ANDRÉ ANDERSON SILVA PAIXÃO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS E DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

Proponentes: Prof. Dr. Geraldo Moreira da Rocha Filho
André Anderson Silva Paixão.

TEÓFILO OTONI – MG
2019

ANDRÉ ANDERSON SILVA PAIXÃO

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS E DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Banca Examinadora da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como exigência para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

TEÓFILO OTONI – MG

2019

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecária responsável: Graziela Lopes da Costa – CRB6 nº 2807

P149u
2020

Paixão, André Anderson Silva.

A utilização de materiais concretos e do software GeoGebra no ensino aprendizagem da geometria espacial. / André Anderson Silva Paixão. Teófilo Otoni: UFVJM, 2020.

93 p.: il.

Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Moreira da Rocha Filho.

1. Geometria Espacial. 2. Tridimensionais. 3. Bidimensionais. 4. GeoGebra. I. Título.

CDD: 516

ANDRÉ ANDERSON SILVA PAIXÃO

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS E DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador (a): Prof. Dr. Geraldo Moreira Da Rocha Filho

Data da aprovação : 21/11/2019

Geraldo Moreira da Rocha Filho

Prof.Dr. GERALDO MOREIRA DA ROCHA FILHO - UFVJM

Jaqueline Maria da Silva

Prof.Drª JAQUELINE MARIA DA SILVA - UFVJM

José Fernandes da Silva

Prof.Dr. JOSE FERNANDES SILVA - IFMG

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao grandioso DEUS, por me dar sabedoria e saúde para realizar mais essa conquista profissional e pessoal.

Aos meus pais Diosvaldo e Valdice que sempre lutaram e estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos.

À minha esposa Kelly Patricia e ‘filha’ Marcelly, pela compreensão, apoio e paciência em tantos momentos árduos durante esse período.

À minha irmã Andréa e sobrinha Lethicia que dedicaram tempo a me ajudar nos momentos precisos.

Aos meus colegas do Curso, pelo apoio, companheirismo, parceria e momentos importantes de entretenimento, em especial ao Gilson, por dividir despesas e horas de estradas e estudos.

À Universidade dos Vales dos Jequitinhonhas e Mucuri (UFVJM) por abrir as portas e propiciar este importante momento.

Aos meus colegas de trabalho que sempre procuraram me incentivar, dando forças para não fraquejar e continuar buscando meus objetivos.

Aos meus professores do Curso, que fizeram parte dessa história e tanto incentivaram a continuar, em especial ao Professor Dr. Geraldo Moreira da Rocha Filho, que me orientou no trabalho de conclusão.

Aos alunos que participaram do minicurso que evidenciou esse trabalho.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para que mais esse sonho se tornasse realidade, deixo meus agradecimentos sinceros.

Resumo

O conteúdo de Geometria Espacial é, em sua grande maioria ensinada com metodologias tradicionais, onde os recursos utilizados são apenas lousa, piloto/giz e livro didático, esperando que os alunos compreendam um conteúdo de formas tridimensionais, porém apresentados em formas bidimensionais. Este trabalho realizado em forma de um minicurso com alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual do extremo sul da Bahia. E tem por finalidade uma metodologia diferenciada para o ensino aprendizagem do conteúdo de Geometria Espacial. Para tal, foram propostos dois momentos, o primeiro traz a construção, planificação e manipulação de sólidos geométricos, utilizando materiais recicláveis ou de pouco custo, facilitando a aquisição dos mesmos. De fato, pois tem-se o intuito de facilitar a analise dos pré-requisitos necessários, não deixando de relacionar as figuras planas com os sólidos geométricos, promovendo sempre uma contextualização, deixando as aulas mais dinâmicas e participativas. Já no segundo momento, desenvolve-se um trabalho com computadores, utilizando o *software* GeoGebra, que apresenta uma simples interface e custo gratuito, facilitando a sua instalação e manipulação. O GeoGebra é um instrumento rico em recursos e ferramentas, permitindo ao aluno uma maior participação na construção de conhecimentos. O mecanismo oferecido por esse *software* no estudo da construção e planificação de áreas e de volumes dos sólidos contribui diretamente no ensino aprendizado dos discentes envolvidos, propiciando momentos distintos dos tradicionais e mostrando a qualidade e exatidão da sua aplicabilidade. Ao término desse trabalho pretende-se chegar à conclusão de que a manipulação dos sólidos geométricos, assim como o uso de ferramentas tecnológicas são imprescindíveis à aprendizagem do conteúdo abordado.

Palavras-Chave: Geometria Espacial; Tridimensionais; Bidimensionais; GeoGebra.

Abstract

The content of Spatial Geometry is mostly taught with traditional methodologies, where the resources used are only blackboard, pilot / chalk and textbook, hoping that the students understand a content of three-dimensional forms, but presented in two-dimensional forms. This work was done in the form of a short course with third year high school students from a state school in the extreme south of Bahia. And its purpose is a different methodology for teaching and learning the content of Spatial Geometry. For this, two moments were proposed, the first brings the construction, planning and manipulation of geometric solids, using recyclable or inexpensive materials, facilitating the acquisition of them, as it aims to facilitate the understanding of the necessary prerequisites. , not forgetting to relate the flat figures with the geometric solids, always promoting a contextualization, leaving the classes more dynamic and participative. Already in the second moment, it develops a work with computers, using the software GeoGebra, that presents a simple interface and free cost, facilitating its installation and manipulation. GeoGebra is a tool rich in features and tools, enabling students to participate more in knowledge building. The mechanism offered by this software in the study of the construction and planning of areas and volumes of solids contributes directly to the teaching and learning of the students involved, providing different moments from the traditional ones and showing the quality and accuracy of their applicability. At the end of this work it is intended to reach the conclusion that the manipulation of solids and the use of technological tools are essential for learning the content addressed.

Keywords: Spatial Geometry; Three-dimensional; Two-dimensional; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, o ensino da Matemática vem apresentando várias mudanças em relação a metodologia trabalhada. O professor deixou de ser o detentor da palavra e passou a ser uma espécie de mediador. Antes os estudantes repetiam os exercícios inúmeras vezes, até que este processo se tornasse mecânico, ou seja, após várias tentativas se entendia que houve aprendizado do conteúdo de uma forma geral.

As dificuldades apontadas durante o trabalho embasam o pensamento desse pesquisador, uma vez que este já é professor de matemática, atuante em escola pública do Ensino Médio, por um período de 9 anos, tendo formação na área, obtida frente a Universidade Estadual da Bahia. Diante disso apresenta a propriedade para apontar dificuldades encontradas por colegas de graduação e estudantes da rede onde leciona, diante o pressuposto fica a evidência que um trabalho com novas metodologias pode ser realizado, buscando ajudar no ensino aprendizagem do conteúdo de Geometria Espacial.

As leis de diretrizes e bases (LDBs) afirmam que a educação é um processo que se dá no cotidiano do discente, dentro e fora do ambiente escolar, através das convivências que fazem parte de sua rotina e, que tem por finalidade a preparação do estudante, de forma que venha a se tornar um cidadão preparado para atuar na sociedade.

O ensino da matemática está inserido no processo de formação do cidadão, e deve evoluir no mesmo ritmo que o mundo a sua volta. Para que o aluno se sinta familiarizado com seu cotidiano dentro do ambiente escolar oferecido nas aulas de matemática. Segundo Nogueira (NOGUEIRA, 2005), atualmente percebe-se que a geometria apresenta muitos problemas em seu ensino e em sua aprendizagem, principalmente no ensino médio, o qual é sustentado pela memorização de fórmulas algébricas, reconhecimento de sólidos geométricos e ainda aplicações, muitas vezes padronizadas e sem significado algum para quem está aprendendo.

A dificuldade para o entendimento de geometria espacial está na maioria das vezes na forma de como o seu conteúdo é aplicado e abordado em sala de aula. Desta maneira, torna-se necessário uma intervenção pedagógica para a facilitação de tal entendimento, visto que a dificuldade pode estar em torno das dimensões informadas e trabalhadas.

Nesse contexto, o uso de um *software* livre e de materiais manipuláveis pode ajudar na concretização e manipulação de objetos tridimensionais. Facilitando, assim, o entendimento de algumas de suas partes, como por exemplo: o vértice, as arestas, as faces, as diagonais das faces, etc.

Dentre os vários softwares livres encontrados na literatura, que podem ser benéficos ao ensino e aprendizagem da geometria espacial (FERREIRA, 2018), destaca-se em especial, o *software* GeoGebra (BIDEL et al, 2015). O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica com livre distribuição que facilita o acesso tanto para os professores quanto para os estudantes de qualquer rede de ensino, sendo ela pública ou privada. Além disso, o seu tutorial encontra-se em uma versão na língua portuguesa. Sem falar que o GeoGebra possui ferramentas para construção de figuras bidimensionais e tridimensionais e ainda diversas funções que auxilia na formação e visualização de objetos.

Por outro lado, a criação de formas tridimensionais (sólidos geométricos) utilizando materiais manipuláveis, tais como, canudos de plástico, palitos de picolé e/ou churrasquinho, borracha de soro, papel, garrafas plásticas, entre outros, vêm somar também para o entendimento do conteúdo de geometria espacial. Uma vez que a construção dos sólidos geométricos sempre nos leva a evidências que podem não ser vistas em outras aplicabilidades. Esse trabalho tem como objetivo principal a utilização de materiais reais e do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem da geometria espacial.

No Capítulo 1, faz-se uma prévia relembrando um pouco da história da geometria plana, trazendo conceitos, formas, assim como suas áreas e volumes, levando em consideração que a geometria espacial tem suas definições todas construídas sobre essas figuras planas. Também discute-se neste capítulo, o surgimento da geometria no Brasil. Bem como, é ministrado o conteúdo de geometria espacial nas escolas brasileiras. E é tratado neste capítulo, o uso de materiais manipulável recicláveis e de custo baixo no auxilio da construção e manipulação dos sólidos.

No Capítulo 2, aborda-se o uso de novas tecnologias para o ensino/aprendizagem da geometria, em especial trata-se do *software* GeoGebra.

Dando sequência, o Capítulo 3 fala da metodologia empregada na produção do trabalho e a seguir, o Capítulo 4 aborda os resultados de nossa metodologia de pesquisa utilizada. Finalmente, o Capítulo 5 tem as considerações finais deste trabalho.

Vale ressaltar que este trabalho foi desenvolvido com parceria de alunos, por tanto, envolve vida humana, passando por submissão ao CEP (Comitê de Ética em Pesquisa), que está acontecendo em carácter retrospectivo e faz parte de um trabalho desenvolvido na disciplina de Fundamentos de Cálculo – MAT 522, no 1º semestre de 2018 sob a orientação do prof. Dr. Geraldo Moreira da Rocha Filho, em que o assunto escolhido para ser tratado pelo mestrando foi o de geometria espacial. E observou-se ao final da disciplina que os resultados obtidos pelos discentes matriculados nela eram de excelente qualidade, a aprovação pelo órgão mencionado consta (*ANEXO A*) neste trabalho.

CAPÍTULO 1 – REVISÃO DE LITERATURA

1.1 GEOMETRIA

Nos tempos antigos, os materiais utilizados para medições, os tipos de compassos e esquadros, os vários Teoremas e Axiomas, tudo isso têm uma grande importância no desenvolvimento da geometria.

Ao longo dos anos, ocorreu um grande crescimento e uma branda evolução dessa área, contando com participações de matemáticos, tais como, Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides, entre outros. Porém, muito antes desses filósofos, fundamentais na expansão da Geometria, o homem vivenciava experiências em seu cotidiano. A plantação, o cultivo, a construção de casas, entre outros, são exemplos da utilização da Geometria nos tempos antigos, faziam ainda raciocínios mentais que futuramente seriam utilizados nas construções geométricas.

O surgimento da Geometria está diretamente relacionado às necessidades do cotidiano. As construções de templos e de residências, as divisões de terras são exemplos das atividades humanas que utilizam a geometria a longos anos.

A Geometria foi estudada inicialmente na Grécia antiga. Ela também pode ser denominada de geometria euclidiana, em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.). Um grande matemático e autor do tratado de Geometria, chamado Elementos, o qual demonstrou propriedades geométricas com o auxílio da lógica, ou seja, apresentou conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas, que se tornaram básicos para o desenvolvimento da geometria**.**

Os Elementos de Euclides (GARBI, 2006) é o livro de matemática mais antigo, ainda em vigor nos dias de hoje, sendo uma obra desenvolvida em diversas edições. E para muitos, é o mais influente livro matemático de todos os tempos. Apresentando definições teóricas baseadas em axiomas, postulados, definições e teoremas que estruturam a construção de variadas formas planas e que por isso os princípios que levaram à elaboração da Geometria Euclidiana eram baseados nos estudos do ponto, da reta e do plano.

Os conceitos primitivos da Geometria são dados pelo modo que compreendemos os dados matemáticos que dão base para a construção de segmentos, formas, planos, entre outros.

A partir dos princípios de Euclides, encontrados em “Elementos de Euclides”, os seguintes conceitos primitivos são definidos:

Ponto – é definido como "o que não tem partes". Isto significa que o que caracteriza um ponto é a sua posição no espaço. É também o elemento com grande importância, pois todos os outros são feitos através de vários pontos.

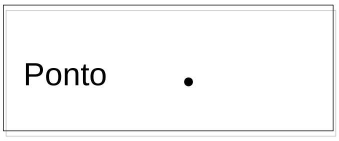


Figura 1: Representação de ponto
Fonte: Próprio Autor

Reta – é formada por pontos subsequências. É uma linha infinita conhecida como unidimensional, ou seja, possui uma única dimensão.

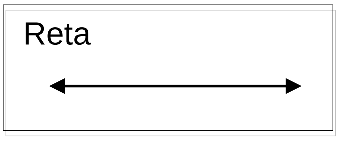


Figura 2: Representação de reta
Fonte: Próprio Autor

Semirreta – sobre uma reta marca-se um ponto que é chamado de origem, assim formam-se duas semirretas direcionadas, ou seja, é um seguimento com origem e tendendo ao infinito.

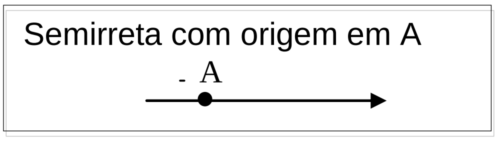


Figura 3: Representação de uma semirreta
Fonte: Próprio Autor

Seguimento de reta – quaisquer dois pontos marcados em uma reta formam sobre ela o que é chamado de segmento de reta, ou seja, é um seguimento demarcado por dois pontos, tendo início e fim.

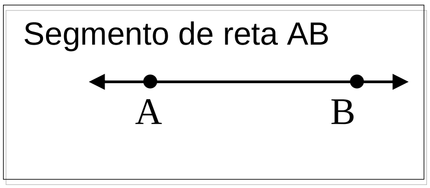


Figura 4: Representação do segmento de reta
Fonte: Próprio Autor

Plano – é o foco de estudo da geometria plana, por isso, recebe esse nome. Corresponde a uma forma bidimensional, ou seja, possui duas dimensões, sendo comprimento e largura. São nessas dimensões que as formas planas passam a existir, com suas peculiaridades e características.

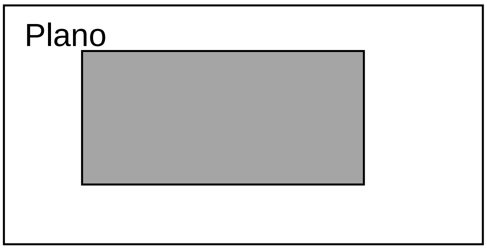


Figura 5: Representação do plano
Fonte: Próprio Autor

Ângulo – é a região de um plano delimitada pelo encontro de dois segmentos retos que possuem um ponto originário em comum, chamado de vértice.

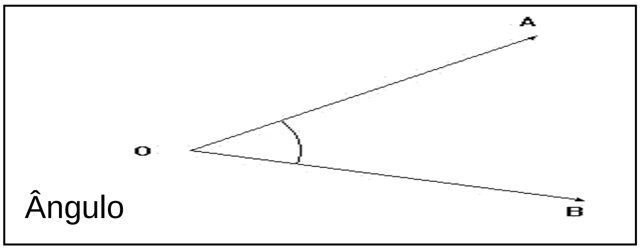


Figura 6: Representação de um ângulo
Fonte: Próprio Autor

Polígonos – são figuras geométricas formadas por três ou mais segmentos de reta, não colineares.

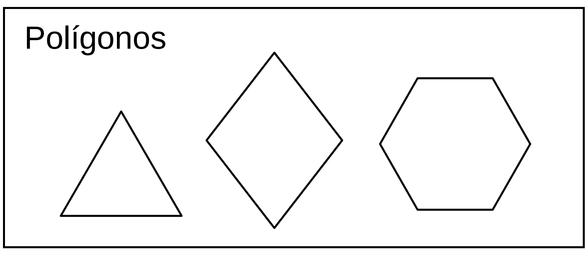


Figura 7: Representação de alguns polígonos.
Fonte: Próprio Autor

Perímetro – é a forma de representar o contorno de uma forma geométrica, ou seja, é a soma de todos os lados dessa forma geométrica. Os perímetros de corpos redondos são chamados de circunferência e recebem uma aplicação diferenciada.

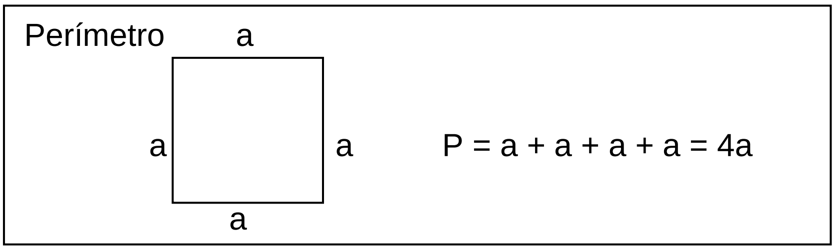


Figura 8: Representação do perímetro de uma figura.
Fonte: Próprio Autor

Área – é a superfície que demarca sobre o plano um lugar ocupado, sendo representado por um espaço bidimensional dado por uma forma geométrica.

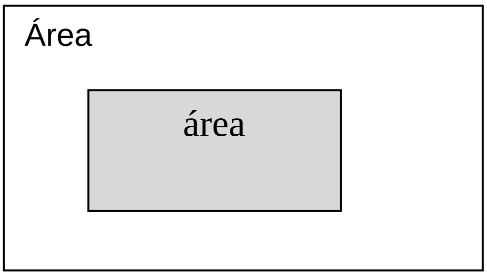


Figura 9: Representação da área de uma figura.
Fonte: Próprio Autor

1.2 GEOMETRIA PLANA

Pitágoras foi um importante matemático e filósofo grego. Conta a história que enquanto ele visitava o Egito, ficou impressionado com as belas pirâmides, e por isso, desenvolveu o tão famoso TEOREMA DE PITÁGORAS. Segundo esse Teorema é possível calcular a terceira medida do lado de um triângulo retângulo, conhecendo os outros dois lados (segmentos). Desta forma, conseguiu-se provar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Dentre as suas enormes contribuições, destaca-se que ele ajudou a construir a base dos conhecimentos matemáticos e geométricos utilizados até hoje.

Na antiguidade, os egípcios em suas construções, traziam plantas regulares na forma retangular, o que obrigava a construção de ângulos retos. Embora, os problemas antigos eram resolvidos de uma forma semelhante aos dias atuais. Utilizando-se de estacas prezas a terra, faziam uso de cordas para traçar semicírculos. Traçando, assim, dois arcos e no encontro entre eles faziam uma nova reta que seria perpendicular a outra já existente entre as estacas, formando desta forma ângulos retos. Em algumas situações em que o ponto do ângulo já estava determinado faziam uso de três cordas com medidas de 3, 4, e 5 unidades respectivamente, formando então um triângulo retângulo no ponto dado, fazendo uso do "Teorema de Pitágoras" e assim demonstrando o ângulo reto que é característica de um triângulo retângulo.

1.2.1 AS FORMAS GEOMÉTRICAS ESTUDADAS NA GEOMETRIA PLANA

As formas geométricas estudadas na geometria plana são as de cunho bidimensionais. Elas apresentam comprimento e largura, não apresentando profundidade. Segundo SILVA, a qualquer figura geométrica plana fechada dá-se o nome de polígono. Entre os infinitos polígonos, destacam-se: o quadrado, o retângulo, o triângulo, o losango, o trapézio e a circunferência.

Quadrado – é um quadrilátero regular, ou seja, apresenta quatro lados iguais e quatro ângulos congruentes (iguais).

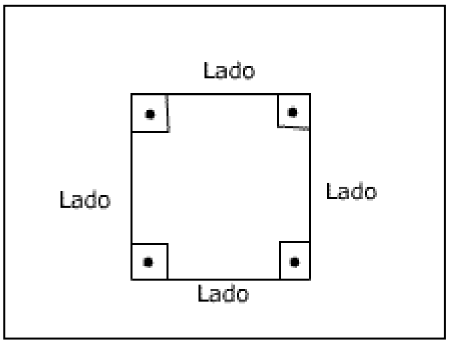


Figura 10: Representação de um quadrado.
Fonte: Próprio Autor

Retângulo – é um quadrilátero que possui dois pares de retas paralelos (chamados de base e altura) e quatro ângulos congruentes. O quadrado apresenta-se como um caso especial.

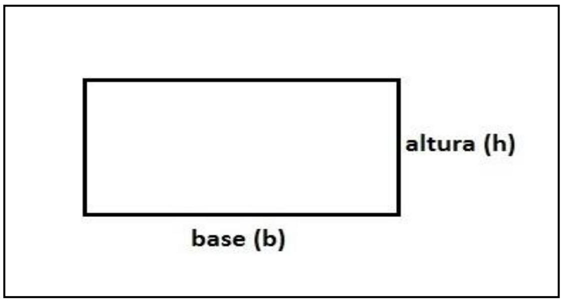


Figura 11: Representação de um retângulo.
Fonte: Próprio Autor

Triângulo – é um polígono regular com três lados, podendo ter todos os lados iguais, dois lados iguais e um lado diferente ou os três lados diferentes, chamados respectivamente de triângulo equilátero, triângulo isósceles e triângulo escaleno. Quando um desses triângulos apresenta um ângulo reto, correspondente a 90º, recebe o nome de triângulo retângulo e este tem uma grande importância dentro da Geometria Plana.

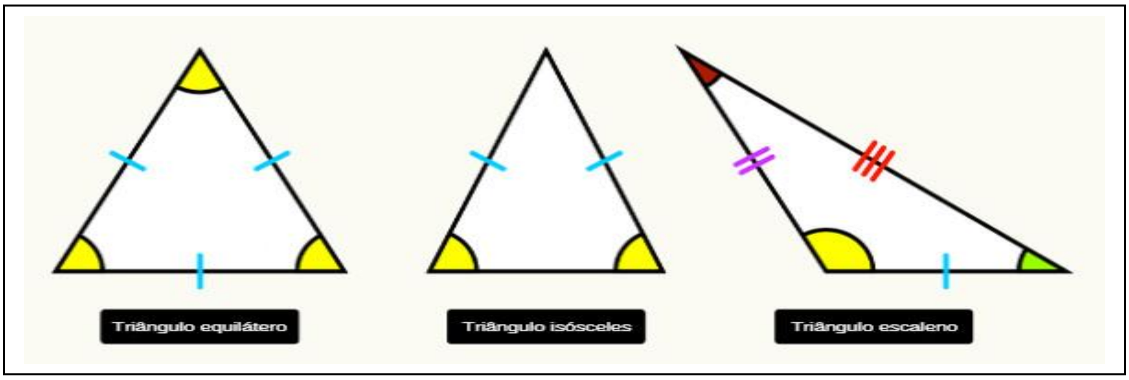


Figura 12: Representação de triângulos
Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/tipos-de-triangulos.html

Losango – é um quadrilátero que apresenta todos os lados iguais, formado de dois pares de retas paralelas e têm dois pares de ângulos congruentes. Sendo dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.

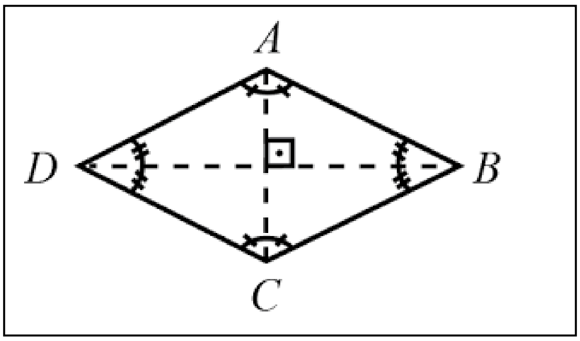


Figura 13: Representação de um losango.
Fonte: infoescola.com

Trapézio – é um quadrilátero que apresenta duas retas paralelas ou dois lados paralelos entre si, que se denominam de bases.

Circunferência e círculo – circunferência é uma linha circular em que todos os pontos pertencentes a ela estão a uma mesma distância de um ponto central, chamado de centro. A distância desse ponto central à linha circular é chamada de raio. À área delimitada pela circunferência dá-se o nome de círculo.

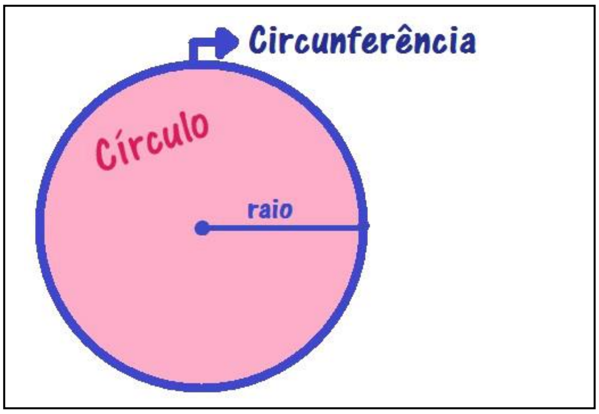


Figura 15: Representação de uma circunferência e de um círculo.
Fonte: brasilescola.uol.com.br

1.2.2 CÁLCULO DO PERÍMETRO E DA ÁREA DAS FORMAS GEOMÉTRICAS

Em uma entrevista à Nova Escola, as autoras Beatriz Vichessi e Luciana Uchoa, dizem que a história não traz um marco para o surgimento das formas geométricas, mesmo por que, tudo tem uma forma, construída pela junção de outras. Sabe-se que um sacerdote observou a construção de um mosaico, utilizando quadradinhos e notou que para o cálculo de quantos usariam, bastava contar os de uma fileira e multiplicar pela quantidade de fileiras existentes, surgindo assim a fórmula da área de um retângulo.

