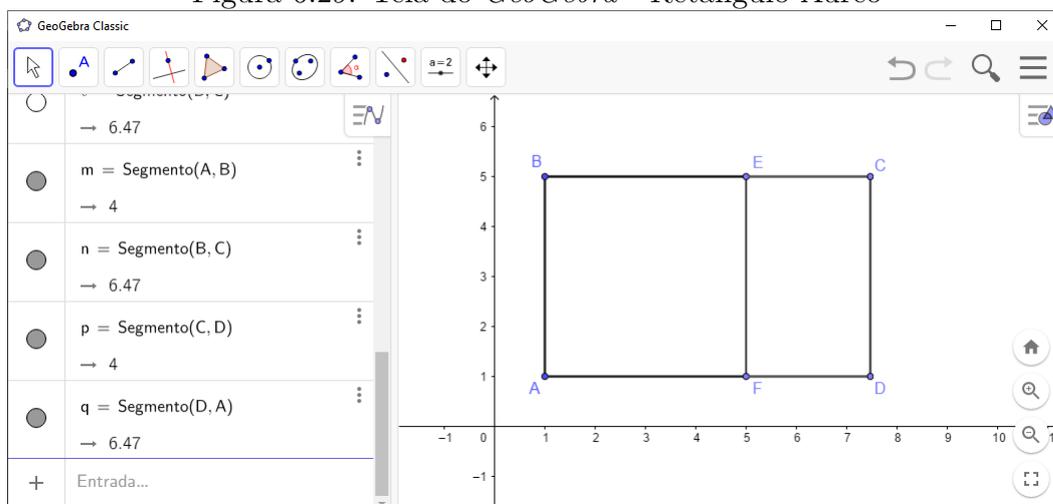
Figura 6.28: Tela do *GeoGebra* - segmento



Fonte: Elaboração própria

7º Passo - O retângulo $ABCD$ obtido é o retângulo áureo. Na Figura 6.29 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde mostramos o retângulo áureo.

Figura 6.29: Tela do *GeoGebra* - Retângulo Áureo



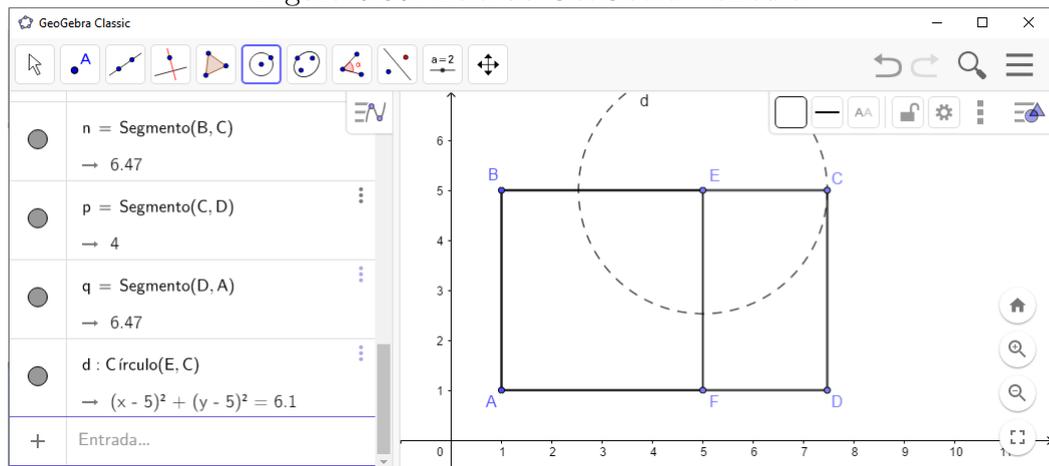
Fonte: Elaboração própria

Construção da espiral áurea

Para determinar a espiral áurea devemos construir retângulos semelhantes ao retângulo $ABCD$, dentro do próprio retângulo. Depois de construído o retângulo áureo $ABCD$, vamos seguir os seguintes passos para determinar a espiral áurea.

1º Passo - A partir do retângulo áureo obtido, com o centro em E e raio EC , trace o círculo d . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Na sequência, clique no ponto E e no ponto C . Na Figura 6.30 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

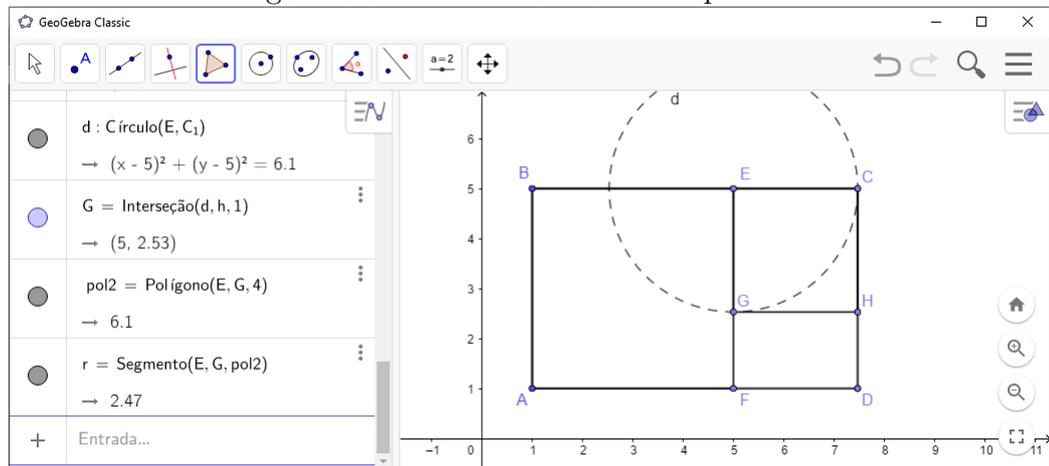
Figura 6.30: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

2º Passo - Construa o quadrado $EGHC$ com medida do lado igual ao raio do círculo d . Para isso, clique no quinto ícone da barra de ferramentas e em polígono regular. Na sequência, clique no ponto E , na interseção do segmento EF com o círculo d e em número de vértices digite 4. Na Figura 6.31 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

