Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Bruno Braga Carvalho

Teoria da Representação de Grupos Finitos: um estudo sobre as simetrias nos Sólidos de Platão

Rio de Janeiro

2020

Bruno Braga Carvalho

Teoria da Representação de Grupos Finitos: um estudo sobre as simetrias nos Sólidos de Platão

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Fábio Xavier Penna

Doutor em Matemática - Unirio

Rio de Janeiro

2020

Carvalho, Bruno

Teoria da Representação de Grupos Finitos: um estudo sobre as simetrias nos Sólidos de Platão / Bruno Carvalho - 2020

71.p

1.Matemática. I.Título.

CDU 536.21

Bruno Braga Carvalho

Teoria da Representação de Grupos Finitos: um estudo sobre as simetrias nos Sólidos de Platão

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 13 de março de 2020

BANCA EXAMINADORA

Fábio Xavier Penna

Fábio Xavier Penna

Doutor em Matemática - Unirio

Silas Fantin

Silas Fantin

Doutor em Matemática - Unirio

Roberto Alfonso Olivares Jara

Doutor em Matemática - UERJ

Dedico esse trabalho a minha filha Maria e aos meus pais Mauro e Andréa que sempre foram e sempre serão meus heróis e maiores exemplos. É uma honra e uma grande alegria poder me formar na mesma instituição que vocês estudaram. Amo vocês.

Resumo

Esse trabalho tem como objeto principal de estudo a Teoria da Representação de Grupos. É necessário conhecimento prévio de Teoria de Grupos, apesar da breve introdução nesse tema. O objetivo de apresentar a Teoria da Representação de Grupos de forma detalhada é estudar as Simetrias nos Sólidos de Platão com base nesse contexto. Além disso, apresenta-se um capítulo sugerindo uma atividade para o ensino básico como sugestão de abordagem de um assunto que, embora possua uma matemática bastante complexa, pode ser discutido de forma simples e intuitiva com estudantes do ensino médio.

Palavras-chaves: Teoria da Representação de Grupos Finitos, Teoria de Caracteres, Sólidos de Platão.

Abstract

The main object of study of this work is the Representation Theory of Finite Groups. Prior knowledge of Group Theory is required, despite the brief introduction to this subject. The objective of presenting the Group Representation Theory in detail is to study the Symmetries in Platonic Solids based on this context. In addition, a chapter is presented suggesting an activity for basic education as a suggestion to approach a subject that, although it has a very complex mathematics, can be discussed in a simple and intuitive way with high school students.

Keywords: Representation Theory of Finite Groups, Character Theory, Platonic Solids.

Agradecimentos

Primeiro, agradeço aos meus pais Mauro e Andréa, e aos meus irmãos Lucca e Gabriela por todo apoio e incentivo durante toda a minha vida escolar e acadêmica. Sem o apoio deles eu não teria conseguido. Gostaria de agradecer imensamente meu orientador Fábio Xavier Penna pela ajuda na escolha do tema, que contribuiu para um grande enriquecimento do conhecimento na matemática, por todos os ensinamentos, pelas horas disponibilizadas e, principalmente, pela paciência e compreensão. Agradeço a Fábio Simas, Silas Fantin, Michel Cambrainha, Gladson Antunes, Adriano Côrtes, Luciane Velasque, Ronaldo Busse e José Cal Neto, professores que fizeram parte da minha formação no mestrado e aos amigos Stella, Matheus, Vandré, Zélia e Ana Eliza, que fiz na Unirio e espero levá-los para vida. Agradeço à minha filha Maria, que mesmo sem saber me motivou e à Joana por todo carinho, apoio e suporte nesse período. Agradeço, também, a todos meus amigos que me apoiaram e entenderam a minha ausência em diversos momentos.

"No matter how cold the winter, there's a springtime ahead".

Eddie Vedder (Thumbing My Way)

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Grupos desempenham um papel importante na matemática, em especial na área da álgebra abstrata (ou contemporânea). Também podem ser aplicados em estudos de áreas da física, como na Mecânica Quântica ou na Teoria Quântica dos Campos, e na química para classificar estruturas cristalinas e nas simetrias das moléculas.

Nesse sentido, a Teoria da Representação de Grupos é muito importante, pois nos permite reduzir problemas teóricos complexos a problemas da Álgebra Linear em termos de Transformações Lineares e Espaços Vetoriais, que já são bem conhecidos. Por sua vez, a Teoria de Caracteres de Frobenius e Schur, consegue identificar uma representação de um grupo com uma função nos números complexos, podendo assim simplificar o problema uma vez que passamos de uma função de dimensão n para uma função com dimensão 1.

O objetivo desse trabalho é associar a Teoria da Representação de Grupos com as simetrias nos Sólidos de Platão, pelas ações de Grupos de Simetria, e, ao final, apresentar uma atividade que possa ser trabalhada com estudantes do Ensino Básico. A ideia por trás da atividade é mostrar que alunos conseguem ter noções intuitivas e trabalhar com assuntos que, em sua teoria, possuem uma matemática densa.

No primeiro capítulo é feita uma breve revisão sobre Grupos de Permutações, transposições e ciclos.

No segundo capítulo é apresentada a Teoria de Representação de Grupos Finitos, suas definições e proposições. O objetivo desse capítulo é chegar no resultado de que toda representação de um grupo finito pode ser escrita como a soma direta de representações irredutíveis.

