



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

FRANCISCO FELIPE GOMES DA SILVA

UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE ANÁLISE
COMBINATÓRIA

MOSSORÓ

2020

FRANCISCO FELIPE GOMES DA SILVA

UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dra. MARIANA DE BRITO MAIA
Coorientador: Prof. Dr. TONY KLEVERSON NOGUEIRA

MOSSORÓ
2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586e Silva, Francisco Felipe Gomes da.
UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE ANÁLISE
COMBINATÓRIA / Francisco Felipe Gomes da Silva. -
2020.
97 f. : il.

Orientador: Mariana de Brito Maia.
Coorientador: Tony Kleverton Nogueira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Matemática, 2020.

1. Resolução de problemas. 2. OBMEP. 3. Análise
combinatória. I. Maia, Mariana de Brito, orient.
II. Nogueira, Tony Kleverton, co-orient. III.
Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

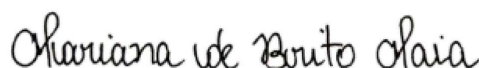
FRANCISCO FELIPE GOMES DA SILVA

UM ESTUDO DAS QUESTÕES DA OBMEP SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

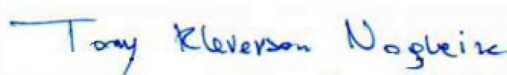
Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Defendida em: 10 / 07 / 2020.

BANCA EXAMINADORA



Mariana de Brito Maia, Prof^ª. Dra. (UFERSA)
Presidente e Orientadora



Tony Kleverton Nogueira, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador Interno à Instituição



Flávio Alexandre Falcão Nascimento, Prof. Dr. (UECE)
Membro Examinador Externo à Instituição



Eudes Mendes Barboza, Prof. Dr. (UFRPE)
Membro Examinador Externo à Instituição

À minha família, Auceliano, Solange, Hanna,
Nando, Charlene e Allana.

AGRADECIMENTOS

A Deus por prover meios suficientes para a realização desse trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais Auceliano Maia e Maria Solange que sempre me apoiaram nessa árdua caminhada.

À minha orientadora Profa. Dra. Mariana de Brito Maia, por se dedicar a realização desse projeto.

Aos meus colegas do PROFMAT pelas amizades ali estabelecidas, em especial aos meus companheiros de viagem, John Nathan e Raul Moésio pelos momentos especiais vividos nessa jornada.

Ao quadro de professores do PROFMAT pela dedicação e conhecimentos repassados ao longo desses dois anos de curso.

À minha companheira de vida, Charlene Silva pelos mais valiosos incentivos pessoais.

À minha filha Allana Maria, pois és o motivo de todas as minhas batalhas bem sucedidas.

*“Disse-lhe Jesus: Eu sou o caminho,
e a verdade e a vida; ninguém vem
ao Pai, senão por mim.”
(Bíblia Sagrada, João 14:6)*

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de formar um material autossuficiente para professores do ensino básico trabalharem, por meio da resolução de problemas e tópicos de contagem. Inicialmente é apresentado um apanhado sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, mostrando alguns de seus principais programas, resultados particulares/locais de estudantes e premiações nacionais para o ano de 2019. Mostramos que a resolução de problemas como prática pedagógica é de fundamental importância para o ensino da matemática, e que, a partir dela, conseguimos atrair a atenção do aluno para os mais diversos desafios matemáticos. Contamos ainda com um capítulo onde são apresentadas todas as questões sobre análise combinatória de primeira fase do nível 3 da OBMEP mostrando todas as soluções oficiais disponibilizadas na página do programa e ainda, sempre que possível, uma solução alternativa, com caminhos e passos a serem seguidos. Para cada um desses problemas é elaborado um pequeno roteiro para o professor, com dicas de resolução, sugestões de problemas mais simples e correlatos ao apresentado. Todo o conteúdo necessário para a resolução das questões está ainda exposto no Capítulo 3 desta dissertação, formando assim um material que servirá de base para professores da educação básica, com foco no ensino médio.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; OBMEP; Análise Combinatória

ABSTRACT

This work has the objective of forming a self-sufficient material for primary school teachers to work, through problem solving and counting topics. Initially, a whole overview of the Brazilian Public Schools Math Olympics – OBMEP - is presented, showing some of its main programs, private/ local student results and national awards for 2019. We show that the problem solving as a pedagogical practice plays an importante role for the teaching of math, and that from it we managed to attract the student's attention to the most diverse mathematical challenges. We also have a chapter where all the questions about combinatorial analysis of the first phase of level 3 of the OBMEP are presented, showing all the official solutions available on the program website and, whenever possible, an alternative solution, with paths and steps to be followed. For each of these problems, a small script for teacher is prepared with tips for solving, suggestions for simpler problems and related to the one presented. All the content needed to resolve the issues is also exposed in Chapter 3 of this dissertation, thus forming material that will serve as a basis for teachers of basic education, focusing on high school.

Keywords: Problem solving; OBMEP; Combinatorial Analysis

Lista de ilustrações

Figura 1 – Medalhas da OBMEP conquistadas por beneficiários do PBF por ano	22
Figura 2 – Distribuição de frequência do resultado da OBMEP 2019 fase 1, EEM. Francisco Jaguaribe	25
Figura 3 – Mesa Triangular	27
Figura 4 – Diagrama de árvore	30
Figura 5 – Contra-exemplo de Martin Gardner	38
Figura 6 – Questão 06 OBMEP 2007	41
Figura 7 – Questão 11 OBMEP 2007	42
Figura 8 – Resolução da questão 11 OBMEP 2007	42
Figura 9 – Questão 20 OBMEP 2007	44
Figura 10 – Resolução 1 da questão 20 OBMEP 2007	44
Figura 11 – Resolução 2 da questão 20 OBMEP 2007	45
Figura 12 – Questão 12 OBMEP 2008	47
Figura 13 – Resolução da questão 12 OBMEP 2008	48
Figura 14 – Questão 17 OBMEP 2009	49
Figura 15 – Resolução 1 da questão 17 OBMEP 2009	49
Figura 16 – Resolução 2 da questão 17 OBMEP 2009	49
Figura 17 – Resolução 1 da questão 04 OBMEP 2011	53
Figura 18 – Resolução 2 da questão 04 OBMEP 2011	53
Figura 19 – Resolução 3 da questão 04 OBMEP 2011	53
Figura 20 – Resolução 4 da questão 04 OBMEP 2011	54
Figura 21 – Questão 20 OBMEP 2011	56
Figura 22 – Questão 18 OBMEP 2012	58
Figura 23 – Resolução da questão 11 OBMEP 2013	59
Figura 24 – Questão 17 OBMEP 2013	60
Figura 25 – Resolução 1 da questão 17 OBMEP 2013	60
Figura 26 – Resolução 2 da questão 17 OBMEP 2013	61
Figura 27 – Problema correlato	62
Figura 28 – Questão 17 OBMEP 2014	64
Figura 29 – Questão 06 OBMEP 2015	67
Figura 30 – Resolução 1 da questão 06 OBMEP 2015	68
Figura 31 – Resolução 2 da questão 06 OBMEP 2015	68
Figura 32 – Resolução 3 da questão 06 OBMEP 2015	69
Figura 33 – Resolução 4 da questão 06 OBMEP 2015	69
Figura 34 – Resolução 5 da questão 06 OBMEP 2015	70
Figura 35 – Resolução 6 da questão 06 OBMEP 2015	70

Figura 36 – Resolução 7 da questão 06 OBMEP 2015	70
Figura 37 – Resolução 1 da questão 02 OBMEP 2016	72
Figura 38 – Resolução 2 da questão 02 OBMEP 2016	72
Figura 39 – Resolução 3 da questão 02 OBMEP 2016	72
Figura 40 – Questão 18 OBMEP 2016	73
Figura 41 – Resolução da questão 18 OBMEP 2016	73
Figura 42 – Resolução 1 da questão 18 OBMEP 2016	74
Figura 43 – Resolução 2 da questão 18 OBMEP 2016	74
Figura 44 – Resolução 3 da questão 18 OBMEP 2016	75
Figura 45 – Questão 19 OBMEP 2016	75
Figura 46 – Resolução da questão 19 OBMEP 2016	76
Figura 47 – Resolução 1 da questão 20 OBMEP 2016	78
Figura 48 – Resolução 2 da questão 20 OBMEP 2016	78
Figura 49 – Questão 20 OBMEP 2017	80
Figura 50 – Exemplo questão 20 OBMEP 2017	80
Figura 51 – Resolução 1 da questão 20 OBMEP 2017	80
Figura 52 – Resolução 2 da questão 20 OBMEP 2017	81
Figura 53 – Questão 10 OBMEP 2018	82
Figura 54 – Resolução da questão 10 OBMEP 2018	83
Figura 55 – Resolução da questão 17 OBMEP 2018	84
Figura 56 – Questão 18 OBMEP 2018	85
Figura 57 – Questão 15 OBMEP 2019	86
Figura 58 – Questão 16 OBMEP 2019	88
Figura 59 – Questão 18 OBMEP 2019	89
Figura 60 – Resolução 1 da questão 18 OBMEP 2019	90
Figura 61 – Resolução 2 da questão 18 OBMEP 2019	90
Figura 62 – Resolução 3 da questão 18 OBMEP 2019	90
Figura 63 – Resolução 4 da questão 18 OBMEP 2019	91
Figura 64 – Resolução 5 da questão 18 OBMEP 2019	91

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	OBMEP E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	21
2.1	Conhecendo a OBMEP	21
2.2	A Resolução de Problemas	25
3	CONTEÚDOS PRELIMINARES	29
4	BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP	39
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS	95

1 Introdução

Apesar de ser uma ciência exata, cujos resultados são apresentados prontos para os estudantes da educação básica, a matemática é considerada por muitos discentes como uma disciplina complicada, de difícil compreensão e aplicação.

Com novos desafios em sala de aula cabe ao professor encontrar novas maneiras de levar o conteúdo ao aluno, de forma que estas barreiras epistemológicas sejam transpostas e o aluno possa construir um conhecimento sólido e significativo, conseguindo por em prática todo o conhecimento adquirido ao longo da vida estudantil.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC, essa competição vem difundir e melhorar a qualidade da matemática no Brasil, além de garimpar jovens talentos que se destacam nas fases do exame.

O primeiro contato dos estudantes com a OBMEP se dá nas turmas de 6^o ano do ensino fundamental onde o aluno realiza o exame de primeira fase do nível um. A princípio, os problemas abordados no exame da OBMEP são considerados pelos estudantes como muito difíceis, pois se tratam de exercícios elaborados e que exigem um raciocínio apurado dos alunos. Podemos verificar que esse pesamento não é novidade para os idealizadores desse exame, visto que segundo a Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (AVALIAÇÃO DE IMPACTO, 2011) “Os pontos negativos apontados concentram-se fortemente na questão do alto nível de exigência da prova frente à situação do ensino público na maioria das escolas.”

Por não serem habituados a esse tipo de problema, muitos alunos não levam a sério a realização dessa prova. Em muitos casos, os candidatos apenas marcam as alternativas das questões sem ler o enunciado ou tentar resolver e ,assim, não conseguem lograr êxito na realização da avaliação.

Muitas vezes a dificuldade apresentada para a resolução das questões motiva os alunos a buscarem cada vez mais sua capacitação pessoal, resolvendo problemas e buscando materiais que os auxiliem, como o banco de questões disponibilizados pela própria OBMEP. Em oposição a essa motivação temos o caso onde a dificuldade acaba por frustrar os alunos, que muitas vezes criam uma aversão a essa prova ou à matemática em geral.

Para Dante, (DANTE, 2010) “Uma das maneiras possíveis de se criar condições

na aula de matemática para que a criatividade emerja e se desenvolva é por meio da formulação e da resolução de problemas que exijam o pensamento produtivo do aluno.”

Para o cenário atual, cabe ao professor buscar meios dinâmicos e interativos de ensino para proporcionar situações que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem. Este material servirá como uma proposta de utilização em sala de aula.

Em nossa prática pedagógica, percebemos que é dada pouca atenção à prova da OBMEP, que os alunos acham a prova chata e difícil, sentem-se desmotivados, e que os resultados são cada vez piores, como os apresentados no final da seção seguinte. Assim, surge a ideia para a criação dessa dissertação.

O presente trabalho tem por objetivo formar um material autossuficiente, direcionado aos professores do Ensino Médio, para auxiliá-los no uso da resolução de problemas como metodologia para o ensino de Análise Combinatória, tendo por base as questões da OBMEP. Assim, são apresentadas as soluções oficiais da OBMEP, soluções alternativas propostas pelo autor e comentários e sugestões sobre o uso de cada questão, além da base matemática necessária às soluções. Neste material, o professor terá acesso tanto a questões mais intuitivas como questões de solução mais formal, bem como sugestões de uso de cada uma delas em sua prática em sala de aula. Podendo adequar seu uso a qualquer ano do ensino médio.

Inicialmente, foram analisadas todas as provas de 1ª fase do nível três da OBMEP das edições de 2005 até 2019 (15 edições da OBMEP), de onde foram retiradas 41 problemas que utilizam análise combinatória ou princípios de contagem em seu enunciado ou solução.

No segundo capítulo deste trabalho conheceremos melhor a prova da OBMEP, mostrando um pouco de sua história, dados e estatísticas. Além de uma introdução à metodologia da resolução de problemas. No terceiro capítulo buscamos apresentar todos os conteúdos que são utilizados para a resolução dos problemas de análise combinatória, que são resolvidos no capítulo quatro desse trabalho. No quarto capítulo elaboramos um banco de questões da OBMEP, com suas respectivas soluções e sugestões de uso.

2 OBMEP e a Resolução de Problemas

2.1 Conhecendo a OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP teve início no ano de 2005 com abrangência de estudantes de 6^o a 9^o ano do ensino fundamental e estudantes do ensino médio. Tem como principais objetivos estimular e promover o estudo da matemática no Brasil, melhorar a qualidade da educação básica, identificar jovens talentos e incentivar o aperfeiçoamento de professores.

A partir da edição de 2017, a OBMEP passa a abranger, além dos estudantes da rede pública de ensino, os estudantes de escolas privadas. As escolas privadas necessitam de custear financeiramente a inscrição para a realização da OBMEP. Com a adesão da OBMEP pela Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM, visando racionalizar gastos e difundir ainda mais a matemática em todo o país, os estudantes com melhores resultados foram convocados para a realização da etapa única da OBM.

Por não conhecerem as vantagens dessa prova, muitos estudantes e professores não dão a atenção necessária a realização dessa competição, em contrapartida, alguns alunos sentem-se estimulados por esses desafios e buscam sempre alcançar melhores resultados nas duas fases desse exame. Mostraremos agora resultados e premiações importantes sobre esse projeto para motivar os participantes durante a sua realização. A OBMEP em 2019 contou com uma abrangência de quase 100 % dos municípios brasileiros, sendo aplicada a 18.158.775 estudantes de escolas públicas e privadas, distribuindo 55.671 premiações para os participantes com os melhores resultados. Ainda no ano de 2019, foram distribuídas o seguinte quantitativo de medalhas ou menções honrosas.

Quantidade de premiações na OBMEP 2019

Premiação	Quantidade
Ouro	579
Prata	1746
Bronze	5183
M. Honrosa	48163
Total	55671

Fonte: Elaborada pelo autor - 2020

Aos medalhistas da OBMEP 2019, matriculados em uma escola pública em 2020,

serão oferecidas 6500 bolsas para participar do Programa de Iniciação Científica Jr - PIC Jr, um programa de capacitação para esses alunos, onde será oferecida a oportunidade de aprofundar o conhecimento dos mesmos. Essa bolsa garantirá a manutenção e permanência dos jovens na vida estudantil provendo meios para que os estudantes possam dedicar-se exclusivamente aos seus estudos.

Um dos principais objetivos da OBMEP é identificar jovens talentos e incentivar o ingresso em cursos universitários nas áreas científicas e tecnológicas, uma vez que a prova é aplicada nos mais remotos municípios do Brasil. Jovens carentes e humildes se destacam a cada ano ganhando uma justa premiação e mostrando para todos que o sonho de ser medalhista é acessível a todos os participantes.

Podemos aqui citar o caso de Luiz Felipe¹ que estreou na competição aos 11 anos e conquistou uma medalha de ouro. Repetiu o feito em todas as outras seis participações na OBMEP. Diz que sempre gostou de Matemática, mas foi com a OBMEP que ela se tornou a disciplina favorita e o transformou em uma promessa na área de Exatas.

Assim como Luiz Felipe, existem outros muitos brasileiros que se destacam na realização da Olimpíada, e esse bom resultado é refletido na boa atuação em outros exames, como o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, Prova Brasil e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA. Segundo Machado e Leo (MACHADO ; LEO, 2014) “o envolvimento com a OBMEP impacta a nota dos alunos em um quarto ou um terço, dependendo do ano, do desvio padrão; impacto este extremamente significativo para uma política educacional.”

Um estudo realizado pelo Ministério do Desenvolvimento Social em parceria com o IMPA buscou quantificar entre os medalhistas da OBMEP(2011 a 2017) os que eram beneficiários do Programa Bolsa Família - PBF, como resultado temos o condensado na figura 1

Figura 1 – Medalhas da OBMEP conquistadas por beneficiários do PBF por ano

Tabela 1 – Medalhas da OBMEP conquistadas por beneficiários do PBF por ano

ANO	OURO	PRATA	BRONZE	TOTAL	MÉDIA DE BENEFICIÁRIOS DO BOLSA FAMÍLIA MEDALHISTAS DA OBMEP POR ANO: 184
2011	5	14	62	81	
2012	13	26	90	129	
2013	11	25	144	180	
2014	9	36	138	183	
2015	22	50	249	321	
2016	25	53	202	280	
2017	8	30	76	114	
TOTAL:	93	234	961	1.288	

Fonte: IMPA, elaboração SAGI/MDS

Fonte: SAGI/MDS

A figura 1 nos mostra que é necessário o investimento em educação, que programas

¹ Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/noticias.DO?id=665>>

sociais trazem bons resultados, tais como as 1288 medalhas vindas de estudantes carentes apresentadas na figura acima, e, ainda, que o retorno vindo da OBMEP é acessível a qualquer estudante independente de sua renda ou classe social.

O Estado do Ceará se destaca nos resultados da OBMEP. Em 2019, considerando apenas o quantitativo de medalhas de ouro, o Estado ocupou a primeira colocação entre as regiões Norte e Nordeste, com 36 medalhas de ouro, ficando nacionalmente atrás apenas do Distrito Federal, Rio Grande do Sul, Rio de Janeiro, Minas Gerais e São Paulo (OBMEP EM NÚMEROS, 2020).

Podemos ainda citar como premiação para os estudantes a Bolsa Instituto TIM, que trata-se de uma parceria entre o Instituto Tim, o IMPA e a OBMEP, onde anualmente são oferecidas 50 bolsas de manutenção no valor de R\$ 1200,00 (um mil e duzentos reais) para estudantes medalhistas que ingressarem na universidade pública estadual ou federal em áreas específicas como: Astronomia, Biologia, Computação, Economia, Engenharia, Estatística, Física, Matemática, Medicina e Química. Essa bolsa tem duração de 12 meses, podendo ser renovada anualmente não excedendo o limite de 48 meses.

Atualmente, o Instituto TIM mantém 198 bolsas de manutenção espalhadas por todas as regiões brasileiras. O Estado do Ceará conta com 19 bolsas, sendo uma para o Instituto Federal do Ceará, 16 para a Universidade Federal do Ceará, uma para a Universidade Federal do Cariri, e uma para a Universidade do Vale do Acaraú. (INSTITUTO TIM, 2019).

A OBMEP conta ainda com o programa OBMEP na Escola, voltado para capacitação de professores no aprofundamento dos conteúdos e novas práticas de ensino em sala de aula, onde professores do Brasil inteiro são orientados sobre os conteúdos a serem ministrados utilizando como base a resolução de problemas como prática didática com grupo de alunos selecionados por mérito nas edições da OBMEP. Esse programa oferece uma bolsa de manutenção aos professores selecionados e conta com o apoio do Itaú Social.

Com objetivo de combater a evasão no ensino superior, desde 2019 uma nova modalidade de ingresso em cursos de graduação se dá pelos resultados de olimpíadas, onde os participantes pleiteiam vagas em cursos afim a sua área de domínio na Universidade de Campinas.

A nova modalidade, denominada Vagas Olímpicas, disponibilizou este ano pela primeira vez 90 vagas para estudantes que se destacaram em competições de ciências do ensino médio, como as olimpíadas de matemática, robótica e química, entre outras. A maioria das vagas está vinculada a cursos de ciências exatas e engenharias. (ARANHA, C., 2019.)

Desta forma, as olimpíadas, e especificamente a OBMEP, garantem oportunidades desde o ensino fundamental a todos os estudantes do Brasil até o nível superior com programas como este e outros tais como o Programa de iniciação Científica e Mestrado - PICME, onde estudantes de graduação medalhistas da OBMEP e OBM tem a oportunidade de realizarem estudos avançados em matemática simultaneamente a graduação em nível de iniciação científica ou mestrado através de parcerias com CNPq e CAPES. São oferecidas anualmente 300 vagas para novos participantes dispostos a assistirem as aulas presenciais do programa. (PICME, 2019).

Podemos ir além, mostrando que a OBMEP tem um papel social e inclusivo de grande proporção, visto que a prova é aplicada a jovens internos da Fundação Centro de Atendimento Socioeducativo ao Adolescente, podemos aqui citar um caso particular ocorrido em São Paulo:

A jovem Vanessa, que adora resolver problemas, disse que o reconhecimento na prova é um incentivo para seguir estudando e ingressar em uma faculdade. Ela pretende cursar engenharia civil ou assistência social. “Como já passei em abrigo, acho muito bonito o trabalho que elas (as assistentes sociais) fazem. Lembro muito do tio Moacir, que quando eu estava triste conversava comigo, fazia de tudo para eu não sair do abrigo, para não ficar na rua”, contou. (IMPA, 2019.)

Citaremos agora o resultado da escola onde leciono regularmente desde 2017 como professor substituto. Os resultados não são satisfatórios, muitos estudantes não se interessam pela OBMEP e não há dedicação específica para a prova.

A Escola de Ensino Médio Francisco Jaguaribe situada no município de Jaguaruana, Ceará, no bairro Lagoa é mantida com recursos do governo estadual. No ano de 2019 contou com um contingente de 490 estudantes distribuídos no turno matutino e noturno. Esses alunos estavam inscritos na primeira fase da OBMEP, e de acordo com o regulamento dessa prova, para o intervalo de 381 a 620 matriculados, os 31 estudantes com melhores resultados deveriam ser classificados para a segunda fase. Traremos agora os resultados obtidos. Em primeiro lugar tivemos dois alunos, um de terceiro ano e outro de segundo ano ambos com 11 acertos, outros dois alunos com 09 acertos, 12 alunos com 08 acertos e o restante com 07 acertos. Perceba que os resultados são consideravelmente baixos, uma vez que o número máximo de acertos obtidos por esses estudantes foi de 55% (11 questões certas entre as 20) da prova e o último classificado acertou 35% (07 questões certas entre as 20) da prova. Note que estes resultados são abaixo de 60% da prova, média essa exigida como requisito mínimo de aprovação nesse colégio.

Podemos ver na figura 2 a tabela de distribuição de frequência desse conjunto de dados, e perceber que a quantidade média de acertos do colégio foi de aproximadamente 2,38 acertos, e, além disso, mais de 90% dos estudantes acertaram menos de 4 questões e nenhum estudante conseguiu acertar mais de 12 questões da prova.

Figura 2 – Distribuição de frequência do resultado da OBMEP 2019 fase 1, EEM. Francisco Jaguaribe

Q. ACERTOS	FREQUÊNCIA	FREQ. ACUMULADA	FREQ. RELATIVA	FREQ. A. RELATIVA
[0 ; 04)	459	459	93,67%	93,67%
[4 ; 08)	15	474	3,06%	96,73%
[8 ; 12)	16	490	3,26%	100,00%
[12 ; 16)	00	490	0,00%	100,00%
[16 ; 20]	00	490	0,00%	100,00%
TOTAL	490	-	100,00%	-

Fonte: Elaborada pelo autor - 2020

Aqui surge a principal motivação desse projeto. Visando melhorias nos resultados da OBMEP e cativar o estudante para a aprendizagem significativa da matemática em sala de aula, surge a ideia de formar um material que sirva de apoio ao professor, que facilite sua prática pedagógica e dinamize suas aulas com o auxílio da resolução de problemas.

2.2 A Resolução de Problemas

Um dos pontos de partida mais comum para o ensino da matemática trata-se da resolução de problemas em sala de aula que é utilizada desde o ensino fundamental, onde o aluno vivencia na prática a utilização do conteúdo, e com o auxílio do professor, gera métodos intuitivos e dedutivos sobre os problemas, criando, a partir daí, a assimilação da teoria.

Segundo os PCN's (BRASIL, 1998) a resolução de problemas em sala de aula é o pontapé inicial para o despertar matemático, onde, juntamente com a história da matemática e as tecnologias da comunicação, criarão caminhos sólidos para o ensino da matemática.

O que afeta nossos estudantes hoje é a falta de prática sobre o conhecimento adquirido ao longo da vida. Muitos alunos não conseguem compreender toda a teoria da matemática algébrica, visto que a noção de incógnita/variável ainda é mal vista por muitos. Em sala de aula é perceptível que muitos discentes só conseguem compreender um pouco a teoria frente a utilização da mesma em aplicações diretas, criando assim métodos mecânicos de resolução que, do ponto de vista prático, são obsoletos. É importante percebermos ainda que a possibilidade da utilização da resolução de problemas como alternativa para o ensino favoreça ainda mais a assimilação dos conteúdos. A apresentação de um problema bem elaborado fornecerá meios para com que os estudantes consigam abstrair toda a matemática teórica por trás do problema.

Para Dante, (DANTE, 2002) devemos preparar nossos estudante para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. Para isso é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas. Assim, independente das situações encontrados no futuro, nossos estudantes estarão aptos a enfrentá-los com sabedoria.

Muitos estudantes ao se depararem com questões problemas bem elaboradas relatam a dificuldade que enfrentam durante sua interpretação, visto que em sala de aula geralmente são apresentados exercícios diretos, cujo único propósito seria a utilização de fórmulas apresentadas

durante a aula. Essa situação indesejada é aferida em exames e provas externas como OBMEP, ENEM, SPAECE ou SAEB.

Seguindo as ideias de Dante, (DANTE, 2002) um problema matemático precisa ser desafiador, contextualizado, interessante, claro, objetivo e estar em um nível de dificuldade adequado ao público.

Daí, a partir de um bom problema, os estudantes podem sentir-se tentados a buscarem os mais diversos meios para resolução, aplicando todo o conteúdo adquirido anteriormente e chegando ao objetivo pretendido pelo problema. Em muitos casos, aguçar a curiosidade, criatividade e o desejo de resolução do problema é muito mais importante que a própria resposta final de um exercício. O professor detém um papel importantíssimo em sala de aula, ele terá que prover meios para que o aluno consiga compreender o problema, este deve intervir somente com o indispensável, deixando com que o aluno crie sua lógica de resolução.

