UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Números construtíveis e construções geométricas

Jefferson David Alves

PROFMAT

Rio Claro
2020

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Números construtíveis e construções geométricas

Jefferson David Alves

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

Rio Claro
2020

A474n

Alves, Jefferson David
Números construtíveis e construções geométricas / Jefferson David Alves. -- Rio Claro, 2020
134 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Thiago de Melo

1. Geometria. 2. Construções geométricas. 3. Números construtíveis. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Jefferson David Alves

Números construtíveis e construções geométricas

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos
Departamento de Matemática - UTFPR/Cornélio Procópio (PR)

Rio Claro, 25 de agosto de 2020

Aos meus pais
irmão, e minha namorada.

Agradecimentos

À minha namorada Joice Mara Antonholi, pelo incentivo e compreensão ao longo desta caminhada.

Aos meus pais, Antonio Alves e Rita de Cássia de Souza Alves, e ao meu irmão Jeisson David Alves.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago de Melo, pela aceitação da orientação, por todo o aprendizado que proporcionou, as contribuições para a realização deste trabalho, a toda paciência e dedicação, e por todos os conselhos. Também dedico a ele este trabalho.

Aos meus antigos orientadores, Sylvio Dionysio de Souza e Maristela Olzon Monteiro Dionysio de Souza que me ensinaram muito sobre Física e sobre a vida, saiba que tenho um carinho especial por vocês.

Ao pessoal do GIH–Grupo de Interações Hiperfinas, Danilo Olzon Dionysio de Souza, Edilaine Honório da Silva, Marcelo Campos, Pablo Felipe Marins Finotti, Thiago Pavan de Arruda, Willian Takemitsu Shigeyosi, por todo acolhimento e ajuda em minha caminhada na UFSCAR.

Aos meus colegas do PROFMAT que juntos passamos momentos difíceis e felizes ao longo desta caminhada em especial ao Cristiano Santini Rodrigues.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP campus de Rio Claro que contribuíram para minha formação.

Gostaria de agradecer a todos os professores que tive ao longo desta vida, que muitas vezes não são valorizados da forma como merecem pela sociedade. Em especial aos professores do Ensino Médio Mariana, Márcia e Rodrigo, da Graduação aos professores Carlos Roberto de Moraes, Celso Luis Levada, Gilson Coutinho Junior, Huemerson Maceti, Ivan José Lautenschleguer, Silma Ramos Coimbra Mendes. E ao professor Antonio Sebastião Bordignon, por todo o incentivo, ensinamentos e conversas que temos a respeito de matemática.

Aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos e Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli por terem aceitado o convite de participar da banca e pelas contribuições para a dissertação.

À UNESP e à SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) que promovem o PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Ao Centro Paula Souza que administra a ETEC (Escola Técnica) que permitiu afastar-me de parte de minhas aulas para desenvolver meus estudos.

"Tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado." – Gandalf, o Cinzento.
A Sociedade do anel
J. R. R. Tolkien

Resumo

Este trabalho trata das construções geométricas e dos números construtíveis, que são obtidos utilizando-se apenas régua não graduada e compasso. Apresentamos a demonstração de diversas propriedades destes números juntamente com a descrição para suas construções. A motivação para este estudo é devido aos problemas clássicos da Grécia antiga, que são: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo, a tri-secção de um ângulo qualquer e a construção de polígonos regulares.

Palavras-chave: Geometria, Construções geométricas, Números construtíveis.

Abstract

This work deals with geometric constructions and constructible numbers obtained using only a non-graduated ruler and compass. The motivation for it is due to the classical problems of ancient Greece which are: the doubling of the cube, the squaring of the circle, the tri-section of any angle and the construction of regular polygons. It presents several properties of these numbers and describes their constructions.

Keywords: Geometry, Geometric Constructions, Constructible Numbers.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar as construções geométricas por meio de compasso e régua não graduada, bem como abordar um pouco da teoria dos números construtíveis, apresentar demonstrações de algumas propriedades e propor atividades que possam ser realizadas em sala de aula dos mais diversos níveis de ensino.

Após a escolha do tema deste trabalho, foi efetuada uma busca na base de dissertações do programa de pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT [1] com o intuito de verificar o que já havia sido desenvolvido sobre este tema.

Constatou-se que havia trabalhos que citavam este tema e, após a leitura dos trabalhos, optou-se por apresentar uma abordagem diferente das demais dissertações, tentando aproximar o leitor das descrições, seja das construções elementares, seja das demonstrações relativas aos números construtíveis, e nas propostas de atividades para a sala de aula.

Antes de dissertar a respeito dos números construtíveis, apresenta-se no Capítulo 1 *Geometria e ensino* um pouco sobre como o ensino de geometria é proposto no Ensino Médio, seja pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), pela atual proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pelo currículo da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), e pelos currículos de alguns dos cursos de Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio (ETIM) do Centro Paula Souza que mantém as Escolas Técnicas ETEC's. O Capítulo 2 *Geometria euclidiana plana* apresenta ao leitor diversos postulados e definições para que o mesmo possa estar familiarizado para as demostrações que serão descritas em capítulos posteriores.

No Capítulo 3 *Construções geométricas*, estão descritos os processos de construção utilizando compasso e régua não graduada. Também, temos o Capítulo 4 *Números construtíveis*, cuja teoria vem acompanhada de algumas demonstrações e dos critérios de construtibilidade. Por fim, no Apêndice A *Atividades propostas*, como o próprio nome diz, estão as atividades para que o leitor possa aplicar os conceitos apresentados neste trabalho.

Espera-se que este trabalho possa ser utilizado por professores do Ensino Fundamental e Médio como roteiro e guia para construções com régua e compasso, e que também possa ser utilizado por alunos de graduação e programas de pós-graduação que venham a cursar a disciplina de Geometria onde as construções geométricas serão estudadas. Também é esperado que este trabalho possa ser utilizado por estudantes de graduação e pós-graduação na disciplina de Álgebra a fim de se aprofundar nas demonstrações de propriedades e proposições dos números construtíveis e apresentar uma aplicabilidade para as extensões algébricas dos racionais, como os problemas clássicos de construtibilidade propostos pelos gregos.

1 Geometria e ensino

1.1 Breve histórico

A palavra *geometria* é hoje em dia conhecida por todos que em algum momento tiveram contato com a matemática, sua origem é relacionada à palavra *geometrein* que é na verdade a junção de duas palavras, *geo* o mesmo que *terra*, e *metrein* que significa *medir*. Porém, hoje sabemos que geometria é na verdade uma área da matemática de grande importância e que está muito além de apenas medir terras e segmentos.

As construções geométricas por meio de compasso e régua não graduada já se apresentam desde o século 5 a.C., conforme podemos verificar em diversas literaturas que tratam sobre o tema [2]. Estas construções tiveram uma grande importância no desenvolvimento da matemática grega e nas que dela se ramificaram.

É importante deixar claro que nesta época, a palavra *número* era utilizada apenas para números inteiros e as frações eram razões entre tais números.

Na época de Euclides, aproximadamente século 3 a.C. as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de reta, e deste modo a palavra *resolver* passou a ser o mesmo que *construir*. Com essa noção, a equação $ax = b$ não poderia ser resolvida, pois comparava uma área (lado esquerdo) com um segmento de reta (lado direito). Porém, era possível resolver a equação $ax = bc$ pois bastava tomar a área do retângulo do lado direito e torná-la equivalente à área do retângulo do lado esquerdo de base a e altura x.

Os números construtíveis possuem sua origem associada à lenda de que em 429 a.C. atenienses foram consultar o oráculo de Apolo na ilha de Delos, a fim de que a peste tivesse um fim, e o oráculo respondeu que era necessário construir outro altar no templo com o dobro do tamanho do altar já existente. Construíram então um novo altar dobrando a aresta do antigo, que possuía a forma de um cubo, e assim aumentaram o volume do cubo em oito e não dobrando como era preciso, e então a peste continuou. Para dobrar o volume do cubo era necessário que a aresta do cubo fosse multiplicada por $\sqrt[3]{2}$. Com esta lenda, o problema de "duplicar o cubo" se tornou o "problema de Delos" e que deveria ser resolvido somente utilizando *régua não graduada e compasso*.

Os gregos propuseram os problemas:

1. *Duplicar o cubo*, ou seja, construir um cubo com o dobro do volume.

2. *Quadrar o círculo*, ou seja, construir um quadrado com área igual a de um círculo dado.

3. *Tri-seccionar um ângulo*, isto é, dividir um ângulo dado em três ângulos congruentes.

4. Construir certos polígonos regulares, como por exemplo, o heptágono.

Na época, eles ainda não tinham os instrumentos matemáticos que lhes permitissem demonstrar que estas construções são na verdade *impossíveis* utilizando somente régua e compasso, pois tais soluções necessitavam da consolidação dos números complexos por Gauss (1777–1885), e da criação da teoria dos grupos por Galois (1811–1832).

1.2 Lei de Diretrizes e Bases - LDB

No Brasil a Lei nº 9394 de dezembro de 1996 comumente chamada de LDB, disponível em [3] estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e determina que a matemática é uma das áreas do conhecimento obrigatórias no ensino, conforme podemos ver no Capítulo II, Seção I, Art. 26:

> §1º Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil.

Mais adiante ainda no Capítulo II, é reforçado que a matemática é obrigatória em todo o Ensino Médio, e que a Base Nacional Comum Curricular determina seus objetivos, como podemos ver na Seção IV,

> Art. 35-A: A Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas seguintes áreas do conhecimento:
>
> II - matemática e suas tecnologias;
>
> §3° O ensino da língua portuguesa e da matemática será obrigatório nos três anos do ensino médio, assegurada às comunidades indígenas, também, a utilização das respectivas línguas maternas.

Deste modo, a LDB estabelece a obrigatoriedade da matemática durante o Ensino Fundamental e Médio, porém não determina os conteúdos, habilidades e competências a serem desenvolvidos, deixando isso para a Base Nacional Comum Curricular.

1.3 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) foram propostas curriculares desenvolvidas pelo Ministério da Educação (MEC) e disponíveis em [4] que indicavam os conteúdos, competências e habilidades que deveriam ser utilizados nas escolas do Brasil. Hoje tais propostas estão sendo substituídas pela Base Nacional Comum Curricular.

1.4 Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) encontra-se em desenvolvimento pelo MEC, e tem o intuito de ser um documento oficial que norteará a elaboração dos currículos de todas as etapas da educação no Brasil.

Nos dias atuais a BNCC está em processo de finalização, sendo possível consultar a atual proposta [5]. O objetivo do ensino de matemática consta na página 470:

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se no desenvolvimento da compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos, visando à resolução de situações-problema. No Ensino Médio, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área.

Mais adiante, na página 517 temos a descrição dos conhecimentos para o Ensino Fundamental:

> Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística).

O assunto desta dissertação é descrito na mesma página da seguinte maneira:

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança.

Já no Ensino Médio na página 523 temos 5 competências específicas para a matemática, sendo:

> 1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
>
> 2 – Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
>
> 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Dentre tais competências, podemos destacar as seguintes habilidades que relacionam a geometria:

Competência 1 (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

Competência 2 (EM13MAT201) Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região.

Competência 3 (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

Competência 4 (EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.

Competência 5 (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os Teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Após a leitura desta nova proposta, verifica-se que o conteúdo de geometria é obrigatório, porém não é especificado o tema construção por meio de compasso e régua.

1.5 Currículo do Estado de São Paulo

Atualmente, por meio da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP) as escolas do Estado de São Paulo utilizam o “Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e suas tecnologias” [6], que instrui os professores a quais conteúdos, habilidades e competências devem ser estudados de acordo com o ano em que cada aluno se encontra, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

O currículo apresenta os conteúdos de Números e Geometria intercalados entre os bimestre, de forma que a cada ano que o aluno avança no estudo é aprofundado um determinado tema.

O tema construção geométrica é citado no desenvolvimento do currículo porém não é especificada nos quadros de conteúdos e habilidades específicos para cada ano do ensino.

1.5.1 Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

O Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) é uma avaliação aplicada aos alunos que visa orientar professores e gestores quanto a melhoria do ensino.

Atualmente os professores e gestores do estado de São Paulo possuem disponível as “Matrizes de referência para a avaliação Saresp” [7] que determinam as habilidades que são verificadas em cada etapa do ensino.

Encontra-se também a disposição para os professores a “Matriz de avaliação processual” [8] que apresenta de uma forma direta os conteúdos, habilidades, competências, e as metas para o processo de avaliação. Esta matriz fica disponível na forma impressa nas escolas e também possui uma versão digital que o professor pode solicitar a sua Diretoria de Ensino.

Neste documento, não temos nenhuma menção quanto a construção geométrica por meio de régua e compasso.

1.6 Centro Paula Souza

O Centro Paula Souza (CPS) é uma autarquia do Governo do Estado de São Paulo e é vinculado a Secretaria de Desenvolvimento Econômico, que administra as Escolas Técnicas (ETEC) e Faculdades de Tecnologia (FATEC).

Nas escolas ETEC, mantém diversos cursos onde os alunos realizam um curso técnico concomitantemente com o Ensino Médio, chamados de Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio (ETIM). Nesta modalidade, cada curso apresenta um currículo diferenciado que é desenvolvido com o intuito de promover as capacidades técnicas que o aluno necessita para seu curso técnico.

Existem diversos currículos, todos estão disponíveis em [9] onde também verifica-se que não é citado o tema construção por meio de régua e compasso.

1.7 Reflexão sobre o ensino de geometria através de régua e compasso

A Geometria é reconhecida em todos os documentos oficiais, seja a nível estadual quanto federal, como uma grande área dentro da Matemática que deve ser desenvolvida nos diversos níveis de ensino.

O tema “construção por meio de compasso e régua” não é citado de forma direta em nenhum dos documentos oficiais, mesmo sendo de extrema importância para o processo de aprendizagem, pois apresenta de maneira concreta diversos conteúdos algébricos, além de, como visto anteriormente, ter surgido de problemas da antiguidade que podem servir de inspiração ou situações problema para os estudantes.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) reforça o quanto o conhecimento de Geometria, em especial a construção por meio de régua e compasso é importante em suas avaliações da primeira e segunda fases, tendo até mesmo apostilas específicas para o tema Geometria e construções como “A geometria do corpo terrestre”, “Uma introdução às construções geométricas” e “Encontros de geometria parte 1” todas disponíveis em [10].

Construções geométricas podem ser aplicadas em diversas áreas do conhecimento como por exemplo na realização de operações com vetores na Física, construção de mapas na Geografia, e até mesmo contribuir para uma compreensão sobre como os problemas matemáticos impactaram algumas civilizações dentro da história. Diversas situações no cotidiano da sociedade que vão da construção civil a projetos das mais diversas áreas como automobilística, projeto de componentes eletrônicos, dimensionamentos de celulares e equipamentos tecnológicos como *notebooks*, todas estas grandes áreas e outras se utilizam da leitura e interpretação de desenhos geométricos como poderosa ferramenta para compreensão e desenvolvimento.

Deste modo, as construções por meio de régua e compasso deveriam constar nos documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática, pois possuem grande potencial para a contextualização e a interdisciplinaridade, além de serem grandes motivadores para o processo de aprendizagem.

2 Geometria euclidiana plana

Antes de iniciarmos as construções geométricas, precisamos determinar certos conceitos que serão a base dos processos desenvolvidos. Para um aprofundamento e demonstrações das proposições e teoremas que não serão apresentadas nesta dissertação, consulte [11], [12] e [13].

Os conceitos mais básicos da Geometria, a saber, **ponto**, **reta** e **plano** são na verdade noções primitivas que se supõe que qualquer pessoa compreenda.

No livro *Os Elementos*, de Euclides, como visto em [14] estes conceitos eram descritos de maneiras que não podemos tomar como definições. Ponto era definido como "aquilo que não possui partes", linha como "o que possui comprimento mas não largura" e reta, "uma linha que jaz igualmente com respeito a todos os seus pontos". Deste modo, assumiremos que estes conceitos já são compreendidos pelo leitor.

Deste momento em diante, todo este trabalho será realizado em um plano Euclidiano, sendo que pontos serão representados com letras latinas maiúsculas e retas por letras latinas minúsculas.

Observe a Figura 2.1, onde a reta r é um conjunto de pontos. O ponto A pertence à reta r e então escreveremos $A \in r$ e o ponto B não pertence à reta r, e escreveremos $B \notin r$.

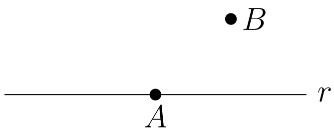


Figura 2.1: Reta r e pontos A e B.

2.1 Retas

Tomemos três Postulados que são conhecidos como **Postulados de Incidência**.

Postulado 2.1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Conforme a Figura 2.2, no caso em que a reta contém os pontos A e B, a denotamos por $\overleftrightarrow{AB}$.

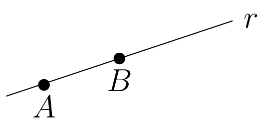


Figura 2.2: Reta r que contém os pontos A e B.

Postulado 2.2. Qualquer reta contém no mínimo dois pontos distintos.

Definição 2.3. Um conjunto de pontos do plano é dito colinear se existir uma reta que contém todos os pontos desse conjunto.

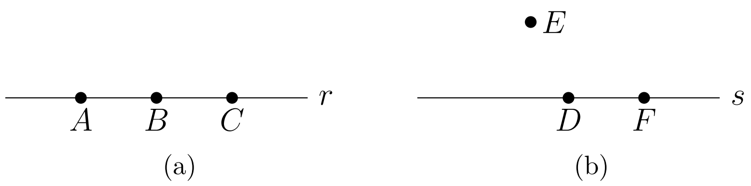


Figura 2.3: (a) Pontos colineares; (b) não colineares.

Postulado 2.4. Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Definição 2.5. Retas paralelas são retas que não se interseccionam, ou seja, não existe ponto comum às retas. Retas concorrentes são retas distintas que se interseccionam em um ponto.

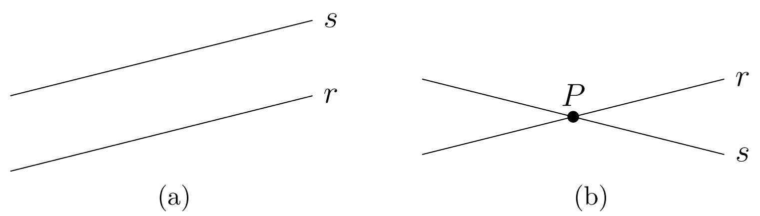


Figura 2.4: (a) Retas paralelas; (b) retas concorrentes.

Para os próximos postulados, utilizaremos os números reais, e para referência sobre suas propriedades e definições, consulte [15].

Postulado 2.6 (Postulado da Distância)**.** A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.

Definição 2.7. A distância entre dois pontos é o número obtido pelo Postulado da Distância.

Postulado 2.8 (Postulado da Régua)**.** Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que:

1. Cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real.

2. Cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta.

3. A distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Na Figura 2.5, observe que foi estabelecido que o real -2 corresponde ao ponto A, o número real 0 ao ponto B, o número real 2 ao ponto C e o número real $d > 0$ ao ponto D.

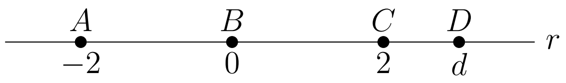


Figura 2.5: Correspondência entre pontos de uma reta e os números reais.

Definição 2.9. A coordenada de um ponto em um sistema de coordenadas fixado é o número correspondente a este ponto, obtido pelo Postulado da Régua.

Postulado 2.10 (Postulado da Colocação da Régua)**.** Dados dois pontos P e Q de uma reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.

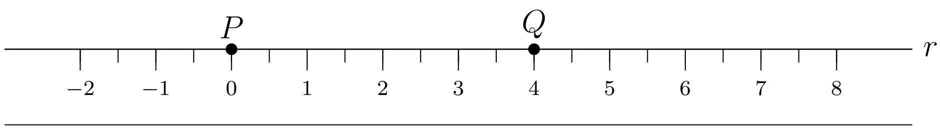


Figura 2.6: Postulado da Colocação da Régua.

Definição 2.11. Um ponto A divide uma reta em duas semirretas com origem em A. Escolhendo dois pontos B e C de maneira que o ponto A fique entre B e C, podemos determinar a semirreta de origem em A e que contém o ponto B, que será representada por $\overrightarrow{AB}$, e a semirreta de origem no ponto A que contém o ponto C, representada por $\overrightarrow{AC}$.

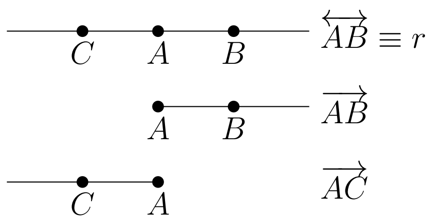


Figura 2.7: Semirretas de origem no ponto A.

Definição 2.12. Dois pontos A, B determinam um segmento de reta, que é o conjunto dos pontos A, B e dos pontos X que estão entre A e B. O segmento é representado por $\overline{AB}$ e seus extremos são A e B.

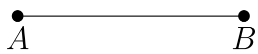


Figura 2.8: Segmento de reta $\overline{AB}$.

Definição 2.13. A medida ou comprimento de um segmento $\overline{AB}$ é a distância entre seus extremos, denotada por AB. Utilizando um sistema de coordenadas no qual A e B têm coordenadas a e b, respectivamente, tem-se

$$AB = |a - b|.$$

Se dois segmentos possuem a mesma medida, dizemos que são **segmentos congruentes**.

Definição 2.14. **Ponto médio** de um segmento $\overline{AB}$ é o ponto M que está entre A e B, satisfazendo $AM = MB$.

Figura 2.9: Ponto médio do seguimento $\overline{AB}$.

Definição 2.15. Conjunto convexo é formado por figuras onde para todo par de pontos distintos P e Q desse conjunto, o segmento $\overline{PQ}$ está inteiramente contido nele.

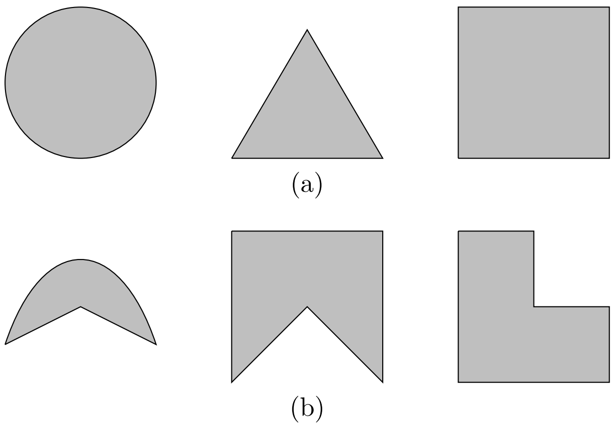


Figura 2.10: (a) Figuras convexas; (b) figuras não convexas.

Postulado 2.16 (Postulado da Separação do Plano)**.** Dada uma reta, os pontos que não pertencem à ela formam dois conjuntos disjuntos tais que:

1. cada um dos conjuntos é convexo;
2. se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intersecciona a reta.

Definição 2.17. Dada uma reta r, os conjuntos determinados pelo Postulado 2.16 são chamados de **semiplanos**, e r é chamada de **origem** de cada um deles. Dizemos que r separa o plano em dois semiplanos.

2.2 Ângulos

Definição 2.18. Dadas duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ distintas, não opostas, de mesma origem A, o **ângulo** determinado por elas é a união destas duas semirretas, denotado por $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAB}$. Também, cada semirreta é chamada de **lado do ângulo**.

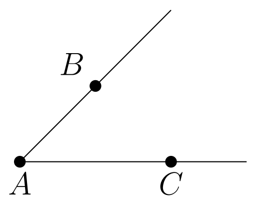


Figura 2.11: Ângulo $\widehat{BAC}$.

Postulado 2.19 (Postulado da Medida de Ângulos)**.** A cada ângulo $\widehat{BAC}$ corresponde um único número real entre 0 e 180.

O número do postulado acima é chamado **medida do ângulo**, denotado por $m\widehat{BAC}$ cuja unidade é **grau**, e assim, ângulos que possuem a mesma medida são chamados **congruentes**.

Para este trabalho, todas as vezes que nos referirmos ao ângulo $\widehat{BAC}$, o contexto deixará claro se faz referência ao ângulo ou a medida do ângulo $m\widehat{BAC}$, uma vez que tal distinção não comprometerá o entendimento pelo leitor. Para medidas de ângulo que correspondem a 90° será utilizado um quadrado junto ao ângulo.

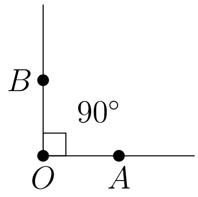


Figura 2.12: Ângulo reto.

Transferidor é o instrumento mais comum utilizado para realizar medição de ângulos. A Figura 2.13 apresenta um modelo deste instrumento.

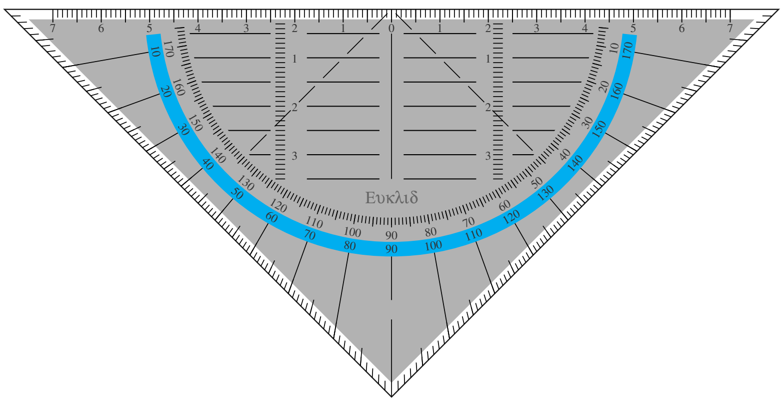


Figura 2.13: Transferidor.

Definição 2.20. Um ângulo $\alpha = \widehat{BAC}$ será classificado de acordo com sua medida, do seguinte modo:

1. Agudo, se $0° < \alpha < 90°$.

2. Reto, se $\alpha = 90°$.

3. Obtuso, se $90° < \alpha < 180°$.

Postulado 2.21 (Postulado da Construção de Ângulo)**.** Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na reta de origem de um semiplano $\mathscr{H}$. Para cada número α entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ com P em $\mathscr{H}$, tal que $\widehat{PAB} = \alpha$.

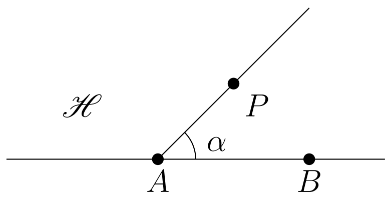


Figura 2.14: Construção do ângulo $\widehat{PAB}$ no semiplano $\mathscr{H}$.

Postulado 2.22 (Adição de ângulos)**.** Se D é um ponto interior ao ângulo $\widehat{BAC}$ então $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$.

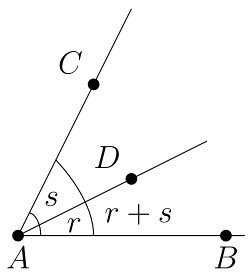


Figura 2.15: Adição de dois ângulos.

Ângulos adjacentes: são ângulos onde seus vértices coincidem e possuem um dos lados em comum.

Ângulos complementares: são ângulos cuja soma de suas medidas é igual a $90°$, e neste caso um ângulo é chamado de complemento do outro.

Ângulos suplementares: são ângulos cuja soma de suas medidas é $180°$, e cada ângulo é chamado de suplemento do outro.

Teorema 2.23. *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

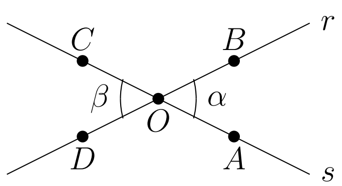


Figura 2.16: Ângulos α e β opostos pelo vértice.

Definição 2.24. Bissetriz de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos de mesma medida.

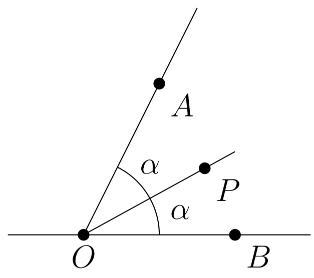


Figura 2.17: Bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

Proposição 2.25. *A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam de seus lados.*

2.3 Polígonos

Definição 2.26. Um polígono é uma união de segmentos $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ com $n \geq 3$, satisfazendo:

1. Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser (possivelmente) nas suas extremidades.

2. Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

Escreveremos simplesmente polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ e definimos:

Vértices do polígono são os pontos $A_1, \ldots, A_n$.

Lados do polígono são os segmentos $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

Perímetro do polígono é a soma dos comprimentos dos seus lados.

Definição 2.27. Um polígono convexo está contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.

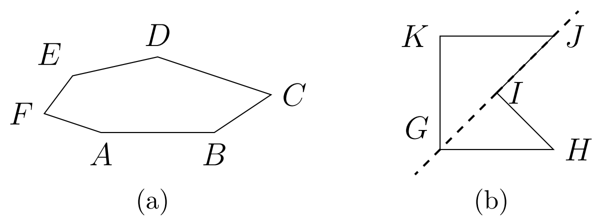


Figura 2.18: (a) Convexo; (b) não convexo.

Definição 2.28. Os ângulos de um polígono convexo $A_1A_2 \ldots A_n$ são $\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$, $i = 2, \ldots, n-1$ juntamente com os ângulos $\widehat{A_{n-1}A_nA_1}$ e $\widehat{A_nA_1A_2}$. Já os ângulos externos são formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado adjacente.

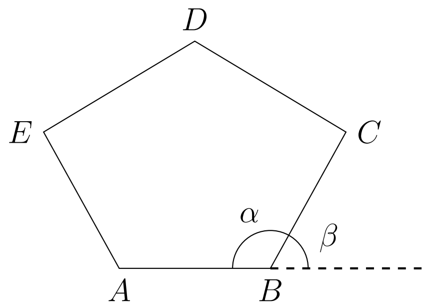


Figura 2.19: α é um ângulo interno do polígono, β é um ângulo externo.

Definição 2.29. Polígono regular é um polígono convexo onde quaisquer dois de seus lados são congruentes.

2.4 Congruência de triângulos

Definição 2.30. Figuras planas congruente são figuras que podem ser sobrepostas, ou seja, que coincidem por meio de movimentos rígidos no plano, isto é, sem que seja necessário modificar sua forma ou qualquer medida.

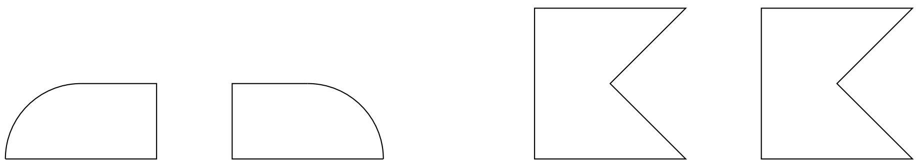


Figura 2.20: Figuras congruentes.

Definição 2.31. Triângulo é um polígono de três lados, denotado por $\triangle ABC$, sendo seus vértices os pontos A, B e C, seus lados os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, e seus ângulos internos $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ e $\widehat{CAB}$.

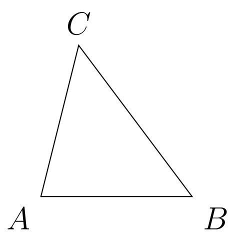


Figura 2.21: Triângulo $\triangle ABC$.

Podemos classificar os triângulos de duas maneiras:

1. Quanto aos lados:

   (a) **Triângulo equilátero**, quando possuir os três lados congruentes.

   (b) **Triângulo isósceles**, quando possuir dois de seus lados congruentes e o terceiro lado será chamado de **base** do triângulo.

   (c) **Triângulo escaleno**, quando não possuir um par de lados congruentes.

2. Quanto aos ângulos:

   (a) **Triângulo acutângulo**, quando seus três ângulos forem agudos.

   (b) **Triângulo retângulo**, quando possui um ângulo reto. O lado oposto a este ângulo é chamado **hipotenusa** e os demais lados, **catetos**.

   (c) **Triângulo obtusângulo**, quando possui um ângulo obtuso.

   (d) **Triângulo equiângulo**, quando possui os três ângulos congruentes.

Definição 2.32. Triângulos congruentes são triângulos para os quais é possível definir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os pares de ângulos (resp. lados) correspondentes sejam congruentes.

Note que na Figura 2.22 temos a correspondência $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow E$ entre os vértices dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, de modo que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{FDE}$, $\widehat{CBA} \equiv \widehat{EFD}$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DEF}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{CA} \equiv \overline{ED}$. Portanto, os triângulos são congruentes e são denotados por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

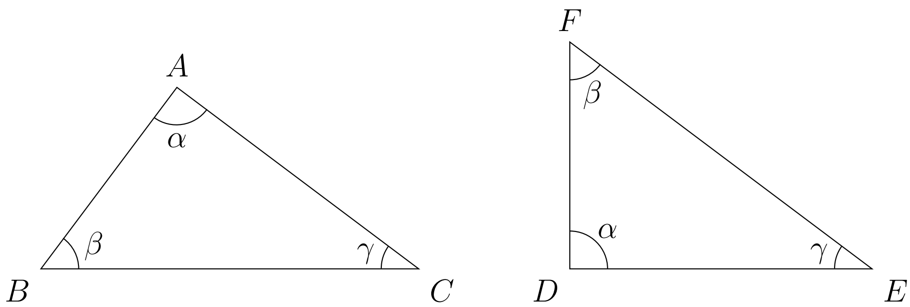


Figura 2.22: Triângulos congruentes.

