UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Estudo do Binômio de Newton

por

Salatiel Dias da Silva

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Estudo do Binômio de Newton †

por

Salatiel Dias da Silva

sob orientação da

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/DM-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Estudo do Binômio de Newton

por

Salatiel Dias da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/DM-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof$^{\mathbf{a}}$**. Dr**$^{\mathbf{a}}$**. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes** -UFPB

(Orientadora)

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa - UFPB

José Anderson Valença Cardoso

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS

Agosto/2013

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus pelo dom da vida e da sabedoria. Aos meus familiares que sempre torceram em prol do meu crescimento acadêmico. Aos meus professores, que ao longo de todo processo se mostraram disponíveis a compartilhar de seus saberes. À Profª. Drª. Elisandra Gloss pela sua orientação precisa na construção deste trabalho. Aos meus colegas de turma que a todo tempo se mostraram motivados, mesmo nos momentos mais árduos dessa caminhada. À SBM, que juntamente com a Capes e com a UFPB, acreditou neste projeto de Mestrado e nos proporcionou uma oportunidade ímpar de desenvolver novos conhecimentos e vivências.

Dedicatória

Aos meus pais, Pedro Francisco da Silva (in memorian) e Creusa Dias da Silva, que sempre incentivaram o meu crescimento intelectual.

Resumo

Este trabalho vem mostrar o estudo dos desenvolvimentos binomiais iniciado na 7^a série (8^o ano) do Ensino Fundamental, quando tratamos de produtos notáveis, que é complementado na segunda série do ensino médio, a partir do estudo do Binômio de Newton. Faremos um estudo detalhado do mesmo, passando por um apanhado histórico sobre o assunto, propriedades do triângulo aritmético (triângulo de Pascal/Tartaglia), chegando ao Teorema binomial e, por fim, a algumas aplicações destes na resolução de problemas diversos, expansão multinomial e nas séries binomiais.

Palavras-chave: Binômio de Newton, Triângulo aritmético, Aplicações, Séries Binomiais.

Abstract

This work deals with the study of the binomial developments started in the late years of Elementary School, when we deal with notable products, which is complemented in the second year of High School, from the study of Newton's Binomial. We will make a detailed study of the same, through a historical overview about the subject, properties of arithmetic triangle (Pascal's triangle / Tartaglia's), reaching the binomial theorem and, finally, some applications of these results in solving various problems, in the multinomial expanding and in the binomial series.

Keywords: Newton's Binomial, Arithmetic Triangle, Applications, Binomial Series.

Sumário

Introdução

As resoluções de problemas e o uso, nestas, de ferramentas algébricas, sempre despertam algumas dificuldades e dúvidas na grande maioria dos educandos. Sendo assim, é de fundamental importância que o aluno adquira habilidades para desenvolver problemas que necessitam de um tratamento algébrico mais apurado. Isto trará melhor compreensão sobre determinados problemas de Matemática e de áreas afins que usam o tratamento algébrico como alicerce para suas demonstrações.

Iniciaremos, no primeiro capítulo, com o estudo de elementos relevantes para o desenvolvimento binomial, fazendo uso de ferramentas matemáticas para a demonstração de algumas propriedades operatórias que são pertinentes ao estudo do Binômio de Newton e investigando a aplicabilidade destas e, ainda, é importante salientar que, no desenvolvimento teórico, serão necessárias as inserções de alguns tópicos que têm fundamental importância para o entendimento das demonstrações que serão feitas, uma vez que o trato algébrico utilizado nas demonstrações desperta no leitor a capacidade de compreensão e exercita o poder de abstração do mesmo.

O estudo do Binômio de Newton abre caminho para o estudo de vários outros tópicos matemáticos, como polinômios e equações polinomiais, como também para o estudo do cálculo diferencial e integral com funções polinomiais de graus diversos, pois através das habilidades adquiridas com o trato algébrico, torna-se mais compreensível o desenvolver de algumas propriedades e demonstrações destas.

Este estudo, basicamente literário, foi pensado de forma a oferecer ao leitor uma sequência clara sobre a construção dos saberes necessários para se chegar ao desenvolvimento de $(a+b)^n$ para qualquer valor natural de n.

Vale salientar também que, ao longo do desenvolvimento do conteúdo, serão propostos alguns exemplos, que têm como objetivo dar aplicabilidade aos saberes aqui desenvolvidos.

Embora receba o nome de "Binômio de Newton", o estudo do desenvolvimento binomial com suas propriedades e aplicações, não foi objeto de estudo do físico e matemático inglês Isaac Newton (1642 - 1727). Na verdade, segundo [2], Isaac Newton fez a descrição e explicação do teorema do desenvolvimento do binômio generalizado, para potências com expoente fracionário, o qual o mesmo representou sob a forma

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + ...,$$

onde A representa o primeiro termo $\left(P^{m/n}\right)$, B representa o segundo termo $\left(\frac{m}{n}AQ\right)$, C representa o terceiro termo e assim sucessivamente. Os devidos ajustes, com suas devidas restrições, do desenvolvimento binomial para qualquer valor complexo do expoente, só foi estabelecido mais de um século e meio depois pelo matemático norueguês N. H. Abel (1802 - 1829).

O estudo do desenvolvimento binomial exige alguns conceitos que foram sendo inseridos por vários matemáticos ao longo dos anos. Não se pode falar em desenvolvimento binomial sem ter conhecimento prévio de análise combinatória, uma vez que os "coeficientes binomiais" (coeficientes dos termos do desenvolvimento do binômio), são obtidos pela fórmula que fornece o número de combinações de n objetos tomados p de cada vez. Estes coeficientes binomiais foram assim chamados pelo matemático alemão Michael Stifel (1486 - 1567), e, por sua vez, foram organizados numa tabela em forma de triângulo, conhecido como triângulo aritmético, triângulo de Yang-Hui, ou triângulo de Pascal/Tartaglia.

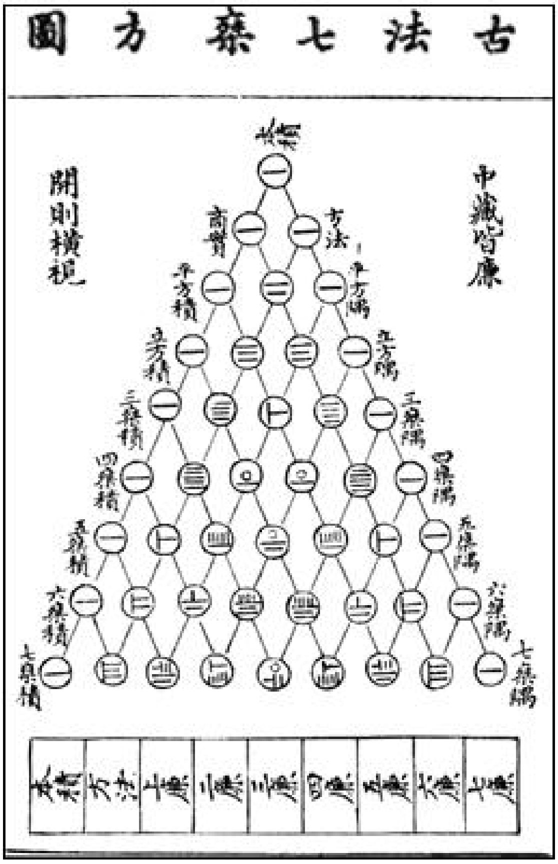

Figura 1: Triângulo de Yang Hui, mostrado em 1303 na capa do Espelho precioso, de Zhu Shijie.([1]-pág. 149)

Segundo [1], o Espelho Precioso começa com um diagrama do Triângulo Aritmético, onde temos os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, claramente dadas em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero.

Em meados do século XI (por volta de 1050), o Manual de Matemática de Jia Xian, na China, já traz o triângulo aritmético. Depois disso, o matemático e astrônomo persa Omar Khayyam (1048 - 1122), também fez menção do triângulo aritmético em alguns de seus trabalhos, por volta de 1100.

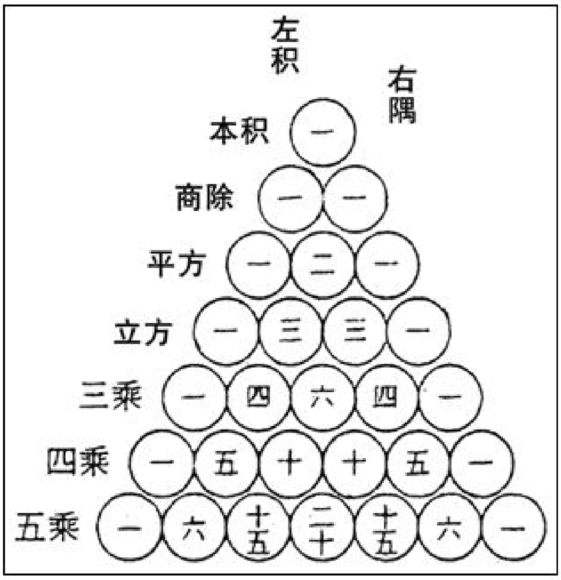

Figura 2: Triângulo de Jia Xian

Um século antes de Pascal, na Europa, alguns matemáticos também trabalharam com o triângulo aritmético. Dentre estes podemos citar o matemático alemão Petrus Apianus (1495 - 1552), que publicou um livro que trazia em sua capa o desenho do triângulo aritmético, em 1527.