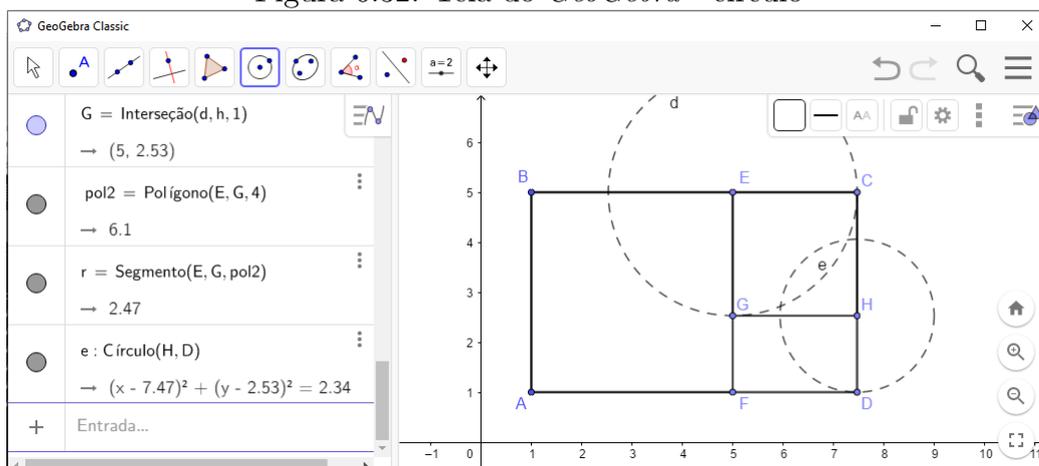
Figura 6.31: Tela do *GeoGebra* - quadrado



Fonte: Elaboração própria

3º Passo - Com o centro em H e raio HD , trace o círculo e . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Na sequência, clique no ponto H e no ponto D . Na Figura 6.32 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

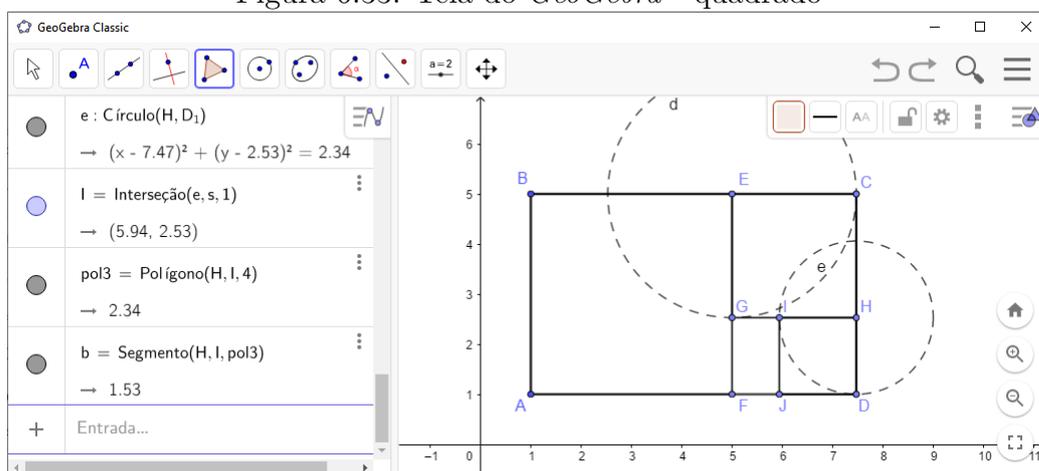
Figura 6.32: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

4º Passo - Construa o quadrado $HIJD$ com medida do lado igual ao raio do círculo e . Para isso, clique no quinto ícone da barra de ferramentas e em polígono regular. Na sequência, clique no ponto H , na interseção do segmento HG com o círculo e e em número de vértices digite 4. Na sequência, clique no ponto H e no ponto D . Na Figura 6.33 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

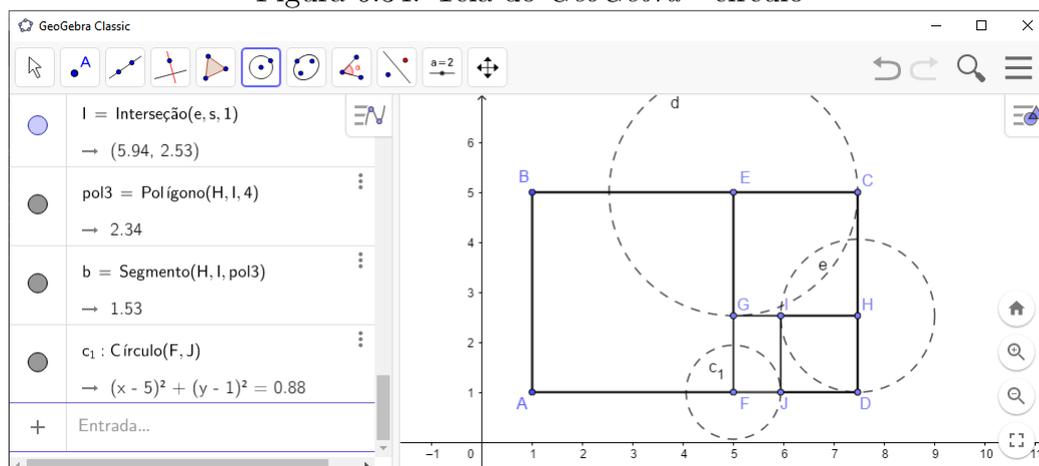
Figura 6.33: Tela do *GeoGebra* - quadrado



Fonte: Elaboração própria

5º Passo - Com o centro em F e raio FJ , trace o círculo c_1 . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Na sequência, clique no ponto F e no ponto J . Na Figura 6.34 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