Postulado 2.33 (Caso lado-ângulo-lado, L.A.L.)**.** Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

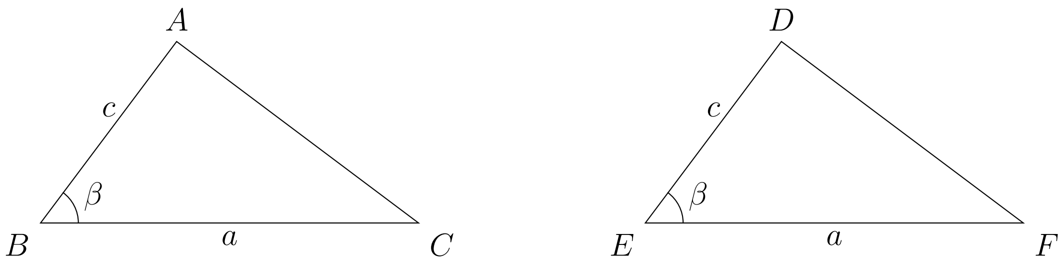


Figura 2.23: Caso L.A.L. de congruência.

Teorema 2.34 (Teorema do Triângulo Isósceles)**.** *Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

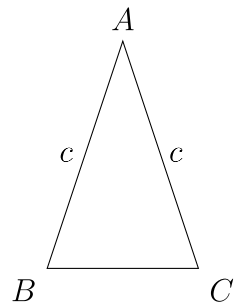


Figura 2.24: Triângulo isósceles.

Demonstração. Para provarmos que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ faremos a correspondência do triângulo $\triangle ABC$ com ele mesmo por $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Como $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ e o ângulo $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB}$, temos pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$, e deste modo temos que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$. □

Postulado 2.35 (Caso ângulo-lado-ângulo, A.L.A.)**.** Dados os triângulos ABC e DEF, se $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$, então os triângulos são congruentes.

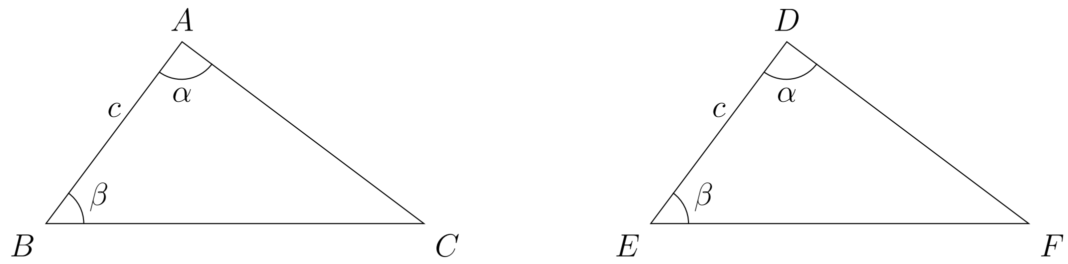


Figura 2.25: Caso A.L.A. de congruência.

Postulado 2.36 (Caso lado-lado-lado, L.L.L.)**.** Se dois triângulos têm os três lados correspondentes congruentes, então são triângulos congruentes.

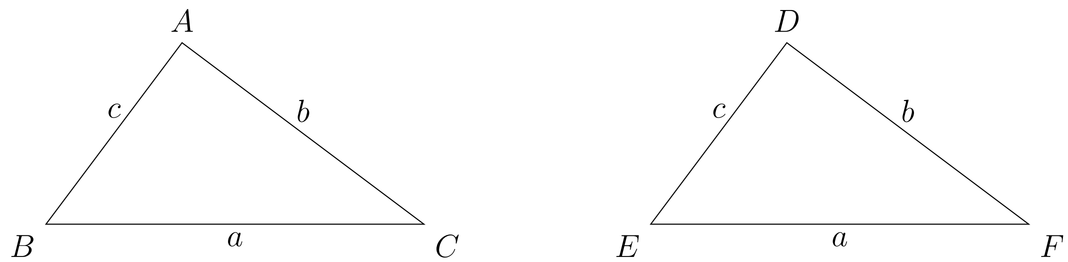


Figura 2.26: Caso L.L.L. de congruência.

Definição 2.37. Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que contém o ponto médio deste segmento.

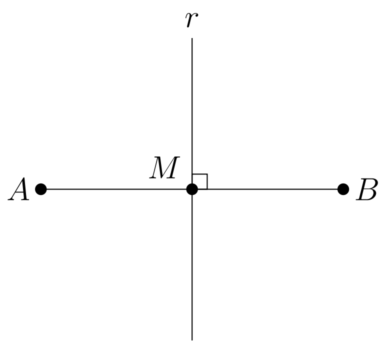


Figura 2.27: Mediatriz r do segmento $\overline{AB}$.

Teorema 2.38. *A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam das extremidades do segmento.*

Definição 2.39. **Mediana** de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

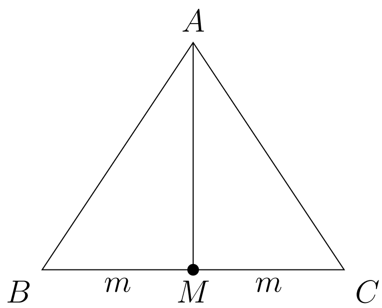


Figura 2.28: Mediana de um triângulo.

Teorema 2.40 (Teorema do ângulo externo.)**.** *A medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Na Figura 2.29 temos que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Do fato que $x + \gamma = 180°$, podemos escrever

$$x + \gamma = \alpha + \beta + \gamma.$$

Somando $-\gamma$ em ambos os lados da equação acima, temos

$$x = \alpha + \beta.$$

□

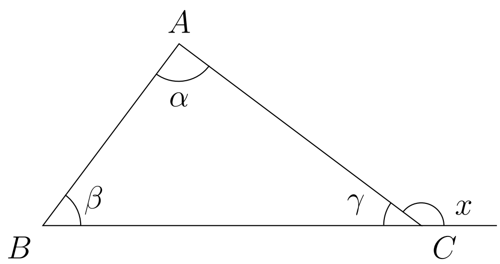


Figura 2.29: Ângulo externo.

Definição 2.41. Em um triângulo $\triangle ABC$, a altura relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao pé da perpendicular baixada de A à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

Na Figura 2.30 o segmento $\overline{AH}$ é a **altura** do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$.

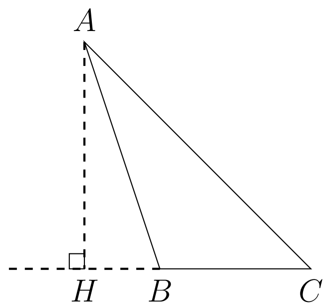


Figura 2.30: Altura de um triângulo.

Postulado 2.42 (Caso lado-ângulo-ângulo, L.A.A.)**.** Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ e $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD}$. Então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

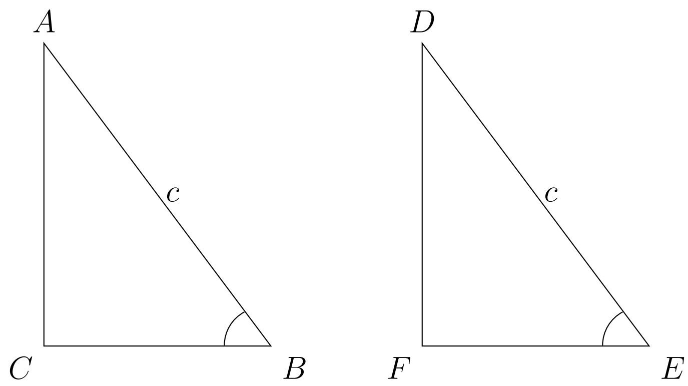


Figura 2.31: Caso L.A.A. de congruência.

2.5 Paralelas

Postulado 2.43 (Postulado das Paralelas)**.** Por um ponto não pertencente à reta r pode-se traçar uma única reta paralela à reta r.

Na Figura 2.32, é dada a reta r e o ponto P não pertencente à reta. Temos que a reta s é a única reta paralela a reta r que contém o ponto P.

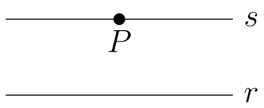


Figura 2.32: Reta s paralela à reta r contendo o ponto P.

Definição 2.44. Seja r uma transversal às retas s e t, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t, tais que A e B estejam em lados opostos de r. Os ângulos $\widehat{APQ}$ e $\widehat{BQP}$ são chamados **ângulos alternos internos** formados por s, t e a transversal r.

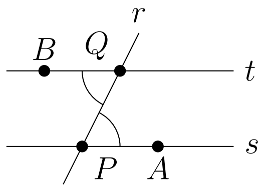


Figura 2.33: Ângulos alternos internos.

Teorema 2.45. *Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.*

Teorema 2.46 (Teorema fundamental da proporcionalidade)**.** *Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão.*

Considerando um triângulo $\triangle ABC$ como o da Figura 2.34, temos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

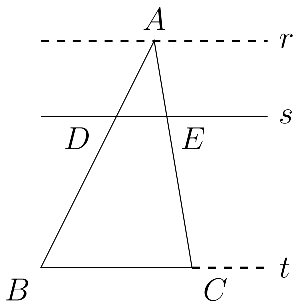


Figura 2.34: Teorema fundamental da proporcionalidade.

Teorema 2.47 (Teorema de Tales)**.** *Se duas retas são transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.*

Da Figura 2.34 temos então, pelo Teorema 2.47, que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

2.6 Semelhança de triângulos

Definição 2.48. Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança e dizemos que tais triângulos são semelhantes. A semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ será denotada por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Teorema 2.49 (Teorema de semelhança ângulo-ângulo-ângulo, A.A.A.)**.** *Dados dois triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle DEF$*, se* $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ *e* $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD}$*, então* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

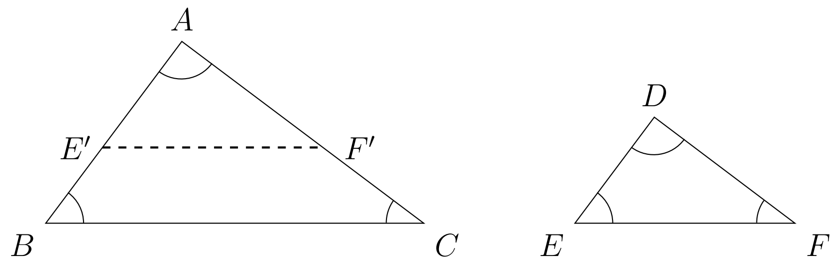


Figura 2.35: Caso A.A.A. de semelhança.

Teorema 2.50 (Teorema da semelhança lado-ângulo-lado, L.A.L.)**.** *Dados dois triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle DEF$*, se* $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$ *e* $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$*, então* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

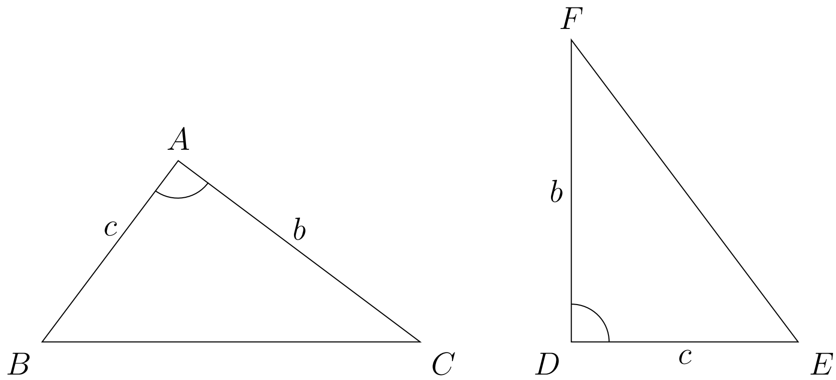


Figura 2.36: Caso L.A.L de semelhança.

Teorema 2.51 (Teorema de semelhança lado-lado-lado, L.L.L.)**.** *Se dois triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle DEF$ *são tais que seus lados satisfazem a relação*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

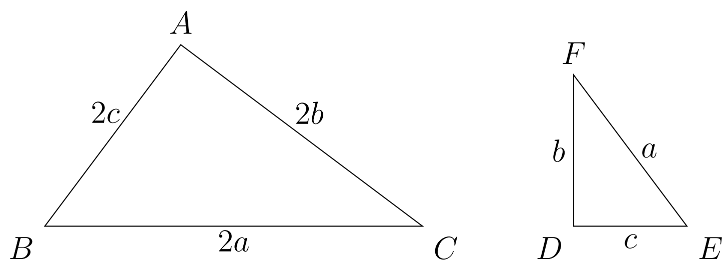


Figura 2.37: Caso L.L.L. de semelhança.

2.7 O Teorema de Pitágoras

Teorema 2.52 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, ou seja,*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

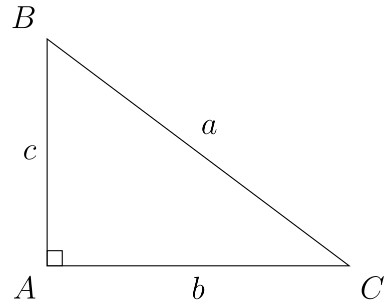


Figura 2.38: Triângulo retângulo.

Além da famosa relação $a^2 = b^2 + c^2$ do teorema acima, em todo triângulo retângulo são também válidas as seguintes relações:

$$b^2 = an, \qquad c^2 = am, \qquad h^2 = mn,$$
$$ah = bc, \qquad bh = cn, \qquad ch = bm.$$

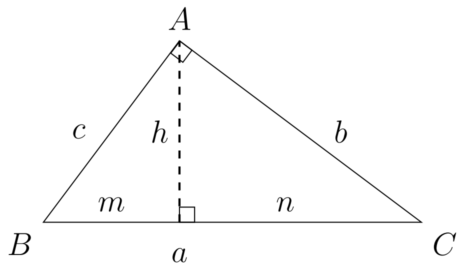


Figura 2.39: Relações métricas no triângulo retângulo.

2.8 Circunferências

Definição 2.53. Dado um ponto O e um número real $r > 0$, chamamos de circunferência de centro O e raio r o conjunto de todos os pontos P do plano tais que $OP = r$.

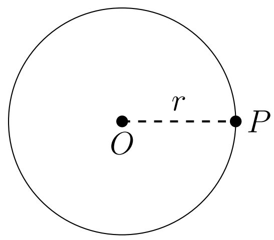


Figura 2.40: Circunferência de centro O e raio r.

Corda de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. **Diâmetro** é qualquer corda que contém o centro da circunferência.

A Figura 2.41 abaixo mostra duas cordas de uma circunferência de raio r e centro O.

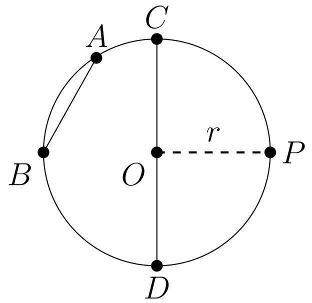


Figura 2.41: Corda $\overline{AB}$ e diâmetro $\overline{CD}$.

Definição 2.54. Uma **tangente** a uma circunferência é uma reta que a intersecciona em apenas um ponto, chamado ponto de tangência. Assim, dizemos que a reta e a circunferência são tangentes.

Proposição 2.55. *Seja $\mathscr{C}$ um círculo de centro O e P um ponto de $\mathscr{C}$. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$, então t é tangente a $\mathscr{C}$.*

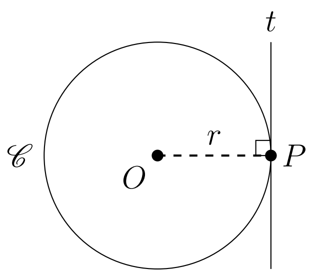


Figura 2.42: Reta tangente.

2.9 Arcos de circunferência

Definição 2.56. Um ângulo central de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

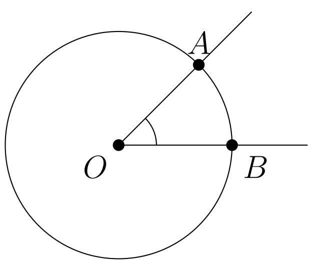


Figura 2.43: Ângulo central de circunferência.

Definição 2.57. Sejam A e B pontos distintos de uma circunferência de centro O. Se $\overline{AB}$ não for um diâmetro, o conjunto de pontos formado por A e B e pelos pontos da circunferência que estão no interior do ângulo $\widehat{AOB}$ é chamado de **arco menor** determinado por A, B, e o conjuntos dos pontos A e B e dos pontos da circunferência que são exteriores ao ângulo central $\widehat{AOB}$ é chamado de **arco maior**.

Proposição 2.58. *Se $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são cordas distintas de uma circunferência de centro O, então a medida do ângulo $\widehat{BAC}$ é igual à metade da medida do ângulo central $\widehat{BOC}$.*

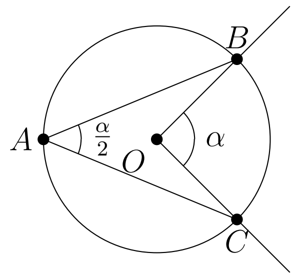


Figura 2.44: Ângulos inscrito e central.

Teorema 2.59. *Sejam $\mathscr{C}$ uma circunferência, P um ponto exterior a $\mathscr{C}$ e r uma reta que contém P e secante a $\mathscr{C}$ nos pontos A e B. Seja t uma tangente a $\mathscr{C}$ em T contendo o ponto P. Então*

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

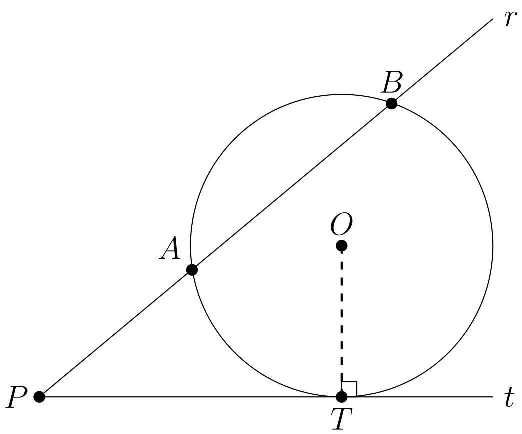


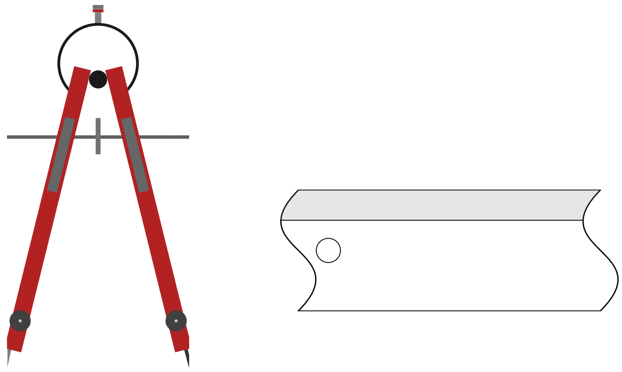
Figura 2.45: Potência de ponto com circunferência.

3 Construções geométricas

Este capítulo tem o intuito de ser utilizado como um guia para as construções elementares utilizando régua e compasso, e familiarizar o leitor com as descrições.

Uma vez que uma construção seja apresentada neste capítulo, a mesma será apenas citada quando necessário em construções posteriores.

Os dois instrumentos necessários para efetuar as construções serão a **régua** sem escala que será utilizada somente para traçar retas e o **compasso** que será utilizado unicamente para traçar circunferências de centro e raio dados, e transportar medidas.



(a) (b)

Figura 3.1: Instrumentos básicos, (a) compasso e (b) régua sem escala.

Note que transportar um segmento com o uso de um compasso, consiste em construir uma circunferência com raio de mesma medida do segmento.

Deste ponto em diante serão descritas diversas construções geométricas que visam desenvolver no leitor a habilidade no manuseio de régua e compasso. Observe que a construção geométrica não constitui uma prova de uma propriedade geométrica, pois a construção envolve escolhas particulares e é passível de erros de precisão.

3.1 Construções elementares

Construções elementares são a base no desenvolvimento de construções mais elaboradas. Apresentamos aqui a descrição e justificativas de cada uma dessas construções.

3.1.1 Segmento congruente

Dados um segmento $\overline{PQ}$, uma reta r e um ponto $A \in r$ (ver Figura 3.2), construir um segmento $\overline{AB}$ congruente a $\overline{PQ}$ contido em r.

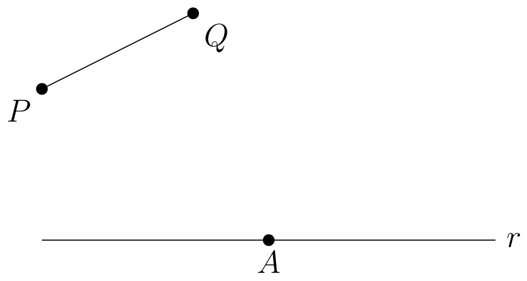


Figura 3.2: Segmento $\overline{PQ}$ que será construído sobre a reta r.

Descrição:

1. Coloque a ponta seca do compasso sobre um dos extremos do segmento $\overline{PQ}$, por exemplo no ponto P e abra o compasso de modo que a ponta com o grafite fique sobre o ponto Q e aperte o compasso caso o mesmo possua esta função, de modo a travar a abertura com a medida do segmento $\overline{PQ}$.

2. Sem modificar a abertura do compasso, coloque a ponta seca sobre o ponto $A \in r$ e construa a circunferência $\mathscr{C}$.

3. Marque os pontos de intersecção da circunferência $\mathscr{C}$ com a reta r sendo C e D.

4. Escolha um dos pontos C ou D para ser a extremidade B do segmento desejado.

Justificativa. Note na Figura 3.3 que, como por construção a abertura do compasso possui o comprimento $\overline{PQ}$, temos que ambos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são congruentes, sendo assim podemos escolher qualquer um deles como solução.

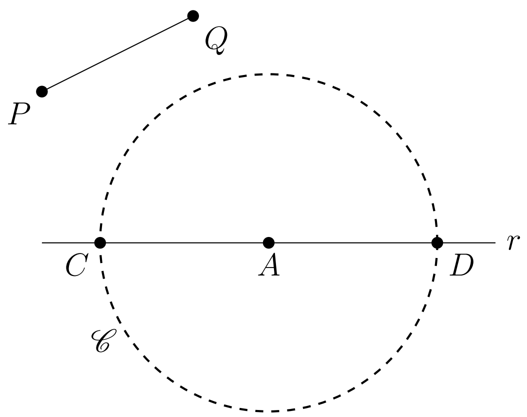


Figura 3.3: Segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ sobre a reta r congruentes a $\overline{PQ}$.

3.1.2 Ângulo congruente

Fornecido um ângulo α como na Figura 3.4, construí-lo de forma que um de seus lados esteja contido na reta r com vértice no ponto $O \in r$.

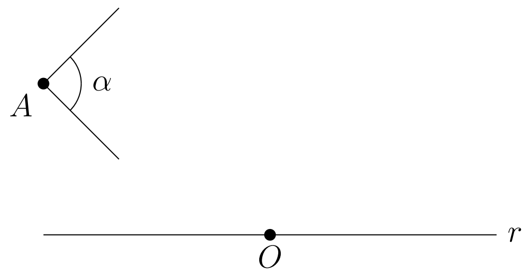


Figura 3.4: Ângulo α a ser transportado para a reta r.

Descrição:

1. Abra o compasso com uma abertura qualquer que seja menor que os lados do ângulo α. Coloque a ponta seca do compasso sobre o vértice do ângulo α, no caso o ponto A e construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de modo que a mesma intersecte os lados do ângulo α.
2. Marque os pontos de intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com os lados do ângulo, sendo C e D.
3. Com a mesma abertura do compasso, construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ sobre a reta r sendo o ponto O o seu centro.
4. Marque os pontos E e F sendo a intersecção da circunferência $\mathscr{C}_2$ com a reta r.
5. Coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto C e a ponta com o grafite sobre o ponto D obtendo assim a abertura de comprimento $\overline{CD}$.
6. Escolha um dos pontos E ou F de acordo com o que preferir, no caso F, centre o compasso no ponto escolhido e construa a circunferência $\mathscr{C}_3$ de raio $\overline{CD}$.
7. Marque o ponto G intersecção das circunferências $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$ do lado onde preferir construir o ângulo congruente a α.
8. Trace a reta s que contém o segmento $\overline{OG}$ obtendo assim o ângulo $\widehat{GOF}$ congruente a α.

O resultado é apresentado na Figura 3.5.

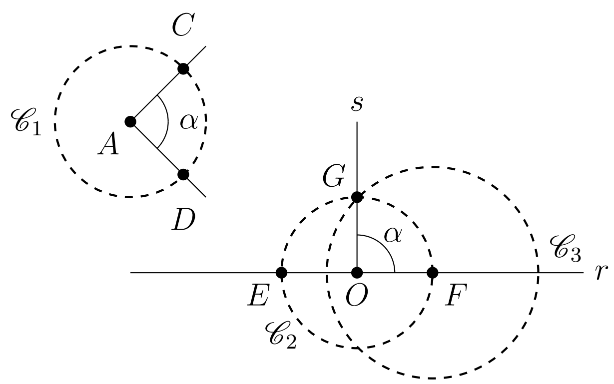


Figura 3.5: Ângulo $\widehat{GOF}$ sobre r congruente a α.

Justificativa. Observe os triângulos $\triangle CAD$ e $\triangle GOF$. Temos por construção que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são congruentes pois são os raios da mesma circunferência.

Como a circunferência $\mathscr{C}_2$ foi construída com o mesmo raio da circunferência $\mathscr{C}_1$, os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{OF}$ são congruentes entre si, logo $\overline{AC} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{OG} \equiv \overline{OF}$.

Como a circunferência $\mathscr{C}_3$ foi construída através do segmento $\overline{DC}$ temos que $\overline{DC} \equiv \overline{FG}$. Temos então a congruência de triângulos $\triangle CAB \cong \triangle GOF$ pelo caso LLL:

$$\overline{CA} \equiv \overline{GO}, \qquad \overline{AD} \equiv \overline{OF}, \qquad \overline{DC} \equiv \overline{FG}.$$

3.1.3 Mediatriz

Construir a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$.

Figura 3.6: Segmento $\overline{AB}$ para ser encontrada a mediatriz.

Descrição:

1. Coloque a ponta seca do compasso no ponto A e abra até que a ponta com grafite esteja sobre o ponto B.
2. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ centrado em A e com abertura de comprimento $\overline{AB}$.
3. Mantendo a mesma abertura, centre o compasso no ponto B e trace a circunferência $\mathscr{C}_2$.
4. Marque os pontos C e D como intersecção das circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.
5. Trace a reta r que contém os pontos C e D, esta é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
6. Marque a intersecção da reta r com o segmento $\overline{AB}$ como ponto M, este é o ponto médio do segmento.

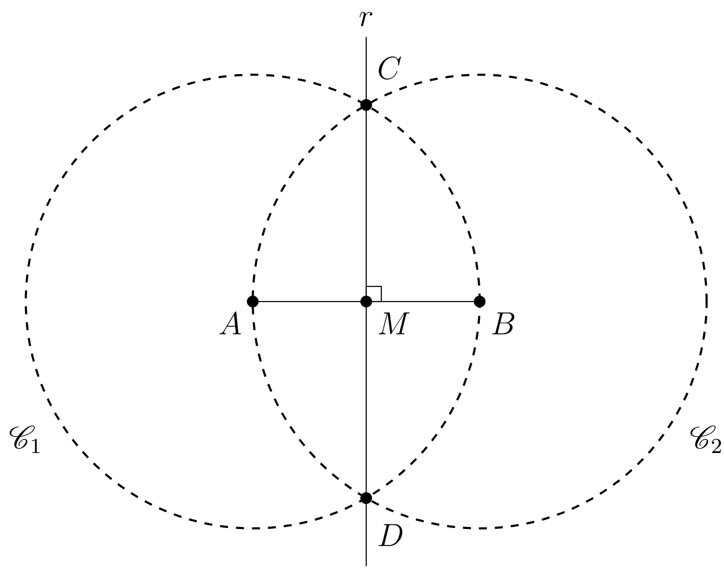


Figura 3.7: Mediatriz r do segmento $\overline{AB}$ e seu ponto médio M.

Justificativa. Vamos utilizar o fato de que a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B, na Figura 3.7 a reta r. Uma reta equidistante a pontos A e B é uma reta em que para todo ponto P pertencente à reta r temos $d(P, A) = d(P, B)$.

Como por construção $\overline{AC} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{BD}$, pois são raios das circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, temos o losango $ACBD$ e assim suas diagonais se intersectam nos pontos médios e são perpendiculares.

3.1.4 Perpendicular

Por um ponto não pertencente à reta

Traçar a perpendicular a uma reta r e contendo um ponto P não pertencente a reta r.

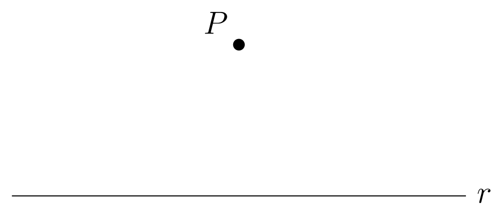


Figura 3.8: Reta r e ponto P não pertencente a reta r.

Descrição:

1. Coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto P e com uma abertura maior que a distância até a reta r, trace uma circunferência $\mathscr{C}_1$.
2. Marque os pontos A e B, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta r.
3. Construa a reta s, mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
4. Marque o ponto M, intersecção das retas r e s.

A reta s é a perpendicular à reta r que contém o ponto P. Note que o ponto M, intersecção das retas r e s é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

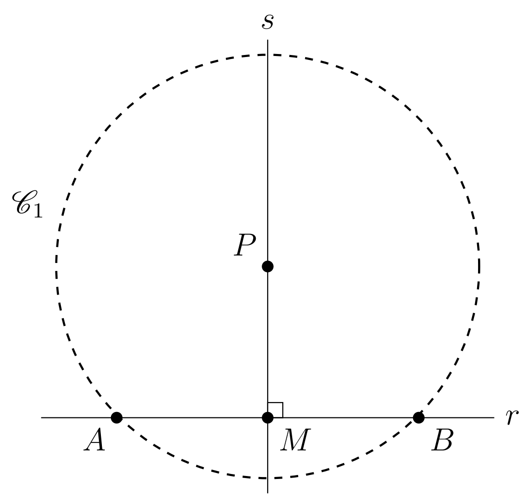


Figura 3.9: Reta s contendo o ponto P e perpendicular à reta r.

Justificativa. Por construção, o ponto P pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, deste modo, a reta s construída é perpendicular à reta r.

Por um ponto pertencente à reta

Por um ponto $P \in r$, traçar a reta s, perpendicular à reta r e contendo P.

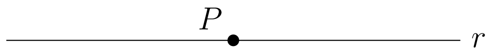


Figura 3.10: Reta r com ponto $P \in r$.

Descrição:

1. Coloque o compasso com a ponta seca no ponto P e com uma abertura qualquer construa a circunferência $\mathscr{C}_1$.
2. Marque os pontos A e B que são as intersecções da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta r.
3. Construa a mediatriz s do segmento $\overline{AB}$, sendo esta a reta desejada.

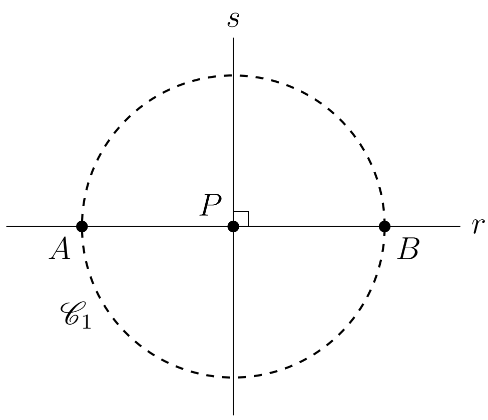


Figura 3.11: Reta s contendo o ponto P e perpendicular à reta r.

Justificativa. Novamente, utilizaremos o fato de que a mediatriz é a reta que equidista dos pontos A e B, sendo portanto a perpendicular.

3.1.5 Bissetriz de um ângulo

Dado um ângulo α, construir a sua bissetriz.

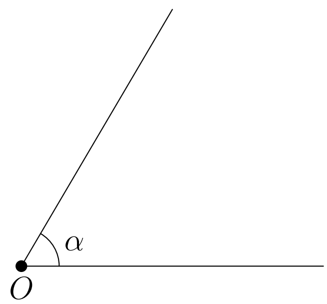


Figura 3.12: Ângulo α.

Descrição:

1. Coloque o compasso sobre o vértice O do ângulo α, com uma abertura qualquer, trace a circunferência $\mathscr{C}_1$.

2. Marque os pontos A e B, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com os lados do ângulo α.

3. Construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto A, e a circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro no ponto B, ambas com a mesma medida de raio.

4. Marque um dos pontos de intersecção das circunferências $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$ como ponto C.

5. Trace a reta r que contém os pontos O e C.

A reta r, conforme a Figura 3.13, divide o ângulo α em dois ângulos iguais, ou seja, é a bissetriz de α.