Um dos primeiros matemáticos ocidentais a confeccionar uma tabela contendo o número de combinações possíveis num lançamento de um dado foi o matemático italiano Niccolo Fontana Tartaglia (1499 - 1559), sendo assim, Tartaglia reivindicou a criação do triângulo aritmético para ele, o que explica o fato de que em alguns países, até os dias de hoje, o triângulo aritmético é conhecido como triângulo de Tartaglia. Porém, como o matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) foi o primeiro descobridor conhecido do triângulo aritmético no ocidente e devido às aplicações que o mesmo fazia das propriedades deste, o triângulo aritmético passou a ser conhecido como triângulo de Pascal. Este reconhecimento tornou-se mais notório quando, em 1739, Abraham de Moivre (1667 - 1754) publicou um trabalho de muito impacto na época, intitulado *"triangulum arithmeticum pascalium"* sobre o triângulo aritmético.

O teorema do desenvolvimento binomial também foi estudado pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Leibniz, segundo [2], fez a generalização do teorema do desenvolvimento binomial para o teorema multinomial, o que consiste em fazer a expansão de $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^r$.

No segundo capítulo apresentaremos a generalização do desenvolvimento binomial para o desenvolvimento multinomial (Polinômio de Leibniz). Faremos uso do método binomial para resolver problemas de probabilidades, além de estudar a aplicação de propriedades do desenvolvimento binomial no estudo de Genética e, por fim, o uso do Teorema Binomial generalizado no estudo das séries binomiais e na expansão de funções como séries de potências.

Espera-se, portanto, que este estudo seja de grande valia, uma vez que o mesmo será fundamentado nas reflexões para a construção de um conhecimento matemático cada vez mais significativo.

Capítulo 1

O desenvolvimento do Binômio de Newton

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos que são essenciais para fazer a expansão binomial, alguns dos quais serão demonstrados de modo a nos proporcionar um suporte real para a aplicação dos mesmos.

1.1 Relembrando o estudo dos Produtos Notáveis

Como já foi dito, o estudo dos produtos notáveis é feito no ensino fundamental, de modo que o mesmo se baseia num conjunto de "regras" para o desenvolvimento de $(a+b)^n$, com $n \leq 3$.

Sendo n um número natural, temos que:

- $n = 0 \;\Rightarrow\; (a+b)^0 = 1$
- $n = 1 \;\Rightarrow\; (a+b)^1 = a + b$
- $n = 2 \;\Rightarrow\; (a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $n = 3 \;\Rightarrow\; (a+b)^3 = (a+b).(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Para valores de n maiores que 3, também podemos fazer uso das regras acima e das propriedades de potências para chegar ao desenvolvimento do binômio. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b).(a+b)^3 = (a+b).(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

De modo geral, $(a+b)^n = (a+b).(a+b)^{n-1}$.

Esse processo, porém, se torna difícil e demorado, pois nos remete a cálculos muito trabalhosos. Sendo assim, durante o desenvolvimento do trabalho, mostraremos algumas ferramentas matemáticas que tornarão mais prático o desenvolvimento de $(a+b)^n$.

1.2 Números (coeficientes) binomiais

Nos temas abordados a seguir, usaremos a definição de fatorial de um número natural e, ainda, vamos considerar o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Definamos fatorial de um número natural segundo [6]:

Definição 1 *: Dado um número natural $n, n \geq 2$, o fatorial de n (indica-se por $n!$) é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é:*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \; ... \; 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por exemplo:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$

Valem também as seguintes convenções especiais:

$$\begin{cases} 0! &= 1 \\ e & \\ 1! &= 1. \end{cases}$$

Em análise combinatória, o número $C_{n,p}$ representa o total de combinações de p elementos que podemos formar a partir de um conjunto de n elementos. Segundo [10], cada subconjunto com p elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe p dos n objetos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Vejamos, agora, a definição de coeficientes binomiais.

Definição 2 *Consideremos dois números naturais n e p, sendo $n \geq p$. Chamamos de coeficiente binomial n sobre p, e indicamos por $\binom{n}{p}$, o número dado por*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,p}.$$

O número n é chamado de numerador e o número p de denominador de $\binom{n}{p}$.

Sendo assim, temos, por exemplo:

- $\binom{6}{2} = C_{6,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = 15.$
- $\binom{10}{3} = C_{10,3} = \dfrac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 7!} = 120.$

Observemos alguns casos particulares:

- Se $p = 0$, temos $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1, \forall \; n \in \mathbb{N}.$

Desse modo, temos, por exemplo, $\binom{3}{0} = 1$ e $\binom{17}{0} = 1.$

- Se $p = 1$, temos $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n, \forall \; n \in \mathbb{N}.$

Desse modo, temos, por exemplo, $\binom{8}{1} = 8$ e $\binom{25}{1} = 25$.

- Se $p = n$, temos $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1, \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Desse modo, temos, por exemplo, $\binom{5}{5} = 1$ e $\binom{32}{32} = 1$.

Definamos agora os números binomiais complementares, para fazer uso dos mesmos em algumas demonstrações a seguir.

Definição 3 *Dois números binomiais* $\binom{n}{p}$ *e* $\binom{n}{q}$ *são complementares se* $p+q = n$.

Com esta definição, percebemos que são binomiais complementares, por exemplo:

$$\binom{6}{2} \quad \text{e} \quad \binom{6}{4}; \qquad \binom{15}{5} \quad \text{e} \quad \binom{15}{10}; \qquad \binom{31}{3} \quad \text{e} \quad \binom{31}{28}.$$

Temos uma propriedade fundamental quando se trata de binomiais complementares.

Propriedade: Dois coeficientes binomiais complementares têm o mesmo valor.

$$p + q = n \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{q}.$$

Justificativa: Sendo, $p + q = n$, podemos escrever $p = n - q$. Assim, segue que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)![n-(n-q)]!} = \frac{n!}{(n-q)!q!} = \binom{n}{q},$$

como desejado. □

1.3 O Triângulo Aritmético

O triângulo aritmético, cuja história já foi relatada anteriormente, consiste em uma tabela, na qual estão dispostos os coeficientes binomiais, de modo que os coeficientes de mesmo numerador agrupam-se numa mesma linha e os coeficientes de mesmo denominador agrupam-se na mesma coluna:

$$\begin{array}{lll}
\text{linha } 0 & \longrightarrow & \binom{0}{0} \\
\text{linha } 1 & \longrightarrow & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\text{linha } 2 & \longrightarrow & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\text{linha } 3 & \longrightarrow & \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\text{linha } 4 & \longrightarrow & \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\vdots & & \\
\text{linha } n & \longrightarrow & \binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\cdots\binom{n}{n}.
\end{array}$$

Percebamos que o termo linha n significa a linha de numerador n.

Calculando os respectivos valores dos coeficientes binomiais, obtemos a seguinte representação para o triângulo:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

1.3.1 Propriedades do Triângulo Aritmético

Propriedade 1 Em cada linha do triângulo aritmético, o primeiro elemento é sempre igual a 1.

Justificativa: De fato, o primeiro elemento da n-ésima linha do triângulo aritmético é $\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Propriedade 2 Em cada linha do triângulo, o último elemento é sempre igual a 1.

Justificativa: De fato, o último elemento de cada uma das linhas do triângulo aritmético é $\binom{n}{n} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Propriedade 3. (Por [10]) Somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.

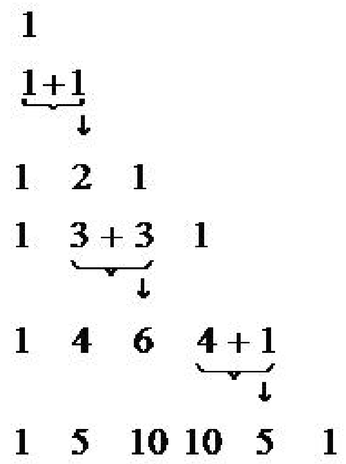

Figura 1.1: Relação de Stifel

Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel (matemático alemão já citado na introdução deste trabalho) e afirma que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \; n \geq p \quad \text{e} \quad n \geq 2.$$

Justificativa: Utilizando a definição de coeficientes binomiais, temos:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)\cdot(n-p-1)!}+\frac{(n-1)!}{p\cdot(p-1)!(n-p-1)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p}\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\cdot\frac{n}{(n-p)p}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p},\end{aligned}$$

como afirmado. □

Propriedade 4. Numa linha, dois binomiais equidistantes dos extremos têm o mesmo valor, ou seja, $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

Justificativa: De fato, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são complementares e, portanto, têm o mesmo valor. Sendo assim,

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\binom{n}{n-p},$$

como queríamos demonstrar. □

Propriedade 5 (Teorema das linhas). A soma dos elementos da n-ésima linha é sempre igual a 2^n.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Justificativa: (Por indução)

Segundo [8], seja $P(n)$ a proposição: se $n \geq 0$, então

$$S_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

- $n = 0 \Rightarrow S_0 = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$ ✓
- $n = 1 \Rightarrow S_1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1$ ✓

Supomos agora que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, k$.

Devemos mostrar que $P(n)$ continua verdadeira para $n = k + 1$, isto é,

$$S_{k+1} = \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{4} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Temos que,

$$S_{k+1} = \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{3} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}.$$

Aplicando a relação de Stifel, da segunda parcela da soma até a penúltima e, sabendo que $\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, teremos

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1}} + \underbrace{\binom{k}{1} + \binom{k}{2}} + \underbrace{\binom{k}{2} + \binom{k}{3}} + \cdots + \underbrace{\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}} + \binom{k}{k}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k}} + \underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k}} \\ &= 2 \cdot S_k. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $S_k = 2^k$, então

$$S_{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira e concluímos, pela definição 10, que $P(n)$ é verdadeira para todo n natural, como queríamos demonstrar. □

Outro modo de provar essa propriedade é pelo teorema do desenvolvimento binomial, que veremos em breve.

Propriedade 6 (Teorema das colunas). A soma dos elementos de uma coluna do triângulo, começando do primeiro elemento da coluna, tem o mesmo valor que o elemento que se encontra na linha e coluna imediatamente posterior ao último coeficiente binomial da soma.