O terceiro capítulo está divido em cinco seções. Na primeira seção começamos definindo morfismo de Representações e enunciamos o Lema de Schur. Na segunda seção definimos uma Álegbra de um Grupo e demonstramos as Relações Ortogonais de Schur. Na terceira seção definimos Caracter, apresentamos algumas propriedades e proposições, e, também definimos as Funções de Classe. A quarta seção trata sobre a Representação Regular. Nela apresentamos alguns resultados importantes para a construção da tabela de caracteres irredutíveis. Ao fim da seção são dados dois exemplos. Na quinta e última seção do segundo capítulo se encontram as tabelas de caracteres irredutíveis dos Grupos de Permutações A_4, S_4 e A_5. Esses são os grupos que agem sobre os Sólidos de Platão.

No quarto capítulo estudaremos as ações dos Grupos de Permutações nos Sólidos de Platão.

No quinto capítulo é apresentada uma sugestão de atividade para o ensino médio.

1 Grupos de Permutações

Antes de começarmos com a Teoria da Representação de Grupos, vamos definir um tipo de grupo específico, que será bastante abordado nesse trabalho.

Definição 1.1 (**Permutação de um conjunto** A)**.** Uma *permutação* de um conjunto A é uma função bijetiva de A em A.

Definição 1.2 (**Grupo de Permutações de um conjunto** A)**.** Um *grupo de permutações* de um conjunto A é um conjunto de permutações de A que formam um grupo sob a composição de funções.

Embora existam grupos de permutações de qualquer conjunto A não vazio, vamos focar no caso onde A é finito. Além disso, é conveniente tomarmos A um conjunto da forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ com n natural. Assim, denotaremos por S_n *grupo de permutações com* n *elementos*.

Diferentemente do cálculo onde a maioria das funções é definida em conjunto infinitos e representadas por fórmulas, na álgebra, conjuntos de permutações de grupos finitos são, em geral, dadas por uma lista explicita de cada elemento do domínio e sua imagem. Por exemplo, podemos definir uma permutação σ do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ tomando

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 4$$

Contudo, uma forma mais conveniente de expressar essa correspondência é escrever σ na sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Na notação acima cada $\sigma(j)$ é colocada abaixo de j para cada j.

Exemplo 1.1 (**Grupo de Permutação** S_3)**.** Seja S_3 o conjunto de todas as funções injetivas de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3\}$. Então S_3, sob a composição de funções, é um grupo com seis elementos. São eles

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

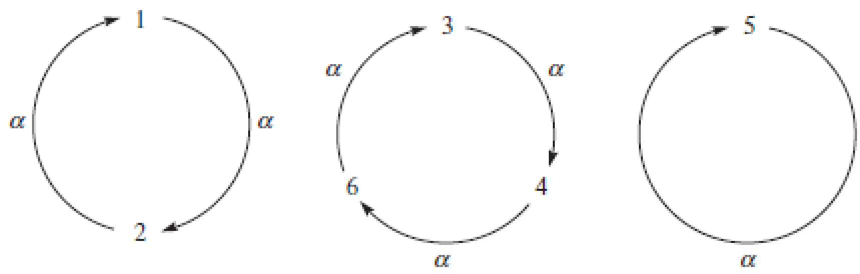
$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Outra notação utilizada para especificar as permutações são os *ciclos*, introduzida, primeiramente, pelo matemático francês Cauchy em 1815. A vantagem de se utilizar essa notação é que algumas propriedades das permutações podem ser prontamente identificadas, como exemplificaremos mais a seguir.

Para ilustrarmos a notação por ciclos, considere a permutação

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos observar a permutação acima através do seguinte diagrama



Embora esse diagrama seja matematicamente compreensível, os mesmos não são práticos do ponto de vista da notação. Por isso deixamos de lado as setas e simplificamos a escrita por $\sigma = (12)(346)(5)$.

Portanto, no exemplo acima, σ é uma *composição* de três ciclos: um 2-ciclo, um 3-ciclo e um 1-ciclo. De maneira geral, um ciclo com r elementos é chamado de r-ciclo. Visto isto, podemos fazer a seguinte definição

Definição 1.3 (Transposição). Os 2-ciclos em S_n são chamados de *transposições.*

Observamos que:

$$(12\ldots r) = (1\ r)(1\ r-1)\ldots(13)(12)$$

Em geral:

$$(i_1 i_2 \ldots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})\ldots(i_1 i_3)(i_1 i_2)$$

Isto mostra que todo r-ciclo com $r \geq 2$ é o *produto de* $(r-1)$ *transposições.*

Já a definição a seguir ilustra bem a vantagem de representar permutações por ciclos.

Definição 1.4 (Permutação par ou ímpar). Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada de permutação par se, e somente se, σ é um produto de um número par de transposições.

Caso contrário, σ é chamada de permutação ímpar.

Exemplo 1.2. Como o r-ciclo $= (i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$ é o produto de $(r-1)$ transposições, então σ é par se, e somente se, r é ímpar.