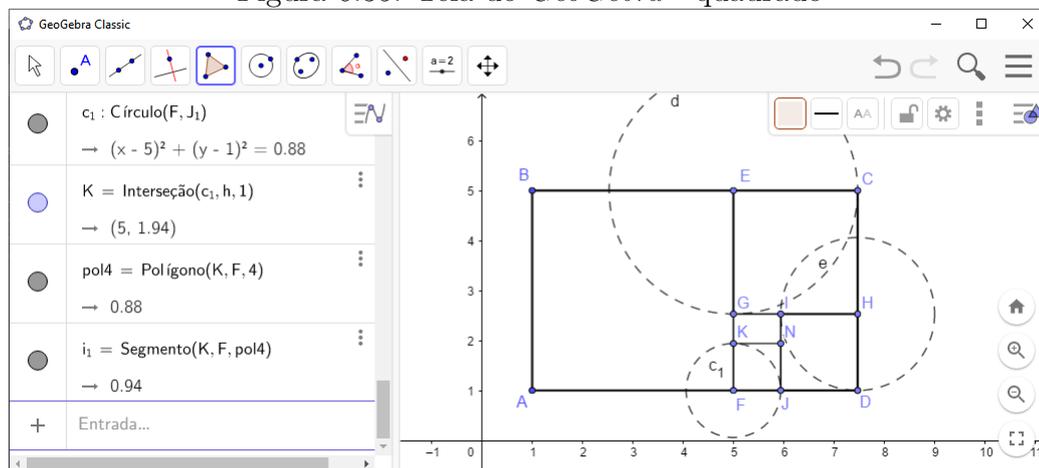
Figura 6.34: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

6º Passo - Construa o quadrado $NK FJ$ com medida do lado igual ao raio do círculo c_1 . Para isso, clique no quinto ícone da barra de ferramentas e em polígono regular. Na sequência, clique na interseção do segmento FG com o círculo c_1 , no ponto F e em número de vértices digite 4. Na sequência, clique no ponto F e no ponto J . Na Figura 6.35 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

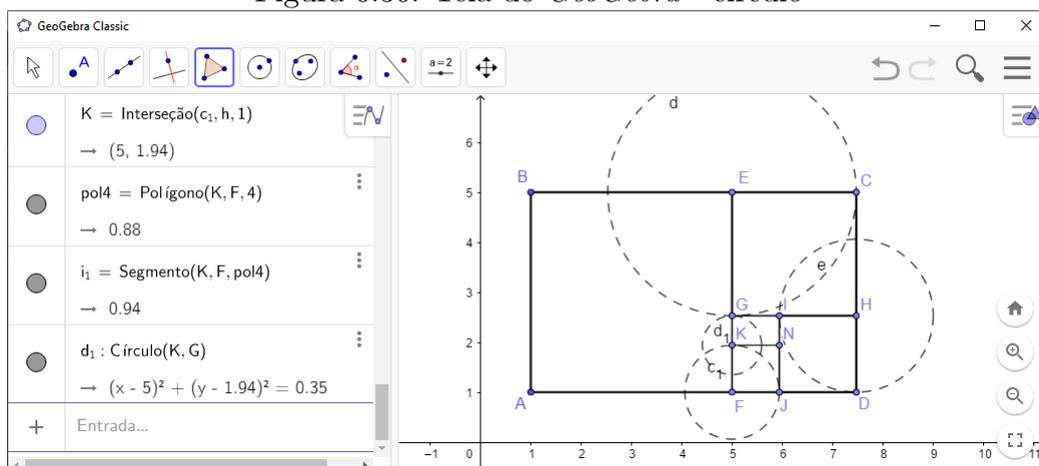
Figura 6.35: Tela do *GeoGebra* - quadrado



Fonte: Elaboração própria

7º Passo - Com o centro em K e raio KG , trace o círculo d_1 . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e um de seus pontos. Na sequência, clique no ponto K e no ponto G . Na Figura 6.36 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

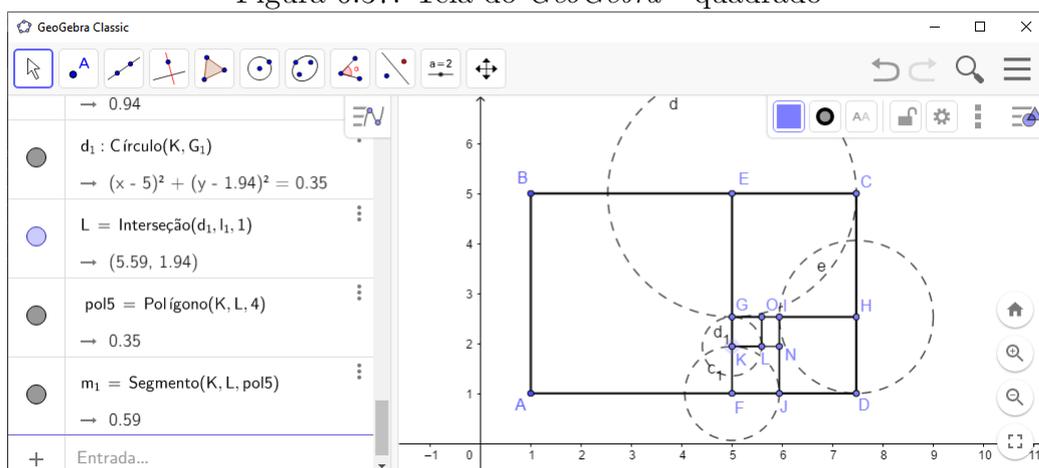
Figura 6.36: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

8º Passo - Construa o quadrado $OGKL$ com medida do lado igual ao raio do círculo d_1 . Para isso, clique no quinto ícone da barra de ferramentas e em polígono regular. Na sequência, clique no ponto K , na interseção do segmento KN com o círculo d_1 e em número de vértices digite 4. Na sequência, clique no ponto K e no ponto G . Na Figura 6.37 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

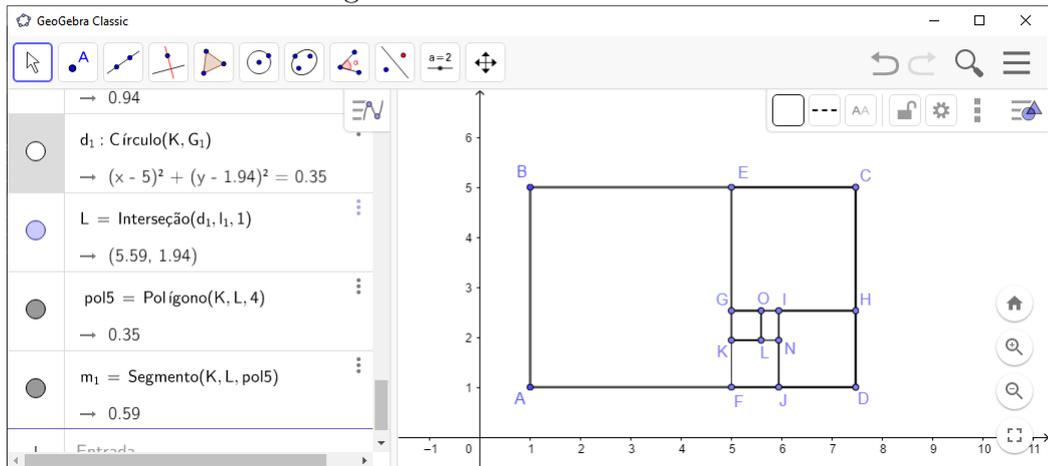
Figura 6.37: Tela do *GeoGebra* - quadrado