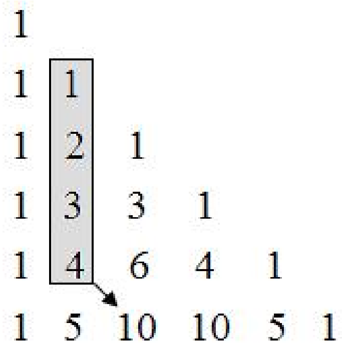

Figura 1.2: Teorema das colunas

Temos, na forma de coeficientes binomiais:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

Justificativa: Vamos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna $p+1$, a partir da linha $p+2$. Lembramos que $\binom{p}{p} = 1$ para todo número natural p, o que nos fornece a primeira das igualdades a seguir.

$$\begin{aligned}
\binom{p+1}{p+1} &= \binom{p}{p} \\
\binom{p+2}{p+1} &= \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} \\
\binom{p+3}{p+1} &= \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} \\
&\vdots \\
\binom{p+n}{p+1} &= \binom{p+n-1}{p+1} + \binom{p+n-1}{p} \\
\binom{p+n+1}{p+1} &= \binom{p+n}{p+1} + \binom{p+n}{p}
\end{aligned}$$

Fazendo a soma de todas as relações escritas e simplificando as parcelas iguais que aparecem em membros opostos, teremos

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p},$$

como queríamos demonstrar. □

Propriedade 7 (Teorema das diagonais). A soma dos elementos de uma diagonal (paralela à hipotenusa) do triângulo, começando pelo primeiro elemento da diagonal, é igual ao elemento que está imediatamente abaixo do último coeficiente binomial da soma.

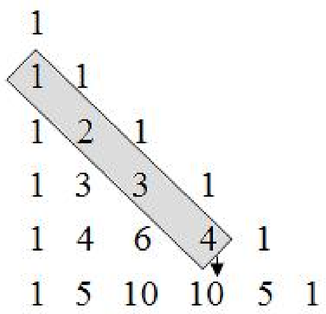

Figura 1.3: Teorema das diagonais

Escrevendo sob a notação de coeficientes binomiais, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Justificativa: Temos, pela propriedade dos binomiais complementares, que:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n};\ \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n};\ \binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{n}; \cdots ; \binom{n+p}{p} = \binom{n+p}{n}.$$

Desse modo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n}.$$

Pelo Teorema das colunas, sabemos que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1},$$

e, pelo Teorema dos binomiais complementares, temos

$$\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Assim concluímos a justificativa do Teorema das diagonais, provando que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p},$$

como desejado. $\square$

Propriedade 8 (Sequência de Fibonacci no Triângulo Aritmético). (Veja [10]) O número de Fibonacci F_n é obtido como a soma da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Aritmético.

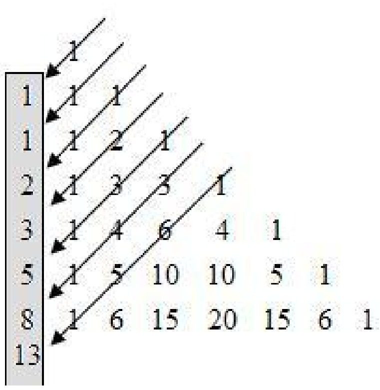

Figura 1.4: Sequência de Fibonacci no triângulo aritmético

Justificativa: Observamos pela figura dada que a soma das "diagonais inversas" gera a sequência $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$. Queremos mostrar que esta é exatamente a sequência de Fibonacci que é definida através da recorrência:

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{para} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Para tanto devemos verificar que esta sequência satisfaz esta recorrência. Comecemos observando o comportamento da formação da sequência, no triângulo de Pascal.

Vemos que:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \binom{0}{0} = 1\\
F_1 &= \binom{1}{0} = 1\\
F_2 &= \binom{2}{0} + \binom{1}{1}\\
F_3 &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1}\\
F_4 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}\\
&\vdots\\
F_n &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k}\\
F_{n+1} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n+1-p}{p}\\
F_{n+2} &= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n+2-s}{s}
\end{aligned}$$

onde k, p e s são os maiores números inteiros que satisfazem

$$\left\{\begin{array}{lll} k & \leq & n-k\\ p & \leq & n+1-p\\ s & \leq & n+2-s \end{array}\right. \quad \text{ou seja} \quad \left\{\begin{array}{lllll} k & \leq & n/2 & & \\ p & \leq & (n+1)/2 & & \\ s & \leq & (n+2)/2 & = & (n/2)+1. \end{array}\right.$$

Note que quando n é ímpar temos $k = (n-1)/2$ e $p = (n+1)/2 = (n-1+2)/2 = k+1$. Quando n é par temos que $k = n/2 = p$. Ainda, $s = k+1$ independente da paridade de n. Iremos verificar que a soma de F_n e F_{n+1} é F_{n+2}. Consideremos primeiramente o caso em que n é ímpar.

Neste caso temos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}+F_n &= \binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\ \cdots\ +\binom{n+1-(k+1)}{k+1}\\
&\quad+\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ \cdots\ +\binom{n-k}{k}\\
&= \binom{n+1}{0}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]\\
&\quad+\ \cdots\ +\left[\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k+1}\right].
\end{aligned}$$

Aplicando a relação de Stifel aos números binomiais em cada colchetes vemos que

$$F_{n+1}+F_n=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\ \cdots\ +\binom{n+1-k}{k+1}.$$

Usando o fato de que $s=k+1$ e que todo número binomial com denominador 0 tem o mesmo valor, 1, obtemos

$$F_{n+1}+F_n=\binom{n+2}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\ \cdots\ +\binom{n+2-s}{s}=F_{n+2}.$$

Consideremos agora o caso em que n é par. Já que $k=p$, F_{n+1} e F_n terão o mesmo número de parcelas. Então, como no caso anterior obtemos

$$\begin{aligned}
F_{n+1}+F_n &= \binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\ \cdots\ +\binom{n+1-k}{k}\\
&\quad+\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\ \cdots\ +\binom{n+1-k}{k-1}+\binom{n-k}{k}\\
&= \binom{n+1}{0}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]\\
&\quad+\cdots+\left[\binom{n+1-k}{k-1}+\binom{n+1-k}{k}\right]+\binom{n-k}{k}.
\end{aligned}$$

Novamente aplicando a relação de Stifel aos números binomiais dos colchetes concluímos que

$$F_{n+1}+F_n=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\ \cdots\ +\binom{n+2-k}{k}+\binom{n-k}{k}.$$

Lembrando que $2k = n$ e $s = k+1$ obtemos $n+2-k = n+2-(s-1)$, $n-k = k$ e $n+2-s = 2k+2-s = 2s-s = s$. Daí

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0}, \quad \binom{n+2-k}{k} = \binom{n+2-(s-1)}{s-1}$$

e

$$\binom{n-k}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{s}{s} = \binom{n+2-s}{s}.$$

Portanto $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$, também no caso em que n é par. $\square$

1.4 Somatório

Uma importante ferramenta para a Álgebra é o *somatório* (que é representado pela letra grega maiúscula sigma: Σ), o qual, segundo [6], representa a soma de um certo número de parcelas com alguma característica comum.

O somatório é utilizado com o propósito de representar de forma sucinta uma soma finita ou infinita, que possua uma expressão geral para sua formação. Ele será utilizado mais tarde, quando fizermos a generalização do teorema do desenvolvimento binomial para qualquer potência inteira positiva de n.

Podemos representar, por exemplo, a soma dos n primeiros termos de uma sequência a_n, da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Neste caso, temos que os valores de i variam, desde $i = 1$ (que chamamos de "índice inferior") até $i = n$ (que chamamos de "índice superior"), com i natural.

Vejamos alguns exemplos de aplicação de somatórios:

Exemplo 1: Calcule o valor de:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i^2$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} k!$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Solução:

a)Temos que

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

b) Vamos substituir, na expressão dada, os valores naturais, de $k = 0$ até $k = 4$. Assim, teremos:

$$\sum_{k=0}^{4} k! = 0! + 1! + 2! + 3! + 4!$$

e pelo que foi definido anteriormente sobre fatorial, temos:

$$\sum_{k=0}^{4} k! = 1 + 1 + 2 + 6 + 24 = 34.$$

c) Substituindo, na expressão dada, os valores naturais para n, desde $n = 1$ (índice inferior) até $n = 10$ (índice superior), teremos:

$$\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right).$$

Eliminando os parênteses e cancelando as parcelas opostas, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}.$$

Exemplo 2: Calcule o valor de cada uma das somas:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{19} \binom{n+1}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{p=2}^{10} \binom{p}{2}$

Solução:

a) Pelo "Teorema das linhas", temos que:

$$\sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \cdots + \binom{7}{7} = 2^7 = 128.$$

b) Utilizando o “Teorema das diagonais” e a propriedade dos binomiais complementares, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{19}\binom{n+1}{n} &= \binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{20}{19}\\ &= \binom{21}{19}=\binom{21}{2}=\frac{21.20}{2}=210.\end{aligned}$$

c) Pelo “Teorema das colunas”, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{10}\binom{p}{2} &= \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{10}{2}\\ &= \binom{11}{3}=165.\end{aligned}$$

1.5 Desenvolvimento de $(a+b)^n$

No começo deste capítulo revisamos alguns desenvolvimentos de $(a+b)^n$. Vamos agora observar algumas regularidades desses desenvolvimentos para alguns valores de n:

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \longrightarrow$ 3 termos, os expoentes de a decrescem de 2 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 2;
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \longrightarrow$ 4 termos, os expoentes de a decrescem de 3 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 3;
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \longrightarrow$ 5 termos, os expoentes de a decrescem de 4 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 4.

