UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ODAIR JOSÉ MELO DA SILVA BARROS

ENSINO DE MODELOS EXPONENCIAIS POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA

PALMAS (TO)
2020

ODAIR JOSÉ MELO DA SILVA BARROS

ENSINO DE MODELOS EXPONENCIAIS POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes.

PALMAS (TO)

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M528e Melo da Silva Barros, Odair José .
ENSINO DE MODELOS EXPONENCIAIS POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA . / Odair José Melo da Silva Barros. – Palmas, TO, 2020.
97 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.
Orientador: Gilmar Pires Novaes

1. Modelagem Matemática. 2. BNCC. 3. Modelos Exponenciais.. 4. Relação entre Função Exponencial, Progressão Geométrica e Juros Compostos.. I. Título

CDD 510

ODAIR JOSÉ MELO DA SILVA BARROS

ENSINO DE MODELOS EXPONENCIAIS POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA - UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Me. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 21 / 08 / 2020

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha
Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Hellena Christina F. Apolinário
Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues (UFG)
Membro externo - UFG

A Deus, criador e onipotente, por sua infinita bondade e misericórdia mediante as minhas fraquezas.

À minha esposa e aos meus filhos por me apoiarem nessa árdua jornada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, por permitir mais essa vitória em minha vida acadêmica. Um sonho realizado graças à sua bondade e misericórdia infinita.

À minha esposa, companheira ao longo dessa jornada, e aos meus filhos, pela compreensão nos momentos de ausência, em meio às minhas aflições ao conciliar trabalho e estudos acadêmicos.

Aos amigos e guerreiros do PROFMAT pelo apoio e parceria ao longo dessa jornada. Agradeço a cada um deles pelo companheirismo nos estudos e incentivo nos momentos mais difíceis durante esses mais de dois anos. Vocês vão fazer muita falta.

Ao Colégio Santa Cruz pelo apoio em mais essa etapa da minha vida acadêmica, em especial à Coordenadora Roberta Rocha, por todo o incentivo e colaboração, para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Minha eterna gratidão.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação desse importante programa de Mestrado, permitindo-me adquirir conhecimentos relevantes para um melhor desempenho da minha atividade docente e realizar um sonho profissional.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT), em especial aos Professores do PROFMAT, por compartilharem seus conhecimentos com tanta generosidade, para que pudéssemos avançar na busca pelo conhecimento.

Ao meu orientador, Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes, pelas suas preciosas orientações e incentivos para a redação e conclusão desse trabalho.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja,

que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

Lobachevsky (1792-1856)

RESUMO

A motivação para a realização dessa pesquisa proveio das minhas inquietações no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem de Modelos Exponenciais. Partindo das possibilidades da Modelagem Matemática, como metodologia ativa aplicada ao ensino, e da aprovação da nova BNCC, em 2018, essa pesquisa propõe o ensino de Modelos Exponenciais por meio das etapas da Modelagem Matemática, aplicadas em uma sequência didática de abordagem que tem por objetivo levar os alunos a compreenderem as características de problemas que são modelados por meio da Função Exponencial. Assim, com base em determinadas situações-problema do dia a dia, os alunos devem entender as etapas da Modelagem — Experimentação, Abstração, Formulação do modelo, Resolução, Validação do modelo e Modificação e, dessa forma, descobrirem padrões comuns a uma variedade de problemas que são modelados por meio de uma Função Exponencial, bem como a correlação existente entre Função Exponencial, Juros Compostos e Progressão Geométrica. Diante de todo o estudo realizado, essa pesquisa me permitiu entender melhor como a Modelagem Matemática pode ser utilizada como ferramenta para planejar aulas mais dinâmicas, em busca do desenvolvimento de habilidades e competências propostas nas diretrizes da nova BNCC, sendo assim, capaz de colocar o aluno numa situação de protagonismo durante o processo de ensino-aprendizagem de Modelos Exponenciais.

Palavras-chave: Modelos Exponenciais. Modelagem Matemática. BNCC.

ABSTRACT

The motivation for the execution of this research derived from my concerns as regards the Exponential Models teaching-learning process. Staring with the Mathematical Modeling possibilities, as an active method applied to teaching, and the approval of the new National Common Curricular Base (BNCC), in 2018, this research proposes the teaching of Exponential Models through stages of Mathematical Modeling, applied in a didactic sequence approach, which aims to have students understand the characteristic of problems that are modeled through the Exponential Function. Thus, based on determined situations – daily problems, the students should understand the stages of the Mathematical Modeling: Experimentation, Abstraction, Model Formulation, Resolution, Model Validation and Modification and, in this way, find common patterns to a range of problems that are modeled through an Exponential Function, as well as the existing correlation among Exponential Function, Compound Interest and Geometric Progression. In face of the whole study realized, this research allowed me to better understand how the Mathematical Modeling can be used as a tool to create more dynamic lessons, in pursuit of developing abilities and competencies proposed by the new BNCC guidelines, thereby, enough to put the student in a protagonist situation during the Exponential Models teaching-learning process.

Keywords: Exponential Models. Mathematical Modeling. BNCC.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional de Educação
EDOs	Equações Diferenciais Ordinais
EDPs	Equações Diferenciais Parciais
EM	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MAT	Matemática
NBR	Norma Brasileira
PA	Progressão Aritmética
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática
PG	Progressão Geométrica
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação.
UFT	Universidade Federal do Tocantins

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\dfrac{dx}{dt}$	Derivada da função de uma variável $x(t)$ com relação à variável t

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática para alunos da 1ª série do Ensino Médio, em especial dos Modelos Exponenciais, é um grande desafio para a maioria dos professores de Matemática, desafio esse que perpassa os seguintes questionamentos: como motivar o aluno para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos?; qual a melhor maneira de ensinar os conteúdos?; existe alguma ferramenta, na arte de ensinar Matemática, que possa, ao mesmo tempo, motivar, contextualizar e fazer com que o próprio aluno seja protagonista nesse processo de ensino-aprendizagem?

As respostas a essas perguntas são complexas, envolvem muitas variáveis, dentre elas, o gosto do aluno pela Matemática, a forma como o professor mostra a importância do assunto no dia a dia do próprio aluno, e, por fim, a percepção que o aluno tem de como se dá a construção do conhecimento matemático, isto é, qual a motivação que ele tem para buscar o conhecimento do assunto a ser abordado.

> Motivar alunos é canalizar os seus interesses para o tema específico a ser aprendido. [...] A tarefa do professor é entender as motivações básicas já presentes nos alunos e capitalizar com base nelas. A seguir, o professor pode manipular esse conhecimento das motivações dos alunos, para maximizar a eficácia do processo de ensino. (POSAMENTIER; KRULIK, 2014, p 16-17)

Ainda segundo Posamentier e Krulik (2014, p. 18-19), na tentativa de motivar os alunos para o estudo de determinado conteúdo matemático, o professor deve recorrer a uma (ou mais) das nove técnicas por eles apresentadas:

> Indique uma lacuna no conhecimento dos alunos; descubra um padrão; apresente um desafio; instigue a turma com um resultado matemático surpreendente e impressionante; explique a utilidade do tema; utilize a matemática recriativa; conte uma história pertinente; envolva os alunos ativamente na justificativa de curiosidades matemáticas; ou use materiais feitos pelo professor ou vendidos prontos.

Dessa forma, a motivação do aluno para a aprendizagem é um primeiro passo para o desenvolvimento de uma aula interativa entre Professor e Aluno.

Logo, na tentativa de obter respostas para algumas inquietações da minha prática docente, no que diz respeito ao processo de motivação e construção do saber matemático para alunos da 1ª série do Ensino Médio, com a análise de relevantes pesquisas de estudiosos da área e, embasado pelas diretrizes da nova BNCC, que propõe o protagonismo do aluno no processo ensino-aprendizagem, vemos que a Modelagem Matemática é uma ferramenta útil. Ela é de grande aplicação para a obtenção de melhores resultados nesse processo de motivação, contextualização e percepção da construção do conhecimento matemático, em especial dos modelos exponenciais, por se tratar de uma metodologia ativa que torna o aluno participante do processo de ensino-aprendizagem, conforme diretrizes da nova BNCC, pois de acordo com Generoso (2019, p. 15):

> Metodologias ativas podem ser compreendidas como alternativas metodológicas com uma abordagem contraria ao ensino tradicional focado nos componentes curriculares, de modo que proporcionem o desenvolvimento do olhar crítico e reflexivo do educando em relação ao que estão fazendo.

Assim, a proposta desse trabalho é apresentar uma sequência didática de abordagem, para alunos da 1ª série do Ensino Médio, para apresentação dos problemas que são modelados de forma exponencial, realizando, desse modo, uma relação entre Função Exponencial, Juros Compostos e Progressão Geométrica. Essa sequência didática está pautada em exemplos contextualizados de forma interdisciplinar, de modo que conduza os alunos, por meio das perspectivas da Modelagem Matemática, a compreender a conjectura dos Modelos Exponenciais. Para tanto, a Modelagem Matemática deve ser compreendida como uma ferramenta motivacional do processo ensino-aprendizagem. Porém, em certas situações, não atende a toda a formalização matemática necessária ao ensinar determinado assunto, precisando, assim, de uma intervenção com o rigor exigido para uma definição precisa do assunto em questão.

De modo geral, essa pesquisa apresenta a Modelagem Matemática como metodologia ativa para tentar alcançar as habilidades e competências compreendidas nas diretrizes da nova BNCC, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de modelos exponenciais. As investigações em busca das propriedades de modelos exponenciais serão realizadas em uma sequência de atividades, ordenadas de modo adequado, para que, intuitivamente, os alunos possam descobrir propriedades inerentes a modelos exponencias.

Essa pesquisa está dividida em 4 capítulos, consistindo o 1º capítulo na introdução do trabalho. No 2º capítulo, trazemos uma análise das relevantes pesquisas sobre a Modelagem Matemática e suas perspectivas no âmbito educacional, em particular da contribuição de um dos precursores do tema no Brasil — Rodney Carlos Bassanezi. No capítulo seguinte, apresentamos os modelos exponenciais. Essa parte inicia-se apresentando a relevância do estudo dos modelos exponenciais, seguido de uma proposta didática, ordenada adequadamente às necessidades de uma aula dinâmica, contextualizada e interdisciplinar. A seguir, apresentamos as contribuições da Modelagem Matemática no desenvolvimento das atividades que compõem a sequência didática de abordagem para o estudo de modelos exponenciais. Na última seção do 3º capítulo, apresentamos a caracterização da Função Exponencial com o rigor matemático, com as devidas demonstrações, seguidas da formalização da relação entre Função Exponencial, Juros Compostos e Progressão Geométrica. E, por fim, no 4º e último capítulo, apresentamos as conclusões dessa pesquisa, bem como as considerações finais a respeito de todo o estudo aqui realizado.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 A modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino-Aprendizagem

A importância de um ensino-aprendizagem significativo para os nossos alunos é algo discutido por muitos pesquisadores. Segundo Bassanezi (2002, p. 36):

> O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo terminaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, e mesmo do processo histórico de construção da Matemática. Assim é que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: "enunciado → demonstração → aplicação", quando, de fato, o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação (externa ou não à Matemática), a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e, finalmente, o seu enunciado. Estaríamos, assim, reinventando o resultado juntamente com os alunos, seguindo o processo da modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem.

Dessa forma, o processo de ensino-aprendizagem é algo dinâmico e construtivo. Na medida do possível (pois depende do assunto a ser ensinado), devemos partir de uma situação-problema, de preferência do dia a dia dos alunos, para que possam descobrir características inerentes a determinado assunto que pretendemos posteriormente formalizar na linguagem matemática coerente com as hipóteses do problema. Assim, o processo de construção do saber matemático estaria ocorrendo na mesma ordem em que se deu ao longo dos séculos, pois observamos, então, que a Modelagem Matemática tem a sua história intimamente relacionada à própria história do desenvolvimento do conhecimento matemático. Nesse sentido, Biembengut e Hein (2007, p. 15) dizem o seguinte:

> A modelagem matemática, arte de expressar, por meio de linguagem matemática, situações-problema do nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos.

Desse modo, analisando atentamente o desenvolvimento dos conhecimentos adquiridos pela humanidade, percebemos que a ciência é uma atividade essencialmente desenvolvida pelo ser humano, que procura entender a natureza por meio de teorias adequadas. Tais teorias servem de suporte para desenvolver novas teorias, possibilitando, no futuro, tomadas de decisões adequadas a cada necessidade.

> Lançando um olhar sobre a História da Matemática, nota-se que o seu desenvolvimento esteve frequentemente atrelado à resolução de problemas e à tentativa de modelar o mundo físico, o que culminou com o estabelecimento de modelos explicativos e interpretativos dos fenômenos relacionados a tais problemas. (ROSA; REIS; OREY, 2012, p. 160)

Porém, é necessário compreender que a Matemática é uma ciência, que pode ser desenvolvida por diversas técnicas e metodologias (ativas ou não), e, dentre essas metodologias ativas, a Modelagem Matemática permite esse desenvolvimento do conhecimento com base em um problema real que deve ser observado, conjecturado, modelado e, por fim, validado. No entanto, ainda segundo Bassanezi (2002, p. 38), "A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado".

Essa sistematização do conhecimento matemático, por meio da contextualização dos assuntos com o uso da técnica da Modelagem Matemática, é caminho natural, pois, de acordo com Bassanezi (2002, p. 24), "A Modelagem Matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Assim, a aplicação da modelagem no ambiente de ensino-aprendizagem é uma excelente oportunidade de levar o aluno a observar o mundo ao seu redor, de modo que possa despertar um olhar crítico sobre as situações-problema, com base nas análises dos resultados propostos com as atividades de modelagem Matemática. Um letramento matemático de forma não passiva requer uma sensibilização maior de alunos e professor ao olhar a problemática a ser estudada.

> Assim, educar pela Matemática, na perspectiva da Cultura, fazendo uso dos pressupostos da Modelagem como uma concepção de educar matematicamente, requer dos professores e dos estudantes a sensibilidade de perceber o diferente.[...] Nesse sentido, tentar enxergar o "outro" ou o "novo". O etnoconhecimento matemático não deve implicar aceitá-lo passivamente, mas fazer com que tais conhecimentos possam conduzir o estudante a um lugar diferente de onde ele está. (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 93)

Ainda segundo Bassanezi (2002, p. 16), "A Modelagem Matemática pressupõe multidisciplinariedade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências, que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa". Dessa forma, a modelagem permite ao professor romper com o ensino tradicional, dando-lhe a flexibilidade de propor aulas mais dinâmicas e atrativas aos seus alunos, pois é importante, no processo de ensino-aprendizagem, levá-los a conectar os conhecimentos matemáticos aplicados a outras áreas do conhecimento humano. Assim, os discentes compreenderão que a Matemática é uma ferramenta importante no desenvolvimento de outras áreas, gerando, desse modo, um processo de ensino-aprendizagem mais significativo para suas vidas.

Dentro da área das Ciências Exatas, observamos que a modelagem tem sido ferramenta para avanços em áreas tais como Física teórica, Química teórica e Biomatemática, cujos problemas são modelados com base em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) ou Parciais (EDPs). Aqui, podemos citar, por exemplo, a situação da modelagem do crescimento Populacional.

> Problemas dessa natureza modelam situações diversas, como a evolução da população de bactérias numa cultura, ou de certa população humana sujeita a uma epidemia ou governo. Aqui, a hipótese mais frequente é a de que a taxa de variação da população (crescimento ou decrescimento) em certo tempo $t \geqslant 0$ seja proporcional ao número total de indivíduos, ou seja, à população total nesse mesmo instante t. Assim, se $x(t)$ denota a população no instante t, temos que $\frac{dx}{dt} = kx(t)$, em que $k \in \mathbb{R}$ é a constante de proporcionalidade, que se supõe conhecida. (SCARDUA, 2015, p 01)

Aplicando a técnica de separação de variáveis para resolução de EDO de 1ª ordem (*vide* APÊNDICE E), a solução desse problema é a seguinte:

$$x(t_1) = x(0)e^{kt_1}.$$

Porém, essa modelagem não é muito ideal para representar a realidade que envolve o crescimento populacional, pois desconsidera diversas hipóteses que envolvem a dinâmica populacional. Esse modelo é bastante significativo quando o número de indivíduos da população considerada não é excessivamente grande. Isso se explica pelo fato de que, se esse número cresce, é natural esperar que a excessiva competição por alimento gere uma diminuição na taxa de reprodução. Assim, devemos pensar em um fator limitante do número de indivíduos da população. Sendo M a capacidade de saturação (ou capacidade suporte do meio), o modelo para representar esse crescimento populacional é dado por uma EDO, conhecida, segundo Scardua (2015), como equação logística ou curva logística:

$$\frac{dP}{dt} = K \cdot P \left(1 - \frac{P}{M}\right), \tag{1}$$

em que P é a população em um dado instante t, e M é capacidade suporte do meio.

A solução da equação (1) é

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}},$$

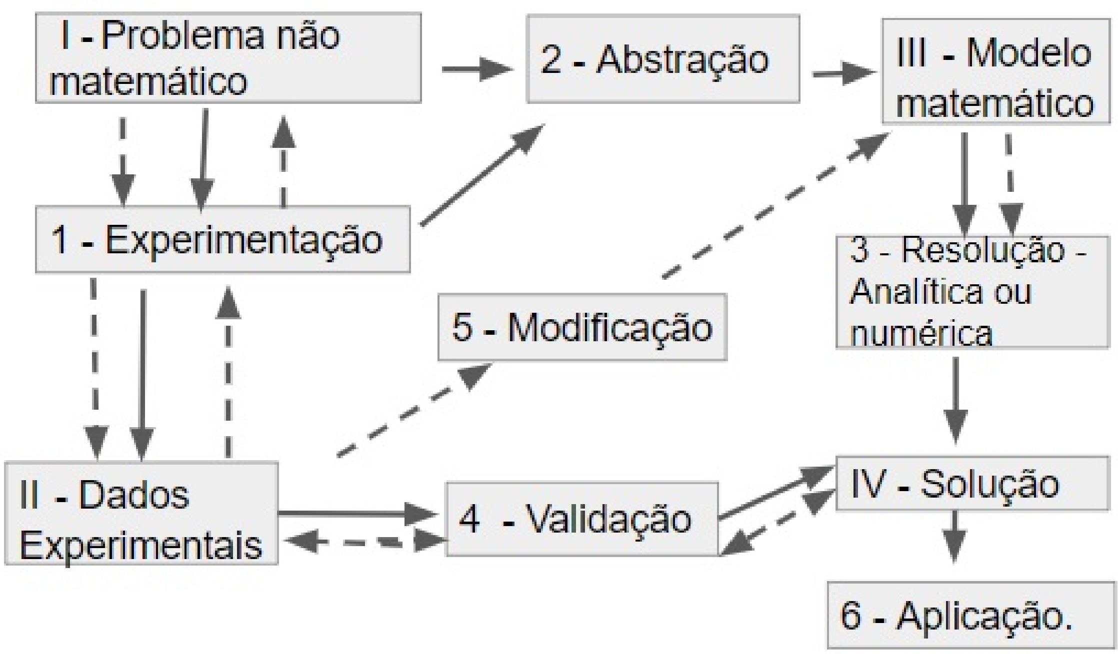
em que $A = \frac{M - P(0)}{P(0)}$.