No exemplo 1.1 exibimos os elementos de S_3 em sua notação matricial. Agora, portanto, podemos exibi-los como ciclos. Como σ_1 não faz alteração nenhuma nos elementos do conjunto, chamaremos essa permutação de *identidade* e a notaremos por e. Assim,

$$\sigma_1 = e,\ \sigma_2 = (123),\ \sigma_3 = (132),\ \sigma_4 = (23),\ \sigma_5 = (12),\ \sigma_6 = (13).$$

Exemplo 1.3. Considerando o grupo S_3, vale observar que os ciclos (123) e (132) podem ser escritos como as composições (12)(23) e (13)(23), respectivamente. Portanto, S_3 possui três permutações pares $(e, (123)$ e $(132))$ e três permutações ímpares $((12), (13)$ e $(23))$.

2 Teoria da Representação de Grupos

Nesse capítulo vamos apresentar a Teoria da Representação de Grupos Finitos. O objetivo é começar pelas definições básicas até chegarmos ao resultado de que toda representação de um grupo finito pode ser escrita como a soma direta de representações irredutíveis (Teorema de Maschke).

A ideia da Representação de um Grupo é obter um mapa de modo que seja possível representar os elementos desse grupo como matrizes inversíveis. Assim, podemos transformar um problema da Teoria de Grupos em um problema da Álgebra Linear. Nesse caso, a operação do Grupo passa a ser a multiplicação de matrizes.

Antes de começarmos com a definição de Representação, vamos definir algumas notações. Chamaremos de V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos Complexos e $GL(V)$ o conjunto das transformações lineares inversíveis de V em V. Ou seja, A é um elemento de $GL(V)$ se A é um operador linear inversível. Quando quisermos dar ênfase para a dimensão n, utilizaremos a notação $GL_n(V)$.

Definição 2.1 (**Representação de Grupo**). Uma representação de um grupo G finito é um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$. A dimensão de V é chamada de grau da representação φ. Ou seja, para cada elemento $g \in G$ associamos um elemento $\varphi(g) \in GL(V)$, que é um operador linear inversível.

$$\varphi(g) : V \longrightarrow V$$

Para simplificarmos as notações, utilizaremos $\varphi_g = \varphi(g)$. Portanto, $\varphi_g(v)$ é a ação de φ_g no elemento $v \in V$.

Exemplo 2.1 (**Representação Unitária**). A representação unitária de um grupo G é o homomorfismo $\mu : G \longrightarrow C^*$ onde $\mu(g) = 1$ para todo elemento $g \in G$.

Exemplo 2.2. Seja S_n o grupo das permutações em um conjunto de n elementos. Defina $\sigma : S_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ por

$$\sigma_s = \begin{cases} 1, \text{ se } s \text{ é permutação par;} \\ -1, \text{ se } s \text{ é permutação ímpar.} \end{cases}$$

Este homomorfismo é uma representação, chamada *representação de sinal de* S_n.

Exemplo 2.3. Considere a representação de sinal σ do exemplo anterior. Sabemos que S_3 possui seis elementos, a saber $e, (12), (13), (23), (123)$ e (132). Assim,

$$\sigma_e = 1,\ \sigma_{(12)} = -1,\ \sigma_{(13)} = -1,\ \sigma_{(23)} = -1,\ \sigma_{(123)} = 1,\ \sigma_{(132)} = 1.$$

Exemplo 2.4. Seja $\mathbb{Z}_3 = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$. Defina $\rho : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ por $\rho(\overline{k}) = w^k$, onde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Este homomorfismo é uma representação de grau 1 de $\mathbb{Z}_3$.

Definição 2.2. Duas representações $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ são ditas equivalentes se existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$, tal que $\psi_g = T\varphi_g T^{-1}$, para todo $g \in G$. Isto é, $\psi_g T = T\varphi_g$, para todo $g \in G$.

Nesse caso, $\varphi \sim \psi$.

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_g & \\ V & \longrightarrow & V \\ T \big\downarrow & & \big\downarrow T \\ W & \longrightarrow & W \\ & \psi_g & \end{array}$$

A condição $\psi_g = T\varphi_g T^{-1}$ equivale dizer que o diagrama acima é comutativo. Ou seja, podemos seguir os dois caminhos para chegar à mesma resposta.

Exemplo 2.5. Seja $\varphi : S_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, onde $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. A matriz φ_σ é obtida permutando-se as linhas da matriz identidade de acordo com σ. A representação φ é chamada de *Representação Padrão de* S_n.

Para $n = 3$, temos:

$$\varphi_{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \varphi_{(123)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \varphi_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{(23)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \varphi_{(13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varphi_{(132)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.1. Os elementos (12) e (123) $\in S_3$ são geradores desse grupo. Ou seja, é possível obter qualquer elemento do grupo, fazendo as operações do grupo com esses dois elementos. De maneira análoga, dado $s \in S_3$, podemos obter φ_s a partir dos elementos $\varphi_{(12)}$ e $\varphi_{(123)}$. De fato, fazendo as operações, podemos ver que

$$\varphi_{(12)} \cdot \varphi_{(123)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \varphi_{(23)},$$

$$\varphi_{(123)} \cdot \varphi_{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varphi_{(13)},$$

$$\varphi_{(12)} \cdot \varphi_{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \varphi_{(e)},$$

$$\varphi_{(123)} \cdot \varphi_{(123)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varphi_{(132)}.$$

Definição 2.3. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. Um subespaço $W \subseteq V$ é dito *G-invariante* se, para todo $g \in G$ e $w \in W$, temos $\varphi_g(w) \in W$.

