



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO CENTRO
DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA PROFMAT – Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Teste da Derivada Segunda para funções de duas Variáveis: uma visão geométrica

Andersen Martins de Oliveira

RIO DE JANEIRO

2020

Andersen Martins de Oliveira

Teste da Derivada Segunda para funções de duas Variáveis: uma visão geométrica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro
2020

Andersen Martins de Oliveira

Teste da Derivada Segunda para funções de duas variáveis: uma visão geométrica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse - Orientador
UNIRIO



Prof. Dr. Michel Cambraíha de Paula
UNIRIO



Prof. Dr. Leonardo Tadeu Silveiras Martins
UFF

Rio de Janeiro

2020

Catálogo informatizada pelo(a) autor(a)

048	<p>Oliveira, Andersen Martins de Teste da Derivada Segunda para funções de duas variáveis: uma visão geométrica / Andersen Martins de Oliveira. -- Rio de Janeiro, 2020. 55p</p> <p>Orientador: Ronaldo da Silva Busse. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós- Graduação em Matemática, 2020.</p> <p>1. Máximo, Mínimo, Sela.. I. Busse, Ronaldo da Silva , orient. II. Título.</p>
-----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dedico este trabalho à minha mãe Maria da Conceição, pilar da minha formação como ser humano e à minha esposa Flavia que me apoiou nos momentos difíceis durante toda a minha trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu professor Ronaldo que nunca se negou a compartilhar seus conhecimentos comigo e aos meus filhos que abdicaram de seu lazer, algumas vezes, para que eu chegasse até esta etapa.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é mostrar a aplicação do teste da segunda derivada, com duas variáveis. No início do ensino de cálculo, é apresentada a aplicação do teste da segunda derivada com uma variável, que nos dá os pontos de máximo, mínimo e ponto de inflexão, e sua representação geométrica é no plano XY . Agora iremos apresentar o teste da segunda derivada com duas variáveis, que nos dá os pontos de máximo, mínimo e sela, e sua representação geométrica é no plano XYZ . Para isso faz-se necessária a apresentação de assuntos que são fundamentais para a compreensão de tais aplicações, inicialmente é feita uma revisão sobre pontos críticos, aproximação quadrática, parabolóides elípticos e hiperbólicos e diagonalização de matrizes que servirão de base para a apresentação do trabalho.

Palavras-chaves: Máximo, Mínimo, Sela.

ABSTRACT

The objective of this abstract is presenting the appliance of the second derivative analysis, containing two variables. By the Calculation learning commencement, the application of the second derivative test with a variable is presented, in which gives us the points of maximum, minimum and inflection point, and its geometric representation is in the XY plane. Now we Will present the test of the second derivative with two variables, which gives us the points of maximum, minimum and saddle, and its geometric representation is in the XYZ plane. For that, it is mandatory to present subjects that are fundamental for the understanding of such applications, initially a review is made on critical points, quadratic approximation, elliptical and hyperbolic paraboloids and diagonalization of matrices that will serve as the basis for the presentation of the work.

Keywords: Maximum, Minimum, Saddle

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	8
Capítulo 1 PRELIMINARES	9
1.1. Extremos Locais: Pontos Críticos	9
1.2. Aproximação Quadrática	12
1.3. Os Parabolóides Elípticos e Hiperbólicos	16
1.3.1. Superfícies Quádricas	16
1.3.2. Parabolóide Elíptico	17
1.3.3. Parabolóide Hiperbólico	19
1.4. Os Diagonalização de Matrizes	22
1.4.1. Base e Matriz Mudança de Base	23
1.4.2. Autovalores e Autovetores	27
1.4.3. Teorema Espectral para matriz simétrica e Diagonalização de Matrizes	31
Capítulo 2 O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA	36
2.1 Teste para função de duas variáveis	36
Capítulo 3 ALGUNS EXEMPLOS	43
CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS	55

INTRODUÇÃO

No estudo de Cálculo, os pontos de máximo e mínimo, também chamados de pontos extremos de uma função, são pontos do domínio onde a função atinge seu valor máximo e mínimo.

No mundo das variáveis únicas, quando você encontra uma entrada na qual a derivada da função é 0, $f'(a) = 0$, a segunda derivada neste ponto pode determinar se essa entrada é um ponto de máximo ou de mínimo local. De maneira particular, $f''(a) > 0$ indica concavidade positiva, então f tem um ponto mínimo local em a , se $f''(a) < 0$ indica concavidade negativa, então f tem um ponto máximo local em a .

Para funções de mais do que uma variável as mesmas condições se aplicam. Por exemplo, a condição necessária para o máximo local são similares a utilizadas para uma função com somente uma variável. O teste da segunda derivada parcial pode ajudar classificar o ponto em que é máximo relativo ou mínimo relativo. Em contraste, há diferenças entre funções de uma variável e funções de mais do que uma variável na identificação do extremo global.

Neste trabalho, falarei da importância de sair um pouco do campo analítico para entrar no visual, que nos auxilie na compreensão desta realidade e nos orienta em nossas ações.

Abordarei a representação geométrica da segunda derivada com duas variáveis.

No capítulo 1, falaremos de pontos críticos, aproximação quadrática, superfícies quádricas, parabolóides elípticos, parabolóides hiperbólicos, base e matriz mudança de base, autovalores e autovetores, teorema espectral para matriz simétrica e diagonalização de matrizes, que são pré-requisitos para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2, abordaremos com mais propriedade o teste da segunda derivada para funções de duas variáveis.

No último capítulo, faremos alguns exemplos para um melhor entendimento.

Capítulo 1 PRELIMINARES

Como prerrequisito para trabalho, derivadas parciais, gradiente e função polinomial de várias variáveis.

Neste capítulo, serão apresentadas as definições matemáticas necessárias para o desenvolvimento do tema principal do trabalho. Serão dados, ainda, alguns exemplos e resultado importantes.

Ao longo do texto, serão tratadas apenas funções reais de duas variáveis.

1.1 EXTREMOS LOCAIS: PONTOS CRÍTICOS

A primeira definição importante é referente a máximos e mínimos de uma função, ditos extremos. Para esse trabalho, os focos serão os extremos locais ou relativos, a saber:

Definição 1.1:

Sejam : $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(0, 0) \in D$.

- Diz-se que $(0, 0)$ é um ponto de máximo relativo de f se existir uma vizinhança de $(0, 0)$ tal que $f(x, y) \leq f(0, 0)$, para todo $(x, y) \in D$.
- Diz-se que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo relativo de f se existir uma vizinhança de $(0, 0)$ tal que $f(x, y) \geq f(0, 0)$, para todo $(x, y) \in D$.

Fonte: Própria (2020)

Observa-se pela definição que dado um ponto do domínio da função, é possível verificar se é um extremo relativo analisando as condições i) e ii). Uma questão natural

que surge é: “para determinar os extremos relativos de uma função, é preciso analisar as condições da definição para todos os pontos do seu domínio?” Obviamente, esse não pode ser um caminho, visto que seria necessário considerar uma quantidade infinita de pontos. O teorema a seguir fornece um critério para selecionar, dentre os pontos interiores de D_f , os candidatos a extremantes locais de f .

Teorema 1.1: Seja (x_0, y_0) um ponto interior de D_f e suponhamos que $f'_x(x_0, y_0)$ e $f'_y(x_0, y_0)$ existam. Nestas condições, uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja um extremante local de f é que $f'_x(x_0, y_0) = 0$ e $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Por não ser foco deste trabalho, a demonstração será omitida, mas pode ser encontrada em Guidorizzi (2001).

Geometricamente, o teorema diz que se (x_0, y_0) for interior a D_f , f diferenciável em (x_0, y_0) e (x_0, y_0) extremante local de f , então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ será paralelo ao plano xy . Essa interpretação também pode ser encontrada em Guidorizzi (2001).

O teorema anterior não se aplica a pontos de fronteira de D_f ; um ponto de fronteira de D_f pode ser um extremante local sem que as derivadas parciais se anulem nele. Os pontos de fronteira devem ser analisados separadamente.

Um ponto interior a D_f candidato a extremante local de f é dito um **ponto crítico** de f .

O teorema anterior diz que se f admite derivadas parciais em todos os pontos interiores de D_f , então os pontos críticos $(0, 0)$ de f são aqueles tais que:

$$f(x_0, y_0) = \underset{x}{f'}(x_0, y_0), \underset{y}{f'}(x_0, y_0) = (0, 0)$$

onde o vetor ∇f é dito gradiente de f no ponto.

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como D_f é um conjunto aberto ($D_f = \mathbb{R}^2$), de

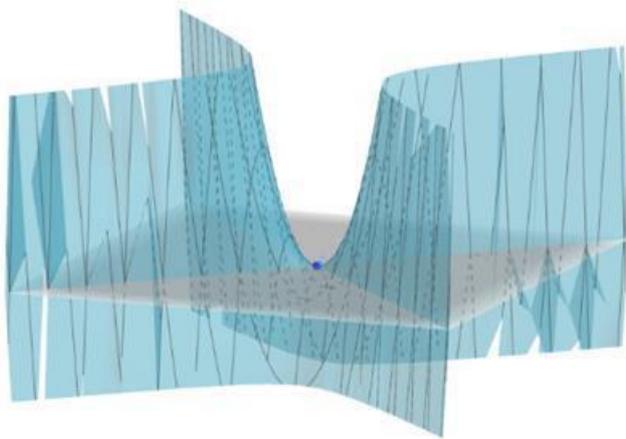
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

segue que $(0, 0)$ é o único candidato a extremante local. Como $f(x, y) - f(0, 0) = 0$, para todo (x, y) em \mathbb{R}^2 , resulta que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo relativo de f (na verdade, é um mínimo absoluto, mas não vem ao caso para o escopo do trabalho).