Observamos que modelar um problema real com todas as suas variáveis é muito complexo, tarefa quase impossível. Dessa forma, devemos simplificá-lo, de modo que possa ser representado como um modelo matemático significativo para representar aquela situação real, pois, ainda de acordo com Bassanezi (2002, p. 12), "O Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de alguma forma, o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade".

Com base, assim, em uma temática a ser estudada em sala de aula, é importante que o aluno, na busca pelo conhecimento matemático, entenda que a Matemática procura modelar (sempre que possível) problemas reais do dia a dia, de forma a gerar uma reflexão sobre situações semelhantes que se encaixem em tal modelagem.

Logo, o importante é que o estudante compreenda que modelar pressupõe analisar, interpretar, conjecturar e representar, de forma apropriada na linguagem matemática, de modo que a Modelagem Matemática é um processo dinâmico, conforme esquema a seguir.

Figura 1 – Esquema da Modelagem Matemática



Fonte: Bassanezi, (2002, p. 27)

Esquema de uma Modelagem Matemática: as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de uma modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.

Sendo um processo dinâmico, segundo Bassanezi (2002), obedece às seguintes etapas:

Experimentação, Abstração, Formulação do modelo, Resolução e Validação do modelo.

1ª etapa - **Experimentação**: uma atividade laboratorial, com a obtenção de dados a respeito do tema estudado, a fim de fundamentar, com parâmetros precisos, o modelo a ser construído.

2ª etapa – **Abstração**: momento de interpretação do problema, com seleção de variáveis responsáveis pela evolução do modelo estudado, formulação das hipóteses e "leis" que deverão ser testadas na validação do modelo.

3ª etapa – **Formulação do modelo**: conjectura-se o modelo usando a linguagem matemática adequada àquele objeto de estudo.

4ª etapa – **Resolução**: essa etapa consiste na própria resolução do modelo conjecturado. Tal resolução pode ser analítica ou numérica, dependendo da natureza do objeto de estudo.

5ª etapa – **Validação do modelo**: nesse momento, realiza-se uma comparação dos resultados obtidos com os dados reais, o que permite analisar se o modelo conjecturado de fato pode representar, por aproximação, tal situação real.

6ª etapa – **Modificação**: caso a validação do modelo construído fracasse, é necessário uma modificação ou um incremento das variáveis selecionadas, ou até mesmo das hipóteses delimitadas para, assim, obter um novo modelo matemático que se aproxime do problema real proposto como objeto de estudo e, desse modo, consiga validar tal modelagem.

2.2 Modelagem Matemática e as Diretrizes da nova BNCC

Historicamente, um Plano Nacional de Educação que pudesse dar a luz à tentativa de uma caminhada alinhada para a educação brasileira, em todo o território nacional, era visto com bons olhos pela maioria dos educadores. Recentemente, em dezembro de 2018, fora aprovada a Base Nacional Comum Curricular, conforme Diário Oficial publicado em 18/12/2018, edição: 242, seção: 1, página 120.

> **RESOLUÇÃO Nº 4, DE 17 DE DEZEMBRO DE 2018**
> Institui a Base Nacional Comum Curricular na Etapa do Ensino Médio (BNCC-EM), como etapa final da Educação Básica, nos termos do artigo 35 da LDB, completando o conjunto constituído pela BNCC da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, com base na Resolução CNE/CP nº 2/2017, fundamentada no Parecer CNE/CP nº 15/2017. (MEC, 2018)

A aprovação desse documento era almejada por muitos profissionais da Educação e, sem dúvida, cumpre proposta já delimitada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação, em seu artigo 26:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (MEC, 2016)

No que diz respeito ao ensino da Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, temos a seguinte diretriz:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva da sua aplicação à realidade. (BNCC, 2018, p. 529)

Analisando atentamente esse fragmento das diretrizes, observamos que a proposta de ensino da Matemática valoriza um ensino contextualizado aos problemas reais do dia a dia de um estudante capaz de desenvolver múltiplas habilidades, tais como investigar, argumentar e validar problemas propostos pelo professor em sala de aula. Dessa forma, o eixo principal da nova BNCC é tornar o aluno protagonista do processo de ensino–aprendizagem, rompendo com a forma tradicional de propor a busca pelo saber matemático.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BNCC, 2018, p. 530)

No entanto, essa proposta é desafiadora para a maioria dos docentes em todo o País, dos diversos níveis educacionais. É preciso romper com a forma tradicional de como o ensino da Matemática é praticado no Brasil pela grande maioria dos docentes. A Matemática não está alheia à realidade. Não é uma ciência morta, cujo processo é apenas levar o aluno a memorizar fórmulas, sem compreender que essas representam modelos, na maioria das vezes, de situações do nosso dia a dia. O saber matemático, em parte, é construído pela observação de fenômenos naturais (ou até mesmo artificiais), dos quais se deseja entender a evolução e o comportamento quantitativo, a fim de compreender os problemas semelhantes que se encaixam em tal modelo. Por um lado, esse dinamismo está presente nas etapas propostas pela Modelagem Matemática e, por outro lado, é notório que essa metodologia ativa seja muito apropriada para atender à principal proposta da nova BNCC — jovens estudantes investigativos, argumentativos e protagonistas do processo de ensino-aprendizagem.

3 MODELOS EXPONENCIAIS

3.1 A Importância dos Modelos Exponenciais no nosso dia a dia

Quando falamos em modelos exponenciais, temos um dos campos da Matemática de maior aplicação. Podemos citar inúmeros problemas que envolvem modelos exponenciais em diversas áreas do conhecimento humano, tais como Biologia — problemas envolvendo crescimento de bactérias; Química — problemas envolvendo a meia-vida de elementos radioativos; e a própria Matemática — Juros Compostos e Progressão Geométrica. Assim, por um conjunto de características peculiares a uma variedade de problemas que aparecem em muitas áreas, é inegável que os modelos exponenciais fazem parte da nossa vida cotidiana. Para um pesquisador na área de Microbiologia, modelar o crescimento de uma cultura de bactérias é parte do seu trabalho. Da mesma forma, para o cidadão, de modo geral, conhecimentos sobre valorização e desvalorização de aplicações ou bens materiais são relevantes para o desenvolvimento do seu senso crítico, no que diz respeito à tomada de decisões no dia a dia, sobre investir, comprar ou vender bens.

Talvez um dos modelos exponenciais mais discutidos nos últimos séculos tenha sido o "famoso" modelo de crescimento populacional, desenvolvido pelo economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), conhecido simplesmente como modelo malthusiano, apresentado em 1798, no artigo "*An Essay on the Principle of Population*", sendo ele considerado um dos precursores da Demografia (ciência que estuda a dinâmica das populações). Em seu modelo, ele afirmava que a população mundial aumentaria de acordo com os termos de uma PG, enquanto a produção de alimentos aumentaria na razão de uma PA.

> Malthus afirma que "a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra de produzir meios para sua subsistência e, a inibição do crescimento populacional é devida à disponibilidade de alimentos. A população quando não obstaculizada (unchecked), aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Assim, o modelo de Malthus propões um crescimento de vida otimizada, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento.(BASSANEZI, 2002, p. 327)

Em seu modelo de crescimento populacional, Malthus considerava as taxas de mortalidade (m) e de natalidade (n) constantes. Logo, $\alpha = n - m$ representa a taxa de crescimento específico da população entre os instantes $t+1$ e t. Assim, Malthus considera que a variação da população era proporcional à própria população no instante t, $t \geq 0$. Isto é:

$$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = \alpha. \tag{2}$$

Logo, o modelo discreto de Malthus é dado pela seguinte lei de recorrência:

$$P_{t+1} = \alpha P_t + P_t = (\alpha + 1)P_t. \tag{3}$$

Se a população inicial P_0 é dada, então a solução da equação (3) pode ser obtida por meio de um processo recursivo, como segue.

$$\begin{aligned}
P_1 &= (\alpha+1)P_0, \\
P_2 &= (\alpha+1)P_1, \\
P_3 &= (\alpha+1)P_2, \\
&\vdots \\
P_{t-1} &= (\alpha+1)P_{t-2} \\
P_t &= (\alpha+1)P_{t-1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando essas equações, membro a membro, obtemos

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_{t-1} \cdot P_t = \underbrace{(\alpha+1) \cdot (\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+1)}_{t} \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_{t-1}. \tag{4}$$

Como $P_1 \cdot \ldots \cdot P_{t-1} \neq 0$, aplicando a lei do cancelamento à equação (4), obtemos

$$P_t = P_0(\alpha+1)^t. \tag{5}$$

Assim, a solução da lei de recorrência de Malthus é uma função, a qual, por ser uma função com a variável independente no expoente, chamá-la-emos de Função Exponencial.

Por outro lado, o modelo contínuo de Malthus, segundo Tavoni (2013), representa uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). De acordo com as ideias de Malthus para o crescimento populacional, temos

$$\frac{dP}{dt}(t) = kP(t), \tag{6}$$

em que $k \in \mathbb{R}$ é a constante de proporcionalidade, que se supõe conhecida.

Para resolver a EDO (6), usaremos o método de variáveis separáveis (*vide* APÊNDICE E).

$$\frac{dP}{P(t)} = kdt. \tag{7}$$

Integrando ambos os membros da equação (7), temos

$$\int \frac{dP}{P(t)} = \int Kdt. \tag{8}$$

Como $\int \frac{1}{P(t)} dP = \ln|P(t)|$, obtemos

$$\ln|P(t)| = kt + c, \;\; c \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Agora, aplicando a exponencial a ambos os membros da equação (9), obtemos

$$e^{\ln|P(t)|} = e^{kt+c}, \tag{10}$$

de modo que

$$|P(t)| = e^{kt} \cdot e^{c}. \tag{11}$$

Como $P(t) > 0$, temos

$$P(t) = e^{kt} \cdot e^{c}. \tag{12}$$

Considerando $t = 0$, temos

$$P(0) = e^{k \cdot 0} \cdot e^{c} = e^{c}. \tag{13}$$

Assim, a população inicial é $P(0) = e^{c}$, a qual, substituindo na equação (12), obtemos

$$P(t) = P(0)e^{kt}. \tag{14}$$

Outro problema bem interessante que mostra a importância dos modelos exponencias refere-se à absorção de drogas pelo organismo de um indivíduo. Esse desafio compete aos profissionais da área de Farmacologia. Segundo Bassanezi (1988), tal problema consiste em analisar como decai a concentração de uma droga no sangue de um paciente, no decorrer do tempo t, após a ingestão, o que permite estabelecer a dosagem a ser ministrada e o intervalo de tempo de cada aplicação.

O modelo matemático mais simples é obtido quando supomos que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração existente na corrente sanguínea em cada instante. Assim, sendo $C(t)$ a concentração da droga no sangue no instante t, e $C(t+1)$ a concentração no instante seguinte, podemos escrever a seguinte EDO:

$$\frac{dC}{dt} = -kC(t). \tag{15}$$

Aplicando o método das variáveis separáveis à equação (15), de modo análogo ao problema anterior, obtemos

$$C(t) = C(0)e^{-kt}. \tag{16}$$

Agora, supondo que, depois de certo tempo T, uma 2ª dose da mesma quantidade $C(0)$ seja aplicada, temos

$$C(t) = C(0)e^{-kt},\ 0 \leq t < T. \tag{17}$$

Agora, suponhamos o seguinte:

• $C(T_-) = C(0)e^{-kT}$ como sendo a quantidade imediatamente antes da 2ª dose;

• $C(T_+) = C(0)e^{-kT} + C(0)$ como sendo a quantidade imediatamente após a 2ª dose.

Assim, $C(T_+)$ passa a ser a concentração (inicial) de droga, que começa a decair após o tempo T. Portanto, para $T \leq t$, temos

$$C(t) = C(T_+)e^{-k(t-T)}.$$

Daí, temos:

$$C(t) = [C(0)e^{-kT} + c(0)]e^{-k(t-T)}. \tag{18}$$

Logo:

$$C(t) = C(0)(1+e^{-kT})e^{-k(t-T)},\ T \leq t < 2T. \tag{19}$$

Continuando o tratamento, administrando outra dose de concentração no instante $t = 2T$, a concentração no sangue será

$$C(2T_-) = C(0)(1+e^{-kT})e^{-k(2T-T)},$$

$$C(2T_+) = C(0)(1+e^{-kT})e^{-kT} + C(0),$$

$$C(2T_+) = C(0)(e^{-kT} + e^{-2kT} + 1).$$

Logo:

$$C(t) = C(0)(e^{-KT} + e^{-2kT} + 1)e^{-k(t-2T)},\ 2T \leq t. \tag{20}$$

Daí, concluímos que

$$C(nT_+) = C(0)(1 + e^{-kT} + e^{-2KT} + \cdots + e^{-nkT}).$$

Assim, após a n-ésima aplicação, podemos calcular a quantidade restante de droga no organismo por meio da seguinte função:

$$C(t) = C(0)(1 + e^{-kT} + e^{-2KT} + \cdots + e^{-nkT})e^{-k(t-nT)},\ nT \leq t. \tag{21}$$

Essas são apenas algumas situações para as quais podemos relatar a importância desse assunto para o nosso dia a dia, sendo inegável a relevância para a vida cotidiana dos alunos. Logo, é necessária uma compreensão de forma clara das características dos problemas que têm as propriedades exponenciais, para que, diante de situações do dia a dia, saibam intervir de forma coerente e obter os resultados esperados. Por outro lado, uma leitura didática da relação entre Função Exponencial, Juros Compostos e Progressão Geométrica demonstra as "facetas" usadas para representar problemas com caraterísticas exponenciais.

3.2 Caracterizando Modelos Exponenciais intuitivamente

Nesta seção, será apresentada uma sequência didática, composta de 3 partes, constituída de situações-problema contextualizadas, para que os alunos entendam, de forma intuitiva, o padrão exponencial.

Na 1ª parte, apresentaremos 6 problemas para que os alunos, com base nas análises e discussões, entre si e com o professor orientador, consigam conjecturar e modelar (em linguagem matemática) a função que representa cada situação-problema. Na 2ª parte, com o auxílio do software matemático Maxima, proporemos aos alunos as construções dos gráficos de duas situações-problema já apresentadas na 1ª parte, para que eles visualizem os comportamentos dos gráficos dos modelos exponenciais e, por fim, na 3ª parte, proporemos aos alunos que construam gráficos de funções em um mesmo plano cartesiano, para compreenderem os deslocamentos ocorridos em função de constantes somadas em uma função exponencial básica.

Para essas situações-problema, a fim de agilizar processos menos significativos nesse momento da atividade e, diante das possibilidades da Modelagem Matemática, podemos usar como ferramentas auxiliares calculadora e um software matemático.

Sequência didática

1ª Parte. A ideia inicial é promover a possibilidade de os alunos analisarem as hipóteses, tentarem construir o modelo correspondente a tais hipóteses e, por fim, verificarem se tal modelo matemático satisfaz as hipóteses iniciais do problema. Nessa fase, o professor deve agir apenas como um orientador ou facilitador do processo, realizando as intervenções necessárias, em momentos oportunos, para os alunos atingirem os objetivos. Assim, a organização da turma de forma adequada facilita essa discussão dos alunos, parte importante do processo da Modelagem Matemática. Logo, para uma efetivação favorável do desenvolvimento dessa proposta didática, é ideal formar grupos de 2 ou 3 alunos. Nas 6 primeiras situações-problema, a sugestão de materiais é: **atividade impressa ou xerox, lápis, caneta e calculadora.**

Proposta Didática

Objetivos: apresentar o conteúdo de forma contextualizada e interdisciplinar, fazendo com que os alunos, ao desenvolverem as atividades na sequência apresentada, consigam conjecturar, modelar e validar a função que corresponda a cada situação apresentada, obtendo um modelo ideal para representar situações semelhantes aos exemplos propostos. Além disso, levá-los a identificar a relação entre Função Exponencial, Juros Compostos e Progressão Geométrica.

Resultado Esperado: nesta primeira seção da Proposta Didática, esperamos que, por meio da análise estratégica dos valores obtidos para preencher cada tabela, sejam identificadas as hipóteses relevantes para a conjectura do modelo matemático adequado para cada situação-problema.

Situação-Problema 1. Covid-19: taxa de contágio no Brasil é de 2,8, a maior entre 48 países.

Diante do assunto mais comentado e discutido em todo o mundo, neste momento, temos uma ótima oportunidade de introduzir o assunto Modelos Exponenciais com base em informações referentes à taxa de contágio da Covid-19. Segundo PEBMED (2020) uma avaliação realizada por pesquisadores do Imperial College, de Londres, mostra que a taxa de contaminação pela

Covid-19 no Brasil, em meados de maio de 2020, é de 2,8 — a maior entre os 48 países analisados, ou seja, cada indivíduo contaminado no país infecta quase mais três.

Com base nessa informação, sobre a taxa de contágio da covid-19, podemos propor aos alunos a situação-problema a seguir.

Vamos considerar que uma pessoa infectada (sintomática ou assintomática) tenha o potencial de infectar apenas outras 3 pessoas, em um período máximo de 24 horas, caso tenha contato com outros indivíduos. Considerando uma única pessoa infectada no dia 15 de julho de 2020 e que essa pessoa teve contato somente com outras 3 pessoas na manhã do dia 16 seguinte, as quais foram por ela contaminadas, e mantendo-se esse ritmo de contaminação, pede-se:

(a) Complete a tabela que relaciona o número de pessoas infectadas (N), a cada novo dia, com o número (t) de dias após 15 de julho, expressando tal número na forma de potência.

Tabela 1 – Relação entre o número de novos infectados, a cada novo dia, e o número de dias, após 15 de julho.

t (dias após 15 de julho)	Número de pessoas infectadas (N), a cada novo dia
0	
1	
2	
3	
4	
$\cdots$	$\cdots$
t	?

Fonte: Elaborada pelo autor

(b) Expresse a função que relaciona o número de novos infectados (N) em função do número de dias transcorridos (t), a partir de 15 de julho.

(c) Usando a função do item anterior, calcule (com o auxílio de uma calculadora) o número de infectados somente no dia 24 de julho de 2020.

(d) Expresse a sequência da quantidade de novos contaminados, de acordo com a tabela anterior.

(e) A sequência do item (d) é uma PA ou uma PG? Explicite a razão de tal sequência.

(f) Considerando a sua resposta ao item anterior, use a fórmula da soma dos n primeiros termos da sequência em questão para determinar o número total de contaminados, considerando as hipóteses do problema.

As soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

(a)

Tabela 2 – Solução do item a) da Situação-problema 1.

t (dias após 15 de julho)	Número de pessoas infectadas (N), a cada novo dia
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
$\cdots$	$\cdots$
t	?

Fonte: Elaborada pelo autor

(b) Como a quantidade de novos contaminados triplica a cada dia, temos $N(t) = 3^t$.

(c) No dia 24, temos $t = 10$. Logo, $N(10) = 3^{10}(= 59049)$.

(d) $(1,3,9,27,81,243,\ldots)$.

(e) Uma PG de razão $q = 3$.