De acordo com [6], essas observações sugerem que, para a parte literal do desenvolvimento de $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$,

I. $\underbrace{a^nb^0}_{1^{\text{o}}\text{ termo}}\ ;\ \underbrace{a^{n-1}b^1}_{2^{\text{o}}\text{ termo}}\ ;\ \underbrace{a^{n-2}b^2}_{3^{\text{o}}\text{ termo}};\ \cdots\ ;\ \underbrace{a^1b^{n-1}}_{n\text{ - ésimo termo}}\ ;\ \underbrace{a^0b^n}_{(n+1)\text{ - ésimo termo}}$

II. os coeficientes que aparecem nos desenvolvimentos anteriores correspondem, ordenadamente, às linhas do Triângulo de Pascal:

- $(a+b)^1 = 1a + 1b \longrightarrow$ linha 1: 1 1
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \longrightarrow$ linha 2: 1 2 1
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \longrightarrow$ linha 3: 1 3 3 1

Dessa forma, para determinar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$, basta considerar a lina n (linha de numerador n) do triângulo de Pascal.

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{coef. do } 1^{\text{o}} \text{ termo}} \quad \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{coef. do } 2^{\text{o}} \text{ termo}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\text{coef. do n-ésimo termo}} \quad \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{coef. do (n+1)-ésimo termo}}$$

Levando em consideração os coeficientes obtidos em **II** e a parte literal obtida em **I**, podemos, enfim enunciar o Teorema de Newton para o desenvolvimento de $(a+b)^n$, para qualquer número natural n.

1.5.1 Teorema de Newton

Sejam a e b números reais e n um inteiro positivo, então

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Utilizando a notação de somatório, temos que:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.} \tag{1.1}$$

Uma outra forma de provar o Teorema de Newton é a que [10] apresenta:

Justificativa: Temos

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

um produto de n fatores. Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um a ou um b e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de p, $0 \leq p \leq n$, se escolhermos b em p dos parênteses, a será escolhido em $n-p$ dos parênteses e o produto será igual a $a^{n-p}b^p$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{p}$ modos. Então $(a+b)^n$ é uma soma onde há, para cada $p \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\binom{n}{p}$ parcelas iguais a $a^{n-p}b^p$, isto é, exatamente a soma que temos em (1.1). □

Observação importante: O Teorema de Newton também é válido para quando quisermos obter o desenvolvimento de $(a-b)^n$. Neste caso, basta perceber que:

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n.$$

Desse modo, teremos:

$$[a+(-b)]^n = \binom{n}{0}a^n(-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0(-b)^n.$$

Em cada um dos termos do desenvolvimento acima, temos potências do tipo $(-b)^p$, onde:

$$(-b)^p = \begin{cases} b^p, \text{ se p é par} \\ -b^p, \text{ se p é ímpar.} \end{cases}$$

Percebamos que os sinais dos termos do desenvolvimento de $(a-b)^n$ se alternam, a partir do primeiro termo, que é positivo. Sendo assim podemos, também, fazer a representação do desenvolvimento de $(a-b)^n$, utilizando a notação de somatório, obtendo:

$$\boxed{(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.} \tag{1.2}$$

□

Vejamos, agora, alguns exemplos de aplicação do Teorema de Newton para o desenvolvimento de binômios e para o cálculo dos valores de algumas expressões.

Exemplo 1: Utilizando o Teorema de Newton, vamos desenvolver os seguintes binômios:

a) $(x+3)^5$ b) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^6$

Soluções:

a) Temos, para $n = 5$:

$$\begin{aligned}
(x+3)^5 &= \binom{5}{0}.x^5.3^0 + \binom{5}{1}.x^4.3^1 + \binom{5}{2}.x^3.3^2 + \binom{5}{3}.x^2.3^3 \\
&\quad + \binom{5}{4}.x^1.3^4 + \binom{5}{5}.x^0.3^5 \\
&= 1.x^5.1 + 5.x^4.3 + 10.x^3.9 + 10.x^2.27 + 5.x.81 + 1.1.243 \\
&= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243
\end{aligned}$$

b) Para $n = 6$, temos:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6 &= \binom{6}{0}.x^6.\left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1}.x^5.\left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2}.x^4.\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \\
&\quad + \binom{6}{3}.x^3.\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}.x^2.\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}.x^1.\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \\
&\quad + \binom{6}{6}.x^0.\left(-\frac{1}{x}\right)^6 \\
&= x^6 - 6.x^5.\frac{1}{x} + 15.x^4.\frac{1}{x^2} - 20.x^3.\frac{1}{x^3} + 15.x^2.\frac{1}{x^4} - 6.x.\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} \\
&= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Utilizando o Teorema de Newton, prove o "Teorema das linhas" do triângulo de Pascal, ou seja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Solução:

Para provar o teorema da linhas, consideremos o desenvolvimento de $(a+b)^n$, fazendo $a = b = 1$. Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \\ &= \binom{n}{0}.1^n.1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}.1^1 + \cdots + \binom{n}{k}.1^{n-k}.1^k + \cdots + \binom{n}{n}1^0.1^n \end{aligned}$$

Como $1^n = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n},$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3: Calcular os valores da seguintes somas:

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} . \left(\frac{3}{5}\right)^{8-p} . \left(\frac{7}{5}\right)^{p}$

b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{739} (-1)^p . \binom{739}{p} .4^{739-p}.5^p$

c) $$\begin{aligned} X &= (1,3)^5 + 5.(1,3)^4.(1,7) + 10.(1,3)^3.(1,7)^2 + 10.(1,3)^2.(1,7)^3 \\ &\quad +5.(1,3).(1,7)^4 + (1,7)^5. \end{aligned}$$

Soluções:

a) Utilizando o Teorema de Newton (sob a notação de somatório) para o desenvolvimento de $(a+b)^n$, temos:

$$\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} . \left(\frac{3}{5}\right)^{8-p} . \left(\frac{7}{5}\right)^{p} = \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{5}\right)^8 = \left(\frac{10}{5}\right)^8 = 2^8 = 256$$

b) Utilizando o Teorema de Newton (sob a notação de somatório) para o desenvolvimento de $(a-b)^n$, temos:

$$\sum_{p=0}^{739} (-1)^p . \binom{739}{p} .4^{739-p}.5^p = (4-5)^{739} = (-1)^{739} = -1$$

c) Observe que: $5 = \binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ e $10 = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$. Assim:

$$X = \sum_{p=0}^{5} \binom{5}{p} . (1,3)^{5-p} . (1,7)^p \Rightarrow X = (1,3+1,7)^5 = 3^5 = 243.$$

1.5.2 Soma dos coeficientes do desenvolvimento binomial

Vamos levar em consideração os dois desenvolvimentos vistos anteriormente e, em seguida calcular a soma dos coeficientes destes desenvolvimentos.

Vimos que:

$$(x+3)^5 = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243. \tag{1.3}$$

Chamando de $S_{(I)}$ a soma dos coeficiente do desenvolvimento (1.3), teremos:

$$S_{(I)} = 1 + 15 + 90 + 270 + 405 + 243 = 1024.$$

Temos, ainda:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}. \tag{1.4}$$

Chamando de $S_{(II)}$ a soma dos coeficiente do desenvolvimento (1.4), teremos:

$$S_{(II)} = 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0.$$

Porém, esses resultados poderiam ser obtidos sem a necessidade de efetuar o desenvolvimento binomial.

Como estamos interessados na soma dos coeficientes do desenvolvimento binomial, basta considerar que as variáveis do binômio são todas iguais a 1, e, em seguida, resolver as operações indicadas, tendo em vista que a soma dos coeficientes de um polinômio $P(x)$ é o valor numérico deste polinômio, para $x = 1$. Desse modo, $S_{(I)}$ e $S_{(II)}$ poderiam ser calculadas da seguinte forma:

$$S_{(I)} = (1+3)^5 = 4^5 = 1024 \qquad \text{e} \qquad S_{(II)} = \left(1^2 - \frac{1}{1}\right)^6 = (1-1)^6 = 0.$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação a seguir.

Exemplo 1: Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de:

a) $(2x^3 + 3y^2)^4$ b) $\left(3x^5 - \dfrac{4}{x}\right)^{341}$ c) $\left(\dfrac{2ab^5}{7} - \dfrac{9c^3}{7}\right)^{586}$

Solução:

a) $S = (2.1^3 + 3.1^2)^4 = (2+3)^4 = 5^4 = 625$

b) $S = \left(3.1^5 - \dfrac{4}{1}\right)^{341} = (3-4)^{341} = (-1)^{341} = -1$

c) $S = \left(\dfrac{2.1.1^5}{7} - \dfrac{9.1^3}{7}\right)^{586} = \left(\dfrac{2}{7} - \dfrac{9}{7}\right)^{586} = \left(\dfrac{-7}{7}\right)^{586} = (-1)^{586} = 1.$

Exemplo 2: Sendo 1024 a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(5x-1)^n$, determine a quantidade de termos do desenvolvimento deste binômio.

Solução: Sabemos que o desenvolvimento de $(a+b)^n$ possui, exatamente, $n+1$ termos, portanto, vamos primeiramente calcular o valor de n. Sendo S a soma dos coeficientes do desenvolvimento de binômio dado, temos que $S = 1024$, portanto:

$$1024 = S = (5.1 - 1)^n \Rightarrow 4^n = 1024 \Rightarrow n = 5.$$

Logo, o desenvolvimento do binômio dado possui $n + 1 = 5 + 1 = 6$ termos.