Observação 2.2. Note que no Exemplo 3.5,

$$\varphi_\sigma(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) = \varphi_\sigma(e_1) + \varphi_\sigma(e_2) + \cdots + \varphi_\sigma(e_n) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

A última igualdade é válida desde que σ seja uma permutação e a adição seja comutativa. Portanto, o subespaço $\mathbb{C}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) = W$ é invariante para todo φ_σ com $\sigma \in S_n$. Logo, $W \subset \mathbb{C}^n$ é S_n*-invariante*.

Definição 2.4. Sejam $\varphi^{(1)} : G \longrightarrow GL(V_1)$ e $\varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL(V_2)$, representações. A *soma direta* $\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$, é dada por:

$$(\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)})_g(v_1, v_2) = (\varphi^{(1)}_g(v_1), \varphi^{(2)}_g(v_2)).$$

Observação 2.3. Dado que $V_1 \oplus V_2 \subseteq V$, então o homomorfismo

$$\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)} : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$

também é uma representação do grupo G.

Em termos de matrizes, temos:

$$(\varphi^{(1)} \oplus \varphi^{(2)})_g = \begin{bmatrix} \varphi_g^{(1)} & 0 \\ 0 & \varphi_g^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.6. Seja $\rho : S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ gerada pelas permutações (12) e (123), uma representação diferente da *Representação Padrão de* S_3, onde

$$\rho_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \rho_{(123)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, seja $\psi : S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $\psi_\sigma = 1$, para todo $\sigma \in S_3$. Então

$$(\rho \oplus \psi)_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ (\rho \oplus \psi)_{(123)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.4. Se $n > 1$, então a representação $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, dada por $\varphi_g = Id$, para todo $g \in G$, não é equivalente à representação trivial (unitária). Nesse caso, a representação φ é equivalente à *soma direta* de n cópias da representação trivial.

Definição 2.5. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. Se $W \subseteq V$ é um *subespaço invariante pela ação de* G, podemos restringir φ para obter uma representação $\varphi|_W : G \longrightarrow GL(W)$ de modo que $(\varphi|_W)_g(w) = \varphi|_g(w)$ é chamada de *subrepresentação.*

Se $V_1, V_2 \subseteq V$ são *G-invariantes* e $V = V_1 \oplus V_2$, então φ é equivalente a *soma direta* $\varphi|_{V_1} \oplus \varphi|_{V_2}$.

Definição 2.6 (Representação Irredutível). Uma representação $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ não nula, de um grupo G é dita *irredutível*, se os únicos subespaços *G-invariantes* de V são 0 e V.

Exemplo 2.7. A representação $\rho : S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$, apresentada no Exemplo 2.5, onde

$$\rho_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \rho_{(123)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é irredutível.

De fato, como a dimensão de $\mathbb{C}^2$ é 2, todo subespaço próprio W, invariante pela ação de S_3, tem dimensão 1. Seja v um vetor não nulo de W, então $W = \mathbb{C}v$. Seja $\sigma \in S_3$. Então $\rho_\sigma(v) = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Como W é invariante pela ação de S_3, temos que $\rho_\sigma(v) \in W = \mathbb{C}v$. Segue, então, que v precisa ser um *autovetor* para todo ρ_σ com $\sigma \in S_3$. Vamos mostrar que $\rho_{(12)}$ e $\rho_{(123)}$ não possuem autovetores em comum.

Como

$$\rho_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$det(\rho_{(12)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(1-\lambda) = 0$$

Portanto, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$, com o *autoespaço* $\mathbb{C}e_1$ associado a λ_1 e o *autoespaço* $\mathbb{C}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ associado a λ_2.

Podemos perceber que e_1 e $(-1, 2)$ não são *autovetores* de $\rho_{(123)}$. De fato,

$$\rho_{(123)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

E, também,

$$\rho_{(123)}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que $\rho_{(12)}$ e $\rho_{(123)}$ não possuem *autovetores* em comum, contrariando a hipótese de que W é subespaço invariante pela ação de S_3, com dimensão 1. Assim, os únicos subespaços invariantes serão $\{0\}$ e V e, por isso, a representação ρ é *irredutível.*

A proposição a seguir generaliza o que vimos no Exemplo 2.7

Proposição 2.1. *Se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de grau 2, então φ é irredutível se, e somente se, não existem autovetores em comum para todo φ_g com $g \in G$.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração pela contrapositiva. Primeiro, suponha que φ_g tenha um autovetor v comum para todo $g \in G$. Então $v \neq 0$ e, portanto, $W = \mathbb{C}v$ é um subespaço de V com dimensão 1. Seja $g \in G$. Assim, $\varphi_g(v) = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, pois, por hipótese, v é autovetor para todo φ_g com $g \in G$. Segue que

$\varphi_g(W) = \varphi_g(\mathbb{C}v) = \mathbb{C}\varphi_g(v) = \lambda\mathbb{C}v \subseteq W$. Portanto, W é um subespaço de V invariante pela ação de G e, consequentemente, V possui um subespaço não trivial. Logo, φ é redutível pela Definição 2.6.