(f) No dia 24 de julho, $t = 10$. Logo, pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{1 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_n = 29524$$

contaminados.

Situação-problema 2 - Divisão Celular

Um dos processos mais importantes para organismos multicelulares e unicelulares é a mitose:

> A mitose é o mecanismo mais comum de reprodução dos organismos unicelulares eucariontes. É também o processo pelo qual os seres pluricelulares são formados, seja a partir de um pedaço do corpo (reprodução assexuada), seja a partir da célula-ovo, ou zigoto (reprodução sexuada). A mitose é essencial para o crescimento, para a renovação das células e para a regeneração de partes do organismo.(LINHARES; GEWANDSZNAJDER; PACCA, 2016a, p. 140)

Para essa situação-problema, o professor deve indagar aos alunos a respeito do processo de divisão celular. Pode iniciar perguntando: quais os processos de divisão celular?; qual a diferença entre esses processos?; é possível representar essas situações por meio de uma função?

Diante das possíveis respostas dos alunos e, com o objetivo de continuar com a introdução do assunto Modelos Exponenciais, o professor pode apresentar-lhes o problema a seguir.

A professora de Biologia do Colégio Santa Cruz, de Araguaína, ao ministrar uma aula sobre divisão celular, processos mitose e meiose, para os alunos, propôs-lhes que preenchessem uma tabela que representasse a quantidade de células após n divisões da mitose e, por fim, que relacionassem a quantidade de células em função do número de divisões ocorridas, considerando, inicialmente, uma única célula.

De acordo com essas informações e seus conhecimentos sobre divisão celular, responda aos itens a seguir.

a) Complete a tabela que relaciona a quantidade de células Q em função do número n de divisões ocorridas no processo da mitose. Expresse o valor que indica a quantidade de células, após cada divisão celular, na forma de potência.

Tabela 3 – Relação entre a quantidade de células e o número de divisões no processo da mitose.

Número de divisões (n)	Quantidade de células (Q)
0	
1	
2	
3	
4	
$\cdots$	$\cdots$
n	?

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Expresse a fórmula da função que relaciona a quantidade de células Q em função do número n de divisões celulares.

c) Usando a função do item anterior, qual o número de células após a 10ª divisão no processo da Mitose?

d) Expresse a sequência dos valores da função. Essa sequência é uma Progressão Aritmética ou Geométrica? Explicite a razão de tal sequência.

As soluções esperadas para essa atividade são as seguintes: a)

Tabela 4 – Solução do item a) da Situação-problema 2.

Número de divisões (n)	Quantidade de células (Q)
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
$\cdots$	$\cdots$
n	2^n

Fonte: Elaborada pelo autor

b) A função é $Q(n) = 2^n$, em que n denota o número de divisões.

c) Sendo $n = 10$, temos $Q(10) = 2^{10}$, ou seja, $Q(10) = 1024$.

d) $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$, que é uma Progressão Geométrica (PG) de razão $q = 2$.

Para as atividades 03 e 04, o professor deve comentar com os alunos sobre termos financeiros presentes no cotidiano da sociedade, tais como valorização, desvalorização ou depreciação de valores e bens. Assim, realizamos uma contextualização da proposta seguinte com capitalização composta, ou seja, uma provocação da relação entre esses termos financeiros e função.

Situação-problema 3 - Aplicação Financeira

Marcos, um cliente do Banco Bradesco, agência de Araguaína, procurou sua gerente para obter informações sobre aplicações financeiras interessantes para que pudesse aplicar o valor de R$ 2.000,00, referentes ao seu décimo terceiro salário. Fora orientado sobre diversas aplicações, vantagens e desvantagens, o que lhe permitiu optar por aplicar na caderneta de poupança, embora com rentabilidade pequena, mas com menor risco. A gerente lhe informou que, em média, a poupança rende 0,5% ao mês.

a) Complete a tabela a seguir, indicando o valor da aplicação após cada período mensal, na foma de potência.

Tabela 5 – Relação entre tempo de aplicação e montante.

Tempo (n) de aplicação (em mês)	Montante (M) da aplicação (em R$)
0	
1	
2	
3	
4	
$\dots$	$\dots$
n	?

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Expresse a fórmula da função que relaciona o valor do montante M em função do tempo n de aplicação.

c) Usando a função do item anterior, qual o montante da aplicação de Marcos após 1 ano de aplicação?

d) Expresse a sequência dos valores do Montante da aplicação de Marcos. Essa sequência é uma Progressão Aritmética ou Geométrica? Explicite a razão de tal sequência.

As soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 6 – Solução do item a) da Situação-problema 3.

Tempo (n) de aplicação (em mês)	Montante (M) da aplicação (em R$)
0	2000
1	$2000 \cdot (1,005) = 2010 = 2000 \cdot (1,005)^1$
2	$2000 \cdot (1,005) \cdot (1,005) = 2020,05 = 2000 \cdot (1,005)^2$
3	$2000 \cdot (1,005)^2 \cdot (1,005) \cong 2030,15 = (1,005)^3$
4	$2000 \cdot (1,005)^3 \cdot (1,005) \cong 2040,30 = (1,005)^4$
$\dots$	$\dots$
n	$2000 \cdot (1,005)^n$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) $M(n) = 2000 \cdot 1,005^n$, em que n denota o tempo de aplicação.

c) Sendo $n = 1$ ano ($= 12$ meses), temos $M(12) = 2000 \cdot (1,005)^{12} \Rightarrow M(12) \cong 2000 \cdot 1,06168 \Rightarrow M(12) \cong 2123,36$.

d) $(2000; 2010; 2020,05; 2030,15; 2040,30; \dots)$, que é uma Progressão Geométrica (PG) de razão $q = 1,005$.

Situação-problema 4: Depreciação do valor de certo objeto

Segundo um consultor de vendas de uma concessionária de veículos, da cidade de Araguaína, a depreciação de um dos modelos de carros, da marca vendida nessa concessionária, é, em média, apenas 8% por ano de uso. Carlos, um cliente dessa loja, adquiriu um carro desse modelo, pagando 40 mil reais.

a) Complete a tabela que relaciona o valor do carro em função do número de anos decorridos após a sua aquisição por um cliente, expressando esse valor na forma de potência.

Tabela 7 – Relação entre o valor V depreciado do carro e o número n de anos decorridos.

Tempo decorrido (n)	Valor do carro após n anos de uso (V)
0	
1	
2	
3	
4	
$\cdots$	$\cdots$
n	?

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Expresse a fórmula da função que relaciona o valor V do carro em função do tempo n de anos decorridos.

c) Usando a função do item anterior, qual o valor do carro daqui a 8 anos?

d) Expresse a sequência dos valores do veículo, de acordo com a tabela.

e) A sequência do item (d) é uma Progressão Aritmética ou Geométrica? Explicite a razão de tal sequência.

As soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 8 – Solução do item a) da Situação-problema 4.

Tempo decorrido (n)	Valor do carro após n anos de uso (V)
0	40000
1	$40000 \cdot (0,92) = 36800,00 = 40000 \cdot (0,92)^1$
2	$40000 \cdot (0,92) \cdot (0,92) = 33856,00 = 40000 \cdot (0,92)^2$
3	$40000 \cdot (0,92)^2 \cdot (0,92) = 31147,52 = 40000 \cdot (0,92)^3$
4	$40000 \cdot (0,92)^3 \cdot (0,92) \cong 28655,72 = 40000 \cdot (0,92)^4$
$\cdots$	$\cdots$
n	$40000 \cdot (0,92)^n$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) $V(n) = 40000 \cdot (0,92)^n$, em que n denota o tempo (em anos) de uso.

c) Sendo $n = 8$ anos, temos $V(8) = 40000 \cdot (0,92)^8 \Rightarrow V(8) \cong 40000 \cdot (0,513219) \Rightarrow V(8) \cong 20528,76$.

d) $(40000; 36800; 33856; 31147,52; 28655,72; ...)$.

e) A sequência é uma Progressão Geométrica (PG) de razão $q = 0,92$.

Pelos objetivos expostos para as Situações-problema 1, 2, 3 e 4, esperamos que os alunos compreendam que tais problemas têm características semelhantes e, assim, seguem o mesmo padrão de conjectura. Logo, esperamos que, em todas as situações citadas, os alunos consigam conjecturar o seguinte modelo matemático:

$$f(x) = ab^x,\ x \geq 0.$$

Nessa fase, é interessante que o professor questione os alunos sobre o significado da constante "a". Esperamos que eles identifiquem que tal constante representa o valor inicial da função, pois:

$$f(0) = ab^0 = a$$

Também é importante que os alunos identifiquem intuitivamente que, para todo $a > 0$,

• se $b > 1$, então f é crescente;

• se $0 < b < 1$, então f é decrescente.

Em um segundo momento da sequência didática, aplicar outras situações-problema para os alunos identificarem a necessidade do acréscimo de outra constante para construir um modelo exponencial satisfatório para representar as hipóteses do problema em questão.

Para introduzir a contextualização e a interdisciplinaridade da situação seguinte, o professor deve comentar sobre a rapidez com que uma cultura de bactérias se reproduz. Dependendo da espécie, em intervalos de tempos iguais, uma cultura duplica, triplica etc., após o início das observações.

Situação-problema 5: Crescimento Populacional de Bactérias

> A principal forma de reprodução das bactérias é a assexuada, por divisão binária ou bipartição: a célula aumenta de tamanho e o DNA se duplica; em seguida, a célula se divide, ficando uma cópia do DNA para cada célula - filha. Esse processo origina uma população de indivíduos geneticamente iguais, chamados clones.(LINHARES; GEWANDSZNAJDER; PACCA, 2016b, p. 29)

De acordo com essas informações sobre a reprodução das bactérias, podemos propor a seguinte situação-problema:

Um pesquisador do Instituto de Doenças Tropicais, de Araguaína, analisa o crescimento de uma amostra que, inicialmente, tem 12 bactérias. Esse pesquisador já observara, em suas análises do primeiro dia do experimento, que, a cada 20 minutos, o número de bactérias duplica. Desejando verificar se tais análises estão corretas, ele pretende modelar esse crescimento por meio de uma função que relacione o número de bactérias após n minutos do início das observações e, assim, verificar o número esperado de bactérias após o 2º dia (24 horas) de observações.

a) Complete a tabela que relaciona o número de bactérias em função do número de horas decorridas após o início das observações, expressando esse número na forma de potência.

Tabela 9 – Relação entre o número de bactérias e o tempo.

Tempo (n)	Quantidade de bactérias (Q)
0	
20	
40	
60	
80	
$\cdots$	$\cdots$
n	?

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Expresse a fórmula da função que relaciona o número de bactérias Q em função de n minutos após o início das observações.

c) Usando a função obtida no item anterior, qual é o número de bactérias esperado no fim do 2º dia?

d) Expresse a sequência da quantidade de bactérias, de acordo com a Tabela 9.

e) A sequência do item (d) é uma Progressão Aritmética ou Geométrica? Explicite a razão de tal sequência.

As soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 10 – Solução do item a) da Situação-problema 5.

Tempo (n)	Quantidade de bactérias (Q)
0	$12 = 12 \cdot 2^0$
20	$12 \cdot 2 = 24 = 12 \cdot 2^1$
40	$24 \cdot 2 = 48 = 12 \cdot 2^2$
60	$48 \cdot 2 = 96 = 12 \cdot 2^3$
80	$96 \cdot 2 = 192 = 12 \cdot 2^4$
$\cdots$	$\cdots$
n	$12 \cdot 2^{\frac{n}{20}}$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) $Q(n) = 12 \cdot 2^{\frac{n}{20}}$, em que n denota o tempo (em minutos) após o início das observações.

c) Sendo $n = 2$ dias ($= 2880$ minutos), temos: $Q(2880) = 12 \cdot 2^{\frac{2880}{20}} \Rightarrow Q(2880) = 12 \cdot 2^{144} \Rightarrow Q(2880) = 3 \cdot 2^{146}$ bactérias.

d) $(12; 24; 48; 96; \ldots)$.

e) É uma Progressão Geométrica (PG) de razão $q = 2$.

A última situação-problema, a seguir, que propomos nessa primeira parte da sequência didática, aborda uma contextualização com a meia-vida do Césio-137, ou seja, um problema interdisciplinar: Matemática e Química.

> Para o estudo matemático dos decaimentos radioativos, devemos inicialmente, entender o parâmetro de meia - vida ou período de semidesintegração, que é o tempo necessário para que o número de núcleos radioativos de um elemento em uma amostra seja reduzido à metade.(FRANCO, 2016, p. 200)

Assim, o professor deve indagar os alunos sobre o significado da meia-vida de um elemento radioativo, no sentido da possibilidade de representar, por meio de uma função, a massa restante de uma amostra em função do tempo. Exposta essa abordagem introdutória, apresentamos o seguinte

Situação-problema 6: Meia-vida de elementos radioativos

Sabe-se que a meia-vida de um elemento radioativo é, por definição, o tempo necessário para que a metade do número de átomos do isótopo radioativo presentes em uma amostra dele desintegre-se.

Se a meia-vida do Césio-137 é de, aproximadamente, 30 anos, considerando uma amostra de 30 gramas, responda aos itens a seguir.

a) Complete a tabela que relaciona a massa M do átomo em função do tempo n transcorrido.

Tabela 11 – Relação entre a massa do Césio-137 e o tempo transcorrido no processo de desintegração.

Tempo transcorrido (n)	Massa do átomo (M)
0	
30	
60	
90	
120	
$\cdots$	$\cdots$
n	?

Fonte: Elaborada pelo Autor

b) Expresse a fórmula da função que relaciona a massa do Césio-137 em função do tempo transcorrido.

c) Usando a função do item anterior, qual a massa do Césio-137 após 300 anos?

d) Expresse a sequência dos valores da massa restante, de acordo com a Tabela 11.

e) A sequência do item (d) é uma Progressão Aritmética ou Geométrica? Explicite a razão de tal sequência.

As soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 12 – Solução do item a) da Situação-problema 6.

Tempo transcorrido (n)	Massa do átomo (M)
0	30
30	$30 \cdot \frac{1}{2} = 15$
60	$30 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = 30 \cdot \frac{1}{4} = 7,5 = 30 \cdot (\frac{1}{2})^2$
90	$30 \cdot (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2}) = 30 \cdot \frac{1}{8} = 3,75 = 30 \cdot (\frac{1}{2})^3$
120	$30 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2}) = 30 \cdot \frac{1}{16} = 1,875 = 30 \cdot (\frac{1}{2})^4$
$\cdots$	$\cdots$
n	$30 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{n}{30}} = 30 \cdot 2^{-\frac{n}{30}}$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) $M(n) = 30 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{n}{30}} \Rightarrow M(n) = 30 \cdot 2^{-\frac{n}{30}}$, em que n denota o tempo (em anos) transcorrido.

c) Sendo $n = 300$ anos, temos $M(300) = 30 \cdot 2^{-\frac{300}{30}} \Rightarrow M(300) = 30 \cdot 2^{-10} \Rightarrow M(300) = 30 \cdot (\frac{1}{1024}) \Rightarrow M(300) = \frac{15}{512} \Rightarrow M(300) = 0,029296875$.

d) $(30; 15; 7,5; 3,75; 1,875; \ldots)$.

e) É uma Progressão Geométrica (PG) de razão $q = \frac{1}{2}$.

Pelos objetivos expostos para as situações-problema 5 e 6, esperamos que os alunos compreendam que tais problemas têm características semelhantes e, assim, seguem o mesmo padrão de conjectura. Logo, esperamos que, as situações citadas, os alunos consigam conjecturar o seguinte modelo matemático:

$$f(x) = ka^{bx}, \quad 0 < a \neq 1 \;, \; x \geq 0 \text{ e } k > 0$$

Assim, essa primeira parte da atividade é fundamental para que os alunos compreendam, de forma construtiva e intuitiva, a estrutura que representa os modelos exponenciais. Sendo assim, esperamos que entendam que Progressão Geométrica e Juros compostos seguem um padrão exponencial.

2ª parte. Toda função f tem um gráfico característico constituído pelos pontos $(x, f(x))$. Assim, é fundamental apresentar aos alunos, com base nos exemplos anteriores, por meio de um software matemático apropriado, o comportamento gráfico do modelo exponencial. O uso de um software matemático se torna bastante interessante nessa parte da sequência didática, sendo útil para o professor economizar tempo. Porém, a análise gráfica deve ser o eixo principal das investigações dos alunos. Devemos, então, propor aos alunos a análise de situações estratégicas por meio do gráfico que os conduzam a compreender o porquê de o gráfico da exponencial apresentar esse comportamento.

Proposta Didática: gráficos

Material: software matemático Maxima e calculadora.

Objetivo: visualização gráfica que representa o crescimento exponencial.

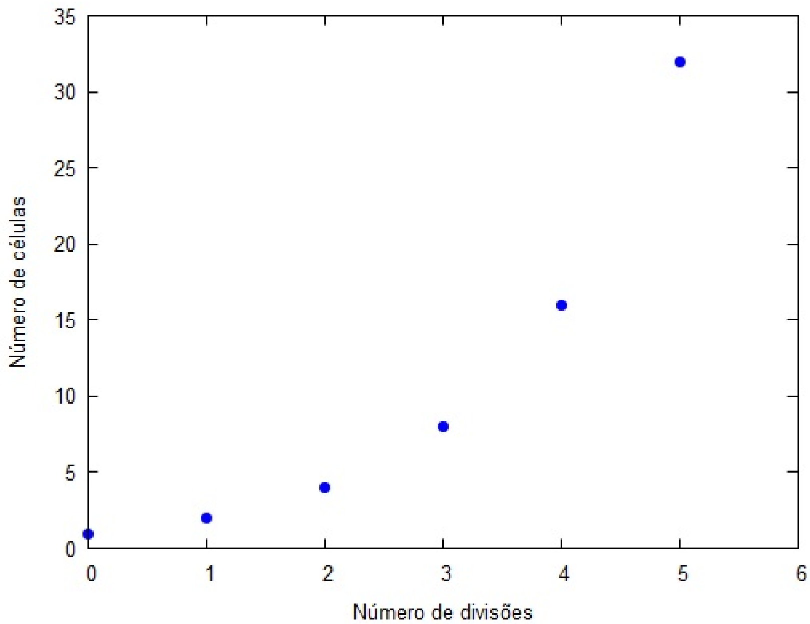
Resultado Esperado: esperamos que os alunos verifiquem que o gráfico é uma curva diferente de, por exemplo, reta e parábola, estudadas anteriormente.

Situação-problema 7 - Divisão Celular

Retomando a situação - problema 2 apresentada na primeira parte desta sequência didática de atividade, cujo modelo exponencial é dado pela função $Q(n) = 2^n, n \geq 0$, que indica a quantidade de bactérias Q(n), em função do número de divisões celulares n, por meio da mitose, propor aos alunos a construção do gráfico que representa esta função.