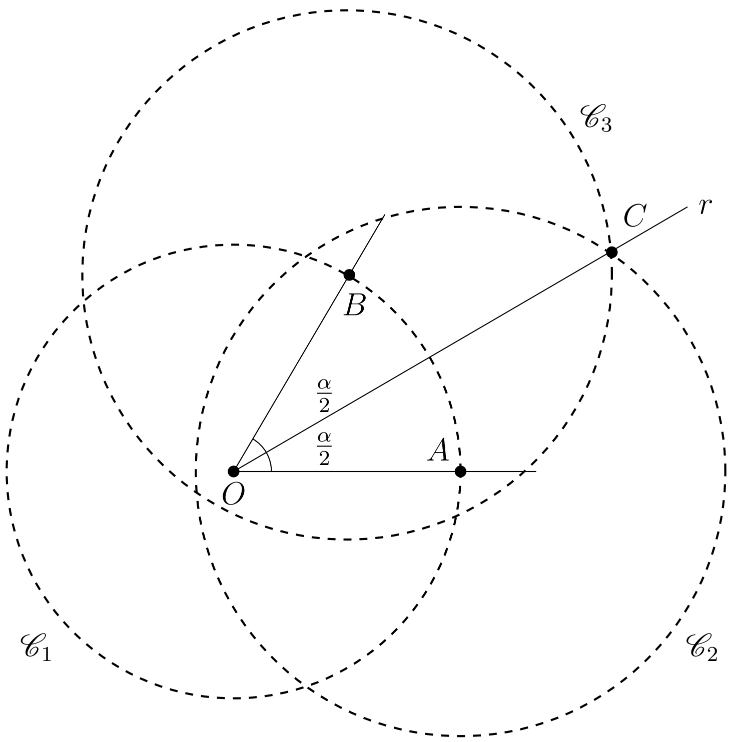


Figura 3.13: Bissetriz do ângulo α.

Justificativa. Observe que, por construção, o segmento $\overline{OA}$ é congruente ao segmento $\overline{OB}$, sendo raios da circunferência $\mathscr{C}_1$. Note também que, por construção, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ também são congruentes, pois são os raios da circunferência $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$. Temos então a congruência de triângulos $\triangle OAC \cong \triangle OBC$ pelo caso LLL:

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB}, \qquad \overline{AC} \equiv \overline{BC}, \qquad \overline{CO} \equiv \overline{CO}.$$

Assim $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \alpha/2$ e portanto a reta r é a bissetriz do ângulo α.

3.1.6 Retas paralelas

Construir uma reta paralela à reta r contendo o ponto P não pertencente à reta r.

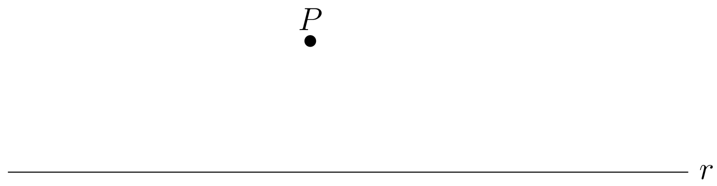


Figura 3.14: Reta r e ponto P para construção da reta paralela.

Descrição:

1. Marque um ponto A sobre a reta r.

2. Trace a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto A e que contém o ponto P.

3. Marque o ponto B, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta r.

4. Com a mesma abertura no compasso, coloque a ponta seca sobre o ponto B e trace a circunferência $\mathscr{C}_2$.

5. Mantendo a abertura no compasso, construa a circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro P.

6. Marque a intersecção dos círculos $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$ como ponto D, que é distinto de A.

7. Trace a reta s que contém os pontos P e D, sendo essa a reta procurada.

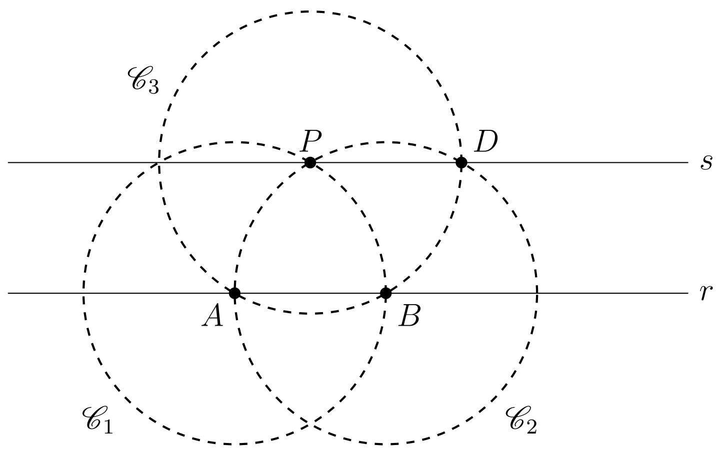


Figura 3.15: Reta s paralela a reta r.

Justificativa. Observe que por construção os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DP}$ e $\overline{PA}$ são congruentes. Temos os triângulos equiláteros $\triangle ABP$ e $\triangle BPD$ congruentes. Portanto os ângulos $\widehat{ABP}$ e $\widehat{DPB}$ são congruentes e alternos internos com relação a transversal $\overleftrightarrow{PB}$. Logo r e s são paralelas.

3.2 Construções intermediárias

Apresentamos nesta seção as construções por meio de régua e compasso que são mais elaboradas, pois dependem das construções elementares apresentadas anteriormente.

3.2.1 Circunferência circunscrita a um triângulo

Dados três pontos não colineares A, B e C, traçar a circunferência que contenha os três pontos.

É preciso determinar o centro da circunferência procurada, sendo este ponto o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo $\triangle ABC$. Este ponto é chamado circuncentro.

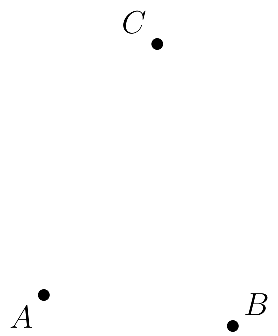


Figura 3.16: Três pontos dados para traçar a circunferência que os contém.

Descrição:

1. Trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.
2. Trace a reta r mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
3. Trace a reta s mediatriz do segmento $\overline{BC}$.
4. Trace a reta t mediatriz do segmento $\overline{CA}$.
5. Marque o ponto D, intersecção das três mediatrizes, sendo este o circuncentro.
6. Trace a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto D e que contém um dos três pontos.

Note que a circunferência conterá os três pontos. Por construção, duas retas já seriam suficientes para determinar o circuncentro.

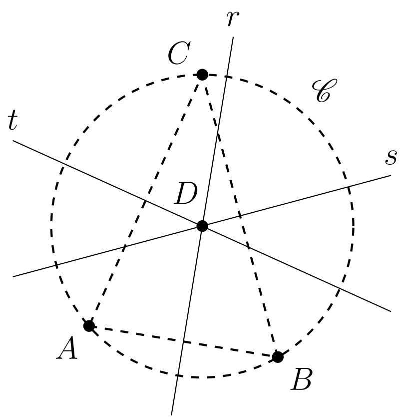


Figura 3.17: Circuncentro.

Justificativa. Note que r, s e t são as mediatrizes dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Observe que r e s não são paralelas, pois do contrário, A, B e C seriam colineares. Sendo assim, r e s se interseccionam.

Como temos as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, seus pontos equidistam das extremidades. Deste modo, temos $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{BD} = \overline{CD}$ pois D pertence a r e s, e de modo análogo temos o mesmo para a reta t. Portanto, o ponto D pertence as três mediatrizes e equidista dos pontos A, B e C.

3.2.2 Circunferência inscrita em um triângulo

Dados três pontos A, B e C que formam o triângulo $\triangle ABC$ conforme a Figura 3.18, traçar a circunferência que tangencie os três lados deste triângulo, ou seja, devemos determinar o centro deste círculo chamado de incentro.

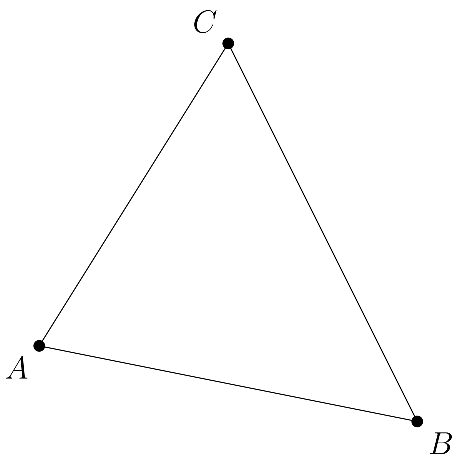


Figura 3.18: Triângulo para a construção da circunferência inscrita.

Descrição:

1. Traçar a bissetriz r do ângulo no vértice A.

2. Traçar a bissetriz s do ângulo no vértice B.

3. Traçar a bissetriz t do ângulo no vértice C.

4. Marque o ponto D como intersecção das bissetrizes.

5. Trace uma perpendicular em relação a um dos lados do triângulo (por exemplo, $\overline{AB}$) e que contenha o ponto D.

6. Marque o ponto E como a intersecção da perpendicular com o segmento escolhido.

7. Construa a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto D e que contém o ponto E.

Observe que duas bissetrizes seriam suficientes para determinar o incentro.

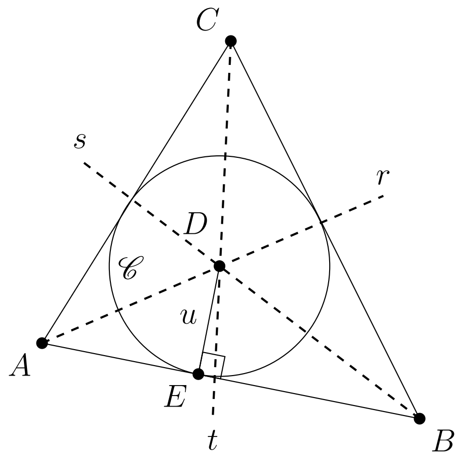


Figura 3.19: Incentro.

Justificativa. Como r, s e t são as bissetrizes do triângulo $\triangle ABC$, então são formadas por pontos equidistantes dos lados do ângulo em questão. Deste modo, note que o ponto D equidista dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, e de maneira análoga, também de $\overline{BC}$, ou seja, é equidistante de todos os lados do triângulo.

3.2.3 Arco capaz

Sejam dois pontos A e B e um ângulo α fixado. O lugar geométrico dos pontos P em um mesmo semiplano formado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tais que o ângulo $\widehat{APB} = \alpha$ é constante é chamado *arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{AB}$.*

Para a construção deste arco, iniciaremos a partir de um ângulo α e um segmento $\overline{AB}$.

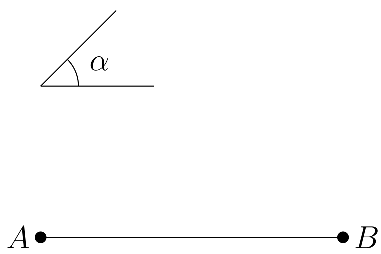


Figura 3.20: Ângulo e segmento para construção do arco capaz.

Descrição:

1. Transporte o ângulo fornecido de modo que o segmento seja um dos lados do ângulo e que o vértice do ângulo coincida com uma das extremidades do segmento.

2. Construa a reta r, perpendicular ao lado do ângulo α diferente do lado $\overline{AB}$, e que contém o vértice do ângulo.

3. Construa a reta s, mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

4. Marque o ponto M intersecção da reta s com o segmento $\overline{AB}$.

5. Marque o ponto C intersecção das retas r e s.

6. Construa o arco de circunferência de centro no ponto C e que contém o ponto A, contido no semiplano oposto ao semiplano que contém α.

O arco capaz do ângulo α é o arco da circunferência $\mathscr{C}$, conforme a Figura 3.21.

Observamos que a construção poderia ser feita no outro semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$, dependendo da posição do ângulo transportado. Assim, o arco capaz não é único, mas são simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

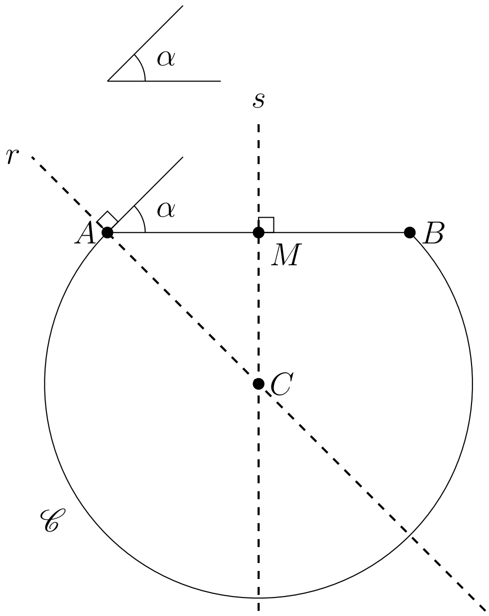


Figura 3.21: Arco capaz.

Justificativa. Observe que, por construção, a reta r é perpendicular ao lado do ângulo α e deste modo o ângulo $\widehat{CAM}$ é o complementar do ângulo α, assim

$$\alpha + \widehat{CAM} = 90°. \tag{3.1}$$

Note também que o ângulo $\widehat{AMC}$ é reto e assim temos as seguintes relações no triângulo retângulo $\triangle AMC$:

$$\begin{aligned} \widehat{AMC} + \widehat{MCA} + \widehat{CAM} &= 90° + \widehat{MCA} + \widehat{CAM} = 180° \Rightarrow \\ \widehat{MCA} + \widehat{CAM} &= 90°. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Comparando a equação (3.1) com a equação (3.2), temos

$$\alpha + \widehat{CAM} = \widehat{MCA} + \widehat{CAM} \Rightarrow \alpha = \widehat{MCA}.$$

Como, por construção, os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle BMC$ são congruentes, os ângulos $\widehat{MCA}$ e $\widehat{MCB}$ são iguais, e assim

$$\widehat{MCA} = \widehat{MCB} = \alpha.$$

Deste modo o arco formado pelos pontos A e B é um arco de 2α, e como visto anteriormente no Capítulo 2 na Proposição 2.58, a medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do seu arco correspondente. Assim, para todo ponto P pertencente ao arco da circunferência $\mathscr{C}$ temos que o ângulo $\widehat{APB} = \alpha$.

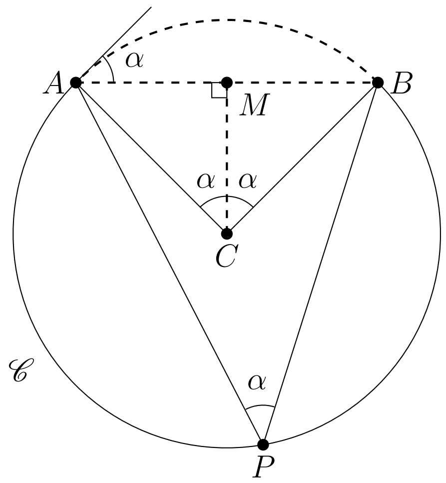


Figura 3.22: Arco capaz α e ângulo correspondente 2α.

3.2.4 Divisão de um segmento em partes iguais

Para dividir um segmento $\overline{AB}$ em duas partes iguais, basta determinar o ponto médio do segmento. A seguir, faremos a divisão de um segmento em 3 partes iguais e esta construção pode então ser generalizada para n partes.

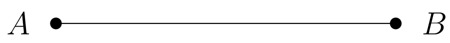


Figura 3.23: Segmento para divisão em 3 partes iguais.

Descrição:

1. Construa a reta r que contém uma das extremidades do segmento $\overline{AB}$, por exemplo, o ponto A.

2. Determine uma medida qualquer no compasso e construa 3 pontos equidistantes sobre a reta r, na Figura 3.24 denotados por A_1, A_2 e A_3.

3. Trace a reta que contém o ponto B e A_3.

4. Por A_1 e A_2, trace duas retas paralelas ao segmento $\overline{BA_3}$, interceptando o segmento $\overline{AB}$ nos dois pontos A'_1 e A'_2, respectivamente.

Pela Figura 3.24 nota-se que obtemos a divisão do segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais

$$AA'_1 + A'_1A'_2 + A'_2B = AB. \tag{3.3}$$

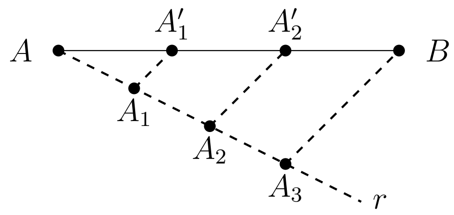


Figura 3.24: Segmento dividido em 3 partes iguais.

Justificativa. Note que temos um feixe de retas paralelas formadas pelos segmentos $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{A_2A_2'}$ e $\overline{A_3B}$, e pelo Teorema de Tales da Proposição 2.47 do Capítulo 2 temos

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA_1'}{A_1'A_2'}, \qquad \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A_1'A_2'}{A_2'B}.$$

Por construção, os segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$ são congruentes, ou seja, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, e assim

$$1 = \frac{AA_1'}{A_1'A_2'} \Rightarrow AA_1' = A_1'A_2', \qquad 1 = \frac{A_1'A_2'}{A_2'B} \Rightarrow A_1'A_2' = A_2'B.$$

Logo

$$AA_1' = A_1'A_2' = A_2'B. \tag{3.4}$$

Agora, podemos generalizar a construção acima para n arbitrário simplesmente determinando sobre a reta r os n segmentos de igual comprimento e daí dividir o segmento $\overline{AB}$ em n partes iguais.

Divisão proporcional a 2 e 3

Dividir um segmento $\overline{AB}$ em partes proporcionais a 2 e 3 é na verdade dividir o segmento em 5 partes iguais e depois escolher apenas as partes desejadas.

Descrição:

1. Construa de maneira análoga à construção anterior a reta r contendo 5 segmentos congruentes, ou seja, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.
2. Trace o segmento $\overline{BA_5}$. Escolhendo a medida do segmento AA_1 como unidade, note que o segmento $AA_2 = 2$ e $A_2A_5 = 3$.
3. Trace o segmento paralelo ao segmento $\overline{BA_5}$ que contém o ponto A_2 e obtenha o ponto $P \in \overline{AB}$. Temos então o segmento $\overline{AB}$ dividido na proporção 2 para 3.

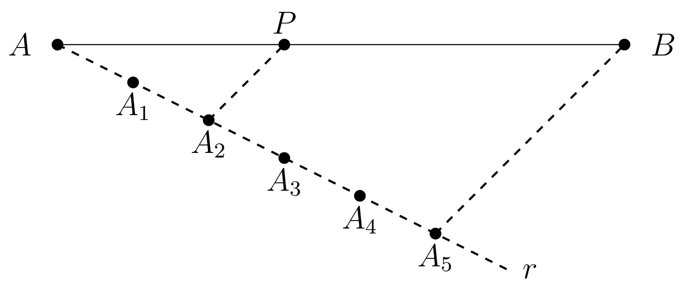


Figura 3.25: Divisão de um segmento $\overline{AB}$ proporcional a 2 e 3.

Justificativa. A justificativa é análoga ao caso anterior utilizando o Teorema de Tales.

3.2.5 Determinar o centro de uma circunferência

Dada uma circunferência $\mathscr{C}$, determinar seu centro.

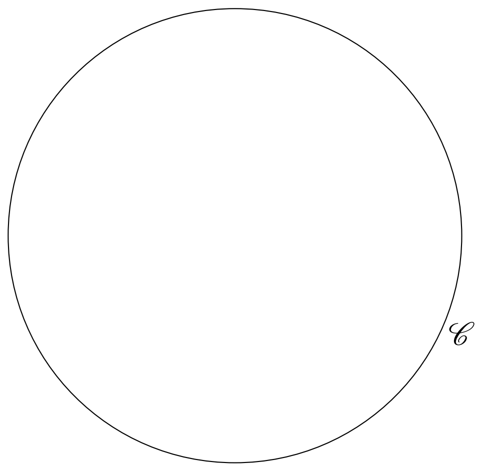


Figura 3.26: Circunferência $\mathscr{C}$ para determinação do centro.

Descrição:

1. Trace um segmento (corda) conforme a Figura 3.27, sendo suas extremidades os pontos A e B.

2. Construa a mediatriz r do segmento $\overline{AB}$.

3. Trace outro segmento (corda) distinto do anterior, com extremidades C e D.

4. Trace a mediatriz s do segmento $\overline{CD}$.

5. Marque o ponto O como intersecção das mediatrizes r e s, sendo este o centro da circunferência.

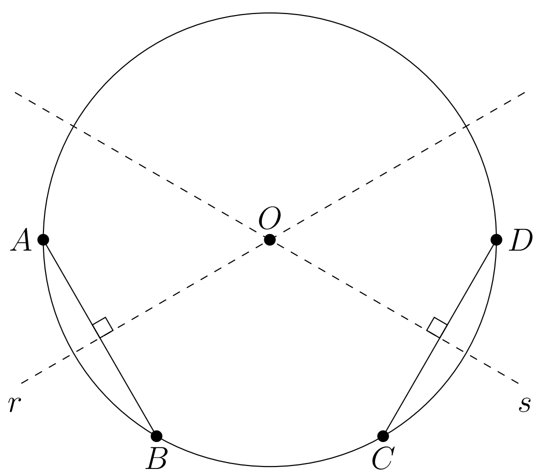


Figura 3.27: Circunferência $\mathscr{C}$ com o centro O determinado.

Justificativa. Como os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são quaisquer e como O equidista de A, B, C e D então O equidista de qualquer ponto da circunferência $\mathscr{C}$. Note que poderíamos ter utilizado duas cordas adjacentes.

3.2.6 Traçar as tangentes a uma circunferência

Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência e um ponto P externo a ela. Determinar as retas tangentes a circunferência que contém o ponto P.

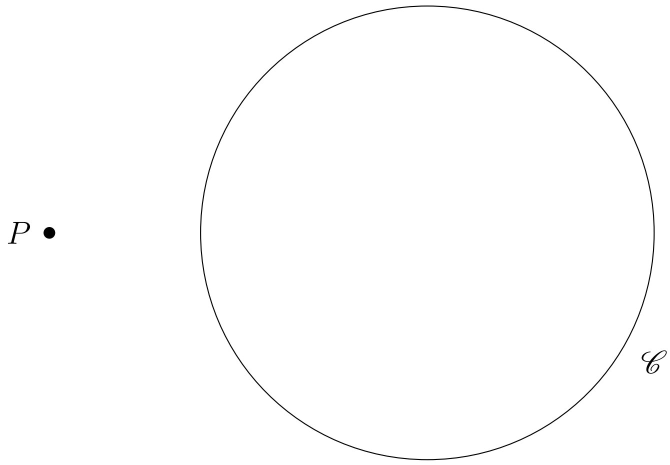


Figura 3.28: Circunferência $\mathscr{C}$ e ponto P para determinação das tangentes.

Caso o centro da circunferência não esteja determinado, utilize a construção anterior e determine seu centro.

Descrição:

1. Determine o ponto O, centro da circunferência $\mathscr{C}$.

2. Trace o segmento $\overline{PO}$.

3. Determine a mediatriz r do segmento $\overline{PO}$.

4. Marque o ponto M intersecção do segmento $\overline{PO}$ com a mediatriz r.

5. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto M e que contém o ponto O, e consequentemente o ponto P.

6. Marque os pontos A e B como intersecção das circunferências $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_1$.

7. Trace a reta t_1 que contém os pontos P e A, e a reta t_2 que contém os pontos P e B, sendo estas as tangentes procuradas.

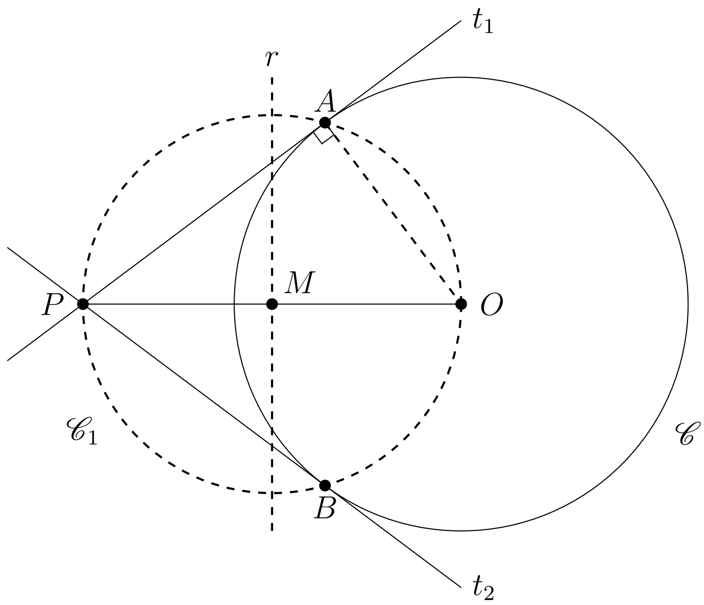


Figura 3.29: Circunferência $\mathscr{C}$ e tangentes t_1 e t_2 que contêm o ponto P.

Justificativa. Note que por construção o ponto A pertence ao arco capaz do ângulo $\widehat{OAP}$, utilizando a construção 3.2.3 verifica-se que quando o segmento $\overline{PO}$ coincide com o diâmetro da circunferência este arco é de 90°. Deste modo temos que o ângulo $\widehat{OAP}$ é reto, e Proposição 2.55, concluímos que a reta t_1 é tangente a circunferência $\mathscr{C}$. A justificativa é análoga para o ponto B.

3.3 Construções de expressões algébricas

Nesta sessão, trataremos das construções geométricas relacionadas às expressões algébricas. Tais expressões contribuirão para a solução de diversos problemas nos quais as construções básicas não são suficientes.

Daqui em diante, construir um segmento x corresponderá a construir um segmento de comprimento x.

3.3.1 A 4ª proporcional

Dizemos que o segmento x é a 4ª proporcional entre os segmentos a, b e c quando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \text{ ou equivalentemente, } ax = bc.$$

Para esta construção, utilizaremos o Teorema de Tales (Proposição 2.47 do Capítulo 2) e a Construção 3.2.4.

Dados os segmentos a, b e c, determinar sua 4ª proporcional.

Figura 3.30: Segmentos para determinação da 4ª proporcional.

Descrição:

1. Trace uma semirreta r com origem em um ponto O qualquer.
2. Marque sobre a reta r partindo da origem O o comprimento a, sendo o ponto A a outra extremidade do segmento.
3. Marque o segmento $\overline{AC}$ de medida c de modo que se tenha o ponto A entre o seguimento $\overline{OC}$.
4. Trace uma semirreta s com origem no ponto O e distinta da semirreta r.
5. Marque sobre a semirreta s o comprimento b através de um segmento de extremidades O e B.
6. Trace a reta t que contém os pontos A e B.
7. Trace a reta u, paralela a reta t que contém o ponto C.
8. Marque o ponto D, intersecção das retas u e s.

A 4ª proporcional é o comprimento $BD = x$ conforme podemos verificar na Figura 3.31.

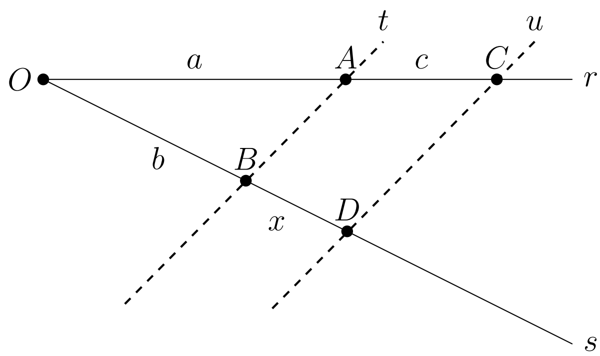


Figura 3.31: 4ª proporcional.

Justificativa. Ver Construção 3.2.4 na página 59.

3.3.2 $\sqrt{a^2 \pm b^2}$

Caso $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observe que se temos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ com a e b segmentos fornecidos, temos que x é na verdade a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos a e b.

Descrição:

1. Trace uma reta r.
2. Trace uma reta s, perpendicular à reta r.
3. Marque o ponto O, intersecção das retas r e s.
4. Sobre a reta r, marque o segmento de comprimento a e de extremidades O e A.

5. Sobre a reta s, marque o segmento de comprimento b e de extremidades O e B.

A medida procurada é $x = AB$.

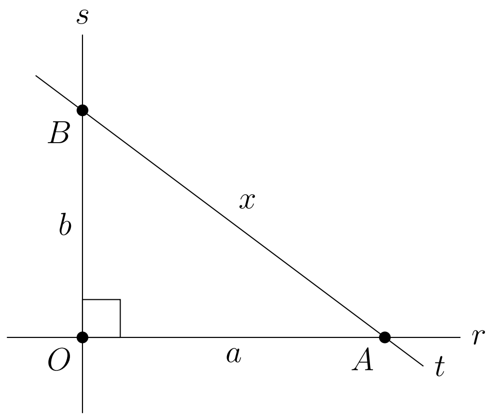


Figura 3.32: Construção do segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Justificativa. A justificativa decorre diretamente do Teorema de Pitágoras 2.7 do Capítulo 2.

Caso $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Para determinar $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, com a e b sendo segmentos dados, basta notar que a é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos b e x.

Descrição:

1. Trace uma reta r.

2. Trace uma reta s, perpendicular à reta r.

3. Marque o ponto O de intersecção das retas r e s.

4. Sobre a reta r, construa o segmento de comprimento b com extremidades O e B.

5. Trace a circunferência $\mathscr{C}$ de raio a e centro no ponto B.

6. Marque o ponto A como uma das intersecções da circunferência $\mathscr{C}$ com a reta s.

A medida procurada é $x = AO$, representado na Figura 3.33. Observe que esta construção fornece duas soluções, uma para cada semiplano determinado por r.

(em branco)

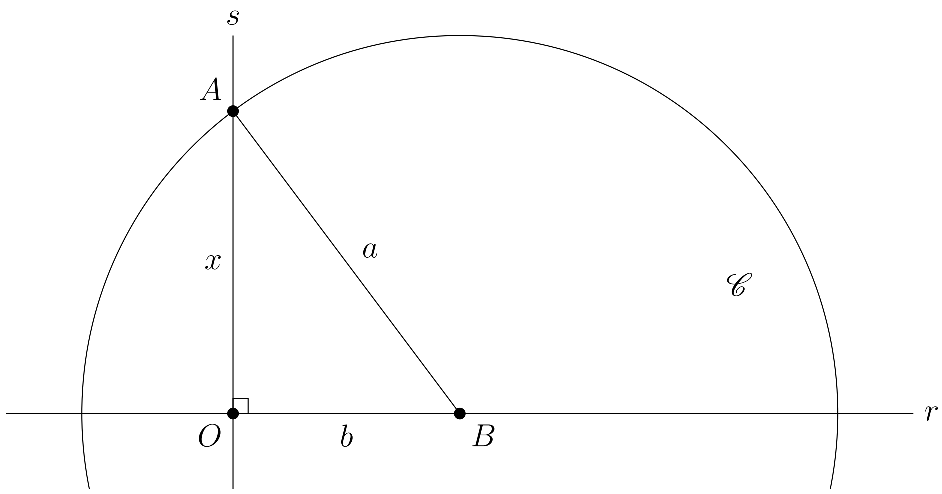


Figura 3.33: Construção do segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Justificativa. Novamente a justificativa decorre diretamente do Teorema de Pitágoras do Capítulo 2, Teorema 2.7.

3.3.3 $a\sqrt{n}$, com n natural

Esta construção nos fornecerá todos os segmentos da sequência $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, \ldots$ Iniciaremos descrevendo a construção do segmento $a\sqrt{2}$.

Descrição:

1. Sobre uma reta r qualquer, construa o segmento de comprimento a e marque suas extremidades como os pontos O e A.

2. Construa a reta s, perpendicular à reta r que contém o ponto A.

3. Marque sobre a reta s um segmento de comprimento a e extremidades A e B.

O segmento procurado é $\overline{OB}$ de comprimento $a\sqrt{2}$.

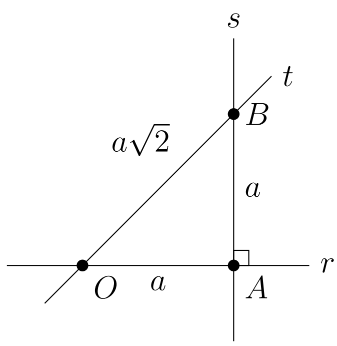


Figura 3.34: Construção do segmento $a\sqrt{2}$.

Justificativa. Do Teorema de Pitágoras do Capítulo 2, Teorema 2.7, temos

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow \overline{OB} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Podemos continuar a construção e encontrar outros triângulos da sequência a partir da Figura 3.34.

Descrição:

1. Construa a reta u, perpendicular à reta t, que contém o ponto B.
2. Marque o comprimento a sobre a reta u através do segmento de extremidades B e C, de modo que C e A estejam em lados opostos da reta t.
3. Construa a reta v que contém os pontos O e C.

Temos então o segmento $\overline{OC} = a\sqrt{3}$.

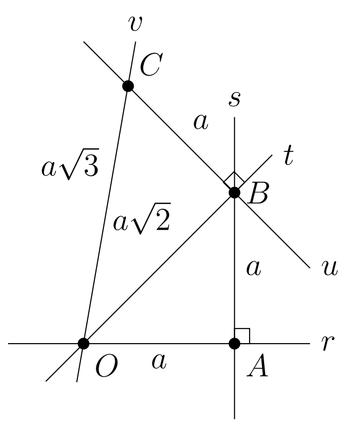


Figura 3.35: Construção do segmento $a\sqrt{3}$.

Justificativa. Utilizando o Teorema de Pitágoras do Capítulo 2, Teorema 2.7, temos

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Generalizando a construção, obtemos a Figura 3.36.