Exemplo: O único ponto crítico de $f(x, y) = x^2 - y^2$ é $(0, 0)$. Verifica-se que $(0, 0)$ não é extremante local. Para uma visualização geométrica, considere as interseções do gráfico de f com os planos yz e xz .

O ponto $(0, 0)$ é um máximo quando consideramos a função restrita a um dos planos e um mínimo para o outro plano. Nesse caso, $(0, 0)$ é dito o **ponto de sela**. O gráfico desta função tem o aspecto de uma “sela de cavalo”.



Fonte: Própria (2020)

Exemplo: Seja $z = f(x, y)$, com domínio $D_f = [0, 1] \times [0, 1]$, onde $f(x, y) = x^2 y + 3x$.

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo de f em D_f , pois $f(x, y) \geq f(0, 0)$ em D_f .

Como $\overline{D_f} = \{x^2 y + 3\}$, segue que $f(\overline{0, 0}) = 3$. Este fato não contradiz o teorema 1, pois ele só se aplica a pontos interiores e $(0, 0)$ não é ponto interior de D_f .

1.2 APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA

Nessa seção, será apresentada a seguinte questão: dados $f(x, y)$ uma função de

classe C^2 (Com derivadas até ordem 2) em um aberto A^2 e $(0, 0) \in A^2$, de que forma é possível determinar uma função polinomial do segundo grau que aproxime $f(x, y)$ para elementos próximos a $(0, 0)$?

Para responder a essa pergunta, considere, inicialmente, o seguinte exemplo:

Exemplo: Determine uma aproximação quadrática para função $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ em torno de $(0, 0)$.

Solução: Obter uma aproximação quadrática é encontrar uma função do segundo grau $z(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$ cujas imagens dos elementos próximos a $(0, 0)$ sejam próximas às imagens por $f(x, y)$. Para que ele seja uma boa aproximação de $f(x, y)$ no ponto dado, é interessante que ele assumo o mesmo valor da função nesse ponto, ou seja,

$$z(0, 0) = f(0, 0) \quad a + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 + e \cdot 0 + f \cdot 0 = \cos 0 \cdot \cos 0 \Rightarrow a = 1.$$

A aproximação se torna melhor à medida que as derivadas primeiras e segundas também sejam iguais nesse ponto. Logo,

$$z_x(0, 0) = f_x(0, 0) \quad b = -\sin 0 \cos 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$z_y(0, 0) = f_y(0, 0) \quad c = -\cos 0 \sin 0 \Rightarrow c = 0.$$

e

$$z_{xx}(0, 0) = f_{xx}(0, 0) \quad 2d = -\cos 0 \cos 0 \quad 2d = -1 \quad \boxed{d = -0,5},$$

$$z_{xy}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) \quad f = \sin 0 \sin 0 \quad \boxed{f = 0},$$

$$z_{yy}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) \quad 2e = -\cos 0 \cos 0 \quad 2e = -1 \quad \boxed{e = -0,5}.$$

Tendo determinado todos os coeficientes, a função quadrática que melhor aproxima $f(x, y)$ em torno do ponto $(x, y) = (0, 0)$ é dada por

$$z(x, y) = 1 - 0,5x^2 - 0,5y^2.$$

No caso geral, é possível aproximar uma função $f(x, y)$ na proximidade de um ponto (x_0, y_0) por meio de uma função $z(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$ com as seguintes características:

• As imagens de e coincidem no ponto (x_0, y_0)

$$a + bx_0 + cy_0 + dx_0^2 + ey_0^2 + fx_0y_0 = f(x_0, y_0).$$

- As derivadas primeiras de ambas as funções também coincidem nesse ponto: z_x

$$z_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \quad b + 2dx_0 + fy_0 = f_x(x_0, y_0),$$

$$z_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \quad c + 2ey_0 + fx_0 = f_y(x_0, y_0).$$

- As derivadas segundas de ambas as funções também coincidem em (x_0, y_0) : $z_{xx}(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \quad 2d = f_{xx}(x_0, y_0) \quad d = \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)$

$$z_{xy}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0) \quad \boxed{f = f_{xy}(x_0, y_0)}$$

$$z_{yx}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \boxed{f = f_{yx}(x_0, y_0)}$$

$$z_{yy}(x, y) = f_{yy}(x, y) \quad 2e = f_{yy}(x, y) \quad \boxed{e = \frac{1}{2}f_{yy}(x, y)}$$

Note que, das equações, tem-se que ter necessariamente $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, pois ambos os valores são iguais ao coeficiente f do parabolóide. Portanto, é, de fato, necessário que a função seja de classe C^2 . Utilizando agora os coeficientes encontrados, podemos determinar os coeficientes restantes:

$$b + 2dx_0 + fy_0 = f_x(x_0, y_0) \quad b = f_x(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0)x_0 - f_{xy}(x_0, y_0)y_0$$

$$c + 2ey_0 + fx_0 = f_y(x_0, y_0) \quad c = f_y(x_0, y_0) - f_{yy}(x_0, y_0)y_0 - f_{xy}(x_0, y_0)x_0$$

$$a + bx_0 + cy_0 + dx_0^2 + ey_0^2 + fx_0y_0 = f(x_0, y_0) \quad a = f(x_0, y_0)$$

$$- f_{xx}(x_0, y_0)x_0^2 - f_{yy}(x_0, y_0)y_0^2 - f_{xy}(x_0, y_0)x_0y_0$$

$$a = f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0 + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)x_0^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)y_0^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x_0 + y_0 - x_0y_0)$$

Substituindo esses coeficientes na equação do segundo grau, tem-se

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0 + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)x_0^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)y_0^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x_0 + y_0 - x_0y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

Colocando as derivadas no ponto em evidência, obtém-se

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x_0^2 - 2x_0x + x^2) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y_0^2 - 2y_0y + y^2) + f_{xy}(x_0, y_0)(x_0 + y_0 - x_0y_0 - y_0x - x_0y + xy)$$

De modo que se tem

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

Esta é a função do segundo grau que melhor se ajusta a uma função $f(x, y)$ em torno de um ponto (x_0, y_0) .

Observação: Note que a função obtida corresponde ao polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de (x_0, y_0)

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

determinado pelo seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em Guidorizzi (2001):

Teorema: Seja $f(x, y)$ de classe C^3 no aberto A e sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A .

Nestas condições,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{1}{2} f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{6} f_{xxx}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3 \frac{1}{6} f_{xxy}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3 \frac{1}{6} f_{xyy}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \frac{1}{6} f_{yyy}(\bar{x}, \bar{y})k^3$$

para algum (\bar{x}, \bar{y}) interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Observação: A aproximação quadrática obtida pode ser escrita na forma matricial, como se segue

$$z = f(x_0, y_0) + \left(f(x_0, y_0) \right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \text{Hess}f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

onde $\text{Hess}f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$ é dita matriz hessiana de f .

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Observação: Em matemática, a matriz hessiana de uma função "f" de n variáveis é a matriz quadrada com "n" colunas e "n" linhas (n X n) das derivadas parciais de segunda ordem da função. O seu determinante é denominado **função hessiana** e, nos livros de cálculo, costuma ser referenciado simplesmente de **hessiana**.

Observação: No caso de uma função de duas variáveis e de classe C², a hessiana é dada por $Hf = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$, visto que as derivadas mistas de segunda ordem coincidem.

Exemplo: $f(x, y) = x^2 - y^3$.

$$f_x = 2x, f_{xx} = 2, f_y = -3y^2, f_{yy} = -6y, f_{xy} = 0, f_{yx} = 0$$

$$\det \text{Hess}f(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix} = -12y$$

1.3 OS PARABOLOIDES ELÍPTICOS E HIPERBÓLICOS

Em matemática, um parabolóide é uma superfície quádrlica de tipo especial. Existem dois tipos de paraboloides: elípticos e hiperbólicos. Os paraboloides terão papel fundamental para o desenvolvimento desse trabalho.

1.3.1 Superfícies Quádricas

Quádrlica ou **superfície quádrlica** é, em matemática, o conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas formam um polinômio de segundo grau de no máximo três variáveis denominada de *equação cartesiana da superfície*:

É o gráfico no espaço de uma equação de segundo grau com três variáveis, do tipo

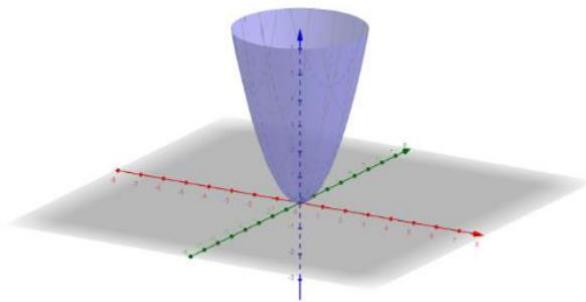
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

com pelo menos uma das constantes A, B, C, D, E ou F é diferente de zero.