Com a inserção dos dados no software Maxima, esperamos, como solução,o gráfico a seguir:

Figura 2 – Quantidade de células após *n* divisões da Mitose



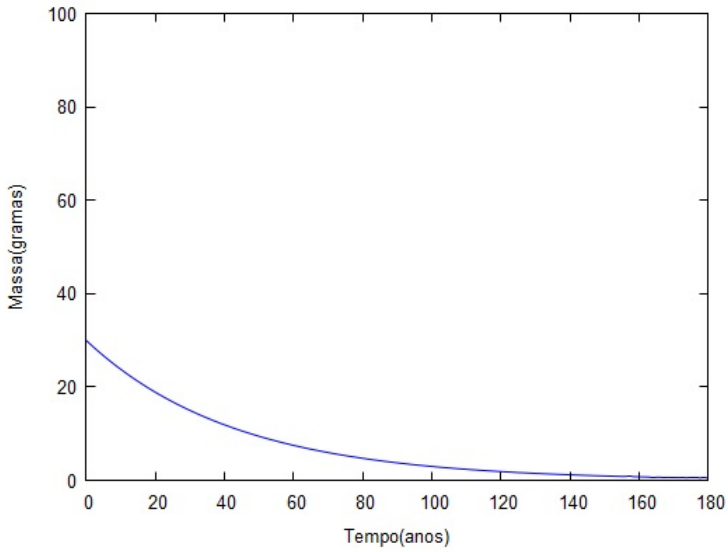
Fonte: Elaborada pelo autor

Situação-problema 8 - Meia-vida do elemento radioativo Césio-137

Retomando a situação - problema 6, apresentada também na primeira parte desta sequência didática, que relaciona a quantidade de massa M restante do átomo de Césio-137, em função do tempo n transcorrido e, cuja situação é modelada pela função $M(n) = 30 \cdot 2^{-\frac{n}{30}}$, propor também aos alunos a construção do gráfico desta função, para que possam comparar com o gráfico anterior e, assim chegarem às conclusões importantes a respeito do gráfico deste tipo de função.

Com a inserção dos dados no software Maxima, esperamos que os alunos obtenham o gráfico a seguir.

Figura 3 – Quantidade de massa atômica em função do tempo transcorrido



Fonte: Elaborada pelo autor

Após a conclusão dessas duas atividades, é importante indagar os alunos a respeito do comportamento gráfico de cada situação-problema. Ao observar as curvas, esperamos que os alunos verifiquem que a função pode ser crescente ou decrescente. Além disso, é importante que identifiquem qual a constante real na estrutura matemática que representa o modelo exponencial, que caracteriza essas duas situações. Também é de fundamental importância que os alunos entendam que não existe uma proporcionalidade na relação da função, pois, caso existisse, teríamos uma função linear, cujo gráfico é uma reta.

Outro aspecto importante que deve ser questionado pelo professor aos alunos é o ponto de partida do gráfico (no eixo vertical) e o fato de o gráfico estar localizado no 1º quadrante. Segue uma pergunta interessante: o gráfico sempre estará contido apenas no 1º quadrante?

3ª Parte. Para uma melhor reflexão dos alunos sobre os possíveis comportamentos gráficos das funções exponenciais, devemos propor-lhes uma atividade com funções exponenciais não básicas.

Proposta Didática - Situação-problema 9

Objetivo: compreensão do deslocamento gráfico vertical na função exponencial com base em uma função básica.

Situação-problema 9: translação gráfica vertical

Um professor propôs aos seus alunos que, com base na função $f(x) = 2^x$, eles somassem uma unidade a $f(x)$, obtendo outra função ($g(x)$), e, em seguida, subtraíssem uma unidade de $f(x)$, obtendo outra função ($h(x)$).

a) Complete as tabelas:

Tabela 13 – Pares ordenados do gráfico da função $f(x) = 2^x$.

x	$f(x) = 2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 14 – Pares ordenados do gráfico da função $g(x) = 2^x + 1$.

x	$g(x) = 2^x + 1$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 15 – Pares ordenados do gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$.

x	$h(x) = 2^x - 1$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Com o auxílio do software Maxima, esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções f, g e h.

c) Analisando os dados das Tabelas 14 e 15, juntamente com os gráficos correspondentes, o que se pode afirmar sobre a constante somada a $f(x)$?

d) Determine o conjunto imagem de cada função dada.

Resultado Esperado: nesse exercício, esperamos que os alunos entendam que, dada uma função $f(x)+k$, temos:

• se $k > 0$, então o gráfico de $f(x)$ desloca-se k unidade para cima;

• se $k < 0$, então o gráfico de $f(x)$ desloca-se k unidade para baixo.

Assim, as soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 16 – Parte da solução do item a) da Situação-problema 9.

x	$f(x) = 2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$f(0) = 2^0 = 1$
1	$f(1) = 2^1 = 2$
2	$f(2) = 2^2 = 4$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 17 – Parte da solução do item a) da Situação-problema 9.

x	$g(x) = 2^x + 1$
...	...
-2	$f(-2) = 2^{-2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$
-1	$f(-1) = 2^{-}1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
0	$f(0) = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$
1	$f(1) = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$
2	$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 18 – Parte da solução do item a) da Situação-problema 9.

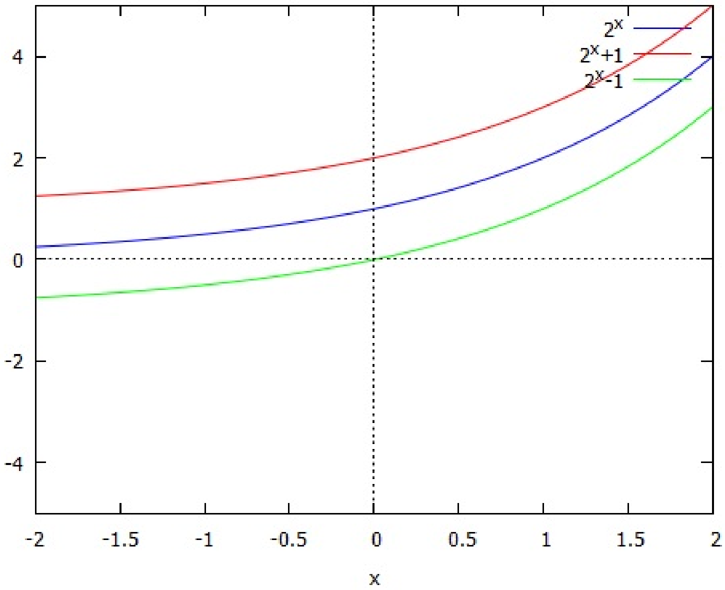
x	$h(x) = 2^x - 1$
$\cdots$	$\cdots$
-2	$f(-2) = 2^{-2} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$
-1	$f(-1) = 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
0	$f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
1	$f(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

É de fundamental importância que o professor discuta com os alunos os resultados obtidos para cada função, e qual a importância do valor 1 somado a/subtraído de $f(x)$.

b) Com a inserção dos dados no software Maxima, esperamos o seguinte gráfico como solução:

Figura 4 – Translações gráficas 01



Fonte: Elaborada pelo Autor

c) Com as análises dos dados das Tabelas 16, 17 e 18, e as construções gráficas (Figura 4), os alunos devem compreender, de forma intuitiva, que, na função $2^x + 1$, todas as imagens da função básica $f(x) = 2^x$ aumentaram de uma unidade e, por outro lado, na função $f(x) = 2^x - 1$, todas as imagens de $f(x) = 2^x$ diminuíram de uma unidade. Assim, $g(x) = f(x) + 1$ é dada pelo gráfico de $f(x)$ transladado de uma unidade para cima, e $h(x) = f(x) - 1$ é dada pelo gráfico de $f(x)$ transladado de uma unidade para baixo.

d) Intuitivamente, os alunos devem notar que o conjunto imagem da função básica $f(x) = 2^x$ é $\mathbb{R}_+^*$. Assim, o gráfico de $f(x) = 2^x$ jamais intersecta o eixo das abscissas. Logo, $(x,0)$ não pertence ao gráfico de $f(x) = 2^x$. Uma vez que o gráfico da função $g(x) = f(x) + 1$ tem como pontos $(x, 2^x + 1)$, então $(x, 1)$ não pertence ao gráfico de $g(x)$, pois $2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 1 > 1$. Assim, a reta horizontal $y = 1$ jamais é intersectada pelo gráfico da função $g(x)$. Isto é, o conjunto imagem de $g(x) = 2^x + 1$ é $\{y \in \mathbb{R} : y > 1\}$. Por outro lado, a função $h(x) = 2^x - 1$ tem como conjunto imagem $\{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$, pois todos os pontos do gráfico de $f(x) = 2^x$ desceram uma unidade. Como $(x,0)$ não pertence ao gráfico de $f(x)$, e $2^x > 0$, temos $2^x - 1 > -1$. Logo, a reta $y = -1$ jamais é intersectada pelo gráfico da função $h(x)$.

Proposta didática: Situação-problema 10

Objetivo: Compreensão do deslocamento horizontal na função exponencial com base em uma função básica.

Situação-problema 10: translação gráfica horizontal

Propor aos alunos que, com o auxílio de uma tabela e do software Maxima, esbocem, no mesmo plano, os gráfico das funções $f(x) = 2^x$, $g(x) = f(x+2) = 2^{x+2}$ e $h(x) = f(x-2) = 2^{x-2}$.

a) Complete as tabelas a seguir.

Tabela 19 – Pares ordenados do gráfico da função $g(x) = 2^{x+2}$.

x	$f(x+2) = 2^{x+2}$
$\cdots$	$\cdots$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 20 – Pares ordenados do gráfico da função $h(x) = 2^{x-2}$.

x	$f(x-2) = 2^{x-2}$
$\cdots$	$\cdots$
0	
1	
2	
3	
4	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Esboçar, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas.

c) Analisar os comportamentos dos gráficos de $g(x) = f(x+2)$ e $h(x) = f(x-2)$ em relação ao gráfico de $f(x)$.

d) Analisar os conjuntos imagens das funções $g(x) = f(x+2)$ e $h(x) = f(x-2)$.

Resultado Esperado: esperamos que os alunos entendam que, dada uma função $g(x) = f(x+k)$, temos

• se $k > 0$, então o gráfico de $f(x)$ desloca-se k unidades para a esquerda;

• se $k < 0$, então o gráfico de $f(x)$ desloca-se k unidades para a direita.

Assim, as soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 21 – Parte da solução do item a) da Situação-problema 10.

x	$g(x) = f(x+2) = 2^{x+2}$
$\cdots$	$\cdots$
-4	$f(-4+2) = 2^{-4+2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
-3	$f(-3+2) = 2^{-3+2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
-2	$f(-2+2) = 2^{-2+2} = 2^{0} = 1$
-1	$f(-1+2) = 2^{-1+2} = 2^{1} = 2$
0	$f(0+2) = 2^{0+2} = 2^{2} = 4$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

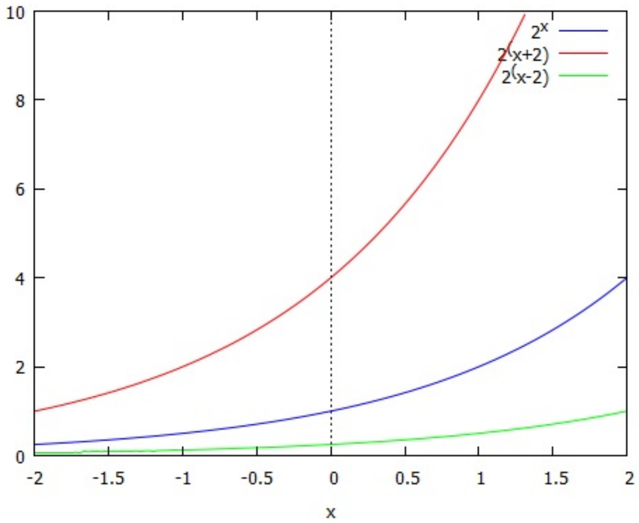
Tabela 22 – Parte da solução do item a) da Situação-problema 10.

x	$h(x) = f(x-2) = 2^{x-2}$
$\cdots$	$\cdots$
0	$f(0-2) = 2^{0-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
1	$f(1-2) = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
2	$f(2-2) = 2^{2-2} = 2^{0} = 1$
3	$f(3-2) = 2^{3-2} = 2^{1} = 2$
4	$f(4-2) = 2^{4-2} = 2^{2} = 4$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b)

Figura 5 – Translações gráficas 02



Fonte: Elaborada pelo autor

c) Analisando o gráfico da função $g(x) = f(x+2)$, observamos que ocorre apenas um deslocamento horizontal para a esquerda de duas unidades em todos os pontos de $f(x)$, pois, se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então $(x-2,y)$ pertence ao gráfico de $g(x) = f(x+2)$. De modo análogo, se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então $(x+2,y)$ pertence ao gráfico de $h(x) = f(x-2)$. Logo, o gráfico de $h(x) = f(x-2)$ é apenas o gráfico de $f(x)$ deslocado horizontalmente duas unidades para a direita.

d) Como $2^{x+2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o conjunto imagem de $g(x) = f(x+2)$ é $\mathbb{R}_+^*$, e, de modo análogo, como $2^{x-2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o conjunto imagem de $h(x) = f(x-2)$ é também $\mathbb{R}_+^*$.

Proposta Didática: Situação-problema 11

Objetivo: entender a relação entre os gráficos de $f(x)$ e $-f(x)$.

Situação-problema 11: Reflexão do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo das abscissas

Por fim, propor aos alunos que, com o auxílio de uma tabela e do software Maxima, esbocem, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = -2^x$.

a) Complete a tabela a seguir.

Tabela 23 – Pares ordenados do gráfico da função $g(x) = -2^x$.

x	$g(x) = -2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Esboçar os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo plano cartesiano.

c) Os gráficos são simétricos em relação a qual dos eixos cartesianos? Justifique sua resposta.

d) Expressar o conjunto imagem da função $g(x)$.

Resultado Esperado: esperamos que os alunos entendam que os gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas, pois $g(x) = -f(x)$, e, por esse motivo, os conjuntos imagens são simétricos. Isto é: ocorre uma reflexão do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo das abscissas.

Assim, as soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

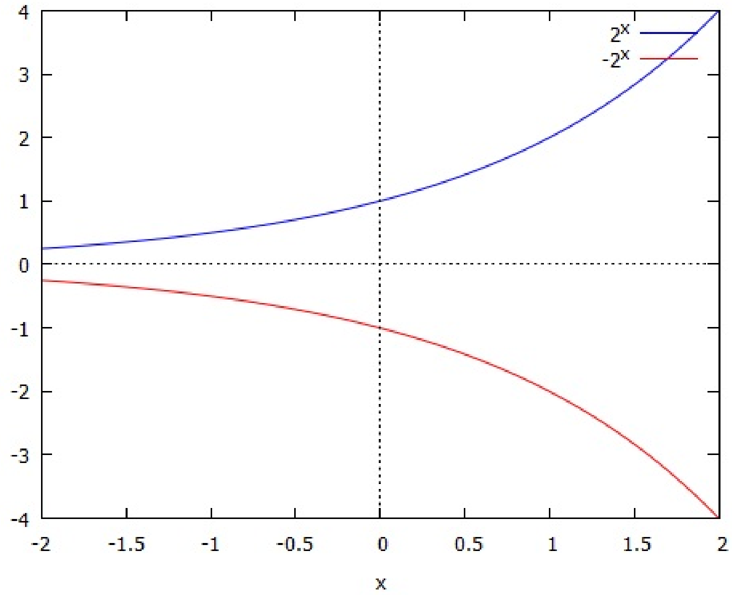
Tabela 24 – Solução do item a) da Situação-problema 11.

x	$g(x) = -2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	$g(x) = -2^{-2} = -\frac{1}{4}$
-1	$g(x) = -2^{-1} = -\frac{1}{2}$
0	$g(x) = -2^0 = -1$
1	$g(x) = -2^1 = -2$
2	$g(x) = -2^2 = -4$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b)

Figura 6 – Simetrias gráficas 01



Fonte: Elaborado pelo autor

c) São simétricos em relação ao eixo x, pois, se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então, pelos dados da tabela, concluímos que $(x,-y)$ pertence ao gráfico de $-f(x)$.

d) O conjunto imagem é $\mathbb{R}^*_-$.

Proposta Didática: Situação-problema 12

Objetivo: entender a simetria existente entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x) = f(-x)$.

Situação-problema 12: Reflexão do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo das ordenadas

Propor aos alunos que, com o auxílio de uma tabela e do software Maxima, esbocem, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{-x}$.

a) Complete a tabela a seguir.

Tabela 25 – Pares ordenados do gráfico da função $g(x) = 2^{-x}$.

x	$g(x) = 2^{-x}$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Esboçar os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo plano cartesiano.

c) Esses gráficos são simétricos em relação a qual dos eixos cartesianos? Justifique sua resposta.

d) Expressar o conjunto imagem da função $g(x)$.

Resultado Esperado: esperamos que os alunos entendam que os gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas, pois $g(x) = f(-x)$, e, por esse motivo, valores de x simétricos têm a mesma imagem. Isto é: ocorre uma reflexão do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo das ordenadas.

Assim, as soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

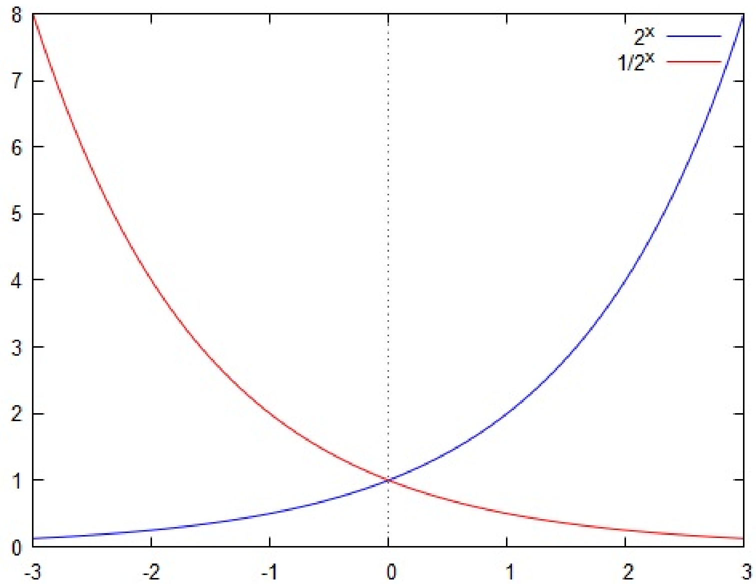
Tabela 26 – Solução do item a) da Situação-problema 12.

x	$g(x) = 2^{-x}$
$\cdots$	$\cdots$
-2	$g(x) = 2^{-(-2)} = 4$
-1	$g(x) = 2^{-(-1)} = 2$
0	$g(x) = 2^0 = 1$
1	$g(x) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
2	$g(x) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b)

Figura 7 – Simetrias gráficas 02



Fonte: Elaborado pelo autor

c) São simétricos em relação ao eixo y, pois, se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então, pelos dados da Tabela 26, concluímos que $(-x,y)$ pertence ao gráfico de $f(-x)$.

d) O comjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

Proposta Didática: Situação-problema 13

Objetivo: entender a alteração vertical do gráfico de $f(x)$ gerando, assim, o gráfico da função $g(x) = kf(x)$, $k \neq 0$.

Situação-problema 13: Dilatação vertical do gráfico de $f(x)$

Propor aos alunos que, com o auxílio de uma tabela e do software Maxima, esbocem, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3 \cdot 2^x$ e $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 2^x$

a) Complete as tabelas a seguir.