Já para a área de um triângulo, foi percebido que bastaria completar a forma geométrica de maneira a torná-la um quadrado ou retângulo, em seguida dividi-las em quadradinhos iguais, contá-los e por fim, tomar a metade deles. Ao se deparar com formas irregulares, puderam perceber que podiam dividi-las em vários triângulos e procederem como já visto antes, assim calculando qualquer área com lados retos.

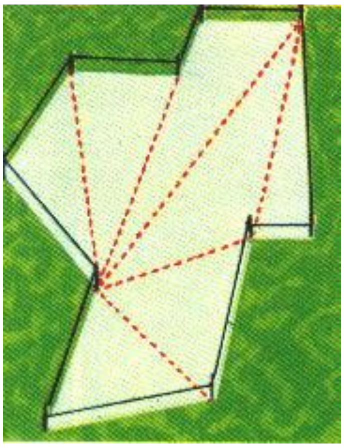


Figura 16: Forma irregular dividida em triângulos.
Fonte: https://www.somatematica.com.br/geometria.php

O grande problema era ao se deparar com formas redondas ou curvas. Os geômetras para demarcar círculos ou corpos redondos faziam uso de cordas. Ao fixar um ponto e girar essa corda presa a esse ponto, forma-se uma circunferência que delimita o círculo, sendo o comprimento da corda conhecida hoje como raio e diretamente relacionado ao comprimento da circunferência. Colocando-a uma sobre a outra, pode-se perceber que vale aproximadamente 6,28 vezes o seu tamanho, ou seja, a circunferência é aproximadamente 6,28 o tamanho da corda (raio), determinando assim o seu comprimento ou perímetro. Quanto à área delimitada, conta à história que Ahmes encontrou uma fórmula de maneira simples e colocou quadrados dentro do círculo, utilizando como lado o próprio comprimento do raio, viu que caberiam mais que três e menos que quatro deles, chegando então a um valor aproximado de 3,14 vezes o lado desse quadrado. Desta forma, foi concluído que para calcular a área de qualquer círculo basta multiplicar 3,14 pela área de um quadrado que tem o seu lado igual ao raio desse círculo.

Por meados dos anos 500 a.C., surgiam as universidades na Grécia. Tales de Mileto e seu discípulo, Pitágoras, transmitiam seus conhecimentos e suas aplicações à Matemática, pois já era grande a busca e a curiosidade sobre a Geometria, as estacas e as cordas davam lugar aos compassos e esquadros. Surgiam novas formas geométricas e seus perímetros e suas áreas eram fáceis de calcular, devido aos instrumentos existentes. Uma dessas figuras recebeu o nome de polígono, do grego *polygon*, que significa muitos ângulos. Estudos não demonstram o surgimento dos sólidos geométricos, eles sempre existiram, pode-se perceber que essas formas são a união de polígonos, como por exemplo, a pirâmide de base quadrada, que nada mais é que uma face quadrada (base) e quatro faces triangulares(laterais), assim como várias outras formas dos tempos antigos.

Dentro dos conceitos geométricos, perímetro e área são instrumentos distintos, utilizados para determinar as medidas de formas geométricas. Portanto, para realizar qualquer um desses cálculos é necessário analisar a forma da figura a ser trabalhada.

Perímetro – é a soma dos valores dos contornos de um polígono, no caso da circunferência que não apresenta lados, utilizamos a equação P = 2πr, onde π é aproximadamente 3,14 e r é o raio.

Área – para esse cálculo podemos utilizar uma equação para cada umas das formas geométricas, já estando elas pré-definidas, são elas:

Equação 1. Quadrado: $A = l.l ou l^2$

Equação 2. Retângulo: $A = b.h$

Equação 3. Triângulo: $A = (b.h)/2$

Equação 4. Losango: $A = (D.d)/2$

Equação 5. Trapézio: $A = [(B+b).h]/2$

Equação 6. Círculo: $A = \pi . r^2$

Onde:

A = área

l = lado

b = base

h = altura

D = Diagonal maior

d = diagonal menor

B = Base maior

r = raio e π = pi, vale aproximadamente 3,14

1.3 GEOMETRIA ESPACIAL

A Geometria Espacial recebeu esse nome por estudar objetos no espaço, ou seja, estuda figuras tridimensionais. De um modo geral, ela também é conhecida por alguns, como geometria no espaço. Segundo EVES(história da matemática), assim como a Geometria Plana, ela parte de princípios primitivos, tendo origem na Grécia antiga e na Mesopotâmia, cerca de 1000 anos a.C.

Uma demonstração de que a Geometria Espacial já era vista e trabalhada nos tempos antigos, são as pirâmides do Egito, com suas formas perfeitas em que os blocos se encaixam simetricamente e parecem ter sido montados milimetricamente.

Os ensinamentos egípcios foram trazidos para o povo grego, porém, não foram seguidos à risca. Os gregos voltaram-se mais ao lado dedutivo e lógico, promovendo o estudo das figuras tridimensionais, sendo figuras regulares ou não. Os conceitos da Geometria Espacial estão interligados aos da Geometria Plana, fazendo uso do estudo de pontos chamados de vértices, retas também conhecidas como arestas e planos denominados de faces. A união desses conceitos básicos, portanto, levaram a criação de figuras básicas no espaço. Dentre elas, destacam-se as formas tridimensionais, conhecidas como poliedros e não poliedros, podendo ainda ser convexos ou não. Entre eles destacam-se: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro, o cilindro, o cone, a esfera, os prismas e as pirâmides com várias características na base, além de serem retos ou oblíquos. Seguem algumas especificidades dessas formas:

Cubo – Esse talvez seja o poliedro mais conhecido, é formado por 8 vértices, 12 arestas e 6 faces quadradas.

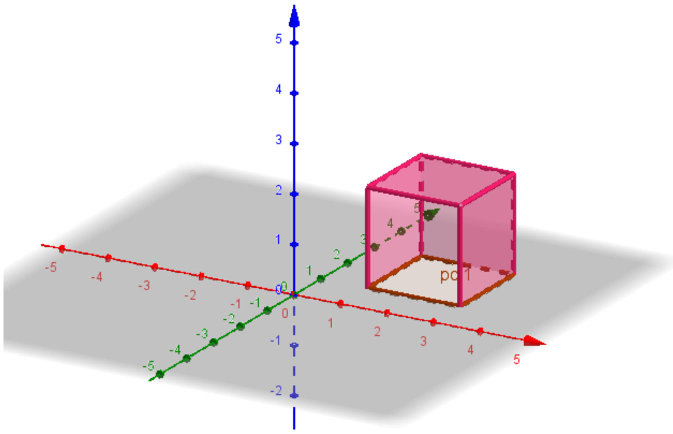


Figura 17: Representação do cubo.
Fonte: Próprio autor

Tetraedro - também chamado por alguns de **pirâmide triangular**, é um poliedro com 4 vértices, 6 arestas e 4 faces.

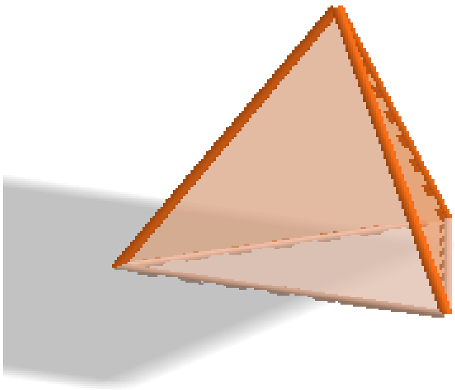


Figura 18: Representação do tetraedro.
Fonte: Próprio autor

Octaedro - também é um poliedro, sendo composto por 6 vértices, 8 faces triangulares e regulares e 12 arestas.

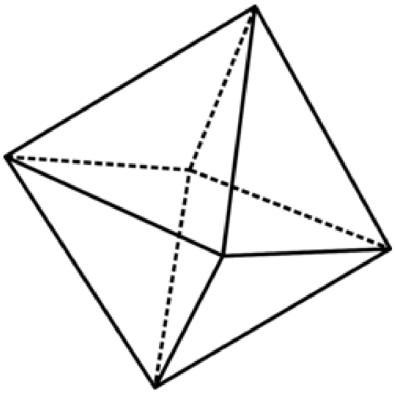


Figura 19: Representação de um octaedro.
Fonte: Próprio autor

Dodecaedro - é um poliedro formado por 20 vértices, 30 arestas e 12 faces pentagonais.

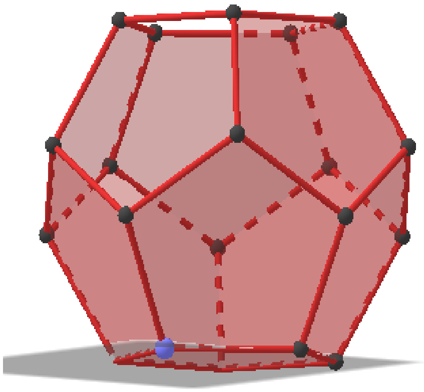


Figura 20: Representação do Dodecaedro.
Fonte: Próprio autor

Icosaedro - é um poliedro convexo, composto por 12 vértices, 20 faces triangulares e 30 arestas.

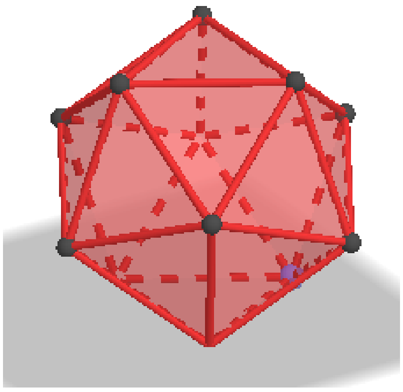


Figura 21: Representação do icosaedro.
Fonte: Próprio autor

Cilindro - é uma figura arredondada, por isso não é um poliedro, sua base é circular. Apresenta o mesmo diâmetro ao longo de todo o comprimento.

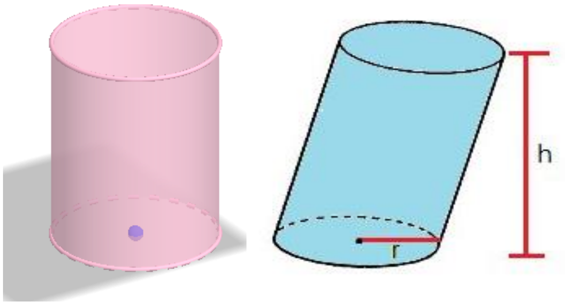


Figura 22: Representação do Cilindro reto e obliquo.
Fonte: Próprio autor

Esfera – é uma forma arredondada e simetricamente proporcional, sendo formada por uma superfície curva contínua. Qualquer ponto da sua extremidade dista do centro uma unidade conhecida como raio.

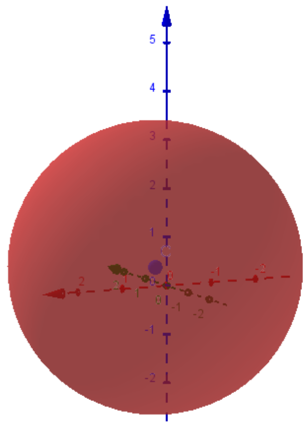


Figura 23: Representação de uma Esfera.
Fonte: Próprio autor

Prisma - é um poliedro com algumas particularidades a mais e pode apresentar diversas faces em sua base, podendo ser elas nos formatos:

- triangular;
- retangular;
- pentagonal;
- hexagonal;
- heptagonal;
- octogonal;
- entre outras.

Podendo ser ainda inclinado, conhecido como prisma oblíquo, fazendo com que em sua lateral se forme paralelogramos, ou reto, chamado de prisma reto, sendo suas laterais formadas por retângulos. Os prismas têm a mesma característica, podendo mudar apenas as suas bases.

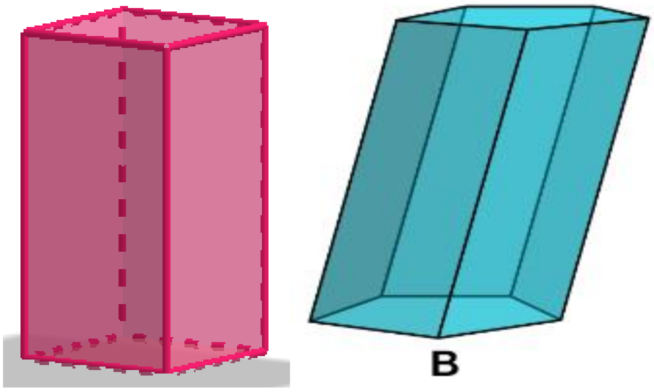


Figura 24: Representação de um prisma reto e obliquo.
Fonte: Próprio autor

Pirâmide - é uma figura que também tem particularidades. É um poliedro composto por uma base que tem as mesmas características das pirâmides e um vértice que une todas as suas laterais que sempre serão triangulares.

A altura de uma pirâmide é a distância entre o plano onde encontra-se a sua base e o vértice não contido no plano. Além disso, também pode ser classificada em obliqua ou reta, quando é inclinada ou não.

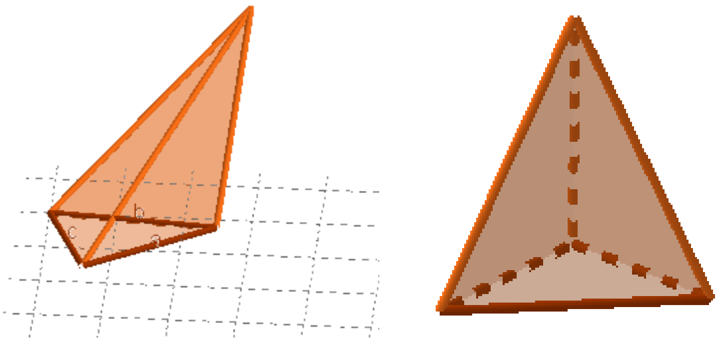


Figura 25: Representação de uma Pirâmide reta e obliqua
Fonte: Próprio autor

1.3.1 CÁLCULO DA ÁREA DE ALGUNS SÓLIDOS

As figuras geométricas podem ser caracterizadas em plana ou espacial. Para representar uma figura plana é necessário apenas um plano. Por outro lado, a construção dos sólidos é impossível se tratando de um único plano, pois são formas tridimensionais. Portanto, relacionar a diferença entre as formas plana e espacial, está ligada diretamente em suas dimensões. Segundo Sabba (SABBA, 2003), “O espaço a nossa volta está repleto de sólidos geométricos. É muito mais fácil encontrar um sólido geométrico do que uma figura plana na realidade que nos cerca”.

Porém, a maneira mais convencional e dinâmica para o cálculo da área de um sólido geométrico é a sua planificação, ou seja, observar que as faces dessas formas geométricas são apenas figuras planas e com isso o cálculo de sua área será dado pela soma de todas as áreas das figuras que formam o sólido.

Tomando alguns desses sólidos, pode-se observar a sua forma tridimensional, sua planificação e assim a dedução para o cálculo da sua área, para tanto seguem os cálculos da área para alguns dos sólidos regulares e para alguns dos sólidos redondos.

Cubo

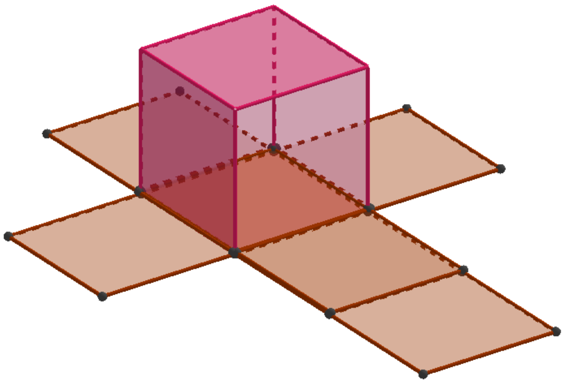


Figura 26: O Cubo e sua planificação.
Fonte: Próprio autor.

Observe que a planificação do cubo é dada por seis quadrados, como visto antes, a área de um quadrado foi definida pela Equação 1(página 20). Portanto, pode-se definir a área de um cubo como $6.l^2$, pois, são 6 quadrados utilizados na formação de um cubo.

Prisma Retangular (Paralelepípedo)

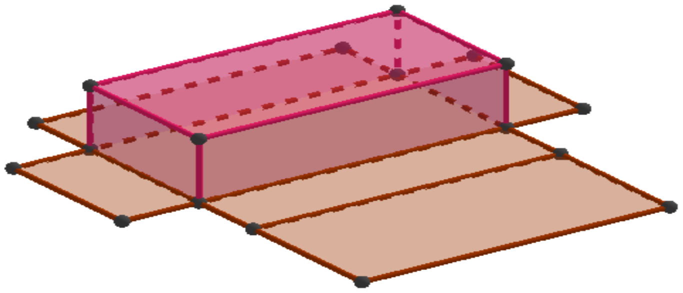


Figura 27: O Prisma retangular e sua planificação.
Fonte: Próprio autor.

A planificação desse sólido é dada por pares de retângulos, podendo ser todos iguais (cubo) ou não, sendo formado por comprimento, largura e altura distintos. Temos a sua área dada pela soma desses retângulos, obedecendo a Equação 2 (página 20), ou seja, pode-se definir a área desse prisma como $2(cl+ca+la)$.

Prisma Triangular Regular

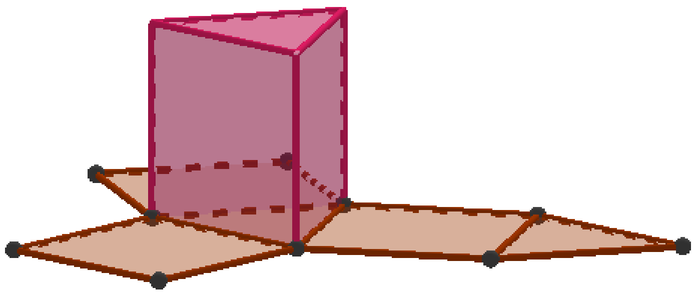


Figura 28: Prisma triangular e sua planificação.
Fonte: Próprio autor.

Como se pode observar, essa planificação é dada por 3 retângulos e 2 triângulos equiláteros. Tomando o lado do triângulo como **a** e o comprimento do retângulo como **l**, utilizando a razão trigonométrica, temos a altura do triângulo em função de **a** igual a $a\sqrt{3}/2$. Logo a área é determinada por $a^2\sqrt{3}/4$ e a área de cada retângulo foi definida anteriormente, concluindo assim que a área desse prisma pode ser dada por $2(a^2\sqrt{3}/4)+6(a.l)=a^2\sqrt{3}/2+6al$.

Prisma Hexagonal Regular

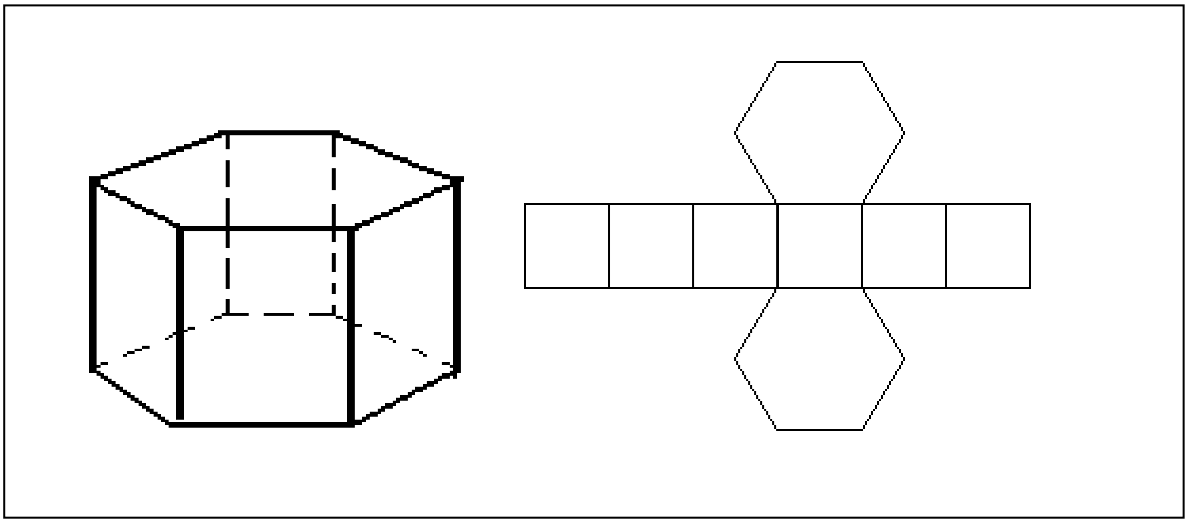


Figura 29: Prisma Hexagonal e sua planificação.
Fonte: Próprio autor.

A planificação desse sólido é dada pela formação de 6 retângulos iguais e 2 hexágonos. Portanto a sua área será dada pela soma dessas formas planas. Tomando a aresta da base e a lateral como **a** e **l** respectivamente, temos a área do retângulo já visto e a do hexágono será subdividida em 6 triângulos equiláteros e portanto, definida como $6(a^2\sqrt{3}/4)=3a^2\sqrt{3}/2$, portanto a área desse prisma será estabelecido por $6(a.l)+2.(3a^2\sqrt{3}/2)=6al+3a^2\sqrt{3}=a(6l+3a\sqrt{3})$.

Assim podemos definir que a área de todos os prismas será dada pela soma da área da base mais a área lateral.

Pirâmides Regulares

A planificação das pirâmides sempre terá a forma de triângulos em seus lados laterais e a base variará conforme o nome da mesma. A base que caracteriza a pirâmide, entre elas, as mais vistas e trabalhadas são: Triangular (Tetraedro), Quadrada e a Hexagonal.

A área de uma pirâmide regular é dada pela soma dos seus lados laterais (triângulos) e a sua base. Podemos defini-la assim: $A_P = A_B + A_L$, onde **A_P** é a área da pirâmide, **A_B** é a área da base e **A_L** é a soma dos triângulos que formam a superfície lateral da Pirâmide.

Temos a planificação de algumas dessas pirâmides mostradas abaixo:

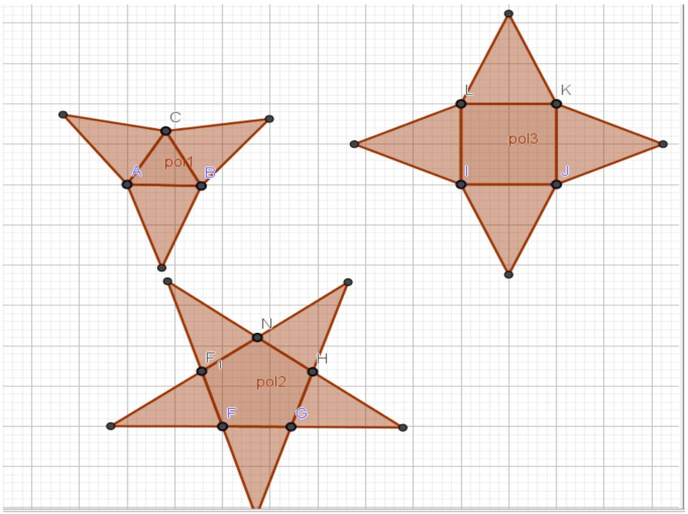


Figura 30: Representação da planificação de pirâmides.
Fonte: próprio autor

Um exemplo do cálculo da área de uma pirâmide: Uma pirâmide quadrada tem aresta da base medindo 18 cm e altura12 cm. Calcule a área dessa pirâmide.

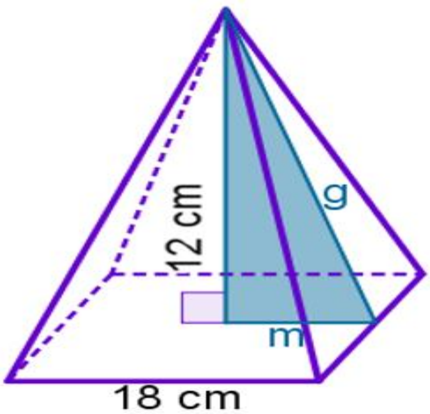


Figura 31: Pirâmide de base quadrada.
Fonte: próprio autor

Observando a figura, pode-se notar que a área da base seria simples de calcular, pois representa um quadrado, ou seja, $AB = 18^2 = 324cm^2$, porém a área lateral, representada por triângulos, requer o cálculo de sua área. Para tanto trabalha-se com a equação 3 (página 20), onde a base é visível. Por ser o lado do quadrado, porém a sua altura será encontrada utilizando o Teorema de Pitágoras, tomando **g** como a altura desejada, **m** como a metade do quadrado e 12cm a altura da pirâmide, tem-se:

$$g^2 = 9^2 + 12^2$$
$$g^2 = 81 + 144$$
$$g^2 = 225$$
$$g = \sqrt{225}$$
$$g = 15cm$$

Encontrando assim a altura da face lateral, portanto a área lateral é dada por $A_L = 4(18.15/2) = 540cm^2$ e por fim $A_P = 324 + 540 = 864cm^2$.

Fica óbvio que cada caso de pirâmide terá a sua particularidade, pois a mudança da base terá uma disposição diferenciada e consequentemente o cálculo para determinar a altura da face lateral será outro processo.