Para Polya (POLYA, 1995) as quatro principais etapas a serem seguidas por estudantes para a resolução de um problema são:

1. **Compreender o problema**, mesclando apenas o essencial para sua resolução.
2. **Estabelecer um plano**, tendo em mente os passos a serem seguidos para obtenção dos resultados.
3. **Executar o plano**, pondo em prática tudo que se foi planejado na fase anterior.
4. **Fazer uma retrospectiva** sobre os resultados encontrados tentando encontrar possíveis erros ou incoerências.

É claro que a resolução de problemas não consiste em uma receita pronta, onde basta seguir os passos descritos acima. Esta é bem mais complexa, podendo variar bastante, se adequando sempre ao novo contexto vivenciado. O passo a passo descrito serve de guia, fornecendo orientações para solucionar o problema trabalhado.

Parte da responsabilidade no processo de ensino-aprendizagem é exclusiva do estudante que deve buscar sempre o seu protagonismo na vida estudantil, se esforçando cada vez mais em busca de bons resultados, confiando no seu potencial e conhecimentos adquiridos em etapas anteriores. Podemos notar que essas afirmações já se encontram nos PCN's,

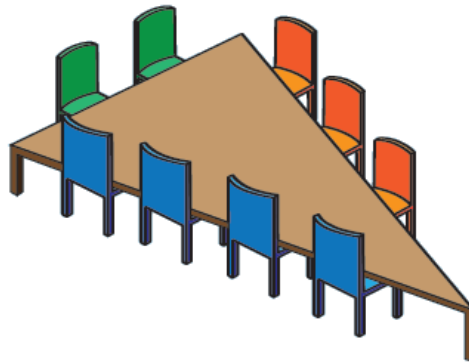
Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. (PCN's, 1998)

Para isto, os problemas propostos precisam ser provocadores, mas também devem se adequar a turma, pois caso contrário podem causar frustrações irreversíveis nos estudantes causando assim uma aversão à matemática. É necessário ainda fazer com que o estudante pense, levante hipóteses e trace caminhos a serem seguidos para a solução. A resolução de um problema deve estar diretamente ligada ao pensamento criativo dos estudantes, fornecendo meios para com que estes possam criar estratégias para resolver as mais variadas situações cotidianas.

Vejamos agora na prática o problema 18 (contido no capítulo 4) da OBMEP que pode ser apresentado aos estudantes do ensino médio. Dados a e b dois números, perceba que os símbolos $a \times b$, $a \cdot b$ e ab indicam a multiplicação/produto entre o número a e o número b .

Exemplo 1. (OBMEP 2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados tem 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 3 – Mesa Triangular



Fonte: Prova OBMEP 2012

- a. 288
- b. 6720
- c. 10080
- d. 15120
- e. 60480

Resolução 1. *Compreendendo o problema:* Seis amigos; Alice e Bernardo ficam juntos no mesmo lado da mesa; Mesa triangular de 2,3 e 4 assentos em cada lados. Objetivo é determinar a quantidade de maneiras distintas de sentar-se a mesa

Estabelecendo um plano: Contar os modos que Alice e Bernardo podem sentar juntos em um mesmo lado da mesa, feito isso, combinar os casos onde os demais colegas podem se sentar.

Executar o plano: De acordo com o enunciado, temos o menor lado com dois lugares, que Alice e Bernardo podem sentar de $2 \times 1 = 2$ maneiras, para o lado com quatro lugares, eles podem sentar de $3 \times 2 = 6$ maneiras, e ainda para o lado com três lugares, eles podem sentar-se de $2 \times 2 = 4$ maneiras, totalizando $2 + 4 + 6 = 12$ maneiras de Alice e Bernardo ocuparem juntos essa mesa. Logo sobram sete lugares para serem ocupadas por 4 amigos, totalizando $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ formas de ocupar esses 7 lugares.

Portanto, o total de maneiras de ocupar essa mesa, com o critério estabelecido é $12 \times 840 = 10.080$ maneiras.

Retrospectiva: Revisando a nossa resolução vemos que os dados são coerentes e que o plano foi bem executado, portanto a resposta obtida é válida.

Para a resolução de problemas como metodologia pedagógica, o professor deve estar sempre preparado para o novo, visto que essa prática nos tira da zona de conforto, onde as mais

diversas situações e indagações podem ser inseridas durante a prática pedagógica, como, por exemplo, uma pergunta inesperada de um aluno, um novo método de resolução, dúvidas não triviais. Isto é previsto em ROMANATTO,

A resolução de problemas como metodologia de ensino explicita o trabalho docente na perspectiva de um fenômeno complexo (aquilo que é tecido em conjunto). Nesse sentido, em uma aula de resolução de problemas, o professor deve estar preparado para o aleatório, o não-pensado, pois são situações que podem ocorrer durante a busca das soluções para os problemas trabalhados (ROMANATTO, 2012).

Caso seja necessário, é interessante que sejam aplicados problemas mais simples aos estudantes, conforme o apresentado nos comentários do item 18, como veremos no Capítulo 4, para não desanimá-los ou causar frustrações em virtude de um fracasso frente a um exercício em nível inadequado.

Cativar o interesse do estudante para as aulas de matemática é um dos principais objetivos do professor em sala de aula, entra em ação a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender (LIMA, 2003).

A partir desse trabalho o professor tem a disposição alguns encaminhamentos que devem lhe auxiliar durante sua rotina escolar, facilitando seus planejamentos para o conteúdo de análise combinatória e/ou para aulas voltadas para OBMEP.

3 Conteúdos Preliminares

Neste Capítulo será exposto brevemente toda a teoria necessária para a resolução das questões apresentadas no capítulo seguinte, onde sempre que for necessário, faremos referências aos resultados aqui mostrados.

Aqui, precisaremos de alguns conceitos básicos sobre teoria dos conjuntos, onde é utilizado por base o livro Contato Matemática 1º ano (SOUZA ; GARCIA, 2016).

Definição 1. *Ao obter coleções de objetos classificados a partir de certa característica, estamos formando um conjunto.*

Existem conjuntos dos mais variados tipos, como conjunto de mamíferos, peixes, de letras, de Estados de uma região brasileira e os que focaremos nossa atenção são os conjuntos numéricos, ou seja, formados apenas por números.

A nomenclatura mais formal utilizada para representar um conjunto é que segue no exemplo seguinte:

Observação 1. *A representação do conjunto dos números naturais menores que 15 pode ser obtida expondo a lei de formação do conjunto, $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 14\}$ ou listando seus elementos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$*

Definição 2. *Consideramos que:*

- i. Um conjunto sem elementos é chamado de conjunto vazio e é representado por \emptyset ou $\{\}$.*
- ii. Um conjunto qualquer que possuir apenas um elemento é chamado de conjunto unitário.*
- iii. O conjunto universo é o conjunto formado por todos o valores que uma variável pode assumir numa determinada situação.*
- iv. Dados dois conjuntos A e B dizemos que A é subconjunto de B quando todo elemento de A pertencer ao conjunto B.*

Essas definições serão usadas trivialmente durante a resolução dos exercícios do Capítulo 4 sempre que necessário for.

É preciso ainda que os estudantes tenham noção de operar com conjuntos, visto que em muitos casos, para uma resolução formalizada de uma questão sobre análise combinatória o estudante deve realizar uniões ou interseções ao dividir um problema em casos.

Operações com conjuntos: dados os conjuntos A e B, chamaremos de:

- i. União dos conjuntos A e B o conjunto $A \cup B = \{x|x \in A \text{ ou } x \in B\}$*
- ii. Interseção dos conjuntos A e B o conjunto $A \cap B = \{x|x \in A \text{ e } x \in B\}$.*
- iii. Diferença entre os conjuntos A e B, o conjunto $A - B = \{x|x \in A \text{ e } x \notin B\}$.*
- iv. Complementar de $A \subset B$ em relação ao conjunto B, o conjunto $B - A = \{x|x \in B \text{ e } x \notin A\}$.*

Um caso onde a utilização das operações com conjuntos é aplicada segue no Capítulo 4 deste trabalho, no item 28. Também em muitas situações é usado o termo “cardinalidade” de

um conjunto para se referir a quantidade de elementos que o mesmo possui. Em símbolos, a cardinalidade de um conjunto finito A com $p \in \mathbb{N}$ elementos é definida como $n(A) = p$.

Teorema 1. (Princípio da inclusão - exclusão) Dados dois conjuntos finitos A e B , temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Demonstração 1. Seja x a quantidade de elementos que pertence a A e não pertence a B , seja y a quantidade de elementos que pertence a B e não pertence a A e seja z a quantidade de elementos que pertence a A e a B . Dessa forma, temos que $n(A \cup B) = x + y + z = (x + z) + (y + z) - z = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ■

Este resultado é muito importante para a teoria de conjuntos, sendo agregado a resolução de exercícios de contagem.

A teoria apresentada neste princípio, Teorema 1, é vastamente utilizada para a resolução de situações problemas de análise combinatória. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2. Quantos são os múltiplos positivos de 3 ou 5 entre 1 e 1000?

Resolução 2. Seja A o conjunto dos múltiplos de 3 entre 1 e 1000, e B o conjunto dos múltiplos de 5 entre 1 e 1000. Disso, segue que $n(A) = 333$, $n(B) = 200$ e $n(A \cap B) = 66$, uma vez que $n(A \cap B)$ é o conjunto formado pelos múltiplos de 3 e 5 entre 1 e 1000, ou equivalentemente, $n(A \cap B)$ é o conjunto dos múltiplos de 15 entre 1 e 1000.

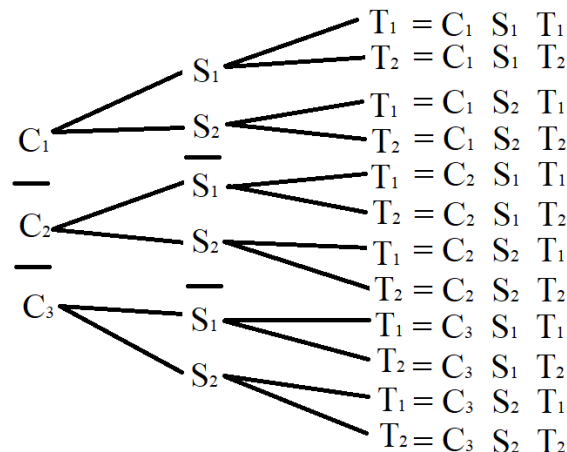
Dessa forma, pelo Princípio da Inclusão - Exclusão, segue que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 333 + 200 - 66 = 467$, ou seja, entre 1 e 1000 temos 467 múltiplos de 3 ou 5.

É comum, ao trabalhar com o conteúdo de análise combinatória em sala de aula o professor apresenta um problema simples que em geral utiliza em sua resolução um diagrama de árvore, que trata-se de uma maneira concreta de mostrar os casos possíveis de combinação. Vejamos:

Exemplo 3. Diego pretende montar seu look para ir a uma festa e ele dispõe de três opções de camisas, duas opções de shorts e duas opções de tênis. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir?

Resolução 3. Podemos aqui listar os casos por meio de um diagrama de árvore, separando as variáveis e combinando-as formando looks diferentes. Definindo como C_1, C_2 e C_3 as três opções de camisas, S_1, S_2 as duas opções de shorts e T_1, T_2 as duas opções de tênis temos,

Figura 4 – Diagrama de árvore



Fonte: Elaborada pelo autor - 2019

Portanto, Diego dispõe de um total de 12 maneiras distintas de se vestir para esse compromisso.

Pode-se apresentar uma maneira mais rápida para a resolução deste problema. O professor precisa mostrar para os estudantes que temos três variáveis que vão se relacionar nesse problema, que são camisas, short e tênis, e, respectivamente, temos 3 opções para o primeiro, duas para o segundo e duas para o terceiro. Combinando essas situações, temos $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas de se vestir.

Agora, formalmente apresentaremos um método de contagem aplicável em situações semelhantes a do exemplo anterior e a partir dele surgem as demais fórmulas utilizadas em tópicos de combinatória. Essa definição segue do livro Probabilidade, um curso moderno com aplicações (ROSS, 2010).

Definição 3. (*Princípio Fundamental da Contagem - PFC*) Se r experimentos são tais que o primeiro experimento pode levar a qualquer um de n_1 , resultados possíveis; e se, para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos houver n_3 resultados possíveis para o terceiro experimento; e se ..., então haverá um total de $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Semelhante ao exemplo anterior, vejamos agora a utilização direta do PFC (Definição 3) na resolução de um problema.

Exemplo 4. De quantas maneiras distintas posso formar meu almoço se disponho de duas opções de arroz, três opções de carne e quatro opções de bebidas, sendo que meu prato terá necessariamente uma porção de carne, arroz e uma bebida?

Resolução 4. Usando (Definição 3), segue que o experimento de escolher uma opção de arroz conta com duas possibilidades, o experimento de escolher uma opção de carne conta com três possibilidades e o experimento de escolher uma bebida conta com quatro possibilidades. Logo, a quantidade de maneiras possíveis de formar esse almoço é de $2 \times 3 \times 4 = 24$ maneiras.

Algo que pode complicar muito a vida do estudante quando é abordada uma questão sobre contagem é a grande quantidade de fórmulas disponíveis. Em muitos casos, interpretar corretamente o problema para traçar um método adequado de resolução é o principal desafio.

Mostraremos agora alguns resultados que seguem diretamente do PFC (Definição 3). Se o estudante compreender bem a definição acima, não terá dificuldade em adaptá-la aos mais variados problemas de contagem.

Teorema 2 (Permutação Simples). Com n objetos distintos temos um total de $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ permutações diferentes.

Demonstração 2. Ora, pelo PFC 3 segue que o primeiro objeto pode ocupar qualquer uma das n posições, já o segundo pode ocupar $n - 1$ posições, visto que uma posição já está ocupada, assim o terceiro objeto pode ocupar $n - 2$ posições e assim por diante, até o último objeto que pode ocupar uma posição. Logo, temos um total de $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ maneiras de que isso ocorra. ■

Exemplo 5. Quantas são as senhas de quatro dígitos distintos possíveis de se formar com os algarismos 9, 8, 7 e 6?

Resolução 5. Usando o Teorema 2, segue que temos um total de $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ senhas possíveis.

Observação 2.

Quando no Teorema 2 os elementos do conjunto forem letras, chamaremos esta fórmula de Anagramas Simples.

Teorema 3. (Permutação com repetição) O número de permutação de n objetos dos quais α são iguais a a , β são iguais a b, \dots , λ são iguais a l ($\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$) é

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, \lambda} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}$$

Demonstração 3. Consulte (MORGADO et al., 1991).

O mesmo ocorre para anagramas com repetição.

No item 8 do Capítulo 4, veremos um exemplo de modelagem onde se aplica o resultado da observação anterior.

Teorema 4. (Permutação circular) Podemos colocar n objetos em n lugares equiespaçados de um círculo de $(PC)_n = (n - 1)!$ formas distintas.

Demonstração 4. Se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo, $(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$ (MORGADO et al., 1991).

Exemplo 6. De quantos modos 7 crianças podem brincar de roda, de modo que duas dessas crianças, João e Maria, fiquem juntas?

Resolução 6. Como João e Maria devem ficar juntos, iremos considerá-los como um único elemento, com João a direita de Maria. Logo, temos uma permutação circular de 6 elementos, e pelo Teorema acima, segue que $(PC)_6 = (6 - 1)! = 5! = 120$ maneiras distintas, com João a direita de Maria, agora perceba que se João estiver a esquerda de Maria teremos novas 120 maneiras distintas de brincar de roda. Portanto, temos um total de $2 \times 120 = 240$ maneiras dessas 7 crianças brincarem de roda, com João e Maria juntos.

Definição 4. (Permutação caótica) Uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ distintos é chamada caótica quando nenhum elemento da lista ocupa sua posição original.

Teorema 5. A quantidade de permutações caóticas de n elementos distintos é dada por

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

.

Demonstração 5. Consulte (MORGADO et al., 1991).

Exemplo 7. Quantas e quais são as permutações caóticas da palavra BOLA? Ou seja, quantos e quais são os anagramas da palavra BOLA em que nenhuma letra esteja na posição original?

Resolução 7. Ora, listando os casos, temos: OBAL, OLAB, OABL, ALOB, ALBO, ABOL, LABO, LBAO, LAOB, ou seja, temos 9 permutações caóticas da palavra BOLA. Perceba que o resultado independe da natureza do elemento trabalhado, ou seja, qualquer permutação caótica de quatro elementos diferentes gera 9 configurações distintas.

Definição 5. (Arranjo Simples) Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ com n elementos distintos, chamaremos de arranjo simples toda a sequência formada por uma quantidade delimitada de elementos, sendo todos esses elementos pertencentes ao conjunto A .

Teorema 6 (Arranjo Simples). *Com n elementos diferentes, temos $\frac{n!}{(n-r)!}$ arranjos de r elementos diferentes (grupos de r elementos onde a disposição dos r elementos importa). Usaremos a notação $A_{n,r}$ para representar um arranjo de n elementos tomados r a r .*

Demonstração 6. *Note que sendo $r \leq n$, temos pelo PFC (Definição 3) que a primeira escolha dos r elementos pode ocorrer de n possibilidades. A segunda pode ocorrer de $(n-1)$ possibilidades. A terceira pode ocorrer de $(n-2)$ possibilidades e assim por diante até a última escolha ou seja, a escolha de número r , que pode ser feita de $(n-(r-1))$ escolhas. Daí, temos um total de $(n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Donde concluímos o desejado. ■*

Exemplo 8. *Um campeonato de futebol é disputado por 20 times. De quantas maneiras pode terminar o ranking deste campeonato, considerando 1º colocado, 2º colocado e 3º colocado?*

Resolução 8. *Uma vez que a ordem dos times é importante para a classificação final do campeonato, segue que, usando o resultado do Teorema 6, temos $20 \times 19 \times 18 = 6.840$ possíveis classificações utilizando os 20 times que disputam esse campeonato.*

Definição 6. (Combinação Simples) *Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ com n elementos distintos, chamaremos de combinação simples de $p \leq n$ elementos, qualquer agrupamento de natureza distinta, formado por uma quantidade de p elementos, sendo todos esses elementos pertencentes ao conjunto A .*

Teorema 7. (Combinação Simples) *Com $n \geq p \in \mathbb{N}$, temos $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, quantidade de combinações distintas de n elementos diferentes tomados em grupos de p elementos.*

Demonstração 7. *Diferentemente do resultado do Teorema 6, aqui os grupos de p elementos distintos não divergem pela ordem, ou seja, considerando como um arranjo ($A_{p,p} = p!$), cada grupo de p elementos será contado $p!$ vezes, já em combinação simples, cada grupo de p elementos representa apenas UMA única combinação distinta, ou melhor, tem-se que a quantidade de grupos de p elementos entre os n disponíveis é $C_n^p = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. ■*

Exemplo 9. *Uma escola de idiomas está oferecendo uma promoção de 50% para o aluno que se matricular em três cursos, entre as opções: Inglês, Latim, Alemão, Francês e Espanhol. De quantas maneiras distintas um aluno pode aderir a essa promoção se matriculando em exatamente três cursos?*

Resolução 9. *Ora, perceba que necessariamente precisamos escolher três entre os cinco cursos disponíveis, de forma que a ordem de escolha não importa, ou seja, estamos nas condições do Teorema 7. Logo, o total de combinações é dado por $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 20$ maneiras possíveis.*

Um exemplo mais sofisticado pode ser apresentado aos estudantes, sobre permutação caótica. Vejamos este caso que utiliza alguns resultados mostrados anteriormente.

Exemplo 10. *Quantas são as permutações de 7 elementos onde exatamente três deles estejam em suas posições originais?*

Resolução 10. *Podemos escolher os três elementos que estão em suas posições originais de $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$ maneiras. Agora os 4 elementos restantes não podem ocupar suas posições originais, e conforme o exemplo 7, isso ocorre de 9 maneiras distintas. Portanto, a resposta do nosso problema é $35 \times 9 = 315$ maneiras de permutar 7 elementos e exatamente três destes ocuparem suas posições originais.*

Princípio da Casa dos Pombos - PCP: (SANTOS, 2018), se colocarmos $n+1$ pombos em n gaiolas, pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos dois pombos.

Uma prova para esse resultado surge a partir do método da redução ao absurdo¹. Explique para os estudantes que caso o resultado seja negado, ou seja, se nenhuma gaiola contiver pelo menos dois pombos, em outras palavras, em cada gaiola deve haver no máximo um pombo, teremos aí um total máximo de n pombos, chegaremos em um absurdo/contradição, pois deveríamos ter $n+1$ pombos. Assim, o resultado segue como verdadeiro, uma vez que não pode ser falso.

Apesar de usar um raciocínio óbvio, este resultado pode ser aplicado à resolução de problemas complexos sempre cobrados em provas e exames, veremos no Capítulo seguinte alguns problemas que utilizam esse conceito em sua resolução. Esse princípio também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet de enunciado análogo e mesma fundamentação.

Exemplo 11. *Em um conjunto de 8 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia da semana.*

Resolução 11. *O resultado segue diretamente do PCP 3, basta perceber que temos 8 pessoas para alocarmos em um máximo de 7 dias, portanto pelo menos duas delas fazem aniversário em um mesmo dia da semana.*

Para um estudo mais aprofundado sobre Permutações Caóticas e o Princípio da Inclusão - Exclusão, consulte Godoy Filho (GODOY FILHO, 2016).

MORGADO et al., define o Triângulo de Pascal na forma do quadro:

$$\begin{array}{cccccc}
 C_0^0 & & & & & 1 \\
 C_1^0 & C_1^1 & & & & 1 & 1 \\
 C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & 1 & 2 & 1 \\
 C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 \dots & & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Onde os números C_n^p são chamados de números binomiais, coeficientes binomiais ou números combinatórios. Note que nesta notação, linhas e colunas começam a ser contadas a partir do zero.

Apresentaremos aqui alguns resultados, cujas demonstrações podem ser consultadas em (MORGADO et al, 1991).

Para essa tabela existem algumas propriedades interessantes como a **Relação de Stifel**, onde $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$, ou seja, a soma de dois elementos consecutivos da mesma linha, resulta no termo imediatamente abaixo da última parcela.

Outro resultado importante é: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$. Este é chamado de Teorema das linhas, onde no triângulo de Pascal, ao somar todos os elementos de uma linha, obteremos o valor 2^n . Outro resultado menos utilizado, porém não menos importante, é o Teorema das colunas, onde a soma dos elementos de uma coluna, começando do primeiro até um certo elemento é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna da última parcela, ou seja, $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$.

Um resultado muito cobrado em exames específicos de matemática é o conhecido Binômio de Newton que mostra resultados de potências de somas.

Teorema 8. *(Binômio de Newton) Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo*

$$(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \dots + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0$$

¹ Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/portosil/curso2016-3.pdf>>

Demonstração 8. Consulte (MORGADO et al., 1991).

Observação 3. *i.* O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $n+1$ termos.

ii. Os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal.

iii. Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima (isto é, ordenados segundo as potências decrescentes de x), o termo de ordem $k+1$ é:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$$

Exemplo 12. Determine o coeficiente do termo x^5 no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{2}{x})^{10}$.

Resolução 12. Ora, pelo item 3 da observação acima, temos

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k} = C_{10}^k \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k \cdot (x^2)^{10-k} = C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{-k} \cdot x^{20} \cdot x^{-2k}$$

Daí e como queremos o coeficiente do termo x^5 , segue que $x^{-k} \cdot x^{20} \cdot x^{-2k} = x^5$, ou seja $20 - 3k = 5$, portanto, $k = 5$. Agora, sabendo que $k = 5$, devemos substituir esse valor em $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{-k} \cdot x^{20} \cdot x^{-2k}$, ou seja, $T_6 = C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot x^5 = 8.064x^5$. Donde segue que o coeficiente procurado é 8.064.

Quando trabalhamos com a resolução de questões sobre contagem em muitos casos precisaremos utilizar conteúdos diversos que fogem do tema principal. Faremos aqui um apanhado de alguns tópicos que serão utilizados nas resoluções das questões apresentadas no Capítulo 4.

Definição 7. Dados os números x e y com $y \neq 0$ diremos que y é divisor de x (ou x é divisível por y) se existir um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y \cdot k$.

Exemplo 13. O número 1024 apresenta vários divisores, tais como 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e o próprio 1.024. Já o número 23 apresenta apenas dois divisores, que são 1 e 23.

De forma semelhante temos a noção de múltiplo de um número, que é importante na resolução de problemas.

Definição 8. Dados os números x e y diremos que y é múltiplo de x se existir um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x \cdot k$.

Para o exemplo anterior, temos que 1.024 é múltiplo de 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, e 1.024.

Teorema 9. (Algoritmo de Euclides) Dados dois inteiros a e b , $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que

$$a = q \cdot b + r, \text{ com } 0 \leq r < b ; r = 0 \Leftrightarrow b \text{ divide } a$$

(q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b).

Demonstração 9. Consulte (SANTOS, 2018).

Definição 9. Um número inteiro n ($n > 1$) possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado primo. Se $n > 1$ não é primo dizemos que n é composto.

Para exemplificar, os números primos naturais menores que 100 são $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$. Todos esses possuem apenas dois divisores naturais. Já o número 18 é composto, uma vez que possui os divisores $D = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

A teoria dos números primos pode ser melhor consultada no livro *Números Primos: Velhos mistérios e Novos Recordes* (RIBENBOIM, 2014).