Tabela 27 – Pares ordenados do gráfico da função $g(x) = 3 \cdot 2^x$.

x	$g(x) = 3 \cdot 2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 28 – Pares ordenados do gráfico da função $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 2^x$.

x	$h(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	
-1	
0	
1	
2	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Esboçar os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo plano cartesiano.

c) Explique a relação entre os pares ordenados dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, bem como as consequências gráficas.

d) Expressar os conjuntos imagens das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

Resultado Esperado: esperamos que os alunos entendam que o gráfico de $g(x)$ é obtido por meio da alteração vertical do gráfico de $f(x)$:

• se $k > 1$, ocorre uma dilatação vertical do gráfico de $f(x)$;

• se $0 < k < 1$, ocorre uma compressão vertical do gráfico de $f(x)$.

Assim, as soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 29 – Solução de parte do item a) da Situação-problema 13.

x	$g(x) = 3 \cdot 2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	$g(x) = 3 \cdot 2^{-2} = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
-1	$g(x) = 3 \cdot 2^{-1} = 3 \cdot (\frac{1}{2})^1 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
0	$g(x) = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3$
1	$g(x) = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$
2	$g(x) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

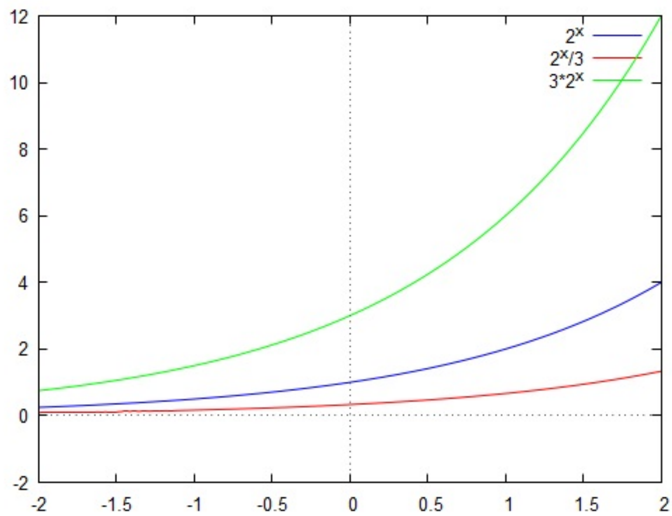
Tabela 30 – Solução de parte do item a) da Situação-problema 13.

x	$h(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$
$\cdots$	$\cdots$
-2	$h(x) = (\frac{1}{3}) \cdot 2^{-2} = (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$
-1	$h(x) = (\frac{1}{3}) \cdot 2^{-1} = (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^1 = (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$
0	$h(x) = (\frac{1}{3}) \cdot 2^0 = (\frac{1}{3}) \cdot 1 = \frac{1}{3}$
1	$h(x) = (\frac{1}{3}) \cdot 2^1 = (\frac{1}{3}) \cdot 2 = \frac{2}{3}$
2	$h(x) = (\frac{1}{3}) \cdot 2^2 = (\frac{1}{3}) \cdot 4 = \frac{4}{3}$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b)

Figura 8 – Dilatação gráfica vertical



Fonte: Elaborado pelo Autor

c) Se o par (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então o par $(x,3y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$. Isto é: a imagem de x por g é o triplo da imagem de x, por $f(x)$. Assim, ocorre uma dilatação vertical do gráfico de $f(x)$. Por outro lado, em $h(x)$, a imagem de cada $x \in f(x)$ é $\left(\frac{1}{3}\right)y$, isto é, ocorre uma compressão vertical do gráfico de $f(x)$.

d) A imagem de $g(x) = h(x) = f(x)$ = $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

Proposta Didática: Situação-problema 14

Objetivo: entender o processo de dilatação horizontal do gráfico de $f(x)$, gerando, assim, o gráfico de uma função $g(x) = f(kx)$, $k \neq 0$.

Situação-problema 14: Dilatação horizontal do gráfico de $f(x)$.

Por fim, propor aos alunos que, com o auxílio de uma tabela e do software Maxima, esbocem, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{3x}$ e $h(x) = 2^{\left(\frac{1}{3}\right)x}$.

a) Complete as tabelas a seguir.

Tabela 31 – Pares ordenados do gráfico da função $g(x) = 2^{3x}$.

x	$g(x) = 2^{3x}$
$\cdots$	$\cdots$
$-\frac{2}{3}$	
$-\frac{1}{3}$	
0	
$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{3}$	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 32 – Pares ordenados do gráfico da função $h(x) = 2^{\left(\frac{1}{3}\right)x}$.

x	$h(x) = 2^{\left(\frac{1}{3}\right)x}$
$\cdots$	$\cdots$
-6	
-3	
0	
3	
6	
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b) Esboçar os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo plano cartesiano.

c) Explique a relação entre os pares de ordenados dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, bem como as consequências gráficas.

d) Expressar os conjuntos imagens das funções $g(x)$ e $h(x)$.

Resultado Esperado: esperamos que os alunos entendam que

• se $k > 1$, o gráfico de $f(x)$ é "comprimido" na horizontal;

• se $0 < k < 1$,o gráfico de $f(x)$ é "esticado" na horizontal.

Assim, as soluções esperadas para essa atividade são as seguintes:

a)

Tabela 33 – Solução de parte do item a) da Situação-problema 14.

x	$g(x) = 2^{3 \cdot x}$
$\cdots$	$\cdots$
$-\frac{2}{3}$	$f(x) = 2^{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{3}$	$f(x) = 2^{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$f(x) = 2^{3 \cdot 0} = 2^{0} = 1$
$\frac{1}{3}$	$f(x) = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^{1} = 2$
$\frac{2}{3}$	$f(x) = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^{2} = 4$
$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

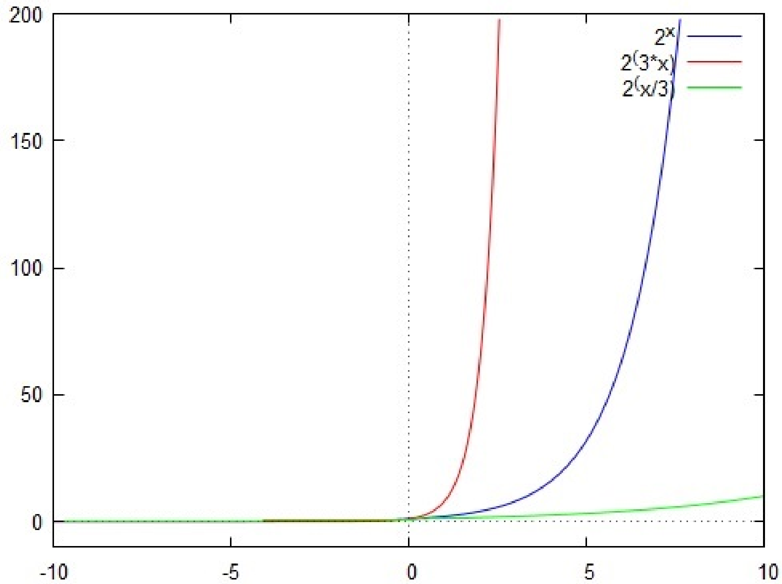
Tabela 34 – Solução de parte do item a) da Situação-problema 14.

x	$h(x) = 2^{\frac{x}{3}}$
$\dots$	$\dots$
-6	$f(x) = 2^{\frac{-6}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
-3	$f(x) = 2^{(\frac{-3}{3})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$f(x) = 2^{\frac{0}{3}} = 2^{0} = 1$
3	$f(x) = 2^{\frac{3}{3}} = 2^{1} = 2$
6	$f(x) = 2^{\frac{6}{3}} = 2^{2} = 4$
$\dots$	$\dots$

Fonte: Elaborada pelo autor

b)

Figura 9 – Dilatação gráfica horizontal



Fonte: Elaborado pelo autor

c) Se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, observamos que $(\frac{x}{3},y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$. Logo, o gráfico de $f(x)$ é comprimido horizontalmente, pois, para o mesmo valor de y, temos a terça parte do valor de x. Por outro lado, em $h(x)$, se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então $(3x,y)$ pertence ao gráfico de $h(x)$, ou seja, para o mesmo valor de y, devemos ter o triplo do valor x. Logo, ocorre um "esticamento" horizontal do gráfico de $f(x)$.

d) O conjunto imagem de $g(x)$ e de $h(x)$ é $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

Com base nesses comportamentos gráficos apresentados, podemos concluir que, no modelo $g(x) = k_0 a^{bx+c} + d$, em que $k_0, b, c, d \neq 1$, temos:

- o valor k_0 causa uma dilatação vertical do gráfico de $f(x) = a^x$;
- o valor "b" causa uma dilatação horizontal do gráfico de $f(x) = a^x$;
- o valor "c" causa uma translação horizontal do gráfico de $f(x) = a^x$;
- o valor "d" causa uma translação vertical no gráfico de $f(x) = a^x$.

3.3 O papel da Modelagem Matemática na sequência didática das atividades

De acordo com a nova BNCC, o aluno deve assumir um protagonismo no processo de ensino-aprendizagem. Tal protagonismo deve ser alcançado por uma ruptura na forma tradicional de apresentar os assuntos aos alunos. Nesse sentido:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar o seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BNCC, 2018, p. 530)

Essa proposição da BNCC torna-se evidente nas competências específicas 3 e 5, a seguir descritas.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BNCC, 2018, p. 538)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, 2018, p. 540)

Assim, nesse primeiro momento da sequência didática, o objetivo foi propor para os alunos, por meio da Modelagem Matemática, essa possibilidade de analisar, construir e modelar os problemas, usando a linguagem matemática coerente a cada hipótese e, por fim, validar esse modelo como sendo ideal para representar situações-problema com características semelhantes.

Essa fase da apresentação do conteúdo é importante, pois gera descobertas interessantes para um aprendizado significativo.

Segundo Bassanezi (2015, p. 24), a Modelagem Matemática:

> é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Por sua vez, entende-se por modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de alguma forma, o objeto estudado.

Assim, uma sequência didática dinâmica com base em problemas contextualizados e interdisciplinares ajuda os alunos no processo de descoberta das características de problemas que apresentam as propriedades dos modelos exponenciais. Em cada atividade, a proposta de preencher a tabela corresponde à fase de **Experimentação** no processo da Modelagem Matemática. Os valores escolhidos em cada tabela têm por objetivo direcionar, intuitivamente, os alunos para a etapa seguinte — **Abstração**. Esse segundo momento do processo de Modelagem Matemática conduz os alunos a discutirem a respeito das hipóteses e seleção das variáveis relevantes de cada problema para a obtenção do modelo exponencial adequado para cada situação. Assim, temos a resolução do problema algebricamente. Na etapa seguinte, temos a tentativa de **Validação** intuitivamente do modelo exponencial para um dado arbitrário inerente a cada situação-problema. Caso o modelo exponencial seja validado, não há necessidade de uma **Modificação**. E, assim, os problemas com características semelhantes tendem a seguir esse modelo matemático. Todas essas etapas são fundamentais no processo de ensino-aprendizagem, pois, segundo Bassanezi (2015, p. 12):

> o uso da modelagem no processo de ensino-aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade, não somente em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas, principalmente, na formulação de problemas originais, uma etapa tão estimulante quanto à da resolução.

Na parte referente ao esboço de cada gráfico, visualizamos etapas da Modelagem Matemática, pois o fato de preencher a tabela com os valores sugeridos tem por objetivo fazer o aluno **experimentar** a relação entre o valor de x e o valor $f(x)$. O uso do software Maxima para gerar os gráficos representa a presença do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) no processo de Modelagem Matemática como uma ferramenta de **Abstração** e **Validação**, para obter a característica da curva que representa os modelos exponenciais.

Outro fator importante de todo esse processo com as possibilidades da Modelagem Matemática é conduzir os alunos a compreenderem que a Matemática tem, em parte, o objetivo de tentar modelar problemas relacionados a diversas áreas do conhecimento humano, usando uma linguagem própria, coerente com as situações propostas.

3.4 Caracterização dos Modelos Exponenciais

No primeiro momento, apresentamos, por meio de algumas situações-problema contextualizadas, os problemas que representam modelos exponenciais, para que, de forma intuitiva, com o auxílio de técnicas de Modelagem Matemática, os alunos identificassem quais delas apresentam características semelhantes, e, por esse motivo, são modelados por meio do mesmo tipo de função: a Função Exponencial. Agora, de modo formal, apresentamos, com o rigor matemático necessário, a definição e as características da Função Exponencial. Esse rigor na escrita é parte da construção do conhecimento matemático, pois:

> Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las, e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser realizada apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo as demonstrações de algumas proposições. (BNCC, 2018, p. 540)

A caracterização da Função Exponencial é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.4.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x)f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Demonstraremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

1ª Parte: $(1) \Rightarrow (2)$.

Inicialmente, a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z})$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $f(rx) = f(x)^r$.

De fato, como $nr = m$, podemos escrever:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

Logo, $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Agora, considerando $f(1) = a$, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Resta, agora, demonstrar essa afirmação para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x)$ seja crescente. Considerando $r = 0$, temos $f(0) = a^0 = 1$ $(< f(1) = a)$. Vamos supor, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$, por exemplo, $f(x) < a^x$. Então, como $f(x)$ é crescente, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja,

$f(x) < f(r) < a^x$. Assim, $f(x) < f(r)$, de modo que $x < r$. Por outro lado, $f(r) < a^x$. Então $a^r < a^x$. Logo, $r < x$, uma contradição.

Portanto, $(1) \Rightarrow (2)$.

2ª Parte: $(2) \Rightarrow (3)$.

Considerando a hipótese (2), temos: $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Assim, $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$.

Portanto, $(2) \Rightarrow (3)$.

3ª Parte: $(3) \Rightarrow (1)$.

Considerando a hipótese (3), temos

$$f(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n}) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)}_{n}.$$

de modo que $f(nx) = f(x)^n$.

Portanto, $(3) \Rightarrow (1)$.

Essa caracterização nos permite entender as características que uma modelagem deve apresentar para representar uma Função Exponencial.

3.4.1 Função Exponencial Básica

Desse modo, podemos definir uma Função Exponencial básica da seguinte forma:

Definição 3.4.1.1: Seja a um número real positivo (que suporemos sempre diferente de 1). A Função Exponencial de base "a", $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, denotada por $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^1 = a$;

(3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, quando $a > 1$, e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$;

Pela propriedade (1), a função exponencial é definida de tal forma que transforma soma em produto, como segue.

Consideremos $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$. Assim, $f(x+y) = a^{x+y}$. Logo, $f(x+y) = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$.

Além disso, é importante observar que, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1), então $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Assim, $f(x)$ não pode assumir o valor 0, a menos que seja a função identicamente nula.

De fato, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então, para todo $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0.$$

Logo, $f(x)$ será identicamente nula.

Por outro lado, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 (> 0).$$

Assim, pelas propriedades (1) e (2), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ quanto $\mathbb{R}_+^*$. A vantagem em considerar $\mathbb{R}_+^*$ como contradomínio de f é que, nesse caso, f é sobrejetiva, como veremos a seguir.

De fato, se $f(x)$ tem as propriedades (1) e (2), então, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}) = \underbrace{f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdots f(1)}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n} = a^n.$$

Considerando o número racional $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Logo, $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(r + s) = f(r) \cdot f(s)$, para todos $r, s \in \mathbb{Q}$, e $f(1) = a$.

Resta verificar tal afirmação para os números irracionais. A propriedade (3) diz que f é crescente para $a > 1$, e decrescente para $0 < a < 1$. Assim, se x é irracional, resta demonstrar que $f(x) = a^x$. Vamos considerar o caso $a > 1$ (o caso $0 < a < 1$ é análogo).

Consideremos $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < x < s$. Então $a^r < a^x < a^s$. Se $a^x = A$, então $a^x \neq B$, a menos que $A = B$. Caso contrário, se $A < B$, teríamos $r < x < s \Rightarrow a^r < A < B < a^s$. Logo, no intervalo $[A, B]$, não teríamos potência alguma de "a", um absurdo, pois, segundo o LEMA 8.2 (LIMA, 2017, p. 153) (*vide* APÊNDICE C), fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+^*$ existe alguma potência a^r, em que $r \in \mathbb{Q}$. Assim, quando x é um número irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências de a^r, se $r < x$. Por outro lado, a^x é o único número real cujas aproximações por excesso são as potências de a^s, se $s > x$. Com base nesses fatos, se x é irracional, então $f(x) = \lim f(r_n)$, em que r_n é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais tais que $\lim r_n = x$.

(4) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente;

De fato:

i) se $a > 1$, então a^x cresce sem limite, quando $x > 0$ é muito grande.

Isto é: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \infty$.

ii) se $0 < a < 1$, então a^x também cresce sem limite, quando $x < 0$ é muito grande (em valor absoluto).

Isto é: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$.

(5) A Função Exponencial é contínua;

Demonstração:

Devemos demonstrar que

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},$$

isto é:

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a_0^x|$ tão pequena quanto desejarmos, desde que x consideremos suficientemente próximo de x_0.

Devemos demonstrar, inicialmente, que é possível tornar a^h tão próximo de 1 quanto desejarmos, desde que escolhamos $|h|$ suficientemente pequeno. Para isso, vamos supor $a > 1$ e $h > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, queremos demonstrar que, considerando h bem pequeno, teremos $a^h < 1 + \varepsilon$. Pela desigualdade de Bernoulli (*vide* Anexo D), temos

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon \Leftrightarrow 1 + n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n. \quad (I)$$

Portanto, se considerarmos $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, teremos

$$n\varepsilon > a - 1 \Rightarrow n\varepsilon + 1 > a \Leftrightarrow a < n\varepsilon + 1. \quad (II)$$

Assim, de (I) e de (II), temos

$$a < 1 + n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n.$$

Pela propriedade transitiva, temos

$$a < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, tal que $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Mais precisamente, $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Agora, considerando h bem pequeno, de modo que $0 < h < \frac{1}{n}$, temos, pela monotonicidade da função exponencial, que $a^0 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$. Desse modo, podemos ter a^h tão próximo de 1 quanto desejarmos, ou seja,

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1.$$

Agora, fixando $x_0 \in \mathbb{R}$, de modo que $h = x - x_0$, temos

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}\cdot a^h - a^{x_0} = a^{x_0}\cdot(a^h - 1).$$

Como $h = x - x_0$, se x tende a x_0, então h tende a zero, e, assim, a^h tende a 1. Logo, $a(a^h-1)$ tende a zero. Por fim, como a^{x_0} é fixo, então a^{x_0} é constante (ou seja, não depende de h). Logo,

$$\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = a^{x_0}\cdot(a^h-1) = 0.$$

Aplicando a propriedade da subtração de limites, obtemos

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}.$$

Como a^{x_0} é uma constante, temos

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} = a^{x_0}.$$

(6) A Função Exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$ $(a \neq 1)$, é sobrejetiva.