(em branco)

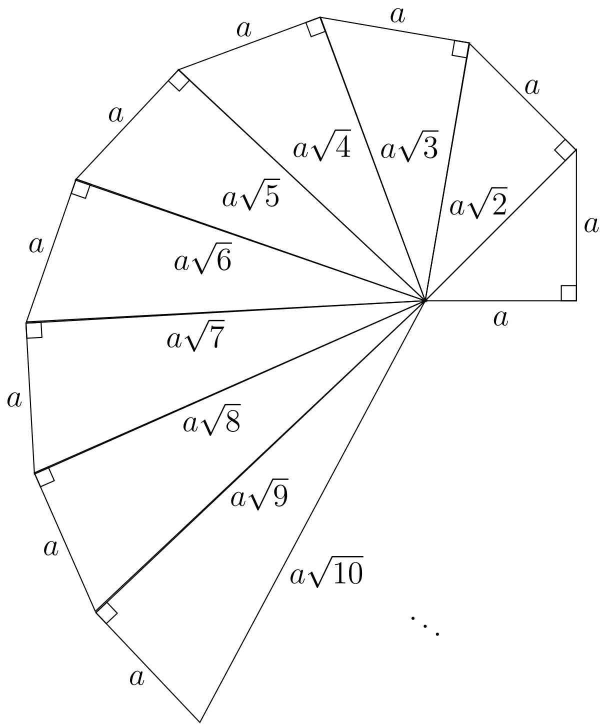


Figura 3.36: Construção de $a\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

3.3.4 Média aritmética

Dados dois segmentos a e b definimos a *média aritmética* por

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Descrição:

1. Trace uma reta r.
2. Transporte o segmento a sobre a reta r.
3. Nomeie as extremidades do segmento por O e A.
4. Trace o segmento b sobre a reta r de modo que uma das extremidades do segmento b coincida com uma das extremidades do segmento a sem o sobrepor.
5. Construa a mediatriz s do segmento $\overline{OB}$ conforme a Construção 3.1.3.
6. Marque o ponto M, intersecção das retas r e s.

A média aritmética será o comprimento do segmento $m = \overline{OA} = \overline{OB}$.

(em branco)

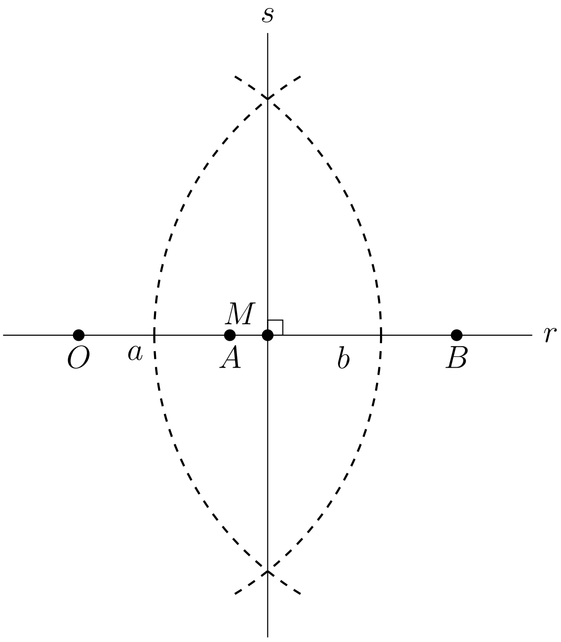


Figura 3.37: Média aritmética.

Justificativa. É imediata devido à construção que, na verdade, é uma construção elementar.

3.3.5 Média geométrica

Conhecidos dois segmentos a e b, a *média geométrica* é definida por

$$g = \sqrt{ab}.$$

Descrição:

1. Sobre uma reta r, transporte o segmento a e nomeie suas extremidades de O e A.
2. Transporte o segmento b para a reta r de modo que uma extremidade de b coincida com o ponto A sem sobrepor o segmento a.
3. Marque como ponto B a extremidade do segmento b, distinta de A.
4. Determine a mediatriz s do segmento $\overline{OB}$.
5. Marque o ponto H, intersecção das retas r e s.
6. Construa a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto H e raio $\overline{OH}$.
7. Trace a reta t perpendicular à reta r que contém o ponto A.
8. Marque o ponto P, intersecção da reta t com a circunferência $\mathscr{C}$.

O segmento procurado é $g = \sqrt{ab} = \overline{AP}$.

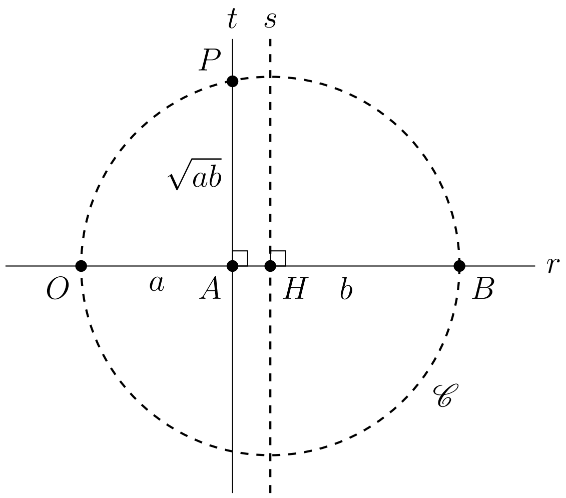


Figura 3.38: Média geométrica.

Justificativa. Note que o segmento $\overline{OB}$ é o diâmetro da circunferência $\mathscr{C}$ e que temos o triângulo $\triangle OPB$, que está sobre o arco capaz de $90°$ conforme visto na Seção 3.2.3. Pelas relações métricas no triângulo retângulo da Seção 2.7, temos então

$$h^2 = mn \Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{AB} = ab \Rightarrow \overline{PA} = \sqrt{ab}.$$

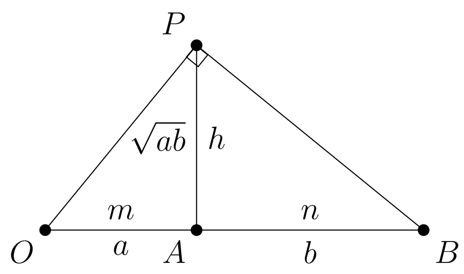


Figura 3.39: Relações métricas e média geométrica.

Existem outras maneiras de construir a média geométrica, conforme [2] que utiliza o Teorema 2.59.

3.3.6 O segmento áureo

Sejam um segmento $\overline{AB}$ e um ponto C em seu interior. Chamaremos o segmento $\overline{CB}$ de *segmento áureo interno* de $\overline{AB}$ se

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}. \tag{3.5}$$

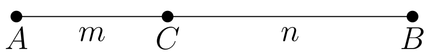


Figura 3.40: Segmento áureo interno.

Escrevendo $AB = a$, temos que $a = m + n$ e da equação (3.5),

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{a} \Rightarrow n^2 = am = a(a-n) = a^2 - an \Rightarrow n^2 + an - a^2 = 0.$$

Calculando as raízes na variável n temos

$$\begin{aligned} n &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(-a^2)}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} \\ CB = n &= a\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tomando agora o ponto C' externamente ao segmento $\overline{AB}$ como na Figura 3.41 chamaremos o segmento $\overline{AC'}$ de *segmento áureo externo* de $\overline{AB}$ se

$$\frac{AB}{BC'} = \frac{BC'}{AC'}. \tag{3.7}$$

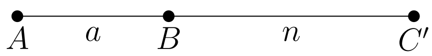


Figura 3.41: Segmento áureo externo.

Utilizando a equação (3.7)

$$\frac{a}{n} = \frac{n}{(a+n)} \Rightarrow n^2 = a(a+n) \Rightarrow n^2 - an - a^2 = 0.$$

Calculando as raízes

$$\begin{aligned} n &= \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4(-a^2)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \\ AC' = n &= a\frac{\sqrt{5}+1}{2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Multiplicando agora as raízes (3.6) e (3.8)

$$CB \cdot AC' = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a\frac{\sqrt{5}+1}{2} = a^2\frac{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}{4} = a^2.$$

Como em ambos os casos consideramos $AB = a$, a última igualdade equivale a

$$AB^2 = CB \cdot AC'. \tag{3.9}$$

Temos então a média geométrica dos segmentos, e utilizando o Teorema 2.59 faremos a construção dos segmentos áureo interno representado por $\overline{AC}$ e áureo interno representado por $\overline{AC'}$.

Descrição:

1. Sobre uma reta r, transporte o segmento $\overline{AB}$.

2. Determine a reta s mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

3. Marque o ponto M, intersecção das retas r e s.

4. Trace a reta t perpendicular à reta r que contenha um das extremidades do segmento $\overline{AB}$, por exemplo, o ponto B.

5. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto B e que contém o ponto M.

6. Marque o ponto O intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta t.

7. Construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto O e que contém o ponto B.

8. Trace a reta u que contém os pontos A e O.

9. Marque os ponto C_1 e C_2, intersecção da reta u com a circunferência $\mathscr{C}_2$.

   A Figura 3.42 apresenta a descrição parcial.

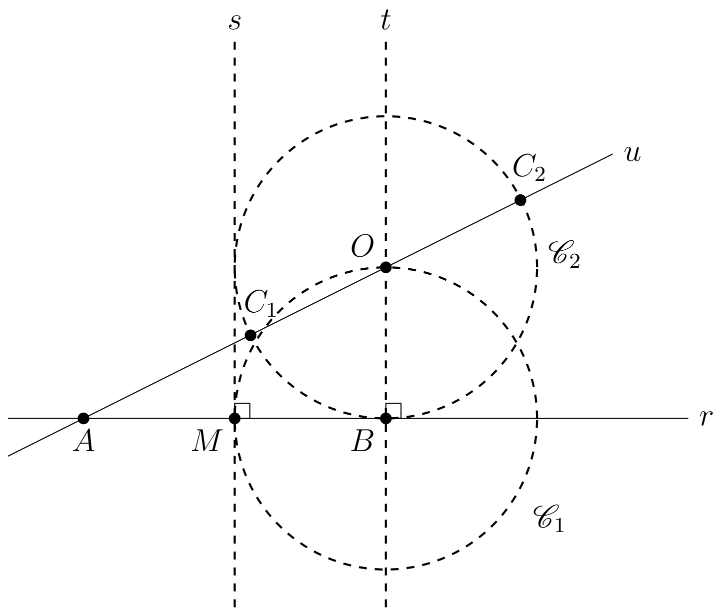


Figura 3.42: Construção dos segmentos áureos.

10. Construa a circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro no ponto A e que contém o ponto C_1.

11. Marque o ponto C, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_3$ com a reta r.

12. Construa a circunferência $\mathscr{C}_4$ de centro no ponto A e que contenha o ponto C_2.

13. Marque o ponto C', intersecção da circunferência $\mathscr{C}_4$ com a reta r.

A Figura 3.43 apresenta a construção finalizada.

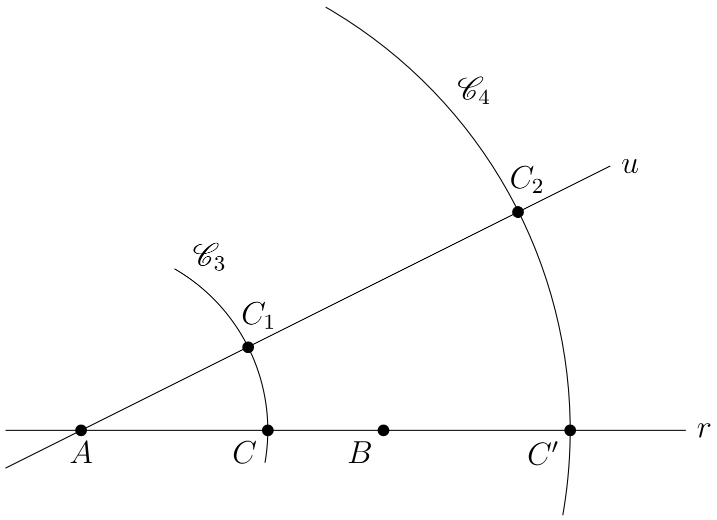


Figura 3.43: Segmento áureo sobre uma reta.

Temos então os segmentos $\overline{AC}$ áureo interno e $\overline{AC'}$ áureo externo.

Justificativa. Decorre do Teorema 2.59, das definições de segmento áureo e da equação (3.9).

3.3.7 Retângulo áureo

Desde a antiguidade até os dias atuais, principalmente nas artes e arquitetura, é utilizada a proporção áurea, também chamada de **divina proporção** [13].

A proporção áurea consiste na razão entre os lados de um retângulo áureo sendo o número irracional

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618, \tag{3.10}$$

também é chamado de **número áureo** ou **número de ouro**.

Construiremos então o retângulo áureo tendo como lado menor um dado segmento de comprimento $AB = a$.

Descrição:

1. Transporte o segmento $\overline{AB}$ sobre uma reta r.
2. Trace a reta s perpendicular à reta r e que contém o ponto A.
3. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto A e que contém o ponto B.
4. Marque o ponto B', intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta s.
5. Trace a reta t perpendicular à reta s e que contém o ponto B'.
6. Trace a reta u paralela à reta s e que contém o ponto B.

7. Marque o ponto B'', intersecção das retas u e t.

   Note que temos na verdade um quadrado de lado $AB = a$.

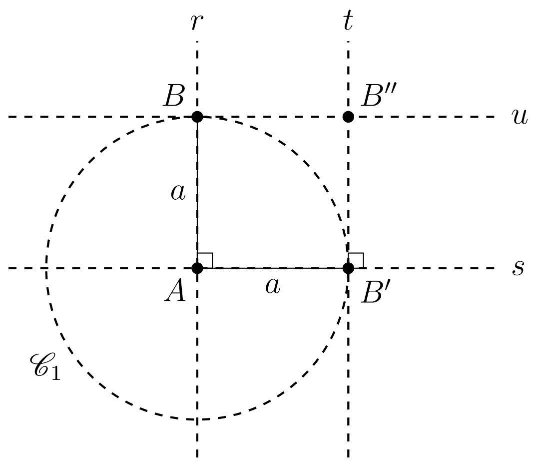


Figura 3.44: Quadrado.

8. Construa a reta v, mediatriz do segmento $\overline{AB'}$.

9. Marque o ponto O, intersecção da reta v com o segmento $\overline{AB'}$.

10. Construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto O e que contém o ponto B''.

11. Marque o ponto C, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_2$ com a reta s.

12. Trace a reta w, perpendicular à reta s e que contém o ponto C.

13. Marque o ponto D, intersecção das retas w e u.

O retângulo procurado é o quadrilátero $ABDC$ da Figura 3.45.

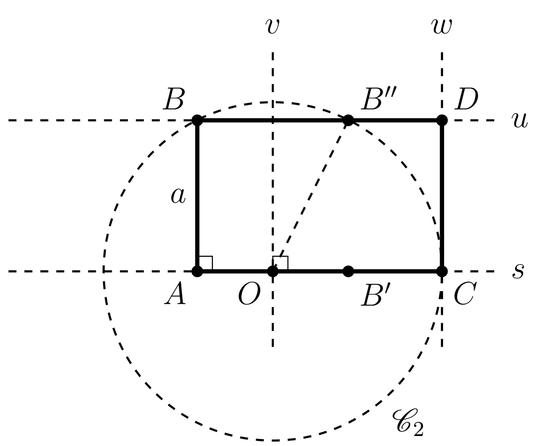


Figura 3.45: Retângulo áureo.

Justificativa. Observe que no triângulo retângulo $\triangle OB'B''$ de base $a/2$ e altura a, pelo Teorema de Pitágoras 2.7, podemos calcular

$$(\overline{OB''})^2 = (\overline{OB'})^2 + (\overline{B'B''})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow$$
$$\overline{OB''} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

A base do retângulo $ABDC$ é

$$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OB''} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A razão entre o lado maior e o lado menor do quadrilátero $ABDC$ é

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{a\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{a}.$$

Portanto, temos a proporção áurea

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3.3.8 $1/a$

Devido ao Postulado 2.10 (Postulado da Colocação da Régua), sempre é possível determinar um segmento unitário que será representado por 1.

Sejam a e b segmentos conhecidos, temos então a expressão

$$\frac{a}{b} = x \Leftrightarrow a = bx.$$

Da forma como os antigos pensavam, não poderíamos comparar um segmento com uma área, porém podemos contornar este impasse utilizando o segmento unitário como a quarta proporcional. Assim,

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \frac{a \cdot 1}{b} = x.$$

Faremos agora como na Construção 3.3.1.

Descrição:

1. Trace a reta r que contém um ponto O qualquer.
2. Marque sobre a reta r, partindo da origem O, o comprimento a, sendo o ponto A a outra extremidade do segmento.
3. Marque o segmento unitário 1, com uma extremidade no ponto A e outra na semirreta r do lado que não contém o ponto O, determinando um ponto C.
4. Trace uma reta s que contenha o ponto O e distinta da reta r.

5. Marque sobre a reta s o comprimento b, sendo uma de suas extremidades o ponto O e a outra nomeie-a de ponto B.

6. Trace a reta t que contém os pontos A e B.

7. Trace a reta u, paralela a reta t que contém o ponto C.

8. Marque o ponto D, intersecção das retas u e s.

Observe que o segmento procurado é o segmento $\overline{BD} = x = b/a$. Para calcularmos então o segmento $x = 1/a$, basta tomar $b = 1$.

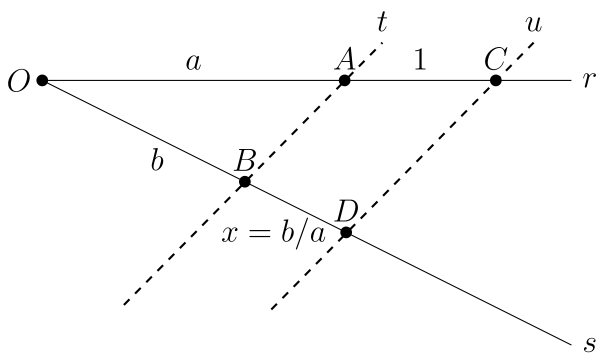


Figura 3.46: Segmento b/a.

Justificativa. Para mais detalhes, consulte a justificativa da Construção 3.2.4 e utilize o Teorema 2.47 (Tales) para obter

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{1} \Rightarrow b \cdot 1 = ax \Rightarrow x = \frac{b}{a}.$$

3.3.9 a^2

Dado um segmento a, o procedimento para construir a^2 é parecido com o da Construção 3.3.8:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{a} \Rightarrow a \cdot a = 1 \cdot x \Rightarrow x = a^2.$$

Descrição:

1. Trace a reta r que contendo um ponto O qualquer.

2. Marque sobre a reta r, partindo da origem O, o comprimento unitário 1, sendo o ponto A a outra extremidade deste segmento.

3. Marque o segmento dado a, com uma extremidade no ponto A e a outra na reta r, do lado que não contém o ponto O, e determine o ponto C.

4. Trace uma reta s que contenha o ponto O e distinta da semirreta r.

5. Marque sobre a reta s o comprimento a, sendo uma de suas extremidades o ponto O e a outra nomeie-a de ponto B.

6. Trace a reta t que contém os pontos A e B.

7. Trace a reta u, paralela a reta t, que contém o ponto C.

8. Marque o ponto D, intersecção das retas u e s.

O segmento procurado é $\overline{BD} = x = a^2$.

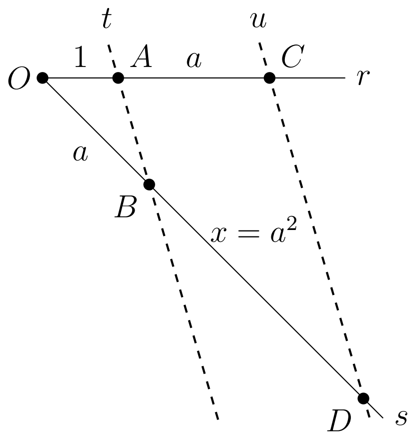


Figura 3.47: Segmento a^2.

Justificativa. Consulte a justificativa da Construção 3.2.4 e utilize o Teorema de Tales 2.47 da maneira como foi enunciado no início desta sessão.

3.3.10 $\sqrt{a}$

Sejam a um segmento fixado e um segmento unitário u.

Descrição:

1. Sobre uma reta r, marque o segmento a.

2. Nomeie as extremidades de a, sendo uma o ponto O e a outra o ponto A.

3. Construa o segmento unitário sobre a reta r de modo que uma de suas extremidades esteja sobre o ponto A e a outra esteja do lado da semirreta determinada por A e que não contém o ponto O.

4. Nomeie a outra extremidade do segmento unitário como ponto B.

5. Determine a reta s, mediatriz do segmento $\overline{OB} = a + 1$.

6. Marque o ponto M, intersecção das retas r e s.

7. Construa a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto M e que contém o ponto O.

8. Trace a reta t, perpendicular à reta r que contém o ponto A.

9. Marque o ponto C, intersecção da reta t com a circunferência $\mathscr{C}$, notando que há duas possibilidades e o resultado independe da escolha.

O segmento procurado é $\overline{AC} = \sqrt{a}$.

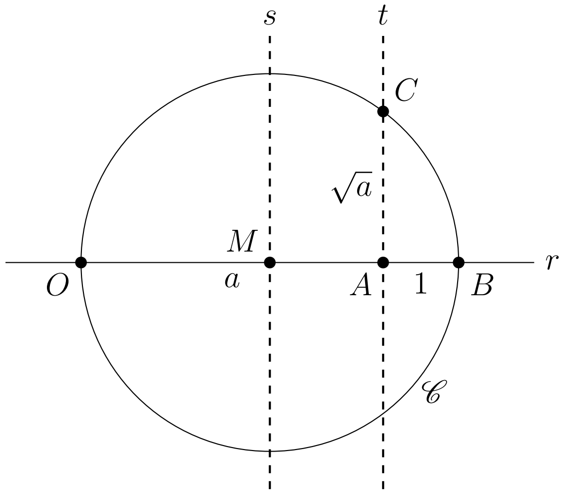


Figura 3.48: Segmento $\sqrt{a}$.

Justificativa. Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo do Teorema 2.7, observando que o triângulo $\triangle OCB$ está sobre o arco capaz da circunferência $\mathscr{C}$ (ver Sessão 3.2.3), obtemos $\widehat{OCB} = 90°$ e a relação

$$h^2 = mn = a \cdot 1 \Rightarrow h = \sqrt{a}.$$

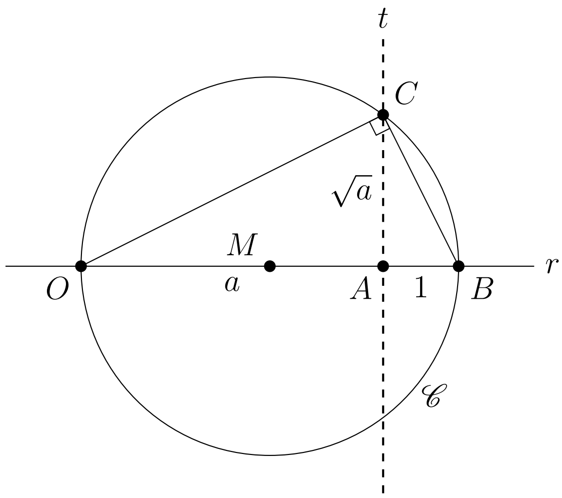


Figura 3.49: Segmento $\sqrt{a}$ como altura de um triângulo retângulo.

4 Números construtíveis

Neste capítulo, a construção por meio de compasso e régua será descrita com um maior grau de formalidade, e destina-se a leitores e estudantes que desejam compreender uma aplicação das extensões algébricas dos racionais.

4.1 Álgebra

Esta seção apresentará conceitos da disciplina de Álgebra que são necessários para as demonstrações que serão desenvolvidas. Para o leitor que desejar uma referência, consulte [16], [17] e [18].

Seja A um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de *soma* e *produto* em A e denotaremos por '$+$' e '$\cdot$'.

Assim

$$\begin{aligned} +\colon A \times A &\longrightarrow A \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon A \times A &\longrightarrow A. \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Definição 4.1. Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um corpo se, dados a, b e c elementos de A, valem as seguintes propriedades:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Associatividade da soma).
2. $a + b = b + a$ (Comutatividade da soma).
3. Existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ (Existência de elemento neutro para a soma).
4. Para qualquer $a \in A$ existe um $b \in A$, tal que $a + b = b + a = 0$ (Existência de inverso aditivo).
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Associatividade do produto).
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Distributividade à esquerda e à direita).
7. Existe $1 \in A$, e 0 diferente de 1, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para qualquer $a \in A$ (Existência de elemento neutro para o produto).

   Dizemos que até esta propriedade, $(A, +, \cdot)$ é um *anel com unidade* 1.
8. Para quaisquer $a, b \in A$, $a \cdot b = b \cdot a$.

   Até esta propriedade dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um *anel comutativo com unidade.*

9. Sejam $a, b \in A$, $a \cdot b = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.

   Definimos até esta propriedade que $(A, +, \cdot)$ é um *anel sem divisores de zero.*

   Se $(A, +, \cdot)$ for comutativo, com unidade e sem divisores de zero, será um *domínio de integridade.*

10. Para qualquer $a \in A$, com a diferente de 0, existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Seja K um corpo qualquer. Se um espaço vetorial V sobre K possui uma base com n elementos, chamamos ao número n de dimensão de V sobre K e denotamos $[V : K] = n$.

Uma extensão $L \supset K$ diz-se finita se $[L : K] = n < \infty$. Caso contrário $L \supset K$ diz-se uma extensão infinita.

Proposição 4.2. *Sejam $M \supset L \supset K$ corpos tais que $[M : L]$ e $[L : K]$ são finitos. Então $[M : K]$ é finito e*

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

Seja A um anel comutativo com unidade. Chamamos de polinômio sobre A em uma indeterminada x uma expressão formal

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

onde $a_i \in A$ e $a_i = 0$, para todo $i \geq m$, com $i, m \in \mathbb{N}$.

Será chamado de grau do polinômio $p(x)$ denotado por $\partial p(x) = n$ se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$, para qualquer $j > n$.

Denotaremos por $A[x]$ o conjunto de todos os polinômios, sobre A, em uma indeterminada x.

Dizemos que $p(x)$ é um polinômio mônico em $A[x]$ se $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ for um polinômio de $A[x]$ tal que $a_n = 1$.

Definição 4.3. Seja $f(x) \in A[x]$ tal que $\partial f(x) \geq 1$. Dizemos que $f(x)$ é um polinômio irredutível sobre A se toda vez que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, com $g(x), h(x) \in A[x]$ então $g(x) = a$ constante em A ou $h(x) = b$ constante em A.

Se $f(x)$ não for irredutível sobre A dizemos que é redutível.

Para a demonstração do próximo Teorema e Proposições seguintes, consulte [17].

Teorema 4.4 (Critério de Eisenstein)**.** *Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$. Suponhamos que exista um inteiro primo p tal que:*

1. $p \nmid a_n$.

2. $p \mid a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

3. $p^2 \nmid a_0$.

Então $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Seja p um número primo e seja $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ o corpo contendo p elementos. Se $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, definiremos o polinômio $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ por

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \cdots + \overline{a}_n x^n$$

onde $\overline{a}_i = a_i + p \cdot \mathbb{Z}$ é a classe de equivalência, módulo p, cujo representante é $a_i \in \mathbb{Z}$.

Proposição 4.5. *Seja p primo. Se $p \nmid a_n$ e $\overline{f}(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_p$ então $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.*

4.2 Construção por meio de régua e compasso

Para tais construções, é importante deixar claro que a régua a ser utilizada não possui qualquer marcação, sendo assim apenas um instrumento utilizado para traçar segmentos de reta.

Definição 4.6. Seja $\mathscr{P}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que contém pelo menos dois pontos distintos. Uma reta em $\mathscr{P}$ será uma reta r de $\mathbb{R}^2$ que contém pelo menos dois pontos distintos de $\mathscr{P}$, e uma circunferência em $\mathscr{P}$ será uma circunferência $\mathscr{C}$ em $\mathbb{R}^2$ com seu centro e pelo menos um ponto pertencendo a $\mathscr{P}$.

Definição 4.7. Serão chamadas de construções elementares:

1. Intersecção de duas retas em $\mathscr{P}$.
2. Intersecção de uma reta e uma circunferência ambas em $\mathscr{P}$.
3. Intersecção de duas circunferências em $\mathscr{P}$.

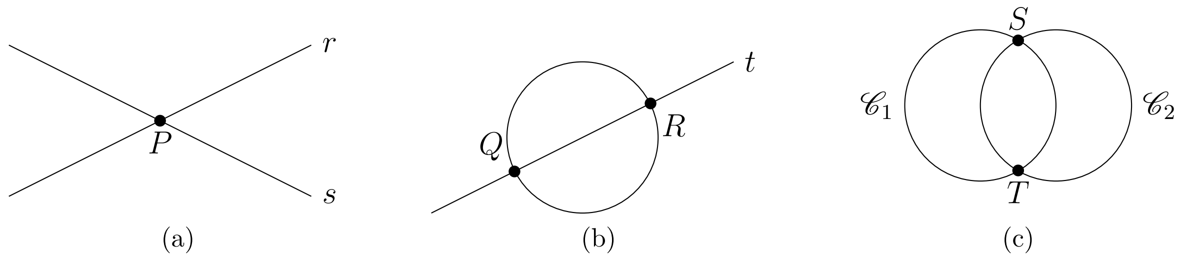


Figura 4.1: (a) Construção 1; (b) construção 2; (c) construção 3.

Definição 4.8. Dizemos que um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ é construtível a partir de $\mathscr{P}$ se pode ser obtido através de um número finito de operações elementares em $\mathscr{P}$. O conjunto de tais pontos será denotado por $\langle \mathscr{P} \rangle$.

Observação 4.9. Note que, se $\mathscr{P}$ é finito, apenas uma quantia finita de retas e circunferências pode ser obtida a partir de $\mathscr{P}$, e consequentemente, apenas uma quantia finita de novos pontos por meio das construções elementares.

Exemplo 4.10. Seja $\mathscr{P}_0 = \{0, U\}$ sendo que $0 = (0,0)$ e $U = (1,0)$. Então $\langle \mathscr{P}_0 \rangle = \{0, U, A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

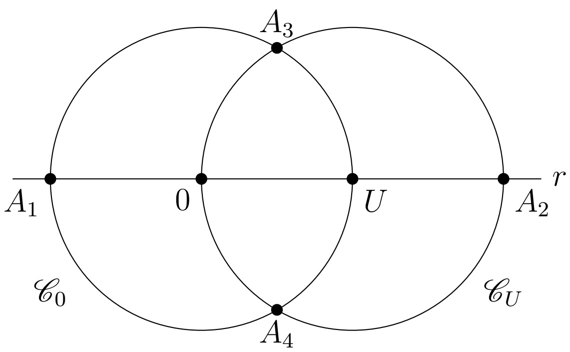


Figura 4.2: Subconjunto $\langle \mathscr{P}_0 \rangle$ construído a partir de $\mathscr{P}_0$.

Descrição:

1. Construir a reta r que contém os pontos 0 e U.
2. Construir a circunferência $\mathscr{C}_0$ de centro no ponto 0 e que contém o ponto U.
3. Utilizando a construção 2, marcar o ponto $A_1 = (-1, 0)$, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_0$ com a reta r.
4. Construir a circunferência $\mathscr{C}_U$ de centro no ponto U e que contém o ponto 0.
5. Utilizando a construção 2, marcar o ponto $A_2 = (2, 0)$, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_U$ com a reta r.
6. Utilizando a construção 3, marcar os pontos $A_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $A_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, intersecção das circunferências $\mathscr{C}_0$ e $\mathscr{C}_U$.

Assim, temos o subconjunto $\langle \mathscr{P}_0 \rangle = \{0, U, A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Note que $\langle \mathscr{P}_0 \rangle$ foi construído utilizando somente as construções elementares da Definição 4.7.

Definição 4.11. Seja $\mathscr{P}_0 = \{0, U\}$. Recursivamente, teremos

$$\mathscr{P}_1 = \langle \mathscr{P}_0 \rangle, \mathscr{P}_2 = \langle \mathscr{P}_1 \rangle, \ldots, \mathscr{P}_{n+1} = \langle \mathscr{P}_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1} \subset \cdots \subset \mathbb{R}^2.$$

Assim, definimos $\mathscr{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}_n$.

Pela Observação 4.9, segue que $\mathscr{P}_n$ é subconjunto finito do $\mathbb{R}^2$.

Proposição 4.12. *Para todo $n \geq 0$, $\mathscr{P}_n \neq \mathscr{P}_{n+1}$.*

Demonstração. Como $\mathscr{P}_n$ é finito, existem $P, Q \in \mathscr{P}_n$ tais

$$\operatorname{diam} \mathscr{P}_n = \max\{\overline{XY},\ X, Y \in \mathscr{P}_n\} = \overline{PQ}.$$

Seja r a reta que contém os pontos P e Q, logo construtível em $\mathscr{P}_n$. Seja $\mathscr{C}$ a circunferência de centro Q e que contém P, também construtível em $\mathscr{P}_n$.