Teorema 10. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Demonstração 10. *Se n é primo não há nada a ser demonstrado. Suponhamos, pois, n composto. Seja p_1 ($p_1 > 1$) o menor dos divisores positivos de n . Afirmamos que p_1 é primo. Isto é verdade, pois, caso contrário existiria p , $1 < p < p_1$ com p dividindo p_1 , conseqüentemente, dividindo n , contradizendo a escolha de p_1 . Logo, $n = p_1 \cdot n_1$. Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, tomando p_2 como o menor fator de n_1 . Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$. Repetindo esse procedimento, obtemos uma seqüência decrescente de inteiros positivos p_1, p_2, \dots, p_r . Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os primos na seqüência p_1, p_2, \dots, p_k não são, necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Para mostrarmos a unicidade usamos indução em n . Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira. Assumindo, então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores de que 2 e menores que n . Vamos provar que ela também é verdadeira para n . Se n é primo, não a nada a provar. Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r.$$

Vamos provar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j . Como p_1 divide o produto $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j . Sem perda de generalidade podemos supor que p_1 divide q_1 . Como ambos são primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo $\frac{n}{p_1} = p_2 \cdot \dots \cdot p_s = q_2 \cdot \dots \cdot q_r$. Como $1 < \frac{n}{p_1} < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$ e $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$ são iguais. ■

Aqui faremos referências aos temas de seqüências numéricas, mais especificamente os resultados de progressões aritméticas encontrados no livro de *Matemática Discreta* (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Definição 10. *Uma progressão aritmética (PA) é uma seqüência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de razão da progressão e representada pela letra r .*

Considere agora uma PA de primeiro termo a_1 e razão r . Recorrentemente conseguimos montar a seqüência genérica

$$\begin{aligned} a_1 & \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ a_5 &= a_4 + r = a_1 + 4r \\ a_6 &= a_5 + r = a_1 + 5r \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n - 1)r$$

·
·
·

Assim, para calcular um termo qualquer de uma PA de primeiro termo a_1 e razão r basta usar a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Exemplo 14. *O cometa Halley visita a terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo?*

Resolução 13. *Os anos de passagem do cometa foram 1986, 1910, 1834, ... e formam uma progressão aritmética de razão -76. O termo de ordem n dessa progressão é $a_n = 1986 + (n - 1)(-76) > 0 \Rightarrow n < \frac{2062}{76} = 27,13 \dots$. Portanto, os termos positivos dessa PA são os 27 primeiros, a_1, a_2, \dots, a_{27} . Logo, ele nos visitou 27 vezes na era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano $a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$.*

Para um exemplo mais direcionado ao conteúdo de contagem, veja o item 34 do Capítulo 4, e note que o mesmo problema pode ainda ser resolvido de outra forma, assim como a solução apresentada oficialmente pela OBMEP onde é utilizado o tema de equações diofantinas lineares, para mais informações consulte Hefez (HEFEZ, 2016).

A noção de infinito quando se trabalha com seqüências infinitas é abstrata e de difícil compreensão para alguns estudantes de ensino médio. Portanto, o professor pode, em sala de aula, mostrar o Teorema do macaco infinito aos seus alunos para fazer os mesmos refletirem com relação a noção de infinito.

O Teorema do Macaco Infinito², descrito pelo matemático Émile Borel em 1913, afirma que um macaco digitando aleatoriamente em um teclado por um intervalo de tempo infinito quase certamente criará um texto qualquer escolhido, como por exemplo a obra completa de William Shakespeare.

Um tipo de questão recorrente nas provas da OBMEP são questões onde é necessário calcular a quantidade de maneiras distintas de colorir um mapa ou uma bandeira de forma onde as seções adjacentes sejam coloridas com cores diferentes, como apresentado na questão 20 do Capítulo seguinte. Um resultado interessante, porém mais complexo é o que segue.

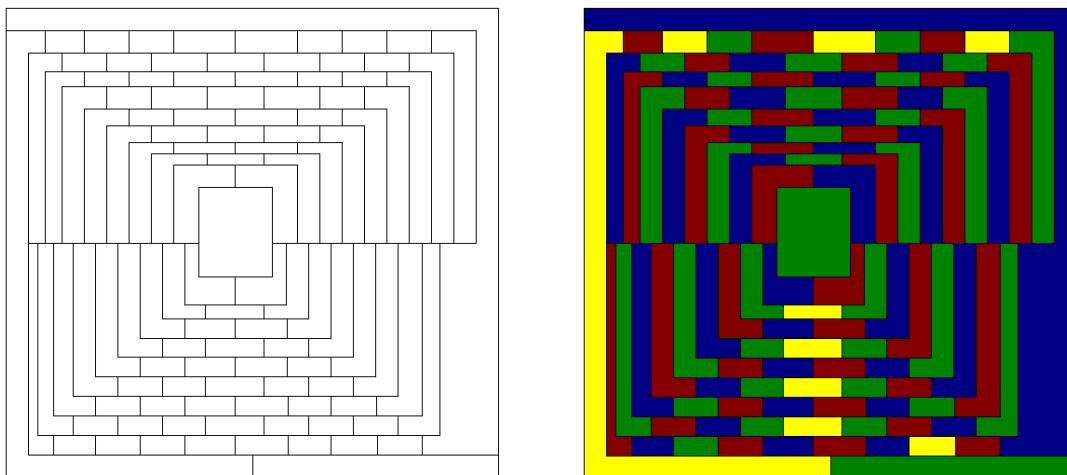
Teorema 11. (Teorema das quatro cores) *O número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de forma que quaisquer dois países contíguos tenham cores diferentes é quatro.*

Demonstração 11. *Consulte (SOUSA, 2001).*

Exemplo 15. *A figura abaixo representa um mapa/laço planar, que foi colorido com o número mínimo de cores.*

² Disponível em: <<https://epoca.globo.com/colunistas/coluna-a-teoria-do-macaco-infinito-23896371>>

Figura 5 – Contra-exemplo de Martin Gardner



Fonte: Disponível em: <<https://www.atractor.pt/matviva/geral/t5cores/T4C.htm>>

O professor pode solicitar em sala de aula que seus alunos preencham esse mapa tentando usar o número mínimo de cores, ou mesmo solicitar que eles mesmos façam um mapa, que deve ser colorido posteriormente.

4 Banco de questões da OBMEP

Aqui será apresentado 41 questões problemas sobre análise combinatória retirado das provas de primeira fase, nível 3 da OBMEP em suas edições de 2005 a 2019, é disponibilizado para essas questões as soluções oficiais e sempre que possível, uma solução alternativa sugerida pelo autor. Cada problema é contemplado com comentário e sugestões de utilização.

Conforme apresentado no Capítulo 2, Polya define as quatro principais etapas para a resolução de um problema como: Compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; fazer uma retrospectiva. Em cada uma dessas etapas o professor deve auxiliar o estudante, provendo meios para que ele consiga formalizar seus objetivos. Lembre-se que cada fase da resolução de um problema demanda de tempo, e esse tempo deverá variar de um estudante para outro.

O raciocínio de Polya será aplicado implicitamente nas resoluções das questões, isso facilitará a escrita deste texto.

1. (OBMEP 2005) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?
 - a. 32
 - b. 36
 - c. 45
 - d. 46
 - e. 48

Solução alternativa: Estamos interessados na quantidade de números de quatro algarismos, dos quais três são algarismos 7 e o quarto algarismo não pode ser o número zero. Ora, pelo Princípio Fundamental da contagem temos as seguintes quantidades relacionada aos casos

$$\underline{8} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = 8 \text{ Possibilidades}$$

Ou seja, temos 8 possibilidades se o bilhete comprado tiver unidade de milhar sendo um dos valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e centena, dezena e unidade sendo o algarismo 7. Seguindo o raciocínio análogo, concluímos que existem 8 bilhetes com unidade de milhar, dezena e unidade 7, 8 bilhetes com unidade de milhar, centena e unidade 7, e 8 bilhetes com unidade de milhar, centena e dezena 7. Donde concluímos que, o total de bilhetes que Marcelo comprou é $8 + 8 + 8 + 8 = 32$.

Solução OBMEP: Os números nos bilhetes comprados por Marcelo são da forma 777X, 77X7, 7X77 ou X777, onde X representa algum dos oito algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Em cada um desses casos, há 8 possibilidades para os números dos bilhetes. Por exemplo, no primeiro caso, temos os seguintes oito números: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778 e 7779. Portanto, o número de bilhetes comprados por Marcelo é $8 \times 4 = 32$.

Comentários sobre a questão: Convencionalmente ao estudar análise combinatória o primeiro contato dos alunos com esse conteúdo se dá por meio da apresentação de um problema simples, que poderá ser resolvido por meio de um diagrama de árvore. Logo após essa primeira introdução, alunos e professores deduzem o Princípio Fundamental da Contagem.

O presente problema necessita de conhecimentos básicos adquiridos no ensino fundamental, de início, sobre valor posicional do sistema de numeração decimal. O professor poderá

aplicar este problema em sala, com objetivo de introduzir o conteúdo aos seus alunos, propondo que os mesmos resolvam dedutivamente essa situação, fixando os três algarismos 7, observando a posição de cada algarismo (unidade, dezena, centena e unidade de milhar) e variando o algarismo diferente do número 7, buscando um raciocínio análogo a solução proposta pela OBMEP.

Após essa parte dedutiva, o professor pode enunciar o Princípio Fundamental da Contagem e aplicá-lo no problema, buscando uma solução mais formal, como proposto na solução alternativa.

2. (OBMEP 2006) Quantos são os números menores que 10000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque $4 \times 5 \times 5 = 100$.
- menos de 10
 - 18
 - 21
 - 28
 - mais de 30

Solução alternativa: Pela decomposição em fatores primos, temos que $100 = 5 \times 5 \times 2 \times 2$. Assim, devemos usar esses algarismos da decomposição ou uma combinação dos mesmos.

Com 1 ou 2 algarismo não existe nenhum número com a propriedade desejada. Com três algarismos temos que usar os valores 5,5,4 onde teremos usando uma permutação com repetição, $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ números. Com 4 algarismos temos duas opções de escolha: 5, 5, 2, 2 ou 5, 5, 4, 1, donde teremos, respectivamente, as quantidades $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ números e $P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ números. Com 5 algarismos não existe combinação possível, pois os mesmos devem ser menores que 10.000. Portanto, a quantidade desejada é $3 + 6 + 12 = 21$ números.

Solução OBMEP: Para que o produto seja 100, cada algarismo deve ser um divisor de 100. Os algarismos divisores de 100 são 1, 2, 4 e 5. Não é possível obter o produto 100 com números que tenham apenas 1 ou 2 algarismos, logo os números procurados têm 3 ou 4 algarismos, por serem menores que 10.000. Vejamos como obter o produto 100 com 3 ou 4 desses algarismos. Para facilitar a listagem observamos que 8 não é divisor de 100, donde os algarismos 2 e 4 não podem aparecer num mesmo número. Logo, os números procurados são:

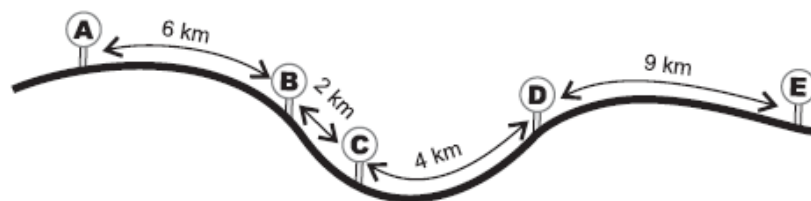
- números de 3 algarismos: 455, 545, 554
- números de 4 algarismos: 1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541, 2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225. em um total de 21 números.

Comentários sobre a questão: Para uma resolução mais formal, o professor deverá fazer com que os estudantes percebam que a decomposição em fatores primos do número 100 fornece os algarismos necessários para se buscar o produto igual a 100, para isso, é interessante lembrar em sala de aula como proceder com essa decomposição. É fácil ver que com apenas um ou dois algarismos entre os disponíveis na decomposição não se obtém o produto desejado. Logo, os discentes devem perceber que os números desejados são formados de três ou quatro algarismos, visto que devem ser menores que 10000. Feito isso, basta então notar que permutando tais algarismo, encontrar-se-ão os números desejados. Ambas as soluções apresentadas trabalham com o mesmo raciocínio nas resoluções, divergindo apenas nos métodos utilizados, visto que a solução proposta pela OBMEP utiliza-se de métodos dedutivos.

3. (OBMEP 2007) José e seus parentes moram em algumas das cidades A, B, C, D e E, indicadas no mapa com as distâncias entre elas. Ele saiu de sua cidade e viajou 13 km

para visitar seu tio, depois mais 21 km para visitar sua irmã e, finalmente, mais 12 Km para ver sua mãe. Em qual cidade mora a mãe de José?

Figura 6 – Questão 06 OBMEP 2007



Fonte: Prova OBMEP 2007

- a. A
- b. B
- c. C
- d. D
- e. E

Solução alternativa: Note que para visitar seu tio, José percorreu 13 km, e de acordo com o mapa, a única rota possível com essa distância é entre as cidades C e E. Temos agora que descobrir de onde José reside, para saber onde ele parou, na cidade C ou E. Para visitar sua irmã, ele percorreu mais 21 Km, partindo de uma das cidades C ou E. Assim, é fácil ver que ele partiu da cidade E para a cidade A, percorrendo assim 21 Km para visitar sua irmã. Agora, a partir da cidade A ele deve percorrer 12 Km para visitar sua mãe, que sendo a única rota possível terminando na cidade D.

Solução OBMEP: A primeira etapa da viagem do José só pode ter sido $C \rightarrow E$ ou $E \rightarrow C$, pois $4 + 9 = 13$ é o único modo de percorrer 13 km entre cidades nessa estrada. Como todas as cidades distam de C menos que 21 km, o percurso inicial foi $C \rightarrow E$. Percorrendo 21 km a partir de E levou José à cidade A e mais 12 km o levam à cidade D, que é onde mora sua mãe.

Comentários sobre a questão: Esse problema pode ser usado como desafio inicial para os estudantes, onde os mesmos terão que usar o raciocínio lógico para analisar frente ao enunciado e a figura, quais combinações de trajeto são possíveis e dentre essas, quais as corretas. Ambas soluções trabalham com a mesma lógica de resolução.

4. (OBMEP 2007) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Figura 7 – Questão 11 OBMEP 2007

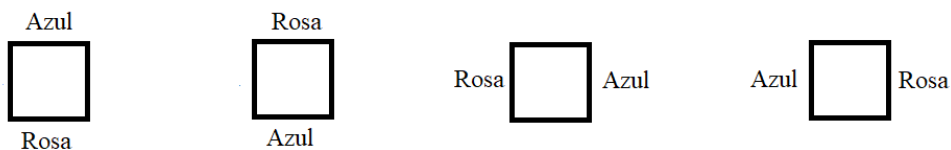


Fonte: Prova OBMEP 2007

- a. 8
- b. 16
- c. 18
- d. 20
- e. 24

Solução alternativa: Analisando as possibilidades totais, com a única restrição de cada parede ser pintado com uma cor diferente, temos $A_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de se pintar as paredes com cores distintas. Note que temos 4 combinações de modo a ficar as paredes Rosa/Azul ou Azul/Rosa frente a frente, conforme a ilustração a baixo.

Figura 8 – Resolução da questão 11 OBMEP 2007



Fonte: Elaborada pelo autor - 2019

Nesses casos, ainda restam duas paredes, que podem ser pintadas de duas formas distintas. Logo, nesse caso, temos $4 \cdot 2 = 8$ maneiras onde ficam as cores Rosa e azul frente a frente. Portanto, o total desejado é $24 - 8 = 16$ maneiras onde as cores Rosa e Azul não ficam frente a frente.

Solução OBMEP: Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$.

Comentários sobre a questão: Nesse tipo de questão, onde se deseja saber o total de combinações, a menos de uma restrição simples, o professor pode aplicar um método de

resolução que se baseia em considerar todas as combinações possíveis sem se preocupar com as restrições, e, logo após calcular separadamente as restrições, com o objetivo de retirar do total os casos indesejados, assim como se procede na solução proposta. Muitas vezes, tentar ir diretamente ao problema, com o objetivo de encontrar de uma vez a resposta correta exige um nível de abstração muito grande por parte do estudante. Então, o professor deve mostrar sempre que possível outras formas de se resolver o mesmo problema, assim o aluno sempre verá a questão por mais de um olhar diferente.

5. (OBMEP 2007) O *contrário* de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é a soma de um contrário de dois algarismos com seu contrário?
- 44
 - 99
 - 121
 - 165
 - 181

Solução alternativa: Uma solução que sempre pode entrar em cogitação em um exame objetivo trata-se do teste das alternativas, onde uma delas sempre será a correta. Ora, é possível notar que $44 = 13 + 31$, $99 = 45 + 54$, $121 = 29 + 92$ e $165 = 78 + 87$. Portanto, por exclusão de alternativas, resta apenas o item E. 181

Solução OBMEP: Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o das unidades; então $n = 10a + b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b + a$. Desse modo, a soma de n e de seu contrário é.

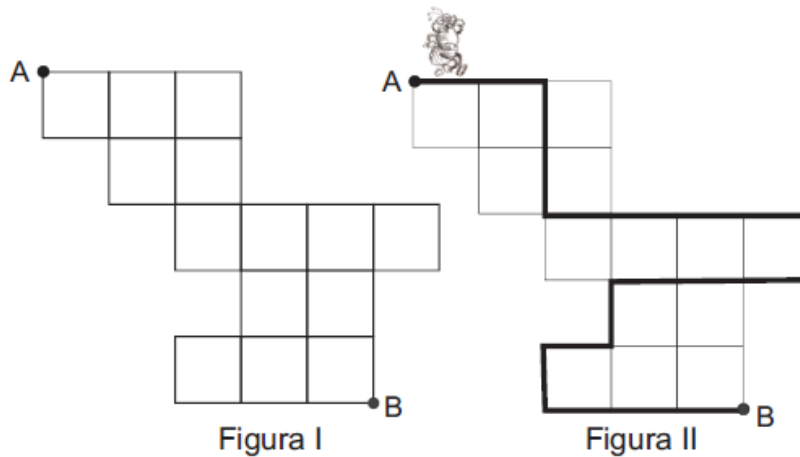
$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$$

e portanto a soma de um número com seu contrário é sempre um múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções são múltiplos de 11, com a exceção de 181.

Comentários sobre a questão: Em muitos casos, os estudantes não sabem chegar a resposta correta de determinadas questões, então, uma das maneiras possíveis de sanar esse problema (não necessariamente a mais rápida) é o teste das alternativas, visto que, das disponíveis, sempre teremos um item correto e que satisfaz todos os critérios do comando da questão. Esse tipo de resolução é corriqueiramente utilizada por muitos estudantes. O professor então pode sugerir para a turma que busque em conjunto identificar números que satisfaçam o pedido no enunciado e nas alternativas, buscando eliminar os itens incorretos e, além disso, enxergar padrões nos números *contrários* encontrados e formalizar uma resolução. Cabe ao professor mostrar nesse caso uma resolução formal como a apresentada pela solução da OBMEP. A mesma exige conhecimentos de múltiplos e sistema de numeração posicional, e após feito isso, recai na eliminação de itens incorretos.

6. (OBMEP 2007) Uma formiguinha quer sair do ponto A e ir até o ponto B da figura I, andando apenas pelos lados dos quadradinho na horizontal ou na vertical para baixo, sem passar duas vezes pelo mesmo lado. A figura II ilustra um possível trajeto da formiguinha.

Figura 9 – Questão 20 OBMEP 2007



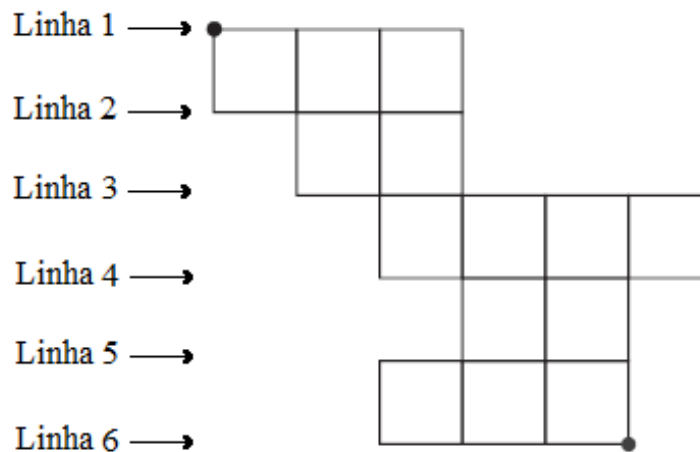
Fonte: Prova OBMEP 2007

De quantas maneiras ela pode ir de A até B?

- a. 120
- b. 240
- c. 360
- d. 480
- e. 720

Solução alternativa: Nomeando os estágios da figura onde a formiguinha deve passar, temos o seguinte

Figura 10 – Resolução 1 da questão 20 OBMEP 2007

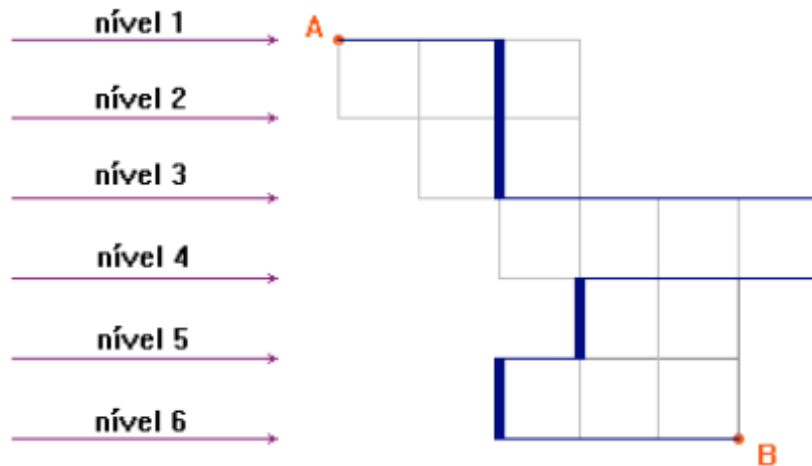


Fonte: Adaptada da prova OBMEP 2007

Agora perceba que para ir da linha 1 para a linha 2 a formiguinha dispõe de quatro caminhos possíveis, são eles: descer; direita - descer; direita - direita - descer; direita - direita - direita - descer. É possível notar que independentemente do caminho escolhido para passar de uma linha para a outra é necessário finalizar o movimento com a etapa de descer, ou seja, os trajetos disponíveis dependem apenas da etapa final que é descer. Portanto, o total de modos possíveis de ir do ponto A até o ponto B é $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 720$ visto que temos 4, 3, 5, 3 e 4 caminhos respectivamente entre as linhas 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5, 5 e 6, finalizando a trajetória no ponto B.

Solução OBMEP: Para ir de A até B a formiguinha tem que descer do nível 1 até o nível 6, conforme a figura.

Figura 11 – Resolução 2 da questão 20 OBMEP 2007



Fonte: Solução prova OBMEP 2007

O caminho que a formiguinha segue é determinado pela escolha do segmento vertical que ela vai usar para passar de um nível para o seguinte, pois o caminho horizontal que liga dois segmentos verticais ligando níveis consecutivos é único. Como exemplo mostramos na figura, em traço mais forte, os segmentos que ela escolheu para fazer o caminho ilustrado no enunciado. O número de segmentos que ela pode usar para passar de um nível para o outro está tabulado a seguir:

- 1 → 2: 4 segmentos
- 2 → 3: 3 segmentos
- 3 → 4: 5 segmentos
- 4 → 5: 3 segmentos
- 5 → 6: 4 segmentos

Segue que o número de maneiras que nossa formiguinha tem para ir de A até B é $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 720$.

Comentários sobre a questão: Inicialmente, este problema é complexo pois o trajeto que a formiguinha pode fazer é aparentemente complicado. Um problema mais simples pode ser consultado na questão 8 desse Capítulo, onde o enunciado trata da mesma ideia com movimentos menos complicados e o trajeto possível de deslocamento é completo, sem variações.

Em sala de aula o professor pode propor que os estudantes encontrem caminhos distintos e verifiquem se existem padrões que podem ser usados para resolver a situação descrita. É esperado que eles percebam que os caminhos possíveis dependem do movimento de descer e analisem esta situação.

Ambas as resoluções trabalham com a mesma linha de raciocínio divergindo apenas em sua escrita.

7. (OBMEP 2008) Os 535 alunos e professores de uma escola fizeram um passeio de ônibus. Os ônibus, com capacidade para 46 passageiros cada, ficaram lotados. Em cada ônibus havia um ou dois professores. Em quantos ônibus havia dois professores?
 - a. 3

- b. 5
- c. 6
- d. 8
- e. 9

Solução alternativa: Note que $535 = 11 \times 45 + 40$, ou seja, temos 11 ônibus cheios com 45 alunos e um professor em cada, e resta então um décimo segundo ônibus com 40 alunos e seis vagas remanescentes. Faremos o seguinte procedimento, no décimo segundo ônibus, colocaremos dois professores, assim temos ainda quatro vagas, que serão ocupadas por quatro alunos, vindos cada um de um ônibus que já estava anteriormente cheio. Logo, temos agora UM ônibus cheio com 44 alunos e dois professores e os demais tem cada um deles um professor, e quatro desses tem cada um uma vaga disponível, que será ocupada por um professor. Logo, temos um total de cinco ônibus com dois professores

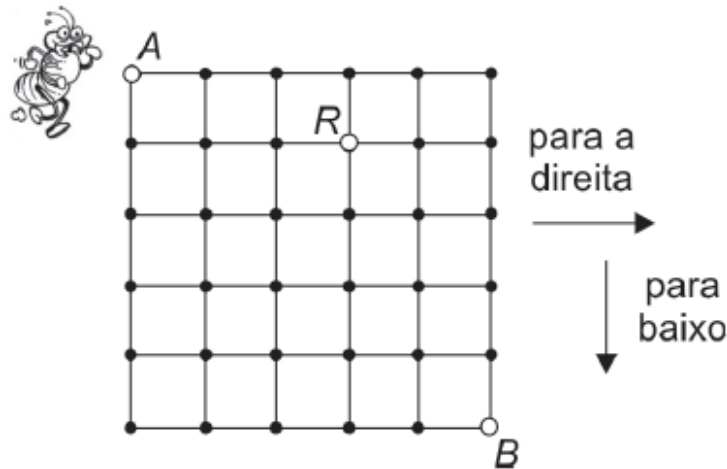
Solução OBMEP: Como $535 = 11 \times 46 + 29$, vemos que 11 ônibus são insuficientes para o passeio. Por outro lado, de $13 \times 46 = 598$ vemos que se o número de ônibus fosse maior ou igual a 13 o número de professores seria no mínimo $598 - 535 = 63$, o que não é possível pois em cada ônibus há no máximo 2 professores. Logo o passeio foi feito com 12 ônibus e o número de professores é $12 \times 46 - 535 = 17$. Como cada ônibus tem 1 ou 2 professores e 17 dividido por 12 tem quociente 1 e resto 5, concluímos que o número de ônibus com 2 professores é 5.

Outra solução OBMEP: Sejam x o número de ônibus com 1 professor (nesses ônibus há 45 alunos) e y o número de ônibus com 2 professores (nesses ônibus há 44 alunos). Logo, $45x + 44y = 535$. Para resolver essa equação, observe que como x e y são inteiros positivos, y tem que ser um múltiplo de 5 menor que 15 (porque $15 \times 44 > 535$), isto é, y vale 5 ou 10. Substituindo esses valores na equação, obtemos $y = 5$.

Comentários sobre a questão: O presente problema pode ser apresentado aos alunos antes mesmo de introduzir o conteúdo de análise combinatória, visto que o mesmo é simples, bastando apenas que os estudantes tenham um bom raciocínio lógico e consigam dividir corretamente os passageiros (alunos e professores) nas respectivas vagas possíveis. Aqui o professor pode sugerir para os estudantes que utilizem o PCP 3, alocando os passageiros nos ônibus. É possível ainda perceber que a solução alternativa e a solução da OBMEP não são divergentes, apenas se diferenciam pela abordagem do problema, porém, a segunda solução da OBMEP apresenta em sua resolução conceitos mais formalizados sobre equações diofantinas, geralmente vistas no ensino superior.