1.6 Termo geral do binômio

Às vezes estamos interessados em conhecer um termo específico do desenvolvimento binomial sem necessariamente escrever todos os termos deste desenvolvimento. Para tanto faz-se necessário que encontremos uma expressão que nos forneça qualquer termo de $(a+b)^n$. Vamos, novamente, observar o comportamento do desenvolvimento de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n b^0}_{1^o\ \text{termo}(T_1)} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{2^o\ \text{termo}(T_2)} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{3^o\ \text{termo}(T_3)} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}a^0 b^n}_{\text{(n+1)-ésimo termo}(T_{n+1})}.$$

Assim, temos:

$$\begin{array}{lcl} 1^o\ \text{termo} & \longrightarrow & T_1 = \binom{n}{0}a^n b^0 \\ 2^o\ \text{termo} & \longrightarrow & T_2 = \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 \\ 3^o\ \text{termo} & \longrightarrow & T_3 = \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \\ & \vdots & \\ \text{(p+1)-ésimo termo} & \longrightarrow & T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}b^p. \end{array}$$

Podemos, sem perda de generalidade, também encontrar a expressão que nos fornece qualquer termo do desenvolvimento de $(a-b)^n$, seguindo a mesma linha de raciocínio acima descrita.

Em resumo, temos que o termo geral do desenvolvimento binomial é dado por:

$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}b^p}$; para o desenvolvimento de $(a+b)^n$;

ou

$\boxed{T_{p+1} = (-1)^p\binom{n}{p}a^{n-p}b^p}$; para o desenvolvimento de $(a-b)^n$.

Vejamos a seguir alguns exemplos de aplicação da expressão que fornece o termo geral do desenvolvimento binomial.

Exemplo 1: Calcule o 5º termo do desenvolvimento de $(x+2)^5$.

Solução: Como o problema especifica a posição do termo que devemos encontrar

(5^o termo), então já definimos de imediato o valor $p = 4$ que será usado na expressão do termo geral. Desse modo:

$$T_{4+1} = \binom{5}{4} x^{5-4} 2^4 = 5.x.16 \Rightarrow T_5 = 80x.$$

Exemplo 2: Determine o 4^o termo do desenvolvimento de $(3a-1)^6$.

Solução: Do enunciado do problema, definimos $p = 3$. Utilizando a expressão do termo geral para o desenvolvimento de $(a-b)^n$, vem que:

$$T_{3+1} = (-1)^3 \binom{6}{3} (3a)^{6-3} 1^3 = -1.20.27a^3.1 \Rightarrow T_4 = -540a^3.$$

Exemplo 3: No desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^8$, determine o termo central.

Solução: Como o desenvolvimento de $(a+b)^n$, possui, exatamente, $n+1$ termos, então o mesmo só terá termo central(médio) se n for par. A posição do termo central do desenvolvimento binomial é definida pela expressão $\dfrac{n}{2} + 1$. Desse modo, o termo central do desenvolvimento do binômio em questão será o 5^o termo, pois: $\dfrac{8}{2} + 1 = 5$. Definida a posição do termo central, teremos também definido que $p = 4$. Portanto, substituindo os valores na expressão do termo geral, vem:

$$T_{4+1} = \binom{8}{4} \left(x^2\right)^{8-4} \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 70.x^8.\frac{1}{x^4} \Rightarrow T_5 = 70x^4.$$

Exemplo 4: Calcule o termo em x^4 no desenvolvimento de $\left(2x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^8$.

Solução: Como $n = 8$, sabemos que o desenvolvimento do binômio dado acima terá, exatamente, 9 termos. A princípio não podemos definir o valor de p, pois não sabemos a "posição" ocupada pelo termo em x^4. Aplicando a expressão do termo geral, temos:

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{n}{p} a^{n-p} b^p \\ &= \binom{8}{p} (2x^3)^{8-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p \\ &= \binom{8}{p} 2^{8-p} x^{24-3p} \left(\frac{1}{x^p}\right) \\ &= \binom{8}{p} 2^{8-p} x^{24-4p}. \end{aligned}$$

Como o problema pede para que calculemos o termo em x^4, devemos fazer o expoente de x igual a 4. Assim: $24 - 4p = 4 \Rightarrow p = 5$. Substituindo na expressão do termo geral, temos:

$$T_{5+1} = \binom{8}{5} 2^3 x^4 = 56.8.x^4 \Rightarrow T_6 = 448x^4.$$

Exemplo 5: Determine, caso exista, o termo independente de x do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x}\right)^{18}$.

Solução: A princípio, não sabemos a "posição" ocupada pelo termo independente de x no referido desenvolvimento, portanto, ainda não podemos definir o valor de p. Vamos substituir na expressão do termo geral, apenas os valores que conhecemos da expressão dada.

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p \\ &= (-1)^p \binom{18}{p} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-p} (\sqrt[4]{x})^p \\ &= (-1)^p \binom{18}{p} (x^{-2})^{18-p} \left(x^{1/4}\right)^p \\ &= (-1)^p \binom{18}{p} x^{2p-36} x^{p/4} \\ &= (-1)^p \binom{18}{p} x^{(9p/4)-36}. \end{aligned}$$

É sabido que o termo independente de x é àquele que possui grau 0 (termo em x^0). Igualando o expoente de x a 0, teremos: $\frac{9p}{4} - 36 = 0 \Rightarrow p = 16$. Substituindo na expressão do termo geral, vem:

$$T_{16+1} = (-1)^{16} \binom{18}{16} x^0 \Rightarrow T_{17} = 153.$$

Capítulo 2

Aplicações do Binômio de Newton

Veremos no transcorrer deste capítulo algumas aplicações do desenvolvimento binomial e de suas respectivas propriedades operatórias em problemas diversos de Matemática e de outras áreas de conhecimento, o que tornará ainda mais relevante o conhecimento sobre Binômio de Newton.

2.1 Expansão Multinomial - Polinômio de Leibniz

Acabamos de ver algumas propriedades que tornam possível fazer o desenvolvimento binomial para qualquer potência natural n. Agora vamos utilizar raciocínio semelhante para obter o desenvolvimento de qualquer polinômio do tipo $(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Segundo [10], podemos obter uma generalização da fórmula do binômio.

Teorema 4 *: Considere os números reais x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_p e um número natural n. Então*

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\cdots\alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$$

estendendo-se o somatório a todos os valores naturais de α_1, α_2, ..., α_p tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$.

Justificativa:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = (x_1 + \cdots + x_p)\,.\,(x_1 + \cdots + x_p) \cdots (x_1 + \cdots + x_p)\,.$$

O termo genérico do produto é obtido escolhendo-se em cada parênteses um x_i e multiplicando-se os escolhidos. Ora, se em α_1 dos parênteses escolhermos x_1, em α_2 dos parênteses escolhermos x_2, etc... obteremos

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}\,(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \quad \text{naturais e} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n)\,.$$

O termo $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece tantas vezes quantos são os modos de escolhermos nos n parênteses α_1 deles para pegarmos o x_1 para fator, α_2 dentre os que sobraram para pegarmos o x_2 como fator, etc... ; mas isso pode ser feito de

$$\binom{n}{\alpha_1} . \binom{n - \alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{n - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!}$$

modos. Logo, $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece no desenvolvimento $\dfrac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!}$ vezes. □

Exemplo 1: Efetue o desenvolvimento de $(x^2 + 2x - 1)^4$.

Solução: Pela expansão multinomial temos

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x - 1)^4 &= \sum \frac{4!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} (x^2)^{\alpha_1} (2x)^{\alpha_2} (-1)^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{24}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} 2^{\alpha_2} (-1)^{\alpha_3} x^{2\alpha_1 + \alpha_2}, \end{aligned}$$

onde α_1, α_2, α_3 são números naturais tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4$.

A seguir temos uma tabela dos possíveis valores de α_1, α_2, α_3 e os correspondentes termos do desenvolvimento.

α_1	α_2	α_3	T
4	0	0	x^8
0	4	0	$16x^4$
0	0	4	1
3	1	0	$8x^7$
3	0	1	$-4x^6$
1	0	3	$-4x^2$
1	3	0	$32x^5$
0	1	3	$-8x$
0	3	1	$-32x^3$
2	1	1	$-24x^5$
1	2	1	$-48x^4$
1	1	2	$24x^3$
2	2	0	$24x^6$
2	0	2	$6x^4$
0	2	2	$24x^2$

Efetuando a soma e fazendo a redução dos termos semelhantes, temos:
$(x^2+2x-1)^4 = x^8+8x^7+20x^6+8x^5-26x^4-8x^3+20x^2-8x+1.$

Exemplo 2: Determine o coeficiente do termo em x^5 do desenvolvimento de $(1+x+x^2)^{10}$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{10} &= \sum \frac{10!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(1)^{\alpha_1}(x)^{\alpha_2}(x^2)^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{10!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}x^{\alpha_2+2\alpha_3},\end{aligned}$$

onde, para que o expoente de x seja 5, devemos ter

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 10$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 = 5.$$

As soluções possíveis são

α_1	α_2	α_3	T
7	1	2	$360x^5$
6	3	1	$840x^5$
5	5	0	$252x^5$

Somando, o termo em x^5 será, portanto, $1452x^5$. Logo o coeficiente do termo em x^5 é 1452.

2.2 Probabilidades - Método Binomial

O método binomial é uma técnica utilizada para calcular probabilidades em experimentos que se tratam de uma sequência de tentativas independentes, de modo que a probabilidade de um certo resultado em cada uma dessas tentativas, tanto independe do resultado obtido nas tentativas anteriores, quanto independe dos resultados das tentativas posteriores. Em cada uma dessas tentativas pode ocorrer apenas dois resultados, os quais chamaremos de sucesso ou fracasso. Indicando por p a probabilidade de ocorrer sucesso em uma certa tentativa, então a probabilidade de obter fracasso nesta é $q = 1 - p$. Estes experimentos são conhecidos como "Ensaios de Bernoulli", pois, segundo [5], os primeiros estudos a esse respeito devem-se a Jacques Bernoulli, matemático do século XVII.