Deste modo, a intersecção de r com $\mathscr{C}$ contém, além do ponto P, um outro ponto P' e que portanto será construtível a partir de $\mathscr{P}_n$, ou seja, $P' \in \mathscr{P}_{n+1}$. Porém, $\overline{PP'} = 2\overline{PQ} > \overline{PQ}$ e assim $P' \notin \mathscr{P}_n$, o que conclui a prova. □

Corolário 4.13. *O conjunto $\mathscr{P}_\infty$ é infinito.*

Demonstração. Basta supor que $\mathscr{P}_\infty$ é finito e utilizar a prova da Proposição 4.12. □

Pontos construtíveis serão todos os pontos que pertencem a $\mathscr{P}_\infty$. As retas em $\mathscr{P}_\infty$ contendo dois pontos construtíveis distintos de $\mathscr{P}_\infty$ serão chamadas de retas construtíveis. Circunferências construtíveis em $\mathscr{P}_\infty$ devem ter seu centro e ao menos um ponto, ambos pertencendo em $\mathscr{P}_\infty$.

Um número real a será construtível se $(a, 0) \in \mathscr{P}_\infty$.

Proposição 4.14. *Se A e B são pontos distintos construtíveis então o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é construtível e as retas perpendiculares a $\overline{AB}$ contendo A, B e M também são construtíveis.*

Demonstração. Construção do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Descrição:

1. Trace a reta r que contém os pontos A e B.
2. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ centrada no ponto A e que contém o ponto B.
3. Marque o ponto C, intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta r, sendo o ponto distinto de B.
4. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ centrada no ponto B e que contém o ponto A.
5. Marque o ponto D intersecção da circunferência $\mathscr{C}_2$ com a reta r como o ponto distinto do ponto A.
6. Marque os pontos E e F que são as intersecções das circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.
7. Construa a reta s que contém os pontos E e F.
8. Marque o ponto M intersecção das retas r e s.

Note que por construção a reta s é a mediatriz dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, portanto as retas r e s são perpendiculares e M é o ponto médio dos segmentos.

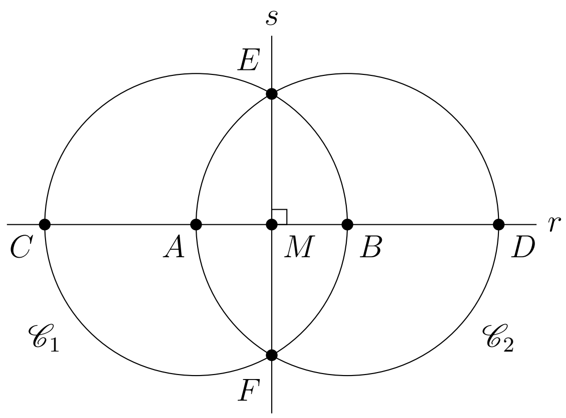


Figura 4.3: Ponto médio.

Construção da reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que contém o ponto A.

Descrição:

1. Trace a reta r que contém os pontos A e B.
2. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ que possui centro no ponto A e que contém o ponto B.
3. Marque o ponto C intersecção de $\mathscr{C}_1$ com a reta r, ponto distinto de B.
4. Construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto C e que contém o ponto B.
5. Trace a circunferência $\mathscr{C}_3$ com centro no ponto B e que contém o ponto C.
6. Marque os pontos D e E, intersecção das circunferências $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$.

7. Trace a reta s que contém os pontos D e E.

Por construção, a reta s é mediatriz do segmento $\overline{CB}$ e portanto é perpendicular à reta r e consequentemente ao segmento $\overline{AB}$. $\square$

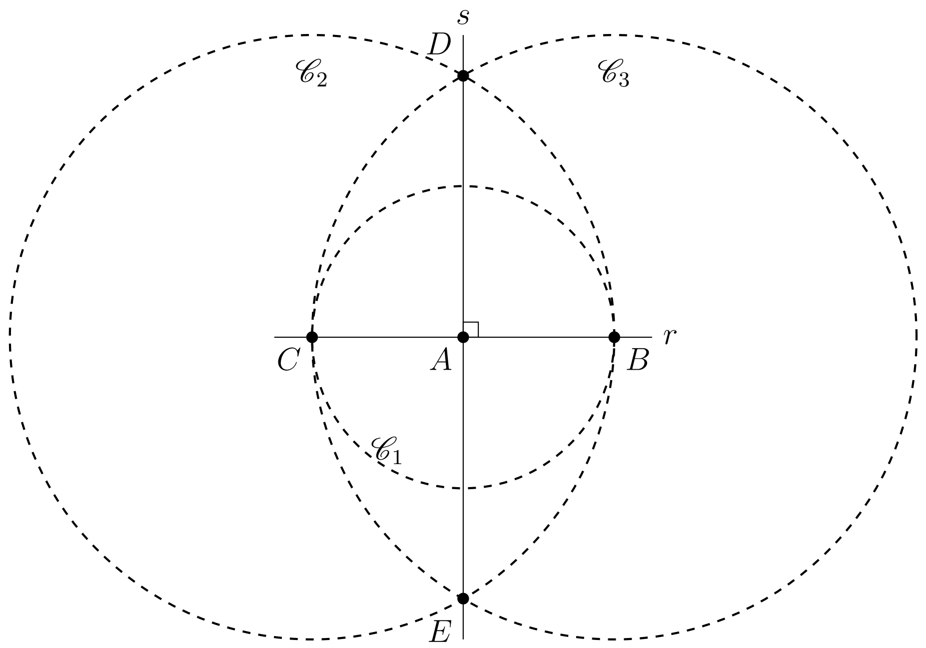


Figura 4.4: Reta perpendicular.

De maneira análoga podemos traçar a reta que contém o ponto B e é perpendicular à reta r e ao segmento $\overline{AB}$.

Lema 4.15. *Dados três pontos construtíveis A, B e C, e uma reta r com $A \in r$ sempre é possível transportarmos o segmento $\overline{BC}$ para a reta r.*

Demonstração. Caso em que a reta que contém os pontos B e C intersecta com a reta r conforme a Figura 4.5.

Descrição:

1. Trace a reta s que contém os pontos B e C.

2. Marque o ponto O intersecção das retas r e s.

3. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto O e que contém o ponto B.

4. Marque os pontos B' e B'' como intersecção do círculo $\mathscr{C}_1$ com a reta r.

5. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto O e que contém o ponto C.

6. Marque os pontos C' e C'' como intersecção do círculo $\mathscr{C}_2$ com a reta r.

Observe que os segmentos $\overline{B'C'}$ e $\overline{B''C''}$ possuem o mesmo comprimento que o segmento $\overline{BC}$.

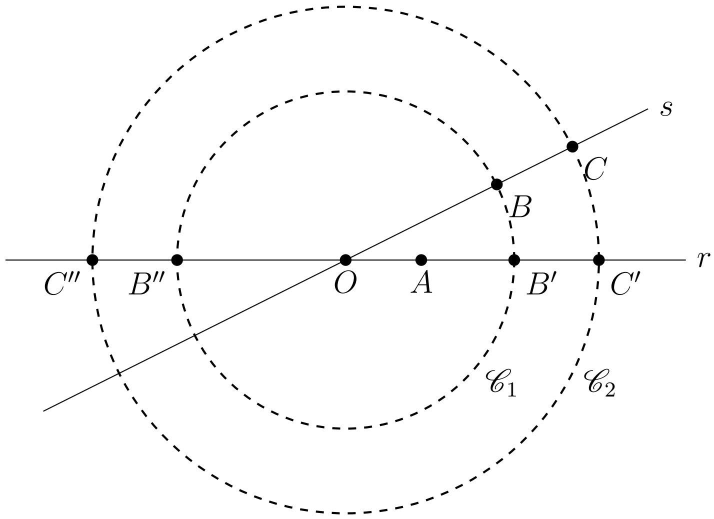


Figura 4.5: Transporte de um segmento; caso I.

Caso em que a reta que contém os pontos B e C não intersecta a reta r, ou seja é paralela a reta r, Figura 4.6.

Descrição:

1. Trace a reta s que contém os pontos B e C.

2. Construa o círculo $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto B e que contém o ponto C.

3. Marque o ponto D intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta s, o ponto distinto do ponto C.

4. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto D e que contém o ponto C.

5. Construa a circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro no ponto C e que contém o ponto D.

6. Marque os pontos E e F intersecção das circunferências $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$.

7. Trace a reta t que contém os pontos E e F.

8. Marque o ponto B' intersecção das retas r e t.

Observe que a reta t é mediatriz do segmento $\overline{DC}$, e assim perpendicular as retas r e s. De maneira análoga conseguimos construir uma reta u que contém o ponto C e que é perpendicular à reta r e determinar o ponto C''. Note que o segmento $\overline{B'C'}$ é congruente ao segmento $\overline{BC}$. □

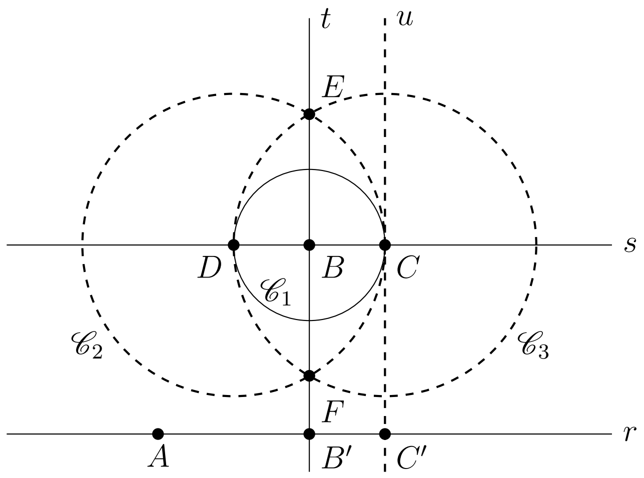


Figura 4.6: Transporte de um segmento; caso II.

O leitor poderá encontrar em [16] uma demonstração alternativa à apresentada neste trabalho.

Proposição 4.16. *Sejam A e r um ponto construtível e uma reta construtível, respectivamente, tais que $A \in r$.*

Se B e C são pontos construtíveis então existe um ponto construtível X tal que $X \in r$ e os segmentos $\overline{AX}$ e $\overline{BC}$ possuem o mesmo comprimento.

Podemos assumir pelo Lema 4.15 que os pontos A, B e C pertencem à reta r, demostremos então os três possíveis casos.

Demonstração. Primeiro caso, conforme a Figura 4.7 o ponto B está mais próximo do ponto A.

Descrição:

1. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro em B e que contém o ponto C.
2. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ centrada no ponto C e que contém o ponto B.
3. Marque os pontos D e E intersecção das circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.
4. Trace a reta s que contém os pontos D e E.
5. Marque o ponto M intersecção da reta s com a reta r, note que este é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.
6. Construa a circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro no ponto B e que contém o ponto A.
7. Marque o ponto N intersecção da circunferência $\mathscr{C}_3$ com a reta r sendo o ponto distinto de A.
8. Trace a circunferência $\mathscr{C}_4$ de centro no ponto M e que contém o ponto N.
9. Marque o ponto X intersecção da circunferência $\mathscr{C}_4$ com a reta r, sendo o ponto distinto de N.

Por construção temos que $AB = BN$ e $NM = MX$, como M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ temos

$$BM = MC \Rightarrow BN + NM = MX + XC \Rightarrow BN = XC. \tag{4.1}$$

Observe que

$$\begin{aligned} AX &= AB + BN + NM + MX \qquad \text{e} \\ BC &= BN + NM + MX + XC. \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade (4.1)

$$\begin{aligned} AX &= 2BN + NM + MX \qquad \text{e} \\ BC &= 2BN + NM + MX. \end{aligned}$$

Portanto $AX = BC$.

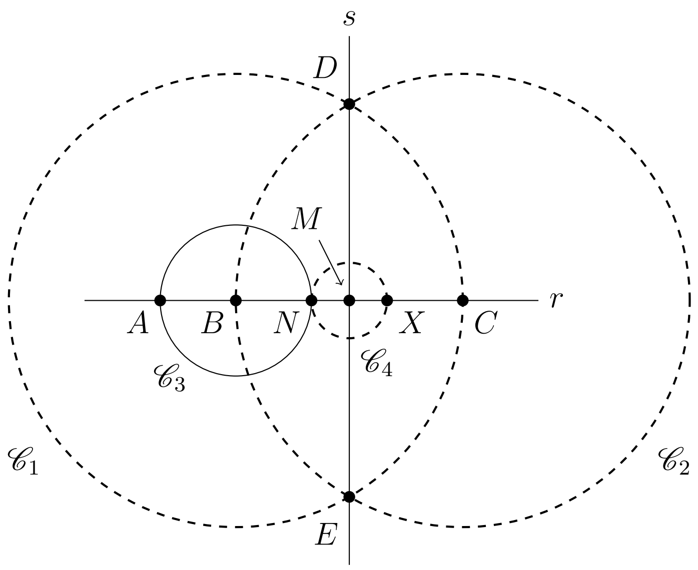


Figura 4.7: Segmento congruente; caso I.

Segundo caso, conforme Figura 4.8 o ponto B está mais próximo do ponto C.

Descrição:

1. Trace a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto A e que contém o ponto B.
2. Construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto B e que contém o ponto A.
3. Marque os pontos D e E intersecção das circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.
4. Trace a reta s que contém os pontos D e E.
5. Marque o ponto M intersecção das retas r e s, este é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
6. Construa a circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro no ponto B e que contém o ponto C.
7. Marque o ponto N intersecção da circunferência $\mathscr{C}_3$ com a reta r.

8. Trace a circunferência $\mathscr{C}_4$ de centro no ponto M e que contém o ponto N.

9. Marque o ponto X intersecção da circunferência $\mathscr{C}_4$ com a reta r, ponto distinto de N.

Por construção $XM = MN$ e $NB = BC$. Como M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ temos

$$AM = MB \Rightarrow AX + XM = MN + NB \Rightarrow AX = NB. \tag{4.2}$$

Como $NB = BC$ temos $AX = BC$.

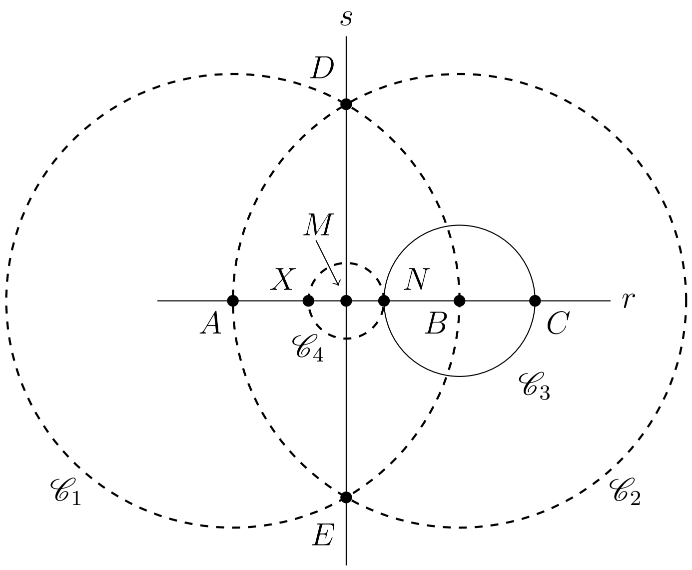


Figura 4.8: Segmento congruente; caso II.

Terceiro caso, Figura 4.9, ponto B é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, basta tomar o ponto $X = B$, e assim $AB = AX = BC$. □

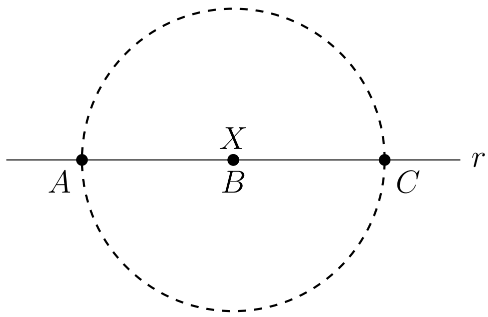


Figura 4.9: Segmento congruente; caso III.

Proposição 4.17. *Sejam A, B e C, três pontos construtíveis não colineares. Então existe um ponto construtível D tal que A, B, C e D formam um paralelogramo. Em particular a reta contendo o ponto C e paralela ao segmento $\overline{AB}$ é construtível.*

Demonstração. Provemos então a construção que determina o ponto D.

Descrição:

1. Trace a reta r que contém os pontos A e B.
2. Trace a reta s que contém os pontos C e A.
3. Utilizando um dos exemplos descritos na Proposição 4.16, marque o ponto $X \in r$ de modo que $\overline{AC} = \overline{BX}$.
4. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto B e que contém o ponto X.
5. Novamente utilizando um dos exemplos da Proposição 4.16, marque sobre a reta s um ponto Y de modo que $\overline{CY} = \overline{AB}$.
6. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto C e que contém o ponto Y.
7. Marque o ponto D, intersecção entre as circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$. Note que o ponto D pertence ao mesmo semiplano formado pela reta s que contém o ponto B.
8. Trace a reta t que contém os pontos C e D.
9. Trace a reta u que contém os pontos B e D.

Temos então o paralelogramo $ABCD$. □

Note que a reta u é paralela à reta s que contém o ponto C conforme a Figura 4.10, e que podemos ter outras construções possíveis se tomarmos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, ou os segmentos $\overline{CB}$ e $\overline{BA}$ conforme a Figura 4.11.

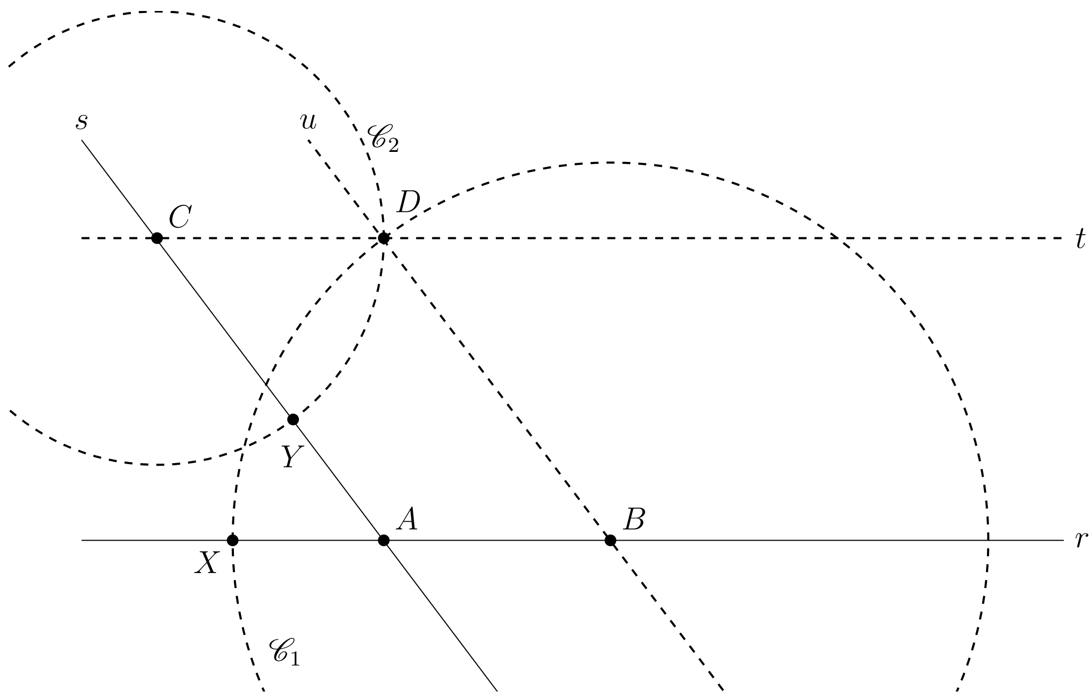


Figura 4.10: Paralelogramo construtível.

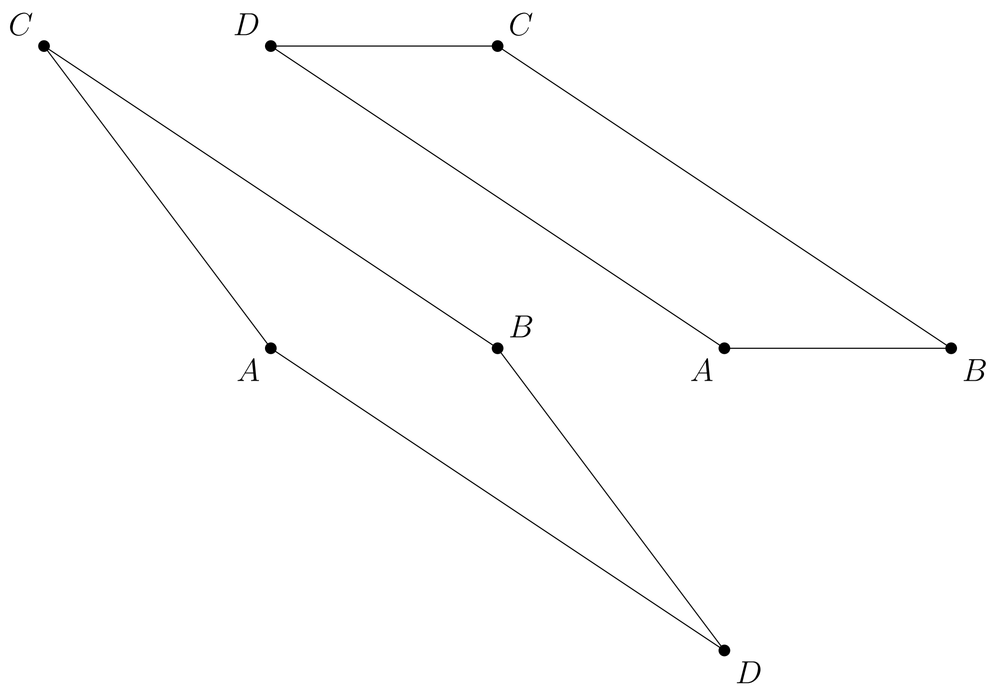


Figura 4.11: Demais paralelogramos construtíveis da Proposição 4.17.

Proposição 4.18. *Um ponto* $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *é construtível se, e somente se, as suas coordenadas* $a, b \in \mathbb{R}$ *são números construtíveis.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja o ponto $O = (0,0)$ e $U = (1,0)$ consideremos a reta r que contém tais pontos e a reta s perpendicular à reta r que contém o ponto 0 conforme a Figura 4.12.

Descrição:

1. Trace a reta t que contém os pontos O e $A = (a, b)$.

2. Determine o ponto médio M do segmento $\overline{0A}$.

3. Construa a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro M e que contém os pontos A e 0.

4. Marque o ponto A_x como intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta r, ponto distinto do ponto O. Observe as coordenadas de $A_x = (a, 0)$.

Note que o segmento $\overline{OA}$ é o diâmetro da circunferência $\mathscr{C}_1$ e deste modo o triângulo $\triangle 0AA_x$ está inscrito na circunferência sobre o seu arco capaz de $90°$, assim a reta u é perpendicular à reta r, ou seja, o ponto A_x é a projeção do ponto A sobre a reta r.

De maneira análoga é possível determinar as coordenadas do ponto $A_y = (0, b)$ sobre a reta s, e basta somente traçar a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto 0 e que contém o ponto $A_y = (0, b)$ para determinar o ponto $B_x = (b, 0)$, demonstrando assim que as coordenadas do ponto $A = (a, b)$ são construtíveis.

($\Leftarrow$) Sendo os pontos $O = (0,0)$ e $U = (1,0)$, temos que a reta $\overleftrightarrow{OU} = r$ é construtível. Supondo os pontos construtíveis A_x e B_x de coordenadas $(a, 0)$ e $(b, 0)$ em $\mathscr{P}_\infty$, respectivamente:

Descrição:

1. Trace a reta s perpendicular à reta r que contém o ponto O.

2. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto O e que contém o ponto $B_x = (b, 0)$.

3. Marque o ponto $A_y = (0, b)$ como intersecção da circunferência $\mathscr{C}_2$ com a reta s.

4. Trace a reta v perpendicular à reta s que contém o ponto A_y.

5. Trace a reta u perpendicular à reta r que contém o ponto A_x.

6. Marque o ponto $A = (a, b)$ como intersecção das retas u e v. $\square$

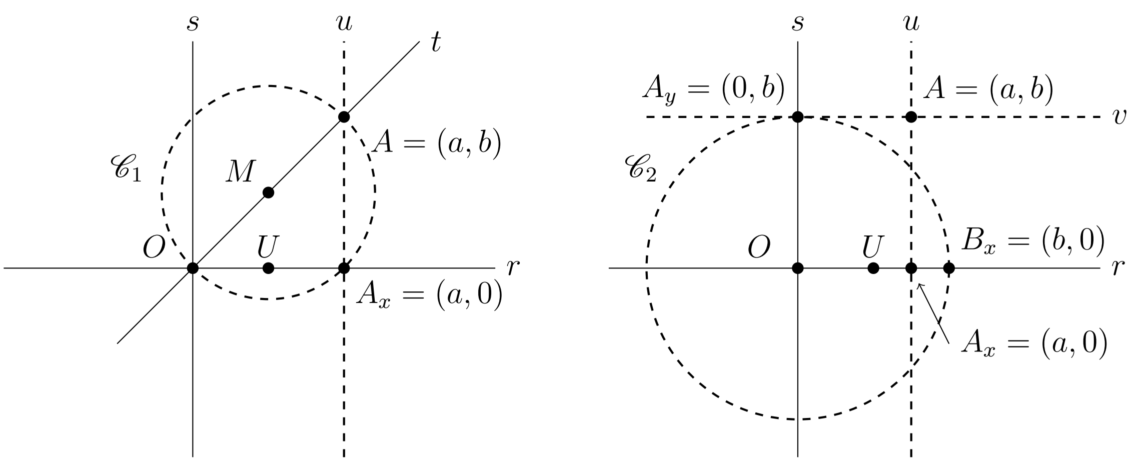


Figura 4.12: Ponto de coordenadas construtíveis.

Teorema 4.19. *$\mathscr{C}_\mathbb{R} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha$ é construtível$\}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{Q}$.*

Como $\mathbb{Z} \subset \mathscr{C}_\mathbb{R}$, considerando os pontos $O = (0, 0)$ e $U = (1, 0)$ e $\beta > \alpha > 0$, sendo os pontos $A = (\alpha, 0)$ e $B = (\beta, 0)$, basta provar:

1. $\alpha, \beta \in \mathscr{C}_\mathbb{R} \Rightarrow \beta - \alpha \in \mathscr{C}_\mathbb{R}$.

2. $\alpha, \beta \in \mathscr{C}_\mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathscr{C}_\mathbb{R}$.

3. $\alpha \neq 0 \in \mathscr{C}_\mathbb{R} \Rightarrow 1/a \in \mathscr{C}_\mathbb{R}$.

Demonstração. (1): Conforme a Figura 4.13.

Descrição:

1. Trace a reta r que contém os pontos O e U.

2. Marque os pontos $A = (\alpha, 0)$ e $B = (\beta, 0)$ sobre a reta r. Note que $\overline{AB} = \beta - \alpha$.

3. Pela Proposição 4.16 é possível construir o ponto X a direita do ponto 0 de modo que $OX = AB$ e desta maneira temos as coordenadas do ponto $X = (\beta - \alpha, 0)$.

Figura 4.13: Subtração.

Para as duas demonstrações seguintes, considere r a reta que contém os pontos $O = (0,0)$ e $U = (1,0)$, e s a reta que contém os pontos $0 = (0,0)$ e $V = (0,1)$, observe que temos retas diferentes destas que também contém o ponto 0, por exemplo a reta t como na Figura 4.14 e Figura 4.15.

(2): Utilizando a Figura 4.14.

Descrição:

1. Trace a reta t que contém o ponto $O = (0,0)$ e distinta das retas r e s.
2. Construir a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto 0 e que contém o ponto $A = (\alpha, 0)$.
3. Marque o ponto A' como intersecção da circunferência $\mathscr{C}_1$ com a reta t. Observe que $0A = 0A' = \alpha$.
4. Trace a reta u que contém os pontos U e A'.
5. Utilizando a Proposição 4.17 construa a reta v paralela a reta u e que contém o ponto $B = (\beta, 0)$.
6. Marque o ponto B' intersecção da retas v e t.
7. Trace a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto 0 e que contém o ponto B'.

   Observe que pelo Teorema de Tales 2.47 temos
$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OU}{OB} \Rightarrow \frac{\alpha}{OB'} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow OB' = \alpha \cdot \beta.$$
8. Marque o ponto $X = (\alpha \cdot \beta, 0)$ intersecção da circunferência $\mathscr{C}_2$ com a reta r.

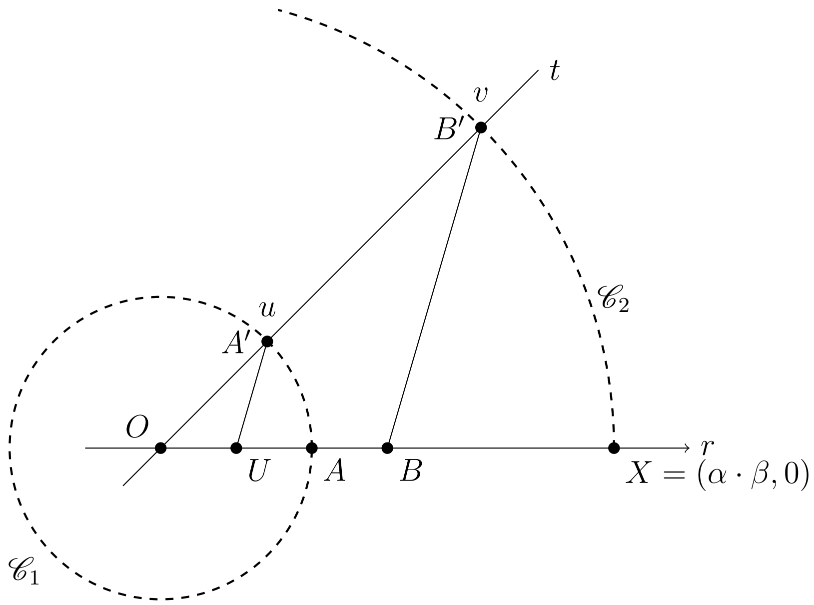


Figura 4.14: Multiplicação.

(3): Utilizando a Figura 4.15.

Descrição:

1. Trace a reta t que contém o ponto $O = (0, 0)$ e distinta das retas r e s.

2. Construir a circunferência $\mathscr{C}_1$ de centro no ponto 0 e que contém o ponto $A = (\alpha, 0)$.

3. Marque o ponto A' como intersecção da reta t com a circunferência $\mathscr{C}_1$. Observe que $OA = OA' = \alpha$.

4. Construa a circunferência $\mathscr{C}_2$ de centro no ponto 0 e que contém o ponto $U = (1, 0)$.

5. Marque o ponto U' intersecção da reta t com a circunferência $\mathscr{C}_2$.

6. Trace a reta u que contém os pontos U e A'.

7. Trace a reta v paralela a reta u e que contém o ponto U'.

8. Marque o ponto X intersecção das retas v e r. Observe que novamente pelo Teorema de Tales 2.47, temos

$$\frac{OU'}{OA'} = \frac{OX}{OU} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{OX}{1} \Rightarrow OX = \frac{1}{\alpha}.$$

Portanto temos as coordenadas do ponto $X = \left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)$. □

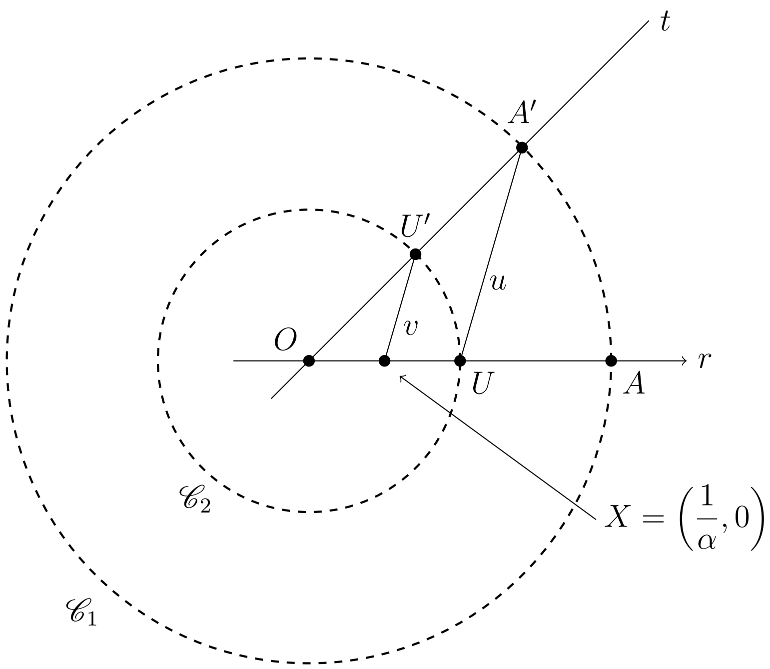


Figura 4.15: Divisão.

Para enunciar e demonstrar o próximo teorema, temos as seguintes definições.

Denotaremos o ponto $A = (u, v) \in \mathscr{P}_n$ com u e v coordenadas de $\mathscr{P}_n$, ou seja, coordenadas construtíveis. Chamaremos de $\mathscr{A}_n$ o conjunto de todas as coordenadas dos pontos de $\mathscr{P}_n$, deste modo, $\mathscr{A}_0 = \{0, 1\}$ e $\mathscr{A}_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right\}$ que é o conjunto formado pelas coordenadas do Exemplo 4.10. Pelo Teorema 4.19, temos que $\mathscr{A}_n \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sejam $K_0 = \mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais e as extensões $K_1 = \mathbb{Q}[\mathscr{A}_1], \ldots, K_n = \mathbb{Q}[\mathscr{A}_n], \ldots$ conforme o diagrama da Figura 4.16.