8. (OBMEP 2008) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?

Figura 12 – Questão 12 OBMEP 2008



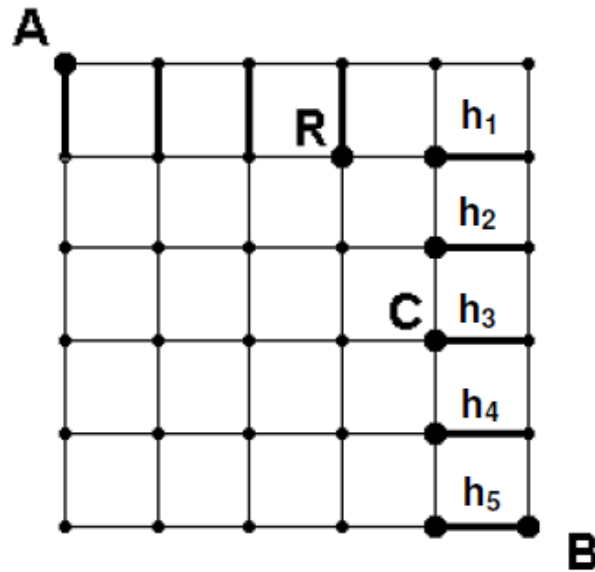
Fonte: Prova OBMEP 2008

- a. 20
- b. 24
- c. 40
- d. 48
- e. 60

Solução alternativa: Sendo D o movimento de se deslocar uma malha para a direita e B o movimento de se deslocar uma malha para baixo, temos que do ponto A até o ponto R as seguintes maneiras de deslocamento BDDD, DBDD, DDBD, DDDB. Para ir do ponto R até o ponto B, temos que ir para baixo quatro vezes e para direita duas vezes, donde temos a seguinte sequência BBBBDD. Perceba que essa sequência de movimentos pode ter sua ordem permutada, formando novas sequências, donde teremos um anagrama com repetição, com a seguinte quantidade $P_6^{4,2} = 15$ maneiras de se deslocar do ponto R até o ponto B. Portanto, temos um total de $4 \times 15 = 60$ maneiras de se deslocar do ponto A até o ponto B.

Solução OBMEP: Para ir de A até R a formiguinha deve escolher um dos quatro segmentos verticais em traço mais grosso na primeira linha da figura. Uma vez escolhido esse segmento, há um único caminho de A até R que passa por ele. Desse modo, a formiguinha pode ir de A até R de quatro maneiras diferentes. Para ir de R a B, ela deve escolher um dos segmentos horizontais h_1, h_2, h_3, h_4 e h_5 na última coluna para chegar ao lado direito da figura, após o que só há uma maneira de chegar até B. Se ela escolher, por exemplo, o segmento h_3 , ela deve ir de R até C, o que pode ser feito de três maneiras diferentes. Repetindo esse raciocínio para os outros pontos concluímos que ela pode ir de R até B de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de ir de A até B é $4 \times 15 = 60$.

Figura 13 – Resolução da questão 12 OBMEP 2008



Fonte: Solução prova OBMEP 2008

Podemos também usar as letras b e d para dizer que a formiguinha percorre um segmento para baixo ou para direita, respectivamente. Um caminho de A até R é então uma sequência de um b e três d's; a formiguinha deve então escolher em qual das quatro posições colocar o b, donde há 4 desses caminhos. Analogamente, um caminho de R até B consiste de uma sequência de quatro b's e dois d's; a formiguinha deve escolher onde colocar os dois d's nas seis posições disponíveis. A primeira posição para o d pode ser escolhida de 6 modos e a segunda de 5, o que nos leva a 6×5 modos de fazer essas duas escolhas. No entanto, ao fazer isto estamos contando cada modo de posicionar os d's duas vezes, uma para cada ordem de escolha das posições; o número correto de possibilidades para o caminho de R a B é, portanto, igual a $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (os caminhos de R a B podem também ser contados usando diretamente a fórmula $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$). Desse modo, a formiguinha tem $4 \times 15 = 60$ maneiras diferentes para ir de A até B passando por R.

Comentários sobre a questão: Esse problema pode ser aplicado logo após a introdução ao conteúdo de anagrama com repetição. Em sala, de aula o professor pode sugerir aos estudantes que analisem os caminhos possíveis para ir do ponto A até o ponto R e pedir para os mesmos identificarem o padrão que ocorre com os movimentos de ir para a direita (D) e ir para baixo (B) nesse trajeto. É esperado que os alunos percebam que sempre teremos que efetuar um movimento B e três movimentos D visando ainda que a ordem que isso ocorre pode ser alterada, ou seja, teremos anagramas a serem formados, bastando então calcular o total de anagramas com as devidas repetições. O estudante deve aplicar um raciocínio análogo para o caminho do ponto R até o ponto B. Uma resolução mais intuitiva pode ser vista na solução proposta pela OBMEP.

9. (OBMEP 2009) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Figura 14 – Questão 17 OBMEP 2009



Fonte: Prova OBMEP 2009

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

- a. 25
- b. 30
- c. 35
- d. 40
- e. 45

Solução alternativa: Note que com os cinco vértices do pentágono conseguimos a seguinte quantidade de segmentos $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ segmentos disponíveis, uma vez que dois vértices determinam um segmento. Agora só precisamos saber de quantas formas podemos escolher dois desses 10 segmentos. Usaremos novamente a fórmula de combinação $C_{10}^2 = 45$ figuras distintas.

Solução OBMEP: Outra maneira de resolver esta questão é listar, organizadamente, as figuras possíveis. Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.

Figura 15 – Resolução 1 da questão 17 OBMEP 2009



Fonte: Solução prova OBMEP 2009

Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.

Figura 16 – Resolução 2 da questão 17 OBMEP 2009



Fonte: Solução prova OBMEP 2009

Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

Comentários sobre a questão: Esse exercício pode ser aplicado como uma atividade de fixação para os estudantes que já tenham aprendido a resolver situações onde o uso das

combinações simples são aplicadas. Trata-se de um problema não tão fácil, onde é preciso aplicar a fórmula de combinação simples duas vezes até chegar na resposta desejada. A solução alternativa apresenta uma resolução mais direta, com um raciocínio mais formal. Já a solução da OBMEP apresenta um caminho mais construtivo, onde utiliza-se de princípios geométricos para mostrar alguns casos possíveis e a partir daí é possível abstrair esse resultado para o pedido na questão.

10. (OBMEP 2009) Um torneio de futebol com 57 times será disputado com as seguintes regras:

- Nenhum jogo pode terminar empatado.
- O time que perder duas partidas será eliminado.
- O torneio termina quando sobrar apenas um time, que será o campeão.

Se o time campeão perder uma vez, quantas partidas serão disputadas no torneio?

- a. 56
- b. 57
- c. 58
- d. 112
- e. 113

Solução alternativa: Note que dos 57 times, sendo apenas um campeão, que perdeu uma única vez, segue que os demais (56 times) perderam cada um duas vezes, tendo então um total de $1 + 2 \cdot 56 = 113$ derrotas/jogos.

Solução OBMEP: Vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 times que foram eliminados após perder 2 partidas cada um, contamos $56 \times 2 = 112$ derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi $112 + 1 = 113$. Além disso, como não houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.

Comentários sobre a questão: Ao se deparar com esse enredo é comum que o estudante queira aplicar a fórmula de combinação simples, para obter o total de partidas ou times do campeonato. Porém a resolução dessa questão se dá por meios completamente lógicos. O professor em sala de aula poderá propor essa questão como desafio extra para seus alunos. O raciocínio aplicado em ambas as resoluções é basicamente o mesmo, divergindo apenas pela escrita.

Observe um problema onde o estudante utilizaria-se da fórmula de combinação simples: *Em um campeonato de futebol participam 20 times, onde cada time se enfrentam duas vezes. Qual o número de partidas realizadas nesse campeonato?*

Ora, sabendo que cada um dos times enfrentam duas vezes, o total de jogos realizados nesse campeonato é $2 \cdot C_{10}^2 = 2 \cdot \frac{10!}{2!(10-2)!} = 90$.

O professor pode apresentar esses problemas um seguido do outro, tornado assim mais propício o entendimento dos problemas.

11. (OBMEP 2010) Joana tem 10 pares diferentes de meias, guardados dentro de uma gaveta. Três meias estão furadas, sendo duas do mesmo par. Quantas meias ela deve tirar da gaveta, uma de cada vez e sem olhar, para ter certeza de que entre elas haja um par sem defeito?
- a. 5
 - b. 6
 - c. 20
 - d. 11
 - e. 13

Solução alternativa: Para ter certeza de que haja um par sem defeito devemos pensar na pior das situações. Pelo enunciado temos um par de meias ambas furadas, um outro par com uma das meias furadas e 8 pares de meias perfeitas. Temos a seguinte situação, retiramos 10 meias de um mesmo pé, ou seja, não formam nenhum par. Dentre essas 10 podemos ter UMA ou DUAS meias furadas. Consideremos a situação onde entre essas 10, temos DUAS meias furadas. Para a 11^a retirada, tiramos mais uma meia furada que forma par com uma outra furada já retirada. Para a 12^a retirada retiraremos uma meia perfeita que forma par com a segunda meia furada retirada entre as 10 primeiras. Agora, na 13^a retirada, teremos de certeza uma meia perfeita (uma vez que as três defeituosas já foram retiradas) que formará par com uma outra perfeita retirada entre as 10 primeiras.

Solução OBMEP: Seja n o menor número de meias que a Joana pode retirar da gaveta com a certeza de que entre as meias retiradas haja um par sem defeito. Então $n - 1$ é o maior número de meias que podem ser retiradas de tal forma que, entre elas, qualquer par seja defeituoso. O pior dos casos ocorre quando se retiram os dois pares defeituosos (o par de meias furadas e o par com uma das meias furada) e uma meia de cada um dos outros oito pares, num total de 12 meias. Portanto $n - 1 = 12$ e então $n = 13$.

Comentários sobre a questão: O Princípio da Casa dos Pombos é fácil de se entender e existem muitas questões que utilizam esse princípio em suas soluções (como este problema). O professor pode propor alguns exercícios aos seus alunos em sala de aula e sugerir que nesse tipo específico de questão, os alunos pensem na pior situação que pode ocorrer. A solução alternativa e a sugerida pela OBMEP usam basicamente o mesmo raciocínio divergindo apenas pela escrita.

12. (OBMEP 2010) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?
- 20
 - 32
 - 60
 - 72
 - 120

Solução alternativa: Temos duas situações:

Primeira: Ana recebe a boneca e outro presente. Ana, Bruna, Cecília e Daniela tem respectivamente 4, 3, 2 e 1 possibilidades de escolha de presentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras de serem presenteadas.

Segunda: Ana recebe só a boneca de presente. Dessa forma, temos quatro presentes disponíveis para Bruna, Cecília e Daniela, onde uma delas receberá dois desses presentes. Note que, dos 4 presentes disponíveis, temos que escolher 2 para uma única pessoa, donde dispomos da seguinte quantidade $C_4^2 = 6$ maneiras para escolher dois presentes dos quatro disponíveis e como cada uma das três pode ficar com dois presentes temos $6 \times 3 = 18$ maneiras para essa escolha. Perceba ainda que ainda restam dois presentes para duas meninas, onde temos ainda mais duas possibilidades. Logo, nesta situação temos $18 \times 2 = 36$ maneiras distintas das quatro meninas serem presenteadas. Portanto, Paulo dispõe de total de $24 + 36 = 60$ maneiras distintas de presentear suas sobrinhas.

Solução OBMEP: Temos dois casos a analisar: (a) Ana recebe dois presentes ou (b) Ana recebe apenas a boneca. No caso (a), Ana recebe a boneca e Tio João deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes (que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai

ganhar o último (1 escolha). Isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. No caso (b), Tio João deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e as outras duas apenas um. O Tio João deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ($4 \times 3 = 12$ escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Isso pode ser feito de $3 \times 12 \times 1 = 36$ maneiras diferentes. No total, Tio João pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.

Comentários sobre a questão: O presente problema trata-se de um clássico exemplo de utilização de combinação com restrições, onde o estudante necessariamente precisa dividir o problema em casos particulares com o objetivo de tornar a solução mais simples. Caso o estudante não consiga resolver o problema, o professor pode auxiliá-lo a resolver pelo menos uma parte do pedido, ou seja, que ele resolva o caso em que Ana recebe apenas um presente, ou então o caso onde Ana recebe dois presentes. Depois dessa dica é esperado que o estudante consiga pensar por si só e resolva o restante da questão. Ambas as soluções apresentadas trabalham com a mesma linha de resolução, divergindo apenas em como abordar as combinações.

13. (OBMEP 2011) Quatro times disputaram um torneio de futebol em que cada um jogou uma vez contra cada um dos outros. Se uma partida terminasse empatada, cada time ganhava um ponto; caso contrário, o vencedor ganhava três pontos e o perdedor, zero. A tabela mostra a pontuação final do torneio. Quantos foram os empates?

Time	Pontos
Cruzínthians	5
Flameiras	3
Nauritiba	3
Greminese	2

Fonte: Prova OBMEP 2011

- a. 2
- b. 3
- c. 4
- d. 5
- e. 6

Solução alternativa: Com os 4 times, é possível realizar um total de $C_4^2 = 6$ jogos, onde cada time joga 3 vezes. Como Greminese tem apenas 2 pontos, temos como única possibilidade dois empates e uma derrota para os três jogos. E analogamente, os 5 pontos do Cruzinthians vieram de uma vitória e dois empates. Greminese pode ter empatado ou perdido o jogo contra o Cruzinthians. Suponhamos que tenha ocorrido a situação onde tivemos uma vitória.

Dessa forma, os jogos entre Cruzinthians e Flameiras, Cruzinthians e Nauritiba, Greminese e Flameiras, Greminese e Nauritiba tiveram resultado empate (4 Jogos empate).

Como cada time joga apenas 3 vezes, segue que, tendo Flameiras e Nauritiba 3 pontos, donde cada um desses times tem dois empates, o terceiro ponto vem de um outro empate, esse ponto vem do jogo entre os times Flameiras e Nauritiba.

Donde temos um total de 5 com resultado empate.

Solução OBMEP: Cada time jogou três vezes. Com 5 pontos, o Cruzínthians só pode ter vencido uma partida e empatado duas, pois se tivesse vencido duas partidas, teria pelo menos 6 pontos e se não tivesse vencido nenhuma, teria no máximo 3 pontos. O Greminese não venceu nenhuma partida, pois obteve apenas 2 pontos; logo empatou

duas partidas e perdeu uma. O Flameiras, em segundo lugar com 3 pontos, não venceu nenhuma partida, pois se isso tivesse acontecido ele teria que ter perdido duas; como o Greminese não ganhou nenhuma e o Cruzinthians apenas uma, ele teria perdido para o Nauritiba. Por outro lado, o mesmo raciocínio mostra que então o Nauritiba deveria ter perdido para Flameiras, o que não é possível; logo, o Flameiras e o Nauritiba empataram suas três partidas. Segue que o número de empates foi $3 + 3 - 1 = 5$; o $- 1$ aparece nessa expressão pois o empate entre Flameiras e Nauritiba deve ser contado apenas uma vez.

Figura 17 – Resolução 1 da questão 04 OBMEP 2011

	Cruzinthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzinthians		1	1	3
Flameiras	1		1	1
Nauritiba	1	1		1
Greminese	0	1	1	

Fonte: Solução prova OBMEP 2011

Solução OBMEP 2: Outra solução é notar que em cada jogo disputado são distribuídos 2 pontos, no caso de empate ou 3 pontos, caso não ocorra empate. Como cada um dos quatro times jogou uma única vez com seus três adversários, foram disputados ao todo seis jogos, nos quais foram distribuídos $5 + 3 + 3 + 2 = 13$ pontos. A única maneira de parcelar 13 em seis parcelas de 2 ou 3 é $13 = 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$; logo, cinco dos seis jogos terminaram empatados.

Solução OBMEP 3: Uma outra solução é a seguinte. Observa-se, como acima, que o Cruzinthians venceu uma partida e empatou duas. Se ele tivesse vencido o Flameiras, a tabela poderia ser parcialmente preenchida como segue.

Figura 18 – Resolução 2 da questão 04 OBMEP 2011

	Cruzinthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzinthians		3	1	1
Flameiras	0			
Nauritiba	1			
Greminese	1			

Fonte: Solução prova OBMEP 2011

Segue que o Flameiras deve ter perdido mais uma partida e vencido a terceira para totalizar 3 pontos. Nesse caso, como o Greminese empatou duas partidas, ele empatou uma com o Nauritiba e a tabela pode ser refinada para

Figura 19 – Resolução 3 da questão 04 OBMEP 2011

	Cruzinthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzinthians		3	1	1
Flameiras	0			
Nauritiba	1			1
Greminese	1		1	

Fonte: Solução prova OBMEP 2011

Logo, para que o Nauritiba totalizasse 3 pontos, ele deveria ter empatado com o Flameiras, o que não pode acontecer. De modo análogo vemos que o Cruzinthians não pode ter empatado com o Nauritiba; logo a tabela parcialmente preenchida deve ser

Figura 20 – Resolução 4 da questão 04 OBMEP 2011

	Cruzinthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzinthians		1	1	3
Flameiras	1			
Nauritiba	1			
Greminese	0			

Fonte: Solução prova OBMEP 2011

A partir daí é imediato completar a tabela.

Comentários sobre a questão: O presente problema pode ser aplicado logo após o conteúdo de combinação simples, para que os estudantes utilizem esse conceito em partes da resolução, ou então pode ser aplicado antes do conteúdo de análise combinatória, forçando os estudantes a utilizarem meios dedutivos e lógicos na solução do problema. O professor pode apresentar a tabela acima, vazia, para os estudantes, fornecendo meios para que os mesmos possam preenche-la. Ambas soluções apresentadas buscam dentre os possíveis jogos, aqueles cujos resultados se adequam ao comando da questão.

14. (OBMEP 2011) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?
- 12654
 - 12740
 - 13124
 - 13210
 - 13320

Solução alternativa: Note que, com os algarismos 1, 4, 6 e 8 podemos formar as seguintes combinações de três algarismos $\{1,4,6\}$, $\{1,4,8\}$, $\{4,6,8\}$ e $\{6,1,8\}$.

Analisando o caso 1,4,6, temos um total de $P_3 = 6$ permutações com esses algarismos, que são $\{146, 164, 416, 461, 614, 641\}$. Temos ainda, em cada um desses casos que, os algarismos 1, 4, e 6 se repetem duas vezes em cada uma das situações, unidade, dezena e centena (Este fato verificasse usando permutação simples. Ora, fixe um dos três algarismo para a centena, restam duas possibilidades para a dezena e uma para a unidade, logo temos $1 \times 2 \times 1 = 2$ números). Logo, estaremos somando esses seis números, nas unidades $1 + 1 + 4 + 4 + 6 + 6 = 22$, onde ficamos com 2 na unidade e levamos 2 para a dezena, agora temos na dezena $1 + 1 + 4 + 4 + 6 + 6 + 2 = 24$, onde ficamos com 4 na dezena e levamos 2 para a centena, onde temos $1 + 1 + 4 + 4 + 6 + 6 + 2 = 24$, ficando assim com soma igual a 2442, usando os algarismos $\{1,4,6\}$. Analogamente, para o caso $\{1,4,8\}$ temos soma 2886, para o caso $\{4,6,8\}$ temos a soma 3996 e para o caso $\{6,8,1\}$ temos soma 3330.

Portanto, a soma total dos números de três algarismo formados a partir dos algarismo 1, 4, 6 e 8 é $2442 + 2886 + 3996 + 3330 = 12654$.

Solução OBMEP: Com os números 1, 4, 6 e 8 podem-se formar $4 \times 3 \times 2 = 24$ números de três algarismos distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e por fim 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos 6, 4, 2 e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $\frac{24}{4} = 6$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $6 \times (8 + 6 + 4 + 1) = 114$, a soma desses 24 números será $114 + 10 \times 114 + 100 \times 114 = 111 \times 114 = 12654$.

Comentários sobre a questão: Esse problema pode ser aplicado logo após a apresentação do PFC (Definição 3) ou ainda, a critério do professor, após o conteúdo de permutação simples. Como desafio, essa questão pode ser aplicada aos alunos antes da

apresentação do PFC, para que os mesmos analisem todos os possíveis 24 números, e tentem perceber algum padrão com relação ao algarismo da unidade, dezena e centena. Logo após isso realizem a soma dos números encontrados manualmente. Uma solução mais explícita pode ser encontrada na resolução alternativa, onde a separação em casos deve auxiliar o entendimento do problema pelos alunos. O passo a passo proposto pela OBMEP é mais direto, deixando algumas possíveis dúvidas em alunos com pouco entendimento sobre o tema.

15. (OBMEP 2011) Uma caixa contém 105 bolas pretas, 89 bolas cinzentas e 5 bolas brancas. Fora da caixa há bolas brancas em quantidades suficiente para efetuar repetidamente o seguinte procedimento, até que sobrem duas bolas na caixa:
- Retira-se, sem olhar, duas bolas da caixa;
 - Se as bolas retiradas forem de cores diferentes, a de cor mais escura é devolvida para a caixa;
 - Caso contrário, descartam-se as bolas retiradas e coloca-se na caixa uma bola branca.

Sobre as cores das duas bolas que sobram, pode-se garantir que

- a. as duas serão brancas
- b. as duas serão cinzentas
- c. as duas serão pretas
- d. exatamente uma será preta
- e. exatamente uma será cinzenta

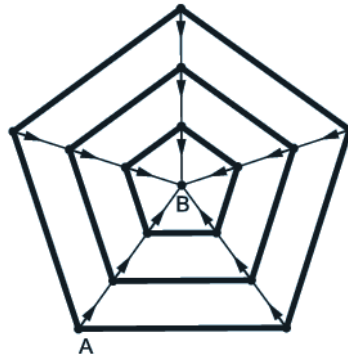
Solução alternativa: De acordo com o enunciado a única forma de descartar uma bola preta é quando as duas bolas retiradas forem pretas e logo as duas serão descartadas nesse momento, daí, as bolas pretas só podem ser retiradas em pares e, como temos 105 bolas pretas, segue que em algum momento após sucessivas retiradas (não temos como saber com exatidão essa quantidade) restará apenas uma bola preta. A partir de agora restam uma bola preta, bolas brancas e bolas cinza. Sempre que um par de bolas for retirado e entre elas estiver a bola preta, a bola preta será novamente colocada na caixa. Então após sucessivas retiradas irá restar apenas um par de bolas na caixa, que será uma bola preta e outra de cor cinza ou branca. Portanto sobrarão exatamente uma bola preta na caixa entre as duas últimas.

Solução OBMEP: Quando se retiram duas bolas pretas da caixa, elas não retornam; mas quando as bolas retiradas são uma preta e outra de cor distinta, a preta retorna. Isso mostra que o número de bolas pretas na caixa diminui de dois em dois. Observamos que o número de bolas na caixa diminui de um a cada retirada, de modo que eventualmente sobrarão duas bolas na caixa. Como o número inicial de bolas pretas é ímpar, sempre haverá um número ímpar de bolas pretas na caixa; desse modo, exatamente uma das duas bolas que sobrar na caixa é preta.

Comentários sobre a questão: Não temos como calcular a quantidade de movimentos necessários para finalizar esse procedimento, nem qual a cor da bola que resta com a bola preta, porém, seguindo o enunciado do problema, uma hora restará apenas uma bola preta na caixa, isso é garantido após uma quantidade suficiente de retiradas. O professor em sala de aula, com poucas bolas, digamos 3 ou 5 bolas pretas, pode aplicar esse problema para que seus alunos consigam abstrair o enunciado do problema, e assim, formular um plano de ação para resolver o problema.

16. (OBMEP 2011) Uma aranha encontra-se no ponto A de sua teia e quer chegar ao ponto B, sem passar mais de uma vez por um mesmo segmento de teia. Além disso, ao percorrer um sentido radial (em traço mais fino), ela deve seguir o sentido indicado pela flecha. Quantos são os caminhos possíveis?

Figura 21 – Questão 20 OBMEP 2011



Fonte: Prova OBMEP 2011

- a. $2^3 \times 5$
- b. $11^3 \times 5^2$
- c. 5^3
- d. 11^3
- e. 2×5^3

Solução alternativa: A teia dessa aranha é formada inicialmente por três pentágonos. Um deles sendo o maior/externo, ou médio/intermediário e um menor/interno. Existem em cada um desses pentágonos 11 escolhas para a aranha chegar ao próximo pentágono, são eles: ir diretamente para o próximo pentágono sem passar pelas arestas do mesmo, ou ir no sentido horário para um dos próximos vértices desse mesmo pentágono, implicando 5 possibilidades, e analogamente 5 possibilidades no sentido anti-horário. Portanto, em cada pentágono temos 11 possibilidades de escolha para se locomover até o pentágono mais interior, como temos três pentágonos, chegamos ao total de $11 \times 11 \times 11 = 11^3$ possibilidade de ir do ponto A ao ponto B.

Solução OBMEP: Antes de chegar ao centro, a aranha tem as seguintes escolhas em cada vértice de um pentágono:

- ir direto para o próximo nível, sem passar pelas arestas do pentágono em que se encontra;
- caminhar no sentido horário pelas arestas do pentágono em que se encontra por no máximo 5 segmentos, passando então para o próximo nível, e
- caminhar no sentido anti-horário pelas arestas do pentágono em que se encontra por no máximo 5 segmentos, passando então para o próximo nível. Assim, em cada pentágono a aranha tem 11 escolhas para passar para o próximo nível; como são três os pentágonos, a aranha tem um total de $11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^3$ caminhos possíveis para chegar ao centro da teia.

Comentários sobre a questão: O presente problema pode ser apresentado aos estudantes como exercício de fixação de conteúdos logo após o tema do Princípio Fundamental da Contagem, uma vez que para a resolução deste problema temos a aplicação direta deste assunto. Ambas as soluções apresentadas abordam os mesmos métodos de resolução, apenas divergindo vagamente suas escritas.

17. (OBMEP 2012) Para a decoração da festa junina, Joana colocou em fila 25 bandeirinhas azuis, 14 brancas e 10 verdes, sem nunca deixar que duas bandeirinhas de mesma cor ficassem juntas. O que podemos concluir, com certeza, dessa informação?
- a. Nas extremidades da fila aparecem uma bandeirinha azul e uma branca.
 - b. Há cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparecem a cor verde.
 - c. Há pelo menos uma bandeirinha branca ao lado de uma verde.
 - d. Pelo menos quatro bandeirinhas azuis têm uma branca de cada lado.
 - e. Não existe um grupo de três bandeirinhas consecutivas de cores todas diferentes.