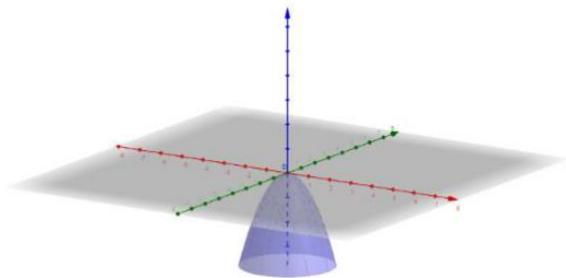
Observação: A interseção de uma superfície quádrlica com um dos planos coordenados ou por planos paralelos a eles é uma cônica. Em casos particulares, a interseção pode ser uma reta, duas retas, um ponto ou o conjunto vazio. Esses casos constituem as cônicas degeneradas.

1.3.2 Parabolóide Elíptico

O parabolóide elíptico é uma superfície no formato de uma “parábola tridimensional”, possuindo um vértice, que pode ser um ponto máximo ou mínimo, dependendo da orientação da sua orientação.



Fonte: Própria (2020)



Fonte: Própria (2020)

Os parabolóides elípticos na forma canônica, com vértice na origem $(0,0,0)$ e eixo OX , OY e OZ , são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

onde a, b, c são números reais não nulos.

Vamos analisar o parabolóide elíptico de eixo OZ

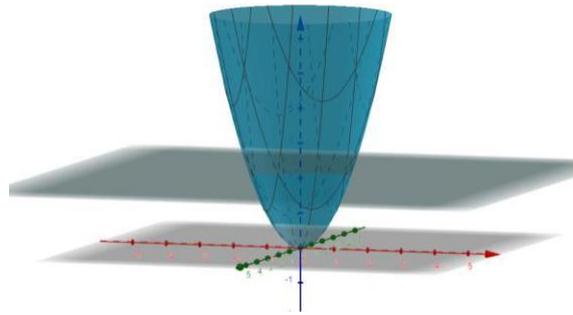
$$Q: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \text{com } c > 0.$$

A interseção de Q com o plano $z = k$, paralelo ao plano XY ,

$$Q_z = k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck,$$

$$z = k$$

- é uma elipse de centro $(0, 0, k)$, se $k > 0$;
- é a origem $(0, 0, 0)$, se $k = 0$;
- é o conjunto vazio, se $k < 0$;



$$Q : z = k, k \geq 0$$

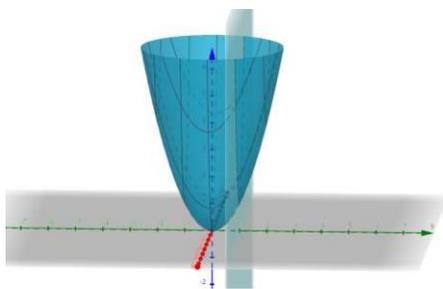
Fonte: Própria (2020)

As seções planas contidas nos planos paralelos aos planos XZ e YZ são parábolas:

$$Q_y = k : z = \frac{x^2}{ca^2} + \frac{k}{cb^2} = a\bar{x}^2 + b\bar{}$$

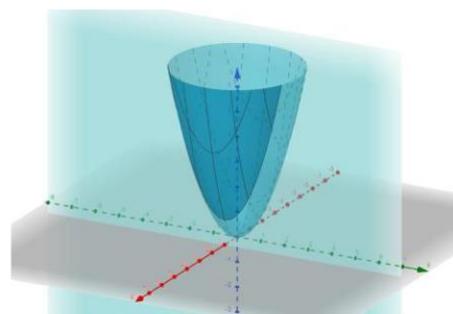
$$Q_x = k : z = \frac{k^2}{ca^2} + \frac{y^2}{cb^2} = a\bar{y}^2 + b\bar{}$$

$$x = k$$



$$Q : y = k$$

Fonte: Própria (2020)



$$Q : x = k$$

Fonte: Própria (2020)

Observação: Quando $a = b$, dizemos que $Q : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ é um parabolóide circular de eixo OZ .

Observação: No caso em que a superfície é dada por

$$Q : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \text{com } c < 0$$

a análise é feita de forma idêntica e obtém-se um parabolóide elíptico de eixo OZ com a concavidade voltada para baixo.

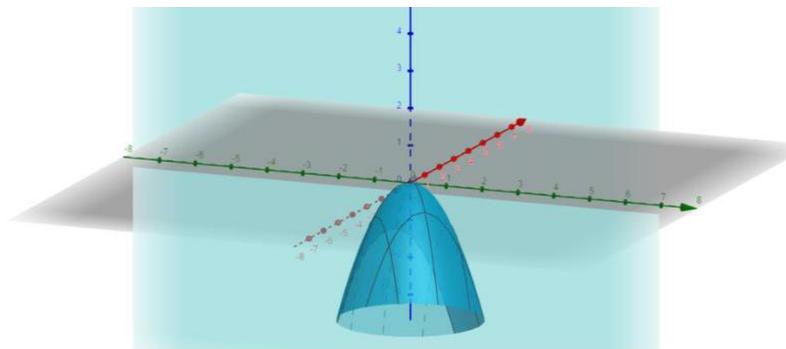
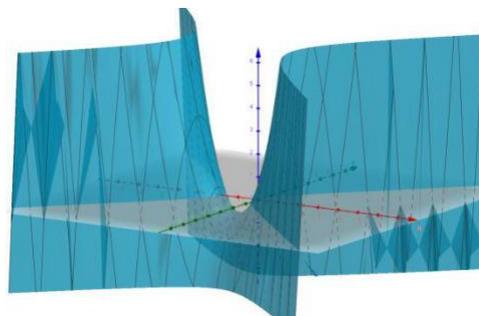


Figura: Própria (2020)

1.3.3 Parabolóide Hiperbólico

O parabolóide hiperbólico é uma superfície com um formato muito semelhante a uma sela de cavalo e possui um ponto, dito ponto de sela, de grande interesse para esse trabalho.



Os parabolóides hiperbólicos na forma canônica, com ponto de sela na origem $(0,0,0)$ e eixo OX , OY e OZ , são as quádricas dadas, respectivamente, pelas equações:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

onde a, b, c são números reais não nulos.

Vamos analisar o parabolóide hiperbólico de eixo OZ :

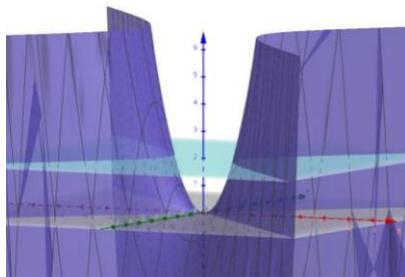
$$Q : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \text{com } c \neq 0.$$

A interseção de Q com o plano $z = k$, $k \neq 0$, paralelo ao plano XY ,

$$Q_{z=k} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck$$

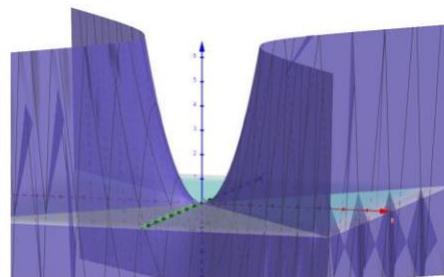
$$z = k,$$

- é uma hipérbole de reta focal paralela ao eixo OY , se $k > 0$;
- são duas retas que se cortam na origem, se $k = 0$;
- é uma hipérbole de reta focal paralela ao eixo OX , se $k < 0$;



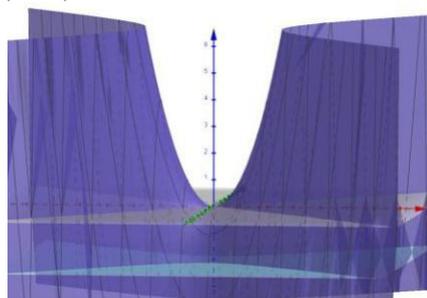
$Q \quad z = k, k > 0$

Fonte: Própria (2020)



$Q \quad z = 0$

Fonte: Própria (2020)



$Q \quad z = k, k < 0$

Fonte: Própria (2020)

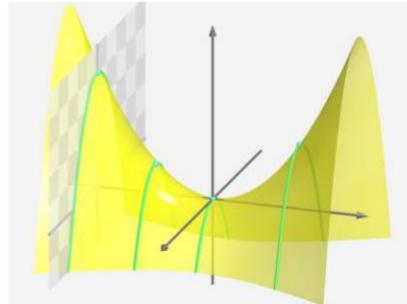
As seções planas contidas em planos paralelos ao plano XZ ,

$$Q_{y=k} : \quad x^2 = a^2 cz + \frac{k^2}{b} = a^2 z + \frac{k^2}{b}$$

$$y = k$$

são parábolas de reta focal paralela ao eixo OZ com concavidade voltada para baixo,

para todo $k \in \mathbb{R}$, uma vez que $\bar{a} = a^2 c < 0$.



$$Q_{y=k}$$

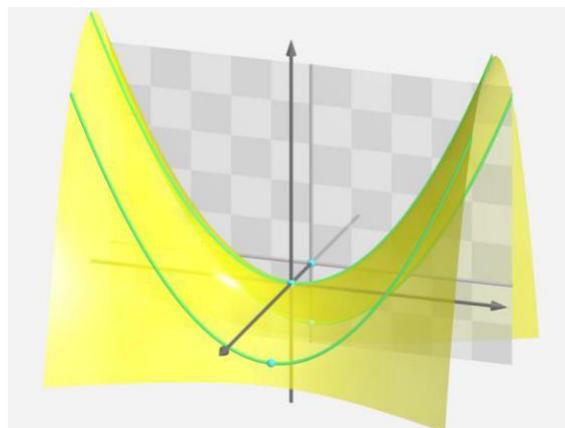
Fonte: Peres (2014)

De modo análogo, para todo $k \in \mathbb{R}$, as seções planas

$$Q_{x=k} : \quad y^2 = b^2 cz + \frac{k^2}{a} = b^2 z + \frac{k^2}{a}$$

são parábolas de reta focal paralela ao eixo OZ com concavidade voltada para cima,

pois, neste caso, $\bar{b} = -b^2 c > 0$.