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \mathbb{Q}[\mathscr{A}_n] & & K_n \\ \vdots & = & \vdots \\ \mathbb{Q}[\mathscr{A}_1] & & K_1 \\ \Big| & & \Big| \\ \mathbb{Q} & & K_0 \end{array}$$

Figura 4.16: Representação do corpo e extensões construtíveis.

Deste modo, como temos as inclusões $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{A}_n \subset \cdots \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, e do fato de que $\mathbb{Q} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, podemos escrever

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \cdots \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}.$$

Tomando então um certo $\alpha \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, o ponto de coordenadas $(\alpha, 0)$ é construtível. Como $(\alpha, 0) \in \mathscr{P}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos então que $\alpha \in \mathscr{A}_n$, e assim $\alpha \in K_n$. Deste fato, podemos generalizar então

$$K_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}.$$

Teorema 4.20. *O corpo $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ é uma extensão algébrica dos racionais. Além disso, para todo $\alpha \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, o grau $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2.*

Demonstração. É necessário mostrar que para todo $\alpha \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ tem-se que $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 2^r$, para algum $r \in \mathbb{N}$.

Como, por hipótese, temos que $\alpha \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, isso implica que existe $n \geq 0$ tal que $\alpha \in K_n = \mathbb{Q}[\mathscr{A}_n]$, ou seja, α pertence a uma das extensões do corpo $K_0 = \mathbb{Q}$.

Temos pela Proposição 4.2 que $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$ divide $[K_n : \mathbb{Q}]$, e portanto basta mostrarmos por indução sobre n que $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^s$, para algum $s \in \mathbb{N}$.

Primeiramente provaremos para o caso base $n = 0$, onde podemos verificar pelo Exemplo 4.10 que o conjunto $\mathscr{P}_0 = \{0, U\}$ é formado pelos pontos $0 = (0, 0)$ e $U = (1, 0)$, o que resulta no conjunto de coordenadas $\mathscr{A}_0 = \{0, 1\}$. Consequentemente, temos $K_0 = \mathbb{Q}$, mostrando a veracidade do Teorema para $n = 0$, pois $[\mathbb{Q} : \mathbb{Q}] = 1$ já que $\operatorname{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x - \alpha$.

É interessante mostrar antes do passo de indução que, para $n = 1$, temos pelo mesmo Exemplo 4.10 e pela Definição 4.11 o conjunto

$$\mathscr{P}_1 = \langle \mathscr{P}_0 \rangle = \{0, U, A_1, A_2, A_3, A_4\},$$

fornecendo o conjunto das coordenadas

$$\mathscr{A}_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1, 2\right\}.$$

Assim, conseguimos a extensão $K_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, também comprovando a veracidade do Teorema para $n = 1$, pois $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - 3$.

Vamos supor agora que $[K_i : \mathbb{Q}]$ é potência de 2, para $2 \leq i \leq n - 1$, e assim provar que $[K_n : \mathbb{Q}]$ é potência de 2.

Como $K_{n-1} \subset K_n$, pela Proposição 4.2 temos

$$[K_n : \mathbb{Q}] = [K_n : K_{n-1}] \cdot [K_{n-1} : \mathbb{Q}],$$

bastando então provar que $[K_n : K_{n-1}]$ é potência de 2.

Para simplificar a notação, escrevemos $L = K_n$, $L_0 = K_{n-1}$ e $\mathscr{A}_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Assim, temos a extensão $L = L_0[\mathscr{A}_n] = L_0[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ conforme a Figura 4.17.

$$\begin{array}{ccc} K_n & & L = L_0[\mathscr{A}_n] \\ \Big| & = & \Big| \\ K_{n-1} & & L_0 \end{array}$$

Figura 4.17: Representação das extensões de K.

Denotando $L_1 = L_0[\alpha_1]$, $L_2 = L_1[\alpha_2], \ldots$ teremos as inclusões

$$L_0 \subset L_1 = L_0[\alpha_1] \subset L_2 = L_1[\alpha_2] \subset \cdots \subset L_i = L_{i-1}[\alpha_i] \subset \cdots \subset L_k = L_{k-1}[\alpha_k] = L.$$

Utilizando novamente a Proposição 4.2, provaremos que o grau $[L_i : L_{i-1}]$ é potência de 2. Na verdade, provaremos que $[L_i : L_{i-1}]$ é igual a 1 ou 2, para i arbitrário.

Como $\alpha_i \in \mathscr{A}_n$ é uma coordenada construtível, garantimos a existência de $\beta_i \in \mathscr{A}_n$ coordenada construtível tal que os pontos $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$ e $B_i = (\beta_i, \alpha_i)$ são construtíveis, isto é, pertencem a $\mathscr{P}_n$. Mas $\mathscr{P}_n = \langle \mathscr{P}_{n-1} \rangle$, garantindo que $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$ seja obtido através de uma das 3 construções elementares da Definição 4.7, consideradas a seguir.

Construção 1. Neste caso, A_i é obtido pela intersecção de duas retas

$$\begin{aligned} r\colon \quad & a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ s\colon \quad & a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{aligned}$$

Igualando as equações acima temos

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_2x + b_2y + c_2,$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in L_{i-1}$. Tomando $(a_1 - a_2) = a'$, $(b_1 - b_2) = b'$ e $(c_1 - c_2) = c'$, a intersecção das retas será dada pela equação

$$a'x + b'y + c' = 0. \tag{4.3}$$

Construção 2. Da intersecção de uma reta r com uma circunferência $\mathscr{C}$, dadas por

$$\begin{aligned} r\colon &\quad ax + by + c = 0, \\ \mathscr{C}\colon &\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = ax + by + c, \\ &x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - r^2 - ax - by - c = 0, \\ &x^2 + (-a - 2x_0)x + y^2 + (-b - 2y_0)y + (-c + x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0. \end{aligned}$$

Note que a, b, c, x_0, y_0, r são constantes, e assim escrevemos $(-a - 2x_0) = m$, $(-b - 2y_0) = n$ e $(-c + x_0^2 + y_0^2 - r^2) = p$ para obtermos

$$x^2 + mx + y^2 + ny + p = 0. \tag{4.4}$$

Construção 3. Sejam duas circunferências, dadas por

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_1\colon &\quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2, \\ \mathscr{C}_2\colon &\quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2. \end{aligned}$$

Calculando a possível intersecção de ambas, vem

$$\begin{aligned} &(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2, \\ &x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 - r_1^2 + x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 - r_2^2 = 0, \\ &2x^2 + 2(-x_1 - x_2)x + 2y^2 + 2(-y_1 - y_2)y + (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Considerando as constantes $x_1, x_2, y_1, y_2, r_1, r_2$, escrevendo $2(-x_1 - x_2) = p$, $2(-y_1 - y_2) = q$ e $(x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) = r$, obtemos

$$2x^2 + px + 2y^2 + qy + r = 0. \tag{4.5}$$

Observe pelas Equações (4.3), (4.4) e (4.5) que α_i deve ser raiz de um polinômio de grau 1 ou 2 sobre o corpo L_{i-1}, e assim temos que $[L_i : L_{i-1}] = 1$ ou 2, como queríamos demonstrar. □

Proposição 4.21. 1. *Se $n \geq 3$ é ímpar e $p \geq 2$ é primo, então $\sqrt[n]{p}$ não é construtível. Em particular $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.*

2. *$u = \cos(2\pi/18)$ não é construtível.*

3. *Se $\alpha \geq 0$ é um número construtível, então $\sqrt{\alpha}$ também é construtível. Em particular $\sqrt[2^i]{m}$ é construtível para quaisquer $i, m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (1) Seja $\alpha = \sqrt[n]{p}$ e utilizando o critério de Eisenstein do Teorema 4.4 temos que o polinômio mônico irredutível será $\operatorname{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^n - p$, e deste modo, $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = n$ é ímpar e da demonstração anterior temos então que como $n \neq 1$ e não é uma potência de 2, α não é construtível.

Em particular, para $n = 3$ e $p = 2$ segue que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.

(2) Antes de demonstrarmos que $u = \cos(2\pi/18)$ não é construtível, lembramos que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta), \tag{4.6}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha), \tag{4.7}$$

e a relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \tag{4.8}$$

Tomando $\alpha = \beta$ em (4.6) obtemos

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha).$$

Substituindo o valor de $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ da equação (4.8) nesta última igualdade temos

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 1 = 2\cos^2(\alpha) - 1. \tag{4.9}$$

Fazendo $\alpha = \beta$ na equação (4.7), temos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \Rightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha). \tag{4.10}$$

Escrevendo $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ e novamente utilizando a equação (4.6), segue que

$$\cos(2\alpha+\alpha) = \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Assim, utilizando as equações (4.9) e (4.10) no lado direito da igualdade acima concluímos que

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= (2\cos^2(\alpha) - 1)\cos(\alpha) - (2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha))\operatorname{sen}(\alpha) \Rightarrow \\
\cos(3\alpha) &= 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

Substituindo acima o valor de $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ pelo valor da equação (4.8), temos

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2(1 - \cos^2(\alpha))\cos(\alpha) \Rightarrow \\
\cos(3\alpha) &= 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cos(\alpha) + 2\cos^3(\alpha) \Rightarrow \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Tomando $\theta = 3\alpha$, reescrevemos

$$\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3) \tag{4.12}$$

e a equação (4.12) deve ser satisfeita para que possamos trissectar um ângulo qualquer. Em particular, para $\theta = 2\pi/18 = \pi/9$, ou seja, $20°$, temos $3\theta = 2\pi/6 = \pi/3$ que é, na verdade, $60°$, e substituindo $\cos(3\theta) = 1/2$ na equação (4.12), segue

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \Rightarrow \\
1/2 &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \Rightarrow \\
1 &= 8\cos^3(\theta) - 6\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo $\cos(\theta) = x$, temos que $u = \cos(2\pi/18)$ é raiz do polinômio

$$p(x) = 8x^3 - 6x - 1. \tag{4.13}$$

Note que para um ângulo ser trissectável, necessita ser raiz do polinômio em (4.13), que de acordo com a Proposição 4.5, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. De fato, tomando o polinômio $\overline{p}(x) = \overline{3}x^3 + \overline{4}x + \overline{4}$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, obtemos os valores

$$\overline{p}(\overline{0}) = \overline{3} \cdot \overline{0}^3 + \overline{4} \cdot \overline{0} + \overline{4} = \overline{4}, \qquad \overline{p}(\overline{1}) = \overline{3} \cdot \overline{1}^3 + \overline{4} \cdot \overline{1} + \overline{4} = \overline{2},$$
$$\overline{p}(\overline{2}) = \overline{3} \cdot \overline{2}^3 + \overline{4} \cdot \overline{2} + \overline{4} = \overline{1}, \qquad \overline{p}(3) = \overline{3} \cdot \overline{3}^3 + \overline{4} \cdot \overline{3} + \overline{4} = \overline{2},$$
$$\overline{p}(4) = \overline{3} \cdot \overline{4}^3 + \overline{4} \cdot \overline{4} + \overline{4} = \overline{2}.$$

Como $\overline{p}(x)$ tem grau 3 e não possui raiz em $\mathbb{Z}_5$, então $\overline{p}(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$, assim $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Logo, $[\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}] = 3$ não é potência de 2 e portanto u não é construtível.

(3) Sendo o ponto $A = (\alpha, 0)$ construtível, temos então que o ponto $A' = (\alpha + 1, 0)$ é construtível. Considere os pontos $0 = (0, 0)$ e $U = (1, 0)$, de acordo com a Figura 4.18.

Descrição:

1. Trace a reta r que contém os pontos 0 e U.
2. Marque o ponto construtível $A = (\alpha, 0)$ sobre a reta r.
3. Marque o ponto construtível $A' = (\alpha + 1, 0)$ sobre a reta r.
4. Determine o ponto M, ponto médio do segmento $\overline{0A'}$.
5. Construa a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto M que contém o ponto A'.
6. Trace a reta s perpendicular à reta r que contém o ponto A.
7. Marque o ponto X, intersecção da reta s com a circunferência $\mathscr{C}$.

O segmento procurado é $AX = \sqrt{\alpha}$.

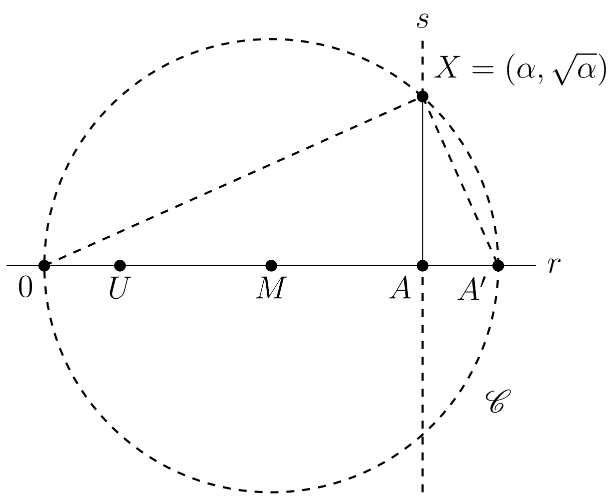


Figura 4.18: Construção do segmento $\sqrt{\alpha}$ com r construtível.

Justificativa. Traçando os segmentos $\overline{0X}$ e $\overline{XA'}$ temos os triângulos $\triangle 0XA'$, $\triangle 0XA$, e $\triangle A'XA$. Observe que a reta r é um diâmetro da circunferência $\mathscr{C}$, o ponto X está sobre o arco capaz de $90°$, logo $\widehat{0XA'}$ é reto. Como a reta s é perpendicular à reta r, os ângulos $\widehat{XA0} = \widehat{XAA'}$ são retos. Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo descritas no Teorema 2.7 temos

$$h^2 = mn = r \cdot 1 = r \Rightarrow h = \sqrt{\alpha}. \tag{4.14}$$

Portanto as coordenadas do ponto X são $(\alpha, \sqrt{\alpha})$, ou seja, o segmento procurado é $AX = \sqrt{\alpha}$. □

4.2.1 Problemas clássicos

Apresentamos os critérios de construtibilidade dos problemas clássicos que foram sugeridos pelos gregos, atentando-se ao fato de que hoje temos instrumentos matemáticos que nos permitem demonstrar a possibilidade e impossibilidade de tais problemas baseando-se nos trabalhos desenvolvidos pelos matemáticos Gauss (1777–1885) e Galois (1811–1832).

Teorema 4.22. 1. *Não existe $\alpha \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ tal que o volume do cubo de aresta α seja o dobro do volume do cubo de aresta* 1.

2. *Não existe $\alpha \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ tal que a área do quadrado de lado α seja igual à área do círculo de raio* 1.

3. *É impossível, com uso apenas de régua (sem escala) e compasso, trissectar o ângulo de* $60°$.

Demonstração. (1) O volume de um cubo de aresta $\alpha = 1$ será $V = \alpha^3 = 1$.

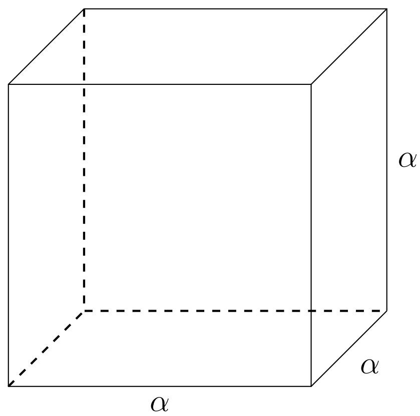


Figura 4.19: Cubo de aresta α.

Queremos determinar α de modo que $V = \alpha^3 = 2$, logo

$$\alpha = \sqrt[3]{2} \tag{4.15}$$

Assim, α é raiz do polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$, $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^3 - 2$, que possui grau $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 3$, e conforme demonstrado na Proposição 4.21, segue que α não é construtível.

(2) O círculo de raio $r = 1$ terá área $A = \pi \cdot r^2 = \pi$.

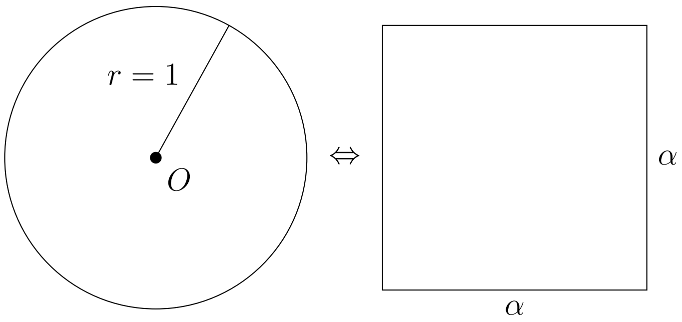


Figura 4.20: Círculo de raio $r = 1$ e quadrado de mesma área.

Temos que a área do quadrado de lado α será $A' = \alpha^2$, e igualando as áreas temos

$$A' = A \Rightarrow \alpha^2 = \pi.$$

Do fato que π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$ segue que $\pi \notin \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, assim $\alpha \notin \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, portanto o segmento de medida π que corresponde ao ponto $X = (\pi, 0)$ não é construtível, logo o quadrado com esta medida de lado não é construtível.

A demonstração de que π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$ diverge do intuito desta dissertação, o leitor pode verificar tal demonstração em [19].

(3) Conforme demonstrado na Proposição 4.21, se $u = \theta = 2\pi/18$, o polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ será $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ que não possui grau $[\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}]$ potência de 2, contrariando o Teorema 4.20. □

Um polígono será construtível se todos os seus vértices forem pontos construtíveis de $\mathbb{R}^2$. Portanto, um polígono regular de n lados será construtível se, e somente se, o ponto $A_n = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$ é um ponto construtível de $\mathbb{R}^2$.

Proposição 4.23. 1. *Seja k natural maior ou igual a 2. Todo polígono regular de $n = 2^k$ lados é construtível.*

2. *Se um polígono regular de n lados é construtível então o polígono regular de $2n$ lados também é construtível.*

3. *Seja p primo maior do que ou igual a 3. Se um polígono regular de p lados é construtível, então existe s pertencente aos naturais, tal que $p = 2^{2^s} + 1$. Em particular o heptágono regular não é um polígono construtível.*

Demonstração. (1) Por indução sobre k temos que é verdadeiro para o caso base $k = 2$, pois é possível construir um quadrado.

Provemos então a construção do polígono regular com $k = 3$ ou seja 8 lados, utilizando um quadrado.

Descrição:

1. Trace as diagonais d_1 e d_2 do quadrado.

2. Marque o ponto O como intersecção das diagonais do quadrado sendo este o centro.

3. Trace as mediatrizes de cada lado do quadrado, na Figura 4.21 representadas por r e s.

4. Trace a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto O e raio $r' > 0$.

5. Marque os pontos $A', B', C', D', E', F', G', H'$, intersecção da circunferência $\mathscr{C}$ com as retas d_1, d_2, r e s.

6. Trace os segmentos $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'F'}, \overline{F'G'}, \overline{G'H'}$ e $\overline{H'A'}$, conforme a Figura 4.21.

Observe que temos o polígono regular de 8 lados.

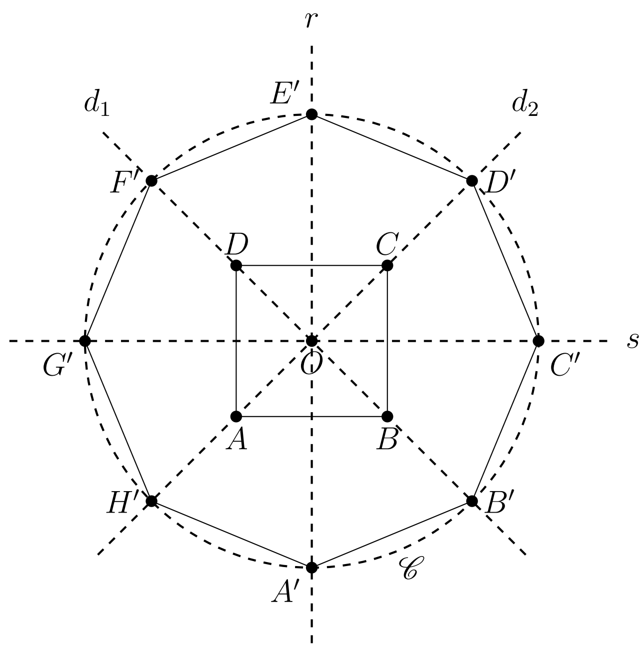


Figura 4.21: Polígono regular de 8 lados.

Suponhamos agora ser verdadeiro para um valor k, e deste modo temos que por Hipótese de Indução o polígono de 2^k lados é construtível.

Utilizando o método descrito para a construção do polígono regular de 8 lados através do quadrado, temos que cada vez que este método for aplicado, cada lado do polígono anterior fornecerá 2 novos lados, ou seja, temos $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, logo, temos que a veracidade para o polígono de 2^k lados implica ser verdadeiro para 2^{k+1}, portanto é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$.

(2) Observe que o hexágono regular é construtível e, de acordo com a construção elementar do Capítulo 3.1.5, é possível bissectar um dado ângulo construtível apenas com régua e compasso.

Partindo do hexágono da Figura 4.22.

Descrição:

1. Trace ao menos duas diagonais das três possíveis. Sendo a diagonal d_1 que contém os pontos E e F, a diagonal d_2 que contém os pontos B e E, e a diagonal d_3 que contém os pontos A e D.

2. Marque o ponto O intersecção de duas diagonais, sendo este o centro do hexágono.

3. Trace a bissetriz dos ângulos $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}, \widehat{EOF}$ e $\widehat{FOA}$, no desenho nomeadas de r, s e t.

4. Trace a circunferência $\mathscr{C}$ de centro no ponto O e raio $r > 0$.

5. Marque os pontos $A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', K'$ e L', intersecção das retas d_1, d_2, d_3, r, s e t com a circunferência $\mathscr{C}$.

6. Trace os segmentos $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'F'}, \overline{F'G'}, \overline{G'H'}, \overline{H'I'}, \overline{I'J'}, \overline{J'K'}, \overline{K'L'}$ e $\overline{L'A'}$, conforme a Figura 4.22.

Note que temos o polígono regular de 12 lados.

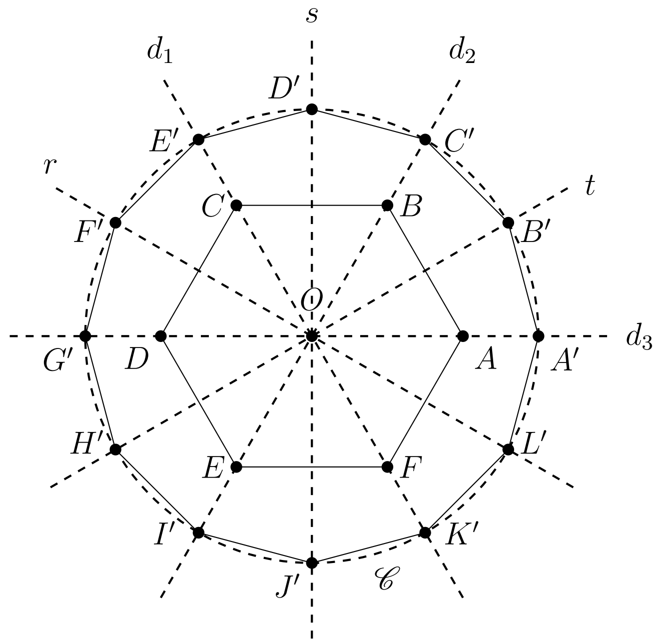


Figura 4.22: Polígono regular de 12 lados.

Deste modo, dado um polígono regular construtível de n lados, basta aplicar o método descrito para se construir o polígono regular de $2n$ lados.

(3) Como por hipótese $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right)\right)$ é construtível, segue pelo Teorema 4.20 que $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}] = 2^m$ onde $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ e $\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right)$.

Sendo $i = \sqrt{-1}$ temos que $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta, i] : \mathbb{Q}] = 2^{m+1}$ onde $\mathbb{Q}[\alpha, \beta, i] \subset \mathbb{C}$.

Assumindo $\zeta = \alpha + i\beta \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta, i]$ temos que $\mathbb{Q}[\zeta] \subset \mathbb{Q}[\alpha, \beta, i]$ e $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = 2^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\operatorname{irr}(\zeta, \mathbb{Q}) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ e portanto segue que $p - 1 = 2^r$, isto é, $p = 2^r + 1$.

Para provarmos que $r = 2^s$ para algum $s \in \mathbb{N}$, vamos supor o contrário, considerando então $r = tv$ com $t > 1$ ímpar.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, conforme [20] temos que $a - b$ divide $a^n - b^n$, ou seja,

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Tomando então $a = 2^v$ e $b = -1$, temos

$$p = (2^v)^t + 1 = a^t - b^t = (2^v + 1) \cdot ((2^v)^{t-1} - (2^v)^{t-2} + \cdots - 2^v + 1),$$

que é um absurdo, pois como p é primo não pode ser fatorado como acima e portanto segue que r é potência de 2. $\square$

Teorema 4.24 (Gauss). *Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, $n = 2^r p_1 \cdots p_k$, onde $r \geq 0$ e $p_1, \ldots, p_k$ são primos ímpares distintos da forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$, com $s_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$.*

A prova deste Teorema não será demonstrada, sendo assim o leitor pode consultar [21, 22], porém é interessante citar que Gauss (1777–1885) provou a construtibilidade do polígono regular de 17 lados em 1796, e cinco anos depois escreveu seu livro "*Disquisitiones Arithmeticae*", que contém a Teoria "*Gaussian periods*". Com esta teoria, Gauss determinou quais eram as condições necessárias para um polígono ser construtível, mas não apresentou a prova desta condição, que só foi provada em 1837 por Wantzel (1814–1848), sendo que esse resultado é chamado de Teorema de Gauss-Wantzel.

O matemático Fermat (1607–1665) mostrou em 1640 que os números $3, 5, 17, 257, 65537$ eram números primos e que os mesmos eram escritos da forma $F_s = 2^{2^s} + 1$ com $s \geq 0$, que hoje chamamos *números de Fermat*. Em 1732, Euler (1707–1783) provou que F_5 é divisível por $5 \cdot 2^7 + 1$, e portanto os únicos números primos de Fermat conhecidos até o momento são apenas os apresentados pelo próprio Fermat.

Referências

[1] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT*. 2019. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[2] WAGNER, E. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. ISBN 978-85-85818-72-2.

[3] PLANALTO. *Lei de diretrizes e bases*. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[4] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[5] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. 2020. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[6] SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e suas tecnologias*. 1. ed. São Paulo: São Paulo : SE, 2012. ISBN 978-85-7849-449-0.

[7] SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Matrizes de referência para a avaliação Saresp: documento básico/Secretaria da Educação*. 1. ed. São Paulo: São Paulo : SEE, 2009. ISBN 978-85-7849-374-5.

[8] SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Matrizes de avaliação processual*. 1. ed. São Paulo: São Paulo : SEE, 2016.

[9] SECRETARIA DE DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO - GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Centro Paula Souza*. 2020. Disponível em: <http://www.cpscetec.com.br/>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[10] INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP*. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[11] MARQUES, J. L. *Geometria Euclidiana Plana*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. ISBN 978-85-833-7106-9.

[12] NETO, A. C. M. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. ISBN 978-85-85818-93-7.

[13] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2008. ISBN 978-85-268-0754-9.

[14] LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio – Volume 2*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. ISBN 978-85-8337-091-8.

[15] LIMA, E. L. *Curso de análise – Volume 1*. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. ISBN 978-85-244-0118-3.

[16] ARTIN, M. *Algebra*. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1991. ISBN 0-13-004763-5.

[17] GONÇALVEZ, A. *Introdução à Álgebra*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. ISBN 978-85-244-0430-6.

[18] MONTEIRO, L. H. J. *Teoria de Galois*. 1. ed. Poços de Caldas: IMPA, 1969.

[19] FIQUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. ISBN 978-85-85818-18-0.

[20] HEFEZ, A. *Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. ISBN 978-85-8337-105-2.

[21] GAUSS, C. F. *Disquisitiones arithmeticae*. [S.l.]: Yale University Press, New Haven, Conn.-London, 1966. xx+472 p. (Translated into English by Arthur A. Clarke, S. J).

[22] WANTZEL, L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *J. Math. Pures Appl.*, v. 2, p. 366–372, 1837. Disponível em: <https://archive.org/details/s1journaldemat02liou>. Acesso em: 27 nov. 2019.

A Atividades propostas

Este apêndice propõe atividades para que os professores possam realizar com alunos. Estas atividades têm o intuito de contribuir para a aprendizagem de Geometria e apresentar as construções básicas com o uso do compasso e régua sem escala.

É de grande importância no processo de construção geométrica que o professor deixe claro aos alunos que a régua será utilizada somente para traçar retas e que não poderá ser utilizada como instrumento de medição de comprimento, o que desenvolverá nos alunos as habilidades para as quais este apêndice é proposto

Espera-se que antes da aplicação das atividades aos alunos, todas as construções sejam devidamente exemplificadas e realizadas com o acompanhamento do professor e, se necessário, que os alunos tenham em mãos as descrições do Capítulo 3.

Após a compreensão por parte dos alunos das atividades apresentadas neste apêndice, o professor de Matemática pode realizar atividades interdisciplinares com o professor de Física, dentre outros.

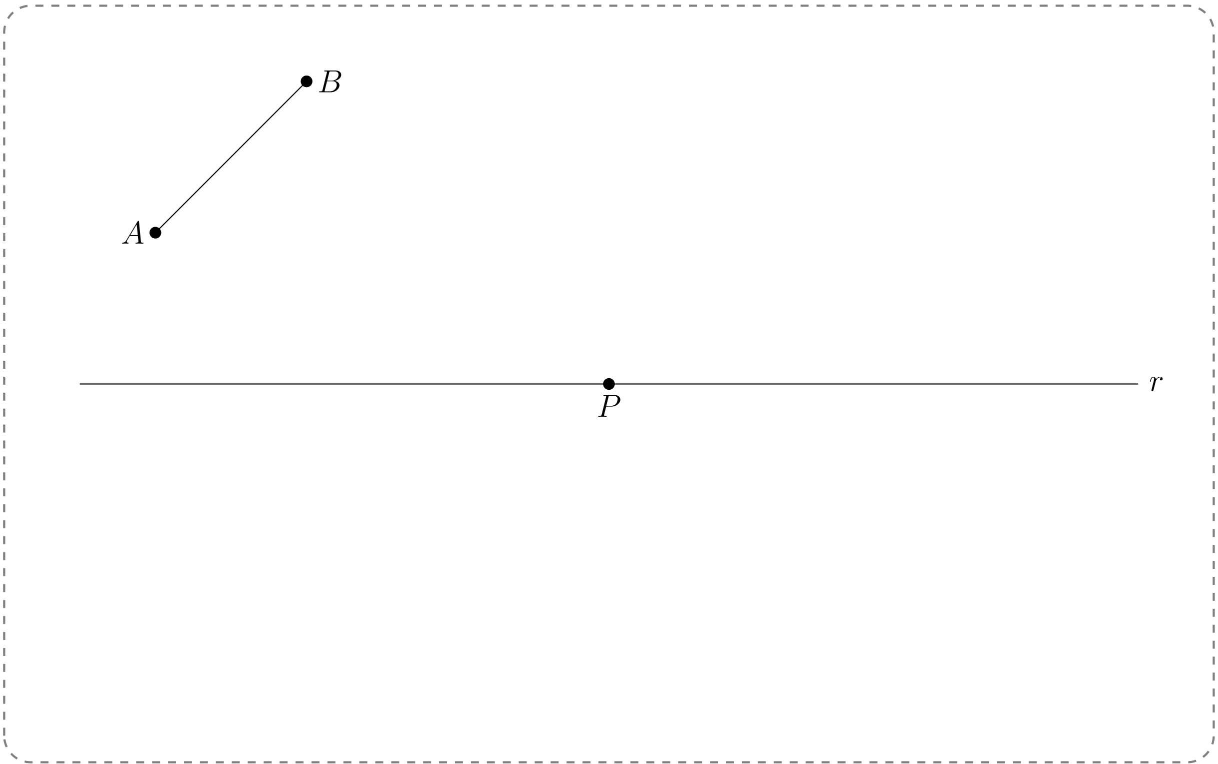
Na disciplina de Física pode-se realizar diversas atividades relacionadas ao conceito de Dinâmica, como soma e subtração de vetores, determinação de centro de massa. Na Óptica pode-se determinar os caminhos que a luz percorre quando utilizamos espelhos planos, côncavos e convexos. No Eletromagnetismo, podemos determinar, além dos vetores, as linhas de campo e linhas equipotências. Na disciplina de Artes, as construções geométricas fazem parte fundamental dos seus conteúdos, e no caso de escolas técnicas também pode-se realizar atividades com professores da disciplina de Desenho Técnico. Os professores de diversas áreas do conhecimento, podem juntos desenvolver diversas aplicações para as atividades aqui propostas.