Solução alternativa: Ora, note que de acordo com o enunciado, bandeiras de mesmas cor não podem ficar juntas. Logo as 25 bandeirinhas azuis devem ser separadas por 24 bandeirinhas de outras cores, visto que entre as 25 bandeirinhas existem 24 espaçamentos entre elas, fazendo com que sempre tenhamos bandeirinhas azuis no início e no fim da sequência. Fazendo a representação A, B e V por respectivamente a bandeirinha de cor azul, branca e verde, segue que uma possível distribuição das bandeiras é:

ABABABABABABABABABABABABABAVAVAVAVAVAVAVAVAVAVAVAVAVAVAVAV

Agora, vamos eliminar as alternativas falsas com objetivo de restar apenas o item verdadeiro. Com efeito, pelo exposto, o item a. é falso, visto que as 24 bandeirinhas verdes e brancas ficam entre as 25 azuis, logo resta apenas bandeira azuis nas extremidades.

O item e. também é falso, visto que na sequência disposta acima as bandeirinhas 28, 29 e 30 são todas de cores diferentes. Também pela configuração acima o item c. se torna falso, visto que nenhuma bandeira branca fica ao lado de uma verde.

Pelo enunciado, precisamos ter uma certeza frente a uma sequência desconhecida, logo não podemos garantir nada a respeito do item d. pela sequência particular apresentada acima. O item d. se torna falso visto que permutando as bandeirinhas brancas pelas verdes existe uma sequência possível que é contrária ao item, vejamos um exemplo.

ABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABABABABABA

Portanto, não é possível garantir o afirmado no item d.

Logo, por exclusão o item b. torna-se verdadeiro.

Solução OBMEP: Para simplificar, no parágrafo a seguir “azul” significa “bandeirinha azul” e analogamente para as outras cores. Para que não haja azuis juntas, é necessário que entre duas azuis haja pelo menos uma bandeirinha de outra cor. Para isso, são necessárias pelo menos 24 bandeirinhas não azuis; como há exatamente $14 + 10 = 24$ bandeirinhas brancas e verdes, concluímos que a fila de bandeirinhas começa e termina com uma azul e que entre quaisquer duas azuis há exatamente uma branca ou uma verde. Em particular, as alternativas a. e c.) são falsas. Usando as letras A, B e V para as cores azul, branco e verde, a fila abaixo mostra que a alternativa d. é falsa:

ABABABABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABA

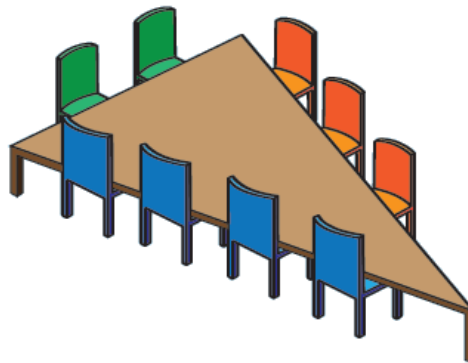
Vamos agora pensar em uma fila qualquer como uma sequência de blocos de duas letras dos tipos AB e AV, com uma letra A na extremidade direita. Pelo menos um bloco AB deve estar ao lado de um bloco AV, criando assim um bloco maior ABAV ou AVAB. Em qualquer dos casos, vemos uma sequência (BAV ou VAB) de três bandeirinhas de cores todas diferentes, o que mostra que a alternativa E) é falsa. Finalmente, notamos que uma fila da Joana há 14 blocos AB e 10 blocos AV, além do A à direita. Com esses 10 blocos AV é possível separar no máximo 11 blocos AB uns dos outros; assim, há pelo menos dois blocos AB consecutivos, seguidos de uma letra A. Logo em qualquer fila da Joana há um bloco do tipo ABABA, ou seja, há pelo menos cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparece a cor verde.

Comentários sobre a questão: Note que neste problema não é utilizado uma fórmula ou o Princípio Fundamental da Contagem em sua resolução. Basicamente, um estudante precisa usar métodos lógicos e dedutivos em sua resolução. Muitas vezes os estudantes

preferem questões onde o comando da questão fornece meios suficientes para a utilização de uma fórmula simples que já leva ao resultado procurado. Este problema fornece meios para que os alunos utilizem o raciocínio matemático necessário para se resolver questões de análise combinatória. Portanto, é preciso que o professor em sala de aula traga problemas como este e desafie seus alunos a deduzirem suas respostas.

18. (OBMEP 2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados tem 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 22 – Questão 18 OBMEP 2012



Fonte: Prova OBMEP 2012

- a. 288
- b. 6720
- c. 10080
- d. 15120
- e. 60480

Solução alternativa: De acordo com o enunciado, temos o menor lado com dois lugares, que Alice e Bernardo podem sentar de $2 \times 1 = 2$ maneiras, para o lado com quatro lugares, eles podem sentar de $3 \times 2 = 6$ maneiras, e por fim, para o lado com três lugares, eles podem sentar-se de $2 \times 2 = 4$ maneiras, totalizando $2 + 4 + 6 = 12$ maneiras de Alice e Bernardo ocuparem juntos essa mesa. Logo sobram sete lugares para serem ocupadas por 4 amigos, totalizando $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ de ocupar esses 7 lugares.

Portanto, o total de maneiras de ocupar essa mesa, com o critério estabelecido é $12 \times 840 = 10080$ maneiras.

Solução OBMEP: Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar-se à mesa de $6 \times 2 \times 840 = 10080$ maneiras diferentes.

Comentários sobre a questão: O conteúdo de arranjo pode ser utilizado na resolução deste problema, que necessita de um entendimento apurado do enunciado por parte do estudante já que as restrições são inicialmente complicadas. Em sala de aula é sugerido para o professor que aplique um exemplo mais simples, parecido com o do problema, porém, com menos restrições.

Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa retangular, todos em um único lado da mesa, que dispõe de 9 lugares no lado escolhido para o grupo sentar.

De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos?

Uma vez que Alice e Bernardo devam ficar juntos, é esperado que o estudante perceba que pode considerá-los como um único elemento do grupo, lembrando ainda que a ordem em que eles sentam à mesa influencia em uma nova combinação.

Ora, Alice e Bernardo podem sentar juntos em 8 cadeiras, os outros quatro amigos podem sentar em 7, 6, 5 e 4 cadeiras, respectivamente. Como Alice e Bernardo podem permutar seus lugares à mesa, temos então $2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 13440$ maneiras.

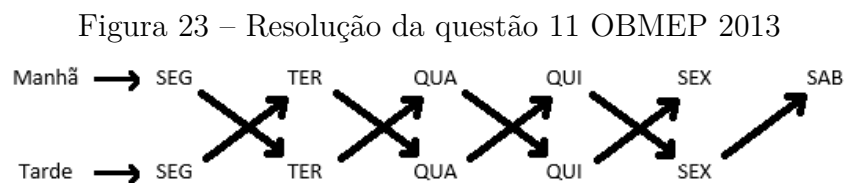
Agora o problema inicial pode ser aplicado com os estudantes. O professor pode sugerir aos mesmos que dividam o problema em casos particulares, com objetivo de deixar a resolução mais simples.

19. (OBMEP 2013) Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma aula de manhã e outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?
- 96
 - 102
 - 126
 - 144
 - 180

Solução alternativa: Tendo disponível três horários pela manhã de segunda a sábado, temos um total de $6 \times 3 = 18$ possibilidades de escolha da aula de natação pela manhã, e analogamente, temos $5 \times 2 = 10$ maneiras de escolher a aula pelo turno da tarde, totalizando $18 \times 10 = 180$ maneiras de escolher uma aula pela manhã e outra à tarde, sem restrições.

Considerando agora o caso onde a aula é realizada no mesmo dia, nos dois turnos, temos um total de 5 dias (Segunda à sexta), onde segue disponível 3 horários pela manhã e 2 à tarde, implicando $5 \times (3 \times 2) = 30$ maneiras de escolher as aulas no mesmo dia.

Para o caso em que as aulas são em dias consecutivos, temos de acordo com a figura 23 abaixo 9 casos, onde Ana pode começar a semana com aulas pela manhã ou tarde.



Fonte: Elaborada pelo autor - 2019

Daí, temos um total de $9 \times (3 \times 2) = 54$ maneiras de escolha de aulas em dias consecutivos. Portanto, seguindo as restrições temos um total de $180 - 30 - 54 = 96$ maneiras

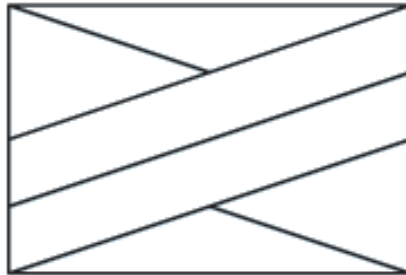
Solução OBMEP: Vamos dividir os possíveis horários de Ana em dois casos: (1) se ela tem aula aos sábados e (2) se ela não tem aula aos sábados. No caso (1), ela deve escolher sua aula de sábado (3 possibilidades) e depois sua aula à tarde (2 possibilidades) em algum dia de segunda a quinta (4 possibilidades). Temos $3 \times 2 \times 4 = 24$ então horários possíveis nesse caso. No caso (2), ela deve escolher dois dias não consecutivos da semana (6 possibilidades), escolher um deles para ter aula pela manhã (2 possibilidades; automaticamente, no outro dia escolhido ela terá aula à tarde), escolher seu horário da manhã (3 possibilidades) e seu horário da tarde (2 possibilidades). Temos $6 \times 2 \times 3 \times 2 =$

72 então horários possíveis nesse caso. No total, Ana tem $24 + 72 = 96$ horários possíveis para fazer suas aulas com as restrições do enunciado.

Comentários sobre a questão: O problema aborda o conteúdo de arranjo, também podendo ser usado o PFC em sua resolução. Novamente, temos um problema onde é possível encontrar o total de casos sem se preocupar com as restrições e logo após feito isto, calcular especificamente as restrições, com objetivo de subtrair do total esses casos encontrados. Um raciocínio desse modo pode ser encontrado na solução alternativa. A resolução da OBMEP busca encontrar diretamente os casos desejados no problema dividindo-o em casos e aplicando métodos mais intuitivos quando “analisa as possibilidades”.

20. (OBMEP 2013) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que as regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

Figura 24 – Questão 17 OBMEP 2013

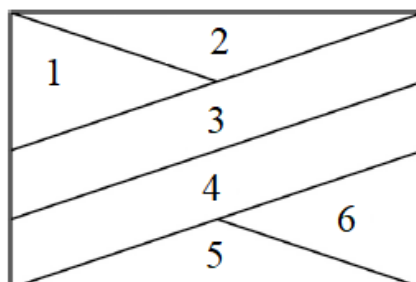


Fonte: Prova OBMEP 2013

- a. 336
- b. 420
- c. 576
- d. 864
- e. 972

Solução alternativa: Observe que de acordo com o enunciado e a figura é impossível pintar a bandeira com duas cores ou menos (uma vez que temos três partes adjacentes), ou seja, só poderemos pintar com no mínimo 3 das 4 cores. Assim, considerando apenas a restrição das cores adjacentes serem distintas, temos como caso geral que as partes de 1 a 6 (conforme a figura 25) tem, respectivamente 4, 3, 2, 3, 3 e 2 possibilidades de tintas, logo temos $4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$ maneiras de pintar essa bandeira com ao menos 3 cores, de modo que as cores em partes adjacentes sejam distintas.

Figura 25 – Resolução 1 da questão 17 OBMEP 2013

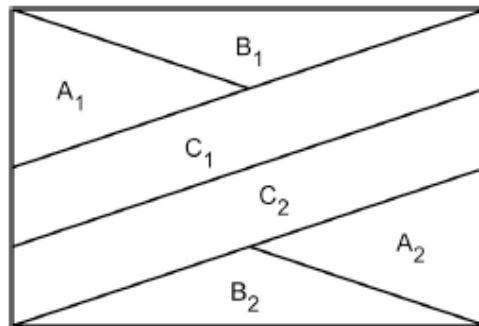


Fonte: Adaptada prova OBMEP 2013

Devemos agora, do total encontrado anteriormente, retirar os casos onde só usamos três cores distintas. Ora, conforme a ilustração e analogamente, temos um total de $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras de pintar a bandeira com apenas três cores. Mas perceba que temos 4 maneiras de selecionar dentre essas 4, 3 cores. Logo, a resposta desejada é $432 - 4 \times 24 = 336$ maneiras de pintar essa bandeira com 4 cores e de modo que as partes adjacentes tenham cores distintas.

Solução OBMEP: Chamemos de n_1 o número de maneiras diferentes que Paulo pode pintar a bandeira, de acordo com as condições do enunciado, usando pelo menos 3 cores dentre as 4 cores disponíveis, e de n_2 o número de maneiras diferentes que Paulo pode pintar a bandeira usando 3 cores diferentes, dentre as 4 que ele dispõe. A resposta ao nosso problema será $n = n_1 - n_2$.

Figura 26 – Resolução 2 da questão 17 OBMEP 2013



Fonte: Solução prova OBMEP 2013

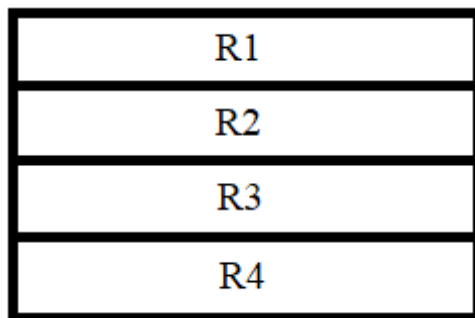
Vamos supor que Paulo pinte a bandeira na sequência $A_1B_1C_1C_2B_2A_2$. Pelo princípio multiplicativo, temos $n_1 = 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$. Por outro lado, para cada trio de cores diferentes temos $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes de pintar a bandeira. Como Paulo tem 4 maneiras diferentes de escolher trios de cores diferentes, temos que $n_2 = 4 \times 24 = 96$. Logo, $n = 432 - 96 = 336$.

Comentários sobre a questão: Inicialmente, este problema parece ser simples por ser resolvido apenas utilizando o PFC. Porém, suas restrições o tornam relativamente complicado. Mais uma vez o método de encontrarmos um total e deste retirarmos os casos indesejáveis foi utilizado. Em muitos casos esse método além de ser o mais fácil, pode ser o único caminho de resolução. Após estudar o PFC um estudante conseguirá facilmente encontrar o total de maneiras de se pintar essa bandeira preocupando-se apenas com as cores adjacentes distintas. Talvez nesse processo o aluno sinta dificuldades apenas em conseguir uma sequência de partes a serem pintadas organizadamente. Após algumas tentativas o mesmo perceberá na prática que essa ordem não influenciará em sua resposta final, visto que as regiões estão bem dispostas na bandeira. Ambas as soluções apresentam o mesmo raciocínio, divergindo apenas em sua escrita.

Um problema correlato que pode ser apresentado aos estudantes é o seguinte:

“De quantas maneiras distintas podemos pintar as regiões da bandeira a seguir de modo que regiões adjacentes tenham sempre cores diferentes, dispondo de quatro cores de tintas diferentes.”

Figura 27 – Problema correlato



Fonte: Elaborada pelo autor - 2019

Resolução do problema correlato: Note que para a região R1 temos quatro possibilidades de tinta disponíveis, já para R2 temos apenas três cores disponíveis, uma vez que R1 é adjacente a R2. Para R3 temos três possibilidades uma vez que a cor utilizada em R1 já está disponível e R3 é adjacente a R2. Para R4 temos analogamente a situação anterior três possibilidades. Logo o total de maneiras distintas de se pintar essa bandeira é $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ combinações.

Perceba que o problema correlato trata sobre a mesma situação abordada na questão da OBMEP, sendo este mais simples e podendo ser aplicado inicialmente aos estudantes.

Para os estudantes mais curiosos, um resultado mais geral e abstrato pode ser consultado no Teorema 11.

21. (OBMEP 2014) Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual a metade do número total de lançamentos?
- 10
 - 15
 - 20
 - 30
 - 40

Solução alternativa: Após lançar 2014 vezes essa moeda, pelo enunciado, temos 997 caras e 1017 coroas. Ora, temos que até agora existem 20 coroas a mais que caras. Se lançar a moeda 20 vezes o obtermos 20 caras seguidas, conseguiremos $997 + 20 = 1017$ caras e 1017 coroas. Sendo assim, temos que a quantidade de caras é metade do total de lançamentos.

Solução OBMEP: Seja x o número de caras consecutivas obtidas após os primeiros 2014 lançamentos. Então, de acordo com o enunciado do problema, x deverá satisfazer a igualdade $997 + x = \frac{2014+x}{2}$, ou, equivalentemente, $1994 + 2x = 2014 + x$, de onde obtemos $x = 2014 - 1994 = 20$.

Comentários sobre a questão: Exemplos clássicos de análise combinatória utilizam situações de arremessar moedas, porém, este problema é bem mais simples do que se pensa. O conteúdo abordado é equação do 1º grau, como procede na solução apresentada pela OBMEP ou então raciocínio lógico ao analisar os casos, assim como se apresenta na solução alternativa. Em sala de aula o professor pode solicitar aos alunos que realize o seguinte experimento:

Jogue uma moeda não viciada a quantidade de vezes que forem necessárias para obter o mesmo número de caras e coroas ao anotar a face voltada para cima.

Em alguns casos o resultado pedido no experimento pode surgir com poucos lançamentos, em outros não. O fato é que quanto maior a quantidade de lançamento feito pelos alunos, eles podem perceber que a quantidade de caras será próxima a quantidade de coroas.

O professor tem aqui um problema correlato ao conteúdo de Probabilidade, que em geral será ministrado após os temas de análise combinatória.

22. (OBMEP 2014) Gustavo possui certa quantidade de moedas de 1, 10, 25 e 50 centavos, tendo pelo menos uma de cada valor. É impossível combiná-las de modo a obter exatamente 1 real. Qual é o maior valor total possível para suas moedas?
- 86 centavos
 - 1 real e 14 centavos
 - 1 real e 19 centavos
 - 1 real e 24 centavos
 - 1 real e 79 centavos

Solução alternativa: Pelo enunciado, temos no mínimo uma moeda de 1, 10, 25 e 50 centavos e é impossível combiná-las de modo a formar um real. Suponhamos que temos mais de uma moeda de 50 centavos, digamos duas, isso nos levaria a formar uma combinação de um real, o que é impossível, logo, Gustavo possui uma única moeda de 50 centavos. Analogamente, ele não pode possuir duas moedas de 25 centavos, pois com uma moeda de 50 e duas de 25 centavos, formaria um real. Disso, Gustavo possui uma moeda de 50 e uma moeda de 25 centavos. Gustavo ainda não pode possuir cinco moedas de 10 centavos, pois formariam com a moeda de 50 centavos um real. Com o intuito de maximizar o valor, ele pode possuir quatro moedas de 10 centavos. Com o mesmo raciocínio, ele não pode possuir cinco moedas de 1 centavo, pois formaria com uma de 50, uma de 25, duas de 10 e cinco de 1 centavos um real. Daí, Gustavo possui quatro moedas de 1 centavo.

Portanto, concluímos que Gustavo possui uma moeda de 50, uma de 25, quatro de 10 e quatro de 1 centavo, totalizando 1,19 reais.

Solução OBMEP: Como Gustavo possui pelo menos uma moeda de cada tipo, ele não pode ter 2 moedas de 50 centavos, senão formaria 1 real. Ele também não pode ter 2 moedas de 25 centavos. Com a moeda de 50 centavos e com uma moeda de 25 centavos ele também não pode formar 1 real. Concluímos assim, que Gustavo possui uma moeda de 50 centavos e uma moeda de 25 centavos. Gustavo não pode ter 5 moedas de 10 centavos, senão junto com a moeda de 50 centavos ele formaria 1 real. Para maximizar, podemos supor que ele tem, então, quatro moedas de 10 centavos. Com elas e com as moedas de 50 e 25 centavos ele não consegue formar 1 real. Por fim, ele não pode ter cinco moedas de 1 centavo, pois se tivesse, formaria 1 real juntando a elas a moeda de 50 centavos com a de 25 centavos e mais duas de 10 centavos. Assim, Gustavo deve ter, no máximo, quatro moedas de 1 centavo. Logo, o maior valor total possível que Gustavo pode ter é $50 + 25 + 4 \times 10 + 4 \times 1 = 119$ centavos, ou seja, R\$ 1,19.

Comentários sobre a questão: O presente problema pode ser aplicado como desafio a alunos que não tenham contato com o conteúdo de análise combinatória, pois sua resolução esta pautada no seguimento das condições estipuladas no comando da questão. Este mesmo problema também foi aplicado na fase 1 do nível 2 da OBMEP para alunos de oitavo e nono ano do ensino fundamental. Ambas as soluções usam o mesmo raciocínio como método resolutivo.

23. (OBMEP 2014) Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismo é 1000?
- 10
 - 20
 - 25

- d. 30
e. 40

Solução alternativa: Pela decomposição em fatores primos, segue que $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$. Se combinarmos um algarismo 2 e um algarismo 5, teremos o número 10, de dois algarismos, que ainda anularia o nosso produto, com uma parcela igual a zero. Logo, só poderemos combinar, dos seis algarismos possíveis, dois números 2, formando assim o número 4. Disso, temos os seguintes números cujo produto sempre dará 1000, que são 2, 4, 5, 5 e 5. Permutando (Permutação com repetição) esses algarismos temos, $P_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$. Temos ainda o caso em que combinamos os três algarismos 2, usando assim os algarismos 1, 8, 5, 5, e 5, onde novamente podemos permutar obtendo $P_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$. Portanto, temos um total de $20 + 20 = 40$ números de cinco dígitos cujo produto dos algarismos resulta no valor 1000.

Solução OBMEP: Como $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$, os possíveis números são formados pelos algarismos:

- 5, 5, 5, 2 e 4, caso em que contabilizamos $5 \times 4 = 20$ possibilidades; 5 possibilidades para a posição do algarismo 2 e 4 possibilidades para o algarismo 4 (as demais casas do número devem receber o algarismo 5).
- 5, 5, 5, 8 e 1, caso em que, de forma análoga, contabilizamos $5 \times 4 = 20$ possibilidades. Logo, existem $20 + 20 = 40$ números com tal propriedade.

Comentários sobre a questão: Muito semelhante ao Problema 2, a resolução pode ser efetuada a partir da decomposição em fatores primos do número 1000 ou então, caso o aluno não lembre, pode ser pedido que inicialmente ele descubra por tentativa e erro, as combinações de cinco fatores que resultam no produto igual a 1000. Agora ele pode proceder utilizando o PFC ou utilizar-se de permutação com repetição. Esses dois problemas podem ser abordados juntos, por tratarem o mesmo assunto e resolução semelhante.

24. (OBMEP 2014) Mônica tem três dados nos quais a soma dos números em faces opostas é sempre 7. Ela enfileira os dados de modo que as faces em contato tenham o mesmo número, obtendo um número de três algarismos nas faces superiores. Por exemplo, o número 436 pode ser obtido como mostrado na figura; já o número 635 não pode ser obtido. Quantos números diferentes ela pode obter?

Figura 28 – Questão 17 OBMEP 2014



Fonte: Prova OBMEP 2014

- a. 72
b. 96
c. 168
d. 192
e. 216

Solução alternativa: Existem três situações onde as faces ficam em contato, são elas: as faces 2 e 5, 3 e 4, 6 e 1 para os dois primeiros dados, note ainda que caso a ordem da face mude não teremos novos números como solicitado no enunciado, pois existe uma simetria entre os três dados.

Passo 1: Quando as faces 2 e 5 estão em contato nos primeiros dados girando cada um dos dados em torno da face em contato, temos quatro possibilidades $\{1,3,4,6\}$ de Algarismos da centena, dezena e unidade gerando assim $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ números distintos.

Passo 2: Analogamente quando as faces 3 e 4 estão em contato, temos as possibilidades para centena, dezena e unidade $\{1,2,5,6\}$, gerando um total de $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ números, porém destes 64, os que usam os Algarismos 1 e 6 já foram contabilizados no passo 1, então, devemos retirar duas opções para centena, duas para dezena e duas para unidade, ou seja, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ números, restando então $64 - 8 = 58$ números distintos daqueles encontrados no passo 1.

Passo 3: Como último passo, quando as faces 1 e 6 estão em contato restam as faces $\{2,3,4,5\}$ para ocupar as posições de centena, dezena e unidade, gerando assim 64 números. Porém os que utilizam apenas as faces 3 e 4 já foram contabilizados no passo 1 e são 8 números, e os que utilizam as faces 2 e 5 já foram contabilizados no passo 2, totalizando mais 8 números, logo, restam $64 - 8 - 8 = 46$ números distintos dos demais.

Portanto, Mônica terá um total de $64 + 58 + 46 = 168$ números distintos a serem formados.

Solução OBMEP 1: Como as faces opostas somam 7, as faces podem ser divididas em três duplas: $\{1,6\}$, $\{2,5\}$ e $\{3,4\}$. Vamos considerar três casos:

a) Os Algarismos que aparecem no topo dos três dados são todos da mesma dupla. Neste caso, a dupla $\{1,6\}$ gera $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ números diferentes: 111, 116, 161, 611, 661, 616, 166 e 666. Analogamente, a dupla $\{2,5\}$ gera outras oito possibilidades e a dupla 3,4 mais oito. Assim, neste primeiro caso temos um total de 24 possibilidades.

b) Dois dos Algarismos do topo pertencem a uma dupla e o outro pertence a uma dupla diferente.

Em dois dados aparecem alg. da dupla:	No outro dado aparece alg. da dupla:
$\{1,6\}$	$\{2,5\}$
$\{1,6\}$	$\{3,4\}$
$\{2,5\}$	$\{1,6\}$
$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
$\{3,4\}$	$\{1,6\}$
$\{3,4\}$	$\{2,5\}$

Fonte: Solução OBMEP prova 2014

Pensemos nas possibilidades de formação de números em cada uma das linhas da tabela acima; por exemplo, no caso em que 1 ou 6 aparece no topo de dois dados e no outro dado aparece 2 ou 5, teremos $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ possibilidades (a saber: 112, 121, 211, 115, 151, 511, 162, 126, 216, \dots , 566). Analogamente, cada um dos casos apresentados nas linhas da tabela produzirão 24 números diferentes. No total, neste caso teremos $6 \cdot 24 = 144$ possibilidades.

c) Os três números que aparecem no topo dos dados são provenientes de números de duplas diferentes. Este caso nunca ocorre, pois é impossível enfileirar os dados de modo que as faces em contato tenham o mesmo número. Logo, podemos obter $24 + 144 = 168$ números diferentes.

Solução OBMEP 2: Utilizando o complementar: já que o caso c) não ocorre, basta descontar do total de números obtidos sem restrições de contato ($6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$) os números obtidos que utilizam Algarismos das três duplas. Para formar números utilizando Algarismos das três duplas, temos 6 escolhas para o primeiro dado (números das 3 duplas), 4 escolhas para o segundo dado (números de duas duplas) e 2 escolhas para o terceiro dado (números de uma dupla). Logo, existem $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ números no caso c). Conseqüentemente, Mônica pode obter $216 - 48 = 168$ números.