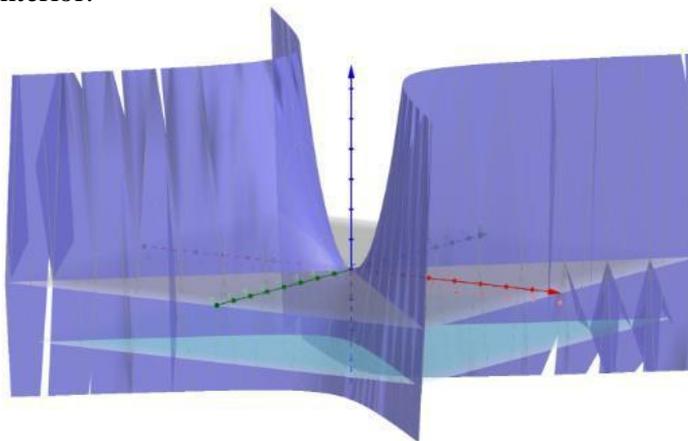
$$Q_{x=k}$$

Fonte: Peres (2014)

Observação: No caso em que a superfície é dada por

$$Q: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \text{com } c \neq 0$$

a análise é feita da mesma forma e as parábolas obtidas pelas interseções com os planos paralelos aos planos coordenados ficam com as concavidades invertidas. Como consequência, obtém-se um parabolóide hiperbólico com uma rotação de 90° no eixo z em relação ao anterior.



Fonte: Própria (2020)

1.4 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Em álgebra linear, uma matriz quadrada A é chamada de **diagonalizável** se é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. **Diagonalização** é o processo de encontrar essa tal matriz diagonal. Nesse caso, dizemos que a matriz A e a matriz diagonal são semelhantes.

Observação: Matrizes diagonalizáveis são de interesse porque são especialmente fáceis de manusear. Por exemplo: pode-se elevar uma matriz diagonal a uma certa potência simplesmente elevando as entradas da diagonal à mesma potência; o determinante de uma matriz diagonal é simplesmente o produto de todas as entradas da diagonal.

1.4.1 Base e Matriz Mudança de Base

Em álgebra linear, uma base para um espaço vetorial de dimensão n é uma sequência de n vetores (u_1, \dots, u_n) com a propriedade de que todo vetor do espaço pode ser representado de forma única como uma combinação linear dos vetores da base.

Com o intuito de facilitar a compreensão dos conceitos, trataremos aqui do espaço vetorial \mathbb{R}^2 .

Definição:

Um conjunto $B = \{u_1, u_2\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 se:

i) $u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \quad u \in \mathbb{R}^2 \iff (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ii) B é um conjunto linearmente independente (um vetor de B não é combinação linear dos demais)

Definição:

Seja $B = \{u_1, u_2\}$ uma base de \mathbb{R}^2 . Dado um vetor qualquer $u \in \mathbb{R}^2$, as coordenadas de u em relação a B são dadas por $u_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, onde

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

Observação: A definição diz que uma base é o menor conjunto que gera o espaço todo.

A base $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é dita base canônica de \mathbb{R}^2 , pois $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, qualquer

que seja o vetor (x,y) .

Por exemplo, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_0$, pois $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Considere, agora, outra base, digamos $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Vamos determinar as coordenadas do vetor $(3, 2)$ em relação a essa base,

$$\begin{aligned} (3, 2) &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a - b &= 3 \\ a + b &= 2 \end{aligned} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

De modo geral,

$$\begin{aligned} (x, y) &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a - b &= x \\ a + b &= y \end{aligned} \quad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{y-x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}_{B_2}$$

Como geralmente é desejável trabalhar com mais de uma base para um espaço vetorial, é interessante que se possa transformar as coordenadas relativas a uma base em suas representações equivalentes com relação a outra base. Tal transformação é chamada de **mudança de base**. Para tanto, existe uma matriz chamada **Matriz Mudança de Base**.

Considere-se duas bases de \mathbb{R}^2 , $B_1 = u_1, u_2$ e $B_2 = v_1, v_2$. Denotamos por $Id_{B_1 \rightarrow B_2}$ a matriz mudança de base de B_1 para B_2 , que possui a seguinte propriedade:

$$\boxed{Id_{B_1 \rightarrow B_2} \cdot u_{B_1} = u_{B_2}}$$

onde u é um vetor qualquer de \mathbb{R}^2 . Analogamente, denotamos por $Id_{B_2 \rightarrow B_1}$ a matriz mudança de base de B_2 para B_1 , que possui a seguinte propriedade:

$$\boxed{Id_{B_2 \rightarrow B_1} u_{B_2} = u_{B_1}}$$

É fácil verificar que

$$\boxed{Id_{B_1 \rightarrow B_2} = Id_{B_2 \rightarrow B_1}^{-1}}$$

Questão: Como determinamos $Id_{B_1 \rightarrow B_2}$?

Para responder a essa questão, seja u um vetor qualquer de \mathbb{R}^2 . Tem-se que

$$u_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ onde } u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

Escrevendo os vetores da base 1 como combinação linear dos vetores da base 2, obtém-se

$$u_1 = Av_1 + Bv_2$$

$$u_2 = Cv_1 + Dv_2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} u &= c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1 (Av_1 + Bv_2) + c_2 (Cv_1 + Dv_2) = \\ &= c_1 Av_1 + c_1 Bv_2 + c_2 Cv_1 + c_2 Dv_2 = (c_1 A + c_2 C)v_1 + (c_1 B + c_2 D)v_2 \end{aligned}$$

Dessa forma, conclui-se que

$$u_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 A + c_2 C \\ c_1 B + c_2 D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \cdot u_{B_1}$$

e, assim,

$$M_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

Resumindo, para determinar a matriz desejada, basta seguir os seguintes passos:

1º) Escrever os vetores da base B_1 como combinação linear dos vetores da base B_2 .

Exemplo: Considere duas bases de \mathbb{R}^2 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2º) As constantes do 1º passo vão formar as colunas da matriz.

Vamos determinar $Id_{B_0 \rightarrow B_1}$ seguindo os passos acima.

$$(1, 0) = a(1,1) + b(-1,1) \quad a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$(0,1) = c(1,1) + d(-1,1) \quad c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$$

$$Id_{B_0 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Observação: Note que as bases escolhidas são as mesmas do exemplo anterior e, portanto, é possível utilizarmos a matriz mudança de base como prova real de $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$

De fato, tem-se que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad Id_{B_0 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$u_{B_1} = Id_{B_0 \rightarrow B_1} \cdot u_{B_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Observação: Para determinar a outra matriz mudança de base, basta utilizar a relação

$Id_{B_0 \rightarrow B_1} = Id_{B_1 \rightarrow B_0}^{-1}$ e a fórmula de inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

obtendo

$$Id_{B \rightarrow B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Novamente, fazendo a prova real do exemplo anterior,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_0 = Id_{B \rightarrow B} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{2}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}_0$$

Observação: Note que as colunas de $Id_{B \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ são formadas pelos próprios vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de B . De modo geral, para determinarmos $Id_{B \rightarrow B}$, onde B é

uma base qualquer e B_0 é a base canônica, basta colocarmos os vetores de B nas colunas da matriz.

1.4.2 Autovalores e Autovetores

Nesta seção, veremos o conceito de autovalores e autovetores de uma matriz, fundamental para o processo de diagonalização de matrizes.

Definição (Autovalores e autovetores de uma matriz): Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Diz-se que um número real λ é um autovalor de A se existe um vetor não-nulo v para o qual

$$A \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Todo vetor que satisfaz esta relação é então chamado um autovetor de A pertencente ao autovalor λ .

Observação: A definição diz que, geometricamente, um autovetor não muda de direção ao ser multiplicado pela matriz.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar seus autovalores e autovetores.