Por outro lado, suponha φ redutível. Seja W um subespaço próprio de V, invariante pela ação de G. Nesse caso a dimensão de W é 1. Então, existe um vetor $v \in V$, não nulo, tal que $W = \mathbb{C}v$. Agora, tome $g \in G$. Então, $\varphi_g(v) \in W$ pois $v \in W$ e W é invariante. Portanto, $\varphi_g(v) = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, v é um autovetor para todo φ_g com $g \in G$. ■

Como já dizemos no início do capítulo, queremos, eventualmente, provar que toda representação é equivalente à *soma direta* de representações irredutíveis.

Definição 2.7. Uma representação $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é dita *completamente redutível* se $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ onde cada V_i é um subespaço *G-invariante* e $\varphi|_{v_i}$ é irredutível, para todo $i = 1, \ldots, n$.

De maneira análoga, φ é *completamente redutível* se $\varphi \sim \varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \varphi^{(n)}$, onde cada $\varphi^{(i)}$ são representações irredutíveis. Em outras palavras, uma representação é *completamente redutível* se ela pode ser escrita como *soma direta* de representações irredutíveis.

Definição 2.8. Uma representação não nula φ de um grupo G é dita *decomponível* se $V = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são subespaços não nulos, invariantes pela ação de G. Caso contrário, V é dita *indecomponível.*

Lema 2.1. *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação equivalente a uma representação redutível. Então φ é redutível.*

Demonstração: Seja $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ uma representação *redutível*, com $\psi \sim \varphi$ e $T : V \longrightarrow W$ um isomorfismo de espaços vetoriais, com $\varphi_g = T^{-1}\psi_g T$. Suponha que W_1 e W_2 sejam subespaços invariantes de ψ, não nulos, de W, com $W = W_1 \oplus W_2$. Portanto, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, $\psi_g T = T\varphi_g$ para todo $g \in G$.

Seja $V_1 = T^{-1}(W_1)$ e $V_2 = T^{-1}(W_2)$. Afirmamos que $V = V_1 \oplus V_2$. De fato, se $v \in V_1 \cap V_2$,

então $Tv \in W_1 \cap W_2 = 0$ e, portanto, $Tv = 0$. Porém, T é injetiva e, por isso, $v = 0$. Por outro lado, se $v \in V$, então $Tv = w_1 + w_2$ para algum $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Logo, $v = T^{-1}w_1 + T^{-1}w_2 \in V_1 + V_2$, concluindo que $V = V_1 \oplus V_2$.
Por fim, vamos mostrar que V_1 e V_2 são *G-invariantes.* Se $v \in V_i$, então $\varphi_g(v) = T^{-1}\psi_g Tv$. No entanto, $Tv \in W_i$ implica que $\psi_g Tv \in W_i$, desde que W_i seja *G-invariante.* Assim sendo, podemos concluir que $\varphi_g(v) = T^{-1}\psi_g Tv \in T^{-1}(W_i) = V_i$. ■

Observação 2.5. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação equivalente a uma representação *irredutível.* Então φ é irredutível.

Observação 2.6. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ equivalente a uma representação *completamente redutível.* Então φ é *completamente redutível.*

Definição 2.9. Um operador linear $U \in GL(V)$ é dito *unitário* se

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in V$

Definição 2.10. Seja V um espaço vetorial munido de produto interno. Uma representação $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é dita *unitária* se φ_g é um *operador unitário* para todo $g \in G$. Isto é:

$$\langle \varphi_g(v), \varphi_g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo v, $w \in V$. Podemos, também, ver a *representação unitária* φ, como um mapa

$$\varphi : G \longrightarrow U(V)$$

Identificando $GL_1(\mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^*$, podemos ver que um número complexo z é unitário (visto como matriz) se, e somente se, $\bar{z} = z^{-1}$. No entanto, isso implica que $|z| = 1$ e, portanto, $U(\mathbb{C})$ é exatamente o círculo unitário $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |Z| = 1\}$ em $\mathbb{C}$. Consequentemente, uma representação unitária de uma dimensão 1 é um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{T}$.

Proposição 2.2. *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação unitária. Então φ é irredutível ou decomponível.*

Demonstração: Suponha que φ não seja irredutível. Então existe um subespaço, não nulo, *G-invariante*, $W \subseteq U$. Então, seu complemento ortogonal $W^{\perp}$, também não nulo, é tal que $V = W \oplus W^{\perp}$. Resta, agora, provar que $W^{\perp}$ é, também, *G-invariante*. Se $v \in W^{\perp}$ e $w \in W$, então, como φ é unitária, temos:

$$\langle \varphi_g(v), w \rangle = \langle \varphi_{g^{-1}} \varphi_g(v), \varphi_{g^{-1}}(w) \rangle$$

Como W é *G-invariante*, $\varphi_{g^{-1}}(w) \in W$.Além disso, $v \in W^{\perp}$. Logo:

$$\langle v, \varphi_{g^{-1}}(w) \rangle = 0.$$

Assim, temos que $W^{\perp}$ é *G-invariante*. Portanto, podemos concluir que φ é decomponível.