Demonstração:

Devemos demonstrar que, para todo número real $b > 0$, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Pelo LEMA 8.2 (*vide* APÊNDICE C), para cada $n \in \mathbb{N}$, temos uma potência a^{r_n}, em que $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo aberto $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$. Assim, pela definição de limite, temos $\lim\limits_{x\to x_0} a^{r_n} = b$. Considerando o caso $a > 1$ e escolhendo as potências de a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b,$$

certamente podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$.

Pela monotonicidade da função exponencial, temos

$$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots < s.$$

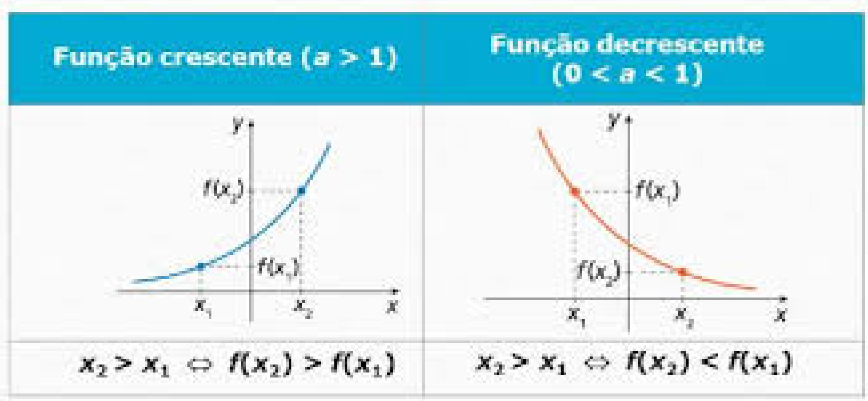
Dessa forma, (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente (por s). Por fim, a completeza dos números reais garante que os r_n são valores aproximados, por falta, de um número real x, ou seja, $\lim\limits_{x\to x_0} r_n = x$. Finalmente, pela continuidade da função exponencial, temos

$$a^x = \lim_{x\to x_0} a^{r_n} = b.$$

3.4.2 Gráfico da Função Exponencial Básica

Há duas situações que caracterizam o gráfico da Função Exponencial Básica.

Figura 10 – Classificação quanto à monotonicidade



https://geniodamatematica.com.br/como-construir-um-grafico-da-funcao-exponencial-video/

É importante observar que, pela monotonicidade da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, temos

• $x > y \Rightarrow a^x > a^y$, quando $a > 1$;

• $x > y \Rightarrow a^x < a^y$, quando $0 < a < 1$.

Logo, $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, ou $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.

Portanto, a função exponencial é injetiva.

3.4.3 Caracterização das Funções tipo Exponenciais

Existem aquelas que são Funções tipo Exponenciais. Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando $g(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, então $g(x)$ é crescente, e se $0 < a < 1$, então $g(x)$ é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h.$$

De fato,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h} - b \cdot a^x}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x \cdot a^h - b \cdot a^x}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x(a^h - 1)}{b \cdot a^x} = a^h - 1.$$

De modo análogo, temos

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h}}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x \cdot a^h}{b \cdot a^h} = a^h.$$

O teorema a seguir nos fornece uma das caracterizações das Funções tipo Exponenciais.

Teorema 3.4.3.1 (Primeira caracterização das Funções tipo Exponenciais).

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, temos $g(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

A hipótese equivale a dizer que existe uma função $\phi(h)$ tal que $\phi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Considerando uma função $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, temos $f(x+h) = \frac{g(x+h)}{b}$. Substituindo a hipótese $g(x+h) = \phi(h) \cdot g(x)$ na equação anterior, obtemos $f(x+h) = \frac{\phi(h)g(x)}{b}$. Considerando $x = 0$, temos $f(h) = \frac{\phi(h)g(0)}{b}$. Porém, $g(0) = b$. Logo, $f(h) = \phi(h)$. Assim, existe uma função $f(x)$ injetiva de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ tal que $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depende apenas de h.

Agora, considerando $x = 0$, temos $f(0) = \frac{g(0)}{b}$. Como $g(0) = b$, temos $f(0) = \frac{b}{b} = 1$.

Por outro lado, $\frac{f(x+h)}{f(x)} = \phi(h) = f(h) \Rightarrow f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$. Isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Logo, pela caracterização da função exponencial, $f(x) = a^x$. Como $g(x) = b \cdot f(x) = ba^x$. Isto é, $g(x)$ é do tipo exponencial, como queríamos demonstrar.

O teorema a seguir nos fornece outra caracterização das Funções tipo Exponenciais.

Teorema 3.4.3.2 (Segunda caracterização das Funções tipo Exponencial)

Para cada b e para cada t reais, suponhamos dado um número $f(b,t) > 0$ com as seguintes propriedades:

(1) $f(b,t)$ depende linearmente de b, e é monótona injetiva em relação à t;

(2) $f(b, s+t) = f(f(b,s),t)$.

Então, definindo $a = f(1,1)$, temos $f(b,t) = ba^t$.

Demonstração:

Para demonstrar esse teorema, devemos, inicialmente, observar que a propriedade (1) é equivalente à $f(kb,t) = kf(b,t),\ \forall k > 0$.

Agora, vamos considerar uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, monótona e injetiva, com as as propriedades (1) e (2), tal que $\phi(t) = f(1,t)$. Assim,

$$\phi(s+t) = f(1, s+t). \tag{22}$$

Pela propriedade (2), temos

$$f(1, s+t) = f(f(1,s),t). \tag{23}$$

Agora, pela propriedade (1), como $f(1,s) = f(1,s) \cdot 1$, temos

$$f(1,s+t) = f(1,s) \cdot f(1,t) = \phi(s) \cdot \phi(t). \tag{24}$$

Pelas equações (22) e (24), temos:

$$\phi(s+t) = \phi(s) \cdot \phi(t). \tag{25}$$

Assim, pelo Teorema de Caracterização das Funções Exponenciais, temos

$$\phi(t) = a^t, \tag{26}$$

em que $a = \phi(1) = f(1,1)$.

Logo,

$$f(b,t) = f(b \cdot 1,t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot \phi(t) = ba^t.$$

Portanto, a função f é tipo Exponencial.

Além disso, o modelo $f(x) = ka^{bx}$ deve ser entendido também como uma função do tipo exponencial, pois:

• o valor de "$k = f(0)$" é o valor inicial da função;

• se $k = 1$ e $b = 1$, então a função torna-se básica: $f(x) = a^x$;

• o valor "a" indica se a função é crescente ou decrescente, caso $k > 0$

1. se $a > 1$, então $f(x)$ é crescente;

2. se $0 < a < 1$, então $f(x)$ é decrescente.

• o valor "b" indica o período de redução ou aumento da função.

Exemplo 1 A população de uma cultura de bactérias é, inicialmente, de 100 bactérias. Se o número de bactérias nessa cultura triplica a cada 12 horas, no período de 0 a 10 dias, então esse problema é modelado pela seguinte Função tipo Exponencial:

$$N(t) = 100 \cdot 3^{\frac{t}{12}},$$

em que $N(t)$ denota a quantidade de bactérias na cultura, após t horas do início da cultura, tal que $0 \leq t \leq 240$.

De fato:

• 100 é o valor inicial;

• o fator 3 indica que o valor anterior N(t) vai triplicar a cada 12 horas;

• $\frac{t}{12}$ indica que, para valores de "t" múltiplos de 12, o valor anterior de $N(t)$ triplica.

Exemplo 2 O acetilcisteína é um medicamento indicado nos processos congestivos e/ou obstrutivos das cavidades nasais e paranasais. Sua meia-vida é de 6,25 horas, ou seja, após ingerida, leva pouco mais de seis horas (mais precisamente, 6 horas e 15 minutos) para que a quantidade ingerida inicialmente caia pela metade.

Pelas hipóteses desse problema, o modelo matemático que representa essa situação é a seguinte Função tipo Exponencial:

$$Q(t) = q \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6,25}} \left[= q \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4t}{25}} = q \cdot 2^{-\frac{4t}{25}}\right],$$

em que $Q(t)$ indica a quantidade de acetilcisteína restante após t horas da ingestão, e q denota a quantidade inicial desse medicamento ingerida pelo paciente.

De fato:

• se $t = 0$, então o valor "q" representa a quantidade inicial ingerida;

• o fator $\frac{1}{2}$ indica que o valor anterior Q(t) se reduzirá à metade após 6,25 horas;

• $\frac{t}{6,25}$ indica que, após 6,25 horas, a quantidade restante reduz-se à metade, sendo "t" múltiplo de 6,25.

3.4.4 Obtendo Gráficos de Funções tipo Exponenciais por meio de translações, reflexões e dilatações

Vimos que, com base na Função Exponencial básica, podemos obter, por meio de translações e reflexões do seu gráfico, os gráficos de outras Funções Exponenciais.

1º Caso: $g(x) = f(x) + k,\ k \neq 0$.

Nesse caso, ocorre um deslocamento vertical, de k unidades, do gráfico de $f(x)$.

• se $k > 0$, então o deslocamento vertical é de k unidades para cima;

• se $k < 0$, então o deslocamento vertical é de k unidades para baixo.

Demonstração:

Segundo Neto (2015), devemos demonstrar que (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$ se e somente se $(x,y+k)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

$(\Rightarrow)$ Se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então $y = f(x)$. Assim, $g(x) = f(x) + k \Rightarrow g(x) = y + k$. Logo, $(x,y+k)$ pertence ao gráfico de $g(x), \forall k \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Se $(x, y+k)$ pertence ao gráfico de $g(x)$, então $g(x) = y+k$. Como $g(x) = f(x)+k$, temos que $f(x) = g(x)-k \Rightarrow f(x) = (y+k)-k \Rightarrow f(x) = y$. Logo, (x,y) pertence ao gráfico de $f(x),\ \forall k \in \mathbb{R}$.

Portanto, o gráfico de $g(x)$ é uma translação vertical do gráfico de $f(x)$. Em Particular, se $k > 0$, então $f(x)+k > f(x)$, e, assim, o gráfico de $g(x)$ é apenas o gráfico de $f(x)$ elevado k unidades; por outro lado, se $k < 0$, então $f(x)+k < f(x)$, e, assim, o gráfico de $g(x)$ é apenas o gráfico de $f(x)$ abaixado k unidades.

2º Caso: $g(x) = f(x+k),\ k \neq 0$.

Nesse caso, ocorre um deslocamento horizontal, de k unidades, do gráfico de $f(x)$.

• se $k > 0$, então o gráfico de $f(x)$ desloca-se k unidades para a esquerda.

• se $k < 0$, então o gráfico de $f(x)$ desloca-se k unidades para a direita.

Demonstração: Segundo Neto (2015), devemos demonstrar que (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$ se e somente se $(x-k, y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

($\Rightarrow$) Se $f(x) = y$, então (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$. Também $g(x) = f(x+k) \Rightarrow g(x-k) = f((x-k)+k) = f(x) = y$. Logo, $(x-k, y)$ pertence ao gráfico de $g(x) \forall k \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Se $(x-k, y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$ e se $g(x) = f(x+k)$, então $g(x-k) = f((x-k)+k) = f(x) = y$. Logo, (x,y) pertence ao gráfico de $f(x), \forall k \in \mathbb{R}$.

Portanto, o gráfico de $g(x)$ é um deslocamento horizontal do gráfico de $f(x)$, pois, se $k > 0$, então $x-k < x$, e, assim, ocorre um deslocamento para a esquerda, de k unidades no gráfico de $f(x)$; por outro lado, se $k < 0$, então $x-k > x$, e, assim, ocorre um deslocamento para a direita, de k unidades, no gráfico de $f(x)$.

3º Caso: $g(x) = -f(x)$.

Diferente dos casos anteriores, nesse caso ocorre apenas uma reflexão do gráfico de $f(x)$, em torno do eixo das abscissas.

Demonstração: Segundo Neto (2015), devemos demonstrar que (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$ se e somente se $(x, -y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

($\Rightarrow$) Se (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então $y = f(x)$. Também $g(x) = -f(x) \Rightarrow g(x) = -y$. Logo, $(x, -y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

($\Leftarrow$) Se $(x, -y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$, então $g(x) = -y$. Também $g(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = -g(x) \Rightarrow f(x) = -(-y) \Rightarrow f(x) = y$. Logo, (x,y) pertence ao gráfico de $f(x)$.

Portanto, como os pontos (x,y) e $(x,-y)$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas, o gráfico de $g(x) = -f(x)$ é apenas uma reflexão do gráfico de $f(x)$ em torno do eixo das abscissas.

4º Caso: $g(x) = f(-x)$.

Diferente do caso anterior, nesse ocorre uma reflexão do gráfico de $f(x)$ ao longo do eixo das ordenadas. Assim, os gráficos de $f(x)$ e $g(x) = f(-x)$ são simétricos em relação ao eixo y.

Demonstração:

Segundo Neto (2015), devemos demonstrar que $(-x, y)$ pertence ao gráfico de $f(x)$ se e somente se (x, y) pertence ao gráfico de $g(x) = f(-x)$.

$(\Rightarrow)$ Se $(-x, y)$ pertence ao gráfico de $f(x)$, então $y = f(-x)$. Como $g(x) = f(-x)$, então $g(x) = y$. Logo, (x, y) pertence ao gráfico de $g(x)$.

$(\Leftarrow)$ Se (x, y) pertence ao gráfico de $g(x)$, então $g(x) = y$. Como $g(x) = f(-x)$, então $f(-x) = y$. Logo, $(-x, y)$ pertence ao gráfico de $f(x)$.

5º Caso: $g(x) = a \cdot f(x),\ a \neq 0$.

Nesse caso, o gráfico de $g(x)$ é obtido por uma transformação ("dilatação" ou "compressão") vertical no gráfico de $f(x)$.

Demonstração:

Segundo Neto (2015), devemos demonstrar que (x, y) pertence ao gráfico de $f(x)$ se e somente se $(x, a \cdot y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

$(\Rightarrow)$ Se (x, y) pertence ao gráfico de $f(x)$, então $f(x) = y$. Como $g(x) = a \cdot f(x)$, então $g(x) = a \cdot y$. Logo, $(x, a \cdot y)$ pertence ao gráfico de $g(x)$.

$(\Leftarrow)$ Se $(x, a \cdot y)$ pertence $g(x)$, então $g(x) = a \cdot y$. Como $g(x) = a \cdot f(x)$, então $a \cdot f(x) = a \cdot y$. Como $a \neq 0$, aplicando a lei do cancelamento, temos $f(x) = y$. Logo, (x, y) pertence ao gráfico de $f(x)$.

Sendo $a > 1$, então $a \cdot y > y$. Assim, para o mesmo valor da abscissa x, temos "a" vezes o valor da ordenada y, em $g(x)$, ocorrendo, assim, uma "dilatação" vertical no gráfico de $f(x)$. Por outro lado, sendo $0 < a < 1$, então $a \cdot y < y$. Logo, ocorre uma "compressão" vertical do gráfico de $f(x)$.

6º Caso: $g(x) = f(a \cdot x),\ a \neq 0$.

Nesse caso, o gráfico de $g(x)$ é obtido por uma transformação ("dilatação" ou "compressão") horizontal no gráfico de $f(x)$.

Demonstração:

Segundo Neto (2015), devemos demonstrar que $(a \cdot x, y)$ pertence ao gráfico de $f(x)$ se e somente se (x, y) pertence ao gráfico de $g(x)$.

($\Rightarrow$) Se $(a \cdot x, y)$ pertence ao gráfico de $f(x)$, então $f(a \cdot x) = y$. Como $g(x) = f(a \cdot x)$, temos $g(x) = y$. Logo, (x, y) pertence ao gráfico de $g(x)$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se (x, y) pertence ao gráfico de $g(x)$, então $g(x) = y$. Como $g(x) = f(a \cdot x)$, temos $f(a \cdot x) = y$. Logo, $(a \cdot x, y)$ pertence ao gráfico de $f(x)$.

Sendo $a > 1$, então $a \cdot x > x$. Assim, para o mesmo valor da ordenada y, temos a abscissa igual a $\frac{1}{a}$ vezes a abscissa x. Logo, o gráfico de $g(x)$ corresponde ao gráfico de $f(x)$ "comprimido" horizontalmente pelo fator "a".

Por outro lado, sendo $0 < a < 1$, então $a \cdot x < x$. Assim, para o mesmo valor da ordenada y, temos "a" vezes a abscissa x. Logo, o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ "dilatado" horizontalmente pelo fator "a".

3.5 A relação da Função Exponencial com Juros Compostos

Essa relação está contemplada na nova BNCC, em suas habilidades matemáticas 03 e 04, da competência específica 03.

> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial em cada caso. (BNCC, 2018, p. 536)

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais, nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, dentre outros. (BNCC, 2018, p. 536)

O sistema de Juros compostos é o mais aplicado em transações financeiras no nosso dia a dia, por apresentar uma capitalização mais interessante para os investidores e instituições financeiras, de modo geral.

> O regime de capitalização incorpora ao capital não somente os juros referentes a cada período, mas também os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior. É um comportamento equivalente ao de uma Progressão Geométrica (PG), no qual os juros incidem sempre sobre o saldo apurado no início do período correspondente (e não unicamente sobre o capital inicial).(NETO, 2007, p. 5)

Assim, considerando um capital aplicado a juros compostos, a uma taxa de juros fixa por período, durante certo número de períodos de capitalização, temos:

> Ao final do primeiro período de capitalização, a taxa de juros incide sobre o capital inicial, e os juros obtidos são incorporados ao capital, produzindo o primeiro montante.
>
> Ao final do segundo período, a taxa de juros incide sobre o primeiro montante, e os juros obtidos são incorporados a ele, produzindo o segundo montante.

> Ao final do terceiro período, a taxa de juros incide sobre o segundo montante, e os juros obtidos são novamente incorporados a ele, gerando, assim, o terceiro montante, e assim por diante...(IEZZI *et al.*, 2010, p. 231)

Na linguagem matemática, sendo C o capital inicial, aplicado a juros compostos, com uma taxa de juros fixa i, durante n períodos, o montante M, após esses n períodos, é dado por:

$M_1 = C(1+i)$,

$M_2 = M_1(1+i)$,

$M_3 = M_2(1+i)$,

$M_4 = M_3(1+i)$,

$\vdots \qquad \vdots$

$M_{n-1} = M_{n-2}(1+i)$,

$M_n = M_{n-1}(1+i)$.

Multiplicando, membro a membro, essas igualdades, obtemos

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \ldots \cdot M_{n-1} \cdot M_n \cdot = C \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \ldots \cdot M_{n-1} \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot \ldots \cdot (1+i)}_{n}.$$

Aplicando a lei do cancelamento ($M_1 \cdot \ldots \cdot M_{n-1} > 0$), obtemos

$$M_n = C(1+i)^n. \tag{27}$$

Por outro lado, se imaginarmos uma capitalização contínua, a taxa de variação do valor do investimento será $\frac{dM}{d(n)}$, sendo essa igual à taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros k, vezes o valor atual do investimento $M(n)$. Assim, podemos modelar essa situação por meio da seguinte equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem:

$$\frac{dM(n)}{dn} = k \cdot M(n).$$

Resolvendo essa EDO, obtemos

$$M(n) = M(0) \cdot e^{kn}. \tag{28}$$

Analisando os modelos (27) e (28), concluímos que ambos representam um modelo exponencial.