Para isso, precisamos resolver a equação dada por $A \cdot v = \lambda \cdot v$ com $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$$

Temos, assim, o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x & (1) \\ y = \lambda y & (2) \end{cases}$$

Da equação (2), temos duas possibilidades a estudar:

caso 1: $(y \neq 0)$

$$y = \lambda y = 1$$

$$(1): 2x + 2y = \lambda x \Rightarrow 2x + 2 = 1 \cdot x \Rightarrow x = -2y$$

Logo, para o autovalor $\lambda = 1$ os autovetores são do tipo $v = (-2y, y)$ com $y \neq 0$.

caso 2: $(y = 0)$

Neste caso, temos que $x \neq 0$, pois senão o autovetor $v = (x, y)$ seria nulo, o que não pode acontecer pela definição de autovetor. Da equação (1) segue que

$$2x + 2y = \lambda x \Rightarrow 2x = \lambda x \Rightarrow \lambda = 2$$

Logo, para o autovalor $\lambda = 2$, os autovetores são do tipo $v = (x, 0)$ com $x \neq 0$.

A partir da definição é possível apresentarmos um método prático para determinarmos os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada. Para isto basta resolvermos a equação abaixo, onde I é a matriz identidade de ordem n .

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow A \cdot v = (I \cdot \lambda) \cdot v \Rightarrow (A - I \cdot \lambda) \cdot v = 0$$

Como procuramos solução não nula, então $(A - I \cdot \lambda)$ não pode ser invertível e, portanto,

$$\det(A - I \cdot \lambda) = 0.$$

Dessa forma, basta seguir os seguintes passos:

1º) Determinar os autovalores, raízes reais do polinômio $P(\lambda) = \det(A - I \cdot \lambda)$

2º) Para cada raiz de $P(\lambda)$, encontrar os autovetores associados a λ .

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solução:

$$1^\circ) \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 2 \cdot 5 = 0 \quad \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 6$$

Logo $\lambda = -1$ e $\lambda = 6$ são as raízes do polinômio característico de A e, portanto, os seus autovalores são -1 e 6 .

2º) Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Para tanto, basta resolver a equação $A \cdot v = \lambda \cdot v$, para os casos em que $\lambda = -1$ e $\lambda = 6$.

• $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Analisando as duas equações do sistema acima, podemos verificar que $x = -y$.

Portanto os autovetores associados a $\lambda = -1$ são os vetores $v = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}, x \neq 0$.

• $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x + 5y = 0$$

Analisando as duas equações do sistema acima, podemos verificar que $x = \frac{5y}{2}$.

Portanto, os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = 6$ são os vetores da forma

$$v = \begin{pmatrix} \frac{5y}{2} \\ y \end{pmatrix}, y \neq 0$$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solução:

$$1^\circ) \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = (2 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3$$

2º) Conhecendo os autovalores, podemos encontrar os autovetores $v = (x, y, z)$ correspondentes. Para isso, precisamos resolver a equação $A.v = \lambda.v$, para os casos em que $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

• $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ livre} \end{cases}$$

Analisando o sistema de equações formado acima, podemos perceber que os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $v = (0, 0, z)$, $z \neq 0$.

• $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ y - z = 0 \\ x \text{ livre} \end{cases}$$

Analogamente, analisando o sistema acima, podemos perceber que os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $v = (x, 0, 0)$, $x \neq 0$.

Uma definição importante para esse trabalho é a de **multiplicidade de autovalor**.

Definição: Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e λ um autovalor de A . O número de vezes em que $(\lambda - i)$ aparece como um fator do polinômio característico de $P(\lambda)$ é denominado de **multiplicidade algébrica** de λ , denotado por $m_a(\lambda)$. A dimensão do autoespaço V_λ associado a λ é denominada a **multiplicidade geométrica** de λ , denotado por $m_g(\lambda)$.

Observação: É importante destacar que a dimensão do autoespaço é dada pelo número de autovetores linearmente independentes desse espaço. No exemplo anterior, temos que o autovalor = 2 possui multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1. Já o autovalor = 3 possui multiplicidade algébrica e geométrica iguais a 1.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Procedendo com nos exemplos anteriores, verifica-se que

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8)$$

- $\lambda_1 = 2$ e $V_2 = \{(-y - z, y, z)\}, y, z \in \mathbb{R}$
- $\lambda_2 = 8$ e $V_8 = \{(z, z, z)\}, z \in \mathbb{R}$

O autovalor 2 ocorre duas vezes como raiz do polinômio característico, $m_a(2) = 2$, e seu autoespaço possui dimensão igual a 2 (pois possui duas variáveis livres y e z), $m_g(2) = 2$. Já o autovalor 8 ocorre única vez como raiz, $m_a(8) = 1$, e $\dim V_8 = 1 = m_g(8)$.

1.4.3 Teorema Espectral para Matrizes Simétricas e Diagonalização de Matrizes

Dado um operador linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existem representações matriciais de T relativas às bases B de \mathbb{R}^n

$$Tu_B = T_B u_B$$

e todas elas são semelhantes entre si.

De fato, se B_1 e B_2 são bases de \mathbb{R}^n , então

$$Tu_{B_1} = T u_{B_1}$$

$$Tu = Id$$

$$B_1 \xrightarrow{B_2 \rightarrow B} B_2$$

$$T_{B_1} = Id_{B_2 \rightarrow B_1} T_{B_2} Id_{B_1 \rightarrow B_2}$$

Chamando $Id_{B_1 \rightarrow B_2}$ de P , temos que $Id_{B_2 \rightarrow B_1} = P^{-1}$ e a expressão fica

$$T_B = P^{-1} T_{B_1} P$$

Dentre estas representações, a considerada mais simples é uma matriz diagonal. Como a cada base corresponde uma matriz, a questão se resume na obtenção de uma certa base, cuja representação matricial do operador linear T em relação a esta base T_B é uma matriz diagonal. Esta base é composta pelos autovetores do operador linear T .

Observação: Para entender essa última afirmação é preciso observar que:

1. Os autovalores e autovetores de T correspondem aos autovalores e autovetores da representação matricial de T em relação a qualquer base e satisfazem

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1.$$

2. Para determinarmos a representação matricial de um operador em relação a uma base de \mathbb{R}^2 , escrevemos as imagens pelo operador dos elementos da base como combinação linear da própria base e formamos as colunas da matriz com as constantes obtidas.

Vamos ilustrar o segundo item da observação com o caso \mathbb{R}^2 :

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

" u_1, u_2 base qualquer de \mathbb{R}^2

$$Tu_B = T_B u_B$$

$$1) T(u) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad Tu_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$2) T(u) = T(\underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}_{u_B}) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) = \lambda_1 \underbrace{(au_1 + bu_2)}_{Tu_B} + \lambda_2 \underbrace{(cu_1 + du_2)}_{Tu_B} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 c \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} \lambda_1 b + \lambda_2 d \\ \lambda_1 a + \lambda_2 c \end{pmatrix} u_2 \quad Tu_B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} u_B$$

Comparando 1) e 2):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 c \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Em resumo, as colunas da matriz T_B são as coordenadas de Tu_1 e Tu_2 em relação à base B .

Uma base especial!

Suponha que exista uma base $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n formada por autovetores de T . Vamos mostrar que T_B é a matriz diagonal formada pelos autovalores de T .

De fato, se λ_i é autovalor associado u_i , então

$$T(u_1) = \lambda_1 \cdot u_1 = \lambda_1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$$

$$T(u_2) = \lambda_2 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$$

...

$$T(u_n) = \lambda_n \cdot u_n = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

e, portanto,

$$T_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vamos voltar, agora à identidade

$$T_{B_2} = Id_{B_1 \rightarrow B_2} \circ T_{B_1} \circ Id_{B_2 \rightarrow B_1}$$

considerando B_1 base de autovetores ($B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$)
 B_2 base canonica

Note que

$$T_{B_2} = T_{B_1} = T = A$$

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n simétrica, então existe uma base de \mathbb{R}^n formada por autovetores ortonormais de A .

Observação: Note que, quando a base de autovetores é ortonormal, a matriz

$$Id_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} = P$$

é ortogonal, ou seja, $P^{-1} = P^T$, o que facilita bastante os cálculos nas identidades $D = P^{-1}AP$ e $A = P.D.P^{-1}$

Capítulo 2 O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

No Capítulo 1 foi apresentada a definição de extremos locais. Foi apresentada uma condição necessária para um ponto ser extremo local e, a partir daí, chegou-se à definição de ponto crítico (gradiente nulo). Como determinar, então, condições suficientes, que garantam que um ponto é extremo local? O Teste da Derivada Segunda é uma das formas de responder a essa pergunta.

2.1 TESTE PARA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Essa Seção é destinada à apresentação do resultado principal do trabalho.

A interpretação consiste em aproximar o gráfico da função, em torno do ponto crítico, por um parabolóide elíptico ou hiperbólico, dependendo de cada caso.

Considere uma $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , ($f_{xy} = f_{yx}$) e seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Vamos apresentar o resultado segundo alguns passos.

1º Passo:

Aproximação Quadrática de f em torno de (x, y) .