■

Proposição 2.3. *Toda representação de um grupo finito G é equivalente a uma representação unitária.*

Demonstração: Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação onde $dimV = n$. Tome β uma base para V. Seja $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ o isomorfismo que toma coordenadas de β. Tome $\rho_g = T\varphi_g T^{-1}$ para todo $g \in G$,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\rho_g"'] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

que fornece a representação $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, equivalente à representação φ. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno padrão, em $\mathbb{C}^n$. Vamos definir um novo produto interno $(\cdot, \cdot)$ em $\mathbb{C}^n$, por:

$$(v, w) = \sum_{g \in G} \langle \rho_g v, \rho_g w \rangle$$

Vamos checar que, de fato, $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno. Primeiro, verificaremos a linearidade e a associatividade:

$$\begin{aligned} (c_1 v_1 + c_2 v_2, w) &= \sum_{g \in G} \langle \rho_g (c_1 v_1 + c_2 v_2, w), \rho_g w \rangle \\ &= \sum_{g \in G} [c_1 \cdot \langle \rho_g v_1, \rho_g w \rangle + c_2 \cdot \langle \rho_g v_2, \rho_g w \rangle] \\ &= c_1 \cdot \sum_{g \in G} \langle \rho_g v_1, \rho_g w \rangle + c_2 \cdot \sum_{g \in G} \langle \rho_g v_2, \rho_g w \rangle \\ &= c_1 \cdot (v_1, w) + c_2 \cdot (v_2, w). \end{aligned}$$

Verificaremos, agora, a simetria hermitiana:

$$\begin{aligned}(v,w) &= \sum_{g\in G}\langle \rho_g v, \rho_g w\rangle \\ &= \sum_{g\in G}\overline{\langle \rho_g w, \rho_g v\rangle} \\ &= \overline{(w,v)}.\end{aligned}$$

Por fim, veremos que o produto interno $(\cdot,\cdot)$ é positivo definido:

$$(v,v) = \sum_{g\in G}\langle \rho_g v, \rho_g v\rangle \geq 0,$$

pois $\langle \rho_g v, \rho_g v\rangle \geq 0$, para cada $g \in G$. Se $(v,v) = 0$, então $\sum_{g\in G}\langle \rho_g v, \rho_g v\rangle = 0$, o que implica $\langle \rho_g v, \rho_g v\rangle = 0$, para todo $g \in G$, pois estamos efetuando a soma de números não negativos. Consequentemente $0 = \langle \rho_g v, \rho_g v\rangle = \langle v, v\rangle$ e, portanto $v = 0$.

Assim, definimos $(\cdot,\cdot)$ como produto interno.

Para verificar que a representação é unitária, com respeito a esse produto interno, façamos:

$$\begin{aligned}(\rho_h v, \rho_h w) &= \sum_{g\in G}\langle \rho_g\rho_h v, \rho_g\rho_h w\rangle \\ &= \sum_{g\in G}\langle \rho_{gh} v, \rho_{gh} w\rangle .\end{aligned}$$

Como $g \in G$ e $h, h^{-1} \in G$, para um dado $k \in G$, $k \cdot h^{-1} \in G$. Tomando $g = k \cdot h^{-1}$, temos que $g \cdot = k \cdot h^{-1} \cdot h = k$. Portanto

$$\sum_{g\in G}\langle \rho_{gh} v, \rho_{gh} w\rangle = \sum_{k\in G}\langle \rho_k v, \rho_k w\rangle = \langle v, w\rangle .$$

■

Corolário 2.1. *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula, de um grupo finito. Então φ é ou irredutível ou decomponível.*

Demonstração: Sabemos que toda representação de um grupo finito G é equivalente a uma representação unitária. Portanto, dada ρ, representação unitária, temos que $\varphi \sim \rho$. Sabemos, também, que ρ é ou irredutível ou decomponível. Além disso, pelas Observações 2.5 e 2.6, se uma representação for equivalente a uma representação irredutível ou redutível, a mesma também será irredutível ou redutível. ■

Observação 2.7. O Corolário 2.1 e a Proposição 2.2 não são válidos para o caso de grupos infinitos. Além disso, podemos afirmar que toda representação irredutível não é redutível. Já a recíproca, não é verdadeira.

Exemplo 2.8. Vamos definir a representação φ em um grupo infinito, de modo que $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$, é dada por:

$$\varphi_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que φ é um homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (GL_2(\mathbb{C}), \ \cdot \ )$. De fato, temos:

$$\varphi_{(a+b)} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \varphi_{(a)} \cdot \varphi_{(b)}.$$

O vetor e_1 é um autovetor de $\varphi_{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então, $\mathbb{C}e_1$ é um subespaço $\mathbb{Z} - invariante$. Portanto, φ não é irredutível. Por outro lado, se φ fosse redutível, seria equivalente a soma direta de representações de grau 1. Pela Definição 2.4 essa representação é diagonal. No entanto, podemos observar que $\varphi_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável. Portanto, φ não é redutível.