Solução OBMEP 3: Podemos considerar inicialmente três casos: a) As faces 1 e 6 (ou 6 e 1) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$. Neste caso, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ números diferentes. b) As faces 2 e 5 (ou 5 e 2) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto $\{1, 3, 4, 6\}$. Analogamente neste caso, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ números diferentes. Entretanto, eles não precisam ser diferentes dos números encontrados no caso a). c) As faces 3 e 4 (ou 4 e 3) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto $\{1, 2, 5, 6\}$. Como nos casos anteriores, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ números diferentes. Entretanto, eles não precisam ser diferentes dos números encontrados no caso a) ou no caso b). Os três casos juntos produzem $3 \cdot 64 = 192$ números, porém nem todos distintos. Precisamos retirar desta contagem os números comuns aos casos a) e b), b) e c) e a) e c). Não há algarismos comuns aos três casos. Como $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 4, 6\} = \{3, 4\}$, os algarismos comuns aos casos a) e b) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 3 e 4. A quantidade de tais números é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Analogamente, como $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{2, 5\}$, os algarismos comuns aos casos a) e c) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 2 e 5. A quantidade de tais números é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Do mesmo modo, como $\{1, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 6\}$, os algarismos comuns aos casos b) e c) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 1 e 6. A quantidade de tais números é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Assim, Mônica pode obter $3 \cdot 64 - 3 \cdot 8 = 168$ números diferentes.

Comentários sobre a questão: Em sala de aula o professor pode neste problema utilizar o material lúdico do dado para fazer com que os estudantes possam analisar os casos e, a partir daí, decidir qual caminho a ser seguido mais lhe convém. Seguindo a solução sugerida pelo autor inicialmente, o problema parece fácil, visto que pode não ser percebido a intercessão existente entre os passos, gerando assim uma falsa resposta igual a $64 + 64 + 64 = 192$ números distintos. Neste momento o professor pode sugerir que os estudantes tentem encontrar números iguais em passos diferentes.

25. (OBMEP 2015) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?
- 20
 - 30
 - 60
 - 90
 - 120

Solução alternativa: Dentre os 5 participantes, temos para os dois premiados, um total de $C_5^2 = 10$ combinações possíveis para escolher dois participantes entre os 5 disponíveis. Agora, cada um desses participantes pode receber cada um, três medalhas. Logo, o total de maneiras que pode ter acontecido essa premiação é $10 \times 3 \times 3 = 90$.

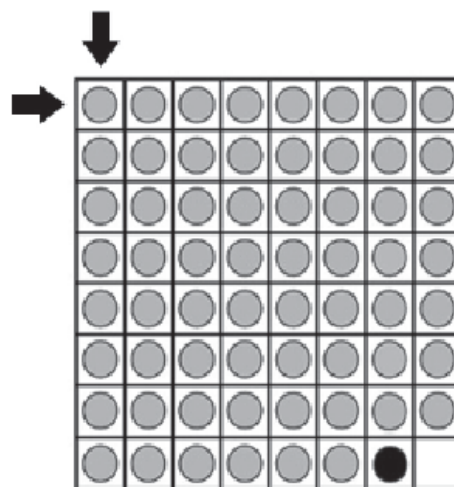
Solução OBMEP 1: Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos 2 premiados são: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são $10 \times 9 = 90$.

Solução OBMEP 2: Existem dois casos a considerar: ou os dois meninos premiados ganharam medalhas iguais, ou ganharam medalhas diferentes. Se as medalhas são iguais, há 3 possibilidades para as medalhas, a saber, ou as duas são de ouro, ou as duas são de prata, ou as duas são de bronze. Além disso, dos 5 meninos, apenas 2 receberam medalhas, o que pode ocorrer de $\frac{5 \cdot 4}{2}$ maneiras diferentes (são 5 escolhas para o primeiro e são 4 escolhas para o segundo menino, mas precisamos dividir por 2, para eliminar as repetições, uma vez que para determinar a dupla de premiados, não importa a ordem de escolha dos meninos). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times \frac{5 \cdot 4}{2} = 3 \times 10 = 30$ possibilidades para a premiação de dois desses meninos com medalhas iguais. No segundo caso, se as medalhas recebidas pelos 2 meninos premiados são diferentes, há 3 possibilidades para os tipos de medalhas: ouro e prata; ouro e bronze; e prata e bronze. Em cada uma dessas possibilidades, a mais valiosa será recebida por 1 dos 5 meninos e a outra por um dentre os 4 meninos restantes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, nesse caso, o número de formas diferentes de premiação é $3 \times 5 \times 4 = 60$. Portanto, pelo Princípio Aditivo, o número total de formas diferentes de ocorrer a premiação é $30 + 60 = 90$.

Comentários sobre a questão: Um problema não muito difícil que pode ser aplicado logo após o conteúdo de combinação simples e que é resolvido formalmente utilizando-se da aplicação das fórmulas de combinação e arranjo, como apresentado na solução alternativa. Uma solução menos formal e mais dedutiva pode ser vista na resolução apresentada pela OBMEP. Tal solução não utiliza as fórmulas oferecidas pelo conteúdo do ensino médio, visto que problemas como este são em muitos casos abordados na prova de nível 2, para alunos de oitavo e nono ano que dispõem apenas de uma apresentação simples a este conteúdo.

26. (OBMEP 2015) Joãozinho tem um tabuleiro como o da figura, no qual há uma casa vazia, uma peça preta e as demais casas com peças cinzentas. Em cada movimento, somente as peças que estão acima, abaixo, à direita ou à esquerda da casa vazia podem se movimentar, com uma delas ocupando a casa vazia. Qual é o número mínimo de movimentos necessários para Joãozinho levar a peça preta até a casa do canto superior, indicada pelas setas?

Figura 29 – Questão 06 OBMEP 2015



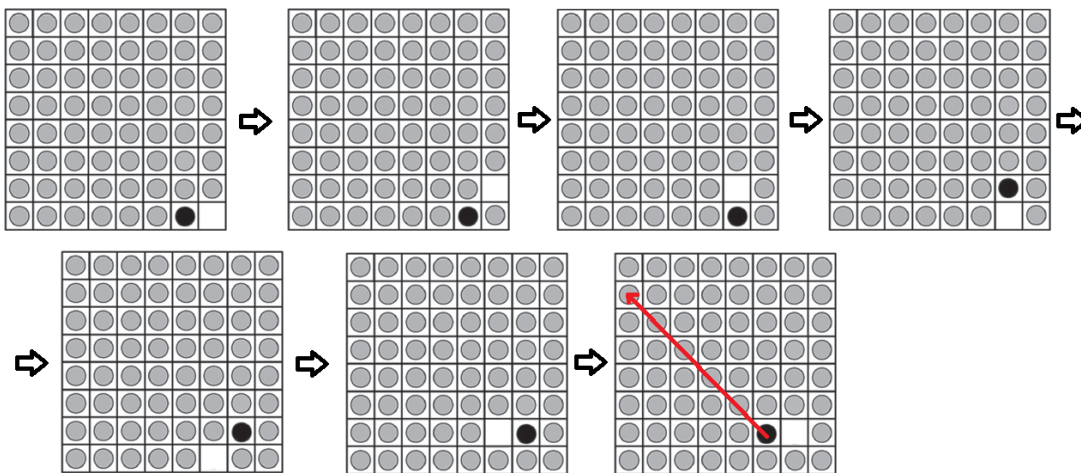
Fonte: Prova OBMEP 2015

- a. 13
b. 21
c. 24

- d. 36
e. 39

Solução alternativa: Note que, nesta situação, o caminho mais curto percorrido pela peça preta será uma linha reta. Assim, precisamos que a peça preta sempre se desloque uma casa acima e uma casa a esquerda. Para que isso ocorra, serão necessários seis movimentos para retornar a uma situação similar a inicial, onde a casa vazia está ao lado direito da casa preta, conforme a figura abaixo:

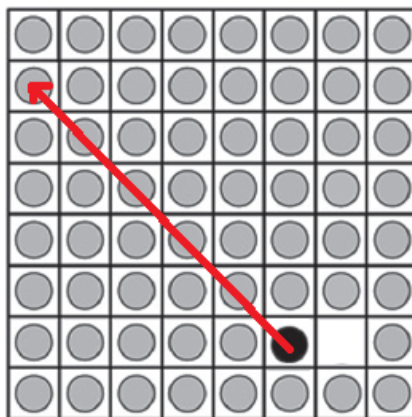
Figura 30 – Resolução 1 da questão 06 OBMEP 2015



Fonte: Adaptação prova OBMEP 2015

Seguindo essa ideia, ainda faltam cinco casas (conforme imagem abaixo) para chegar até a casa imediatamente abaixo da casa desejada, ou seja, precisamos fazer mais $5 \times 6 = 30$ movimentos, totalizando até aqui, 36 movimentos.

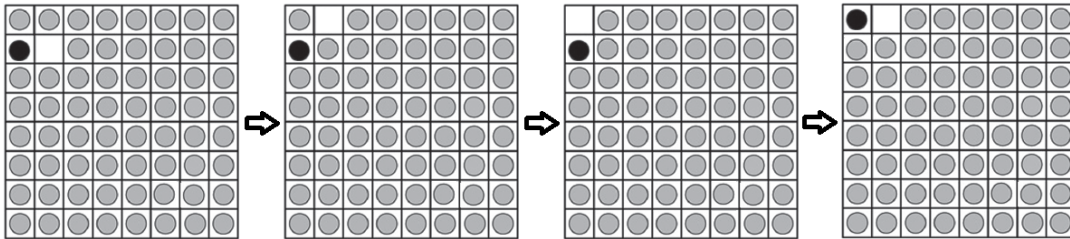
Figura 31 – Resolução 2 da questão 06 OBMEP 2015



Fonte: Adaptação prova OBMEP 2015

Vejam agora, na figura abaixo quantos movimentos serão necessários para ir até a posição desejada

Figura 32 – Resolução 3 da questão 06 OBMEP 2015

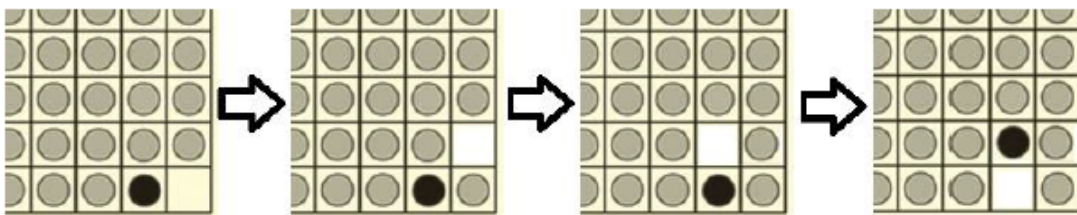


Fonte: Adaptação prova OBMEP 2015

Portanto, são necessários mais três movimentos até chegar no ponto desejado, totalizando, assim, $36 + 3 = 39$ movimentos, no mínimo.

Solução OBMEP: Joãozinho precisa levar a peça preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, indicado pelas setas. Para fazer isso, a peça preta precisa andar para cima e para a esquerda, sem nunca voltar com ela para a direita ou para baixo. Inicialmente, Joãozinho deve andar com a pedra preta para cima, fazendo três movimentos, indicados na figura abaixo:

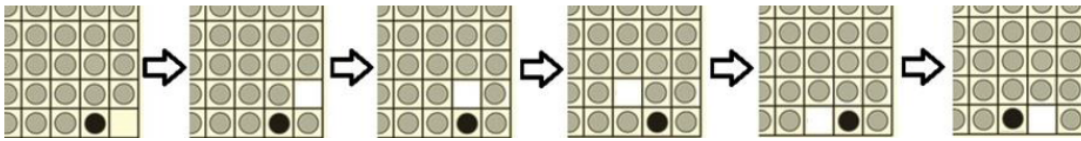
Figura 33 – Resolução 4 da questão 06 OBMEP 2015



Fonte: Solução prova OBMEP 2015

Ele deve andar com a pedra preta para cima, pois a outra possibilidade (andar com a pedra preta para a esquerda) requereria cinco movimentos, veja:

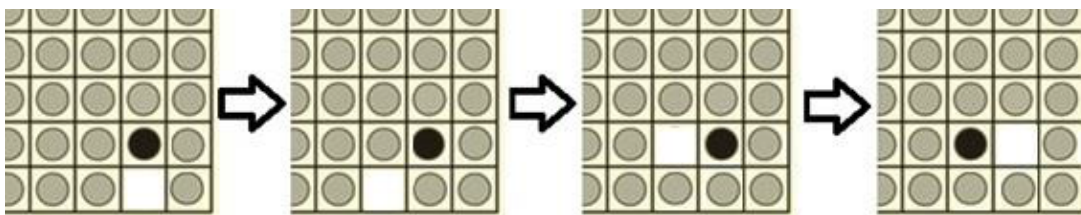
Figura 34 – Resolução 5 da questão 06 OBMEP 2015



Fonte: Solução prova OBMEP 2015

Como ele quer realizar o menor número possível de movimentos, ele opta em movimentar a pedra preta para cima, realizando três movimentos. Após fazer isto, ele deve andar com a pedra preta para a esquerda, fazendo novos três movimentos.

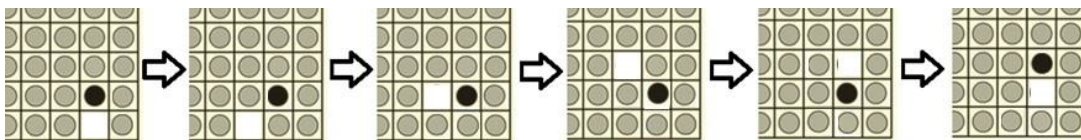
Figura 35 – Resolução 6 da questão 06 OBMEP 2015



Fonte: Solução prova OBMEP 2015

Se ele optasse por andar com a pedra preta para cima faria cinco movimentos, veja:

Figura 36 – Resolução 7 da questão 06 OBMEP 2015



Fonte: Solução prova OBMEP 2015

Deste modo, sempre optando em realizar o menor número de movimentos, ele escolhe mover a pedra preta para a esquerda, com outros três movimentos. Assim, para levar a pedra preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, com o menor número de movimentos possível, Joãozinho deve andar com a pedra preta sete casas para cima e seis casas para a direita, alternando esses movimentos e começando para cima, gastando sempre três movimentos cada vez que a pedra preta andar uma casa. Logo, o número mínimo de movimentos necessários é $3 \times 7 + 3 \times 6 = 21 + 18 = 39$.

Comentários sobre a questão: Quando o problema é resolvido a partir de métodos analíticos é sempre mais simples chegarmos a resposta desejada. Porém, problemas como esse requerem dos estudantes criatividade na resolução, onde os mesmos precisam imaginar o passo a passo desejado. O professor pode aqui elaborar uma aula diferenciada, confeccionando um tabuleiro como o da figura, utilizando-se de tinta, papel e tampinhas de garrafas pete. Dessa forma, o estudante, além de criar seu próprio material lúdico, poderá na prática ver a quantidade mínima de jogadas possíveis. Ambas as soluções utilizam a mesma lógica de resolução. A solução alternativa pode ser considerada mais direta, já a apresentada pela OBMEP é mais didática, apresentando todo o caminho a ser elaborado pelo aluno durante a resolução.

27. (OBMEP 2015) Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 2015\}$, forma-se um subconjunto B, com a maior quantidade possível de elementos, tal que todo elemento de B é múltiplo ou divisor

de qualquer outro elemento de B. Quantos elementos há no conjunto B?

- a. 9
- b. 10
- c. 11
- d. 12
- e. 13

Solução alternativa: Veja que a solução do problema é formada por um conjunto do tipo $B = \{b^0, b^1, b^2, \dots, b^k\}$, $b \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $b^k \leq 2015$, visto que um conjunto desse tipo satisfaz a condição de que todo elemento de B é múltiplo ou divisor de qualquer outro elemento de B, pois cada elemento pode ser decomposto como potência de base b .

Ora, tomando genericamente $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \leq n \leq m \leq k$ temos que $m = n + j$ para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Disso segue que b^n divide $b^m = b^{n+j} = b^n \cdot b^j$ e analogamente temos que $b^m = b^{n+j} = b^n \cdot b^j$ é múltiplo de b^n , uma vez que pela definição do conjunto $b^j \in \mathbb{N}$. Logo, dado qualquer elemento do conjunto B, este é múltiplo ou divisor de um outro elemento do mesmo conjunto.

Uma vez mostrado que o conjunto B satisfaz o enunciado, precisamos do conjunto com a maior cardinalidade, e visto que estamos trabalhando com potências de base positivas necessitamos da menor base possível. A base 1 nos fornece um conjunto unitário.

O conjunto desejado então é formado pela base

$$b = 2 \Rightarrow B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\},$$

e a cardinalidade de B é 11.

Solução OBMEP: Não é possível construir um subconjunto de A nas condições descritas no enunciado, contendo 12 ou mais elementos. De fato, suponhamos que isto fosse possível, e seja B um subconjunto de A, com $k \geq 12$ elementos. Seja n o maior elemento de B. Então, n deve ser múltiplo dos demais elementos de B. Logo n deve possuir k divisores positivos (ele próprio e os demais $k-1$ elementos do conjunto). O menor número n que possui k divisores positivos é 2^{k-1} . Entretanto, $2^{k-1} \geq 2^{11} = 2048 > 2015$, pois $k \geq 12$. Logo, $n > 2015$ e, portanto, n não pode pertencer a B, já que B é subconjunto de A. Esta contradição surge da suposição de que B tem mais do que 11 elementos. Assim, os subconjuntos de A com a maior quantidade possível de elementos, que satisfazem as condições do enunciado, possuem 11 elementos.

Comentários sobre a questão: A solução sugerida pelo autor apresenta meios matemáticos que fogem um pouco da realidade dos alunos de ensino médio. No entanto este é um ótimo exemplo para se trabalhar noções de lógica, múltiplos e divisores com os estudantes.

O professor pode solicitar aos seus estudantes como desafio que busquem encontrar exemplos de conjuntos que satisfazem o enunciado e verifique dentre esses, qual o que apresenta a maior quantidade de elementos.

Em particular, esse problema apresenta um texto complicado para ser entendido pelo aluno, então é necessário que o professor faça algumas interferências com falas do tipo “notem a condição múltiplo ou divisor”, “conseguem expor um conjunto exemplo”, para direcioná-los ao objetivo do exercício.

28. (OBMEP 2016) Em uma fila com 30 pessoas estão Ana, Beatriz e Carla. Há 19 pessoas à frente de Ana e 12 pessoas entre Ana e Beatriz. Entre Beatriz e Carla há uma pessoa a mais do que entre Ana e Carla. Em que ordem elas estão na fila?
- a. Ana está à frente de Carla, que está à frente de Beatriz.
 - b. Beatriz está à frente de Ana, que está à frente de Carla.

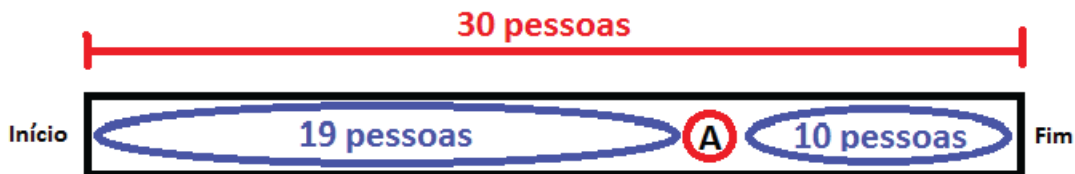
- c. Beatriz está à frente de Carla, que está à frente de Ana
- d. Carla está à frente de Ana, que está à frente de Beatriz
- e. Carla está à frente de Beatriz, que está à frente de Ana

Solução alternativa: Como tem 19 pessoas na frente de Ana, ela pode estar em qualquer uma das posições entre a 20ª e a 30ª posição, inclusive seus extremos. Ainda existem 12 pessoas entre Ana e Beatriz, logo, estando Ana na 20ª posição, Beatriz estará na 7ª posição e estando Ana na 30ª posição, Beatriz estará na 17ª posição. Ou seja, Beatriz pode estar entre as posições 7 e 17, incluindo seus extremos. Como existe uma pessoa a mais entre Beatriz e Carla do que entre Carla e Ana, assumindo que Ana está na posição 20 e Beatriz na posição 7, segue que Carla está na posição 14.

Portanto, (c). Beatriz está à frente de Carla, que está à frente de Ana.

Solução OBMEP: Inicialmente, vamos analisar a posição relativa entre Ana e Beatriz. Observe a posição de Ana na fila:

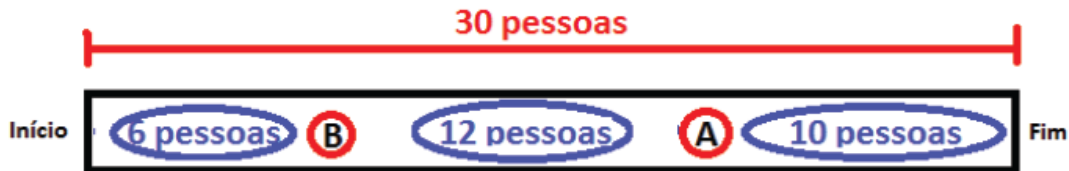
Figura 37 – Resolução 1 da questão 02 OBMEP 2016



Fonte: Solução prova OBMEP 2016

Como há 12 pessoas entre Ana e Beatriz, Beatriz tem que estar antes de Ana.

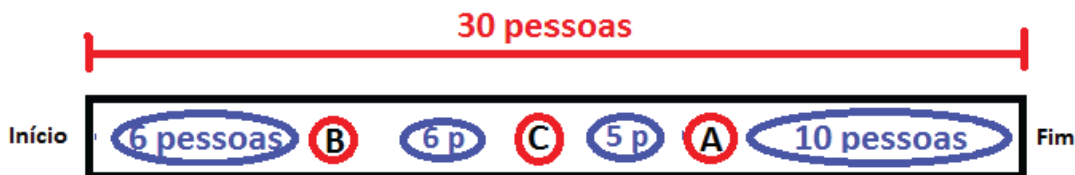
Figura 38 – Resolução 2 da questão 02 OBMEP 2016



Fonte: Solução prova OBMEP 2016

Como há uma pessoa a mais entre Beatriz e Carla do que entre Ana e Carla, podemos concluir que Carla está entre Beatriz e Ana.

Figura 39 – Resolução 3 da questão 02 OBMEP 2016



Fonte: Solução prova OBMEP 2016

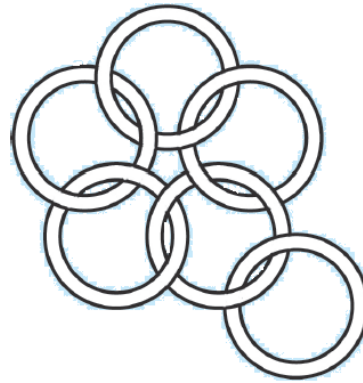
Logo, Beatriz está à frente de Carla, que está à frente de Ana.

Comentários sobre a questão: O problema pode ser apresentado a alunos de nível fundamental e médio, que podem resolver imaginando essas pessoas como números inteiros

em uma reta numérica, adequando suas posições de acordo com o enunciado. É importante perceber que as posições dessas mulheres são dependentes da posição de Ana. No final da solução alternativa foi dada a posição de Ana nessa fila, a partir daí é encontrado a posição de Beatriz e Carla. Note que essa situação satisfaz o enunciado e, portanto, é válida como única solução. O professor pode solicitar aos seus alunos que modifiquem a posição de Ana de maneira a ainda satisfazer o enunciado e verifiquem que o resultado ainda será o mesmo.

29. (OBMEP 2016) O símbolo proposto para os jogos de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

Figura 40 – Questão 18 OBMEP 2016

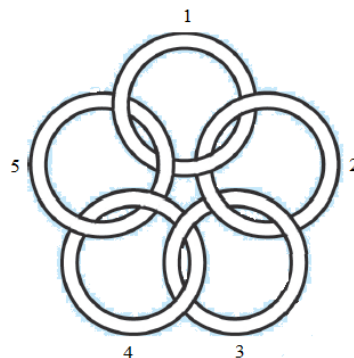


Fonte: Prova OBMEP 2016

- a. 24
- b. 36
- c. 48
- d. 60
- e. 72

Solução alternativa: Inicialmente, perceba que não podemos pintar esse símbolo com apenas duas cores, logo, as três cores devem ser utilizadas. Para facilitar a resolução do problema, consideramos inicialmente apenas os cinco anéis centrais, numerados conforme a ilustração abaixo.

Figura 41 – Resolução da questão 18 OBMEP 2016



Fonte: Adaptação prova OBMEP 2016

Observe que a configuração azul, verde, azul, verde, rosa para os anéis 1,2,3,4 e 5 respectivamente representa um padrão onde devemos utilizar, dois anéis de uma cor, dois de outra cor e o quinto anel de uma terceira cor, essas três cores podem ser escolhidas de $3! = 6$ maneiras. Vejamos melhor na tabela abaixo, onde a primeira linha representa a quantidade de anéis de cada cor, e as letras A,B e C representam três cores distintas, expondo suas permutações.

2	2	1
A	B	C
A	C	B
B	C	A
B	A	C
C	A	B
C	B	A

Fonte: Elaborada pelo autor 2020

Em cada uma dessas configurações, note que podemos começar a primeira cor por cada um dos 5 anéis (basta girar no sentido horário o anel a ser pintado), modificando assim a sequência de cores, totalizando $5 \cdot 6 = 30$ maneiras de pintar o símbolo. Agora note ainda que o anel externo só esta entrelaçado com um único interno, ou seja, este anel pode ser pintado por outras duas cores distintas, totalizando assim $30 \cdot 2 = 60$ maneiras distintas de pintar esse símbolo.

Solução OBMEP: Numerando os anéis como na figura e iniciando a contagem pelas possibilidades de pintura do anel I, dividimos o problema em 3 casos. 1) O anel III deve ser pintado com a mesma cor que o anel II, o que garante que os anéis III e IV tenham cores diferentes. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

Figura 42 – Resolução 1 da questão 18 OBMEP 2016

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	2	1	2	→24



Fonte: Solução OBMEP 2016

2) O anel III deve ser pintado com cor diferente do anel II e o anel IV com a mesma cor que o anel III. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

Figura 43 – Resolução 2 da questão 18 OBMEP 2016

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	2	2	→24

Fonte: Solução OBMEP 2016

3) O anel III deve ser pintado com cor diferente do anel II e o anel IV com cor diferente do anel III. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

Figura 44 – Resolução 3 da questão 18 OBMEP 2016

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	1	2	→12

Fonte: Solução OBMEP 2016

Logo, o número de maneiras possíveis de pintar o símbolo é $24 + 24 + 12 = 60$.