Considerando a aproximação quadrática em torno de (x_0, y_0) , vista no capítulo 2, tem-se.

$$Q(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \text{Hess}f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Visto que (x_0, y_0) é ponto crítico e, portanto $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, a aproximação fica

$$Q(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \text{Hess}f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

2º Passo: Identificar a quádrlica dada por $z = Q(x, y)$. Note, inicialmente que a quádrlica

$z = Q(x, y)$ pode ser escrita como se segue:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

Ou ainda,

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \overbrace{(x - x_0)^2}^M \quad \overbrace{(y - y_0)^2}^M \quad \overbrace{(x - x_0)(y - y_0)}^M \\ \begin{array}{ccc} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) & 0 \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{array} \\ + \\ \overbrace{f_x(x_0, y_0)}^0 \quad \overbrace{f_y(x_0, y_0)}^0 \quad -1 \quad \begin{array}{l} x - x_0 \\ y - y_0 \end{array} = 0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{array}$$

Para identificar a quádrlica, vamos proceder a diagonalização da matriz $M_{3 \times 3}$ da igualdade. Como a matriz é simétrica, o Teorema Espectral, visto no capítulo 1, garante a existência de uma Base Ortonormal $B = u_1, u_2, u_3$, tal que $M = PDP^{-1}$, onde $P^{-1}MP = D$ e D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de M :

$$D = \begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}$$

P é a matriz mudança de base de B para a base canônica

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline \end{array}$$

Como u_1, u_2, u_3 é uma base ortonormal, $P^{-1} = P^t$ é a matriz mudança de base da canônica para B .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Note que o vetor $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ representa as coordenadas de

$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ em relação à base canônica e, portanto

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Representa as suas coordenadas em relação à base de autovetores.

Da igualdade acima, obtém-se

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

E, portanto, a quádrlica pode ser reescrita em relação a essa nova base como

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix} P^{-1} M P \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + 00 - 1 P \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0$$

Observação: Note que, no primeiro termo, foi usada a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0, y_0) \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0, y_0) \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0, y_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0, y_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para prosseguirmos na interpretação precisamos identificar os autovalores e os autovetores.

Autovalores:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) - \lambda & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (f_{xx}(x_0, y_0) - \lambda)(f_{yy}(x_0, y_0) - \lambda) - f_{xy}^2(x_0, y_0) &= 0 \\ \Rightarrow (f_{xx}(x_0, y_0) - \lambda)(f_{yy}(x_0, y_0) - \lambda) - f_{xy}^2(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Note que a segunda igualdade é satisfeita se e somente se λ é autovalor de $Hess f(x_0, y_0)$

$$\det \begin{vmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dessa forma os autovalores obtidos são:

$\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow$ autovalores de $Hess f(x_0, y_0)$

$\lambda_3 = 0$

Autovetores:

$\lambda_3=0$:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) - 0 & f_{xy}(x_0, y_0) & 0 \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) - 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0)x + f_{xy}(x_0, y_0)y = 0$$

$$f_{xy}(x_0, y_0)x + f_{yy}(x_0, y_0)y = 0$$

$$0 = 0$$

$$Hess f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det Hess f(x_0, y_0) \neq 0$ então a Matriz Hessiana é invertível e, portanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Hess f(x, y)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, o autovetor associado a $\lambda_3 = 0$ é da forma $(0, 0, z)$. Vamos considerar o autovetor unitário $u_3 = (0, 0, 1)$.

Observação: Com relação aos vetores associados a λ_1 e λ_2 , o Teorema Espectral garante a base ortonormal. Dessa forma, considerando a natureza de u_3 , os vetores u_1 e u_2 serão ortonormais e pertencentes ao plano xy :

$$u_1 = (u_{11}, u_{12}, 0)$$

$$u_2 = (u_{21}, u_{22}, 0)$$

Dessa forma, o sistema de coordenadas correspondentes à base B é dado por (\bar{x}, \bar{y}, z) ,

onde os eixos $O\bar{x}$ e $O\bar{y}$ correspondem a uma possível rotação dos eixos Ox e Oy , preservando a ortogonalidade.

Logo, voltando, à equação da quádrlica,

$$\frac{1}{2} \frac{\overline{x - x_0}}{y - y_0} \frac{\overline{z - f(x_0, y_0)}}{0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x - x_0} \\ \overline{y - y_0} \\ \overline{z - f(x_0, y_0)} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x - x_0} \\ \overline{y - y_0} \\ \overline{z - f(x_0, y_0)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\overline{x - x_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\overline{y - y_0} \right)^2 - \overline{z - f(x_0, y_0)} = 0$$

$$\overline{z - f(x_0, y_0)} = \frac{1}{2} \left(\overline{x - x_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\overline{y - y_0} \right)^2$$

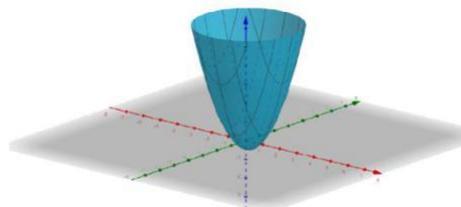
Como, então os autovalores λ_1 e λ_2 são não nulos e, portanto, a equação acima representa um parabolóide com “vértice” ou “ponto de sela” no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, isto é, no ponto do gráfico correspondente ao ponto crítico (x_0, y_0) de f .

Passo 3: Analisar cada caso

1º Caso: Ponto de Mínimo

“Segundo o Teste da Derivada Segunda, se a Hessiana é positiva definida, isto é, possui os autovalores positivos, o ponto crítico é ponto de mínimo”.

De fato, se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, a equação corresponde a um parabolóide elíptico com a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo z.

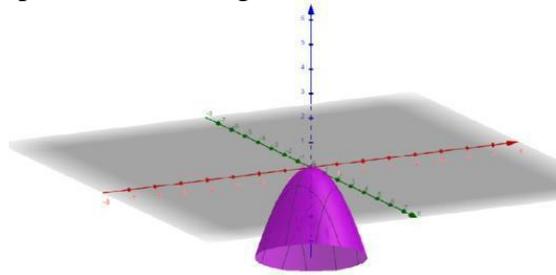


Fonte: Própria (2020)

2º Caso: Ponto de Máximo

“Segundo o Teste da Derivada Segunda, se a Hessiana é negativa definida, isto é, possui os autovalores negativos, o ponto crítico é ponto de máximo”.

De fato, se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, a equação corresponde a um parabolóide elíptico com a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo z.

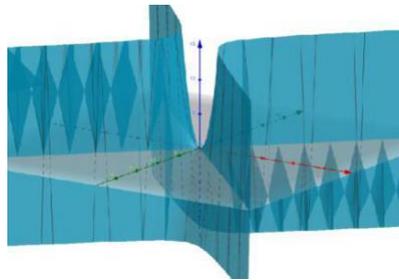


Fonte: Própria (2020)

3º Caso: Ponto de Sela

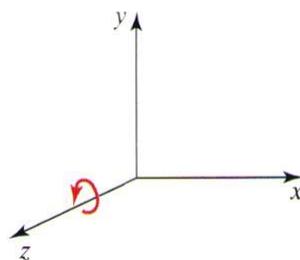
“Segundo o Teste da Derivada Segunda, se a Hessiana não é positiva nem negativa definida”.

De fato, se λ_1 e λ_2 tem sinais contrários, a equação corresponde a uma sela.



Fonte: Própria (2020)

Dessa forma, o sistema de coordenadas correspondentes à base B é dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde os eixos $\bar{O} \bar{x}$ e $\bar{O} \bar{y}$ correspondem a uma possível rotação dos eixos Ox e Oy , preservando a ortogonalidade.



Fonte: Própria (2020)

Observação: A condição para ponto de mínimo equivale dizer que a Matriz Hessiana é uma matriz positiva definida, isto é, possui seus autovalores todos positivos; a condição para ponto de máximo equivale a dizer que a Matriz Hessiana é uma matriz negativa definida, isto é, possui seus autovalores todos negativos.

Capítulo 3 ALGUNS EXEMPLOS

Nesse capítulo faremos alguns exemplos que irão ajudar no entendimento.

Se você está procurando por um ponto de máximo/mínimo local de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ a primeira etapa a seguir é encontrar os pontos de entrada (x_0, y_0) nos quais o gradiente seja o vetor 0.

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0$$

Basicamente, estes são pontos no qual o plano tangente ao gráfico de f é plano.

O teste da segunda derivada parcial nos mostra como verificar se o ponto estacionário é um máximo local, um mínimo local ou um ponto de sela. Especificamente, você começa calculando a Hessiana:

$$Hessf = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

Então, o teste da segunda derivada parcial segue da seguinte maneira:

Se $Hessf < 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de sela.

Se $Hessf > 0$, então (x_0, y_0) pode ser um ponto de máximo ou um ponto de mínimo, e então se faz mais uma pergunta:

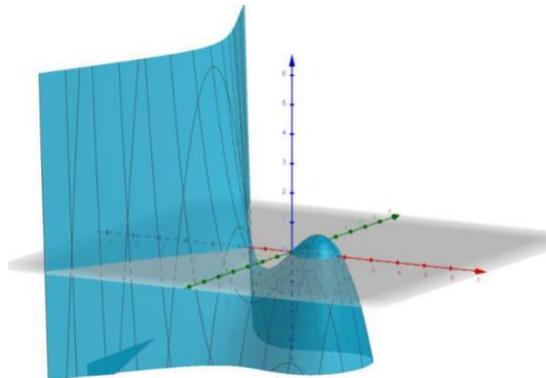
Se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) é um ponto de máximo local.