CORPOS REDONDOS

Cilindro Reto

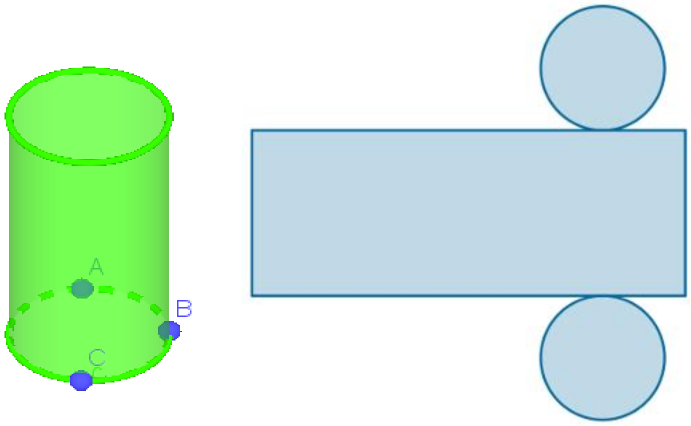


Figura 32: Representação do cilindro e sua planificação.
Fonte: Próprio autor

Como se pode observar na figura dada, a planificação do cilindro é apresentada por duas circunferências e um retângulo. Tomando o raio dessa circunferência como **R**, pode-se dizer que o comprimento do retângulo é igual ao comprimento da circunferência. Portanto $2\pi R$ e a sua altura é dada pela mesma do cilindro. Então a área do cilindro é dada por duas vezes a área da circunferência mais a área do retângulo, portanto:

$A_C = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h+R)$, onde **$A_C$** = área do cilindro, π = **pi** ≈ 3,14 e **R** = raio.

Cone reto

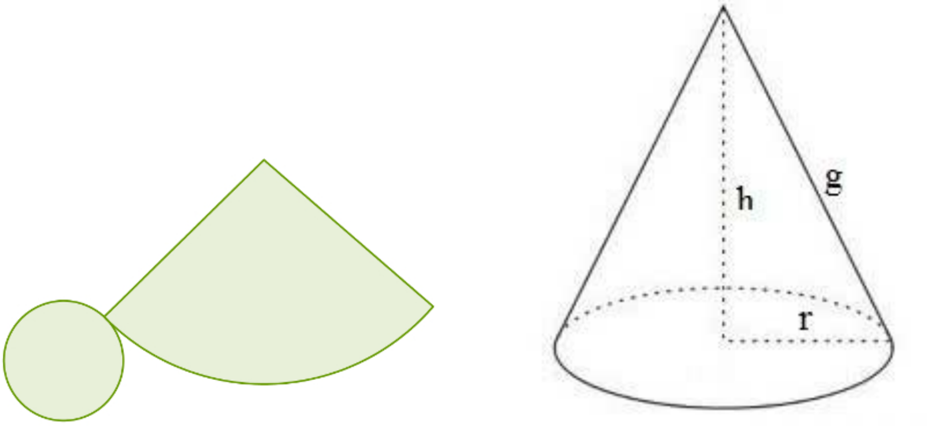


Figura 33: Cone reto e sua planificação.
Fonte: Próprio autor.

A planificação de um cone é dada por uma circunferência de raio **r** e um setor circular que tem o comprimento igual ao da circunferência. Para o cálculo da sua área deve-se calcular a área da base, dada por $A_B = \pi r^2$ mais a área lateral. Porém, para o cálculo dessa área lateral, faz-se uso do Teorema de Pitágoras para determinar o valor da geratriz, que é o segmento que une o vértice a qualquer ponto da circunferência. Portanto temos: $\mathbf{g}^2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{h}^2$, onde **g** = geratriz, **r** = raio e **h** = altura do cone. Determinado o valor de **g**, pode-se calcular a área lateral dada por $\mathbf{A_l} = \pi.\mathbf{r}.\mathbf{g}$, consequentemente a área total dada por $\mathbf{A_t} = \pi\mathbf{r}^2 + \pi.\mathbf{r}.\mathbf{g} = \pi.\mathbf{r}(\mathbf{g} + \mathbf{r})$.

Esfera

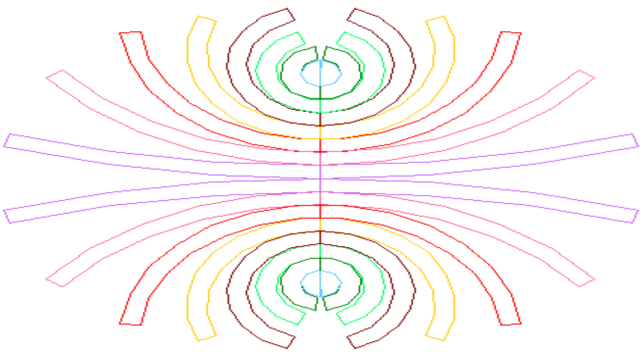


Figura 34: Representação da Planificação da Esfera
Fonte: https://mat.uel.br

Esta é uma tentativa de planificar uma esfera. Diversos autores tentam de várias maneiras uma forma dinâmica e ilustrativa para tal planificação. A planificação da esfera está entre as mais difíceis de ser feita. Isso se não for a mais difícil, por sua forma redonda e a dificuldade de se utilizar formas planas. Alguns autores utilizam de várias circunferências para representá-la. Porém, tais circunferências não possuiriam altura. Logo é apenas uma maneira abstrata de tentar tal representação.

Em uma definição direta e simples, pode-se dizer que a área de uma esfera de raio **R** é igual a 4 áreas da sua circunferência central, como á área dessa forma plana é dada por πR^2, deduzimos que a área **A** de uma Esfera é definida por $4\pi R^2$. Para a apresentação do Volume desse sólido, vários autores fizeram interpretações e constatações, alguns utilizam cilindros, prismas, ou outros sólidos para tal constatação, nesse trabalho, faz-se uso do princípio de Cavalieri, que diz "Dados dois sólidos incluídos entre um par de planos paralelos, se todo plano paralelo ao par de planos e que intersecta os sólidos o faz em seções cujas áreas estão sempre na mesma razão, então os volumes dos sólidos também estão nessa mesma razão."

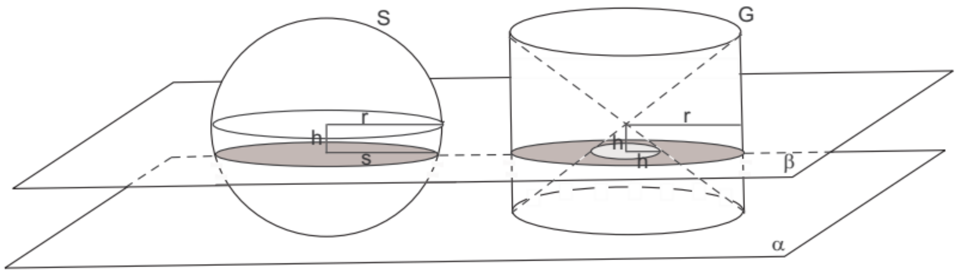


Figura 35: Demonstração do Volume pelo Princípio de Cavalieri.
Fonte: http://matmedio2-thiagokyamamoto.blogspot.com

Consideremos uma esfera de centro qualquer e raio **r**. Construindo um cilindro, apoiado num mesmo plano alfa tangente à superfície esférica, cujo seu raio da base é **r** e a altura é 2**r**, e construindo também dois cones cujas bases são as do cilindro e o vértice comum situado no centro de simetria do cilindro. Prova-se então que o volume da esfera é a diferença dos volumes do cilindro e dos volumes dos dois cones.

Veja:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2.V_{cone}$$

$$V_{esfera} = \pi.r^2h - 2\frac{\pi.r^2h'}{3}$$

$$V_{esfera} = \pi.r^2(2r) - 2\frac{\pi.r^2(r)}{3}$$

$$V_{esfera} = 2\pi.r^3 - \frac{2\pi.r^3}{3} = \frac{6\pi.r^3 - 2\pi.r^3}{3} = \frac{4\pi.r^3}{3}$$

Figura 36: Equação do volume da esfera
Fonte: http://matmedio2-thiagokyamamoto.blogspot.com

Portanto, fica definido que a área e o volume de uma esfera, de raio igual a **R**, valem respectivamente $4\pi R^2$ e $4/3\pi R^2$.

1.4 O SURGIMETO DA GEOMETRIA NO BRASIL

Ainda no Brasil colônia, onde o militarismo prevalecia, a coroa portuguesa via a necessidade de defender seu território e com isso precisava instruir seus militares. Então, Segundo Pirassinunga (1958), José Fernandes Pinto Alpoim, um militar português, criou as primeiras obras que envolviam conhecimentos de aritmética e geometria. Após a Independência do Brasil houve a necessidade de criar universidades no país. Porém, ainda voltadas para a área de cursos jurídicos. As primeiras tentativas de um colégio secundário aconteceram com o surgimento do colégio Pedro II. Entretanto, não foi bem sucedida. O interesse era voltado mais para cursos que ajudavam a passar nos exames de ingresso aos cursos superiores. Assim, os conteúdos dos exames se tornaram ponto inicial como referência curricular. Segundo VALENTE, apenas por volta do ano de 1930, que surgiram as primeiras faculdades de Filosofia, com o objetivo de formar professores. Assim, foi implantado o ensino seriado obrigatório e com isso surgiram então as disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria, gerando então a conhecida Matemática. Porém elas foram apenas unidas, não fundidas. Ou seja, as matérias continuavam suas trajetórias de ensinamento, separadamente.

Finalmente em meados da década de 1960 surge a Matemática Moderna. Com isso, a Matemática passou a se basear nos fundamentos dos conjuntos e da Álgebra.

1.5 O CONTEÚDO DE GEOMETRIA ESPACIAL VISTO NAS ESCOLAS

Atualmente, percebe-se que a Geometria vem sendo aplicada de uma forma não muito ilustrativa. Na grande maioria, o estudo desse conteúdo é feito de uma forma tradicional e ultrapassada. Camila Nicola Boeri e Márcio Tadeu Vione, no livro Abordagem em Educação Matemática, 2009, já trazia de uma forma ilustrativa a necessidade de outros mecanismos, ou seja, formas diferentes da simples utilização do livro didático e o quadro negro/branco. Portanto, isso, não pode ser mais a única forma para o ensino de tal conteúdo.

Nas séries iniciais, o estudante apresenta dificuldades que podem ser prejudiciais ao andamento do seu aprendizado futuro. Um estudante que não compreendeu bem os passos ou a formação das figuras planas, com certeza terá uma grande dificuldade com a Geometria Espacial.

O conteúdo de Geometria que é ensinado aos estudantes, deve ser montado e apresentado desde as suas séries iniciais. Cabendo aos professores de Matemática fazer a apresentação deste tão importante conteúdo, de forma clara e obedecendo a ordem cronológica das séries trabalhadas. Os conteúdos de Geometria devem ser introduzidos de forma a serem relacionados ao dia a dia dos estudantes, tentando mostrar uma forma prazerosa para o aprendizado do mesmo.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL 1998), os conteúdos de Matemática imprescindíveis para o ensino médio são formados por números e álgebra, funções, grandezas e medidas, tratamentos de informações e Geometria. Entre eles, escolheu-se a Geometria por ser um campo bem vasto e cheio de possibilidades de discussões e interpretações, baseado no cotidiano dos discentes e pensando no desenvolvimento do raciocínio lógico para diversas situações/problemas vivenciadas a cada instante. Além da grande utilidade para aplicar conhecimentos matemáticos adquiridos até então.

Além disso, a Geometria apresenta um lugar de evidências na formação das formas existentes, pois traz com grande ênfase as situações do nosso mundo real. Assim sendo, atividades relacionadas à Geometria podem proporcionar o senso crítico e autônomo, já que envolve análise e interpretação de fatos e contextos.

Nesse sentido, fica claro que o objetivo do professor é resgatar o ensino da geometria como uma área de grande importância e isso tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem a esse estudo, visando facilitar e superar as dificuldades encontradas ao trabalharem tal disciplina.

1.6 O USO DE MATERIAIS CONCRETOS

Segundo Fainguelernt (FAINGUELERNT, 1999), o estudo da geometria é usado como um instrumento para interagir, envolver e descrever todo o espaço em que vivemos, podendo dizer que é uma das partes mais concreta e real dentre os estudos da matemática, permitindo o uso do raciocínio lógico e intuitivo para solucionar situações problemas encontradas.

O estudo da Geometria feito com materiais concretos manuseáveis, como palitos de picolé ou churrasquinho, massa de modelar, canudinhos, goma de mascar, cola quente, entre outros, ajudam na construção de formas planas, tais como na construção de sólidos, colaborando com o aprendizado dos cálculos de áreas e volumes. Estes materiais citados apresentam poucos gastos, deixando a aula mais dinâmica. Segundo Kaleff (KALEFF, 2006):

> “tem se observado que alguns professores estranham a introdução deste tipo de construção e representação de poliedros por meio das arestas, pelo fato de tal representação não privilegiar o aparecimento do interior das faces dos sólidos, não dando a ideia real das mesmas. Todavia, a experiência tem revelado que a construção dos esqueletos não só é muito indicada para as primeiras séries escolares, como para o ensino médio, pois o aluno pode “ver” a parte interna da figura formada, enxergando por entre as arestas. Por outro lado, esse material também proporciona ao aluno a possibilidade de construir concretamente diversos elementos geométricos tais como: diagonais, alturas, seções planas, etc.”

É evidente que a observação e manipulação dos sólidos ajudam no aprendizado do conteúdo de Geometria Espacial. Materiais como caixa de presente sextavada, lata de leite ninho, a casquinha do sorvete, caixa de sapato, são elementos que podem ser utilizados para exemplificar os tópicos a serem trabalhados posteriormente, tais como, vértice, aresta lateral, altura, diagonal da face, raio, geratriz, entre outros.

CAPÍTULO 2 - NOVAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Enquanto alguns professores continuam utilizando formas ultrapassadas de trabalho, seus alunos acessam a internet, com navegação e com aparelhos cada vez mais rápidos e sofisticados. A aula tradicional não deve ser abandonada, porém, os dias atuais pedem uma junção dessas aulas com instrumentos tecnológicos, pois a crescente utilização de computadores, celulares e programas facilitadores não podem ser tratadas como um simples acontecimento.

Moran (MORAN - 1994) afirma que cada tecnologia modifica algumas grandezas da inter-relação com o mundo, da percepção da realidade, da interação com o tempo e o espaço. A tecnologia muda os meios de comunicação de massa e, paralelamente os meios de ensino, não somente dentro da sala de aula.

Em setembro de 2001, após realização de uma Conferência Nacional de Ciência, Tecnologia e Inovação realizada no Brasil, foi publicado que:

> “A capacidade de aprender e de desenvolver novas habilidades é fundamental no novo cenário de difusão e uso intenso das tecnologias de informação e comunicação. Nesse ambiente de mudança acelerada, a adoção de novos conceitos para a educação com atividade permanente na vida das pessoas é uma exigência a ser considerada. (MINISTÉRIIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 2002, p.68).”

Vivenciando esse novo cenário na educação, é importante ressaltar a preocupação em fazer uma reforma nessa estrutura educacional, pensando em reestruturar os conteúdos curriculares e a metodologia docente, tentando valorizar a implantação dessas novas tecnologias.

O estudo da Matemática previsto nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) não pode ficar de fora desse avanço tecnológico, não pode mais ser transmitido apenas na sua forma tradicional, deixando que o mais importante seja apenas a repetição de exercícios e a memorização de equações para o aprendizado de determinados conteúdos.

Entre os vários softwares livres e gratuitos à disposição, que é muito utilizado na comunidade científica e que pode ser utilizado como uma ferramenta para o ensino/aprendizagem de Matemática, e em especial o de Geometria de um modo geral, destaca-se o GeoGebra.

O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra é um software que foi desenvolvido nos Estados Unidos pelo matemático Markus Hohenwarter. Ele é um programa gratuito de Matemática Dinâmica para ser utilizado em ambiente de sala de aula. E recebeu muitos prêmios internacionais incluindo o prêmio de melhor software educacional alemão e europeu.

O software GeoGebra é facilmente encontrado e pode ser baixado gratuitamente no link: https://www.geogebra.org/download, contando ainda com as opções para instalação em celulares, tablets e computadores. Segue apresentado a seguir, um pouco da interface desse programa disponível para computadores.

Após a instalação do programa, pode-se iniciar clicando sobre o ícone descrito por GeoGebra 5.0 encontrado na área de trabalho do computador.

Logo na tela inicial, na parte superior irá aparecer uma barra de menu:

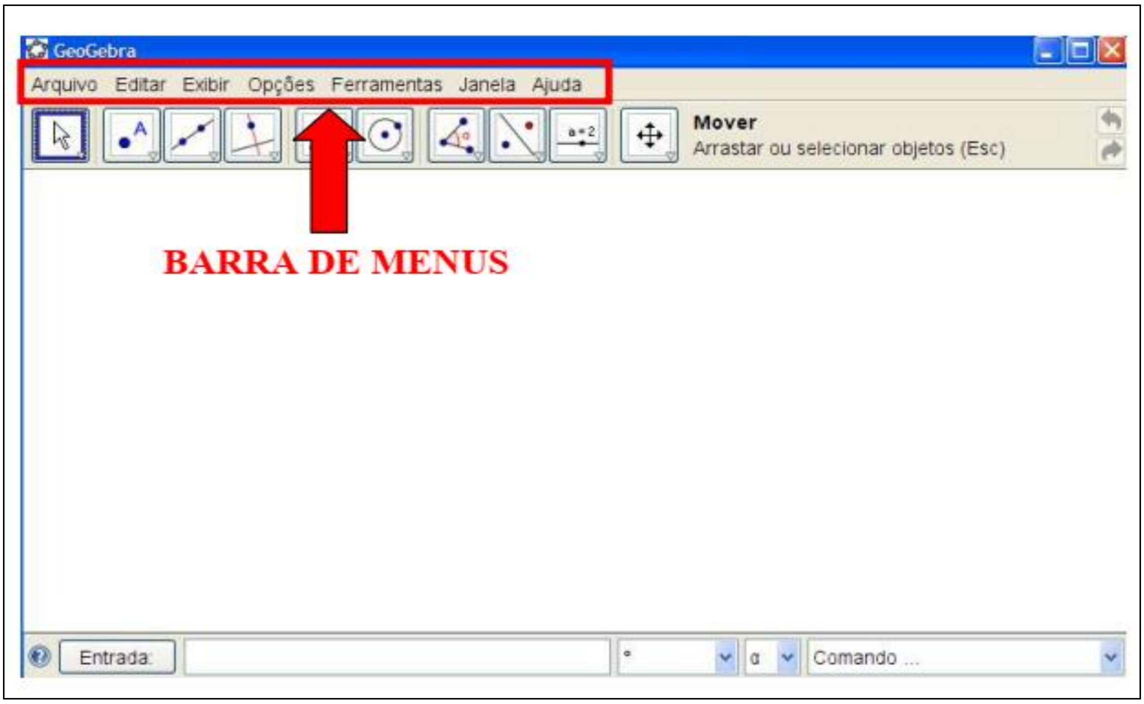


Figura 37: Barra de menus.
http://www.cpscetec.com.br

Na apresentação de cada um desses itens tem-se:

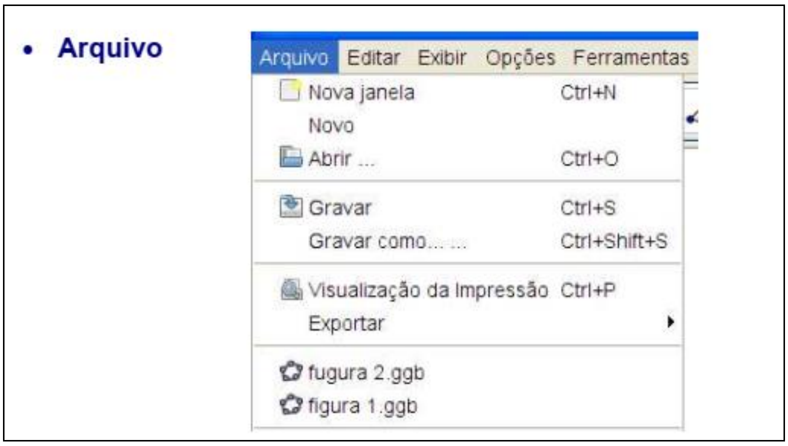


Figura 38: Apresentando o item Arquivo.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

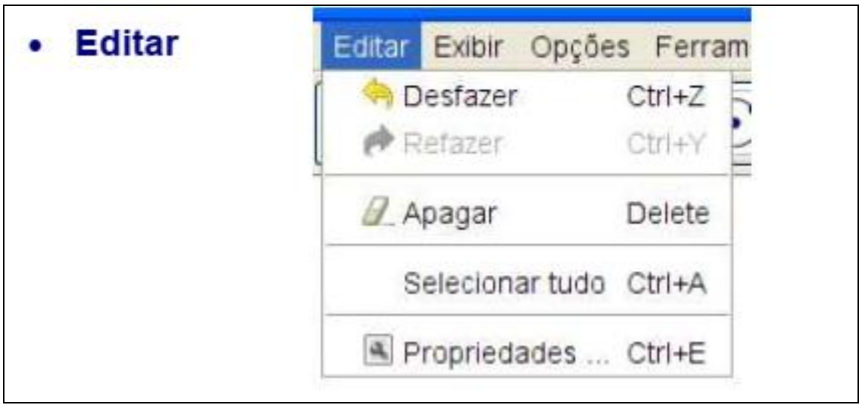


Figura 39: Apresentando o item Editar.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

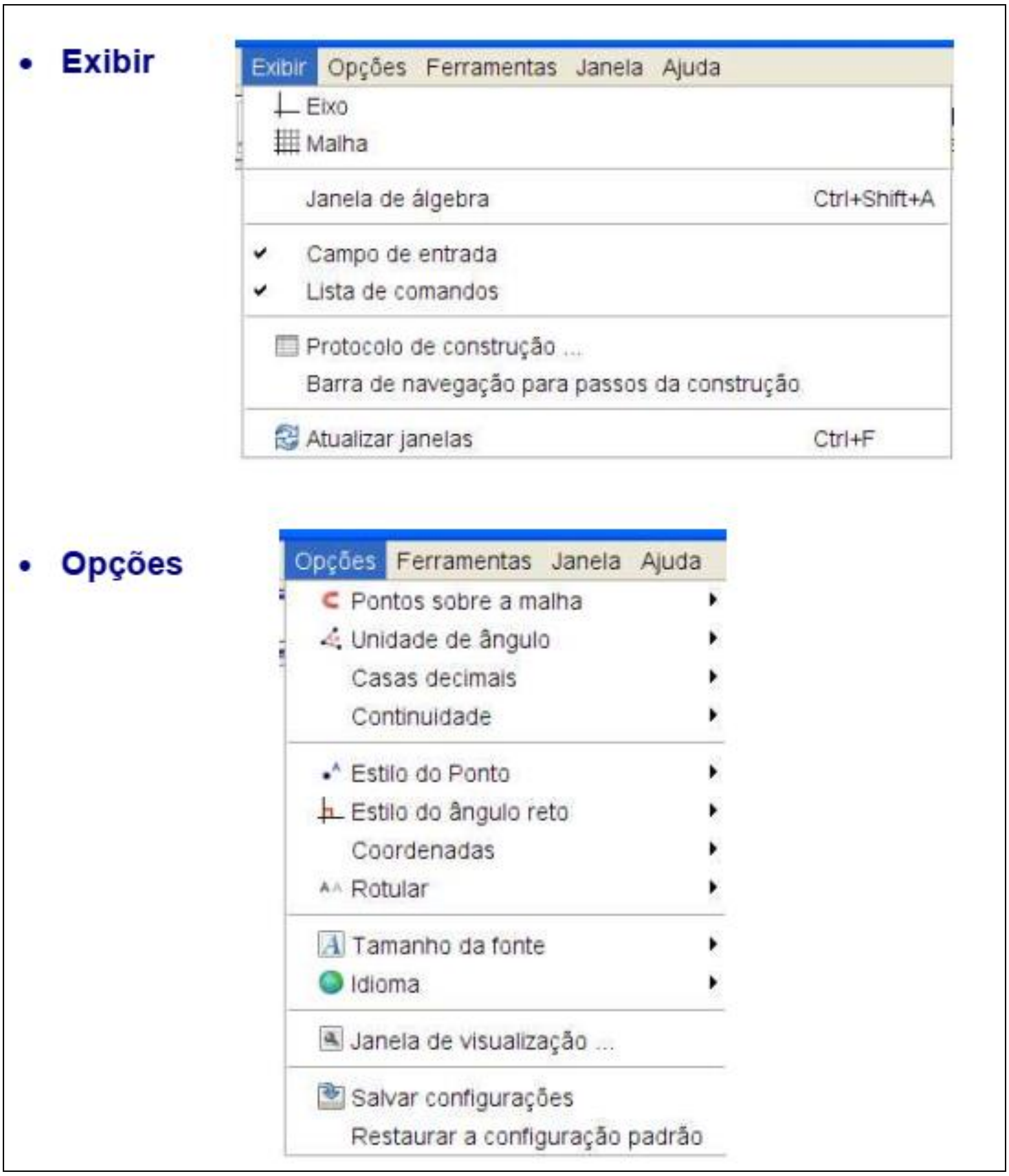


Figura 40: Apresentando os itens Exibir e Opções
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

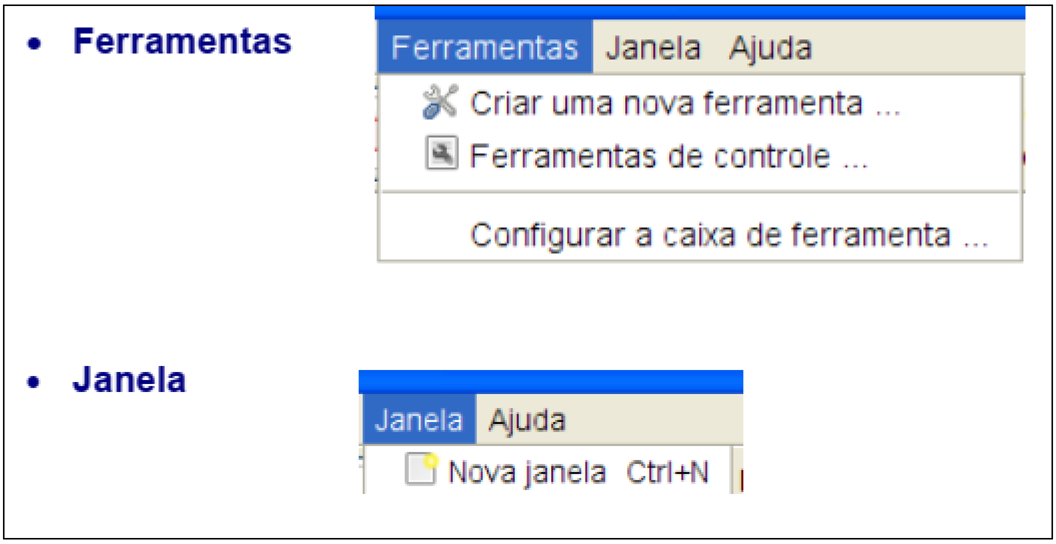


Figura 41: Apresentando os itens Ferramentas e Janela
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