Fonte: Elaboração própria

9º Passo - Clique como botão direito do mouse em cima dos círculos e depois em exibir objeto para que os círculos não fiquem visíveis. Na Figura 6.38 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

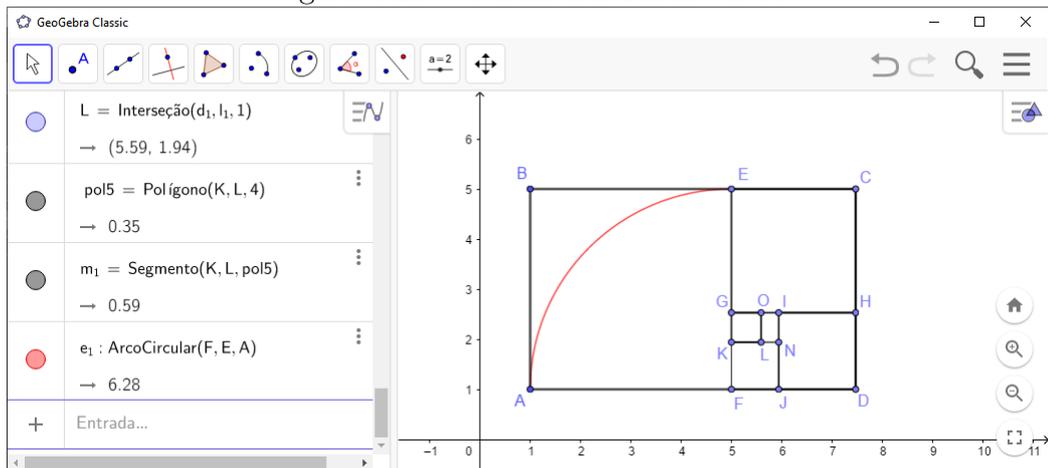
Figura 6.38: Tela do *GeoGebra*



Fonte: Elaboração própria

10º Passo - Com centro em F trace o arco AE . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência, clique, respectivamente, nos pontos F , E e A . Na Figura 6.39 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

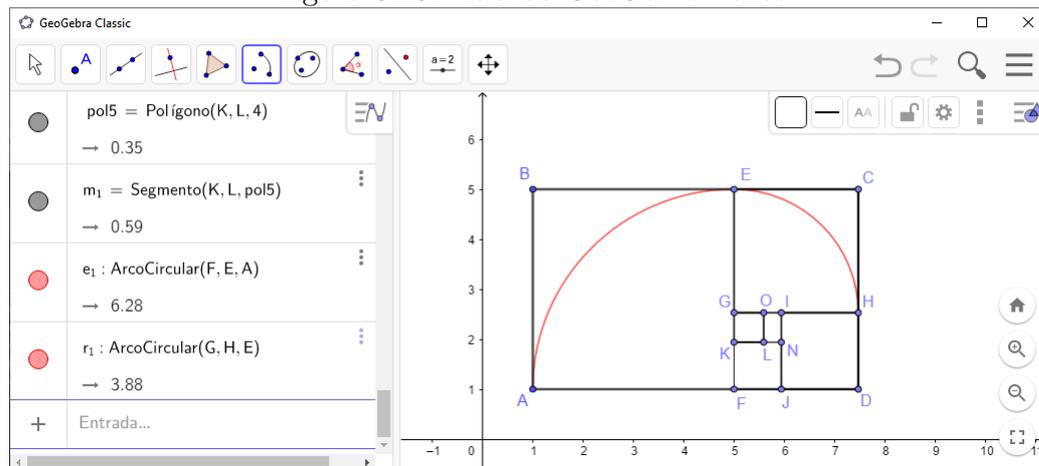
Figura 6.39: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

11º Passo - Com centro em G trace o arco EH . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos G , H e E . Na Figura 6.40 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

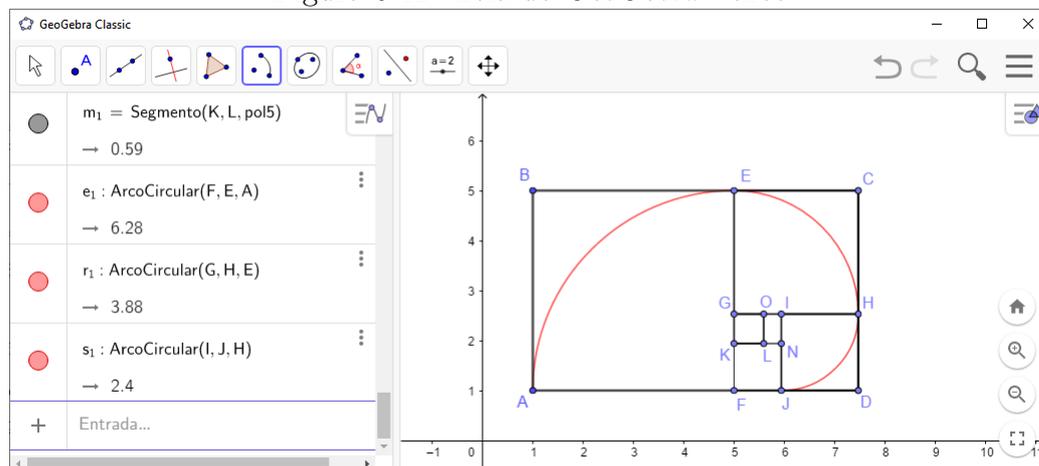
Figura 6.40: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

12º Passo - Com centro em I trace o arco HJ . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos I , J e H . Na Figura 6.41 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