Se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local.

Se $Hessf = 0$, não temos informações suficientes para tirar uma conclusão.

Exemplo 1:

$$f(x, y) = x - y^2 - \frac{x^3}{3}$$



Fonte: Própria (2020)

$$f(x, y) = (1 - x^2, -2y)$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 0 & -x^2 &= -1 \\ -2y &= 0 & x^2 &= 1 \\ & & \boxed{x} &= \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x &= 1 - x^2 & f_y &= -2y \\ f_{xx} &= -2x & f_{yy} &= -2 \\ f_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$P_1 = (1, 0)$$

$$P_2 = (-1, 0)$$

Analisando $P_1 = (1, 0)$

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Hess } f(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando o teste da segunda derivada temos:

$$\det \text{Hess } f(1, 0) = 4 > 0 \text{ e } f_{xx} = -2 < 0$$

Logo, temos um ponto de máximo.

Vamos, agora, proceder a interpretação geométrica.

Passo 1: Aproximação quadrática em torno de $(1, 0)$

$$Q(x, y) = f(1, 0) + \overbrace{f'(1, 0)}^0 (x-1) + \frac{1}{2} (x-1, y-0) \text{Hess } f(1, 0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, y) = 1 + \frac{1}{2} (x-1) - 2(y-0) + \frac{1}{2} (x-1, y-0) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

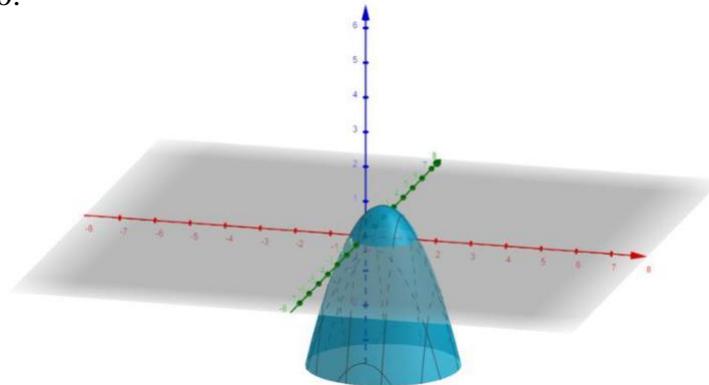
$$Q(x, y) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(-2x^2 + 2x - 2y^2)$$

$$Q(x, y) = \frac{2}{3} - x^2 + x - y^2$$

$$Q(x, y) = -x^2 + x - y^2 + \frac{2}{3}$$

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{11}{12}$$

Note que a quádrlica obtida é um parabolóide elíptico com vértice no ponto crítico e concavidade voltada para baixo, ilustrando a informação de que o ponto crítico é um ponto de máximo.



Fonte: Própria (2020)

Analisando $P_2 = (-1, 0)$

$$Hess f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} Hess f \Big|_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando o teste da segunda derivada temos:

$$\det Hess f(-1, 0) = -4 < 0$$

Logo, temos um ponto de sela.

Novamente, vamos proceder a interpretação geométrica.

Passo1: Aproximação quadrática em torno de $(-1, 0)$

$$Q(x, y) = f(-1, 0) + \overbrace{\left(f'_{(-1,0)} \right)^T}_{=0} (x - (-1)) + \frac{1}{2} (x - (-1), y - 0) Hess f(-1, 0) \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, y) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} (x + 1)^2 - \frac{1}{2} y^2$$

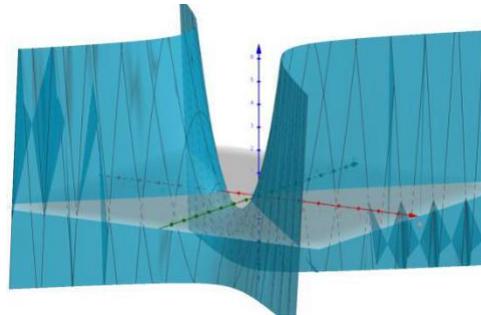
$$Q(x, y) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} (x + 1)^2 - \frac{1}{2} y^2$$

$$Q(x, y) = -\frac{2}{3} + (x + 1)^2 - \frac{1}{2} y^2$$

$$Q(x, y) = x^2 + 2x - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3}$$

$$z = (x + 1)^2 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3}$$

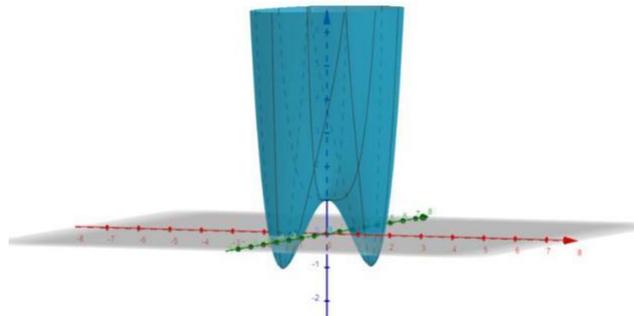
Note que a quádrlica obtida é um paraboloide hiperbólico com vértice no ponto crítico e concavidade voltada para baixo, ilustrando a informação de que o ponto crítico é um ponto de sela.



Fonte: Própria (2020)

Exemplo 2:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$



Fonte: Própria (2020)

$$f(x, y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$$

$$4y^3 - 4y = 0$$

$$4x^3 - 4y = 0$$

$$4y^3 - 4x = 0$$

$$4y(y^2 - 1) = 0$$

$$y = 0 \text{ e } y = \pm 1$$

$$-4x = -4y^3$$

$$x = y^3$$

$$P_1 = (0, 0)$$

$$P_2 = (1, 1)$$

$$P_3 = (-1, -1)$$

$$Hess f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y \end{pmatrix}$$

Aplicando o teste da segunda, derivada nos pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (-1, -1)$ temos:

$$\begin{aligned} \det \text{Hess} f(0, 0) &= -16 < 0 \\ \det \text{Hess} f(1, 1) &= 128 > 0 \text{ e } f_{xx} = 12 > 0 \\ \det \text{Hess} f(-1, -1) &= 128 > 0 \text{ e } f_{xx} = 12 > 0 \end{aligned}$$

Logo, temos um ponto de sela e dois de mínimo, respectivamente.

Vamos proceder a interpretação geométrica, no entanto, faremos para o ponto $P_2 = (1, 1)$ que é um exemplo de ponto de mínimo, completando um exemplo para cada tipo de ponto.

Passo 1: Aproximação Quadrática

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= f(1, 1) + \frac{1}{1!} \left(f_x(1, 1)(x-1) + f_y(1, 1)(y-1) \right) + \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(1, 1)(y-1)^2 \right) \\ Q(x, y) &= -1 + \frac{1}{2} (x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + \frac{1}{2} (y-1)^2 \\ &= -1 + 6(x-1)^2 + 6(y-1)^2 - 4(x-1)(y-1) \end{aligned}$$

Temos que identificar a quádrlica dada por

$$z = -1 + 6(x-1)^2 + 6(y-1)^2 - 4(x-1)(y-1)$$

Ela também pode ser escrita na forma matricial

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$$

Diferentemente do exemplo anterior, nessa aproximação temos o termo misto, e, portanto, para identificar a quádrlica, precisamos fazer a diagonalização da matriz 3×3 . Como a matriz é simétrica, o Teorema Espectral, me garante a existência de uma base ortogonal.

Achando os Autovalores:

$$\begin{aligned} \square &= 0 \rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ {Vetor unitário da forma } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} } \\ \square_{1, 2} : \det \begin{pmatrix} 12 - \lambda & -4 \\ -4 & 12 - \lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - 24\lambda + 128 = 0 \\ & \boxed{\lambda_1 = 8} \text{ e } \boxed{\lambda_2 = 16} \end{aligned}$$

Achando os autovetores:

$$\begin{aligned} \underline{1} : \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 12x - 4y = 8x \\ -4x + 12y = 8y \end{matrix} & \Rightarrow \begin{matrix} 4x - 4y = 8 \\ -4x + 4y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - y = 2 \\ x = y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = 2 \\ x = 2 \end{matrix} \\ v_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \\ \underline{2} : \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 12x - 4y = 16x \\ -4x + 12y = 16y \end{matrix} & \Rightarrow \begin{matrix} -4x - 4y = 16x \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -4x - 4y = 16x \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -8x - 4y = 16 \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} \\ \begin{matrix} -8x - 4y = 16 \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} & \Rightarrow \begin{matrix} -2x - y = 4 \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x - y = 4 \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x - y = 4 \\ -4x - 4y = 16y \end{matrix} \\ y = -x & \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \end{aligned}$$

$$B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, (0, 0, 1) \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \rightarrow$ Canônica