Vejamos a seguir alguns exemplos de ensaio de Bernoulli:

- Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada um dos lançamentos é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: *cara* ou *coroa*. Consideremos *sucesso* o resultado *cara* e *fracasso* o resultado *coroa*. Em cada um dos ensaios, $p = \dfrac{1}{2}$ e $q = \dfrac{1}{2}$.

- Uma urna contém 3 cartões pretos e 7 cartões brancos. Um cartão é retirado ao acaso, sua cor é observada e o mesmo é devolvido para a urna; este procedimento é repetido 6 vezes. Cada uma dessas extrações é um ensaio de Bernoulli, pois apenas dois resultados podem ocorrer: *cartão preto* ou *cartão branco*. Consideremos *sucesso* o resultado *cartão preto* e *fracasso* o resultado *cartão branco*. Em cada caso $p = \dfrac{3}{10}$ e $q = \dfrac{7}{10}$.

Problemas desse tipo podem ser resolvidos utilizando o desenvolvimento binomial como, por exemplo, no caso do primeiro, onde foram realizados 5 lançamentos. Se quisermos saber a probabilidade de obtermos 2 *caras(K)* e 3 *coroas(C)*, o cálculo dessa probabilidade seria iniciado com o desenvolvimento de $(K + C)^5$, onde K é a probabilidade de obtermos cara em qualquer lançamento, C é a probabilidade obtermos coroa e, pelo fato de serem 5 lançamentos, fazemos o desenvolvimento do binômio com expoente 5. Desse modo teríamos:

$$(K + C)^5 = K^5 + 5K^4C + 10K^3C^2 + \underbrace{10K^2C^3}_{\text{valor procurado}} + 5KC^4 + C^5.$$

Substituindo $K = \dfrac{1}{2}$ e $C = \dfrac{1}{2}$, vem:

$$P = 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Este processo, porém, se torna muito complicado quando a quantidade de ensaios passa a ser cada vez maior, se tornando inviável sua aplicação. Antes de enunciar um teorema que possibilite resolver problemas como o que foi descrito acima, vamos, primeiramente, entender a "regra do produto" no cálculo de probabilidades.

Segundo [3], se um acontecimento é composto de eventos sucessivos e independentes, de tal modo que:

o primeiro evento é A e a sua probabilidade é p_1,
o segundo evento é B e a sua probabilidade é p_2,
o terceiro evento é C e a sua probabilidade é p_3,

$$\vdots$$

o k-ésimo evento é K e a sua probabilidade é p_k,

então a probabilidade P de que os eventos A, B, C, $\ldots$, K ocorram, nesta ordem é:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

Enunciaremos agora o teorema que facilita o cálculo da probabilidade em experimentos nos quais acontecem, a cada tentativa, ensaios de Bernoulli.

Teorema Binomial das Probabilidades: *A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n ensaios independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é p, é*

$$P = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}.$$

Justificativa: Segundo [10], o problema que queremos resolver é o seguinte: *Qual é a probabilidade de obtermos k sucessos nessas n provas(ensaios)?* Consideremos que a probabilidade de nessas n provas obtermos k *sucessos*(S) e, consequentemente, $n-k$ *fracassos*(F) em uma ordem predeterminada, por exemplo, os *sucessos* nas k primeiras provas e os *fracassos* nas demais

$$\underbrace{SSS...S}_{k \text{ vezes}}\underbrace{FFF...F}_{n-k \text{ vezes}}$$

é

$$P = \underbrace{ppp...p}_{k \text{ fatores}} . \underbrace{(1-p)(1-p)...(1-p)}_{n-k \text{ fatores}} = p^k(1-p)^{n-k},$$

pois as provas são independentes.

A probabilidade de obtermos k *sucessos* e $n-k$ *fracassos* em qualquer ordem é $p^k(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordens possíveis que é dado pela combinação de n resultados com k resultados de *sucesso* e, consequentemente, $n-k$ resultados de *fracasso*: $C_{n,k} = C_{n,n-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$. Desse modo terminamos a prova do "**Teorema Binomial das Probabilidades**". □

Vejamos a seguir alguns exemplos de aplicação do Teorema Binomial das Probabilidades.

Exemplo 1: Lançando uma moeda não-viciada 10 vezes, qual a probabilidade de obtermos exatamente 4 caras?

Solução: Fazendo *sucesso* = cara, temos $p = \dfrac{1}{2}$ em cada ensaio(lançamento) e os ensaios são independentes. Queremos determinar a probabilidade de $k = 4$ *sucessos* em $n = 10$ ensaios. Pelo Teorema Binomial, temos:

$$P = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}.$$

Exemplo 2: Consideremos que a chance de um atirador acertar o alvo quando o mesmo efetua um disparo é de 60%. Se este atirador efetuar 7 disparos, qual a probabilidade de ele acertar o alvo 3 vezes?

Solução: Fazendo *sucesso* = acertar, temos $p = 60\% = \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$ em cada ensaio (disparo) e os ensaios são independentes. Vamos determinar a probabilidade de $k = 3$ *sucessos* em $n = 7$ ensaios. Aplicando o Teorema Binomial, vem:

$$P = \binom{7}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{15120}{78125} \approx 0,1935 \approx 19,35\%$$

Exemplo 3: [10] Um aluno marca ao acaso as respostas em um teste múltipla-escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão. Qual a probabilidade dele acertar:

a) exatamente 4 questões?

b) pelo menos 4 questões?

Solução: Considerando *sucesso* = acerto, temos $p = \dfrac{1}{5}$ em cada ensaio(questão), e os ensaios são independentes. Chamemos de P_k a probabilidade dele acertar k questões, ou seja, dele obter k *sucessos* em $n = 10$ ensaios. Aplicando o Teorema Binomial,

$$P_k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\frac{4^{10-k}}{5^{10}}.$$

a) A probabilidade dele acertar exatamente $k = 4$ questões é:

$$P_4 = \binom{10}{4}\frac{4^{10-4}}{5^{10}} = \frac{172032}{1953125} \approx 0,088.$$

b) A probabilidade dele acertar pelo menos 4 questões é:

$$\begin{aligned} P_{(4\leq k\leq 10)} &= 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 \\ &= 1 - \binom{10}{0}\frac{4^{10}}{5^{10}} - \binom{10}{1}\frac{4^{9}}{5^{10}} - \binom{10}{2}\frac{4^{8}}{5^{10}} - \binom{10}{3}\frac{4^{7}}{5^{10}} \\ &= \frac{1180409}{9765625} \approx 0,121. \end{aligned}$$

2.3 Binômio de Newton aplicado à Genética

Conhecer o triângulo de Pascal e algumas de suas propriedades, como também o desenvolvimento binomial é de fundamental importância para o estudo de Genética, uma vez que os cálculos de probabilidades feitos em genética são em sua maioria voltados à experimentos binomiais. Segundo [9], a Genética é a área da Biologia que estuda a transmissão do material genético ao longo das gerações, a natureza química do material hereditário e seu modo de ação. Esse material genético (DNA) comporta as características hereditárias, que são passadas de geração em geração, as quais são responsáveis pelas semelhanças entre indivíduos de uma mesma espécie.

Comecemos analisando os casos de herança quantitativa, que se trata de um caso de interação gênica especial. Este tipo de interação estuda, segundo [11], caracteres de variação **contínua**, como a estatura na espécia humana, a cor da pele, a inteligência, a produtividade de leite no gado, a produção de ovos pelas galinhas e a de sementes ou frutos pelas plantas. Ainda segundo [11], na herança quantitativa, os caracteres variam de forma suave. Há muitos fenótipos intermediários. Entre indivíduos com 1,50 m de altura e outros com 2,10 m, há um grande número de fenótipos possíveis: 1,51 m, 1,52 m, ..., 1,76 m, 1,77 m, etc.

Vamos analisar o caso da cor da pele. Admitamos que a quantidade de melanina produzida dependa de dois pares de genes, que se segregam de forma independente. Imagine que qualquer um dos alelos (A ou B) acrescente ao fenótipo básico a mesma quantidade de melanina, sendo chamados de "genes aditivos", enquanto os genes (a ou b) nada acrescentam ao fenótipo básico.

Vejamos os possíveis genótipos e fenótipos correspondentes na tabela abaixo:

Genótipos	**Fenótipos**	**Nº de genes aditivos**
AABB	Negro	4
AABb e AaBB	Mulato escuro	3
AAbb, aaBB, AaBb	Mulato médio	2
Aabb e aaBb	Mulato claro	1
aabb	Branco	0

Observação importante: Na herança quantitativa o número de fenótipos é igual ao número de genes "+1" . Inversamente, se soubermos o número de fenótipos de um caso de herança quantitativa, então o número de genes envolvidos será igual ao número de fenótipos "−1".

Vejamos agora o cruzamento entre dois heterozigotos AaBb x AaBb:

Gametas	**AB**	**Ab**	**aB**	**ab**
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	Aabb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
ab	AaBb	Aabb	aaBb	aabb

Observamos que aparecem todos os fenótipos possíveis, do branco ao negro. Note que a menor proporção obtida é sempre a dos fenótipos extremos: $\frac{1}{16}$ de negros (**AABB**) e $\frac{1}{16}$ de brancos (**aabb**), sendo que os indivíduos intermediários, mulatos médios (**AAbb, aaBB, AaBb**), aparecem em maior proporção: $\frac{6}{16}$. Estes fenótipos se distribuíram segundo os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton $(p+q)^n$, em que p representa os genes aditivos (A e B), q representa os genes que não condicionaram acréscimo ao fenótipo (a e b) e n representa o número de genes envolvidos($n = 4$).

Desse modo, temos: $(p+q)^4 = 1p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + 1q^4$.