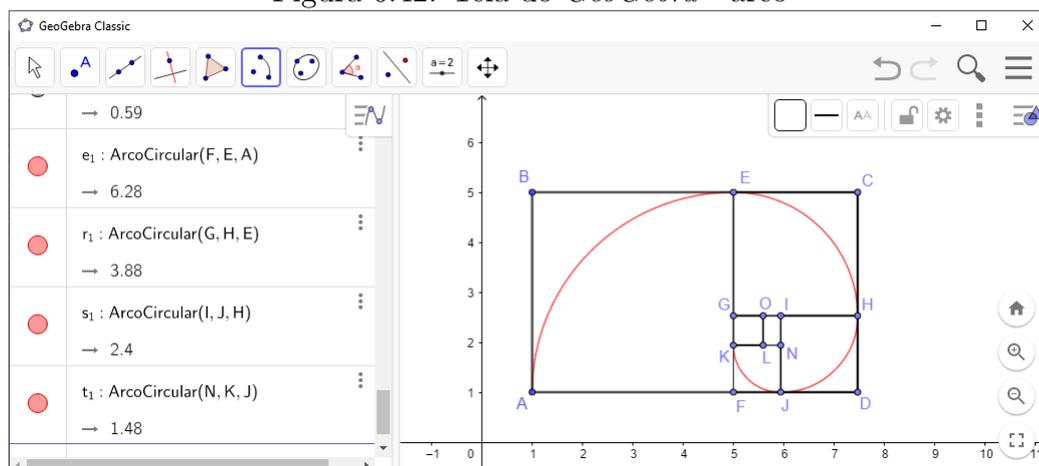
Figura 6.41: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

13º Passo - Com centro em N trace o arco JK . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos N , K e J . Na Figura 6.42 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

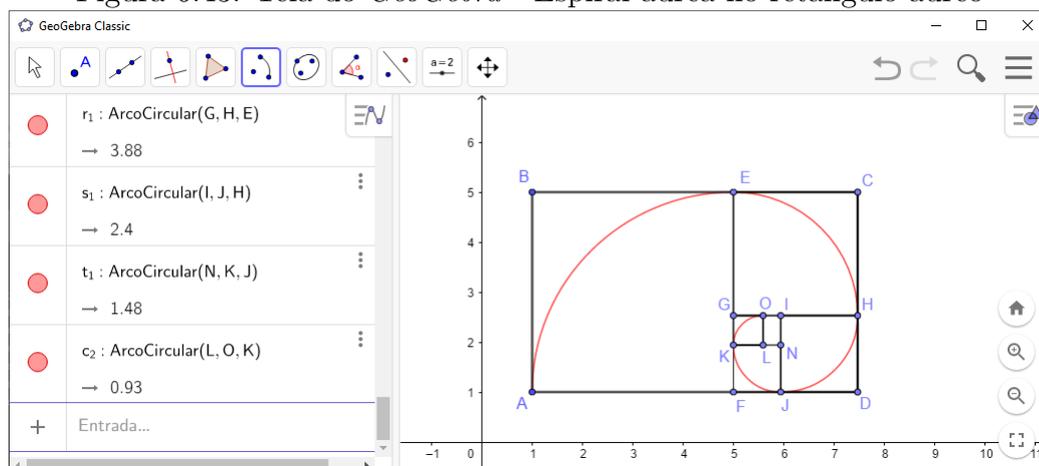
Figura 6.42: Tela do *GeoGebra* - arco



Fonte: Elaboração própria

14º Passo - Com centro em L trace o arco KO . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas e em arco circular. Na sequência clique, respectivamente, nos pontos L , O e K . A curva obtida é uma espiral áurea. Na Figura 6.43 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

Figura 6.43: Tela do *GeoGebra* - Espiral áurea no retângulo áureo



Fonte: Elaboração própria

6.5 Atividade 5: Construção do Pentágono Regular e do Pentagrama

Objetivo: Construir o Pentágono regular e, a partir dele, obter o pentagrama.

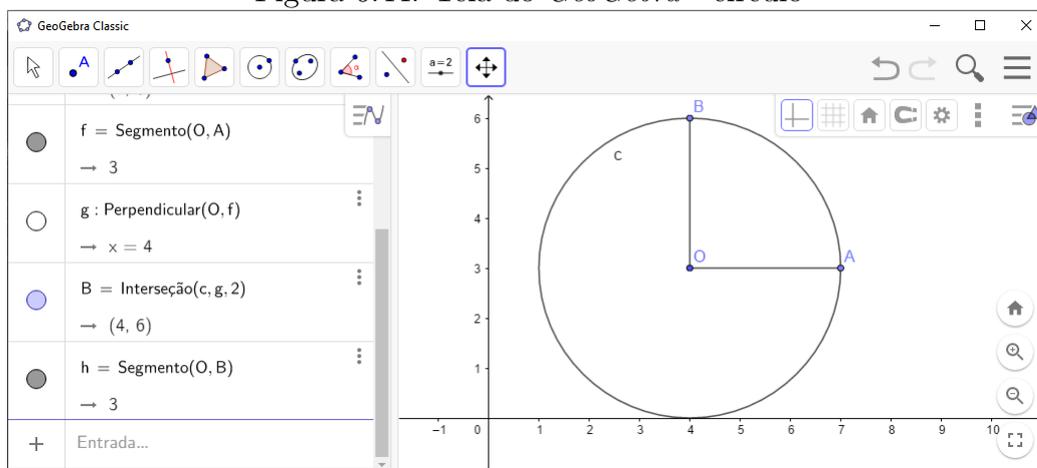
Conteúdos desenvolvidos: ângulos; arco de circunferência; construções geométricas; ponto médio de um segmento; razão áurea; polígonos regulares; retas perpendiculares.