Canônica $\rightarrow B$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$$

$$z' = z$$

eixo Ox' ($y' = 0$) $\rightarrow y = x$

eixo Oy' ($x' = 0$) $\rightarrow y = -x$

eixo Oz' = eixo Oz

Voltando a equação da quádrlica, temos:

$$\frac{1}{2} \begin{matrix} x'-1 & y'-1 & z'+1 \\ y'-1 & z'+1 & 0 \\ z'+1 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x'-1 \\ y'-1 \\ z'+1 \end{matrix} + \begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & 1 \end{matrix} \begin{matrix} x'-1 \\ y'-1 \\ z'+1 \end{matrix} = 0$$

$$4(x'-1)^2 + 8(y'-1)^2 - z'-1 =$$

$$0 \quad z'+1 = 4(x'-1)^2 + 8(y'-1)^2$$

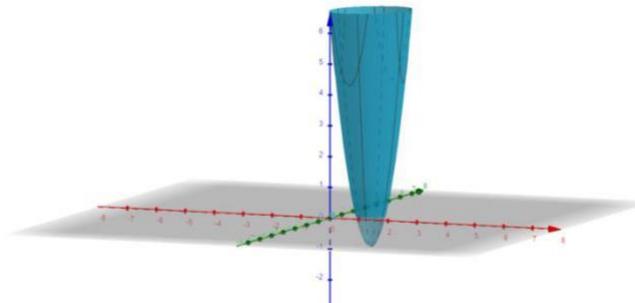
$$(z' - (-1)) = 4(x'-1)^2 + 8(y'-1)^2$$

Como $\det Hess f = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y \end{vmatrix} = 12(1)^2 \cdot 12(1)^2 - (-4) \cdot (-4) = 144 - 16 = \boxed{128}$

e os autovalores positivos: $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 16$

Paraboloides com vértice $(1, 1, -1)$ ponto crítico.

Concavidade p/ cima, logo temos um ponto de mínimo.



Fonte: Própria (2020)

Exemplo 3:

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{x^2} + y, \frac{64}{y^2} + x$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + y &= 0 & -\frac{1}{\frac{64}{y^2}} + y &= 0 \\ \frac{64}{y^2} + x &= 0 & y = 0 \text{ e } \boxed{y = 16} & \\ & & \text{Não serve} & \end{aligned}$$

$$x = -\frac{64}{y^2}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{4}}$$

$$P = \left(-\frac{1}{4}, 16\right)$$

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -\frac{128}{y^3} \end{pmatrix} \quad \det \text{Hess } f \Big|_{\left(-\frac{1}{4}, 16\right)} = \det \begin{pmatrix} -128 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{32} \end{pmatrix} = 3$$

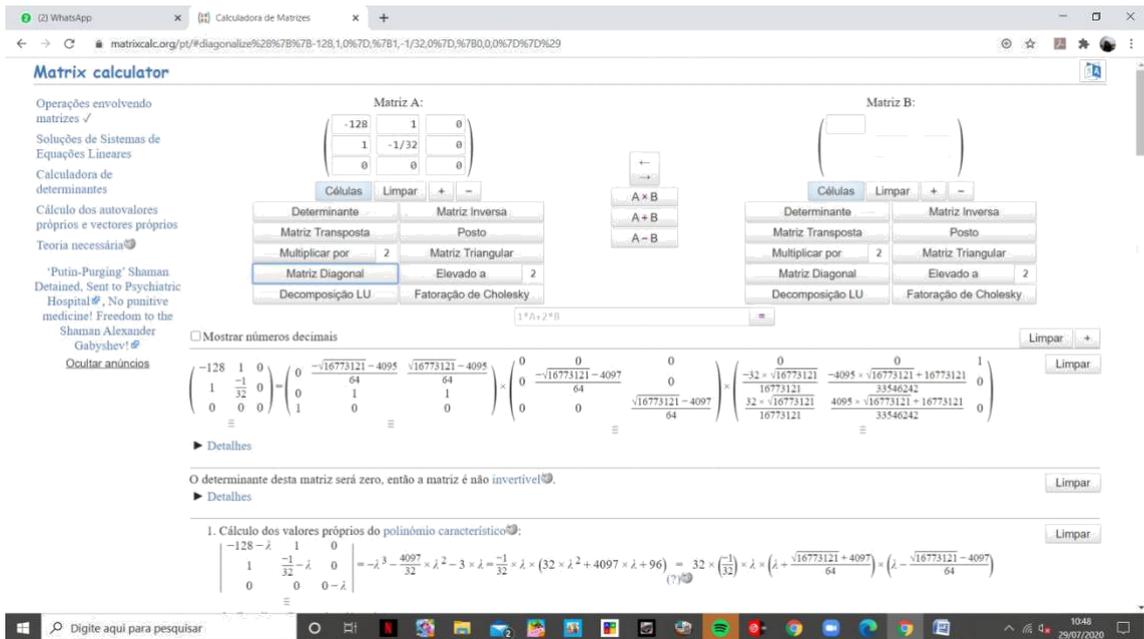
Aplicando o teste da segunda, derivada no ponto $P = \left(-\frac{1}{4}, 16\right)$ temos:

$$\det \text{Hess } f \Big|_{\left(-\frac{1}{4}, 16\right)} = 3 > 0 \text{ e } f_{xx} = -128 < 0$$

Logo, temos um ponto máximo.

Vamos proceder a interpretação geométrica para o ponto $P = \left(-\frac{1}{4}, 16\right)$.

Passo 1: Aproximação Quadrática



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{\text{[redacted]} - 4095}}{64} & \frac{\sqrt{\text{[redacted]} - 4095}}{64} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-32\sqrt{\text{[redacted]}}}{16773121} & \frac{-4095\sqrt{\text{[redacted]} + 16773121}}{33546242} & 0 \\ \frac{32\sqrt{\text{[redacted]}}}{16773121} & \frac{4095\sqrt{\text{[redacted]} + 16773121}}{33546242} & 0 \end{pmatrix}$$

Note que o programa considerou como o primeiro autovalor = 0 , associado ao autovetor (0, 0,1) . No desenvolvimento desse trabalho, o autovalor = 0 foi utilizado como terceiro autovalor, visto que os dois primeiros são os autovalores da matriz Hessiana da função $f(x, y)$.

Por esse motivo, vamos considerar a forma diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\blacksquare} - 4097}{64} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\blacksquare} - 4097}{64} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dessa forma, a matriz P, cujas colunas são formadas pelos autovetores é dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\blacksquare} - 4095}{64} & \frac{\sqrt{\blacksquare} - 4095}{64} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, tem-se que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\blacksquare} - 4095}{64} & \frac{\sqrt{\blacksquare} - 4095}{64} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1z \end{pmatrix}$$

Voltando a equação da quádrlica

$$\frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{4} y'^2 - 16 z' + 12 = 0 \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0x' + \frac{1}{4} \\ 0y' - 16 \\ 0z' + 12 \end{matrix}$$

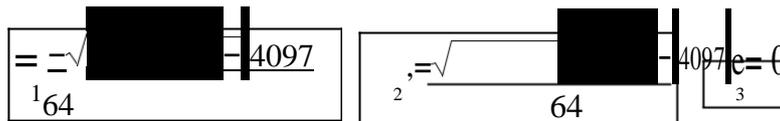
$$+ 00-1 \quad \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\blacksquare} - 4095}{64} & \frac{\sqrt{\blacksquare} - 4095}{64} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0x' + \frac{1}{4} \\ 0y' - 16 \\ 1z' + 12 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{2}(y'-16)(y'-16) - (z'+12) = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{2}(y'-16)^2 - (z'+12) = 0$$

e os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$:

Paraboloide com vértice $(-\frac{1}{4}, 16, -12)$ ponto crítico.



Logo temos um parabolóide elíptico com concavidade para baixo e seu vértice é, de fato, um ponto de máximo

Observação: Embora a simetria da matriz garantisse a base ortogonal de autovetores, o programa gerou uma base não ortogonal, fazendo com que a matriz P não fosse ortogonal. Isso não afeta o resultado e também não traz maiores dificuldades, visto que o próprio sistema calcula também a matriz inversa P^{-1} .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho de forma geral contribuiu muito para minha formação acadêmica, pois foi uma oportunidade de realizar uma pesquisa sobre um tema que não foi abordado na minha graduação e nem durante o curso de mestrado.

A experiência de trabalhar com a segunda derivada para uma variável, me fez achar que seria fácil, mas quando apareceu uma equação com termo misto, o desdobramento foi um pouco mais complexo, que foi muito satisfatório, pois pude aprender mais do que foi apresentado nas disciplinas de Cálculo fazendo com que contribuísse muito para minha formação.

As dificuldades encontradas na elaboração do meu trabalho e durante o curso me fizeram perceber que quem estuda ou estudou os assuntos que compõem a Matemática sempre deve estar se aperfeiçoando, pois a Matemática em sua vastidão também sempre evolui e proporciona cada vez mais desafios.

REFERÊNCIAS:

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. :LTC Editora, 2001. 2 v.

LAY, David C. **Álgebra Linear e Aplicações**. Rio de Janeiro, RJ: LTC Editora. 2011

PERES, Eduardo dos Santos. **Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica**. 2014. 95 folhas. Mestrado.UNIRIO, Rio de Janeiro, 2014.

GÓMEZ, Jorge Joaquín Delgado; FRENSEL, Katia Rosenvald e CRISSAFF Lhaylla dos Santos. **Geometria Analítica**. 2.ed.:Editora SBM, 2017. 363páginas.