Observações:

• se $n = 0$, então $M(0)(= C)$ é o valor inicial da função;

• a constante $(1+i)$ é o fator de acréscimo (ou decréscimo) da função exponencial:

1. se $(1+i) > 0$, então a função exponencial é crescente;

2. se $(1+i) < 0$, então a função exponencial é decrescente.

Assim, Juros Compostos têm um crescimento exponencial.

Podemos verificar essa relação entre Função Exponencial e Juros Compostos por meio do Teorema da Segunda Caracterização das Funções do tipo Exponencial, como segue.

Vamos considerar uma função $C(C_0, n)$ injetiva, que cumpra as propriedade (1) e (2) do teorema supracitado, em que $C(C_0, n)$ é o capital existente após decorrido o tempo n, de uma aplicação a juros compostos fixos, de capital inicial C_0. Os juros são fixos e, além disso, vale a relação $C(C(C_0, s), n) = C(C_0, s+n)$, pois, caso o montante $C(C_0, n)$ tenha sido retirado e reaplicado logo em seguida, tudo se passa como se não tivessem ocorrido o resgate e a reaplicação. Logo, (C_0, n) é dependente linearmente de C_0.

Assim, pelo referido teorema, se $\phi(n) = C(1, n)$ cumpre todas as hipóteses desse problema, então essa função é $\phi(n) = a^n$, em que $a = \phi(1) = C(1, 1)$.

Logo,

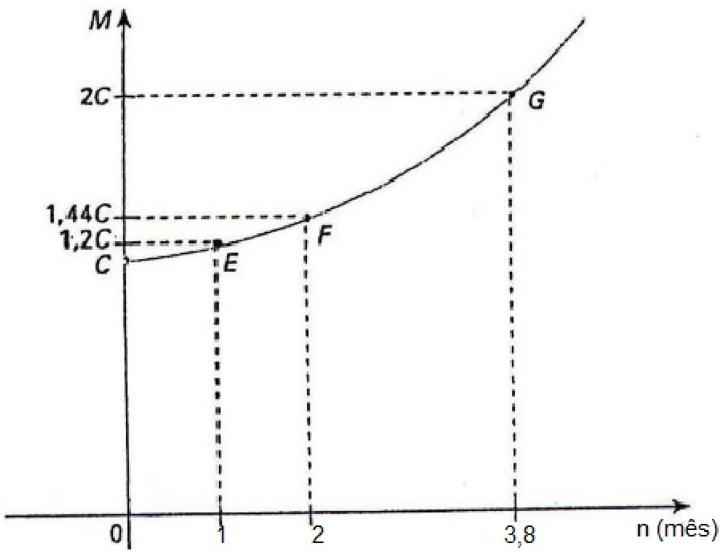
$$C(C_0, n) = C(C_0 \cdot 1, n) = C_0 \cdot C(1, n) = C_0 \cdot \phi(n).$$

Portanto,

$$C(C_0, n) = C_0 a^n. \tag{29}$$

Exemplo 3. Um capital C, aplicado durante n meses, à taxa de juro composto de 20% a.m, produzirá um montante dado pela Função Exponencial $M = C \cdot (1,2)^n$, cujo gráfico é:

Figura 11 – A curva do Juros Compostos



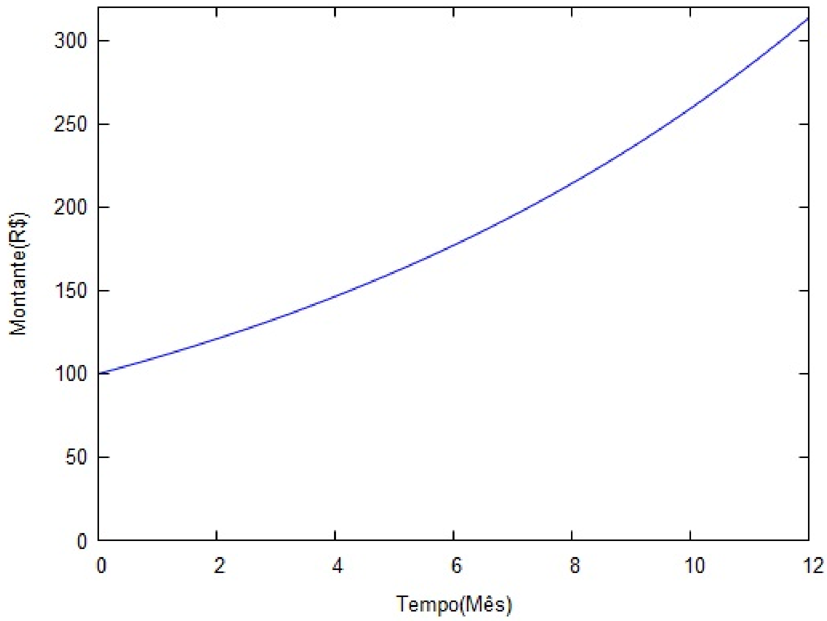
Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/7184057

Podemos observar, por meio desse gráfico, que não temos uma proporcionalidade direta entre as grandezas “Montante” e “Tempo”. Por esse motivo, não temos um crescimento linear do Montante no decorrer do Tempo.

Exemplo 4. Qual é o montante (após t meses) de um capital de $R\$100,00$, aplicado a juros compostos de 10% a.m?

Nesse exemplo, esperamos que os alunos associem esse problema à Função Exponencial $M(t) = 100(1,1)^t$, em que $t \geq 0$, cujo gráfico é:

Figura 12 – Montante após t meses

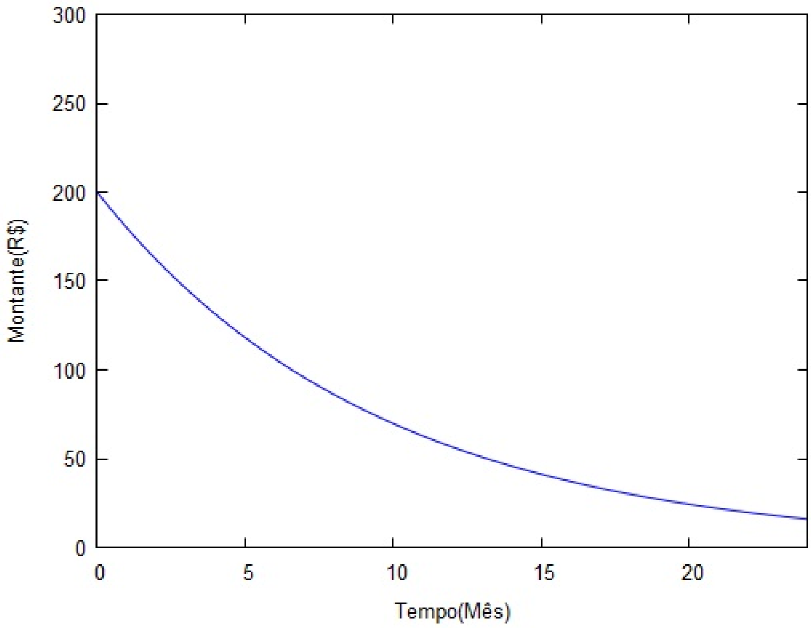


Fonte: Elaborado pelo Autor

Exemple 5. Qual é o montante (após t meses) de um valor de $R\$200,00$ que sofre uma deflação de 10% a.m?

De modo análogo ao problema anterior, esperamos que os alunos associem esse problema à Função Exponencial $M(t) = 200(0,9)^t$, em que $t \geq 0$, cujo gráfico é:

Figura 13 – Montante após t meses de deflação



Fonte: Elaborado pelo autor

3.6 A relação: Função Exponencial e Progressão Geométrica

Conforme as análises da 1ª parte da sequência didática, os valores $f(x)$ de uma Função Exponencial, ordenadamente, representam uma Progressão Geométrica, desde que o expoente da potência seja um número inteiro. Essa relação, a qual deve ser apresentada pelo professor, faz parte da Habilidade Matemática 08 da Competência Específica 05:

> (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BNCC, 2018, p. 541)

Assim, é importante realizar uma comparação entre o modelo exponencial apresentado nessa sequência didática e o termo geral de uma Progressão Geométrica. De acordo com Iezzi *et al.* (2010), tem-se a seguinte definição para Progressão Geométrica.

(i) **Definição 3.6.1** Uma Progressão Geométrica (PG) é toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real q, chamada razão da PG.

Dada a PG $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, temos:

$a_1 = a_0 \cdot q,$

$a_2 = a_1 \cdot q,$

$a_3 = a_2 \cdot q,$

$a_4 = a_3 \cdot q,$

$\vdots$

$a_{n-1} = a_{n-2}.q,$

$a_n = a_{n-1}q.$

Multiplicando, membro a membro, essas igualdades, obtemos

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot q}_{n}.$$

Como $a_1, \ldots, a_{n-1} \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, aplicando a lei do cancelamento, obtemos

$$a_n = a_0 q^n.$$

Segundo Lima (2017), a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica pode ser caracterizada com base na definição a seguir:

Definição 3.6.2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ é uma Progressão Aritmética (PA) de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores $f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, ..., f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots$ constituem uma Progressão Geométrica (PG) de razão a^h.

De fato, considerando a Função Exponencial $f(x_n) = ba^{x_n}$, em que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ são termos de uma PA de razão h, temos, para x_{n+1},

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n + h} = (ba^{x_n})a^h = f(x_n)a^h \Rightarrow \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = a^h.$$

Logo, a sequência definida por $f(x_{n+1})$ é uma PG de razão $q = a^h$.

Por outro lado, na PA de termos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ e razão $r = h$, temos

$$x_n = x_1 + (n-1)h = x_1 + nh - h.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n)a^h \\ &= ba^{x_n}a^h = ba^{x_n + h} \\ &= ba^{x_1 + nh - h}a^h \\ &= ba^{x_1 + nh - h + h} = ba^{x_1 + nh} \\ &= (ba^{x_1})a^{nh} \\ &= f(x_1)a^{nh}. \end{aligned}$$

Considerando $a^h = A$, temos

$$f(x_{n+1}) = f(x_1)A^n.$$

De fato, a sequência $f(x_n)$ representa uma Função Exponencial. Em particular, se $x_1 = 0$, então $f(x_1) = b$. Assim, $f(x_{n+1}) = bA^n$.

Segundo Lima (2017), uma relação ainda mais forte, entre Progressão Geométrica e Função Exponencial, é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda Progressão Aritmética $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ em uma Progressão Geométrica $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, teremos $f(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Consideremos $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$, é monótona, injetiva, contínua, transforma Progressões Aritméticas em Progressões Geométricas, e, agora, $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma Progressão Aritmética. Logo, $g(x), 1, g(-x)$ é uma Progressão Geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se que $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$. Consideremos, agora, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma Progressão Aritmética. Logo, $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma Progressão Geométrica, cuja razão, evidentemente, é $g(x)$. Assim, o seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um número inteiro negativo, então $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$, para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$, e $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teorema da Primeira Caracterização das Funções tipo Exponencial que, definindo $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$, temos que $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Desse modo, comparando $f(x) = ba^x$ ou $f(x) = ba^{\alpha x}$ em que $0 < a \neq 1$, com $a_n = a_0 \cdot q^n$, em que $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(x) = a_n, \quad b = a_0, \quad a = q \quad \text{e} \quad n = x \quad \text{ou} \quad n = \alpha x.$$

No entanto, devemos ter cuidado com os domínios das relações que estamos considerando.

- Na Função Exponencial, o termo geral é definido para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Na Progressão Geométrica, o termo geral é definido para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que estamos considerando uma PG cujo primeiro termo é a_0.

Assim, quando o problema apresentado considera $\mathbb{N}$ como domínio, podemos utilizar qualquer uma dessas relações. Quando considera $\mathbb{R}$ como domínio, não podemos dizer que o modelo $f(x) = ba^{\alpha x}$ representa uma Progressão Geométrica. De qualquer formar, essa caracterização nos permite relacionar, com segurança, Função Exponencial e Juros Compostos.

Exemplo 6. Sabendo que a inflação, no período de janeiro a dezembro de 2019, foi, em média, de 2% a.m, qual o valor, em agosto, de um bem que, em janeiro, custava $R\$1000,00$?

Com base nas hipóteses desse problema, os alunos podem resolvê-lo de qualquer dos dois seguintes modos:

1º modo: substituindo diretamente o valor de t na função exponencial $V(t) = 1000 \cdot (1,02)^t$.

Sendo agosto o mês 8, temos $t = 8$.

Logo:

$$V(8) = 1000 \cdot (1,02)^8 \Rightarrow V(8) \cong 1000 \cdot (1,172) \Rightarrow V(8) \cong 11.717,00.$$

2º modo: substituindo o valor de n no termo geral da PG de 1º termo $a_0 = 1000$ e razão $q = 1,02$:

$$a_n = 1000(1,02)^n \Rightarrow a_8 = 1000(1,02)^8 \Rightarrow a_8 \cong 1000(1,172) \Rightarrow a_8 \cong 11.717,00.$$

De fato, a modelagem desse problema é equivalente à sequência $(1000; 1020; 1040,40; 1061,208; \ldots)$, que é uma PG de razão $q = 1,02$.

Exemplo 7. Se a meia-vida do Césio-137 é de, aproximadamente, 30 anos, considerando uma amostra de 32 gramas, qual a massa atômica dessa amostra após 150 anos?

1º Modo: expressando a sequência que representa a PG decrescente de primeiro termo $a_0 = 32$ e razão $q = \frac{1}{2}$, temos $(32; 16; 8; 4; 2; 1; \ldots)$.

Lembrando que a massa inicial corresponde ao primeiro termo da PG, após 150 anos, temos $1g$ da massa atômica.

2º Modo: substituindo diretamente o valor de t na função exponencial $M(t) = 32 \cdot 2^{-\frac{t}{30}}$.

Assim:

$$M(t) = 32 \cdot 2^{-\frac{t}{30}} \Rightarrow M(150) = 32 \cdot 2^{-\frac{150}{30}} \Rightarrow M(150) = 32 \cdot 2^{-5} \Rightarrow M(150) = 1g.$$

Esse é um excelente exemplo para que os alunos entendam que a função exponencial $M(t) = 30 \cdot 2^{-\frac{t}{30}}$ representa uma PG de razão $q = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, caso $\frac{t}{30} \in \mathbb{N}$. Ou seja: t tem que ser um múltiplo natural de 30.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprovação da nova BNCC é um marco na História da Educação no Brasil. Esse conjunto de diretrizes é composto de habilidades e competências que devem nortear o processo de ensino-aprendizagem em todo o território nacional. Isso é de uma relevância grandiosa, pois temos a possibilidade de a educação pública e privada caminharem em conformidade no que diz respeito ao conjunto de competências e habilidades que todo estudante deve ter adquirido ao fim de cada etapa do Ensino Básico. A verificação dessas competências e habilidades passa a ser um indicador do aprendizado não só nas etapas do Ensino Básico, como também do próprio Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Observamos, então, que as diretrizes da nova BNCC estão atreladas não só à própria conexão dos saberes nos níveis educacionais básicos — Fundamental e Médio, mas compõem um conjunto de indicadores para se aferir o nível de saber adquirido pelos alunos após a conclusão do Ensino Médio, por meio do ENEM. Assim, é fundamental que todos os educadores, da rede pública e privada, entendam que a BNCC é um documento que deve nortear o nosso fazer pedagógico. Já não basta ensinar por ensinar. É preciso estar atento ao conjunto de habilidades que levam à certa competência que todo aluno deve adquirir ao fim de cada assunto abordado. Se o tema é Função Exponencial, não é suficiente o aluno entender apenas a definição e propriedades desse conceito. É necessário fazê-lo compreender o contexto geral de situações-problema que apresentam as características exponenciais. Assim, perceberão que existe, no nosso dia a dia, uma gama muito grande de tais situações-problema que são modelados por esse tipo de função e, além disso, entenderão a relação que esse tipo de função tem com problemas de Juros Compostos e Progressão Geométrica. É imprescidível uma abordagem que realize essa relação entre Função exponencial, Juros Compostos e Progressão Geométrica. Caso contrário, o aluno passa a imaginar que são assuntos independentes, sem correlação alguma. Mas como fazê-lo perceber essa relação? A melhor maneira de fazê-lo perceber essas características é colocá-lo para descobri-las por meio de um processo investigativo e dinâmico. Nesse ponto, entram as perspectivas oferecidas pela Modelagem Matemática, pois, para alcançar os conhecimentos relativos a uma competência, é necessário adquirir o conjunto de habilidades que levem a essa competência, e a experimentação é um ótimo instrumento para gerar essas habilidades.

Dessa forma, essa pesquisa foi fundamentada para as diretrizes da BNCC e as perspectivas oferecidas pela Modelagem Matemática para que tais habilidades sejam alcançadas. No entanto, a proposta didática aqui apresentada apela a dois pontos fundamentais na busca do saber matemático, indicados nas diretrizes da nova BNCC — uma busca intuitiva das propriedades da Função Exponencial, usando as possibilidades da Modelagem Matemática e, a seguir, a formalização com o rigor matemático necessário, com as devidas demonstrações. Assim, o aluno compreende que o processo investigativo ocorre de forma intuitiva, porém, a validação das propriedades dos modelos deve seguir o rigor das demonstrações.

No processo de ensino-aprendizagem, se necessário, o professor deve propor aos alunos o uso das mais diversas tecnologias disponíveis, com o objetivo de levá-los a perceber situações relevantes durante as investigações realizadas em tal processo. Essa situação é válida quando o uso da tecnologia não é um fim, mas apenas um meio que facilite descobertas interessantes para a dinâmica na busca pelas habilidades inerentes àquela competência. Na proposta didática apresentada nessa pesquisa, o software Maxima é apenas uma sugestão de um mecanismo que pode ser usado como meio para experimentar as translações gráficas referentes à Função Exponencial. Todavia, o fundamental é acelerar processos menos significativos durante a abordagem de certos temas. E, nesse caso, uso de um software cumpre esse papel.

De modo geral, a forma como se faz a abordagem de um tema matemático é a chave para o sucesso do processo de aprendizagem dos alunos. Uma sequência didática dinâmica pode ser uma ferramenta motivacional para gerar um aprendizado significativo que leve de fato os alunos a adquirirem habilidades que gerem competências. A proposta desse trabalho foi apresentar, de forma cronológica, uma sequência didática que pudesse cumprir esse papel — uma abordagem significativa e dinâmica: contextualizada e interdisciplinar. Claro que são muitos os desafios para aplicar uma sequência didática como essa aqui apresentada, pois isso demanda um número maior de aulas e acesso a recursos tecnológicos. Cabe ao professor avaliar a possibilidade que ele tem de fazer uso de tal proposta.

Em particular, ao desenvolver essa pesquisa, pude visualizar, por meio de um estudo mais aprofundado das possibilidades oferecidas pela Modelagem Matemática, que é possível propor a realização de um processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico e atrativo para os alunos. Porém, reconheço que isso é trabalhoso e requer um bom planejamento, tendo sempre em foco as habilidades que os alunos devem adquirir ao fim do assunto abordado.

Essa pesquisa também me permitiu visualizar com clareza as proposições que a BNCC apresenta para o Ensino de Função Exponencial e a necessidade de relacionar esse assunto com

Juros Compostos e Progressão Geométrica.