Ou seja:

Número de indivíduos	**Fenótipo**	**N° de genes aditivos**
1	Negro	4
4	Mulato escuro	3
6	Mulato médio	2
4	Mulato claro	1
1	Branco	0

Sendo assim, para calcular o número total de indivíduos (combinações) na prole resultante do cruzamento de heterozigotos para k pares de alelos ($n = 2k$ genes envolvidos), basta fazer a soma dos elementos da linha n do triângulo de Pascal que, segundo a propriedade da soma dos elementos de uma certa linha n é dada por

2^n. Cada linha do triângulo de Pascal corresponde à distribuição fenotípica da prole resultante do cruzamento entre indivíduos heterozigotos. No caso do exemplo dado acima, temos um total de: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$ indivíduos.

Exemplo:[11] Numa determinada espécie vegetal, a altura do pé varia de 150 cm a 180 cm, de 5 em 5 cm. Sabendo que se trata de um caso de herança quantitativa, responda:

a) Quantos pares de genes estão envolvidos nessa herança?

b) Quais são os genótipos dos indivíduos com fenótipos extremos?

c) Qual é o resultado fenotípico (altura) do cruzamento entre dois tipos extremos?

d) Qual o número de indivíduos (combinações), resultantes do cruzamento de dois heterozigotos?

e) Se dois heterozigotos forem cruzados entre si, que proporções fenotípicas se esperam?

Solução:

a) Como foi visto, o número de genes é igual ao número de fenótipos "-1"; é útil, portanto, determinar primeiro os fenótipos, que variam de 5 em 5 cm. Serão eles: 150 cm, 155 cm, 160 cm, 165 cm, 170 cm, 175 cm, 180 cm. Há, portanto, 7 fenótipos possíveis; assim, o número de genes envolvidos é $n = 6$ (3 pares).

b) Para o fenótipo de 150 cm, o genótipo é: aabbcc. Para o fenótipo de 180 cm, o genótipo é: AABBCC.

Repare que cada gene (A,B ou C) acrescenta 5 cm ao fenótipo básico de 150 cm.

c) Cruzam-se os indivíduos AABBCC e aabbcc. Obtemos como resultado indivíduos AaBbCc, portanto triíbridos com 3 genes aditivos, que acrescentarão 15 cm(3x5 cm) ao fenótipo básico. Esses indivíduos terão, assim, 165 cm.

d) Para saber o número de indivíduos, recorremos à linha "linha 6" ($n = 6$) do triângulo de Pascal, portanto:

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de indivíduos} = 2^n = 2^6 = 64.$$

e) O cruzamento entre dois heterozigotos produzirá todas as classes fenotípicas existentes. Para saber as proporções, basta recorrer aos elementos da "linha 6" do triângulo de Pascal. Teremos então:

Altura	150 cm	155 cm	160 cm	165 cm	170 cm	175 cm	180 cm
Proporção	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

2.4 Séries Binomiais

Antes de chegar à definição de série binomial, primeiramente temos que entender o que é uma série. Segundo [12], se tentarmos somar todos os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtemos heuristicamente uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n.$$

Definição 5 *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, denote por* s_n *sua* n*-ésima soma parcial:*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente, ou seja, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é dita ***convergente****, e escrevemos*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad ou \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

O número s é chamado ***soma*** *da série. Caso contrário, a série é dita* ***divergente****.*

Desse modo, a soma de uma série é o limite da sequência formada pelas somas parciais, ou seja, somando um número suficientemente grande de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s.

Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}; \quad a \neq 0.$$

Essa série é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$. Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Geralmente não é tão simples calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$, portanto dispomos de alguns testes que nos permitem determinar se uma série é convergente ou divergente, sem necessariamente ter que encontrar sua soma. Para efeito de nosso estudo vamos entender um desses testes que é chamado de "Teste da razão".

Iniciemos com qualquer série $\sum a_n$, onde podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são valores absolutos dos termos da série original.

Definição 6 *Uma série $\sum a_n$ é dita* ***absolutamente convergente*** *se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.*

Um exemplo de série absolutamente convergente é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

pois

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

é uma p-série convergente ($p = 2$).

Com esses elementos chegamos ao teste que é muito útil para casos em que queremos determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e, portanto, converge.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o Teste da Razão não é conclusivo; isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

Observação: A demonstração deste resultado pode ser vista pelo leitor nas pág. 679 e 680 de [12].

Uma outra definição importante para podermos entender as séries binomiais é a definição de séries de potências.

Segundo [12], uma **série de potências** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e $c_n's$ são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixo a série passa a ser apenas de constantes e pode ser testada quanto a convergência ou divergência.

Quando a série é do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

ela é chamada de **série de potências em** $(x-a)$ ou **série de potências centrada em** a ou, ainda, **série de potências em torno de** a. Observe que, neste caso, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e assim a série de potências sempre converge quando $x = a$.

Teorema 7 *Para uma dada série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, *existem apenas três possibilidades:*
(i) A série converge apenas quando $x = a$.
(ii) A série converge para todo x.
(iii) Existe um número positivo R *tal que a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$.

Por [12] o número R em (iii) é chamado de **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii). O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x-a| < R$ pode ser escrita como $a-R < x < a+R$. Quando x é *extremidade* do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer – a série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R]\,.$$

Vamos agora investigar quais funções têm representações em séries de potência. Comecemos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \tag{2.1}$$

para $|x-a|<R$.

Agora vamos determinar quais coeficientes c_n devem aparecer nos termos de f. Perceba que se colocarmos $x=a$ na equação acima, os termos depois do primeiro ficam todos iguais a 0, obtendo

$$f(a)=c_0.$$

Derivando a equação (2.1) termo a termo (pelo Teorema 15), obtemos:

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+\cdots \tag{2.2}$$

para $|x-a|<R$, e substituindo $x=a$ na equação (2.2), teremos

$$f'(a)=c_1.$$

Agora vamos derivar ambos os lados da equação (2.2), obtendo

$$f''(x)=2c_2+2.3c_3(x-a)+3.4c_4(x-a)^2+\cdots \tag{2.3}$$

para $|x-a|<R$ e, mais uma vez substituindo $x=a$ na equação (2.3), temos

$$f''(a)=2c_2.$$

Aplicando o procedimento novamente, a derivação da equação (2.3) resulta

$$f'''(x)=2.3c_3+2.3.4c_4(x-a)+3.4.5c_5(x-a)^2+\cdots \tag{2.4}$$

para $|x-a|<R$ e, substituindo $x=a$ na equação (2.4), obtemos

$$f'''(a)=2.3c_3=3!c_3.$$

Desse modo podemos observar o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x=a$, obteremos

$$f^{(n)}(a)=2.3.4.\cdots.nc_n=n!c_n.$$

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n nessa equação, teremos

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Essa fórmula permanece válida mesmo para $n = 0$ se forem adotadas as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Desse modo demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 8 *Se f tiver uma representação em série de potências em a, isto é, se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad \textit{para} \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, percebemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Essa série encontrada é chamada **série de Taylor da função f em a** (ou **em torno de a** ou **centrada em a**).

Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Segundo [12], esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**. Desse modo mostramos que, se f puder ser representada como uma série de potências em torno de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor.

Nota: De acordo com [12], a série de Taylor recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Brook Taylor (1685 - 1731) e a série de Maclaurin tem esse nome em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698 - 1746), apesar do fato de a série de Maclaurin ser apenas um caso especial da série de Taylor. Mas a ideia da representação de funções particulares como somas de séries de potências remonta a Newton, e a série de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory em 1668 e pelo matemático suíço John Bernoulli na década de 1690. Taylor aparentemente não sabia do trabalho de Gregory e Bernoulli quando publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro *Methodus incrementorum directa et inversa*. A série de Maclaurin recebeu essa denominação por causa de Colin Maclaurin, que a popularizou em seu livro-texto de cálculo *Treatise of Fluxions*, publicado em 1742.

Vamos agora determinar a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer. Temos:

$f(x) = (1+x)^k$	$f(0) = 1$
$f'(x) = k(1+x)^{k-1}$	$f'(0) = k$
$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2}$	$f''(0) = k(k-1)$
$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}$	$f'''(0) = k(k-1)(k-2)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n}$	$f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$

Desse modo, temos que a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$$

Essa série é chamada **série binomial**. Escrevendo $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right| \\ &= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teste da Razão, a série binomial converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} \tag{2.5}$$

e estes são chamados **coeficientes binomiais**.

Teorema 9 *(O Teorema Binomial-Generalizado) Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então*
$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Este teorema afirma que $(1+x)^k$ é igual à soma de sua série de Maclaurin.

Justificativa: Para demonstrar este teorema vamos seguir alguns passos (de acordo com [12]).

1º passo: Pelo que vimos acima a série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$ é convergente para $|x| < 1$. Definindo $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$, afirmamos que para $|x| < 1$, tem-se $g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x}$. De fato, segue da definição dos coeficientes binomiais dada em (2.5) e do Teorema 15 que g é derivável e que

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n-1}.$$

Então:
$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n}. \end{aligned}$$

Substituindo n por $n+1$ na primeira série, teremos:

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}x^n + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n)\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}\right]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}[(k-n)+n]x^n \\
&= k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)}{n!}x^n \\
&= k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = kg(x).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $g'(x) = \dfrac{kg(x)}{1+x}$.