Figura 42: Apresentando o item Ajuda.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

Abaixo dessa Barra de Menu, temos a Barra de Ferramentas, disponibilizados em 10 comandos:

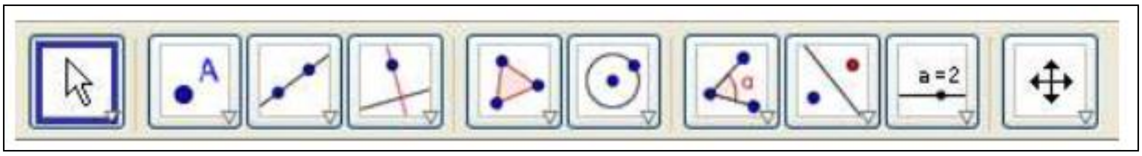


Figura 43: Apresentando a Barra de Ferramentas.
http://www.cpscetec.com.br

Abaixo da Janela de Ferramentas, é apresentado a Janela Algébrica e a Janela Geométrica, seguido logo abaixo pelo campo de Entrada:

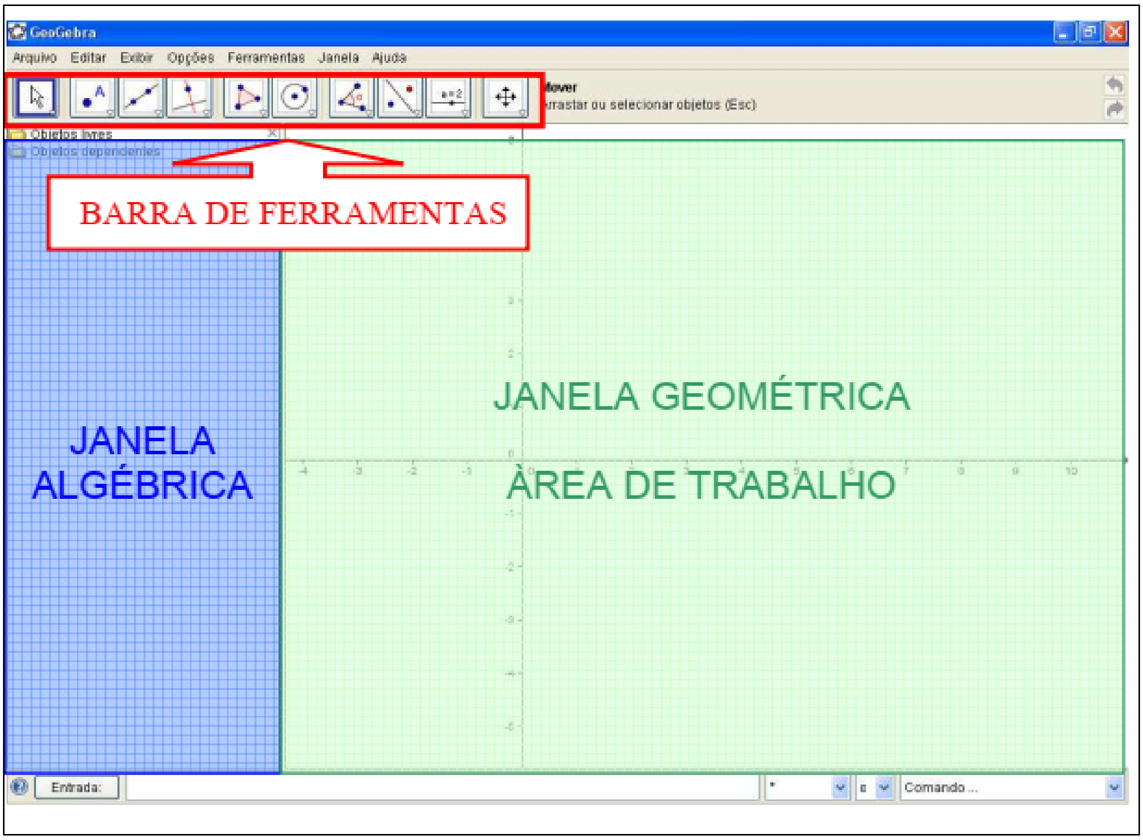


Figura 44: Apresentando as Janelas Algébrica e Geométrica
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

Tanto a Janela Algébrica como Geométrica, podem ter sua espessura aumentada ou diminuída quando quiser, podendo também fechá-las ou abri-las, e ainda colocar ou tirar os eixos e a malha na Janela Geométrica:

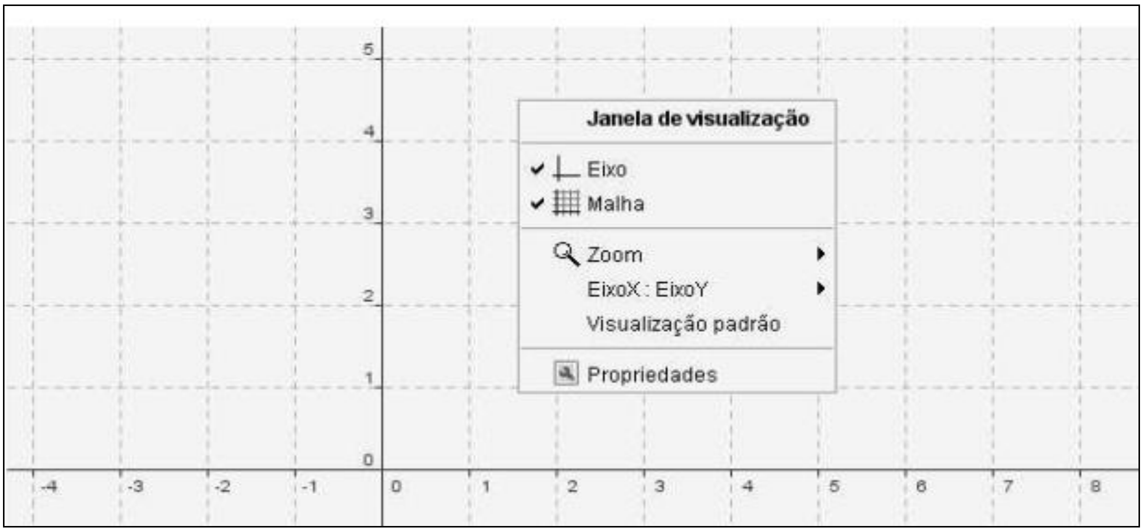


Figura 45: Apresentando os itens de Eixo e Malha.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

No lado direito do canto superior, existem dois comandos que podem desfazer e refazer o último passo construído no GeoGebra:

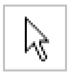
Figura 46: Apresentando o comando de desfazer ou refazer.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

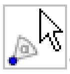
Vê-se agora a importância e o passo a passo de cada comando dado na Barra de Ferramentas:

Figura 47: Apresentando o comando 1 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

Clicando na seta vermelha de cada item, abrirá uma nova aba com outros comandos, como se vê abaixo.

Com esse comando, consegue-se mover um ponto ou girar um objeto selecionado em torno de um ponto fixo.

**Mover –** Selecionando esse comando e pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto é possível arrastá-lo por toda a janela geométrica.

**Girar em torno de um ponto fixo –** Pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto é possível girar esse objeto em torno de um ponto fixo.

Clicando na seta vermelha do segundo botão, tem-se:

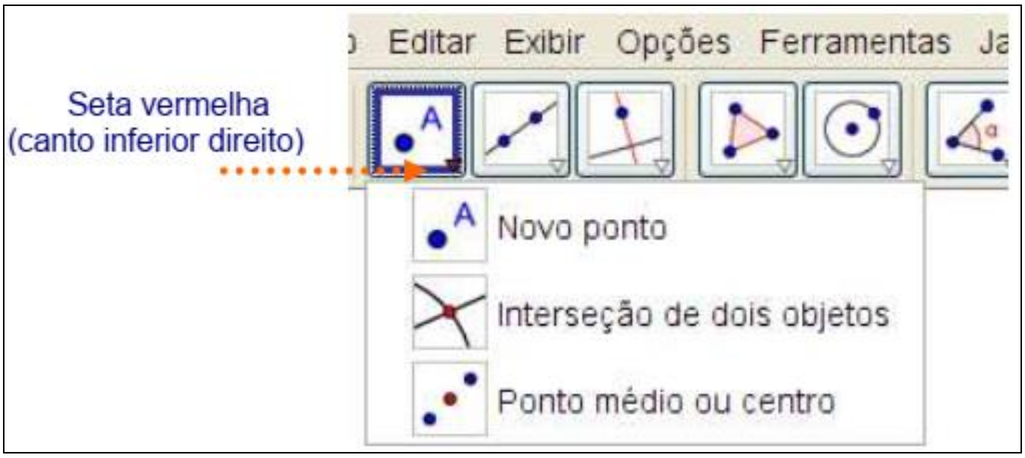
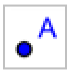
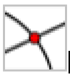
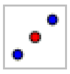


Figura 48: Apresentando o comando 2 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

**Novo Ponto –** Selecionando este item e clicando na janela geométrica com o botão esquerdo do mouse, cria-se um novo ponto.

**Interseção de dois objetos –** Esse ponto pode ser criado selecionando os objetos, dessa forma todas as interseções são marcadas.

**Ponto médio ou centro –** Clicando com o botão esquerdo do mouse, em dois pontos, obtém-se o ponto médio entre eles; ou em um segmento para obter seu ponto médio.

Já no terceiro comando tem-se:

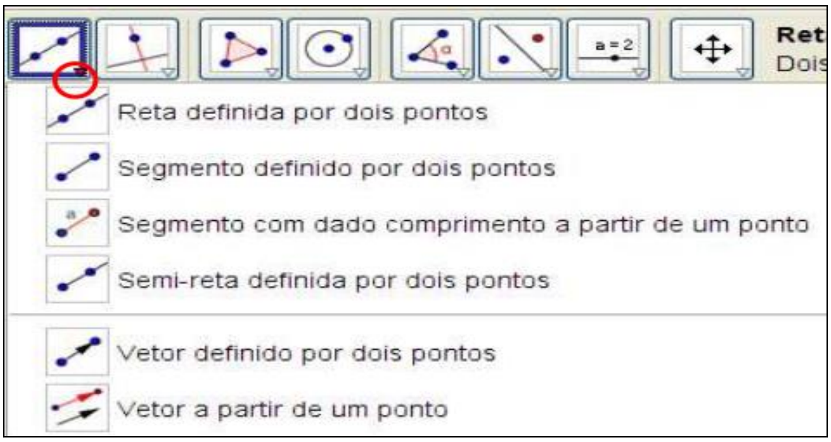
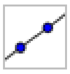
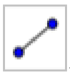
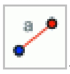
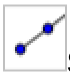


Figura 49: Apresentando o comando 3 da barra de ferramentas
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

**Reta definida por dois pontos –** Marcando-se dois pontos, traça-se a reta definida por eles.

**Segmento definido por dois pontos –** Marcando-se dois pontos, determinam-se as extremidades do segmento a ser traçado.

**Segmento com dado comprimento a partir de um ponto –** Marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para o mesmo, em uma janela que se abre automaticamente.

**Semirreta definida por dois pontos –** Traça-se uma semirreta a partir do primeiro ponto marcado contendo o segundo ponto.

Passando ao quarto comando da barra de ferramentas, tem-se:

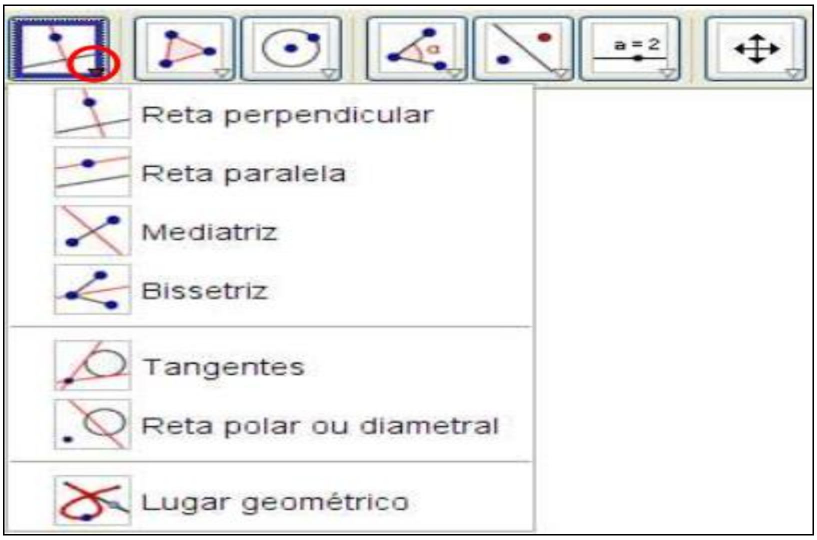
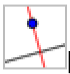
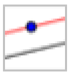
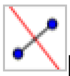
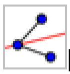


Figura 50: Apresentando o comando 4 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

**Reta perpendicular –** Clicando com o botão esquerdo do mouse, em uma reta e em um ponto fora dela, constrói-se uma reta perpendicular a essa reta, passando pelo ponto referido. O mesmo pode ser feito considerando-se um segmento de reta ou semirreta.

**Reta paralela –** Clicando com o botão esquerdo do mouse, em uma reta e em um ponto fora dela, constrói-se uma reta paralela á reta considerada, passando pelo referido ponto.

**Mediatriz –** Clicando-se, com o botão esquerdo do mouse, nas extremidades de um segmento de reta, constrói-se uma reta perpendicular a este passando no seu ponto médio.

**Bissetriz –** Clicando-se, com o botão esquerdo do mouse, sobre duas retas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes determinados pelas retas.

Passa-se ao quinto botão da barra de ferramentas:

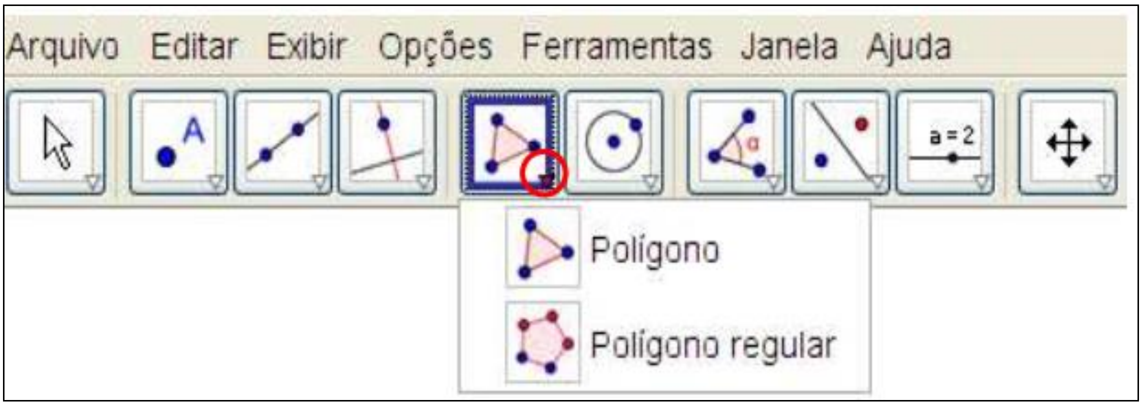
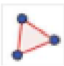
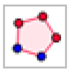


Figura 51: Apresentando o comando 5 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

 **Polígono –** Para essa construção, marcam-se ao menos três pontos e clica-se com o botão esquerdo do mouse, no primeiro ponto novamente, para fechar o polígono.

**Polígono regular –** É possível construir polígonos regulares usando o comando no qual é necessário digitar o número de lados na janela que aparece no centro da tela, após ter marcado dois pontos.

Clicando na seta vermelha do sexto botão:

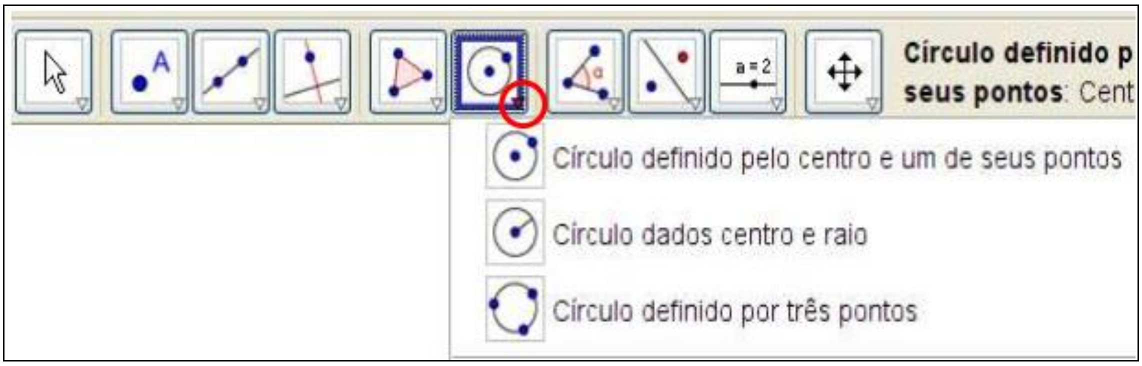
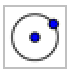
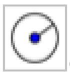
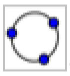


Figura 52: Apresentando o comando 6 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

**Círculo definido pelo centro de um de seus pontos –** Marcando-se um ponto A e um ponto B traça-se o círculo com centro em A, passando por B.

**Círculo dados centro e raio –** Marca-se o centro A e digita-se a medida desejada para o raio, em uma janela que se abre automaticamente.

**Círculo definido por três pontos –** Marcando-se três pontos não colineares, traça-se o círculo que passa por eles.

Seguindo adiante, tem-se o sétimo ponto da barra de ferramentas:

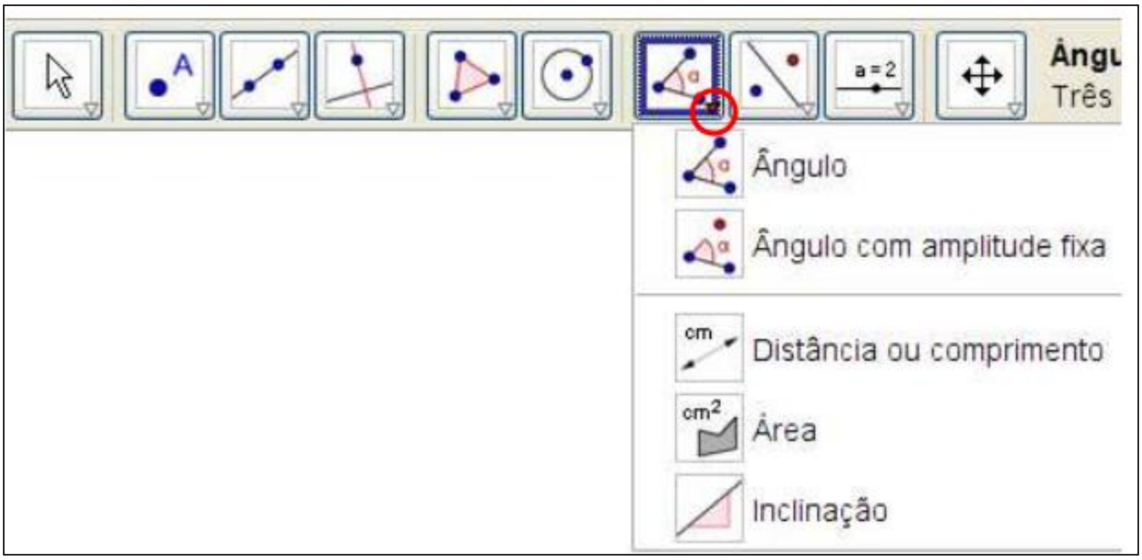
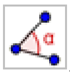
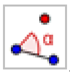
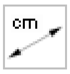


Figura 53: Apresentando o comando 7 da barra de ferramentas
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

**Ângulo –** Com essa ferramenta traçam-se ângulos: entre três pontos; entre dois seguimentos; entre duas retas ou semirretas; interior de um polígono.

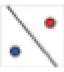
**Ângulo com amplitude fixa –** Marcam-se dois pontos e digita-se a medida desejada para o ângulo, em uma janela que se abre automaticamente ao centro da tela.

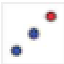
**Distância ou comprimento –** Essa ferramenta fornece na janela de álgebra, a distância entre: dois pontos; duas linhas; ou um ponto e uma linha.

**Área –** Com esse mecanismo, consegue-se determinar a área de um polígono, na janela geométrica.

Oitavo ponto da barra de ferramentas:

Figura 54: Apresentando o comando 8 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

 **Reflexão com relação a uma reta** - Essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta. Clique no objeto a ser refletido, com o botão esquerdo do mouse e, a seguir, clique na reta através da qual ocorrerá a reflexão.

 **Reflexão com relação a um ponto** - Essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no ponto através do qual ocorrerá a reflexão.

Clicando na seta vermelha do nono ponto da barra de ferramentas, tem-se:

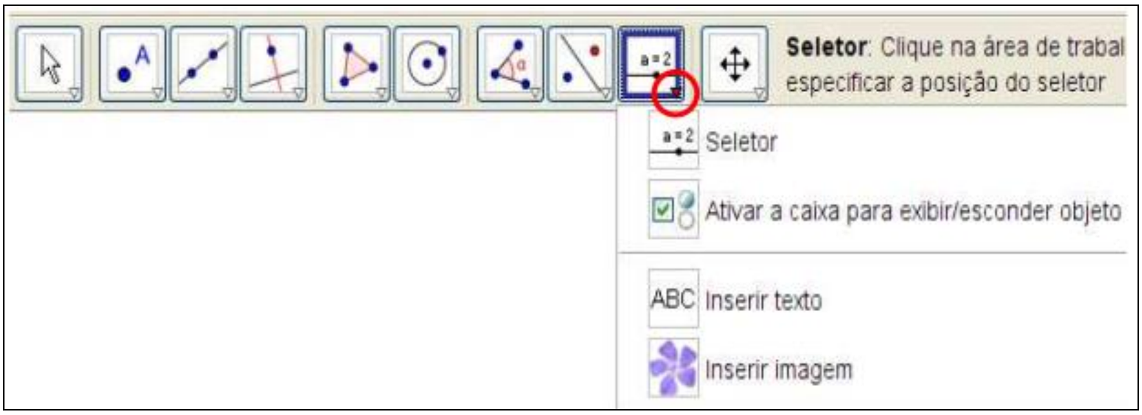
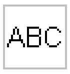
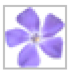


Figura 55: Apresentando o comando 9 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

 **Inserir texto** – Clicando, com o botão esquerdo do mouse, na área de trabalho, o texto que você digitar, na janela que será aberta, aparecerá neste local.

 **Inserir imagem** – Essa ferramenta permite acrescentar uma imagem numa construção. O ponto onde você clicar, com o botão esquerdo do mouse, será o

vértice inferior esquerdo da imagem. Após o clique na tela uma caixa de diálogo será aberta na qual você selecionará a imagem a ser inserida.

Por fim, clicando no último ponto da barra de ferramentas, tem-se:

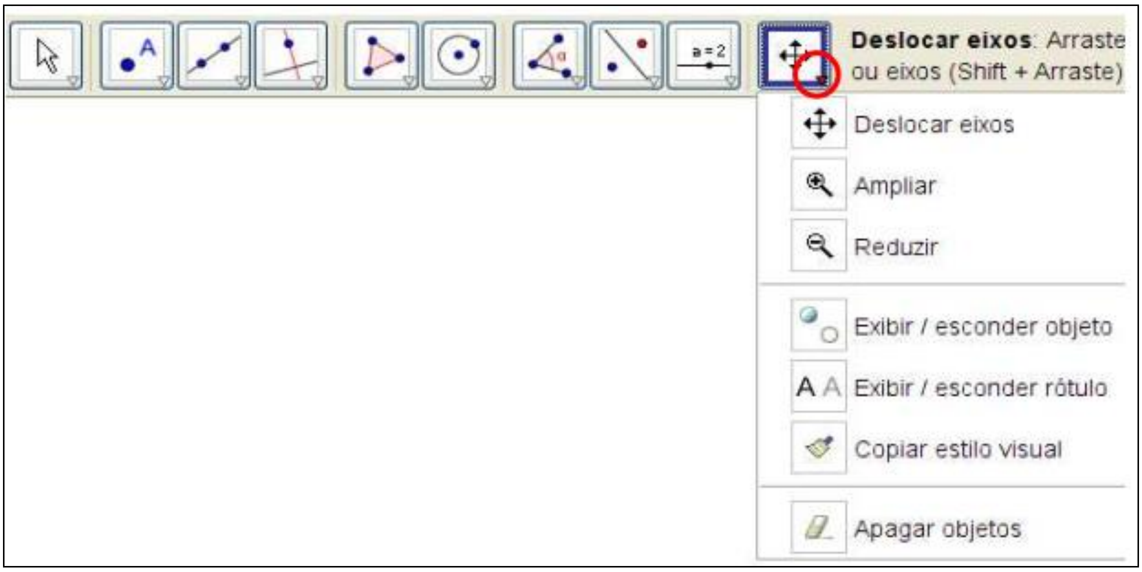
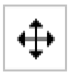
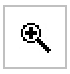
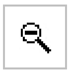
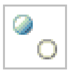


Figura 56: Apresentando o comando 10 da barra de ferramentas.
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

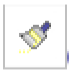
 **Deslocar eixos** – Essa ferramenta permite arrastar a área de trabalho ou os eixos.

 **Ampliar** – Ao clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer lugar da área de trabalho, essa ferramenta produz um zoom de aproximação.