Teorema 2.1 (Maschke)**.** *Toda representação de um grupo finito é completamente redutível.*

Demonstração: Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de um grupo finito. A prova será feita, utilizando indução no grau da representação φ, ou seja, na dimensão de V.
Se $dimV = 1$, então φ é irredutível, desde que V não tem subespaços próprios não nulos. Agora, vamos supor que o Teorema é válido para toda $dimV \leq n$. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, uma representação, tal que $dimV = n+1$. Se φ é irredutível, então a demonstração está completa. Se não, φ é redutível, pelo Corolário 2.1 e, portanto, $V = V_1 \oplus V_2$, onde V_1 e V_2 são subespaços *G-invariantes* não nulos.
Como $dimV_1, dimV_2 < dimV$, por indução, temos que $\varphi|_{V_1}$ e $\varphi|_{V_2}$ são completamente redutíveis. Logo, $V_1 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ e $V_2 = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ onde cada U_i e W_j são subespaços *G-invariantes*, e cada subrepresentação $\varphi|_{U_i}$ e $\varphi|_{W_j}$ são irredutíveis $\forall \, 1 \leq i \leq s, \ 1 \leq j \leq r$. Portanto, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$. Assim, segue que φ é *completamente redutível* ■

3 Teoria de Caracteres e Relações Ortogonais

Nesse capítulo vamos apresentar a Teoria de Caracteres de Frobenius e Schur, o que segundo Steinberg é o “coração” do estudo das Representações de Grupos. A ideia por trás da teoria de Caracteres é identificar uma representação de um grupo, com uma função nos números complexos. Assim, podemos trocar uma função em um espaço com dimensão n por uma função em um espaço com dimensão 1.

3.1 Morfismo de Representações

Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. Podemos pensar nos elementos de G como escalares via $g \cdot v = \varphi_g v$ para $v \in V$. Um morfismo entre $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ será uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ tal que $Tgv = gTv$ para todo $g \in G$ e $v \in V$. Isso significa que $T\varphi_g v = \rho_g Tv$, para todo $v \in V$, ou seja, $T\varphi_g = \rho_g T$ para todo $g \in G$.

Definição 3.1. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$, duas representações. Um *Morfismo* de φ para ρ é um mapa linear $T : V \longrightarrow W$ tal que $T\varphi_g = \rho_g T$, para todo $g \in G$. Em outras palavras, o diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd}$$

comuta para todo $g \in G$.

O conjunto dos morfismos de φ para ρ é denotado por $Hom_G(\varphi, \rho)$. Note que $Hom_G(\varphi, \rho) \subseteq Hom(V, W) = \{A : V \longrightarrow W | A \text{ é mapa linear}\}$.

Observação 3.1. Se $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$ é invertível, então $\varphi \sim \rho$ e T é um *isomorfismo*.

Observação 3.2. Observe que $T : V \longrightarrow V$ pertence a $Hom_G(\varphi, \varphi)$ se, e somente se, $T\varphi_g = \varphi_g T$, para todo $g \in G$, ou seja, T comuta com $\varphi(G)$. Em particular, o mapa identidade $I : V \longrightarrow V$ é sempre um elemento de $Hom_G(\varphi, \varphi)$.

Proposição 3.1. *Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, tal que $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$. Então Núcleo(T) é um subespaço G-invariante de V e $T(V) = Im(T)$ é um subespaço G-invariante de W.*

Demonstração: Seja $v \in$ *Núcleo(T)* e $g \in G$. Como $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$, então $T\varphi_g v = \rho_g T v$, e como $v \in$ *Núcleo(T)*, $Tv = 0$. Logo, $T\varphi_g v = \rho_g T v = 0$. Portanto, $\varphi_g v \in$ *Núcleo(T)*.
Agora, seja $w \in Im(T)$. Tome $w = Tv$, com $v \in V$. Então, $\rho_g w = \rho_g T v = T\varphi_g v \in Im(T)$. Dessa forma, concluímos que a $Im(T) \subset W$ é G-invariante. ■

Proposição 3.2. *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$, duas representações. Então, $Hom_G(\varphi, \rho)$ é um subespaço de $Hom(V, W)$.*

Demonstração: Sejam T_1 e $T_2 \in Hom_G(\varphi, \rho)$ e c_1 e $c_2 \in \mathbb{C}$. Então:

$$(c_1T_1 + c_2T_2)\varphi_g = c_1T_1\varphi_g + c_2T_2\varphi_g = c_1\rho_gT_1 + c_2\rho_gT_2 = \rho_g(c_1T_1 + c_2T_2).$$

Portanto, $c_1T_1 + c_2T_2 \in Hom_G(\varphi, \rho)$, como queríamos. ■

Agora que já definimos Morfismo de Representações, podemos enunciar um importante resultado para a nossa teoria.

Lema 3.1 (Lema de Schur)**.** *Sejam φ e ρ representações irredutíveis de G e $T \in Hom_g(\varphi, \rho)$. Então, T é invertível ou $T = 0$. Consequentemente:*
a) Se $\varphi \not\sim \rho$, então $Hom_G(\varphi, \rho) = 0$.
b) Se $\varphi \sim \rho$, então $T = \lambda I$, com $\lambda \in \mathbb{C}$. Ou seja, T é uma multiplicação por escalar.

Demonstração: Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ e $T : V \longrightarrow W$, tal que $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$. Se $T = 0$, então não temos nada a provar. Suponhamos, então, que $T \neq 0$. A Proposição 3.1, diz que *Núcleo(T)* é um subespaço *G-invariante*. Como φ é *irredutível* por hipótese, seus únicos espaços *G-invariantes* são V ou 0. Assim, *Núcleo(T)* $= V$ ou *Núcleo(T)* $= 0$. Também por hipótese, $T \neq 0$, e, portanto, *Núcleo(T)* não pode ser todo o espaço *V*. Assim, *Núcleo(T)* $= 0$ e, consequentemente, T é *injetiva*. Ainda de acordo com a Proposição 3.1, $Im(T)$ também é um subespaço *G-invariante*. Como ρ é *irredutível* só podemos ter que $Im(T) = W$, e, portanto, T é *sobrejetiva*.