2º passo: Definindo $h(x) = (1+x)^{-k}g(x)$ afirmamos que $h'(x) = 0$ em $(-1,1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
h(x) &= (1+x)^{-k}g(x) \Rightarrow \\
h'(x) &= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + (1+x)^{-k}g'(x) \quad [\textit{por } (\text{A.2})] \\
&= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + (1+x)^{-k}\frac{kg(x)}{1+x} \\
&= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + k(1+x)^{-k-1}g(x) = 0.
\end{aligned}$$

3º passo: Por fim, vamos deduzir que $g(x) = (1+x)^k$. Devemos observar que, no "2º passo", $h(x)$ deve ser constante para $x \in (-1,1)$, como temos no Teorema 13. Desse modo $h(x) = h(0) = 1$ para $x \in (-1,1)$. Logo,

$$h(x) = 1 = (1+x)^{-k}g(x) \Leftrightarrow g(x) = (1+x)^k \quad \text{para} \quad x \in (-1,1),$$

terminando, assim, a prova do Teorema Binomial. □

A seguir temos exemplos de aplicação do Teorema Binomial para expandir funções como uma série de potências.

Exemplo 1: Usando a série binomial, expanda cada uma das funções abaixo como séries de potências e em seguida determine o raio de convergência.

a) $\sqrt{1+x}$ b) $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

Solução:

a) Temos aqui $k = 1/2$, portanto, segue pelo Teorema 9:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} x^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2.2!} + \frac{1.3.x^3}{2^3.3!} - \frac{1.3.5.x^4}{2^4.4!} + \cdots \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}.1.3.5.\cdots.(2n-3)x^n}{2^n.n!},
\end{aligned}$$

para $|x| < 1$, portanto $R = 1$.

b) Temos que:

$$\frac{1}{(2+x)^3} = \frac{1}{[2(1+x/2)]^3} = \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3}.$$

Pelo Teorema 9, temos:

$$\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

O coeficiente binomial é:

$$\begin{aligned}
\binom{-3}{n} &= \frac{(-3)(-4)(-5).\cdots.(-3-n+1)}{n!} = \frac{(-3)(-4)(-5).\cdots.[-(n+2)]}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n.2.3.4.5.\cdots.(n+1)(n+2)}{2.n!} = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{(2+x)^3} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}.\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+4}},$$

para $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$, então $R = 2$.

No exemplo que segue, veremos uma aplicação das séries binomiais para estimar raízes com precisões tão pequenas quanto desejarmos.

Exemplo 2: Utilizando o Teorema Binomial Generalizado, Teorema 9, faça o que se pede.

a) Expanda $1/\sqrt[4]{1+x}$ como uma série de potências.

b) Utilize a parte (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1,1}$ com precisão de três casas decimais.

Solução:

a) Temos que

$$\begin{aligned} 1/\sqrt[4]{1+x} &= (1+x)^{-1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} x^n \\ &= 1 - \frac{1}{4}x + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{4}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1.5.9.\cdots.(4n-3)}{4^n.n!} x^n \end{aligned}$$

b) Do resultado obtido em (a), temos:

$$1/\sqrt[4]{1+x} = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{32}x^2 - \frac{15}{128}x^3 + \frac{195}{2048}x^4 - \cdots$$

Como $1/\sqrt[4]{1,1} = 1/\sqrt[4]{1+0,1}$, temos que $x = 0,1$.

A soma dos quatro primeiros termos é, portanto,

$$1 - \frac{1}{4}(0,1) + \frac{5}{32}(0,1)^2 - \frac{15}{128}(0,1)^3 \approx 0,976$$

O quinto termo é $\dfrac{195}{2048}(0,1)^4 \approx 0,0000095$, o qual não afeta a terceira casa decimal da soma. Desse modo, concluímos que $1/\sqrt[4]{1,1} \approx 0,976$. (Note que a terceira casa decimal da soma dos três primeiros termos é afetada pelo quarto termo, por isso precisamos usar mais de três termos para a soma.)

Apêndice A

Alguns resultados importantes

Trazemos aqui resultados de complementação do texto.

A.1 Axioma da Indução

De acordo com [7], o *axioma da indução* é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais (demonstrações por indução, ou por recorrência). Enunciado sob a forma de propriedades, ele se formula assim:

Definição 10 *Seja* $P(n)$ *uma propriedade relativa ao número natural* n*. Suponhamos que*
i) $P(n_0)$ *é válida, onde* n_0 *é um certo natural inicial;*
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$*, a validez de* $P(n)$ *implica a validez de* $P(n+1)$*, onde* $n+1$ *é o sucessor de* n*.*
Então $P(n)$ *é válida qualquer que seja o número natural* $n \geq n_0$*.*

A.2 Definição de Limite

Dada uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x \in [a,b]$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L se os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente próximos de L quando x se aproxima de x_0.

Segundo [4], é razoável esperar que se f estiver definida em x_0 e for contínua (ver definição de função contínua em [4], pág.60) em x_0, então, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, e reciprocamente. Com isto, podemos enunciar o teorema a seguir.

Teorema 11 *Para toda função polinomial, tem-se que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemplo: Sendo $f(x) = x^2 + 1$, temos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

A.3 Definição de Derivada

Dizemos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in (a,b)$ se existe o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Neste caso denotamos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e dizemos que $f'(x_0)$ é a derivada de f em x_0.

A seguir enunciaremos duas regras básicas para a derivação, as quais vamos aplicar sem demonstração.

- **Regra da soma:** A derivada de uma soma é a soma das derivadas. Mais precisamente, se f e g são funções deriváveis em x então $f + g$ é derivável em x e tem-se

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x). \tag{A.1}$$

- **Regra do produto:** A derivada do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a derivada da primeira função vezes a segunda função. Mais precisamente, se f e g são funções deriváveis em x então o produto $f.g$ é derivável em x e tem-se

$$(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x) \tag{A.2}$$

Vejamos agora o teorema do valor médio, o qual utilizaremos em um resultado a seguir. A demonstração do mesmo pode ser vista pelo leitor na página 460 de [4].

Teorema 12 *(do valor médio - TVM) Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema 13 *Seja f uma função derivável em um certo intervalo I. Se $f'(x) = 0$ em todo x do intervalo I, então existirá uma constante k tal que $f(x) = k$ para todo x em I.*

Justificativa: (Por [4]) Seja x_0 um ponto fixo em I. Vamos provar que, para todo x em I, $f(x) = f(x_0)$, o que significará que f é constante em I. Para todo x em I, $x \neq x_0$, existe, pelo Teorema (12), um $\overline{x}$ pertencente ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\overline{x})(x - x_0).$$

Como $\overline{x}$ é interior a I, pela hipótese $f'(\overline{x}) = 0$, logo

$$f(x) - f(x_0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = f(x_0)$$

para todo x em I. Tomando-se $k = f(x_0)$, resulta o teorema. □

Proposição 1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = n.x^{n-1}$.*

Justificativa: Para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Usando o Teorema de Newton, como visto em (1.1), temos

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} h^p \\ &= x^n + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} h^p \\ &= x^n + h \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} h^{p-1}.\end{aligned}$$

Daí

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} h^{p-1} = n.x^{n-1} + \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} h^{p-1}$$

e

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = n.x^{n-1} + 0 = n.x^{n-1}$$

como queríamos demonstrar. □

Como consequência desta proposição e das regras de derivação, temos o seguinte teorema.

Teorema 14 *Toda função polinomial* $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *é derivável em* $\mathbb{R}$ *e* $f'(x) = n.a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$.

A.4 Derivação de Séries de Potências

Vimos que a soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, cujo domínio é o intervalo de convergência da série. O Teorema a seguir (o qual não faremos demonstração) diz que podemos derivar funções desse tipo, fazendo a derivação de cada termo individual da série, como faríamos para um polinômio. Segundo [12], isso é chamado de **derivação termo a termo**.

Teorema 15 *Se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *tiver um raio de convergência* $R > 0$*, então a função* f *definida por*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

é derivável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ *e*

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}. \tag{A.3}$$

O raio de convergência da série de potências na equação (A.3) *é* R*.*

Ainda segundo [12], embora o teorema acima diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é derivada, isso não significa que o intervalo de convergência permaneça o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em uma extremidade enquanto a série derivada diverge nesse ponto.

A ideia de derivação de uma série de potências termo a termo é base para um método muito eficaz para resolver equações diferenciais.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, Carl B., Merzbach, Uta C. *História da Matemática - Tradução da terceira edição americana.* Ed. Blucher, (2012).

[2] Eves, Howard., *Introdução à História da Matemática*, Ed. UNICAMP, (2008 - 4ª reimpressão).

[3] Giovanni, José Ruy., Bonjorno, José Roberto., *Matemática Completa-2ª Série* – 2. ed. renov. – São Paulo – FTD, 2005.

[4] Guidorizzi, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo, volume 1*– 5. ed. [reimpr.]. – Rio de Janeiro - LTC, 2008.

[5] Hazzan, Samuel., *Fundamentos de Matemática Elementar, 5*, São Paulo - Atual, (2004).

[6] Iezzi, Gelson., Dolce, Osvaldo., Degenszjz, David., Périgo, Roberto. *Matemática: Volume Único*, São Paulo - Atual, (2002).

[7] Lima, Elon Lages., Carvalho, Paulo Cezar Pinto., Wagner, Eduardo., Morgado, Augusto César., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1 - 9.ed.*, Rio de Janeiro - SBM (2006).

[8] Lopes, Luís. *Manual de indução matemática*, Rio de Janeiro - Interciência, (1998).

[9] Lopes, Sônia., Ross, Sergio., *Biologia-Volume único*. São Paulo - Saraiva, (2005-1.ed.).

[10] Morgado, Augusto César., Carvalho, João Bosco Pitombeira de., Carvalho, Paulo Cezar Pinto., Fernandez, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidades*, Rio de Janeiro - SBM (1991).

[11] Silva Júnior, César da., Sasson, Sezar., *Biologia-volume 3-genética, evolução e ecologia*, São Paulo - Saraiva, (2005-7.ed.).

[12] Stewart, James. *Cálculo, volume 2*. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo - Cengage Learning, 2012.