 **Reduzir** – Ao clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer lugar da área de trabalho, essa ferramenta produz um zoom de afastamento.

 **Exibir/esconder objeto** – Ao selecionar essa ferramenta e clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre um objeto ou mais, você o(s) estará selecionando para ser(em) escondido(s). Porém, isso só ocorrerá, de fato, quando for selecionada outra ferramenta qualquer. Você poderá voltar a exibir os objetos ocultos, selecionando novamente a ferramenta, mas ao mudar de ferramenta os objetos voltarão a ficar ocultos. Caso deseje exibir, de fato, um objeto, clique com o botão direito do mouse, na janela algébrica, sobre este objeto e selecione a opção **exibir objeto**.

 **Exibir/esconder rótulo** – Clique, com o botão esquerdo do mouse, no rótulo do objeto para escondê-lo e no objeto para voltar a exibi-lo.

 **Copiar estilo visual** – Essa ferramenta permite copiar as propriedades visuais como cor, dimensão, estilo de reta, etc., a partir de um objeto, para vários outros objetos. Escolha o objeto cujas propriedades você quer copiar. A seguir clique em todos os outros objetos que devem adotar essas propriedades.

 **Apagar objetos -** Clique com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer objeto que ele será apagado.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA

O conteúdo de Geometria Espacial é em sua grande maioria ensinado com metodologias tradicionais, onde os recursos utilizados são apenas lousa, piloto/giz e livro didático. Espera-se que os alunos compreendam um conteúdo de formas tridimensionais, porém apresentados em formas bidimensionais. Este trabalho é de cunho qualitativo e quantitativo, tem por finalidade propor uma metodologia diferenciada para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria Espacial. Em um de seus trabalhos, Howe relata as importantes diferenças existentes entre as duas abordagens, mas alega que as mesmas têm sido colocadas desproporcionalmente no sustento da tese da incompatibilidade.

> “O fato que métodos quantitativos e qualitativos possam ser descendentes históricos das incompatíveis epistemologias positivista e interpretativista não comprometem pesquisadores atuais de endossar uma ou outra destas epistemologias, tanto quanto o fato da astronomia ser um descendente da astrologia comprometa astrônomos atuais em associar suas previsões com seus horóscopos (p.15)”

Para tal, foram propostos dois momentos, o primeiro traz a construção, planificação e manipulação de sólidos geométricos, utilizando materiais recicláveis ou de pouco custo, facilitando a aquisição dos mesmos, com o intuito de facilitar a compreensão dos pré-requisitos necessários, não deixando de relacionar as figuras planas com os sólidos geométricos, promovendo sempre uma contextualização. Deixando as aulas mais dinâmicas e participativas.

Já no segundo momento, desenvolve-se um trabalho com computadores no laboratório de informática, utilizando o *software* GeoGebra, que apresenta uma simples interface e custo gratuito, facilitando a sua instalação e manipulação. O GeoGebra é um instrumento rico em recursos e ferramentas, permitindo ao estudante uma maior participação na construção de conhecimentos. O mecanismo oferecido por esse *software* no estudo de construção, planificação, áreas e volumes dos sólidos contribuem diretamente no ensino aprendizado dos discentes envolvidos, propiciando momentos distintos dos tradicionais e mostrando a qualidade e exatidão da sua aplicabilidade. Ao término desse trabalho pretende-se chegar à conclusão de que a manipulação dos sólidos e o uso de ferramentas tecnológicas são imprescindíveis à aprendizagem do conteúdo abordado.

Será feita uma coleta de dados através de um questionário *a priori* de caráter quantitativo, a fim de verificar os conhecimentos sobre o tema trazidos por esses discentes envolvidos no trabalho, tal abordagem dará total visão de como esse grupo estudou ou não o conteúdo de Geometria Espacial, assim como o material utilizado para esse suposto estudo. Conquistando embasamento técnico para a realização do minicurso a ser trabalhado.

O método utilizado na coleta de dados para o nosso estudo é disposto em forma de um questionário, como consta em anexos neste trabalho, nas quais os estudantes escolhem sim ou não para cada questão do questionário, o mesmo foi aplicado em sala de aula, num momento cedido pelo professor. Assim, a análise dos dados obtidos se deu através da observação/comparação do desempenho dos discentes antes e depois da utilização dos materiais concretos e do *software* GeoGebra para o ensino de geometria espacial.

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este trabalho visa uma reflexão para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria Espacial aplicado ao Ensino Médio. Como ponto de partida foi desenvolvido um projeto de um minicurso, para uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Extremo Sul da Bahia.

O motivo pelo qual foi escolhida essa turma está diretamente ligado ao fato de ser uma classe que estudou o conteúdo na série anterior e por isso pode apresentar repercussões da aprendizagem.

Para início de trabalho foi realizado um questionário *a priori* (ANEXO B), com a finalidade de observar o conhecimento trazido pela turma e a partir daí fazer uma aplicação dessa outra metodologia, observando e relatando a contribuição da mesma.

Essa classe foi composta por 32 alunos, dos quais 2 não estavam presentes no dia desse questionário, não atrapalhando no recolhimento dos dados e nem excluindo-os do decorrer do curso, os resultados são apresentados nos gráficos abaixo:

4.1 RESULTADOS DO QUESTIONÁRO *A PRIORI*

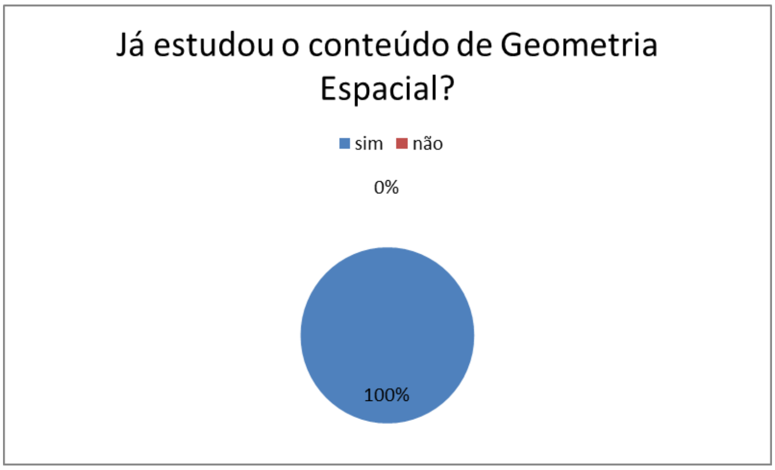


Figura 57: Resposta do item 1 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Como visto, todos os alunos, em algum momento já viram o conteúdo de Geometria Espacial.

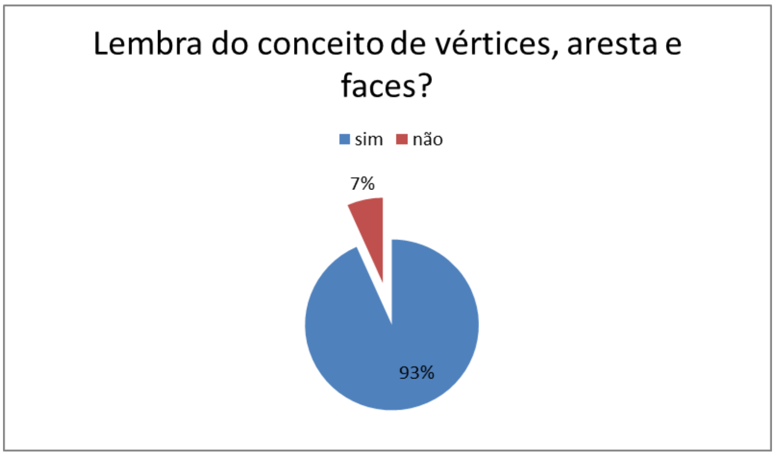


Figura 58: Resposta do item 2 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Observa-se que quase todos os discentes lembram a parte introdutória ao conteúdo .

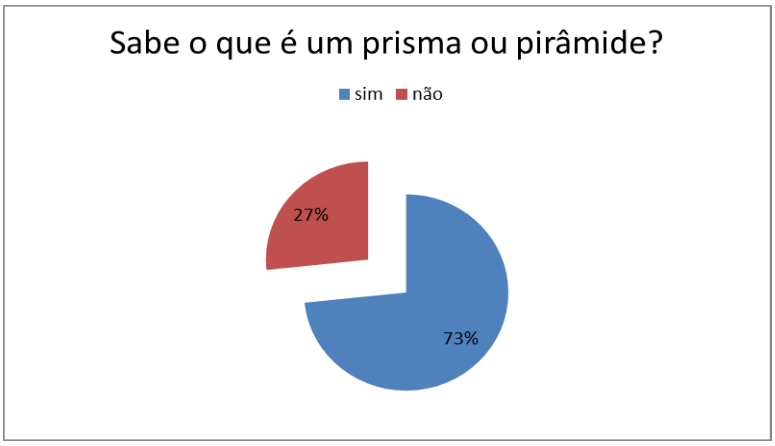


Figura 59: Resposta do item 3 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Pode-se observar que ao questionar sobre as formas geométricas, uma pequena parte, porém relevante, não lembram ou não sabem distinguir algumas das formas geométrica.

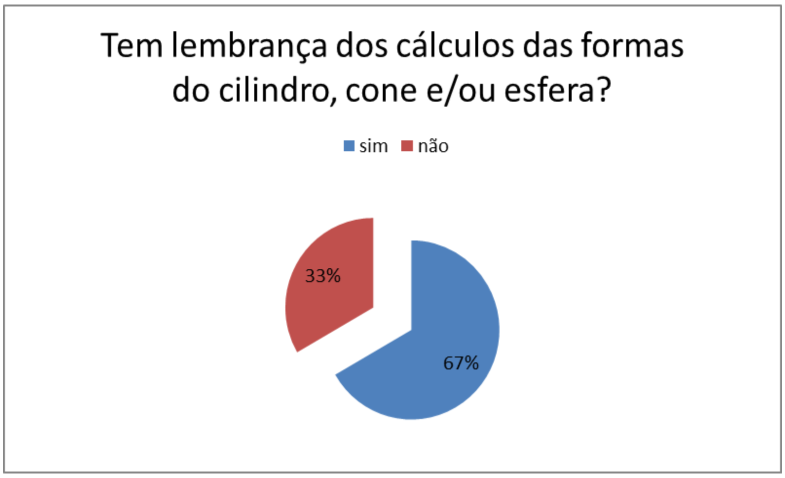


Figura 60: Resposta do item 4 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Ao relacionar os cálculos das formas de corpos redondos, o número de discentes que tem dificuldades aumenta.

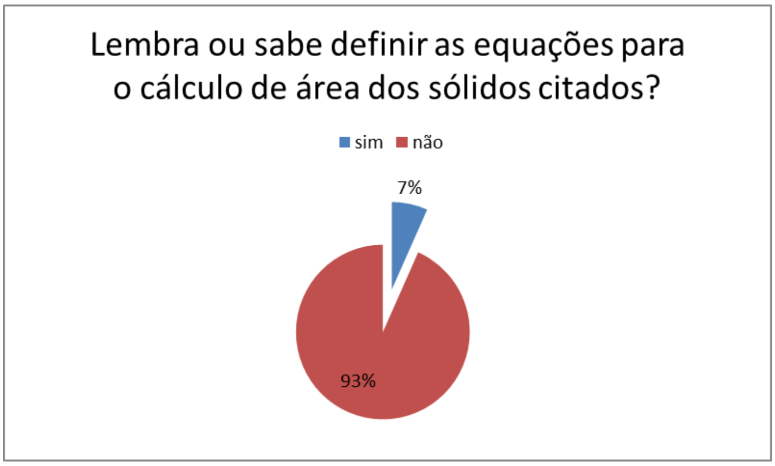


Figura 61: Resposta do item 5 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Tratando-se da definição dos cálculos de áreas dos sólidos, pode-se observar que os entrevistados em grande maioria, não lembram ou não sabem suas definições.

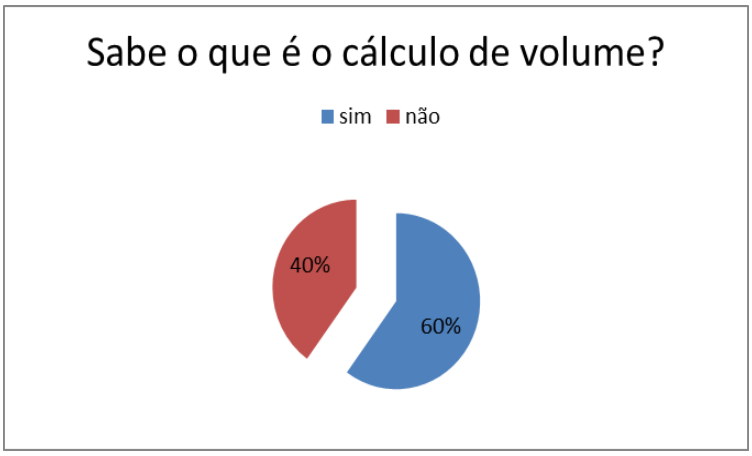


Figura 62: Resposta do item 6 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Quase a metade dos entrevistados lembram algo sobre os cálculos de volumes dos sólidos, o que não garante saber calcular.

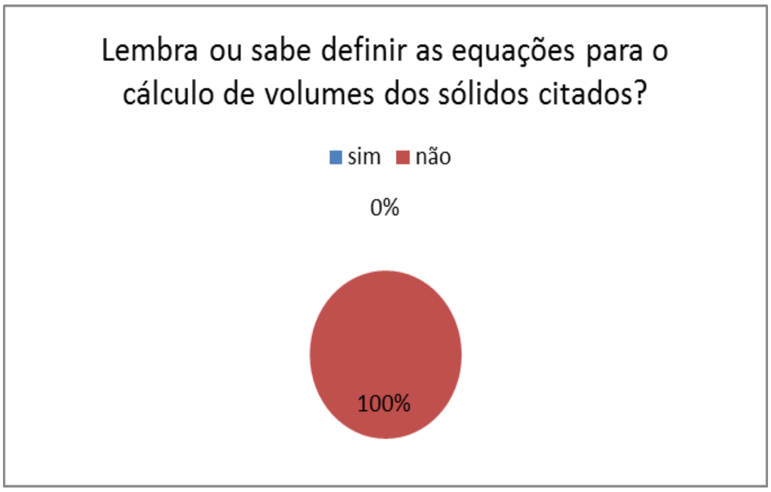


Figura 63: Resposta do item 7 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Quando se trata em definir as equações de tais volumes, podemos ver que em totalidade, ninguém lembra dessas definições.

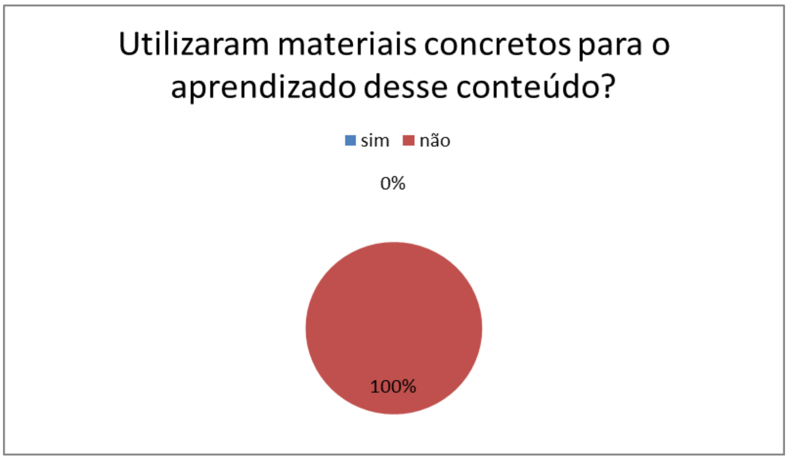


Figura 64: Resposta do item 8 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Nenhum dos alunos intrevistados aprendeu o conteúdo de Geometria Espacial faendo uso de materiais concretos.

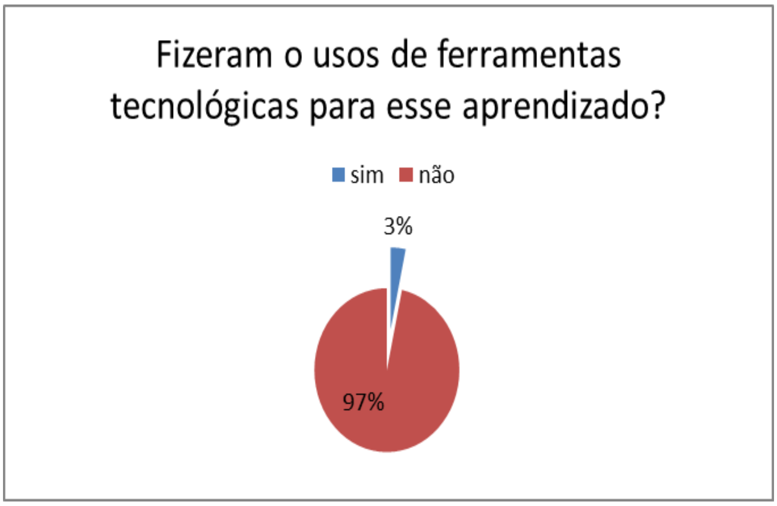


Figura 65: Resposta do item 9 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

O número de alunos que fizeram uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem do conteúdo foi mínimo, como mostra o gráfico.

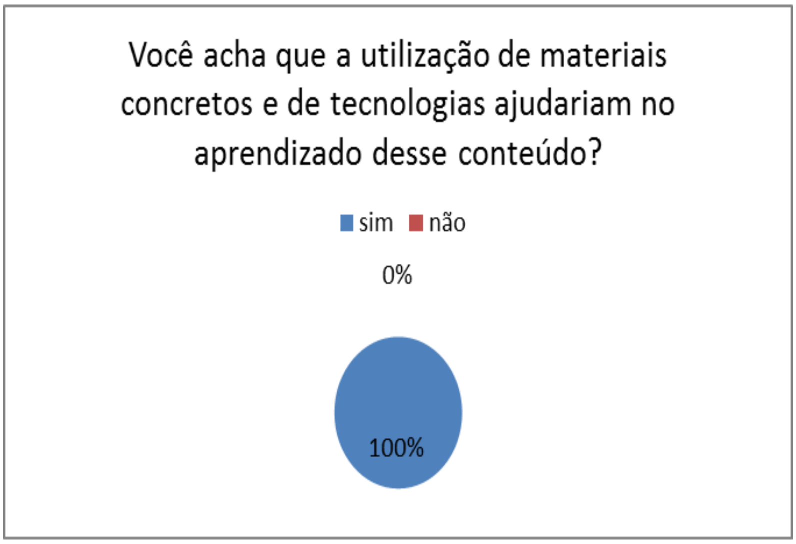


Figura 66: Resposta do item 10 do questionário a priori.
Fonte: Próprio Autor

Apesar de nenhum aluno ter utilizado materiais concretos e quase nenhum deles terem utilizados tecnologias, todos concordam que o uso desses instrumentos podem ser úteis no ensino e aprendizagem do conteúdo.

Após a coleta e análise dos dados, constata-se as dificuldades expostas pelos discentes dessa classe. A partir desta conclusão, foi produzido um plano de ação, visando à aplicação e repetição do conteúdo de Geometria Espacial. Porém, esse trabalho foi feito de forma lúdica e com a utilização do *software* GeoGebra e dos materiais concretos, visualizando uma maior participação e consequentemente aprendizado por parte dos discentes.

4.2 CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS UTILIZANDO MATERIAIS CONCRETOS

Para a realização do trabalho de construção de sólidos utilizando os materiais concretos citados anteriormente, a turma foi dividida em grupos e lançou-se a proposta para trazerem esses materiais na aula seguinte e assim ser iniciado o trabalho.

Durante esta etapa, foi pedido para os grupos se juntarem e construíssem os sólidos pedidos. Entre eles estavam: cubo, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base hexagonal, prisma de base hexagonal, cilindro reto e cone reto.

Durante as construções, diversas intervenções foram feitas com a intenção da explanação do conteúdo, de forma a explicar os pontos importantes conforme eram criados. Pode-se relacionar a jujuba, goma ou pingo de cola quente com o vértice. Os canudos ou palitos com as arestas e consequentemente a formação das faces, por fim montando o poliedro.

Para início de trabalho, foi construído um quadrado e através dele chegou-se ao poliedro denominado de cubo. Por parte dos alunos, foi fácil perceber que a área desse poliedro seria dada por seis vezes a área do quadrado ($6l^2$), formado inicialmente. E o seu volume é definido pelo produto da base pela altura, como a base é um quadrado de lado **l** e a altura é **l** também, tem-se que o seu volume pode ser representado por l^3.

Figura 67: Planificação do Cubo.
Fonte: Próprio Autor

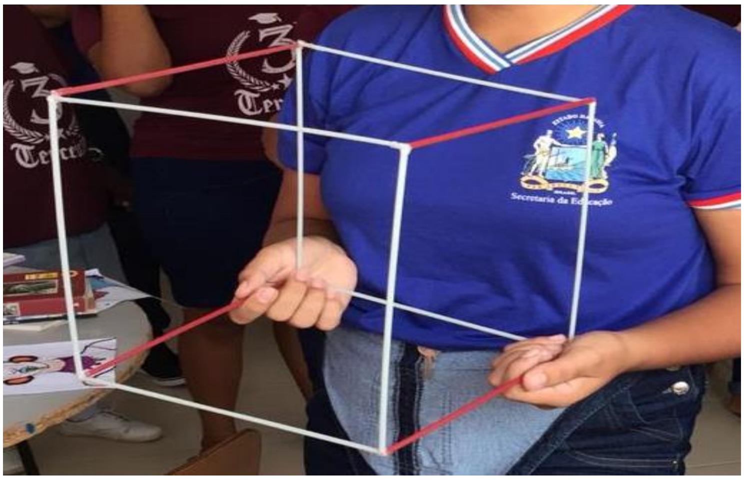


Figura 68: Construção do Cubo com canudos.
Fonte: Próprio Autor

Para a construção dos demais prismas, já havia certa experiência para a sua construção, ou seja, os discentes haviam percebido que dependeriam da base, e a construção dos seus lados obedeceria a esses seguimentos, formando sempre retângulos. Logo, o cálculo de sua área e de seu volume seriam uma sequência dessa base construída. Uma dificuldade surgiu no cálculo da área do prisma de base hexagonal. Porém, após o esclarecimento da formação de seis triângulos equiláteros, chegou-se a conclusão de que era preciso calcular de um triângulo e multiplicar por seis. Desta maneira, pode-se deduzir a equação direta para o cálculo dessa figura, que é dada por $3l^2\sqrt{3}/2$. Assim tornando-se mais visível e perceptível os seus respectivos cálculos.

Algumas outras Criações do Minicurso:

Figura 69: Planificação do Paralelepípedo.
Fonte: Próprio Autor

Figura 70: Planificação do Prisma de base triangular.
Fonte: Próprio Autor

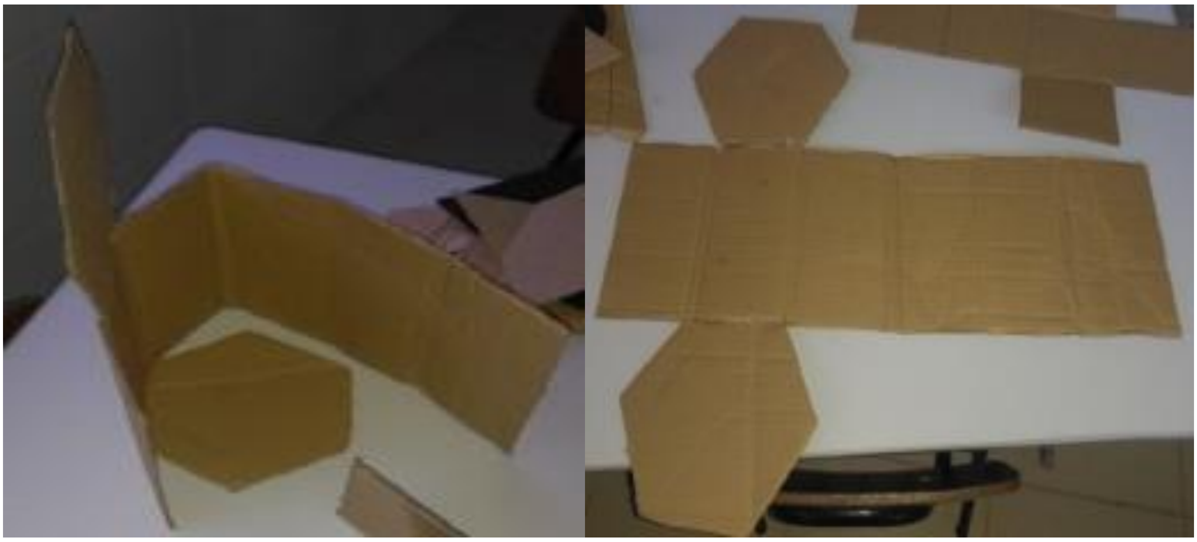


Figura 71: Planificação do Prisma Hexagonal.
Fonte: Próprio Autor

Figura 72: Construção com canudos do Prisma de base triangular.
Fonte: Próprio Autor

Figura 73: Construção do Prisma Hexagonal.
Fonte: Próprio Autor

Figura 74: Construção de um Prisma Obliquo.
Fonte: Próprio Autor

Na criação das pirâmides, os discentes perceberam que era algo bem semelhante aos prismas já construídos, porém suas áreas laterais passariam a ser triângulos. Portanto, para área total utilizariam equações da mesma forma anterior e o volume sofreria uma diferenciação. Esta diferença exigiu uma atenção especial, logo, uma nova intervenção, relatando o por que utilizar o 1/3 fez-se necessário, necessitou-se demonstrar que essa equação seria semelhante a dos prismas, porém teria que ser dividida por três, pois o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma que apresenta a mesma altura e a mesma base.