O desenvolvimento da atividade interdisciplinar fornecerá aos alunos uma aplicação direta das construções geométricas, além de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

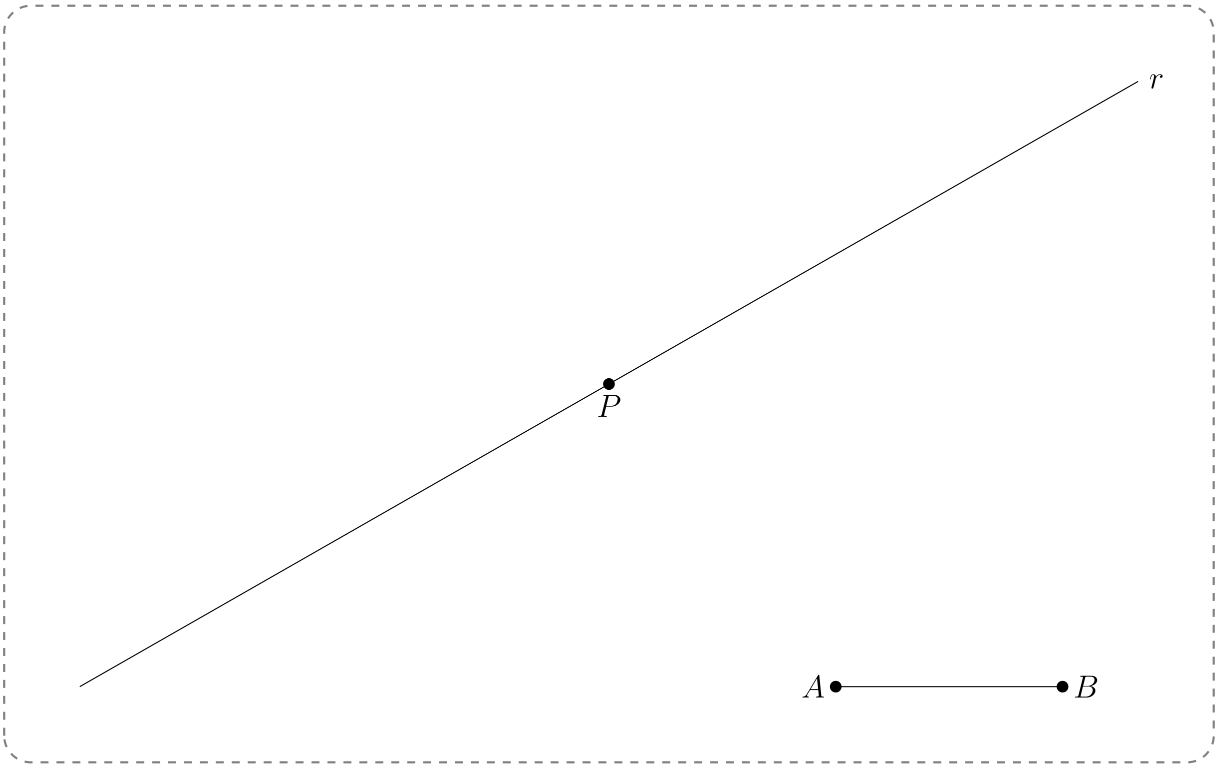
Cada uma das folhas a seguir possui exatamente duas atividades, o que facilitará a impressão e execução dos exercícios tendo em vista o espaço necessário para a realização das construções dentro dos locais estabelecidos.

São propostas duas atividades a respeito de cada construção, sendo que a primeira o professor realiza junto com o aluno e a segunda o aluno desenvolve sem o acompanhamento do professor verificando assim sua autonomia para a realização da construção.

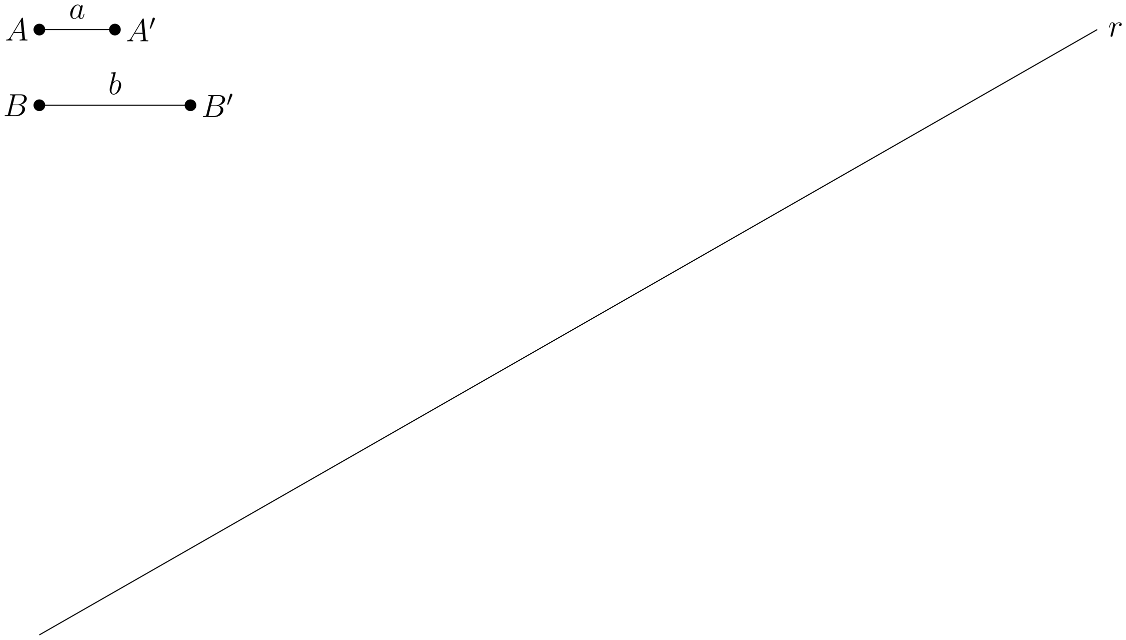
1. Dado o segmento $\overline{AB}$, construa sobre a reta r um segmento congruente com extremidade no ponto P.



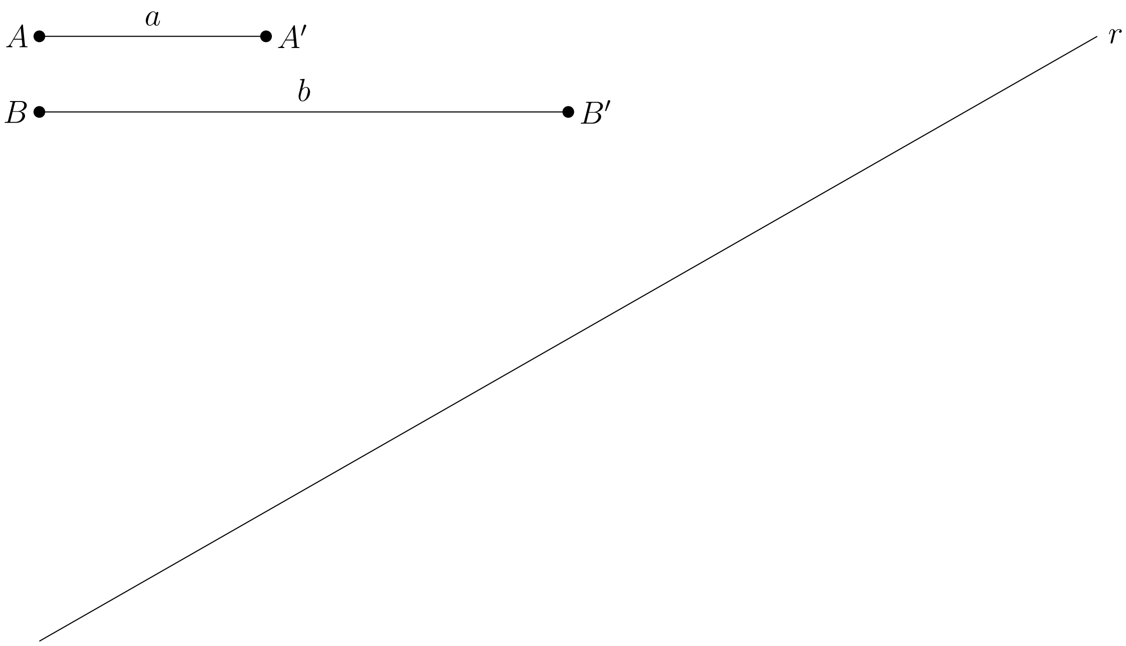
2. Dado o segmento $\overline{AB}$, construa sobre a reta r um segmento congruente com extremidade no ponto P.



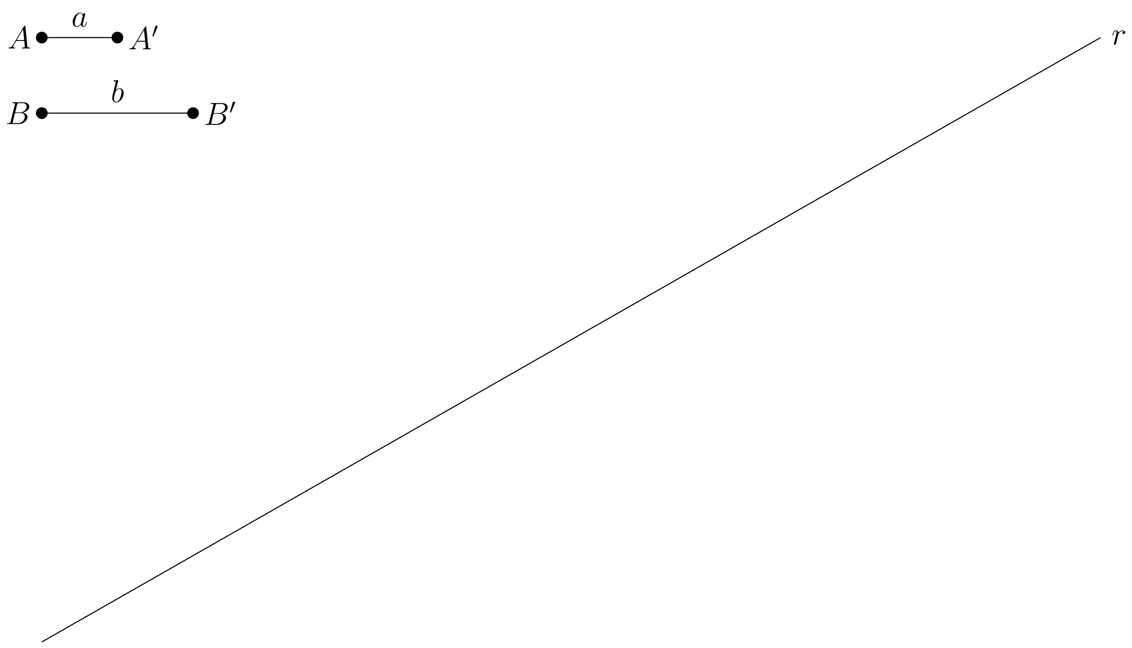
3. Dados os segmentos a e b, construa a soma dos segmentos $x = a + b$, sobre a reta r.



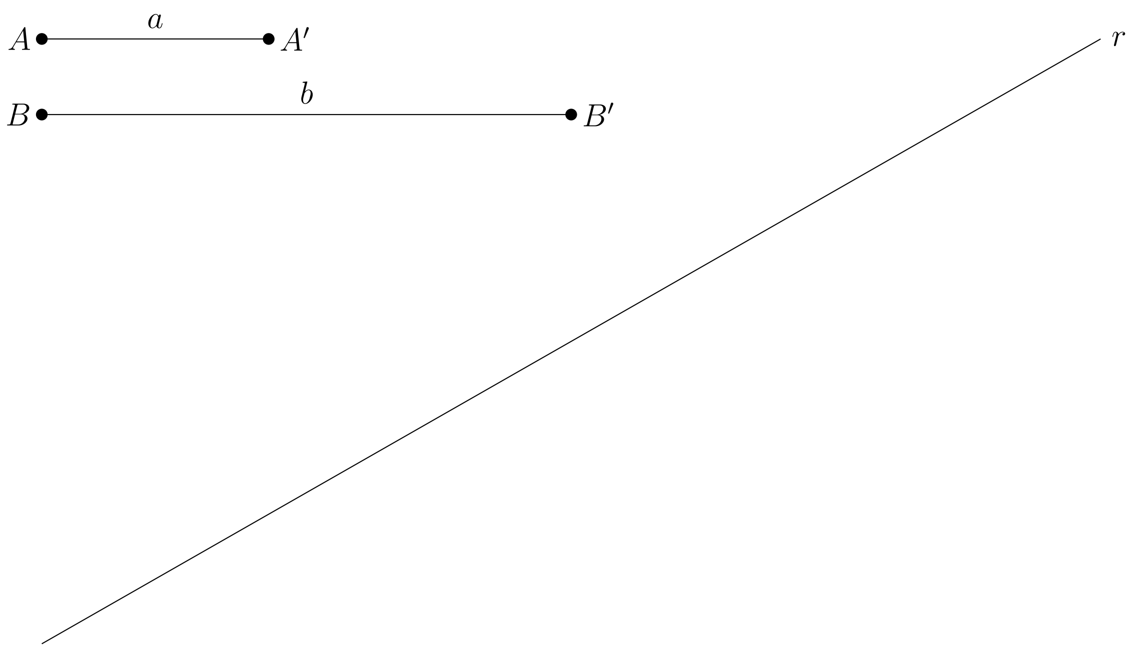
4. Dados os segmentos a e b, construa a soma dos segmentos $x = a + b$, sobre a reta r.



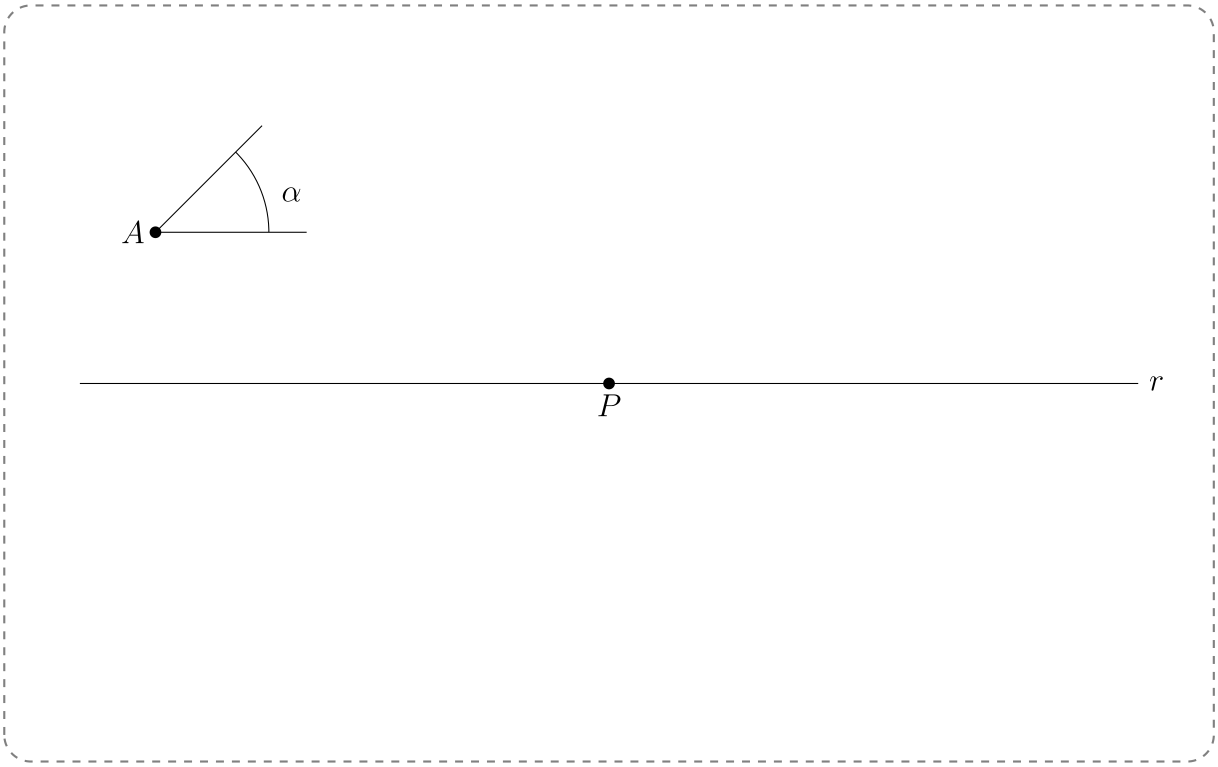
5. Dados os segmentos a e b, construa a subtração dos segmentos $x = b - a$, sobre a reta r.



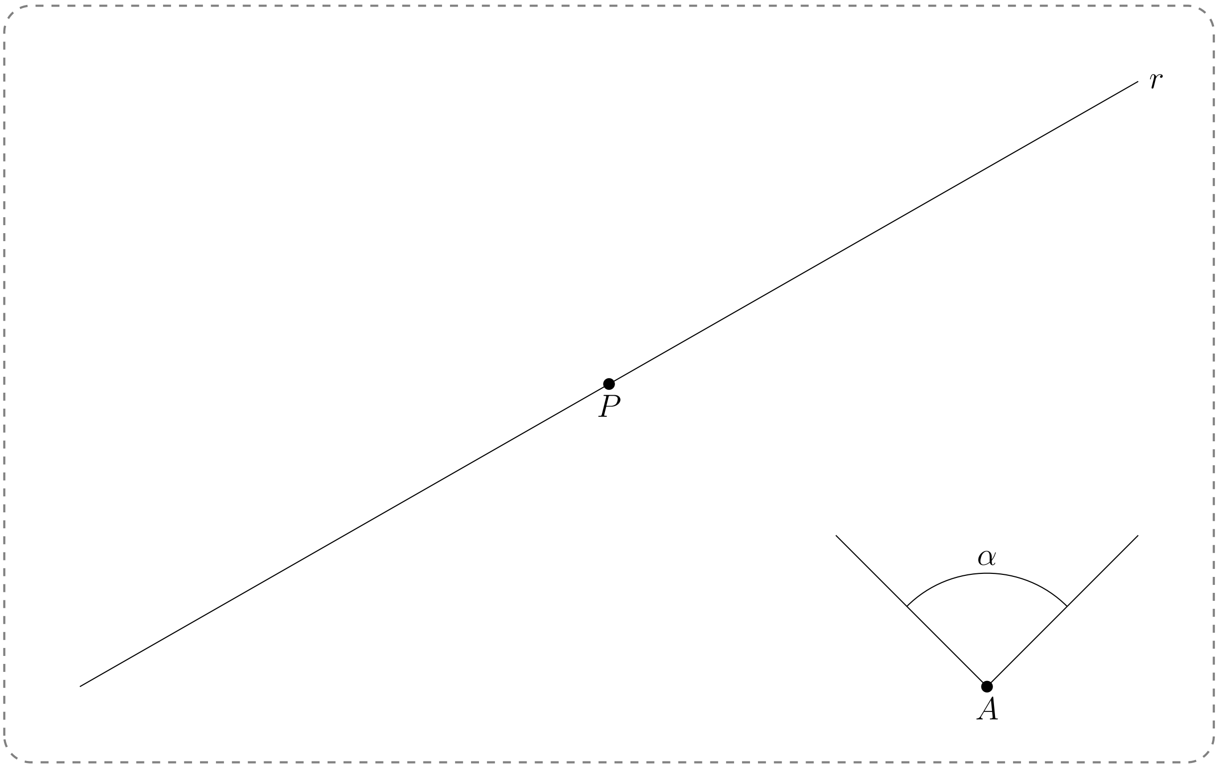
6. Dados os segmentos a e b, construa a subtração dos segmentos $x = b - a$, sobre a reta r.



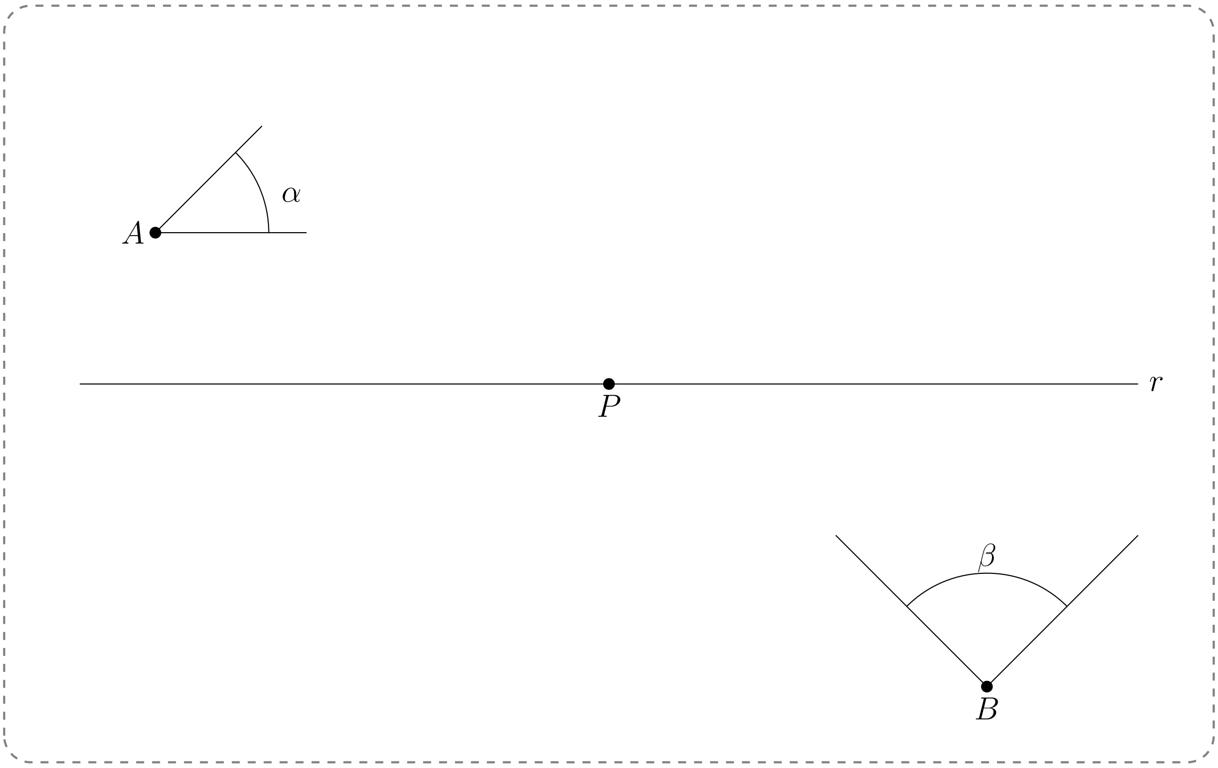
7. Dado o ângulo α, transporte-o para a reta r com vértice no ponto P.



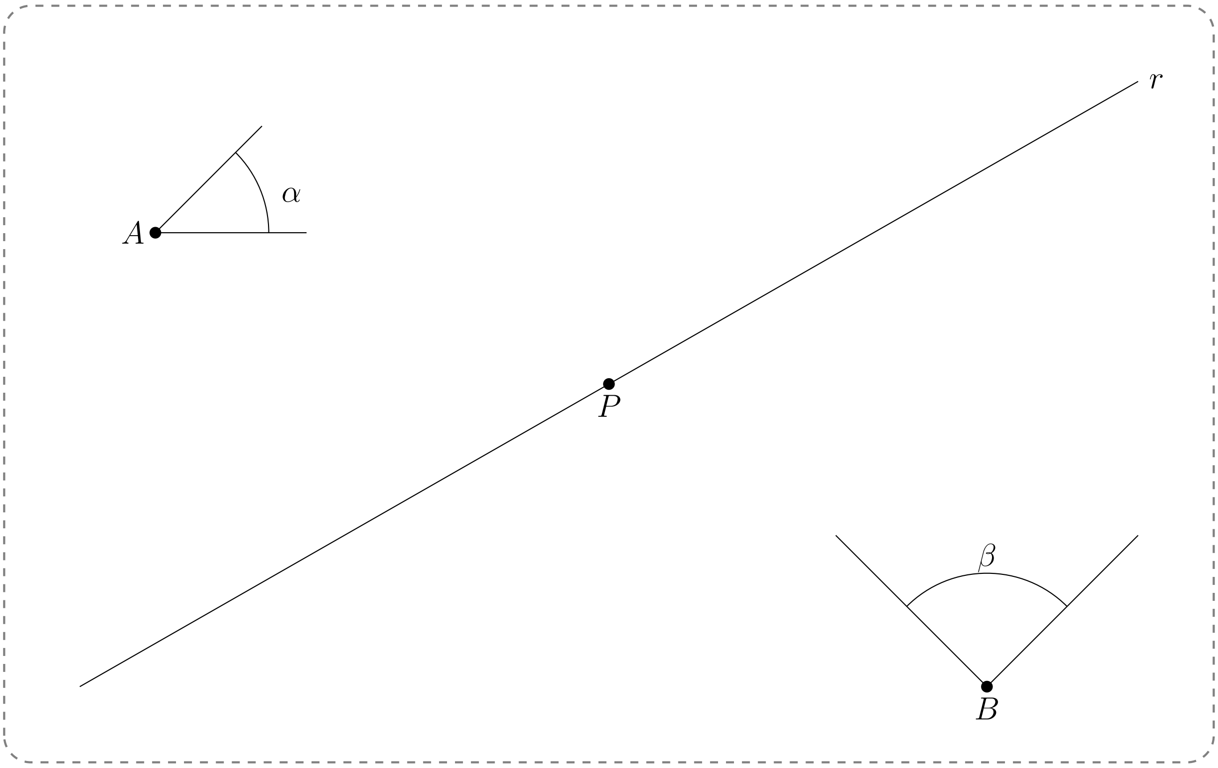
8. Dado o ângulo α, transporte-o para a reta r com vértice no ponto P.



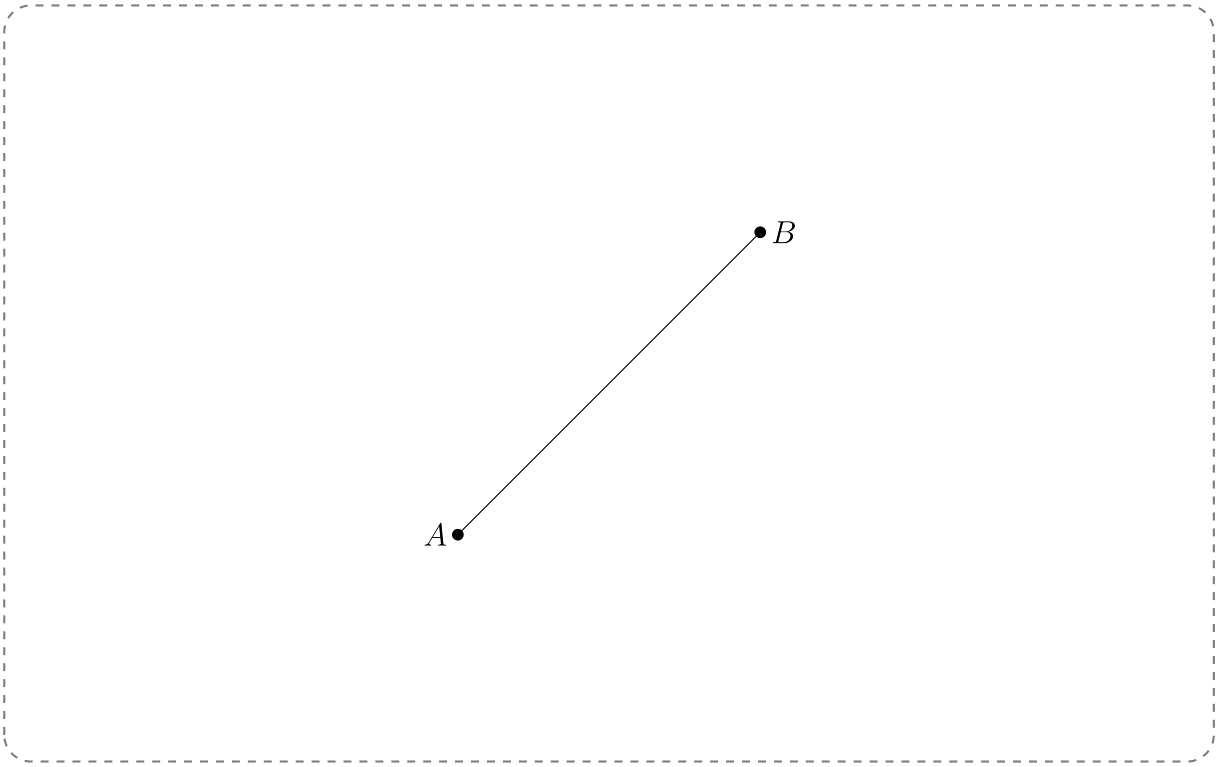
9. Dados os ângulos α e β, construa o ângulo $\gamma = \alpha + \beta$, sobre a reta r com vértice no ponto P.



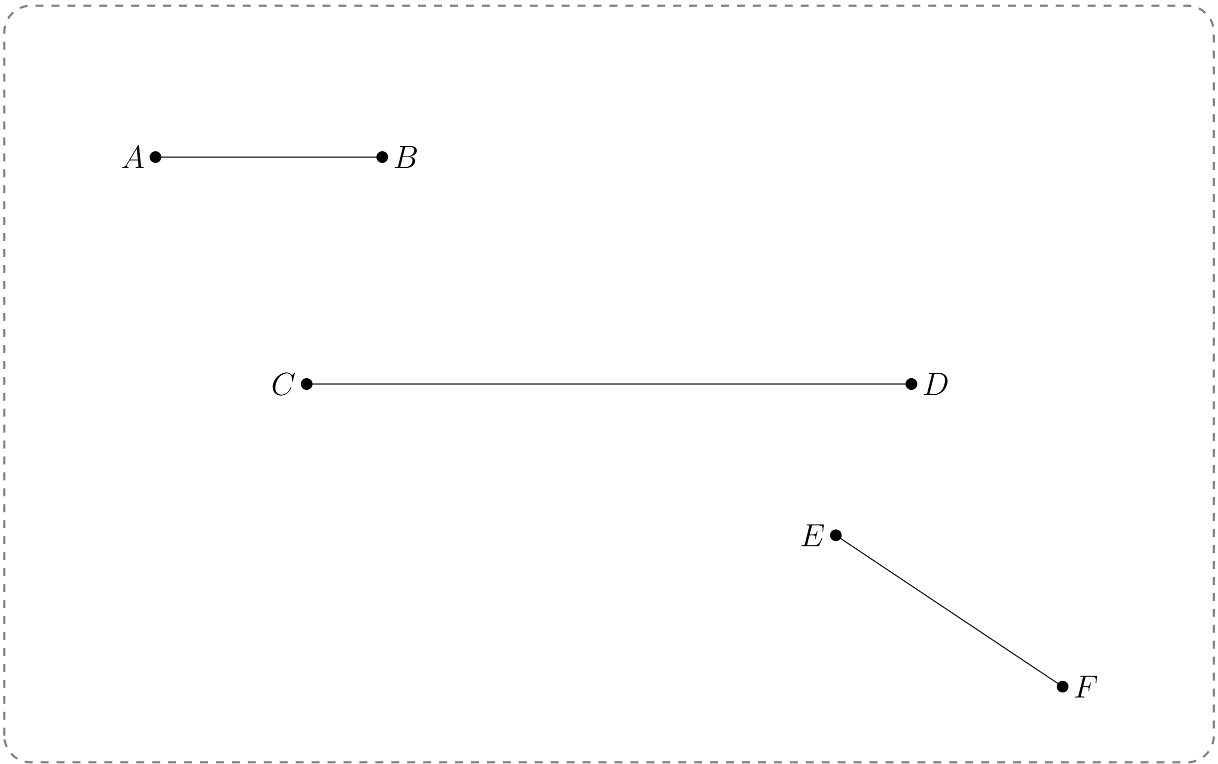
10. Dados os ângulos α e β, construa o ângulo $\gamma = \beta - \alpha$, sobre a reta r com vértice no ponto P.