Comentários sobre a questão: Perceba que ambas as soluções apresentadas tratam em dividir o problema em passos mais simples, com objetivo de deixar a resolução menos complexa. Sempre que possível é sugerido que o aluno tente fazer o mesmo. O professor pode instigar seus alunos com frases como “o anel externo pode ser momentaneamente esquecido?”, “três anéis consecutivos podem ser pintados com duas cores apenas?”. Essas indagações levam o aluno a pensar em mais situações frente ao problema, levando-o a um melhor entendimento do problema e facilitando sua resolução. Intuitivamente esse problema utiliza em sua resolução o PFC 3, conteúdo este inicial, porém este problema está em um nível alto, sendo muito complexo para ser resolvido no início da explanação do conteúdo. Um problema mais simples e que envolve um raciocínio parecido com este problema pode ser visto no problema correlato apresentado no item 20 dessa lista de exercícios. Sempre é interessante o professor em sala de aula começar com problemas mais simples, porém elaborados, que ponham o aluno para pensar “fora da caixa”. Após a assimilação do conteúdo problemas mais elaborados devem ser apresentados aos alunos.

30. (OBMEP 2016) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Figura 45 – Questão 19 OBMEP 2016



Fonte: Prova OBMEP 2016

- a. 110
- b. 120
- c. 200
- d. 201

e. 201

Solução OBMEP 1: Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de $6 \times 7 \times 5 = 210$ maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número de figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote. Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Figura 46 – Resolução da questão 19 OBMEP 2016

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		$1 + 3 + 6 = 10$

Fonte: Solução OBMEP 2016

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é $210 - 10 = 200$.

Solução OBMEP 2: Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas. 1. Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia. O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será $5 \times 6 \times 4 = 120$. 2. Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é $3 + 4 + 2 = 9$ (AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBB, BBBB, CCC e CCCC). 3. Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, teremos $5 \times 6 - 1$ possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha - Colômbia e Brasil - Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado: $(5 \times 6 - 1) + (5 \times 4 - 1) + (6 \times 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71$. Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos $120 + 9 + 71 = 200$ pacotes distintos.

Comentários sobre a questão: Temos aqui mais um problema onde podemos encontrar inicialmente o total de casos possíveis sem se preocupar com as restrições e logo após retirar desse total os casos restritos, basta seguir o raciocínio adotado pela solução oficial da OBMEP.

Em sala de aula o professor pode adequar esse problema a uma situação diferente, digamos: “Quantos pacotes com exatamente quatro figurinhas Bruno pode ter?”. Desta forma ele deixa o problema mais fácil de ser compreendido e resolvido por todos os estudantes, que irão buscar os mais variados métodos resolutivos. Sendo A a figura da Alemanha, B a do Brasil e C a da Colômbia, segue que podemos ter três pacotes com figurinhas de um único país, ou seja, da forma AAAA, BBBB ou CCCC. Com exatamente dois países podemos ter os casos AABB, AACC, BBCC, ACCC, ABBB, BCCC, BAAA, CAAA e CBBB, gerando nove casos. Utilizando três países por pacote podemos ter os casos ABCC, ACBB, BCAA, ou seja, temos aqui mais três casos. Portanto, temos um total de $3 + 9 + 3 = 15$ maneiras de montar esse pacote com exatamente quatro figurinhas.

31. (OBMEP 2016) João tem cinco saquinhos de balas. Escolhendo-se, de todos os modos possíveis, quatro dessas saquinhos e contando o total de suas balas, obtêm-se apenas quatro resultados: 23, 24, 26 ou 29. Qual é o maior número de balas em um saquinho?
- 8
 - 9
 - 10
 - 11
 - 12

Solução alternativa: Definindo como A, B, C, D e E a quantidade de balas em cada um dos cinco saquinhos temos cinco maneiras de combinar estes em grupos de quatro saquinhos, onde sabemos o total de balas nestas quatro embalagens. Temos que

$$\begin{cases} I : A + B + C + D = 23 \\ II : A + B + C + E = 24 \\ III : A + B + D + E = 26 \\ IV : A + C + D + E = 29 \\ V : B + C + D + E = X \end{cases}$$

É trivial perceber que A, B, C, D e E são valores naturais e usaremos isso para resolver este problema.

De I e II segue que $D = E - 1$, de I e III segue que $C = E - 3$, de I e IV segue que $B = E - 6$.

Ora, substituindo esses valores em V temos que $X = 4E - 10$. Pelo enunciado X pode assumir qualquer um entre os valores 23, 24, 26 e 29.

Se $X = 26 \Rightarrow 4E - 10 = 26 \Rightarrow E = \frac{36}{4} = 9$.

Se $X = 23 \Rightarrow 4E - 10 = 23 \Rightarrow E \notin \mathbb{N}$.

Se $X = 24 \Rightarrow 4E - 10 = 24 \Rightarrow E \notin \mathbb{N}$.

Se $X = 29 \Rightarrow 4E - 10 = 29 \Rightarrow E \notin \mathbb{N}$.

Logo, analisando as combinações possíveis para o valor de x , descobrimos que o único valor aceitável é 26 e disso temos que $E = 9$. Daí, $A = 6$, $B = 3$, $C = 6$, $D = 8$ e $E = 9$.

Portanto, segue que $E = 9$ é a maior quantidade de balas em um dos saquinhos.

Solução OBMEP: Vamos representar o número de balas em cada saquinho pelas letras x, y, z, p, e q. Após somar as balas de quatro saquinhos escolhidos, temos cinco possibilidades para o total de balas, indicadas abaixo:

Figura 47 – Resolução 1 da questão 20 OBMEP 2016

$$(*) \begin{cases} x + y + z + p = 23 \\ x + y + z + q = 24 \\ x + y + p + q = 26 \\ x + z + p + q = 29 \\ y + z + p + q = T \end{cases}$$

Fonte: Solução prova OBMEP 2016

Com $T = 23$, ou $T = 24$, ou $T = 26$, ou $T = 29$. Conseqüentemente, somando os termos de (*),

$$4[x + (y + z + p + q)] = 4[x + T] = 23 + 24 + 26 + 29 = 102 + T$$

Equivalentemente, $4x + 4T = 102 + T$, ou seja, $X = \frac{102-3t}{4}$. Como x é um número inteiro, observando os quatro possíveis valores para T , concluímos que $T = 26$. Portanto, $x = 6$. De (*), subtraindo cada uma das quatro primeiras identidades da última, obtemos os valores de y , z , p , e q :

Figura 48 – Resolução 2 da questão 20 OBMEP 2016

$$\begin{cases} q - x = T - 23 \Leftrightarrow q - 6 = 3 \Leftrightarrow q = 9 \\ p - x = T - 24 \Leftrightarrow p - 6 = 2 \Leftrightarrow p = 8 \\ z - x = T - 26 \Leftrightarrow z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6 \\ y - x = T - 29 \Leftrightarrow y - 6 = -3 \Leftrightarrow y = 3 \end{cases}$$

Fonte: Solução prova OBMEP 2016

Logo, há um saquinho com 3 balas, dois saquinhos com 6 balas, um saquinho com 8 e outro com 9. Assim, o maior número de balas em um saquinho é 9.

Comentários sobre a questão: Perceba que este problema engloba o conteúdo de contagem, porém, em sua resolução são utilizados meios puramente algébricos e lógicos. É sugerido ao professor que utilize este problema fazendo referencia ao conteúdo de sistemas lineares/matriz visto que a parte desta questão que utiliza contagem é intuitiva.

Ambas as soluções apresentam a mesma lógica de resolução, que divergem apenas em sua escrita.

32. (OBMEP 2017) Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de sete bolas com três cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?
- 11
 - 14
 - 21
 - 22
 - 23

Solução alternativa: Pensando na pior das situações, Joãozinho retira 10 bolas verdes e 10 bolas amarelas. Só existem agora na caixa 20 bolas, das quais 10 são azuis e 10 vermelhas. Para as duas próximas retiradas, ele retira uma bola de cada cor. Ainda não estamos na situação requerida no enunciado, e já temos 22 bolas retiradas. Para a 23ª bola

retirada, formaremos um par da mesma cor entre as bolas da 21^a e 22^a retirada, e temos de certeza duas verdes e três amarelas. Logo, com 23 bolas retiradas garantimos o pedido no enunciado.

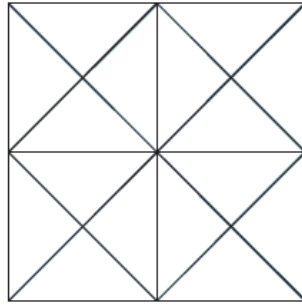
Solução OBMEP: Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 amarela. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue. Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1^a cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo $23 - 10 = 13$ bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2^a cor e que sobram no mínimo $13 - 10 = 3$ bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma 3^a cor. Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1^a cor, 5 de uma 2^a cor e 2 de uma 3^a cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1^a cor, 2 da 2^a e 2 da 3^a. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Observação geral da OBMEP: O argumento empregado nessa solução pode ser formalizado como segue: se a_1, a_2, \dots, a_n são números reais e sua média aritmética é m , isto é, $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = m$, então, ou $a_1 = a_2 = \dots = a_n = m$ ou existe pelo menos um índice i tal que $a_i < m$ e pelo menos um índice j tal que $a_j > m$. No nosso caso, fizemos uma escolha de a_1 bolas verdes, a_2 bolas amarelas, a_3 bolas azuis e a_4 bolas vermelhas tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 23$; temos $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{23}{4} > 5$. Segue que existe pelo menos um i tal que $a_i > 5$, e, como a_i é um número inteiro, temos $a_i \geq 6$; em outras palavras, entre as 23 bolas existem pelo menos 6 de uma mesma cor, e analogamente para o restante da solução. A demonstração do fato geral do início desse parágrafo é inteiramente análoga à do caso particular que acabamos de analisar.

Comentários sobre a questão: Mais uma vez nos deparamos com um problema onde devemos encontrar a quantidade mínima de casos para termos certeza de um acontecimento, e, para isto, devemos pensar sempre na pior situação, assim garantiremos a certeza do acontecido. Para resolver esse problema além de criativo o estudante precisa ser pessimista, sempre em busca do pior caminho a ser seguido. Uma resolução mais direta e dedutiva esta exposta na solução alternativa. Já a solução da OBMEP baseia-se numa resolução mais formalizada utilizando inequações e deduções.

33. (OBMEP 2017) Sérgio quer numerar de 1 a 16 os triângulos da Figura 49 de tal modo que números consecutivos fiquem em triângulos que tem um lado em comum.

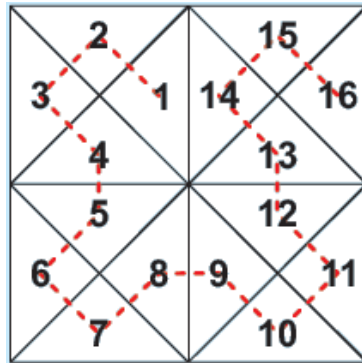
Figura 49 – Questão 20 OBMEP 2017



Fonte: Prova OBMEP 2017

Por exemplo, ele pode numerar os triângulos como na Figura 50. De quantas maneiras Sérgio pode fazer isso?

Figura 50 – Exemplo questão 20 OBMEP 2017

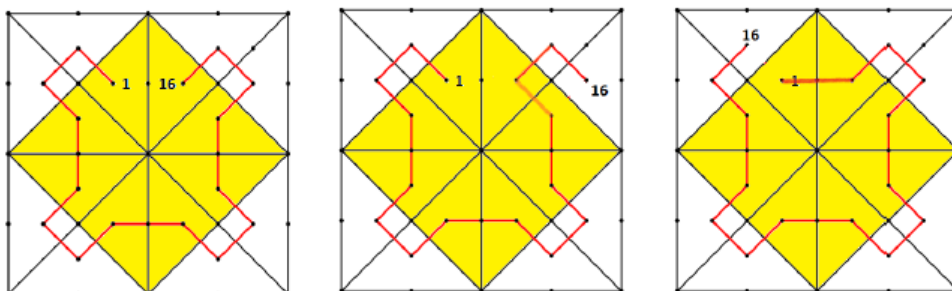


Fonte: Prova OBMEP 2017

- a. 16
- b. 32
- c. 48
- d. 56
- e. 64

Solução OBMEP: Vamos dividir o problema em duas situações. Primeira situação: quando o número 1 é colocado em um dos 8 triângulos indicados na figura abaixo pela cor amarela (triângulos centrais).

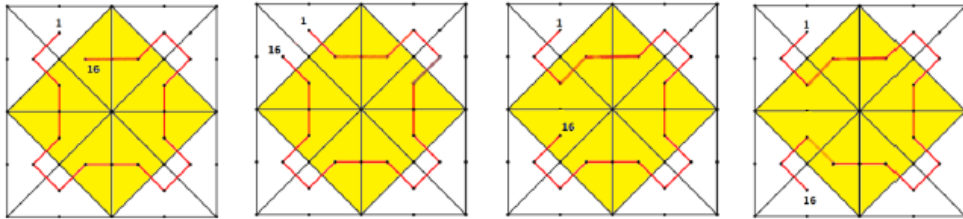
Figura 51 – Resolução 1 da questão 20 OBMEP 2017



Fonte: Solução prova OBMEP 2017

Escolhido qualquer um dos 8 triângulos amarelos para colocar o número 1, haverá 3 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8×3 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo. Segunda situação: quando o número 1 é colocado em um triângulo branco (triângulo de canto).

Figura 52 – Resolução 2 da questão 20 OBMEP 2017



Fonte: Solução prova OBMEP 2017

Escolhido qualquer um dos 8 triângulos brancos para colocar o número 1, haverá 4 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8×4 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo. Somando-se as quantidades obtidas nas duas hipóteses, obtemos que o número de maneiras é $8 \times 3 + 8 \times 4 = 24 + 32 = 56$.

Comentários sobre a questão: Temos aqui um problema bem elaborado, que leva o estudante a formular várias situações particulares possíveis, percebendo padrões e etc., porém, a única solução viável e mais conveniente é a apresentada oficialmente pela OBMEP, onde podemos ver que o problema é espertamente dividido em dois casos diferentes que completam todos os casos possíveis.

Perceba que este problema é considerado de nível difícil, uma vez que não existem outros caminhos a serem seguidos para a resolução deste problema diferente do apresentado acima.

34. (OBMEP 2018) De quantas maneiras podemos trocar uma nota de 20,00 reais por moedas de 0,10 e 0,25 reais?
- 21
 - 36
 - 38
 - 41
 - 56

Solução alternativa: Ora, podemos mostrar as possíveis situações, onde começamos usando zero moedas de 25 centavos e o restante todo de moedas de 10 centavos. Perceba que não podemos usar apenas uma moeda de 25 centavos, pois os 19,75 reais não seriam inteiramente trocados em moedas de 10 centavos. Essa situação sempre se repete com quantidades ímpares de moedas de 25 centavos. Assim, podemos usar $\{0, 2, 4, 6, \dots, 78, 80\}$ moedas de 25 centavos, e o restante que sobrar (caso sobre), é completado com as moedas de 10 centavos. Assim, basta contar quantas são os termos dessa progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 0. Segue pela fórmula do termo geral da P.A., que:

$$80 = 0 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 41$$

Portanto, temos 41 maneiras de trocar os 20 reais com moedas de 25 e 10 centavos.

Solução OBMEP 1: Não podemos usar um número ímpar de moedas de 25 centavos, mas podemos usar 0, 2, 4, \dots até 80 dessas moedas, e cada escolha gera uma maneira

diferente de fazer a troca. Logo, o número de maneiras de trocar R\$ 20,00 por moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,25 é igual à quantidade de números pares entre 0 e 80, incluindo os extremos, ou seja, é 41.

Solução OBMEP 2: Sejam x e y as quantidades de moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,10, respectivamente, usadas para formar a quantia de R\$ 20,00. Assim, $0,25x + 0,10y = 20$. Multiplicando a equação por 20, obtemos $5x + 2y = 400$. Como 400 e $2y$ são números pares, x também é um número par, e daí podemos escrever $x = 2z$. Uma vez que o valor do inteiro z tenha sido escolhido, teremos uma solução com $y = 12(400 - 10z) = 200 - 5z$. Para que y seja um inteiro não negativo, $200 - 5z \geq 0$, ou seja, $z \leq 40$. Por outro lado, como $z \geq 0$, podemos concluir que existem exatamente 41 valores possíveis para ele, a saber: 0, 1, 2, \dots , 40.

Solução OBMEP 3: Pensemos no que aconteceria se usássemos moedas com valor R\$ 0,05. Precisaríamos de 400 dessas moedas para formar a quantia de R\$ 20,00. Podemos trocar duas dessas moedas pela moeda de R\$ 0,10 e cinco delas pela moeda de R\$ 0,25. Para que consigamos usar apenas as duas moedas (de R\$ 0,10 e R\$ 0,25), mencionadas no enunciado, devemos realizar todas as trocas possíveis sem sobrar nenhuma moeda de R\$ 0,05. Para que isso seja realizável, a quantidade de moedas de R\$ 0,05 convertidas em R\$ 0,25, além de múltiplo de 5, também deve ser par, para que sobre uma quantidade par de moedas de R\$ 0,05 que devem estar associadas às trocas por moedas de R\$ 0,10. Os múltiplos de 5 que são pares e estão entre 0 a 400 (incluindo-os), são: 0, 10, 20, 30, \dots , 400. Essa lista é composta por 41 números e corresponde aos modos de usarmos as moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,10 para obtermos a quantia total de R\$ 20,00.

Comentários sobre a questão: Para uma resolução formal, é necessário que o estudante tenha visto o conteúdo de sequências numéricas, especificamente o tema de progressão aritmética e ter ainda noções básicas de análise combinatória. Um método mais dedutivo pode ser utilizado na resolução desse problema, assim como procede a solução da OBMEP, voltada para o público de ensino fundamental que não tiveram acesso ao conteúdo formalizado ainda. Apesar de ser um problema extenso, o professor pode aplicar essa questão como desafio aos seus alunos, pedindo para que os mesmos tentem escrever os casos possíveis e a partir da prática montem um padrão dessas combinações de trocas. A solução alternativa e a primeira solução da OBMEP tratam sobre a mesma ideia de resolução, divergindo apenas pelo formalismo utilizado.

35. (OBMEP 2018) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Figura 53 – Questão 10 OBMEP 2018



Fonte: Prova OBMEP 2018

- a. 56
b. 70
c. 71
d. 72

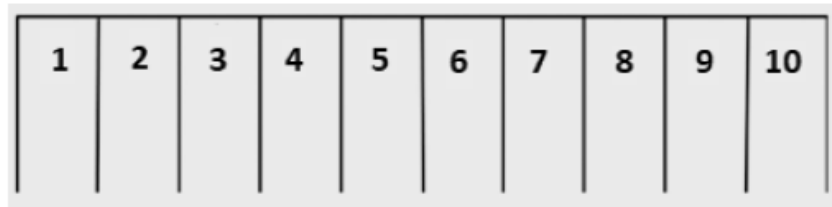
e. 80

Solução alternativa: Sem restrições, o total de maneiras que os dois carros podem estacionar é 10 para o primeiro e 9 para o segundo, totalizando $10 \times 9 = 90$ maneiras distintas. Agora, considerando as vagas numeradas, da esquerda para a direita, começando do 1 até a vaga 10, temos as seguintes combinações do carro preto e rosa ficarem juntos nas vagas (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8) e (8,9), ou seja, temos 9 possibilidades de ficar o carro preto e carro rosa juntos, repare ainda que existem as mesmas 9 possibilidades de ficarem os carros rosa e preto juntos, nessa mesma ordem. Logo, temos um total de 18 possibilidades dos carros ficarem juntos no estacionamento.

Portando, temos $90 - 18 = 72$ maneiras de estacionarmos os carros com ao menos uma vaga entre eles.

Solução OBMEP: Consideramos dois casos:

Figura 54 – Resolução da questão 10 OBMEP 2018



Fonte: Solução prova OBMEP 2018

a) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 1 ou 10. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 8 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $2 \times 8 = 16$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Multiplicativo da Contagem).

b) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcada com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 7 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $8 \times 7 = 56$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros. De acordo com as situações anteriores, há um total de $16 + 56 = 72$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Aditivo da Contagem).

Comentários sobre a questão: Este problema aborda o conteúdo do PFC ou arranjo simples, podendo então ser aplicado logo após a introdução deste conteúdo. Devemos nessa questão encontrar o total de casos a menos de uma restrição. Encontrar o valor total de maneiras de que esses carros podem estacionar não é uma tarefa difícil, o aluno deve agora descobrir a quantidade de maneiras que esse carros podem estacionar juntos, sem vagas entre eles e retirar essa quantidade do total. Uma solução que o professor pode sugerir para os alunos, diferente das apresentadas aqui é que dividam o problema em casos. Caso 1, existe uma vaga entre os dois carros estacionados; caso 2, existem duas vagas entre os carros estacionados e assim por diante. O aluno deve perceber que a quantidade de cada caso irá diminuir e, ao final, basta juntar a quantidade de cada caso. Uma resolução mais rápida pode ser vista na solução alternativa. A solução da OBMEP divide o problema em dois casos complementares, podendo ser sugerida pelo professor, porém, essa divisão pode não ser tão simples de se enxergar.

36. (OBMEP 2018) Gabriel brinca com números de dois ou mais algarismos. Ele substitui os dois primeiros algarismos à esquerda do número pela soma desses algarismos, e repete esse procedimento até obter um número de um algarismo. Por exemplo, partindo do número

2018 ele obtém o número 2, pois $2018 \rightarrow 218 \rightarrow 38 \rightarrow 11 \rightarrow 2$. Quantos são os números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1?

- 9
- 10
- 56
- 80
- 100

Solução OBMEP: Os números que Gabriel pode obter nessa brincadeira são 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9, já que ele nunca vai obter o número 0. Um fato interessante é que, se Gabriel parte de um número n qualquer e obtém o número 1, partindo do $n + 1$, ele irá obter o 2, partindo do $n + 2$, o 3, e assim por diante, voltando a obter o número 1 novamente a partir do $n + 9$. A tabela abaixo ilustra esse fato com os números de três algarismos.

Figura 55 – Resolução da questão 17 OBMEP 2018

100 → 10 → 1	109 → 19 → 10 → 1	...	991 → 181 → 91 → 10 → 1
101 → 11 → 2	110 → 20 → 2	...	992 → 182 → 92 → 11 → 2
102 → 12 → 3	111 → 21 → 3	...	993 → 183 → 93 → 12 → 3
103 → 13 → 4	112 → 22 → 4	...	994 → 184 → 94 → 13 → 4
104 → 14 → 5	113 → 23 → 5	...	995 → 185 → 95 → 14 → 5
105 → 15 → 6	114 → 24 → 6	...	996 → 186 → 96 → 15 → 6
106 → 16 → 7	115 → 25 → 7	...	997 → 187 → 97 → 16 → 7
107 → 17 → 8	116 → 26 → 8	...	998 → 188 → 98 → 17 → 8
108 → 18 → 9	117 → 27 → 9	...	999 → 189 → 99 → 18 → 9

Fonte: Solução prova OBMEP 2018

Observe que em cada uma dessas sequências a soma dos algarismos dos números que aparecem deixa sempre o mesmo resto quando dividido por 9. O critério de divisibilidade por 9 afirma isto: por exemplo, se um número de três algarismos tem a forma abc , então ele pode ser escrito como $100a + 10b + c$, ou também como $99a + 9b + a + b + c$. Como 99 e 9 são múltiplos de 9, eles deixam resto 0 quando divididos por 9; logo, abc e $a + b + c$ têm o mesmo resto na divisão por 9. Partindo de números com três algarismos, isto é, começando de 100 e somando o número 9 sucessivas vezes, obtemos uma progressão aritmética cujo termo geral é $100 + 9 \cdot (k-1)$. Os números dessa progressão aritmética vão sempre terminar em 1 na brincadeira de Gabriel, sendo o último deles o número 991. Resolvendo a equação $100 + 9 \cdot (k-1) = 991$, vamos encontrar $k = 100$, que é a quantidade de números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1. Outra forma de se obter esse resultado é observar que entre 100 e 999 existem 900 números e com $\frac{1}{9}$ deles Gabriel obtém o número 1.

Comentários sobre a questão: Apesar de ser considerado um problema difícil, este é interessante pois seguindo a resolução oficial da OBMEP, o professor pode em sala de aula relembrar alguns conteúdos como critérios de divisibilidade e progressões aritméticas, visto que esses conceitos são utilizados na solução. Durante a apresentação do problema algumas perguntas podem ser feitas aos alunos, tais como: Qual quantidade de números cuja soma resulta em 2? E em 3? Tem algum resultado que aparece mais vezes que os outros?

O professor pode induzir os estudantes a encontrarem o ciclo que acontece com os números, testando inicialmente o número 100 até finalizar o segundo ciclo, conforme apresentado na Figura 55 e a partir daí deixá-los seguir o restante do raciocínio por conta própria.

37. (OBMEP 2018) Helena tem três caixas com 10 bolas em cada uma. As bolas dentro de uma mesma caixa são idênticas, e as bolas em caixas diferentes possuem cores distintas. De quantos modos ela pode escolher 15 bolas dessas três caixas?

Figura 56 – Questão 18 OBMEP 2018



Fonte: Prova OBMEP 2018

- a. 91
- b. 136
- c. 150
- d. 200
- e. 210

Solução alternativa: Vamos definir as cores como COR 1, COR 2 e COR 3. Teremos duas situações a considerar, quando temos bolas de duas cores distintas ou de três cores distintas. É trivial perceber que a situação onde temos bolas de uma única cor é impossível. *Duas cores apenas:* Vamos numerar os casos onde é possível termos duas cores: (COR 1, COR 2), (COR 1, COR 3) e (COR 2, COR 3). Lembre-se que a ordem em que as cores aparecem não importa. Logo, temos três situações onde podemos ter duas cores, e em cada uma dessas podemos ainda termos os seguintes pares ordenados representando as quantidades (10, 5), (9, 6), (8, 7), (7, 8), (6, 9) e (5, 10), onde a primeira coordenada representa a quantidade de bolas da primeira cor e a segunda coordenada a quantidade de bolas da segunda cor. Disso, temos $3 \times 6 = 18$ modos de escolher as 15 bolas, das três caixas, sempre com duas cores distintas apenas.

Três cores: Temos agora que usar as três cores. Organizando os possíveis casos, obtemos:

COR 1	COR 2	COR 3	Possibilidades
1	4 - 10	10 - 4	7
2	3 - 10	10 - 3	8
3	2 - 10	10 - 2	9
4	1 - 10	10 - 1	10
5	1 - 9	9 - 1	9
6	1 - 8	8 - 1	8
7	1 - 7	7 - 1	7
8	1 - 6	6 - 1	6
9	1 - 5	5 - 1	5
10	1 - 4	4 - 1	4

Fonte: Elaborada pelo autor 2020

Na situação descrita em negrito, temos uma bola da cor 1 e podemos ter de 4 a 10 bolas da cor 2 e o restante é completado com as bolas da cor 3, logo teremos 7 possibilidades nesse caso. Do exposto e seguindo analogamente para os demais, o total de possibilidades para casos com três cores distintas é $7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 73$ maneiras.