Planificações:

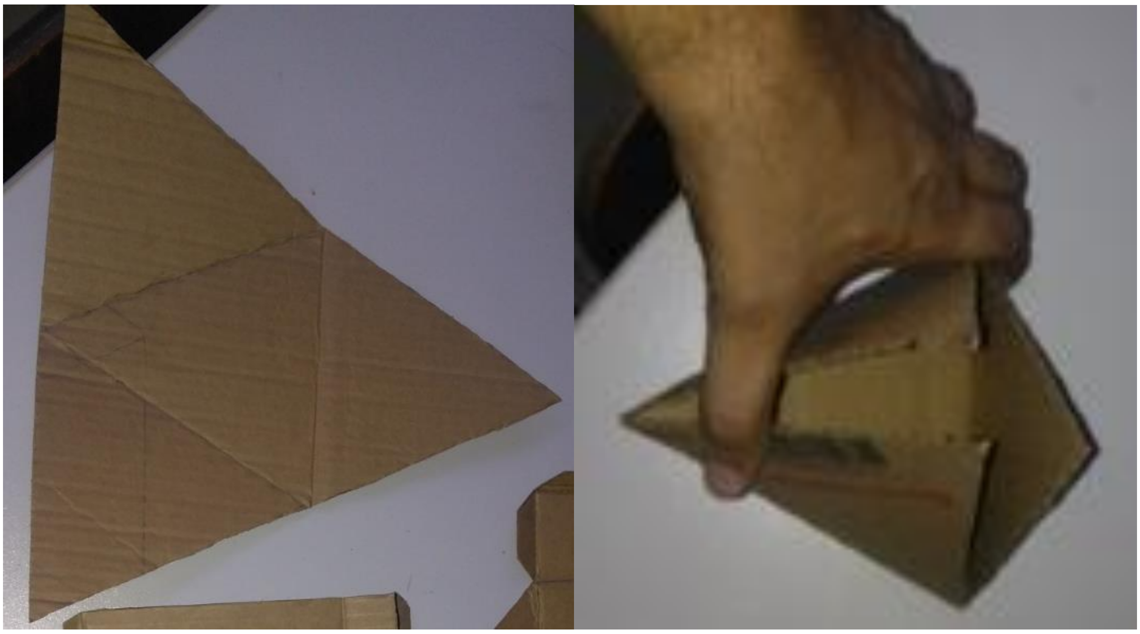


Figura 75: Planificação do Tetraedro.
Fonte: Próprio Autor

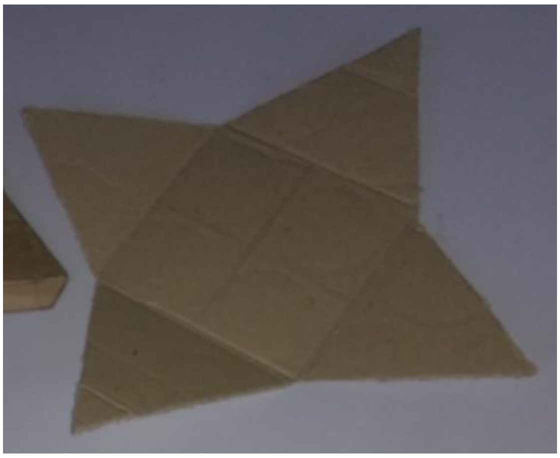


Figura 76: Planificação da Pirâmide de base quadrada.
Fonte: Próprio Autor

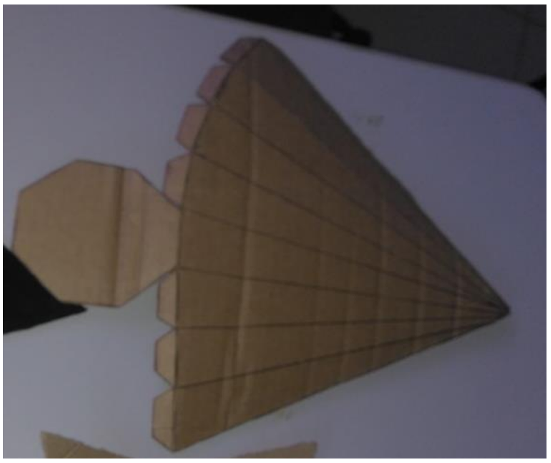


Figura 77: Planificação da Pirâmide de base octogonal.
Fonte: Próprio Autor

Construção dos Sólidos:

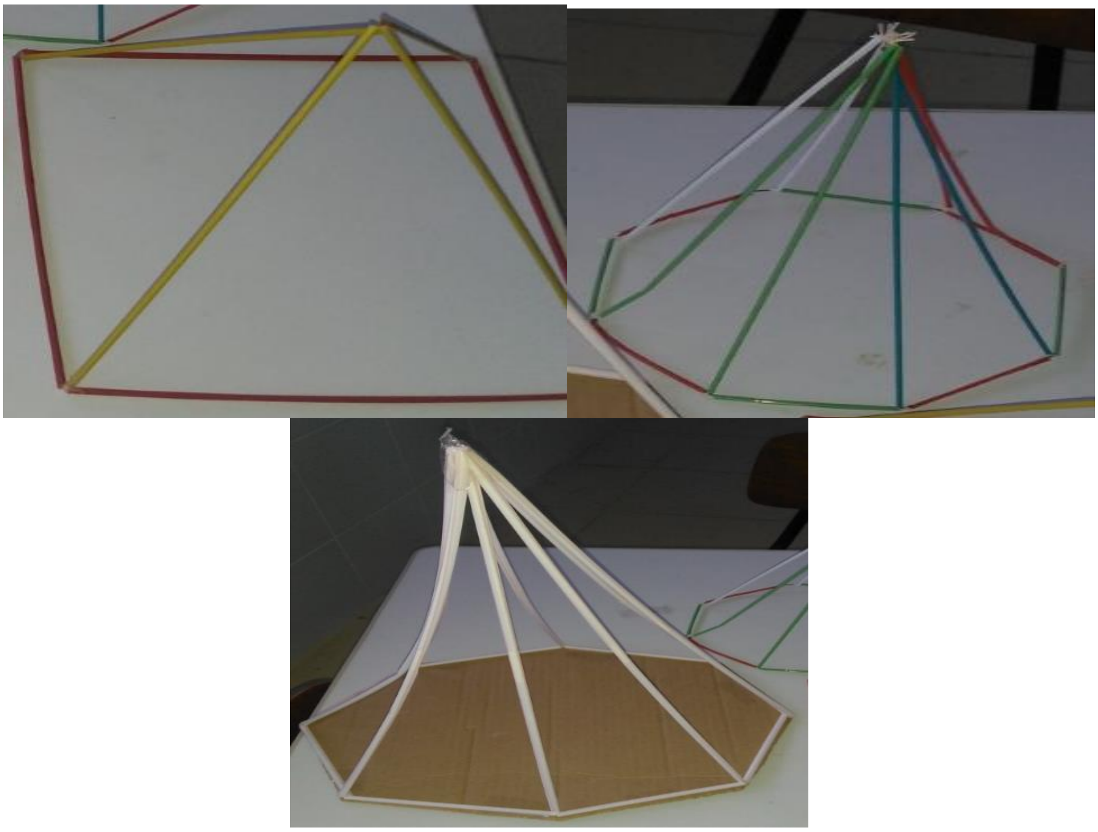


Figura 78: Construção das Pirâmides com utilização de canudos
Fonte: Próprio Autor

Os estudantes constataram que não seria uma tarefa fácil, utilizarem os mesmos materiais que foram usados na construção dos poliedros e das pirâmides para a construção dos sólidos redondos. Portanto, nesse momento pediu-se para trazerem no próximo encontro materiais como papelão, isopor ou papel cartão.

O encontro subsequente trouxe complexidades e estranhamento por parte dos estudantes. Houve uma maior intervenção para a criação desses sólidos redondos. A princípio, foi pedido para desenhar sobre a folha/papelão/isopor uma circunferência de raio qualquer, duplicando-a depois, com a finalidade de criar um cilindro. Para isso alguns fizeram uso de compassos, outros de materiais ali existentes, como transferidor, fundo de lata, entre outros.

Em seguida, deu-se início à criação da face lateral desse cilindro, que foi estranhado por alguns ao descobrirem que deveriam fazer um retângulo no qual a largura deveria ser igual ao comprimento da circunferência já feita e uma altura qualquer. Nesse momento foi interessante, pois cada estudante parou tudo que estava fazendo e teve que relembrar como encontrar a medida do comprimento da circunferência. Pois, concluindo essa etapa, pode-se construir o cilindro e assim calcular a sua área. Para tanto, já haviam percebido que seria a soma da área do retângulo com a área das duas circunferências. Porém, encontrar essa segunda área seria o inconveniente da vez. Mais uma intervenção foi feita, relembramos o conteúdo visto no Ensino Fundamental, para relembrar a equação do cálculo de área de tal figura. Por fim a explanação para o cálculo do volume tornou-se mais simples e eficaz (Figura 79).

Figura 79: Construção do Cilindro.
Fonte: Próprio Autor

A construção do cone não foi muito diferente, surgiu uma grande dificuldade também. A intervenção dessa vez ficou por conta de demonstrar o que é, e como determinar o valor do seguimento denominado “geratriz”. Ficou claro que precisariam novamente do comprimento da base, ou seja, o comprimento da circunferência. Após um período de grande discussão e entretenimento, ficou entendido como calcular a área lateral do cone e por fim a área total desse sólido. O seu volume foi definido, utilizando-se do mesmo conceito já visto nas pirâmides.

Figura 80: Planificação do Cone
Fonte: Próprio Autor

A esfera é forma geométrica que apresentaria maior dificuldade para a sua construção. Portanto, fez-se uso de uma esfera de isopor para a explanação e compreensão de itens importantes, existente em tal sólido. Para exemplificar o cálculo de área e de volume dessa forma, utilizou-se o estilete para cortar a esfera em diversas “circunferências” e assim deduzir as suas equações para tais cálculos.

4.3 O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Após autorização da direção da escola, em cada computador do laboratório de informática foi instalado o *software* GeoGebra 5.0, acessando o endereço eletrônico http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/ e fazendo o seu *download*. Como a quantidade de computadores não foi suficiente para atender todos os alunos. Eles foram divididos em dupla.

No primeiro contado dos discentes com o *software*, foi pedido que abrissem o programa encontrado na área de trabalho dos computadores. A princípio foi deixado um momento para a utilização do mesmo a livre vontade. Com a intenção de manipulação e um prévio conhecimento da ferramenta. Neste momento, alguns participantes criaram formas geométricas. Outros conseguiram desenvolver gráficos, outros entraram em janelas 2D e 3D, dentre outras manipulações interessantes que fizeram. Seguem algumas criações dos discentes durante a aula inicial.

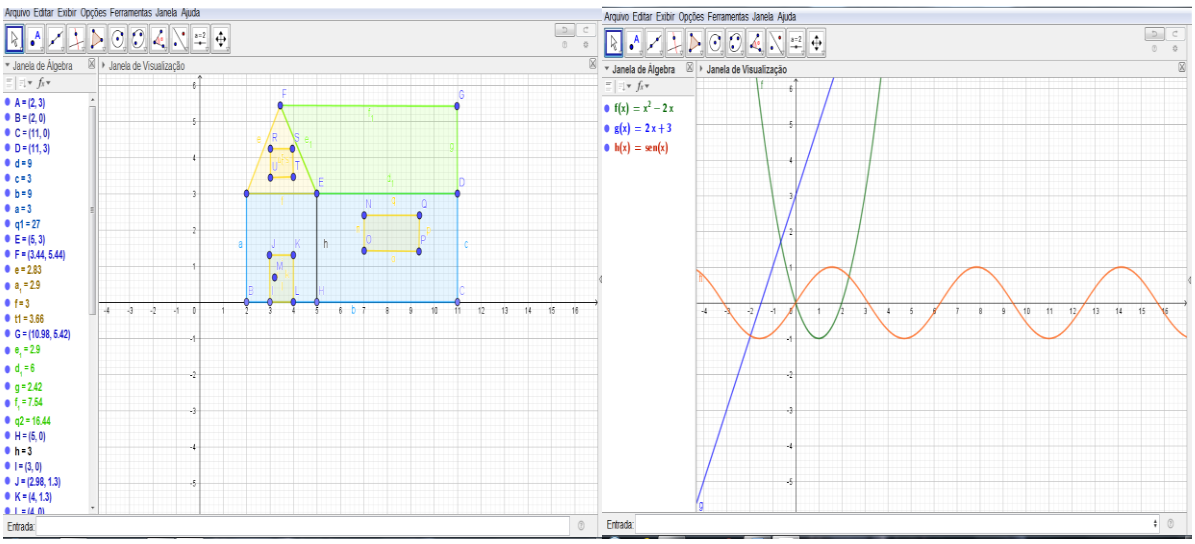


Figura 81: Imagens desenvolvidas durante o minicurso
Fonte: Próprio Autor

Em um segundo encontro, utilizando-se de um *Datashow*, foi dada uma breve apresentação do *software*, mostrando sua interface, bem como a Barra de Menu, a Barra de Ferramentas, a Janela de Álgebra e a de Visualização, o Campo de Entrada e o de Ajuda. Deixando bem claro a função e importância de cada um.

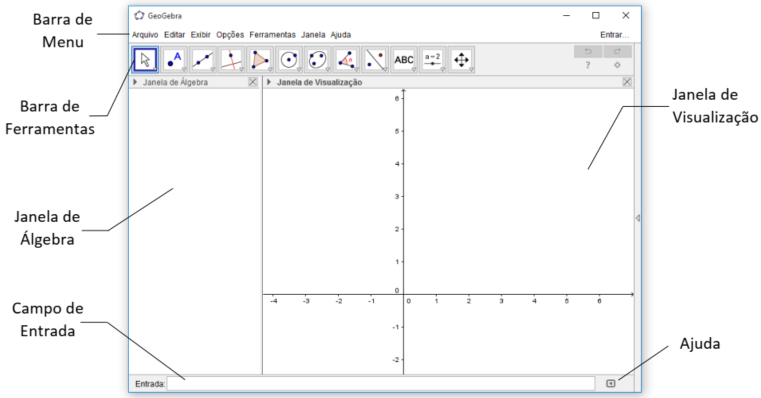


Figura 82: Apresentação da barra de Menu.
Fonte: Próprio Autor

Na barra de ferramentas foi dada ênfase a cada um dos itens nela contido. Deixando bem claro, a importância de alguns deles para a criação e para o cálculo dos sólidos que seriam construídos mais tarde. Algumas dessas instruções dadas aos discentes são apresentadas a seguir, como exemplos.

A representação de ponto(s) na janela de visualização poderia ser feita clicando no item ponto ou pela caixa de entrada para um par ordenado desejado.

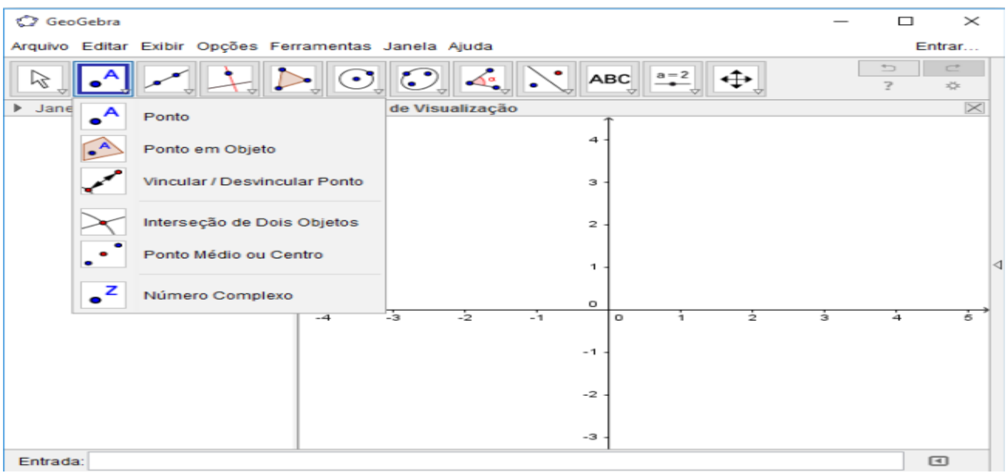


Figura 83: Apresentação da Barra de Ferramentas (1)
Fonte: Próprio Autor

Foi apresentada como são feitas a construção de reta, de segmento de reta, de semirretas e de outros (Figura 84). Na Figura 85, a construção de polígonos também é mostrada. Pois seria de grande serventia no caminhar dos trabalhos.

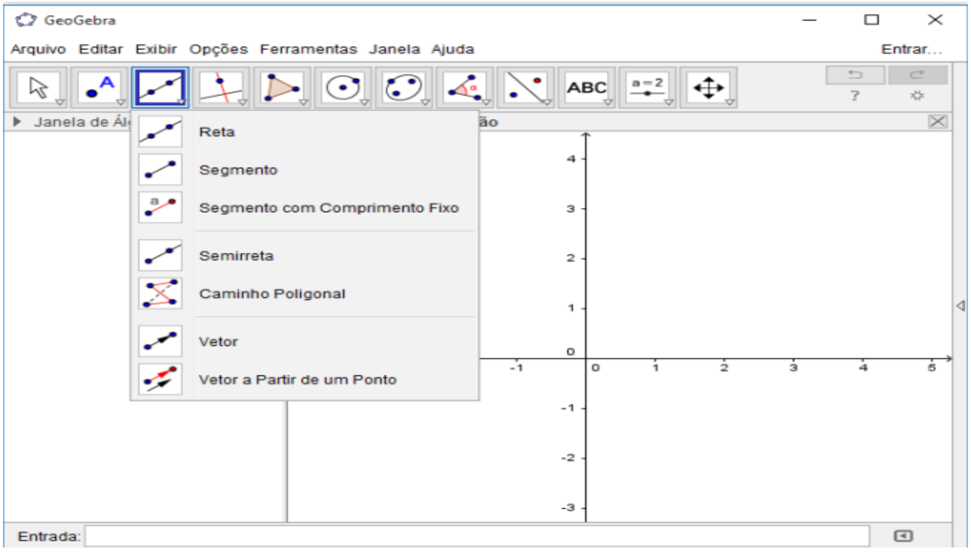


Figura 84: Apresentação da Barra de Ferramentas (2)
Fonte: Próprio Autor

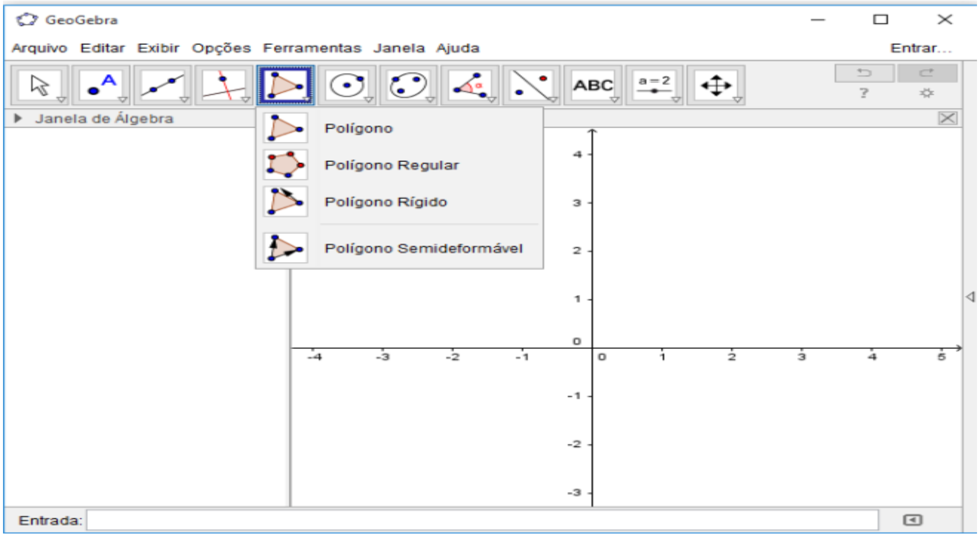


Figura 85: Apresentação da Barra de Ferramentas (3)
Fonte: Próprio Autor

A Construção de círculos e setores, também foi mostarda, pois apresenta uma relevância (Figura 86).

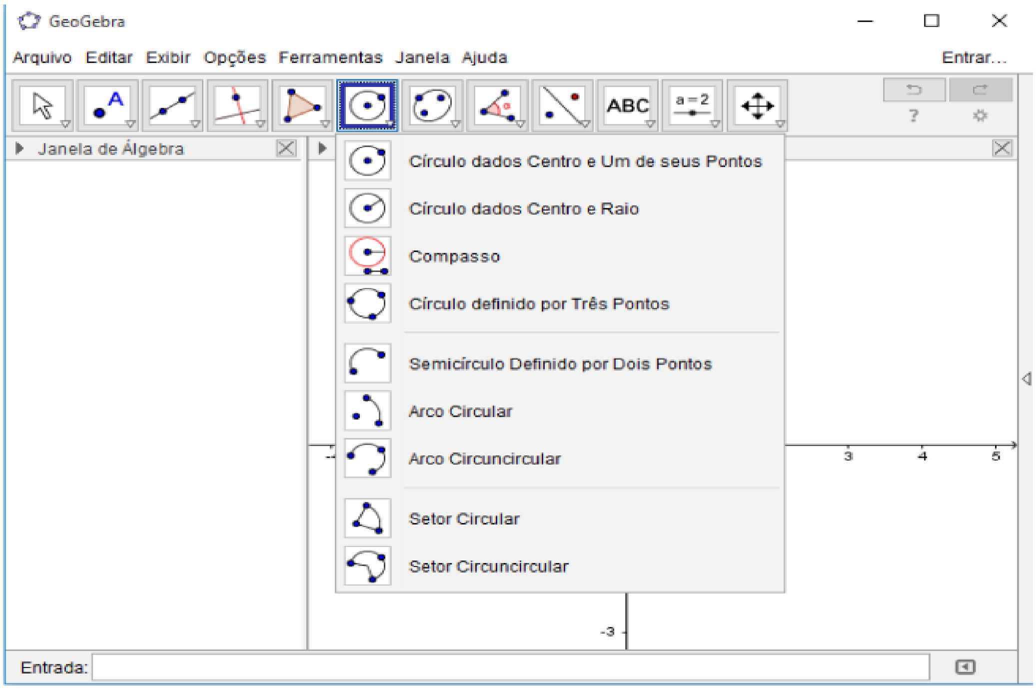


Figura 86: Apresentação da Barra de Ferramentas (4)
Fonte: Próprio Autor

O controle deslizante que tem uma importante função dentro dos conceitos a serem vistos, também foi mostrado (Figura 87).

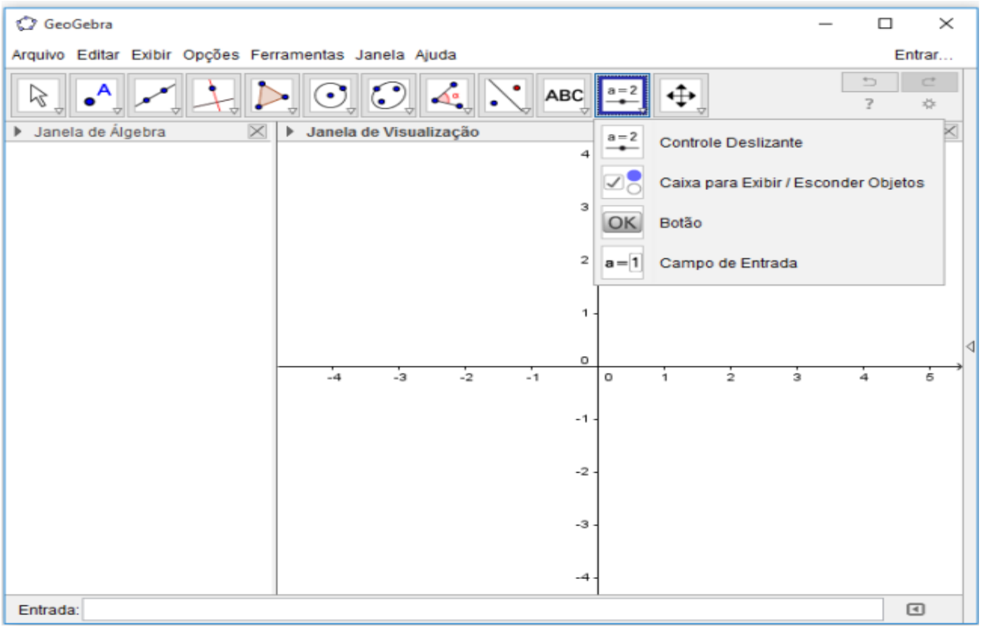


Figura 87: Apresentação da Barra de Ferramentas (5)
Fonte: Próprio Autor

As outras ferramentas também foram vistas (Figuras 88 a 90), com um pouco menos de ênfase, pois não teriam uma grande participação dentro dos trabalhos.