Desenvolvimento da atividade: Apesar de existir uma forma mais rápida de construir o pentágono regular no *GeoGebra*, vamos descrever os passos abaixo pois eles podem

ser usados, tanto no *software*, quanto na construção manual com instrumentos geométricos. Esta atividade pode durar, aproximadamente, duas aulas

1º Passo - Construa um círculo de centro O e raio OA . Primeiramente, marque o ponto B de modo que o segmento OA seja perpendicular ao segmento OB . Para isso clique, no sexto ícone da barra de ferramentas e depois em círculo dados centro e raio. Na sequência, clique no ponto de coordenada $(4, 3)$ para centro do círculo e digite 3 para raio. Renomeie o centro chamando-o de O . Em seguida clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, em segmento, clique no ponto O e no ponto A sobre o círculo c de modo que OA seja paralelo ao eixo das abscissas. Depois disso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas, em reta perpendicular e clique no ponto O e no segmento OA . Na sequência, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, em segmento, clique no ponto O e na interseção da reta perpendicular g com o círculo c . Clique com o botão direito na reta perpendicular e em exibir objeto para que a reta deixe de aparecer. Na Figura 6.44 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

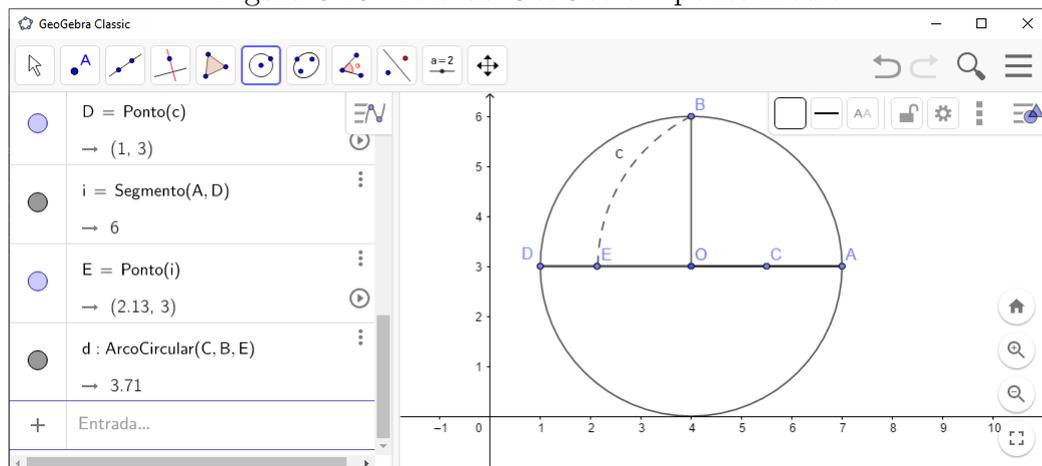
Figura 6.44: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

2º Passo - Determine o ponto médio, C , do segmento OA . Com centro em C e raio CB , trace o arco de circunferência BE que cortará o prolongamento do segmento OA em E . Para isso, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, em ponto médio e clique nos pontos O e A . Na sequência, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, em segmento, clique no ponto A e no círculo c de modo que o novo segmento fique sobre o segmento OA . Em seguida, clique no sexto ícone da barra de ferramentas, em arco circular e clique no ponto B e no prolongamento do segmento OA em E . Na Figura 6.45 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

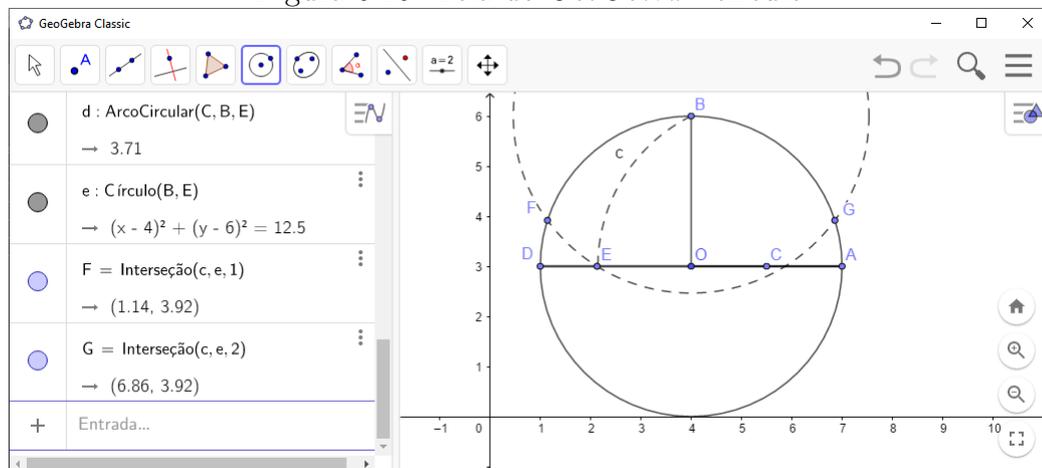
Figura 6.45: Tela do *GeoGebra* - ponto médio



Fonte: Elaboração própria

3º Passo - Com centro em B e raio BE , trace o círculo e e marque os pontos F e G que são interseções com o círculo c . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas, em círculo dados centro e um de seus pontos e clique nos pontos B e E . Na sequência, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, em ponto e clique nos pontos de interseção dos círculos c e e , criando os pontos F e G . Na Figura 6.46 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

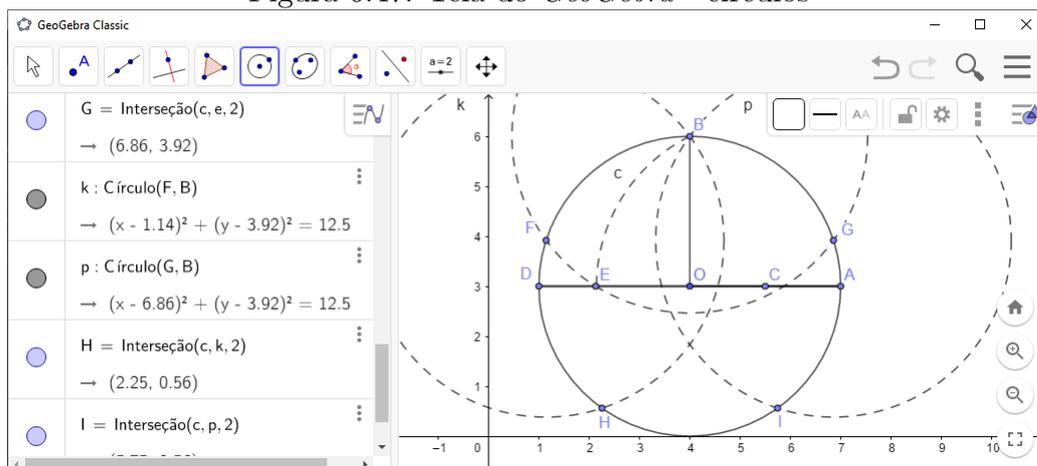
Figura 6.46: Tela do *GeoGebra* - círculo