Por fim, minha motivação maior para realizar essa pesquisa foi compreender a relação entre as possibilidades oferecidas pela Modelagem Matemática, no âmbito educacional, e as diretrizes da nova BNCC, que estão contempladas em seu conjunto de competências e habilidades, em particular para o ensino de Modelos Exponenciais. Espero que as percepções aqui descobertas sirvam de elemento motivador para futuras pesquisas no contexto do uso de metodologias ativas para alcançar as proposições das diretrizes da nova BNCC.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais Ordinárias: Um curso introdutório**. 2ª. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1988. v. 1.

____. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 01. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

____. **Modelagem Matemática: Teoria e Prática**. 01. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4ª. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2007.

BNCC, M. D. E. **Base Nacional Comum Curricular**: A educação é a base. BRASÍLIA, 2018.

FRANCO, D. **Química - Ciotidiano e transformações**. 1ª. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016. v. 03.

GENEROSO, L. H. C. **Modelagem Matemática e Metodologia Ativa: Práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso - Instituto de Ciências Exatas e da Terra, 2019.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PéRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática: Ciência e Aplicações**. 6ª. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. v. 1.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. v. 1.

LINHARES, S.; GEWANDSZNAJDER, F.; PACCA, H. **Biologia Hoje**. 3ª. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. v. 1.

____. **Biologia Hoje**. 3ª. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. v. 02.

MEC, C. N. de Educação/Ministério da E. **Diário Oficial da União**: Resolução nº 4, de 17 de dezembro 2018. Brasilia, 2018.

MEC, M. da E. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**: Lei nº 9394 de 20 de dezembro de 1 996. Brasilia, 2016.

MEYER, J. F. da Costa de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos santos. **Modelagem em Matemática**: Coleção tendências em educação matemática. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2011.

NETO, A. A. **Matemática Financeira e suas Aplicações**. 9ª. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2007.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de cálculo - Coleção PROFMAT**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

PEBMED, P. **Covid-19: taxa de contágio no Brasil é de 2,8, a maior entre 48 países**. 2020. Disponível em: <https://pebmed.com.br/covid-19-taxa-de-contagio-no-brasil-e-de-28-a-maior-entre-48-paises>. Acesso em: 21 jul. 2020.

POSAMENTIER, A. S.; KRULIK, S. **A arte de morivar os estudantes do Ensino Médio para a Matemática**. Rio de Janeiro: AMGH Editora, 2014.

ROSA, M.; REIS, F. D. S.; OREY, D. C. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4ª. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

SCARDUA, B. **Equações Ordinárias e Aplicações - Textos Universitários**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

TAVONI, R. **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst**: Uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2013.

APÊNDICE A – PLOTANDO GRÁFICOS EM 2D COM O SOFTWARE MAXIMA

Comandos necessários para plotar os gráficos dos exemplos propostos

Para construir gráficos bidimensionais, devemos usar o comando plot ou wxplot.

$$\text{plot2d } ([f(x_1),\ldots,f(x_n)],[x,a,b],[y,c,d],\text{ opções}),$$

sendo:

- $f(x_1),...,f(x_n)$ são funções de uma variável;
- $[x,a,b]$ é o intervalo de variação da variável x;
- $[y,c,d]$ é o intervalo de variação da variável y;
- a, b, c, d devem ser números que pertençam ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Observação: após cada linha de comando, finalizar com o símbolo de cifrão ($).

- **Gráfico 01: Quantidade de células após n divisões da Mitose.**

$f(x) := 2^x$

L: makelist($[n,f(n)],n,0,5$)

wxplot2d([discrete,L], [x,0,6], [style, [points,2,1,1], [$x$label, "Número de divisões"], [$y$label,"Número de células"])

- **Gráfico 02: Quantidade de massa atômica em função do tempo transcorrido.**

wxplot2d($[30*2^{(-x/30)}],[x,0,180],[y,0,100]$,[$x$label,"Tempo (anos)"],[$y$label,"Massa (gramas)"])

- **Gráfico 03: Translações gráficas 01**

wxplot2d($[2^x,2^x+1,2^x-1],[x,-2,2],[y,-5,5]$)

- **Gráfico 04: Translações gráficas 02**

wxplot2d ($[2^x,2^{(x+2)},2^{(x-2)}],[x,-2,2],[y,0,10]$)

- **Gráfico 05: Simetria gráfica - eixo x**

wxplot2d($[2^x,-2^x]$, [x,-2,2],[y,-4,4])

- **Gráfico 06: Simetria gráfica - eixo y**

wxplot2d($[2^x,2^{-x}]$, $[x,-3,3],[y,0,8]$)

• **Gráfico 07: Dilatação vertical**

wxplot2d($[2^x, 3\cdot 2^x, \frac{2^x}{3}], [x,-2,2], [y,-2,12]$)

• **Gráfico 07: Dilatação horizontal**

wxplot2d($[2^x, 2^{3\cdot x}, 2^{\frac{x}{3}}], [x,-10,10], [y,-10,200]$)

• **Gráfico 08: Exemplo 4**

wxplot2d($[100\cdot(1.1)^x], [x,0,12], [y,0,320]$, [$x$label,“Tempo (meses)”],[$y$label,"Montante(R$)"])

• **Gráfico 09: Exemplo 5**

wxplot2d($[100\cdot(0.9)^x], [x,0,24], [y,0,300]$, [$x$label,“Tempo” (meses)], [$y$label,“Montante” (R$)])

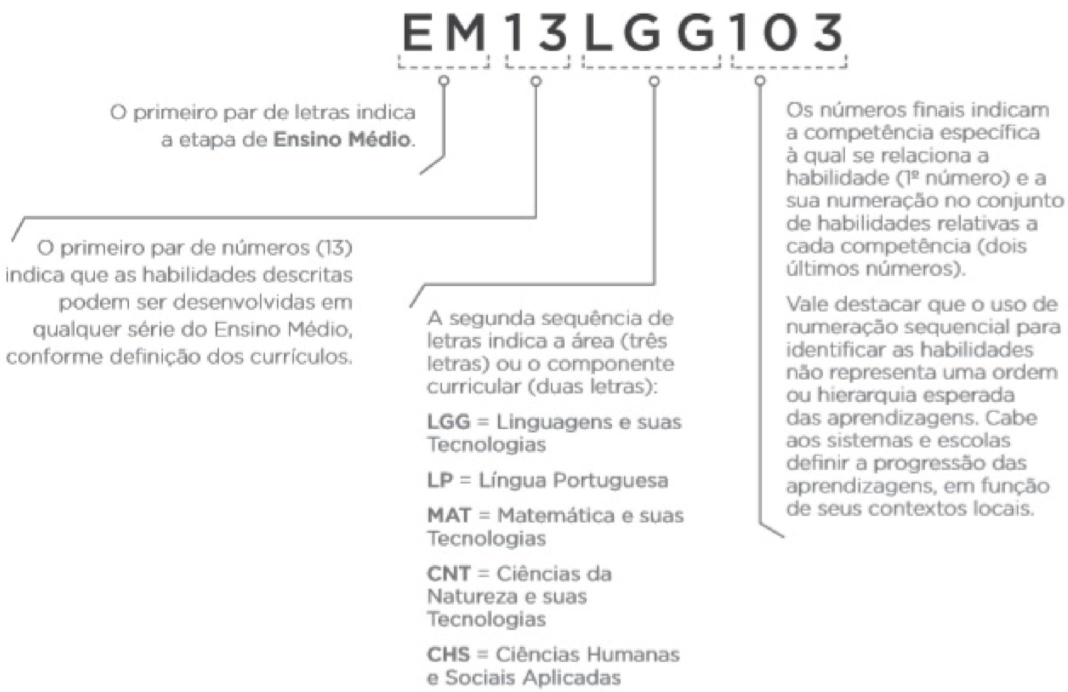
APÊNDICE B – CÓDIGOS ALFANUMÉRICOS DA BNCC

Explicação dos códigos alfanuméricos da BNCC

Para a área da Matemática e suas Tecnologias, a BNCC apresenta em suas diretrizes um conjunto de 5 Competências específicas, e, dentre essas Competências, as habilidades a serem desenvolvidas relacionadas aos temas estudados. Tais habilidades podem ser inerentes a mais de uma Competência específica.

As possibilidades de organização curricular das aprendizagens propostas na BNCC de Matemática são várias. Uma organização possível —- e mais próxima da prática de elaboração curricular dessa área —- é por unidades similares às propostas para o Ensino Fundamental. Essas unidades podem ser, dentre outras, Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística. É importante destacar que foram mantidos os códigos originais das habilidades, o que permite reconhecer a competência específica à qual cada habilidade está relacionada. Para melhor entender os códigos alfanuméricos, segue um exemplo de como realizar a interpretação da sequência.

Figura 14 – Explicação dos códigos alfanuméricos do Ensino Médio



FONTE: BNCC (2018)

Segundo esse critério, o código acima EM13LGG103, por exemplo, refere-se à terceira habilidade proposta na área de Linguagens e suas Tecnologias relacionada à competência específica 1, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio (1ª, 2ª ou 3ª), conforme definições curriculares.

APÊNDICE C – LEMA 8.2

Existência de uma potência a^r, com $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+^*$

Lema 8.2. Fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+^*$ existe alguma potência de a^r, em que $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que $0 < \alpha < \beta$, devemos obter $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in [\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Vamos considerar o caso $a > 1$ e $\alpha > 1$ (os demais casos são análogos).

Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números M e n, sendo $m, n \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\alpha < \beta < a^m \quad \text{e} \quad 1 < a < (1 + \tfrac{\beta - \alpha}{a^M})^n.$$

Daí, elevando a segunda desigualdade à $\frac{1}{n}$, temos:

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < (1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}).$$

Agora, subtraindo 1 da última desigualdade, temos:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M}.$$

Multiplicando por $a^M (a^M > 0)$ essa última desigualdade, tem-se:

$$0 < a^M \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Como $\frac{m}{n} \leq M$, então $a^{\frac{m}{n}} \leq a^M$, de modo que se tem, na última desigualdade:

$$0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Rightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Em particular:

- se $m = 0 \Rightarrow 0 < a^{\frac{1}{n}} - a^0 < \beta - \alpha$. Logo, tem-se o intervalo $[a^0, a^{\frac{1}{n}}]$;
- se $m = 1 \Rightarrow 0 < a^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{1}{n}} < \beta - \alpha$. Logo, tem-se o intervalo $[a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}]$,

e assim por diante.

Então: $a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \cdots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Assim, como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um dos extremos anteriores está contido em $[\alpha, \beta]$.

APÊNDICE D – DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e todo $h > -1$, tem-se $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Demonstração:

Por indução matemática sobre n:

(i) Base de indução: $n = 1 \Rightarrow (1+h)^1 = (1+1\cdot h)$. Logo, a afirmação é válida.

(ii) Hipótese de indução: $(1+h)^n \geq 1+nh$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Devemos demonstrar que $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot h$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Vejamos:

Pela hipótese de indução, tem-se: $(1+h)^n \geq 1+nh$. Como $(1+h) > 0$, podemos multiplicar a desigualdade anterior por $1+h$. Assim, temos:

$$(1+h)^n(1+h) \geq (1+n)\cdot h\cdot(1+h) \Rightarrow (1+h)^{n+1} \geq 1+h+nh+nh^2 = 1+(n+1)\cdot h+nh^2.$$

Resta demonstrar que $nh^2 \geq 0$.

De fato, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $h > -1$, então $nh^2 \geq 0$. Assim:

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot h+nh^2 \geq 1+(n+1)\cdot h.$$

Por transitividade, temos:

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1).$$

c.q.d.

APÊNDICE E – EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM

Equações de diferenças

Definição 1.0 Uma equação da forma $y_{n+k} = f(y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, \cdots, y_n)$, em que $k \in \mathbb{N}^*$, é chamada equação de diferenças de ordem k.

Em particular, se ela pode ser representada na forma:

$$y_{n+k} + a_1 \cdot y_{n+k-1} + \cdots + a_n \cdot y_n = R_n,$$

e, além disso, se:

- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ são reais, em que $a_n \neq 0$;
- R_n é uma função de n,

então dizemos que a equação acima é uma equação de diferenças linear de ordem k, não homogênea, com coeficientes constantes.

Por outro lado, se $R_n = 0$, a equação de diferenças é linear, homogênea, com coeficientes constantes.

Exemplos:

(1) $P_{n+1} - 1,5P_n = 0$ é uma equação linear homogênea de 1ª ordem (ou recorrência linear homogênea de 1ª ordem).

(2) $H_{n+2} = 3H_n + 2$ é uma equação linear não homogênea de 2ª ordem.

Equações de diferenças linear homogênea de 1ª ordem

Definição 2.0 A equação de diferenças da forma $y_{n+1} + ay_n = 0$, em que $n \in \mathbb{N}$, é chamada de equação de diferenças linear homogênea de 1ª ordem.

Proposição 2.1 A solução de uma equação linear homogênea de 1ª ordem, com valor inicial $y(0) = y_0$, é $y_n = (-a)^n \cdot y_0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} y_1 &= -a \cdot y_0, \\ y_2 &= -a \cdot y_1, \\ y_3 &= -a \cdot y_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$y_{n-1} = -a \cdot y_{n-2}$,

$y_n = -a \cdot y_{n-1}$.

Multiplicando, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdots y_{n-1} \cdot y_n = \underbrace{(-a) \cdot (-a) \cdots (-a)}_{n} \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots \cdot y_{n-2} \cdot y_{n-1}. \tag{30}$$

Aplicando a lei do cancelamento na equação (30) tem-se:

$$y_n = y_0(-a)^n. \tag{31}$$

Devemos demonstrar que y_n, assim obtida, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraremos tal afirmação por indução sobre n:

Para $n = 0$, essa afirmação é verdadeira, pois $y(0) = y_0$, que é o valor inicial.

Agora, vamos supor que $y_n = y_0(-a)^n$ seja verdadeira para algum k natural, isto é, $y_k = y_0(-a)^k$, de modo que devemos demonstrar que é verdadeira para $k+1$. Usando a própria recorrência, temos:

$$y_{k+1} = (-a)y_k. \tag{32}$$

Por hipótese, $y_k = (-a)^k y_0$.

Logo:

$$y_{k+1} = (-a)(-a)^k y_0.$$

$$y_{k+1} = (-a)^{k+1} y_0. \tag{33}$$

Assim, $y_n = (-a)^n y_0$ é solução da equação linear $y_{n+1} + ay_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, em que $y(0) = y_0$.

Proposição 2.2 A solução de uma equação linear não homogênea de 1ª ordem do tipo $y_{n+1} = ay_n + b$, com $n \in \mathbb{N}$, e $a, b \neq 0$, é: $y_n = y_0 a^n + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right)$.

Demonstração

$y_1 = ay_0 + b$,

$y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2 y_0 + ab + b$,

$y_3 = ay_2 + b = a(a^2 y_0 + ab + b) + b = a^3 y_0 + a^2 b + ab + b$,

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$y_n = a^n y_0 + \underbrace{a^{n-1} b + a^{n-2} b + \cdots + a^2 b + ab + b}_{(PG),\ a_1 = b\ e\ q = a}$.

Como $q = a \neq 1$, aplicamos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Assim:

$$y_n = a^n y_0 + b(\frac{a^n - 1}{a - 1}). \tag{34}$$

Agora, devemos demonstrar que essa solução vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Por indução sobre n, tem-se:

Para $n = 0$ $y_0 = a^0 y_0 + b\left(\frac{a^0-1}{a-1}\right) \Rightarrow y_0 = y_0$. Logo, a afirmação é verdadeira. Supondo a solução verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, $y_k = a^k y_0 + b\left(\frac{a^k-1}{a-1}\right)$, devemos demonstrar que ela vale para $k+1$.

Sabemos que:

$$y_{n+1} = ay_n + b.$$

Então:

$$y_{k+1} = ay_k + b. \tag{35}$$

Agora, como y_k é a hipótese indutiva, substituindo y_k na equação (35) tem-se:

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= a\left[a^k y_0 + b\left(\frac{a^k - 1}{a - 1}\right)\right] + b \\
&= a^{k+1} y_0 + ab\left(\frac{a^k - 1}{a - 1}\right) + b \\
&= a^{k+1} y_0 + b\left(\frac{a^{k+1} - a}{a - 1}\right) + b \\
&= a^{k+1} y_0 + b\left(\frac{a^{k+1} - a}{a - 1} + 1\right) \\
&= a^{k+1} y_0 + b\left(\frac{a^{k+1} - a + a - 1}{a - 1}\right) \\
&= a^{k+1} y_0 + b\left(\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}\right).
\end{aligned}$$

Logo, $y_n = a^n y_0 + b\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)$ é solução da equação linear $y_{n+1} = ay_n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem linear

Definição 3.0 Uma equação diferencial é uma equação que envolve funções incógnitas e suas derivadas. É chamada de equação diferencial ordinária (EDO) se a função incógnita depende apenas de uma variável.

Equação Diferencial de 1ª ordem

Definição 3.1 Sendo $F(x,y)$ uma função definida em um intervalo aberto de $\mathbb{R}^2$, então a equação $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ é chamada de equação diferencial ordinária de 1ª ordem.

Uma solução da EDO de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$, em um intervalo aberto $\alpha < x < \beta$ é uma função θ, tal que θ' existe e satisfaz $\theta'(x) = F(x,\theta(x)),\ \forall x \in (\alpha,\beta)$.

Teorema 3.2 Teorema de Existência e Unicidade de soluções para um problema de valor inicial.

Consideremos as funções f e $\frac{df}{dy}$ contínuas em algum retângulo $[\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta]$ contendo o ponto (t_0,y_0). Então, em algum intervalo $t_0 + k < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução do problema de valor inicial: $y' = f(t,y)$, com $y(t_0) = y_0$.

Equações diferenciais de 1ª ordem lineares

Definição 3.3 Uma equação diferencial de 1ª ordem é dita linear quando pode ser escrita na forma $y' + p(x)y = g(x)$, em que p e g são funções reais contínuas.

Equações Separáveis

Definição 3.4 Uma EDO de 1ª ordem é de variáveis separáveis quando tem a forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

em que g e h são funções reais, definidas em intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Resolver uma EDO desse tipo significa obter uma função $y = y(x)$, tal que $y' = g(x)h(y(x))$. Separando as variáveis, e considerando $h(y) = h(y(x)) \neq 0$, podemos reescrever:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)d(x). \tag{36}$$

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x). \tag{37}$$

$$\int \frac{y'(x)d(x)}{h(y(x))} = \int g(x)d(x). \tag{38}$$

Agora, efetuando uma mudança de variável tal que $v = y(x) \Rightarrow dv = y'(x)dx$, tem-se:

$$\int \frac{dv}{h(v)} = \int g(x)dx. \tag{39}$$

Para obter a solução satisfazendo a condição inicial dada, é suficiente calcular essas integrais e escolher k adequadamente.

Portanto:

$$H(y) = G(x) + k, \tag{40}$$

em que $H(y)$ e $G(x)$ são as primitivas de $\frac{1}{h(y)}$ e $g(x)$, respectivamente.