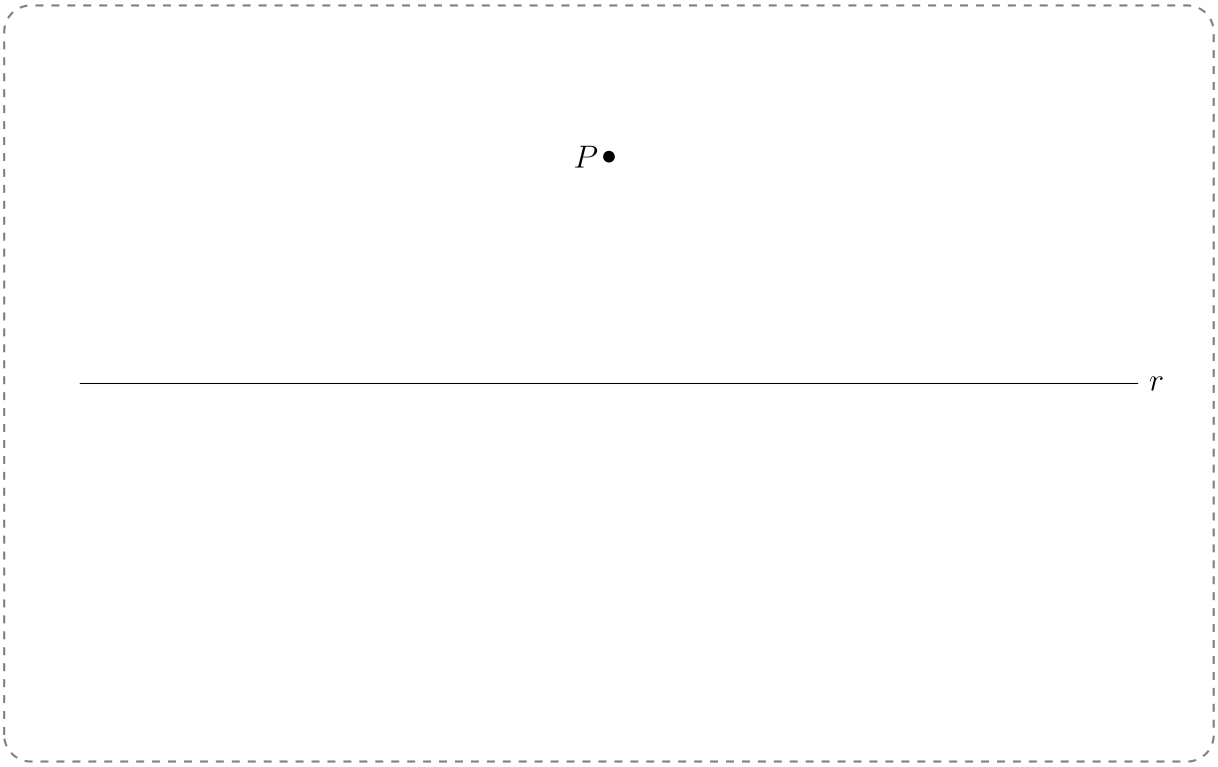
11. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



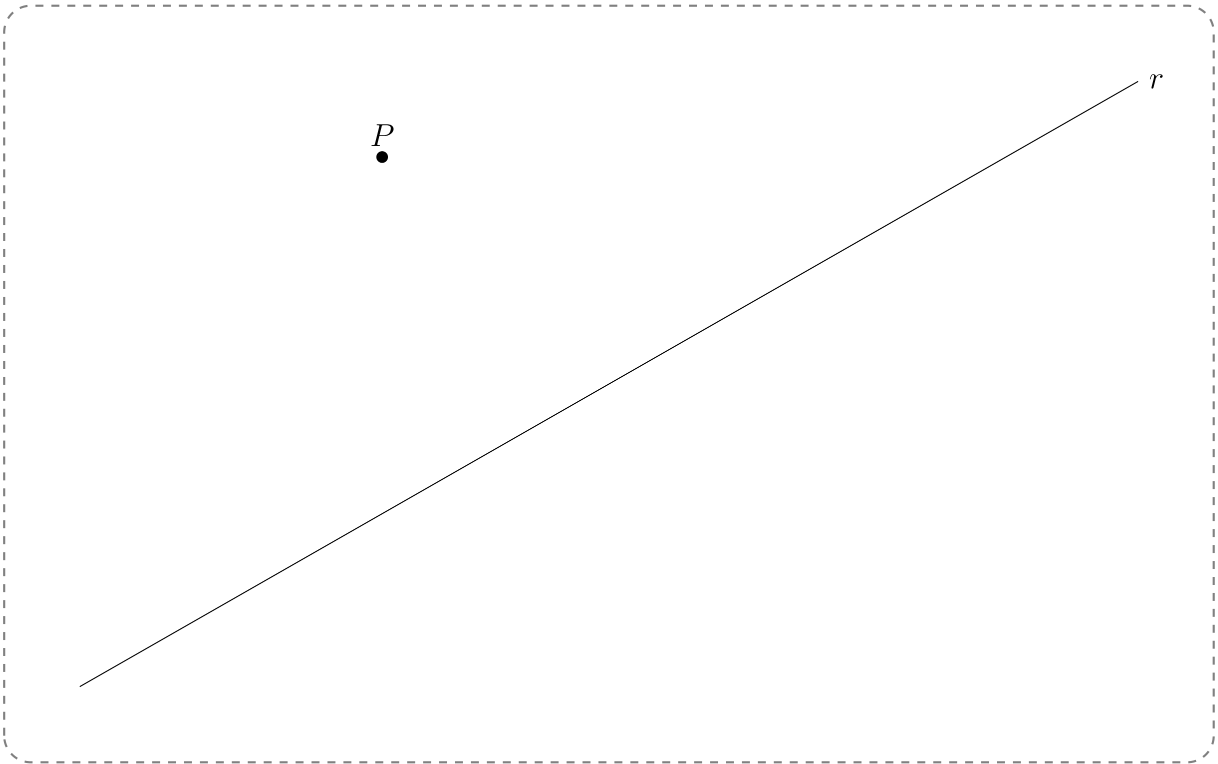
12. Construa a mediatriz de cada segmento.



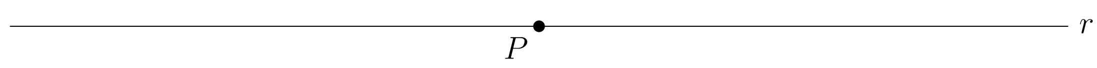
13. Trace a perpendicular a reta r passando pelo ponto P.



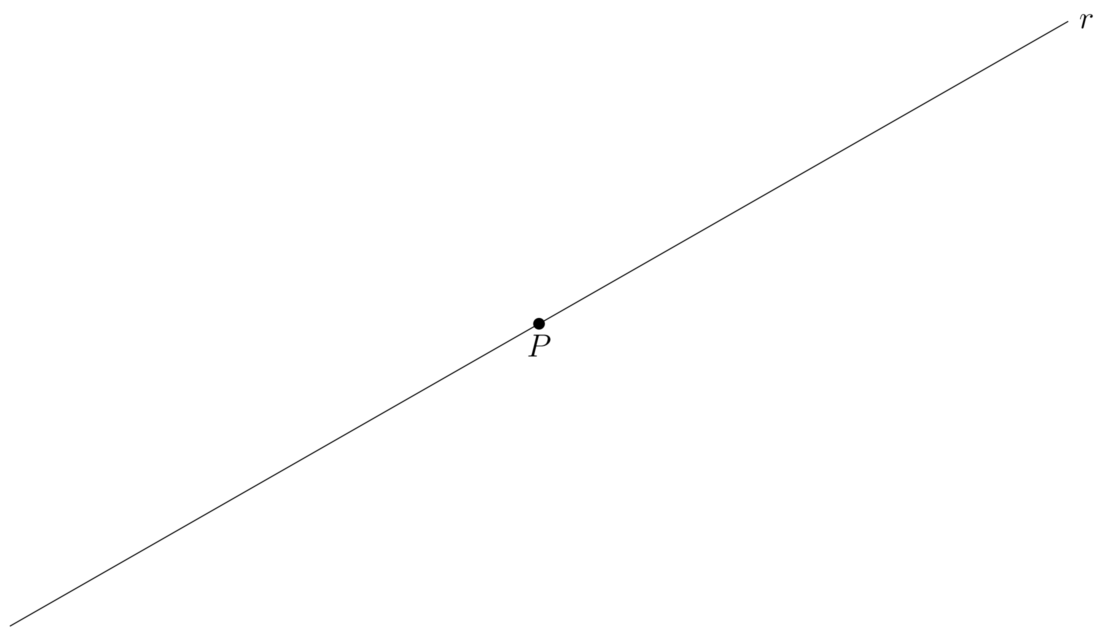
14. Trace a perpendicular a reta r passando pelo ponto P.



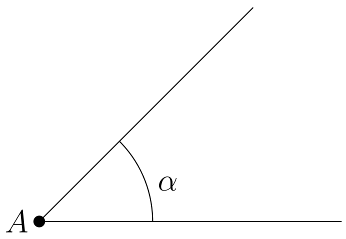
15. Trace a perpendicular a reta r passando pelo ponto P.



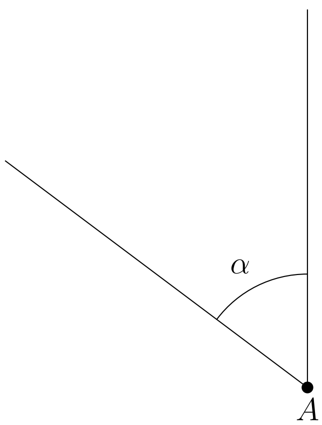
16. Trace a perpendicular a reta r passando pelo ponto P.



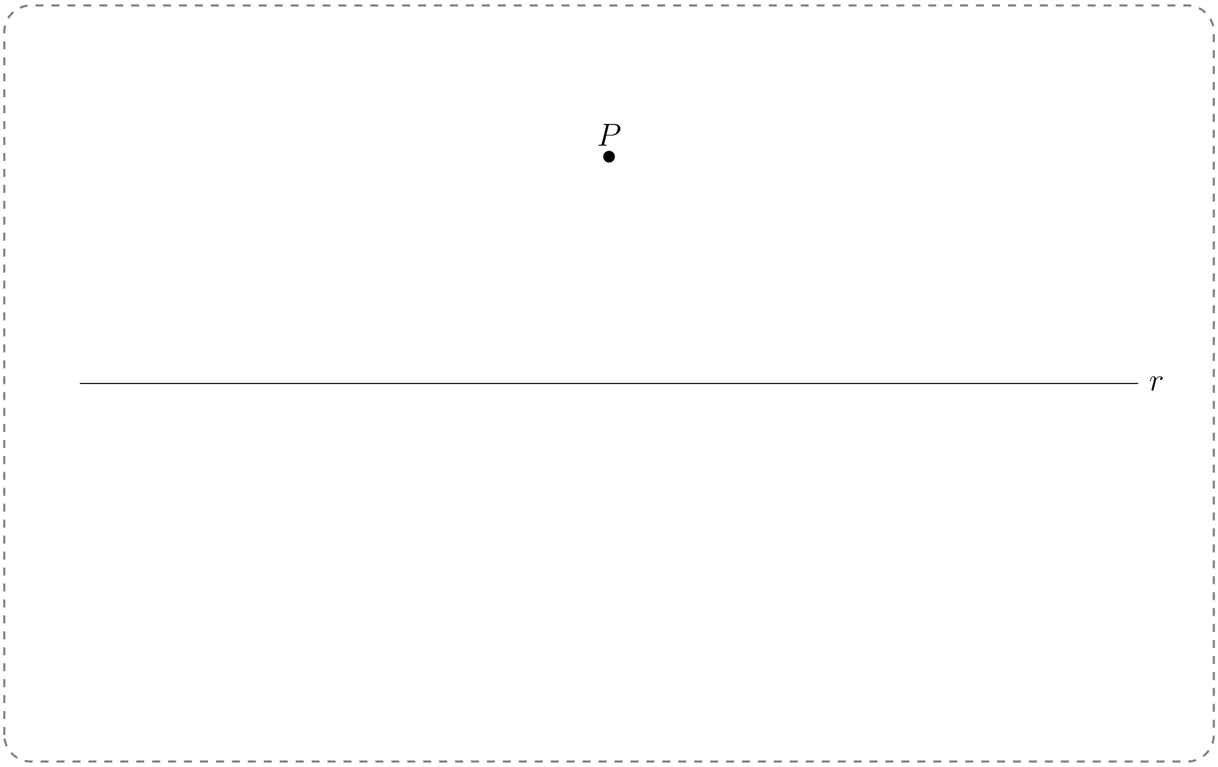
17. Construa a bissetriz do ângulo α.



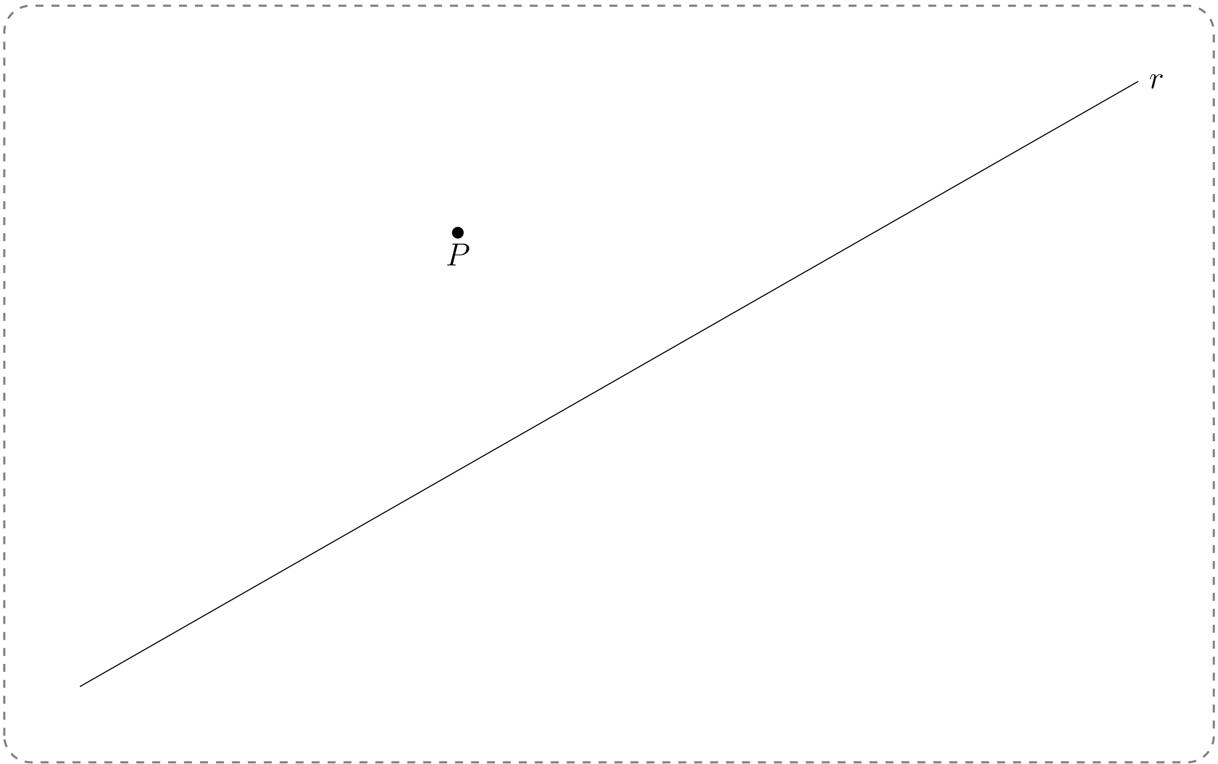
18. Construa a bissetriz do ângulo α.



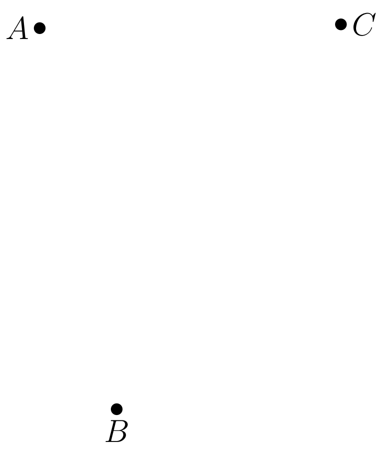
19. Construa uma reta s paralela a reta r passando pelo ponto P.



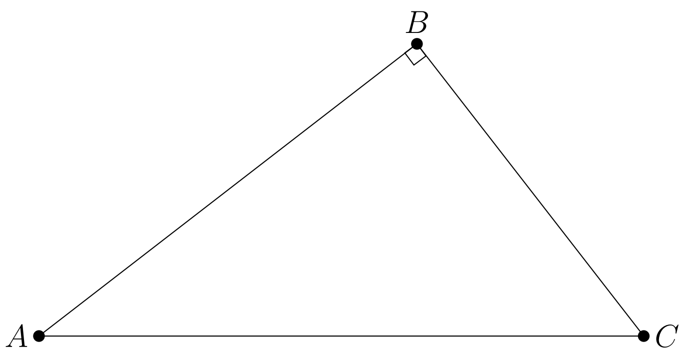
20. Construa uma reta s paralela a reta r passando pelo ponto P.



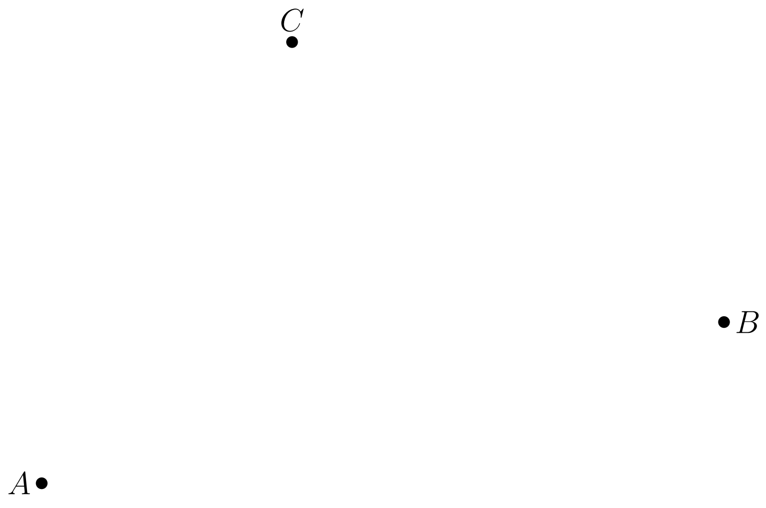
21. Construa a circunferência **circunscrita** que contém os vértices do triângulo formado pelos pontos A, B e C.



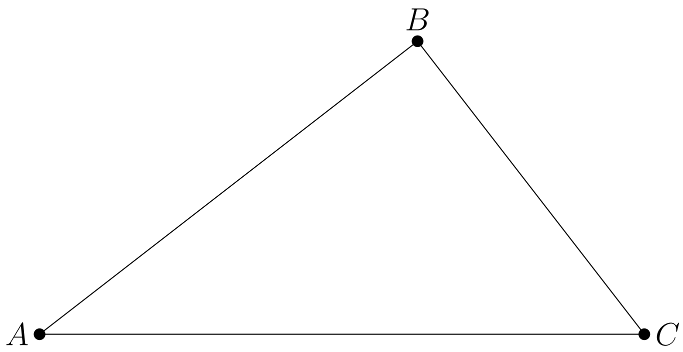
22. Construa a circunferência **circunscrita** ao triângulo retângulo ΔABC.



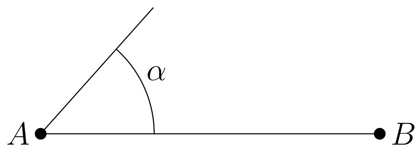
23. Construa a circunferência **inscrita** ao triângulo formado pelos pontos A, B e C.



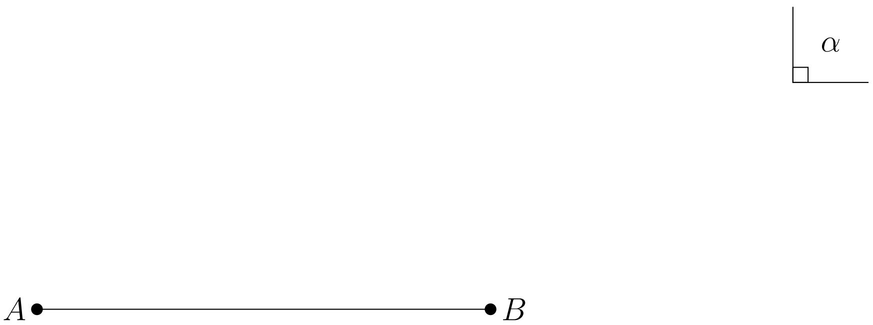
24. Construa a circunferência **inscrita** ao triângulo retângulo ΔABC.



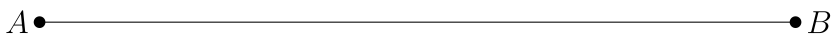
25. Construa o arco capaz de ângulo α sobre o segmento $\overline{AB}$.



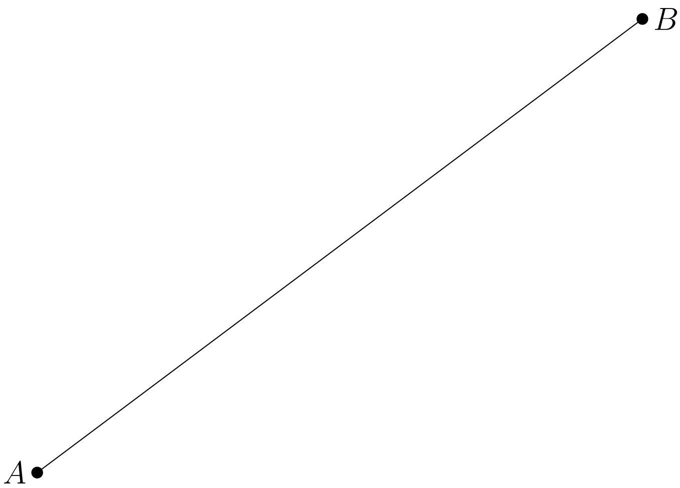
26. Construa o arco capaz de ângulo α sobre o segmento $\overline{AB}$.



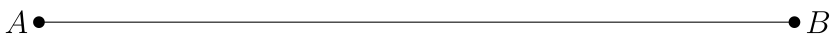
27. Divida o segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais.



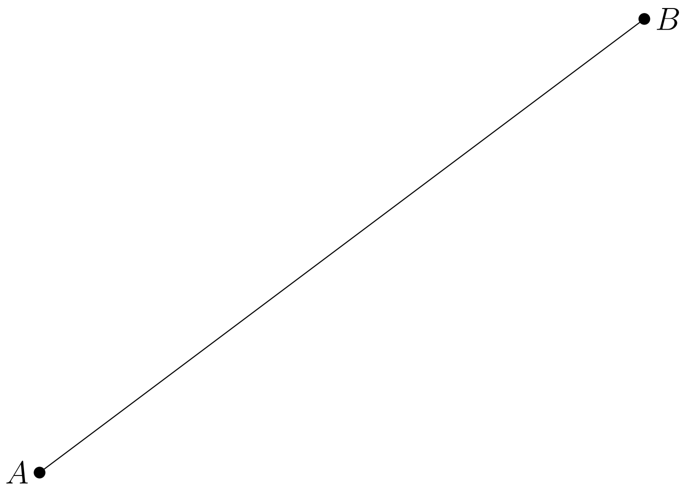
28. Divida o segmento $\overline{AB}$ em 8 partes iguais.



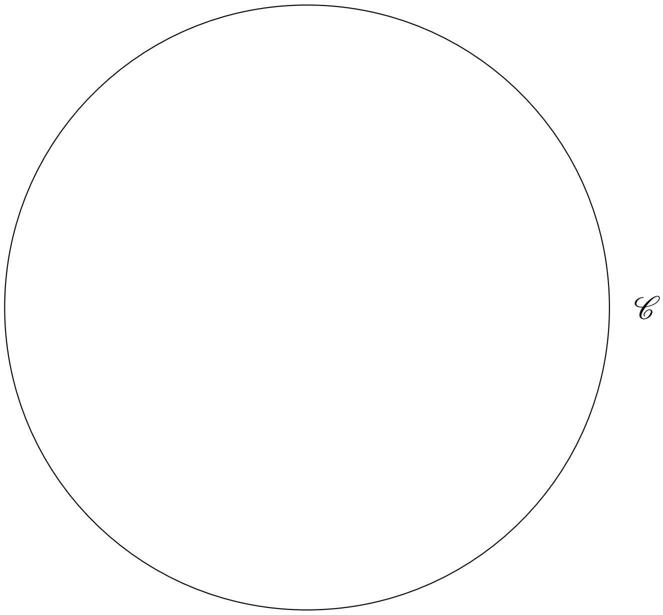
29. Divida o segmento $\overline{AB}$ em partes proporcionais a 2 e 3.



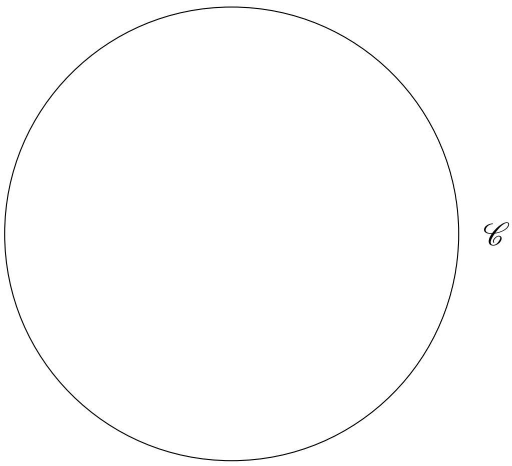
30. Divida o segmento $\overline{AB}$ em partes proporcionais a 3 e 5.



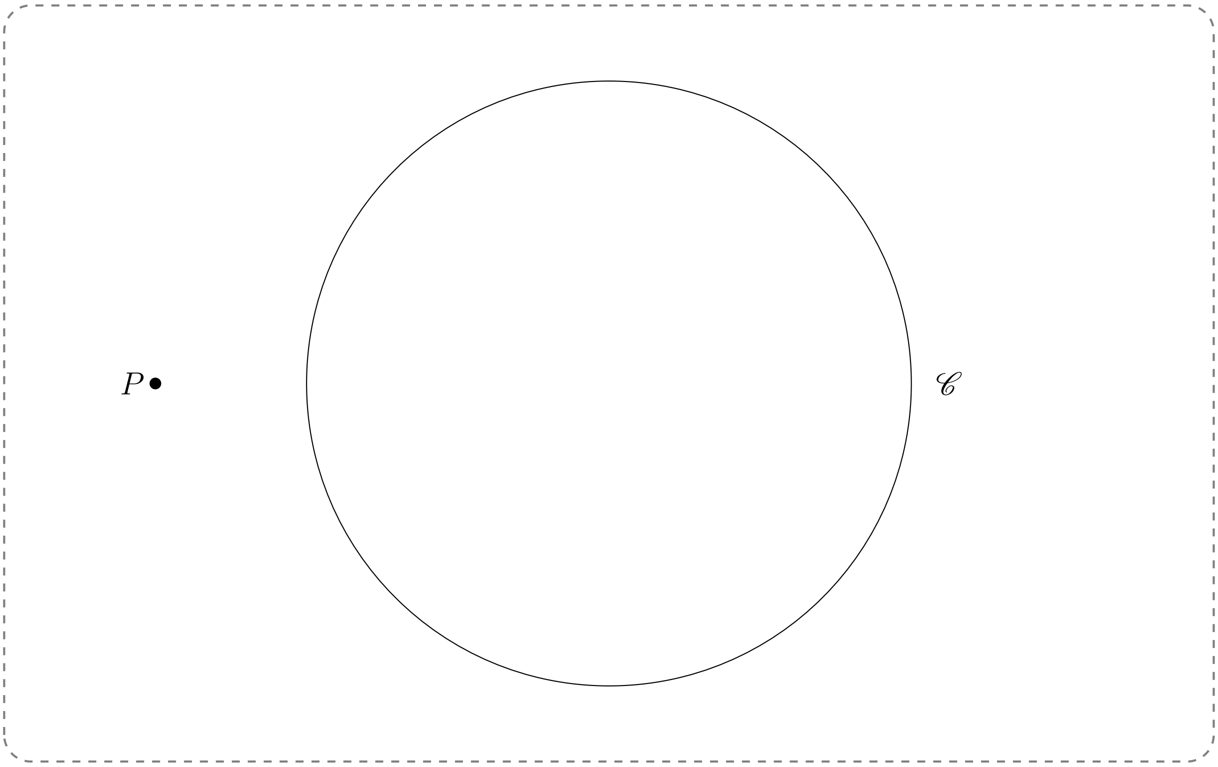
31. Determine o centro da circunferência $\mathscr{C}$.



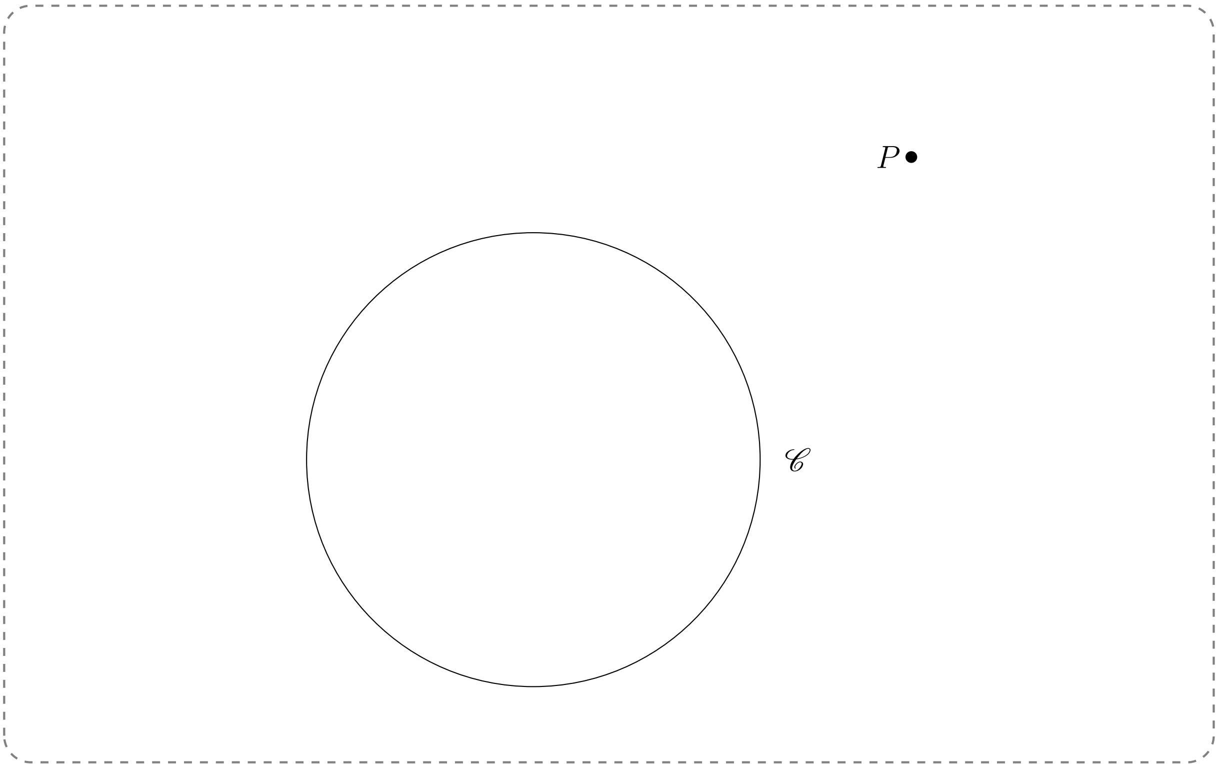
32. Determine o centro da circunferência $\mathscr{C}$.



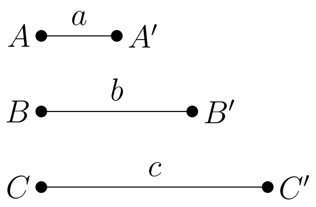
33. Trace as retas r e s tangentes a circunferência $\mathscr{C}$ passando pelo ponto P.



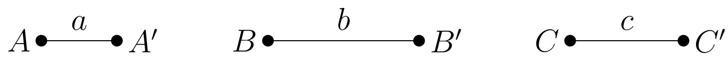
34. Trace as retas r e s tangentes a circunferência $\mathscr{C}$ passando pelo ponto P.



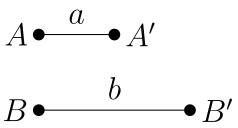
35. Construa o segmento de comprimento x de modo que se tenha $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.



36. Construa o segmento de comprimento x de modo que se tenha $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.

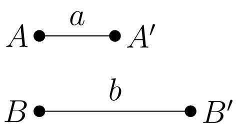


37. Construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.



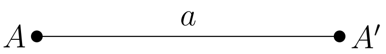
38. Construa o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

39. Construa o segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

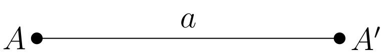


40. Construa o segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

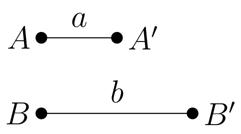
41. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $\sqrt{2}$.



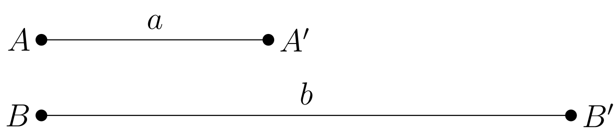
42. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $\sqrt{3}$.



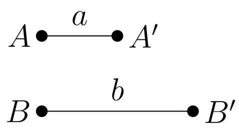
43. Dados os segmentos a e b, construa a média aritmética $m = \dfrac{a+b}{2}$.



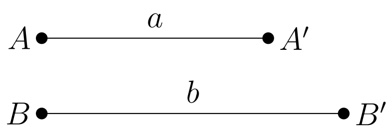
44. Dados os segmentos a e b, construa a média aritmética $m = \dfrac{a+b}{2}$.



45. Dado os segmentos a e b, construa a média geométrica $g = \sqrt{ab}$.



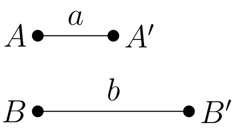
46. Dado os segmentos a e b, construa a média geométrica $g = \sqrt{ab}$.



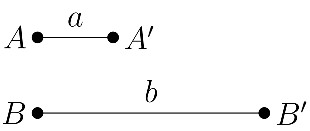
47. Construa um segmento áureo.

48. Construa um retângulo áureo.

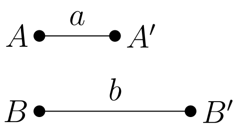
49. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $x = \dfrac{1}{b}$.



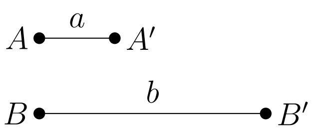
50. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $x = \dfrac{1}{b}$.



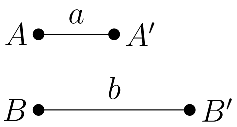
51. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $x = b^2$.



52. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $x = b^2$.



53. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $\sqrt{b}$.



54. Dado o segmento unitário a, construa o segmento $\sqrt{b}$.