Fonte: Elaboração própria

4º Passo - Com centro em F e raio FB trace o círculo k , marcando sobre o círculo c o ponto H . Com centro em G e raio GB trace o círculo p , marcando sobre o círculo c o ponto I . Para isso, clique no sexto ícone da barra de ferramentas, em círculo dados centro e um de seus pontos e clique nos pontos F e B criando o círculo k . Na sequência, clique nos pontos G e B criando o círculo p . Depois disso, clique no segundo ícone da barra de ferramentas, em ponto e clique nas interseções dos círculos k e p com o círculo c , criando os pontos H e I . Na Figura 6.47 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

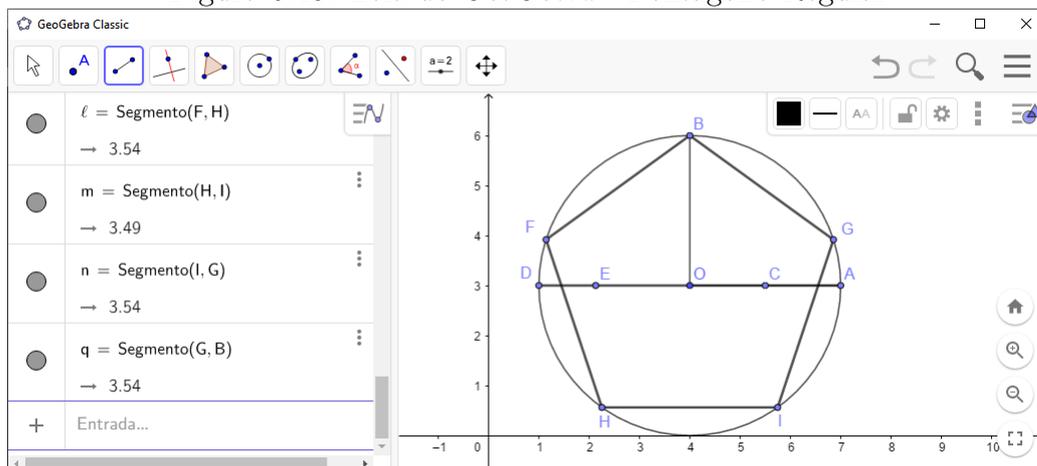
Figura 6.47: Tela do *GeoGebra* - círculos



Fonte: Elaboração própria

5º Passo - Ligando os pontos B, F, H, I e G obtemos o pentágono regular. Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, em segmento e clique nos pontos B e F , F e H , H e I , I e G , G e B . Depois disso, clique com o botão direito em todos os círculos e em exibir objeto para que os círculos não apareçam. Na Figura 6.48 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

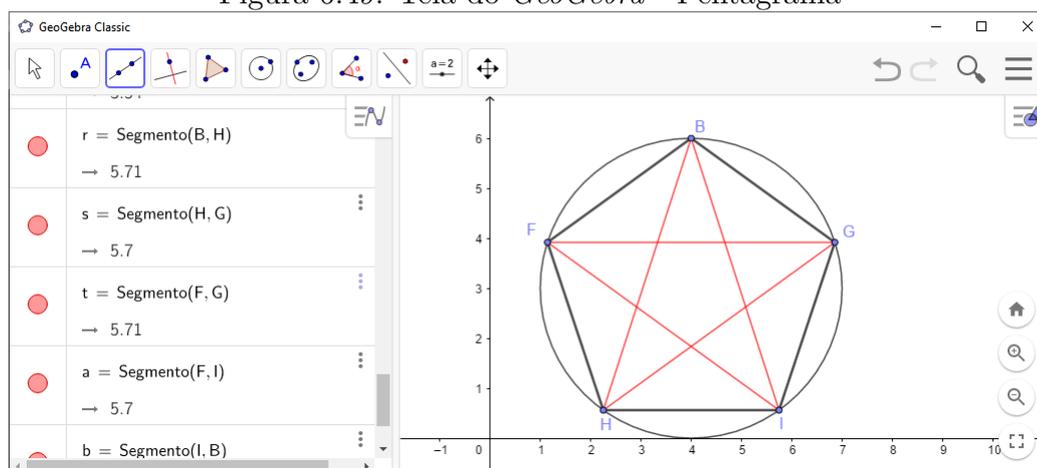
Figura 6.48: Tela do *GeoGebra* - Pentágono Regular



Fonte: Elaboração própria

6º Passo - Traçando todas as diagonais do pentágono regular $BFHIG$ obtemos o pentagrama. Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, em segmento e clique nos pontos B e H , B e I , F e G , G e H , F e I para formar as diagonais. Na Figura 6.49 apresentamos um *print* da tela do *GeoGebra* onde executamos estes comandos.

Figura 6.49: Tela do *GeoGebra* - Pentagrama



Fonte: Elaboração própria

O professor pode finalizar a atividade falando das Proporções Áureas existentes no pentágono regular e no pentagrama, as quais abordamos na Seção 3.5

6.6 Atividade 6: A Razão Áurea na Sequência de Fibonacci

Objetivos: Apresentar a sequência de Fibonacci e perceber a relação existente entre a Razão Áurea e esta sequência.

Conteúdos desenvolvidos: sequências numéricas; razão entre dois números e razão áurea.

Desenvolvimento da atividade: Primeiramente, o professor deverá dar a definição geral para sequência de Fibonacci como sendo uma sequência numérica, não nula, em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, com o primeiro e o segundo termos iguais a 1. Ou seja,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

O professor poderá falar da relação dos números de Fibonacci com a natureza, por exemplo, como na filotaxia. Em seguida, o professor divide a sala em grupos e entrega uma folha impressa para os alunos dos grupos com as questões abaixo. Essa atividade deve durar, aproximadamente, duas aulas.

Questão 1) Na tabela vemos as sequências A, B, C, D, E e F com seus dois primeiros termos. Complete a tabela, obtendo do terceiro ao décimo termo, sabendo que os próximos termos de cada uma das sequências são obtidos através da soma dos dois termos anteriores.

Sequência	Termos									
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
A	1	1								
B	3	3								
C	2	3								
D	3	7								
E	5	10								
F	15	8								

Resposta:

Sequência	Termos									
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
A	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
B	3	3	6	9	15	24	39	63	102	165
C	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
D	3	7	10	17	27	44	71	115	186	301
E	5	10	15	25	40	65	105	170	275	445
F	15	8	23	31	54	85	139	224	363	587

Questão 2) Usando as sequências da tabela da Questão 1, complete a tabela abaixo com os resultados das razões entre os termos sucessivos das sequências, conforme indicado.