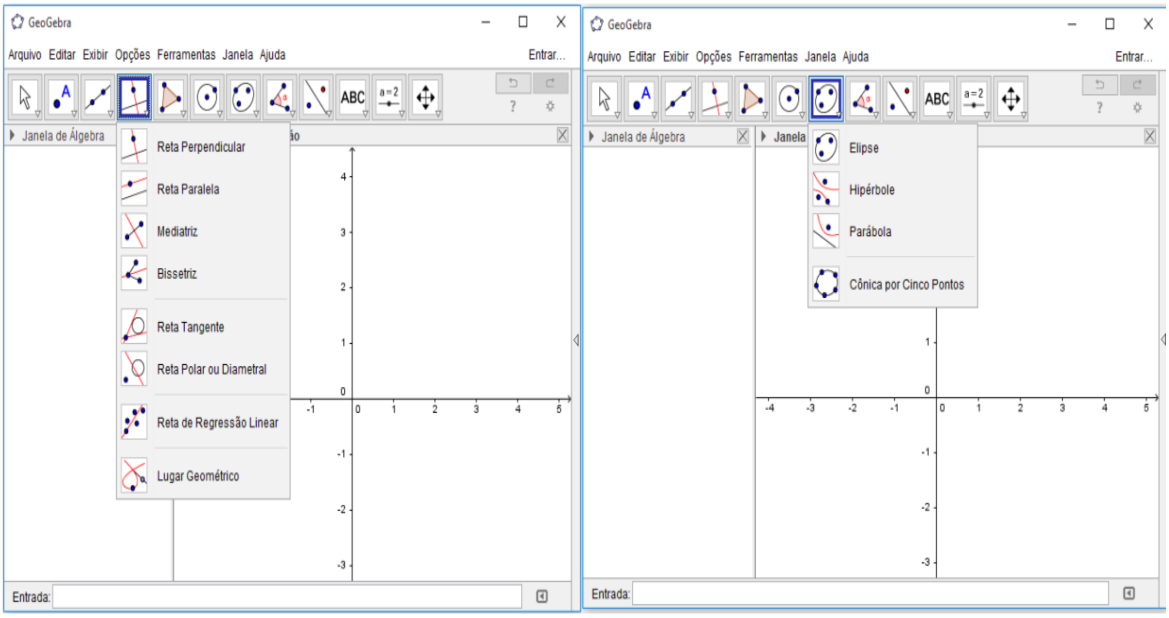


Figura 88: Apresentando os outros comandos (1)
Fonte: Próprio Autor

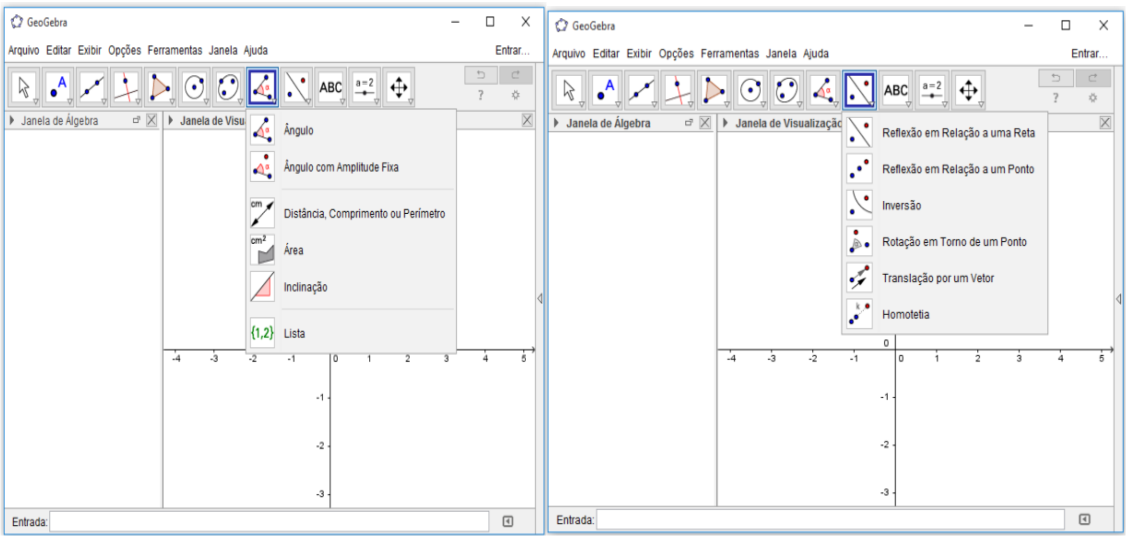


Figura 89: Apresentando os outros comandos (2)
Fonte: Próprio Autor

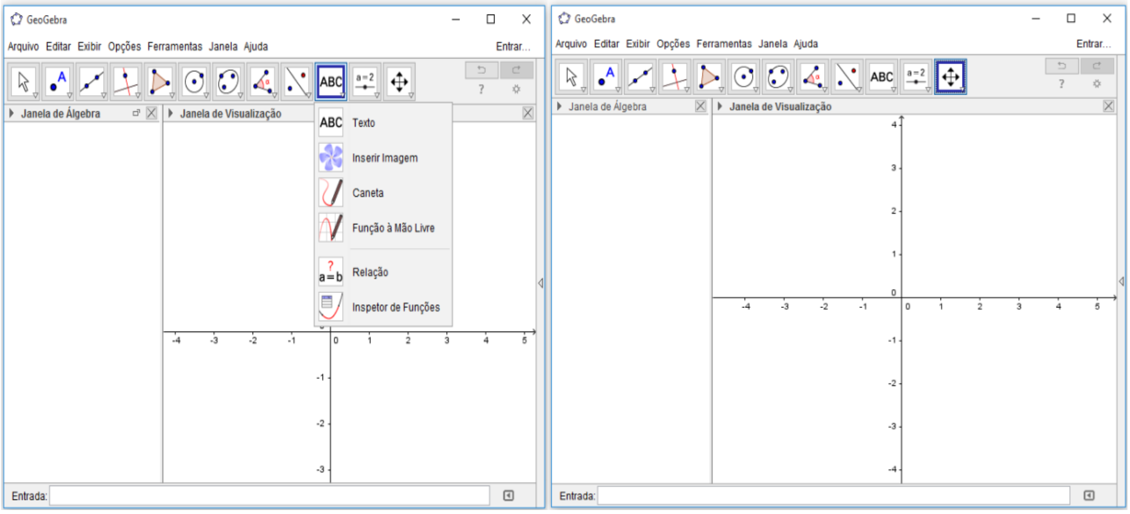


Figura 90: Apresentando os outros comandos (3)
Fonte: Próprio Autor

Durante o trabalho de criação dos itens mais explorados foi deixado bem claro que quase todas as criações poderiam ser feitas pela caixa de entrada. Nesse momento já se percebia o entusiasmo e a euforia por parte dos alunos. Eles passaram algum tempo fazendo suas próprias criações e explorando o *software*.

No encontro posterior, deu-se início ao cálculo de áreas das formas criadas. Primeiramente foi pedido para criar um quadrado com os pontos A, B, C, D de lado 2 (Figura 91). Foi percebido que uns utilizaram a ferramenta de ponto, e o segmento de reta. Outros foram direto nos segmentos. E ainda outros que utilizaram a criação de polígonos. Ao fazer essa figura foi perguntado para o participante, “qual seria a sua área?” E ao falarem a resposta, percebeu-se que alguns já tinham o resultado, e outros não. Devido a forma de criação, os que optaram por criar o polígono, já obtiveram o valor da área. Os outros precisaram calculá-la. Fixando aí uma melhor forma para esse trabalho, sendo ela, a utilização da ferramenta de polígono.

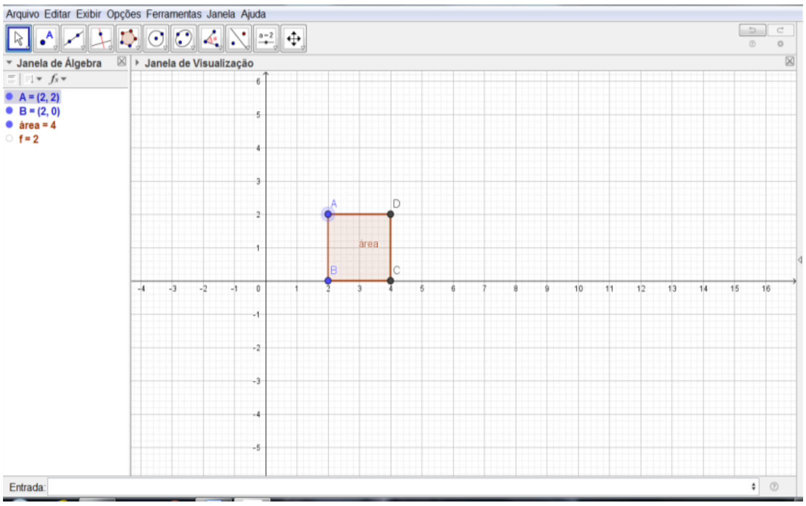


Figura 91: Construindo um quadrado no GeoGebra
Fonte: Próprio Autor

Deu-se sequência às outras formas como: retângulo, triângulo, trapézio e losango. Sempre relembrando as equações, calculando manualmente e verificando com o *software*. Vale ressaltar mais uma vez, a habilidade e a euforia por parte dos participantes, criavam suas próprias figuras e realizavam os cálculos, explorando o *software* de uma forma intensa.

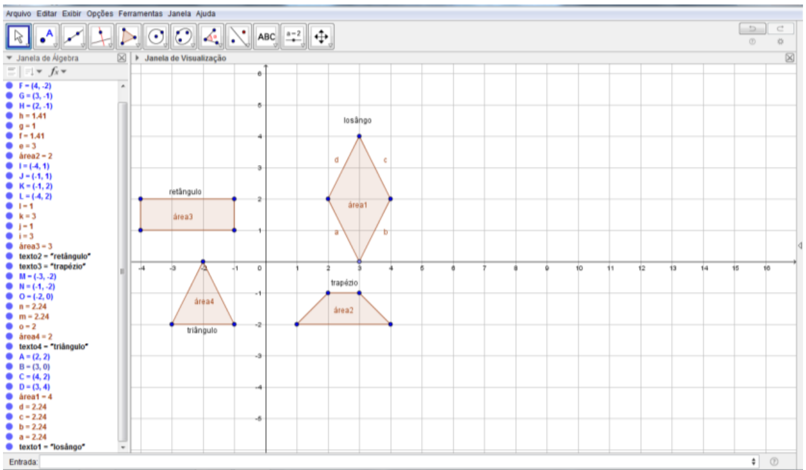


Figura 92: Construindo outras figuras Planas no GeoGebra
Fonte: http://www.cpscetec.com.br

O próximo encontro trouxe outras possibilidades de construção, podendo ser considerado o melhor e o mais importante conhecimento, pois seriam construídos os sólidos, assim como, os cálculos de suas áreas e de seus volumes.

Nessa parte, vale ressaltar que vários discentes já haviam baixado o *software* em seus computadores e celulares. Consequentemente, foi feito o uso do mesmo e foi treinado ainda mais as suas habilidades. Iniciou-se a construção de um cubo. Para isso foi criado um quadrado com lado de tamanho qualquer. Em seguida, foi apresentada a Janela de Visualização 3D, onde foi observado as formas em relação aos 3 eixos. A princípio, foi pedido para se fazer um quadrado de lado 2. E em seguida, abriu-se a janela 3D e ali perceberam que a figura plana já aparecia. Clicando sobre esse quadrado novas ferramentas aparecem também. Portanto, foi pedido que clicassem em pirâmide e em seguida extrusão para prisma ou cilindro. Não escolheram direto o cubo, pois a escolha da ferramenta facilitaria na construção de outros prismas. Clicando no quadrado existente na janela 3D abre-se uma nova janela para digitar a altura do seu prisma. Como o desejo é fazer um cubo, foi colocado 2 para manter as arestas iguais, assim formando o sólido desejado (Figura 93).

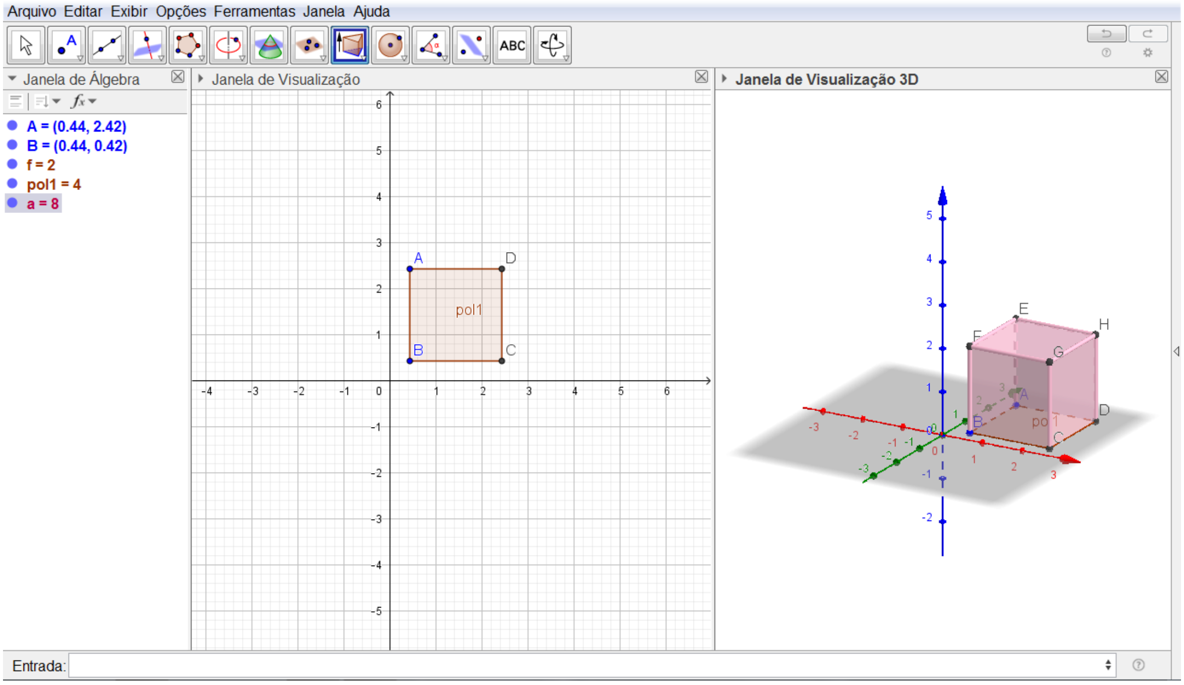


Figura 93: Construindo o cubo no GeoGebra
Fonte: Próprio Autor

Nesse momento, foi pedido para calcular o volume do cubo e aí puderam perceber que essa resposta já existia na janela de álgebra. Passou-se então à planificação desse cubo. Clica-se novamente em extrusão, e em seguida, em planificação, voltando novamente a clicar no cubo. Assim, gerando a sua forma planificada e um controle deslizante que poderá movimentar essa planificação e até mesmo ser animada para movimentar-se sozinha .

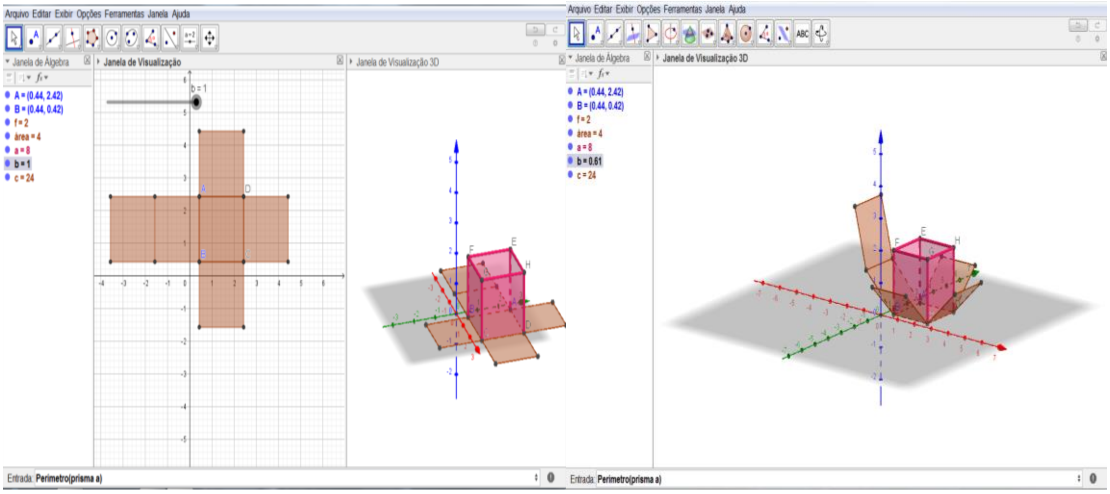


Figura 94: Construção e planificação de um paralelepípedo
Fonte: Próprio Autor

E mais uma vez, o discente pode observar que ao calcular a área dessa planificação, encontrariam um valor já informado pelo *software*.

Utilizando as ferramentas já aprendidas para a criação de sólidos, foi pedido aos participantes que se dividissem em grupo e cada um deles iriam apresentar ao restante da turma a criação e os cálculos de um sólido. Após um sorteio, deu-se início a criação dos mesmos. Em um encontro, foi feita a apresentação, utilizando a sala de multimeios da escola para tal explanação por parte dos alunos, como mostram as fotos anexadas abaixo.