Portanto, utilizando duas ou três cores, o total é $18 + 73 = 91$ maneiras distintas.

Solução OBMEP 1: Suponha que não escolhamos bolas na primeira caixa; podemos escolher então 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 bolas da segunda caixa e completar o que falta para 15 com bolas da terceira caixa (6 possibilidades). Se escolhermos só 1 bola da primeira caixa, podemos escolher de 4 a 10 bolas da segunda (7 possibilidades). Se escolhermos exatamente 2 bolas da primeira caixa, podemos escolher de 3 a 10 bolas da segunda (8 possibilidades). Prosseguindo dessa maneira, escolhendo 3 bolas da primeira caixa,

teremos 9 possibilidades; escolhendo 4 bolas da primeira caixa, teremos 10 possibilidades; escolhendo 5 bolas da primeira caixa, teremos 11 possibilidades. Ao escolher exatamente 6 bolas da primeira caixa, podemos escolher de 0 a 9 bolas da segunda (10 possibilidades); ao escolher 7 bolas da primeira caixa, teremos outras novas 9 possibilidades; ao escolher 8 bolas da primeira caixa, mais 8 possibilidades; ao escolher 9 bolas da primeira caixa, mais 7 possibilidades e, finalmente, ao escolher as 10 bolas da primeira caixa, 6 possibilidades (as quais correspondem às escolhas de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 bolas da segunda caixa). Juntando todos os casos, temos $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$ possibilidades de escolha. Esse raciocínio, com outra organização, é apresentado na solução a seguir:

Solução OBMEP 2: Sejam x , y e z as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Devemos ter a seguinte equação em inteiros não negativos:

$x + y + z = 15$, com as restrições $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$ e $0 \leq z \leq 10$. Fixado o valor de z , devemos ter $x + y = 15 - z$.

Os possíveis pares (x, y) de inteiros não negativos são: $(0, 15 - z), (1, 14 - z), (2, 13 - z), \dots, (15 - z, 0)$.

- Se $z \geq 5$, todos esses $16 - z$ pares produzem soluções admissíveis, pois satisfazem $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$.

- Se $z < 5$, uma das outras duas variáveis deverá ser pelo menos 6 e, ao subtrairmos esse valor dela, obteremos uma solução para a equação: $x + y = 9 - z$. Os possíveis pares (x, y) de inteiros não negativos são: $(0, 9 - z), (1, 8 - z), (2, 7 - z), \dots, (9 - z, 0)$. Todos esses $10 - z$ pares produzem soluções admissíveis, pois satisfazem $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$. Assim,
 - para $z = 5, 6, 7, 8, 9$ e 10 , temos 11, 10, 9, 8, 7, 6 soluções, respectivamente.
 - para $z = 0, 1, 2, 3, 4$, temos 10, 9, 8, 7, 6 soluções, respectivamente. Portanto, o total de soluções é $(11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6) + (10 + 9 + 8 + 7 + 6) = 91$.

Comentários sobre a questão: Este problema apresenta diversos métodos de resolução, desde métodos mais intuitivos até mais formais, utilizando-se de fórmulas e raciocínio lógico. A maneira mais simples, porém não a mais rápida, é apresentada na solução alternativa, que trata em expor a quantidade de cada caso abordado no problema. A solução alternativa e a primeira solução da OBMEP apresentam o mesmo raciocínio na resolução, divergindo apenas na escrita. Já a solução dois da OBMEP detêm de maior rigor matemático em sua resolução, porém utiliza métodos resolutivos e fórmulas não difundidas no ensino médio.

38. (OBMEP 2019) As 6 cadeiras de uma fila são numeradas de 1 a 6 e devem ser ocupadas uma de cada vez de modo que, sempre que possível, é escolhida uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Por exemplo, é válida a ordem de ocupação 1 6 3 2 4 5, em que a primeira pessoa ocupa a cadeira 1, a segunda, a cadeira 6, a terceira a cadeira 3, a quarta, a cadeira 2, a quinta, a cadeira 4 e a última, a cadeira 5. Já a ordem 1 5 2 3 6 4 não é válida, pois a terceira pessoa sentou-se ao lado da primeira, quando poderia ter se sentado em uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Quantas ordens de ocupação válidas existem?

Figura 57 – Questão 15 OBMEP 2019



Fonte: Prova OBMEP 2019

- a. 72
- b. 108
- c. 144
- d. 192
- e. 216

Solução OBMEP: A ocupação dos lugares se dá em duas etapas:

- Inicialmente, os lugares são ocupados de modo que não haja cadeiras vizinhas ocupadas, até que isto não seja mais possível.
- A seguir, os demais lugares são ocupados em qualquer ordem. Para contar o número de possibilidades de ocupação, vamos, inicialmente, encontrar as configurações maximais, para as quais não há cadeiras vizinhas ocupadas, mas tais que o próximo a chegar necessariamente precisará sentar ao lado de alguém. Há dois tipos de configurações maximais:
 - Com 2 pessoas, que devem ocupar os lugares 2 e 5
 - Com 3 pessoas, que podem ocupar os lugares 1, 3, 5; 1, 3, 6; 1, 4, 6; ou 2, 4, 6. No primeiro caso, há 2 possibilidades para a ordem de ocupação dos assentos 2 e 5; para cada uma dessas possibilidades os lugares podem ser ocupados em qualquer ordem, ou seja, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades. Para cada uma das 4 situações do segundo caso, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordem de ocupação dos lugares da configuração maximal; a seguir, para cada uma dessas possibilidades, os demais lugares também podem ser ocupados em qualquer ordem, com um total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades. Logo, o número total de possibilidades de ocupação é igual a: $2 \times 24 + 4 \times 6 \times 6 = 192$ possibilidades.

Comentários Sobre a questão: Temos aqui um problema considerado de nível difícil, uma vez que a solução sugerida pela OBMEP busca dividir o problema em dois casos particulares, porém, é pouco provável que um aluno não habituado com esse tipo de problema venha a ter esse raciocínio.

Vejamos um problema considerado bem mais simples que poderia ser apresentado aos estudantes como desafio inicial.

1. *De quantas formas distintas seis amigos podem sentar-se em seis cadeiras enfileiradas?*

De uma maneira mais fácil, esse problema pode ser resolvido com o PFC 3, onde o primeiro amigo pode ocupar qualquer uma das seis cadeiras, o segundo amigo qualquer uma das cinco cadeiras, o terceiro amigo qualquer uma das quatro cadeiras, o quarto amigo pode ocupar qualquer uma das três cadeiras, o quinto amigo pode ocupar qualquer uma das duas últimas cadeiras e o sexto amigo deverá ocupar a última cadeira restante, logo temos um total de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ maneiras.

Outro problema que pode ser facilmente resolvido pelos estudantes é:

2. *De quantas maneiras distintas quatro amigos podem ocupar essas seis cadeiras?*

Diferentemente do problema anterior, aqui devemos perceber que a quantidade de cadeiras é maior que a quantidade de pessoas, logo teremos aqui algumas cadeiras que ficarão vazias. Isso mudará algo em nossa resolução? O professor pode em sala de aula fazer essa indagação aos seus alunos, para que os mesmos reflitam e busquem montar suas resoluções.

Note que o primeiro amigo pode ocupar qualquer uma das seis cadeiras, já o segundo amigo pode ocupar qualquer uma das cinco cadeiras remanescentes, o terceiro amigo ocupará qualquer uma das quatro cadeiras restantes e o quarto amigo pode ocupar uma das três cadeiras que ainda estão vagas, logo, temos um total de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ maneiras distintas, onde duas cadeiras ficam vazias.

39. (OBMEP 2019) A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Figura 58 – Questão 16 OBMEP 2019



Fonte: Prova OBMEP 2019

- a. 10
- b. 35
- c. 45
- d. 84
- e. 126

Solução alternativa: Vamos nomear os tipos de salto como sendo A o salto onde a rã Zinza pula de uma pedra para outra a frente. B o salto onde a rã pula por cima de UMA pedra a frente e C o salto onde a rã pula por cima de DUAS pedras imediatamente a frente. Analisando os casos, é fácil ver que a rã não pode dar três saltos do tipo C, uma vez que chegaria na pedra 10 em apenas três saltos. Porém, ela pode dar dois saltos C e três saltos do tipo A, formando a sequência CCAAA, que geraria um total de $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ anagramas, ou seja, 10 maneiras de dar dois saltos tipo C e três tipo A, uma vez que os tipos de saltos podem ser permutados. Analogamente, podemos ter um salto do tipo C, dois do tipo B e dois do tipo A, formando a sequência CBBA, que gera um total de $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ (ANAGRAMAS) maneiras distintas de realizar o trajeto com cinco saltos, sendo um salto C, dois B e dois A. E ainda, quatro saltos B e um salto A, gerando a sequência BBBBA, donde temos $\frac{5!}{4!} = 5$ (anagramas) maneiras distintas de realizar esse trajeto.

Totalizando assim, $10 + 30 + 5 = 45$ maneiras distintas de chegar na pedra 10 com cinco saltos.

Solução OBMEP: Na ida da pedra 1 até a pedra 10, a rã tem que transpor 9 espaços entre pedras consecutivas. Em cada salto, a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. Se chamarmos de x , y e z o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 ou 3 espaços, respectivamente, temos $x + y + z = 5$ (já que a rã anda 5 pulos) $x + 2y + 3z = 9$ (já que são 9 espaços a percorrer) Subtraindo as duas equações, encontramos $y + 2z = 4$. A tabela abaixo dá os possíveis valores de x , y e z e o número de possibilidades em cada caso.

z	y	x	Número de possibilidades
0	4	1	O salto em que é percorrido 1 espaço pode ser qualquer um dos 5 saltos. Há 5 possibilidades.
1	2	2	O salto em que são percorridos 3 espaços pode ser escolhido de 5 modos. Dos 4 saltos restantes, 2 devem percorrer dois espaços; esses saltos podem ser escolhidos de $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modos. Logo, há $5 \cdot 6 = 30$ possibilidades.
2	0	3	Os dois saltos em que são percorridos 3 espaços podem ser escolhidos de $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ modos. Os demais saltos são de 1 espaço cada. Há 10 possibilidades.

Fonte: Solução OBMEP 2019

Logo, o número total de possibilidades para os saltos da rã são $5 + 30 + 10 = 45$.

Comentários sobre a questão: Podendo ser considerada uma questão difícil, este problema pode ser apresentado aos alunos depois do conteúdo de anagramas, para que os

mesmos tentem criar um raciocínio parecido com o da solução alternativa. Uma resolução mais algébrica pode ser vista na solução da OBMEP. Observe que ambas as soluções tem raciocínio inicial igual, mas utilizam desenvolvimento diferentes quanto a solução final. O professor em sala de aula deve indagar seus alunos com perguntas do tipo “a rã pode saltar aleatoriamente?”, “qual uma possível combinação que a rã pode fazer?”, caso eles exponham uma combinação válida de saltos, peça que os mesmos montem outras a partir dela. Assim, eles podem perceber que a partir de uma configuração existem várias outras dependentes da mesma, apenas permutando o tipo de saltos.

40. (OBMEP 2019) Cinco bolas numeradas de 1 a 5 estão dentro de cinco caixas tampadas, também numeradas de 1 a 5. Em cada caixa há somente uma bola, e sabe-se que apenas uma caixa está numerada com o mesmo número de sua bola. Qual é o número mínimo de tampas que devemos abrir para descobrir, com certeza, que caixa é essa?

Figura 59 – Questão 18 OBMEP 2019



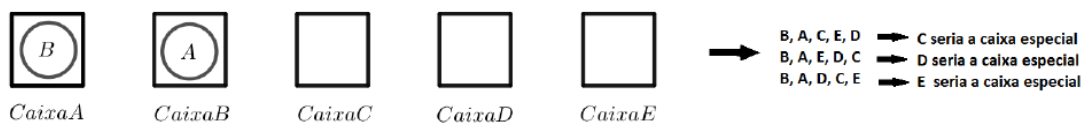
Fonte: Prova OBMEP 2019

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

Solução alternativa: Devemos pensar na pior situação possível. Abrimos a caixa de número 1 e temos duas situações possíveis, encontramos uma bola com número 1 ou diferente de 1. Considerando o pior caso, onde não encontramos a caixa que contém a bola com mesmo número, digamos que encontramos a bola 5 e disso a caixa 5 não contém a bola 5. Já eliminamos duas caixas erradas. Não encontramos ainda a caixa com a bola de mesmo número, devemos então abrir uma outra caixa. Abriremos a caixa 2. Temos agora três situação a considerar: a caixa 2 contém a bola 2, desconsideraremos esse caso; a caixa 2 contém a bola 1; a caixa 2 contém uma bola diferente de 1 ou 2. Analisando estes dois últimos casos, percebemos que, se a caixa 2 contiver uma bola diferente de 1 e 2, digamos a bola 4, teremos eliminado a caixa 2 e a caixa 4, pois esta não conterá a bola 4, e logo restará apenas a caixa 3 que conterá obrigatoriamente a bola 3. Portanto, o pior caso se dá quando a caixa 2 contém a bola 1 onde eliminamos apenas uma caixa, visto que a caixa 1 já estava aberta. Logo, devemos ainda abrir uma terceira caixa. Abrindo a caixa 3, podemos encontrar a bola 3 ou 2 (encontrar a bola 4 é impossível, visto que nesta situação eliminaríamos as caixas 1,2,3,4 e 5 todas com bolas diferentes de suas numerações). Encontrando a bola 3 o problema está encerrado; encontrando a bola 2 o problema também esta encerrado, visto que as caixas 1, 2, 3 e 5 contém bolas diferentes de suas numerações. Logo, a caixa 4 contém de certeza a bola 4. Portanto, para termos certeza de encontrar a bola e caixa com mesma numeração devemos abrir 3 caixas. Perceba que a ordem em que escolhemos as caixas não importará na resposta final do problema.

Solução OBMEP: Inicialmente vamos mostrar que abrir duas caixas não é suficiente. Vamos chamar as caixas de A,B,C,D e E e as bolas com os mesmos nomes para que possamos abrir hipóteses sem perder generalidade e chamaremos de caixa especial a caixa com bola de mesma numeração da caixa. Após abrir a primeira caixa (A) duas coisas podem acontecer: encontrarmos a bola A e teremos descoberto a caixa especial. Então vamos nos concentrar no caso em que a bola na caixa A seja uma bola diferente de A, que chamaremos de B. Hipótese 1: Abrir a caixa B (é uma hipótese ruim, pois já temos certeza de que a caixa B não é a especial, mas, ainda assim, vamos analisar para esgotar as possibilidades). Se na caixa B estiver a bola A, então ainda não se pode saber qual é a caixa especial, basta ver no diagrama abaixo que haveria três possibilidades para as outras 3 caixas e cada uma dessas possibilidades apresenta uma caixa especial diferente :

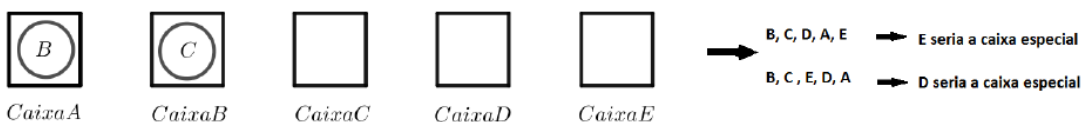
Figura 60 – Resolução 1 da questão 18 OBMEP 2019



Fonte: Solução prova OBMEP 2019

Se na caixa B estiver uma bola diferente de A e de B, podemos, sem perda de generalidade, chamá-la de C, então com certeza a caixa especial terá que ser a D ou a E, mas as duas coisas ainda poderiam acontecer como descrito no diagrama abaixo e, portanto, não seria possível determinar a caixa especial abrindo só duas caixas.

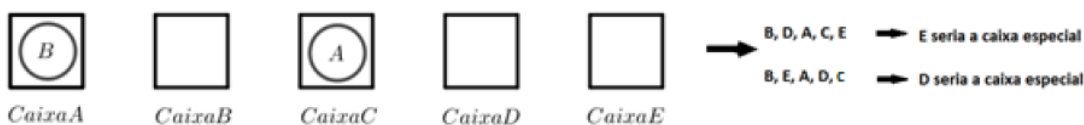
Figura 61 – Resolução 2 da questão 18 OBMEP 2019



Fonte: Solução prova OBMEP 2019

Hipótese 2: Após abrir a caixa A, escolhemos uma caixa diferente da B para abrir. Separaremos essa hipótese em dois casos: se a bola nessa caixa for A ou se a bola nessa caixa for diferente de A e de C. Se a bola na caixa C for A, então cairemos nos dois casos do diagrama abaixo, e não será possível determinar se a caixa especial é a D ou a E:

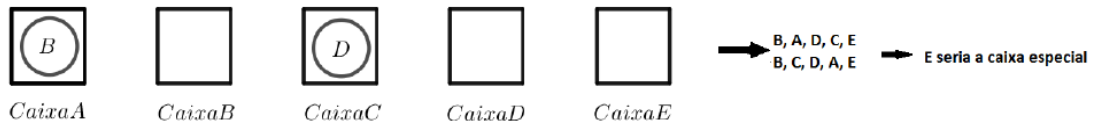
Figura 62 – Resolução 3 da questão 18 OBMEP 2019



Fonte: Solução prova OBMEP 2019

Se a bola na caixa C for diferente de A e de C (por exemplo, D), esta será a única situação em que a caixa especial ficará determinada após a abertura de duas caixas não especiais.

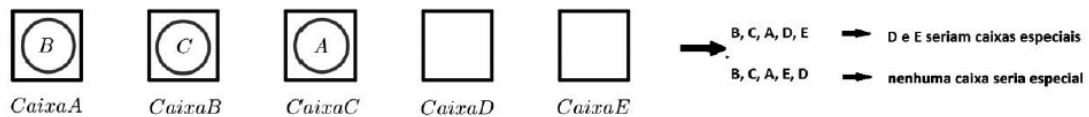
Figura 63 – Resolução 4 da questão 18 OBMEP 2019



Fonte: Solução prova OBMEP 2019

Com isso, concluímos que, de fato, a abertura de duas caixas não garante a determinação de qual é a especial. Vamos mostrar agora que com a abertura de 3 caixas podemos garantir qual é a caixa especial. Imaginemos que 3 caixas foram abertas e que nenhuma delas era a especial. Se chamarmos essas 3 caixas de A, B e C, então é impossível que as 3 bolas A, B e C já tenham aparecido nas 3 primeiras caixas, pois isso obrigaria as caixas D e E a serem ambas especiais ou ambas não especiais.

Figura 64 – Resolução 5 da questão 18 OBMEP 2019



Fonte: Solução prova OBMEP 2019

Portanto, em uma das 3 caixas não especiais que já foram abertas tem que aparecer a bola de uma das outras duas caixas que automaticamente poderemos garantir que também não será especial. Com isso, só sobrar uma caixa para ser a especial. Podemos, portanto, garantir que a quantidade mínima de caixas que precisam ser abertas para descobrirmos qual caixa contém a bola de igual número é 3.

Comentários sobre a questão: Mais uma vez nos deparamos com um problema onde precisamos saber a quantidade mínima de movimentos necessários para se ter a certeza do acontecimento de uma situação. Esse tipo de problema é cobrado de maneira recorrentemente em provas de OBMEP. Diferentemente da maioria das questões anteriores que utilizavam fórmulas em suas resoluções, este problema é resolvido analisando intuitivamente cada caso e suas possibilidades, podendo o estudante sempre imaginar a pior das situações. Em sala de aula o professor pode iniciar perguntando os estudantes se com duas caixas abertas o problema estaria resolvido. A resposta para esse problema é “não”, apesar de em alguns casos o problema estaria sim resolvido, visto que, abrindo a caixa 1 contendo a bola 5, eliminamos a caixa 1 e 5. Abrindo a caixa 2 e encontrando a bola 4, eliminamos as caixas 2 e 4. Logo, a caixa 3 contém a bola 3. Sendo necessário apenas abrir duas caixas. Porém, essa situação não é a pior possível, portanto não temos garantida a certeza solicitada no problema. O professor pode ainda iniciar o problema mostrando um caso onde duas caixas é insuficiente, e deixar os estudantes mostrar se com três caixas resolveríamos o problema.

41. (OBMEP 2019) Em um aniversário, todo menino conhece 4 meninas, e cada menina **não** conhece 5 meninos. Qual é o número mínimo de meninas e meninos nesse aniversário?
- 4
 - 8
 - 18
 - 20
 - 100

Solução OBMEP: Sejam h o número de meninos e m o número de meninas no aniversário. Por um lado, como cada menino conhece 4 meninas, o número de relações de conhecimento é $4h$. Por outro lado, como cada menina conhece $h - 5$ meninos, esse número também é

igual é $(h - 5).m$. De $4h = (h - 5).m$, podemos concluir que $h(m - 4) = 5m$. Como o membro direito dessa equação é um múltiplo de 5, segue que h ou $m - 4$ é um múltiplo de 5. Não podemos ter $h = 5$ ou $m = 4$, pois nesses casos a equação não possui solução. Quando h é múltiplo de 5, os possíveis pares (h, m) que satisfazem a equação são: $(10, 8)$, $(15, 6)$, $(20, \frac{16}{3})$, \dots . Quando $m - 4$ é um múltiplo de 5, os possíveis pares (h, m) que satisfazem a equação são: $(9, 9)$, $(7, 14)$, $(\frac{19}{3}, 19)$, \dots

Note que, se $m - 4 \geq 10$ ou $h \geq 15$, temos $m + h \geq 14 + \frac{5m}{m-4} > 14 + 5 = 19$ ou $m + h \geq 4h/(h - 5) + 15 > 4 + 15 = 19$. Assim, considerando as soluções $(10, 8)$ e $(9, 9)$, podemos concluir que $m + h \neq 18$. Para exibir um exemplo em que essa soma mínima é atingida, considere uma festa contendo os meninos h_1, h_2, \dots, h_{10} e as meninas $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$. Se apenas as pessoas dentro de um dos seguintes grupos $/h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, m_1, m_2, m_3, m_4/$ e $/h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, m_5, m_6, m_7, m_8/$ se conhecerem, as condições do enunciado serão satisfeitas. Logo, o número mínimo de pessoas na festa é 18.

Comentários sobre a questão: Perceba que este problema apresenta um enunciado bem particular, com informações diretas e a primeira vista bem complicadas. A solução apresentada pela OBMEP é de cunho experimental e teórico, onde a partir das situações propostas são analisadas as possibilidades de respostas. Este problema não é aconselhado para um estudantes com pouco conhecimentos sobre o tema e sobre lógica, visto que esta solução apresenta deduções não triviais.

Inicialmente, este problema aparentava ser facilmente resolvido utilizando a ideia de formar um fluxograma, mostrando todas as relações possíveis, porém, na prática, a ideia não vigorou.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A apresentação desse projeto a discentes e, principalmente, docentes acaba por motivá-los a participar ativamente da OBMEP, visto que aqui temos exposto um pouco de sua história, contando suas vantagens e premiações, mostrando um dos tópicos mais cobrados em seus problemas e trazendo sempre que possível contribuições para professores em sua prática pedagógica.

É possível notar que em alguns casos a solução alternativa e a solução oficial da OBMEP divergem apenas em sua escrita e formalidade, porém, em muitos outros problemas foram apresentados soluções diversas, problemas correlatos e dicas que o professor pode usar em seus planejamentos de aulas.

Aqui temos um material autossuficiente sobre o conteúdo de análise combinatória cobrado pela OBMEP, onde são expostos os resultados dessa prova, um guia sobre resolução de problemas, suas vantagens e ainda os temas essenciais para a resolução dessas questões.

Ponto forte desse material, o Capítulo 4 onde foram analisadas todas as provas de primeira fase do nível três desse exame no período de 2005 à 2019, sendo selecionadas um total de 41 problemas expondo resoluções e comentários que devem ajudar professores em suas atividades diárias.

Esta dissertação estará disponível a qualquer professor da rede pública ou privada de ensino, destinado a formação e capacitação de docentes e conta com objetivo de melhorar e facilitar sua prática pedagógica sobre o tema exposto.

Além disso, esse trabalho vem difundir ainda mais a OBMEP e seus resultados, mostrando a importância desse programa para todos os estudantes brasileiros, que a partir dela podem adentrar em um universo cheio de conhecimento e oportunidades aqui citadas como PIC Jr, PIC Me, Bolsas do instituto TIM ou com a modalidade no ingresso ao curso superior pelas Vagas Olímpicas.

Este trabalho não conta com uma aplicação em sala de aula, o mesmo é de cunho teórico. Aqui, temos uma vertente a ser finalizada e caso os resultados sejam favoráveis, os mesmos podem ser publicados em um artigo ou congresso da área. Esperamos aqui ter contribuído, formando meios para com que os nossos alunos consigam aprender e gostar de matemática, virtude essa almejada por muitos professores da educação básica do Brasil.

Referências

- ARANHA, C. *Medalha que vale vaga na universidade*. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/wp-content/uploads/2019/03/042-045_Medalhistas_277NOVO.pdf>.
- BRASIL, S. E. F. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 1998. 148 p.
- DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 2010.
- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo. 2002.
- ESTRATÉGICOS, C. de Gestão e E. *Avaliação do impacto da olimpíada brasileira de matemática nas escolas públicas - obmep 2010*. Disponível em: <<http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o>>.
- GODOY FILHO, J. H. B. D. *O princípio da inclusão e exclusão*. Dissertação.
- HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- IMPA. *BBC mostra sucesso de jovens internos na obmep: Internos e a obmep*. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/bbc-mostra-sucesso-de-jovens-internos-para-a-obmep/>>.
- LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2003.
- MACHADO, C.; LEO, E. *Impacto da olimpíada brasileira de escolas públicas (obmep) no desempenho em matemática na prova brasil, enem e pisa*. OBMEP, 2014.
- MORGADO, A. C. d. O.; ET. al. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- OBMEP. *Obmep em números*. 2019. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>>.
- PICME. *Programa de iniciação científica e mestrado*. Disponível em: <<https://picme.obmep.org.br/index/sobre>>.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Universidade de Stanford: Interciência, 1995.
- RIBENBOIM, P. *Números primos: Velhos Mistérios e Novos Recordes*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- ROMANATTO, M. C. *Resolução de problemas nas aulas de matemática*. Disponível em: <<file:///C:/Users/Usu%C3%A1rio-PC/Downloads/413-1458-1-PB.pdf>>.
- ROSS, S. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*. Porto Alegre, 2010.
- SANTOS, J. P. d. O. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- SOUZA, J. R. de; GARCIA, J. da S. R. *Contato Matemática*, 1 ano. São Paulo: FTD, 2016.
- SOUSA, L. *O teorema das quatro cores*. n. 24. Disponível em: <<http://www.ipv.pt/millennium/Millennium24/12.pdf>>. 2001
- TIM, B. I. *Bolsa instituto tim - obmep*. Disponível em: <<http://bolsatim.obmep.org.br:8080/portal>>.