Razões	Termos									
	2°/1°	3°/2°	4°/3°	5°/4°	6°/5°	7°/6°	8°/7°	9°/8°	10°/9°	—
A										—
B										—
C										—
D										—
E										—
F										—

Resposta:

Razões	Termos									
	2°/1°	3°/2°	4°/3°	5°/4°	6°/5°	7°/6°	8°/7°	9°/8°	10°/9°	—
A	1	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,61538...	1,61904...	1,61764...	—
B	1	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,61538...	1,61904...	1,61764...	—
C	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,61538...	1,61904...	1,61764...	1,61818...	1,61797...	—
D	2,333...	1,42857...	1,7	1,58823...	1,62962...	1,613636...	1,61971...	1,61739...	1,61827	—
E	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,61538...	1,61904...	1,61764...	1,61818...	—
F	0,5333...	2,875	1,34782...	1,74193...	1,57407...	1,63529...	1,61151...	1,62053	1,61707	—

Questão 3) Quais conclusões cada equipe chegou em relação aos resultados das razões indicadas na tabela da Questão 2? Sabemos que a sequência A da Questão 1 são os termos da sequência de Fibonacci. Qual o relação entre a tabela da Questão 2 e o Número de Ouro?

Resposta: A ideia é que, fazendo essa atividade, os alunos cheguem a conclusão de que as razões entre os termos sucessivos da sequência de Fibonacci ou de qualquer série somatória, se aproximam cada vez mais do Número de Ouro a medida que os termos vão aumentando.

7 Conclusão

Ao longo desse trabalho vimos a beleza do Número de Ouro, suas relações geométricas e aplicações nas diversas áreas. Iniciamos o trabalho com o contexto histórico mostrando como vários matemáticos usavam a Razão Áurea em seus trabalhos desde a relação dos pitagóricos com o pentagrama, dos poliedros de Platão com a Razão Áurea e de Euclides com a divisão de um segmento em extrema e média razões.

Apresentamos, de acordo com a literatura, as contradições existentes sobre o uso da Razão Áurea, na construção do Paternon e nas obras *Monalisa* e *Homem Vitruviano* de Leonardo da Vinci, por exemplo. Além disso, vimos como encontrar o valor numérico do Número de Ouro através das razões obtidas na divisão de um segmento em extrema e média razões. Destacamos algumas propriedades das figuras geométricas como triângulo áureo, retângulo áureo, pentágono regular, pentagrama e espiral áurea. Apresentamos as relações existentes entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci, uma sequência que surge com o clássico problema da procriação de coelhos.

Fazendo uma busca no banco de dados das dissertações do PROFMAT¹ usando a palavras-chaves *número de ouro* e *razão áurea* encontramos 34 (trinta e quatro) títulos que abordaram esta temática. Dentre estes, citamos os trabalhos de Alves (2019), Francisco (2017), Ramos (2013) e Santos (2013) os quais foram consultados para a elaboração deste trabalho. De certa forma, no trabalho que desenvolvemos procuramos, além de contribuir no estudo desta temática, detalhar a construção da Razão Áurea com uso do *software* livre *GeoGebra* mostrando o passo a passo para a utilização deste *software*. Assim, acreditamos que nosso trabalho, em complemento às demais dissertações do ProfMat, pode auxiliar o professor que tem interesse, mas nunca utilizou o *GeoGebra*.

Diante da realidade dos alunos nos dias de hoje o professor de Matemática é desafiado diariamente a mostrar aos seus alunos que é possível, interessante e necessário aprender Matemática. Para isso, o professor deve buscar novas maneiras de ensinar e de contribuir com seus alunos no processo de aprender a aprender. Assim, construímos e apresentamos neste texto algumas atividades que, além de serem motivadas pela temática do Número de Ouro, sugere o uso do *software GeoGebra*, como recurso didático para professor e de aprendizagem para os alunos.

Acreditamos que o uso de *softwares* pode ser uma estratégia que complemente o papel do professor, pois utilizadas no ensino aprendizagem da matemática em complemento ao uso do lápis e papel trazem um retorno visual rápido e, com isso, sobra mais tempo para o professor explorar os conceitos e propriedades matemáticas utilizadas no processo.

¹<https://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em Junho/2020.

Referências

- [1] ALVES, P. H. S. **A ONIPRESENÇA DO PHI**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Pará, Curitiba-PR, 2019.
- [2] ÁVILA, Geraldo. **Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci**. Revista do Professor de Matemática, v. 6, 1985.
- [3] CONTADOR, P. R. M. **A Matemática na arte e na vida**. LF editorial, São Paulo - dezembro de 2015.
- [4] CORBUSIER, Le , **The Modulor**, Faber, Cambridge, Massachusetts, 1954.
- [5] COURBUSIER, Le. **Modulor I and II**. Cambridge, MA: Harvad University Press, 1980.
- [6] EUCLIDES, de Alexandria. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, 2009.
- [7] FRANCISCO, S. V. L. **Entre o Fascínio e a Realidade da Razão Áurea**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, São José do Rio Preto-SP, 2017.
- [8] HUNTLEY, H. E. **A Divina proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática**. Universidade de Brasília, 1985.
- [9] LAWLOR, R. **Geometria Sagrada**. edições delprado, Rio de Janeiro, 1996.
- [10] LIVIO, M. **RAZÃO ÁUREA: A HISTÓRIA DE FI, um número surpreendente**. Tradução de Marco Shinobu Matsumura, Rio de Janeiro: editora Record, 2006.
- [11] MORGADO, Augusto C. CARVALHO, Paulo C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2ª edição, 2015.
- [12] PACIOLI, L. **Divine Proportion**. Paris: Librairie du Compagnonnage, 1988.
- [13] PARKER, F. D. On the General Term of a Recursive Sequence. The Fibonacci Quartely, [S.l.], v. 2, n. 1, p. 67-72, Feb. 1964. Disponível em: <<http://www.fq.math.ca/Scanned/2-1/parker.pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2020.
- [14] RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, 2013.

- [15] SANTOS, G. V. **Explorando a Matemática do Número Φ , o Número de Ouro**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, Rio Claro-SP, 2013.