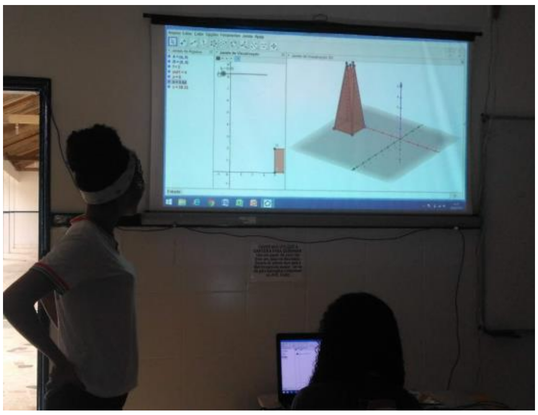


Figura 95: Construção da Pirâmide.
Fonte: O Próprio Autor

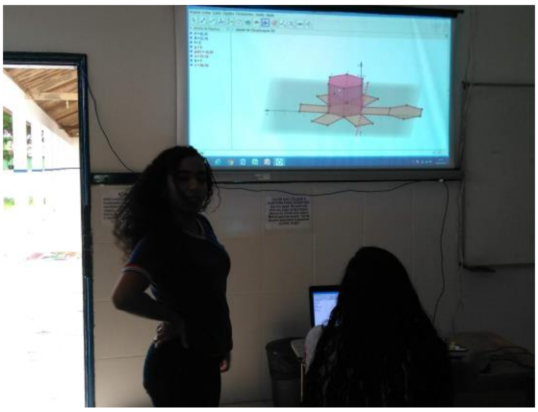


Figura 96: Planificação do prisma hexagonal.
Fonte: O Próprio Autor

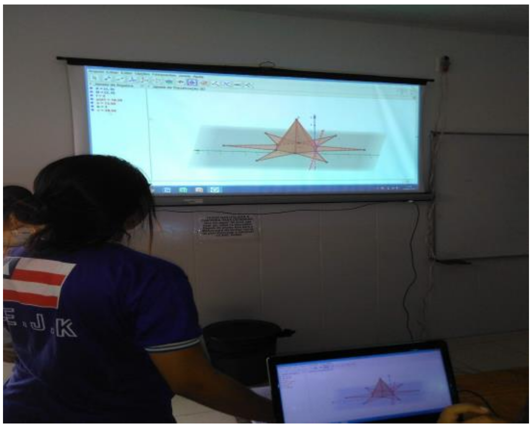


Figura 97: Planificação da Pirâmide Hexagonal.
Fonte: O Próprio Autor

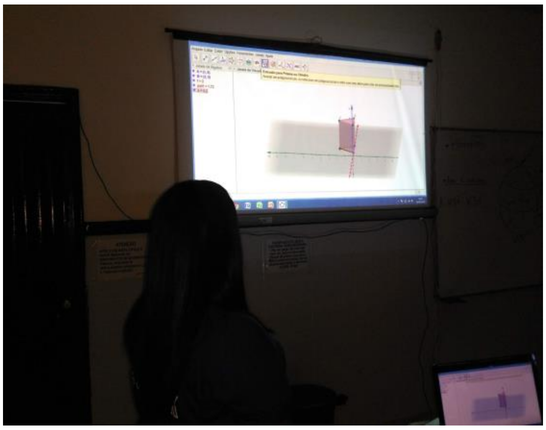


Figura 98: Criação do Prisma de base triangular.
Fonte: O Próprio Autor

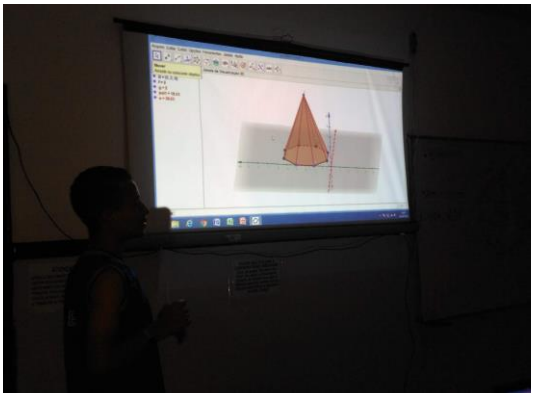


Figura 99: Pirâmide de base octogonal.
Fonte: O Próprio Autor

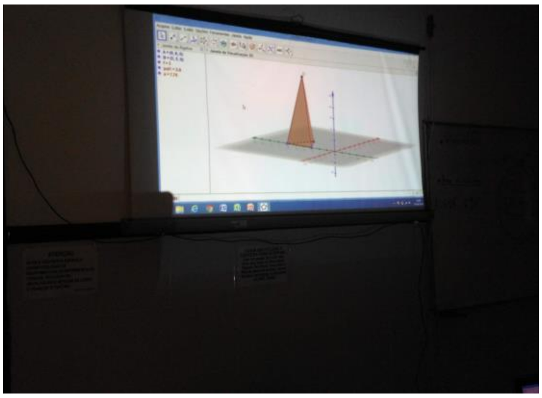


Figura 100: Pirâmide de base triangular(tetraedro).
Fonte: O Próprio Autor

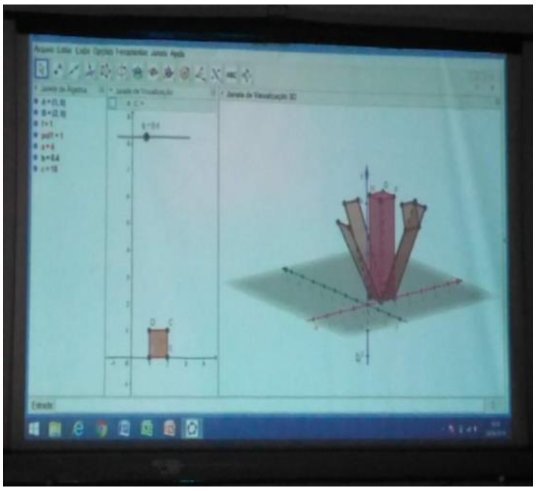


Figura 101: Planificação do Paralelepípedo.
Fonte: O Próprio Autor

Figura 102: Planificação do Cubo.
Fonte: O Próprio Autor

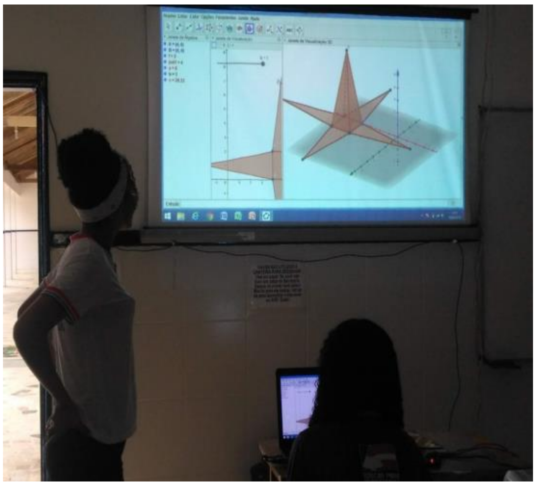


Figura 103: Planificação da Pirâmide de base Quadrada.
Fonte: O Próprio Autor

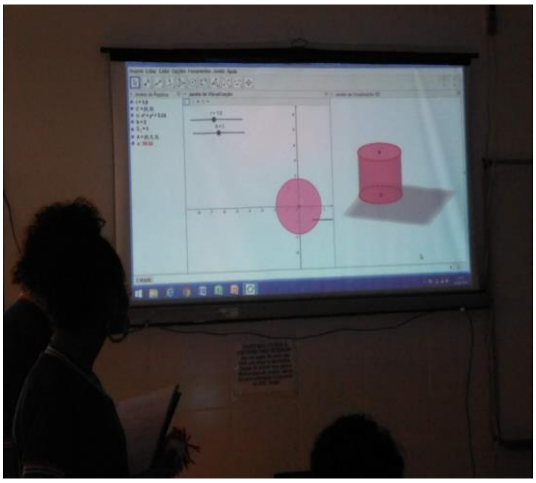


Figura 104: Construção do Cilindro.
Fonte: O Próprio Autor

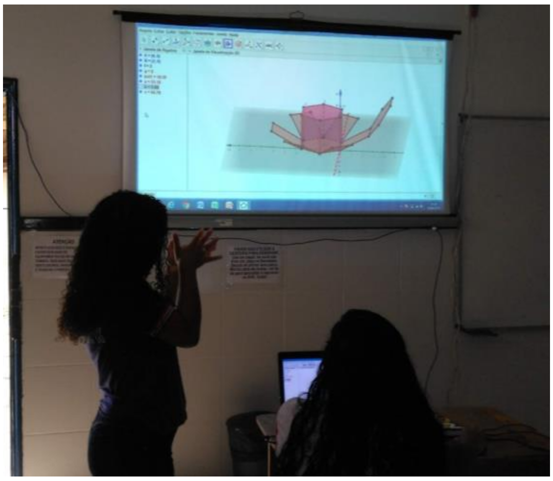


Figura 105: Planificação do Prisma Hexagonal.
Fonte: O Próprio Autor

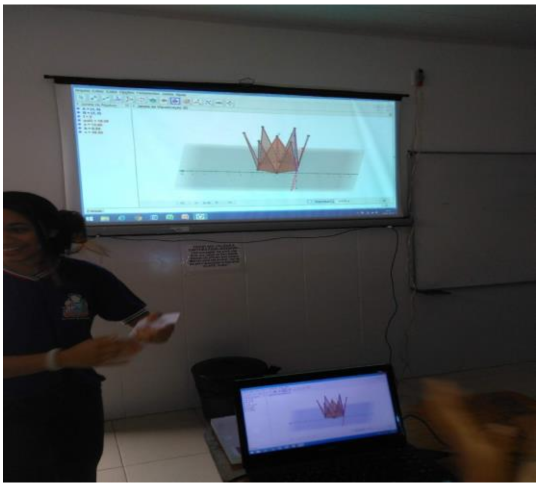


Figura 106: Panificação da Pirâmide Hexagonal.
Fonte: O Próprio Autor

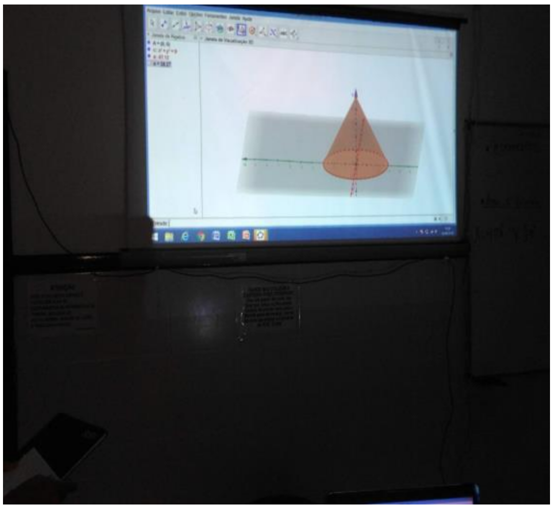


Figura 107: Construção do Cone
Fonte: O Próprio Autor

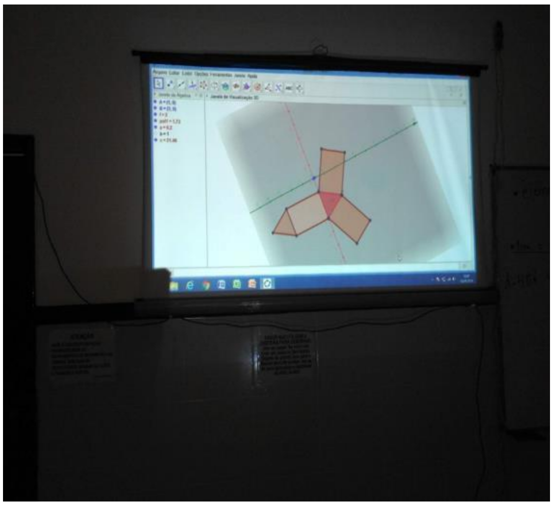


Figura 108: Planificação do Prisma de base triangular
Fonte: O Próprio Autor

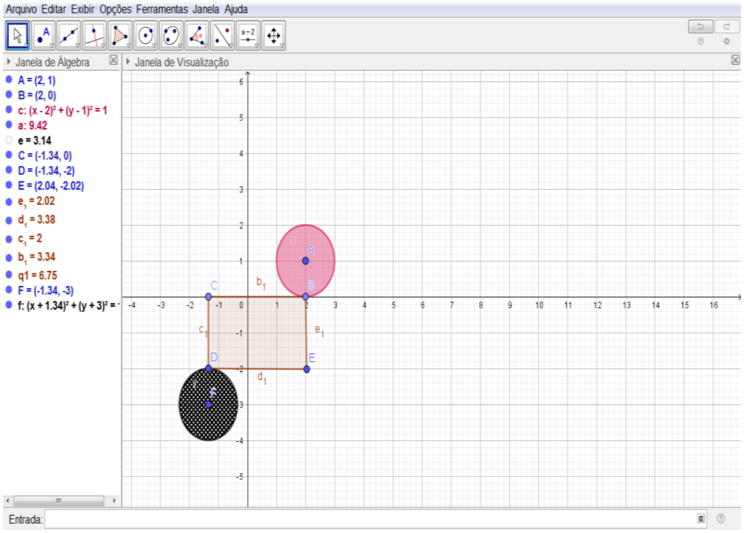


Figura 109: Demonstração da Planificação de um Cilindro.
Fonte: O Próprio Autor

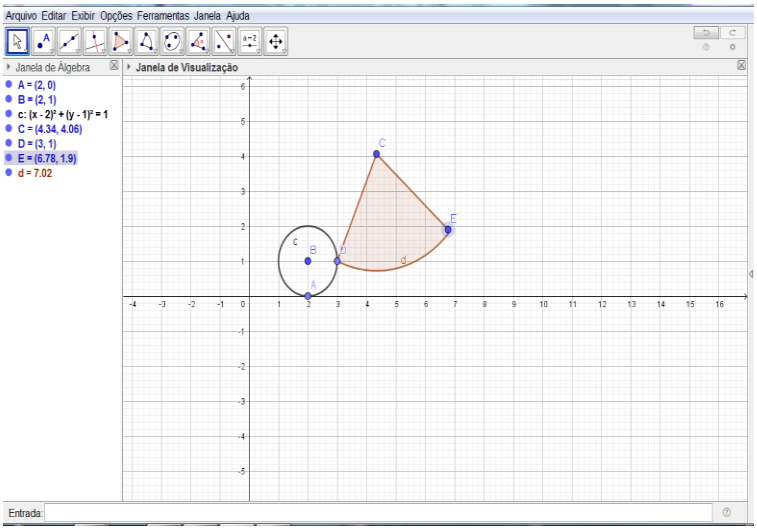


Figura 110: Demonstração da Planificação de um Cone.
Fonte: O Próprio Autor

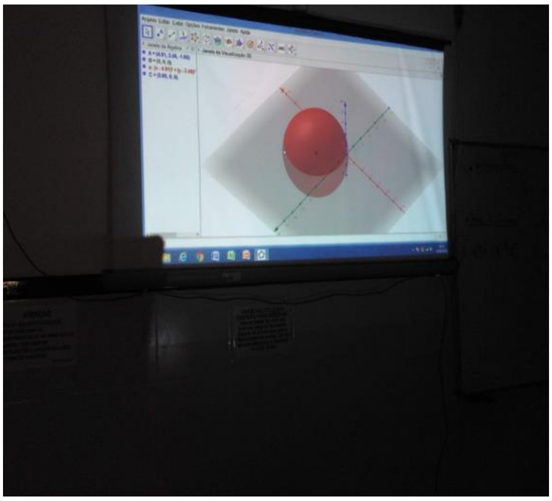


Figura 111: Criação de uma Esfera.
Fonte: O Próprio Autor

Figura 112: Explicando a planificação de uma Esfera.
Fonte: O Próprio Autor

O interessante foi perceber o quanto os discentes tinham se aprofundado no GeoGebra. Quando partiram para a construção dos sólidos de corpos redondos, fizeram uso da planificação, criando suas próprias formas e determinando suas áreas. Concluindo que a área total da figura final era a soma daquelas áreas.

Após, a finalização dos trabalhos de apresentação e de estudo do *software*, assim como o do estudo da planificação, da construção e da manipulação dos sólidos, foi lançado um questionário a posteriori (ANEXO C), para levantamento e análise dos dados propostos.

Os gráficos abaixo mostram o resultado do questionário *a posteriori* aplicado para todos os 32 discentes dessa turma.

4.4 RESULTADOS DO QUESTIONÁRO A POSTERIORI

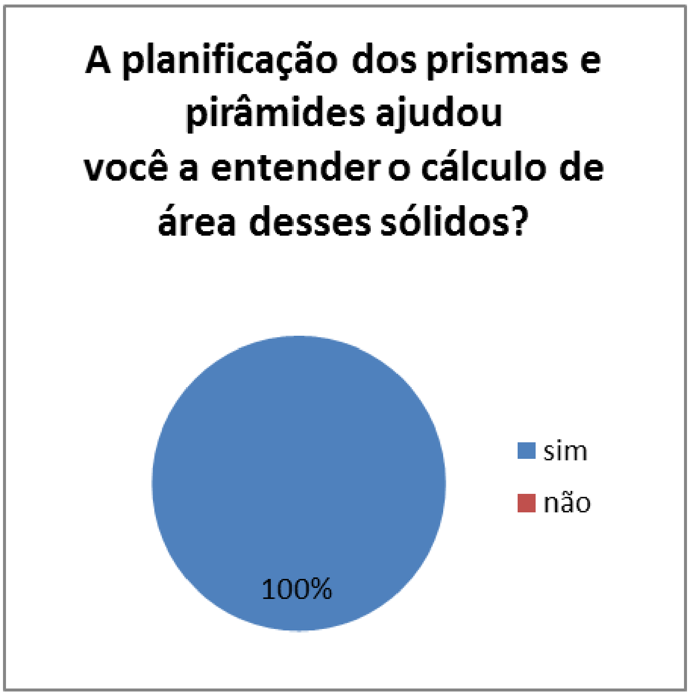


Figura 113: Resposta do item 1 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Com o primeiro quisito já pode-se perceber que foi favorável o trabalho desenvolvido, já que todos os alunos disseram que a aplicação os ajudaram.

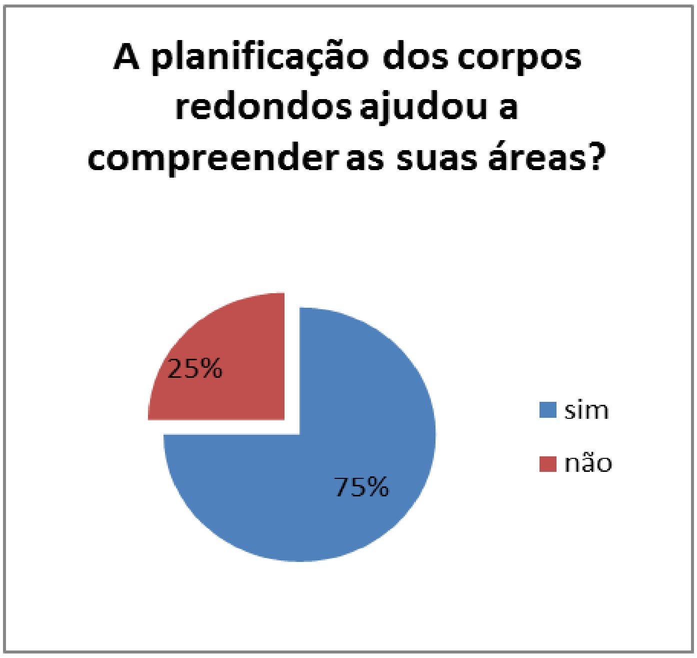


Figura 114: Resposta do item 2 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Quanto ao estudo dos corpos redondos, pode-se perceber uma melhora, talvez não o quanto o esperado, mas vale ressaltar a grande dificuldade que os participantes sentiam e muitas delas foram sanadas.

Figura 115: Resposta do item 3 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

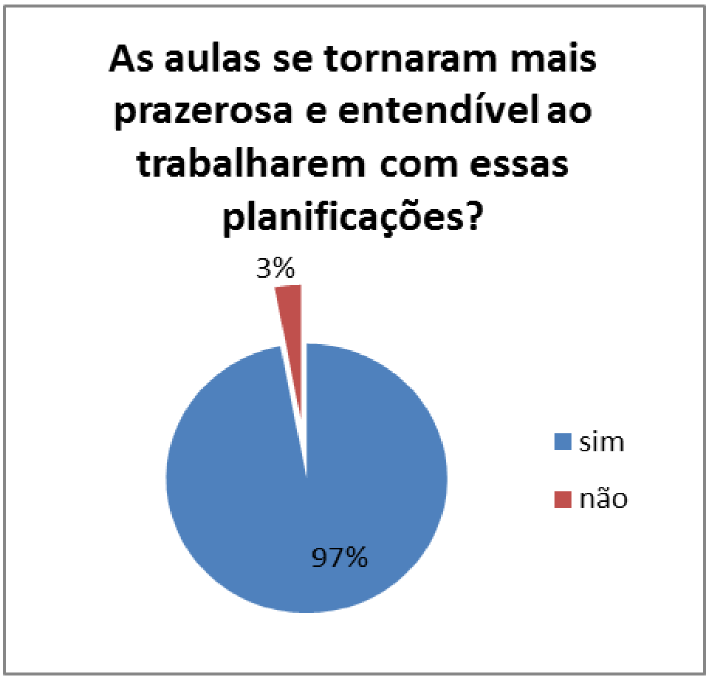


Figura 116: Resposta do item 4 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Com as questões dos itens 3 e 4 deste questionário, podemos perceber o quanto é grande a colaboração por parte da manipulação de sólidos, a fim de compreender todos os entes trabalhados.

Figura 117: Resposta do item 5 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Os discentes firmam o pensamento, através de suas respostas a importância desse mecanismo que é cada vez mais importante no ensino aprendizagem deste conteúdo de Geometria Espacial.

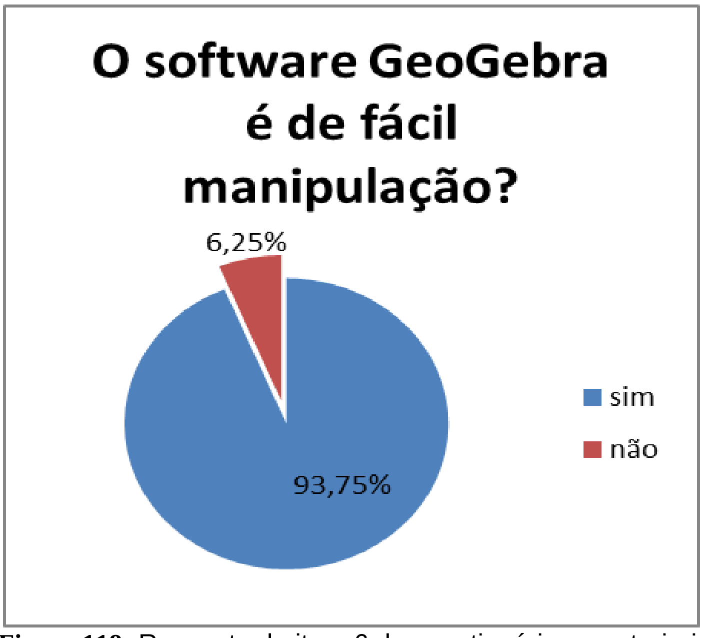


Figura 118: Resposta do item 6 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Como era o esperado e por isso foi feito a escolha desse software, a grande maioria gostou de trabalhar com o mesmo, é um programa de fácil manuseio e por isso tão atrativo.

Figura 119: Resposta do item 7 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Podemos perceber, atravéz das respostas que um paradgma foi quebrado, a maneira de visualizar essas formas tridimensionais, utlilizando o software veio somar com o dia a dia de cada um.

Figura 120: Resposta do item 8 do questionário a posteriori.
Fonte: Próprio Autor

Com o uso desse mecanismo, os discentes puderam calcular itens como área plana, área de sólidos, assim como seus volumes de uma forma mais dinâmica e eficaz, por isso demonstrou-se tão atraente.

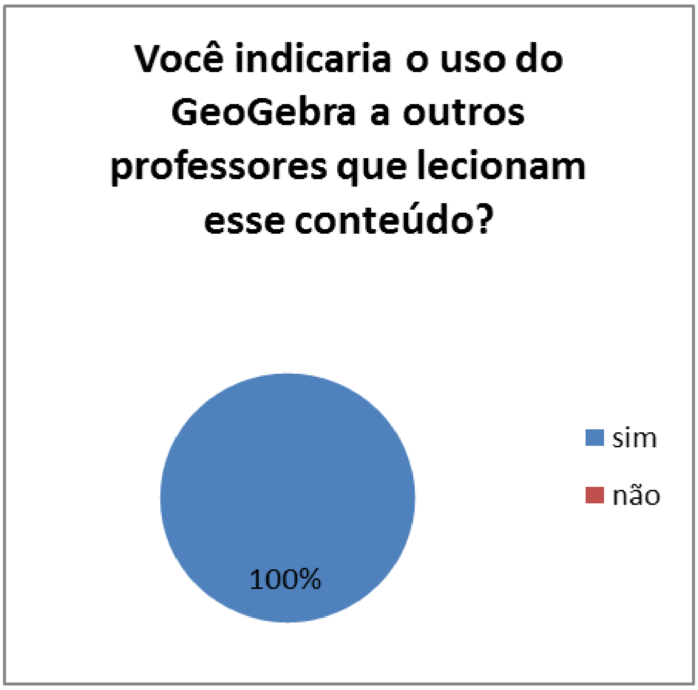


Figura 121: Resposta do item 9 do questionário a posteriori
Fonte: Próprio Autor

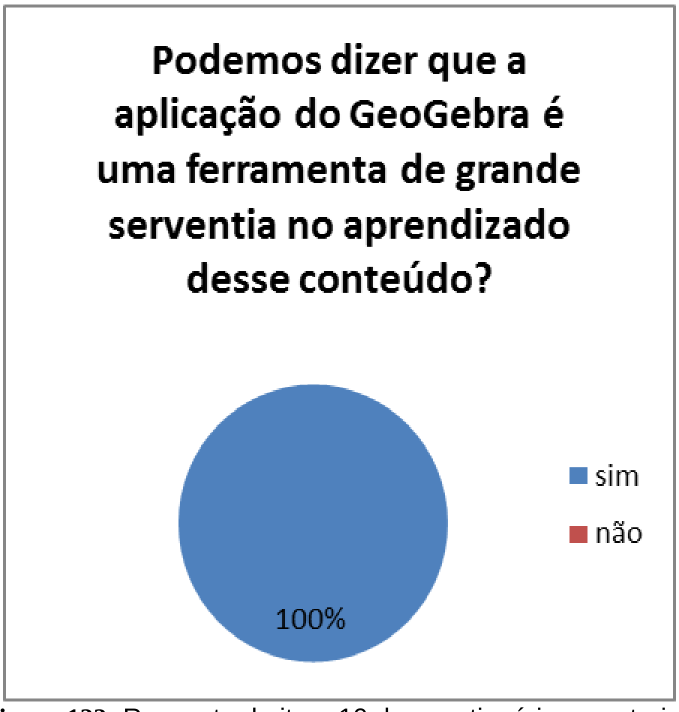


Figura 122: Resposta do item 10 do questionário a posteriori
Fonte: Próprio Autor

As respostas trazidas às questos 9 e 10 deste questionário evidenciam o quanto os participantes do minicurso gostaram do GeoGebra e o quanto acharam eficaz para a vida estudantil.

CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se iniciou este trabalho, foi diagnosticada uma dificuldade por parte dos discentes para a compreensão do conteúdo de geometria espacial. Tal dificuldade tem surgido principalmente pelo método de aplicação, pela pouca participação dos alunos nas atividades e pela maneira de exposição do conteúdo.

Frente a isso, o objetivo principal deste trabalho foi aplicar uma metodologia diferenciada para o ensino/aprendizagem do conteúdo de geometria espacial. Para o desenvolvimento do trabalho, foram propostos dois momentos: o primeiro trouxe a construção, a planificação e a manipulação de sólidos geométricos, utilizando materiais concretos recicláveis ou de pouco custo.

No segundo momento, foi desenvolvido um trabalho com computadores no laboratório de informática da escola, utilizando o *software* GeoGebra. O GeoGebra permitiu aos estudantes uma maior participação e uma melhor manipulação dos sólidos.

A análise das respostas do questionário que foi aplicado *a priori* mostrou que a maioria participante da pesquisa, já trabalhou o conteúdo de Geometria Espacial na segunda série do ensino médio. Entretanto, os resultados mostraram também, que a maioria desses discentes não se lembrava de como calcular a área e o volume de alguns sólidos, nem do significado de alguns conceitos, como vértice, aresta e faces de um sólido.

A planificação e a manipulação dos sólidos através do uso de materiais concretos, bem como do uso do GeoGebra, ajudaram o entendimento de alguns conceitos de Geometria Espacial. Sem falar que as aulas se tornaram mais prazerosas e de fácil entendimento. Como se pode verificar através da análise das respostas do questionário a *posteriori*.

Espera-se que este trabalho sirva de motivação para que professores da educação básica, utilizem mais frequentemente, novas metodologias de ensino para lecionarem os conteúdos de Matemática pelos quais são responsáveis em suas respectivas turmas. Pois apesar de algumas escolas não contarem com laboratório de informática, os professores necessitam refletir, que nos dias de hoje, qualquer aluno tem acesso a um *smartfone, tablet, notebook,* de sua propriedade ou de propriedade de um familiar ou amigo. Onde pode ser instalado e manuseado um software tão poderoso e didático como o GeoGebra.

Ao final desse trabalho, ficou constatado que o processo realizado com a manipulação de sólidos, assim como o uso de ferramentas, tais como o *software* GeoGebra, podem ser, em algumas situações um “novo” instrumento para fortalecer o aprendizado de conteúdos relacionados a Geometria Espacial, ajudando os discentes a se tornarem aptos a realizar trabalhos e que possam dar segmento em sua vida educacional. Utilizando a todo o momento que necessitar, os conhecimentos adquiridos.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.Trad. RESTREPO, Myriam Vega. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

EVES, Howard; **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas/SP. Editora da Unicamp, 2004. P.60, 61, 141 a 147

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática**: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FONSECA, M. C. F. R. **O sentido matemático do letramento nas práticas sociais. Presença Pedagógica.** Belo Horizonte: Editora Dimensão, 2005.

HOWE, Kenneth R. Against the quantitative-qualitative incompatibility thesis – or dogmas die hard. **Educational Researcher**, v.17, n.8, p.15, 1988.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M.. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**, IV Congresso RIBIE, Brasília, 1988.

KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos.** Niterói: EdUFF, 2003.

KALEFF, A. M. **Vendo e Entendendo Poliedros: Do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças Geométricos e outros materiais concretos (2ª ed.)**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Universidade Federal Fluminense, 2006.

LIMA, E. L. RPM 41 – **Conceituação, manipulação e aplicações. Os componentes do ensino da Matemática.** Disponível em: <rpm.org.br/cdrpm/41/1.htm>. Acesso em: 15 de março de 2019.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P., orgs. **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

MORAN, J. M. **Ensino e Aprendizagem inovadores com tecnologias auditivas e temáticas**. In: MORAN, J. M; MASETTO, M. T e BEHRENS, M. **As novas tecnologias e mediação pedagógica.** 1 ed. São Paulo: Papirus, 173p. 2000.

MINGUET, P. A. **A construção do conhecimento na educação**. Porto Alegre: Artmed,1998.

NOBREGA, L. **Conhecendo o GeoGebra**. Acesso disponível em 23 de maio de 2019: <https://professorlucianonobrega.files.wordpress.com/2011/08/capitulo-1-livro-aprendendo-matematica-com-o-geogebra.pdf>.

PIRASSINUNGA, AdailtonSampaio. **O Ensino militar no Brasil**. Rio de Janeiro: Biblioteca do Exército, 1958. 117 p. (Período colonial).

SABBA, Claudia Georgia. **A Gestalt e o Ensino de Geometria**. In: Linguagem, conhecimento, ação: ensaios de epistemologia e didática / org. Nílson José Machado, Marisa O. Cunha. – São Paulo: Escrituras Editora, 2003. – (Coleção ensaios transversais, 23).

SCHIRLO, A. C.; SILVA, S. de C. R. da. **O ensino da geometria auxiliando a fabricação de embalagens.** Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, vol 2, num 1, jan./abri.2009.

Secretaria de Estado de Educação. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática para os anos finais do ensino Fundamental e para o Ensino Médio.** Curitiba: SEED, 2008.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. "O que é polígono?"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-poligono.htm. Acesso em 03 de janeiro de 2020.

SMOLE, K. S. et al. **Jogos de matemática**: 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008. 120 p.

VALENTE, W.R. Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730- 1930. São Paulo: Annablume; FAPESP, 1999.

ANEXOS

ANEXO A – APROVAÇÃO DO CEP (Conselho de Ética em Pesquisa)

cep comitê de ética em pesquisa

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Plataforma Brasil

Continuação do Parecer: 3.580.900

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1403747.pdf	15/09/2019 18:25:23		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_corrigido.pdf	15/09/2019 17:57:11	ANDRE ANDERSON SILVA PAIXAO	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA_CORRIGIDO.pdf	15/09/2019 17:56:25	ANDRE ANDERSON SILVA PAIXAO	Aceito
Brochura Pesquisa	brochura_corrigida.pdf	15/09/2019 17:54:45	ANDRE ANDERSON SILVA PAIXAO	Aceito
Folha de Rosto	folha_de_rosto.pdf	24/08/2019 11:05:10	ANDRE ANDERSON SILVA PAIXAO	Aceito
Outros	questionario.pdf	21/08/2019 20:53:38	ANDRE ANDERSON SILVA PAIXAO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	termo_da_diretora.pdf	21/08/2019 10:53:01	ANDRE ANDERSON SILVA PAIXAO	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

ANEXO B – QUESTIONÁRIO A PRIORI

QUESTIONÁRIO A PRIORI		
1) Já estudou o conteúdo de Geometria Espacial?	SIM	NÃO
2) Lembra do conceito de vértices, aresta e faces?	SIM	NÃO
3) Sabe o que é um prisma ou pirâmide?	SIM	NÃO
4) Tem lembrança dos cálculos das formas do cilindro, cone e/ou esfera?	SIM	NÃO
5) Lembra ou sabe definir as equações para o cálculo de área dos sólidos citados?	SIM	NÃO
6) Sabe o que é o cálculo de volume?	SIM	NÃO
7) Lembra ou sabe definir as equações para o cálculo de volumes dos sólidos citados?	SIM	NÃO
8) Utilizaram materiais concretos para o aprendizado desse conteúdo?	SIM	NÃO
9) Fizeram o uso de ferramentas tecnológicas para esse aprendizado?	SIM	NÃO
10) Você acha que a utilização de materiais concretos e de tecnologias ajudariam no aprendizado desse conteúdo?	SIM	NÃO

ANEXO C – QUESTIONÁRIO A POSTERIORI

QUESTIONÁRIO A POSTERIORI		
1) A planificação dos prismas e pirâmides ajudou você a entender o cálculo de área desses sólidos?	SIM	NÃO
2) A planificação dos corpos redondos ajudou a compreender as suas áreas?	SIM	NÃO
3) Com a planificação e manipulação fica mais claro o cálculo de Volume dos sólidos?	SIM	NÃO
4) As aulas se tornaram mais prazerosa e entendível ao trabalharem com essas planificações?	SIM	NÃO
5) Podemos afirmar que a manipulação e planificação dos sólidos é um instrumento indispensável para o ensino-aprendizagem desse conteúdo?	SIM	NÃO
6) O software GeoGebra é de fácil manipulação?	SIM	NÃO
7) Com o GeoGebra a criação e visualização dos sólidos são mais fáceis?	SIM	NÃO
8) Ao criar os sólidos no Software, obter as respostas desejadas se tornam mais simples?	SIM	NÃO
9) Você indicaria o uso do GeoGebra a outros professores que lecionam esse conteúdo?	SIM	NÃO
10) Podemos dizer que a aplicação do GeoGebra é uma ferramenta de grande serventia no aprendizado desse conteúdo?	SIM	NÃO