Assim sendo T é *bijetiva* e, portanto, concluímos que T é *invertível*.

Para (a), assuma que $Hom_G(\varphi, \rho) \neq 0$. Isso implica que existe alguma transformação T não nula, tal que $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$. Pelo Lema, T é invertível. Ou seja, T é um *isomorfismo*. Logo, $\varphi \sim \rho$. Como acabamos de provar a contrapositiva de (a), então (a) está provado.

Para (b), seja λ um *autovalor* de T. Então $\lambda I - T$ não é invertível, pela definição de autovalor. Sabemos que $I \in Hom_G(\varphi, \rho)$. Portanto, segue que $\lambda I - T = 0$, pois $\lambda I - T$ não é invertível. Assim, concluímos que $T = \lambda I$. ■

Corolário 3.1. *Seja G um grupo abeliano. Então toda representação irredutível de G tem grau 1.*

Demonstração: Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação *irredutível*. Fixe $h \in G$. Então, tomando $T = \varphi_h$, teremos, para todo $g \in G$

$$T\varphi_g = \varphi_h\varphi_g = \varphi_{hg} = \varphi_{gh} = \varphi_g\varphi_h = \varphi_g T.$$

onde a terceira igualdade se dá justamente pelo fato do grupo ser *abeliano*.

Pelo *Lema de Schur*, teremos que $\varphi_h = \lambda_h I$, para algum escalar $\lambda_h \in C$, que depende de h. Seja $v \in V$, tal que $v \neq 0$ e $k \in \mathbb{C}$. Então, $\varphi_h(kv) = \lambda_h Ikv = \lambda_h kv \in \mathbb{C}v$. Como h foi tomado arbitrário, $\mathbb{C}v$ é um espaço *G-invariante*. Concluímos, então, que $V = \mathbb{C}v$ pela *irredutibilidade* e, portanto, $dimV = 1$. ■

Corolário 3.2. *Seja G um grupo abeliano finito e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. Então existe uma matriz invertível T, tal que $T^{-1}\varphi_g T$ é diagonal para todo $g \in G$ e T independe de g.*

Demonstração: Seja φ uma Representação completamente redutível. Assim, temos que $\varphi \sim \varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \varphi^{(m)}$, onde $\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ são representações *irredutíveis*. Como G é abeliano, o grau de cada $\varphi^{(i)}$ é 1. Consequentemente, $\varphi_g^{(1)} \in \mathbb{C}^*$, para todo $g \in G$.

Agora, se $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ nos da a equivalência de φ com $\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(n)}$, então:

$$T^{-1}\varphi_g T = \begin{bmatrix} \varphi^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi^{(2)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi^{(n)} \end{bmatrix}$$

é diagonal para todo $g \in G$. ■

3.2 Álgebra de Grupos e Relações Ortogonais

Definição 3.2. Seja G um grupo. Defina:

$$L(G) = \mathbb{C}^G = \{f \mid f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$$

Então $L(G)$ é um espaço vetorial com produto interno, munido de soma e multiplicação por escalar, dados por:

$$(f_1 + f_2)(g) = (f_1(g) + f_2(g))$$

$$(c \cdot f) \circ g = c \cdot f \circ g$$

E o produto interno é definido por:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

$L(G)$ é chamado de *álgebra do grupo G*.

O nosso principal objetivo nessa seção é enunciar o Teorema das Relações Ortogonais de Schur. No entanto, sua demonstração requer certa preparação. As próximas Proposições e Lemas servirão para isso.

Proposição 3.3. *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações. Suponha também $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então:*
a) $T^\sharp = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \in Hom_G(\varphi, \rho)$.
b) Se $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$, então $T^\sharp = T$.
c) O mapa $P : Hom(V, W) \longrightarrow Hom_G(\varphi, \rho)$ definido por $P(T) = T^\sharp$ é um mapa linear sobrejetivo.

Demonstração: Vamos verificar (a).

$$T^\sharp_{\varphi_h} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \varphi_h = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_{gh}$$

Agora tome $x = gh$. Como a multiplicação a direita por h é uma permutação de G, conforme g varia em G, então x também varia. Logo, $g^{-1}xx^{-1} = g^{-1}ghx^{-1}$. Isso implica que $g^{-1}e = ehx^{-1}$. E, consequentemente, que $g^{-1} = hx^{-1}$. Dessa forma:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{hx^{-1}}T\varphi_x = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_h\rho_{x^{-1}}T\varphi_x = \rho_h\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{x^{-1}}T\rho_x = \rho_h T^\sharp.$$

Isso prova que $T^\sharp \in Hom_G(\varphi,\rho)$. Para provar (b), note que se $T \in Hom_G(\varphi,\rho)$, então:

$$T^\sharp = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T = \frac{1}{|G|}|G|T = T.$$

Por fim, vamos checar a linearidade em (c):

$$\begin{aligned} P(c_1T_1+T_2) &= (c_1T_1+T_2)^\sharp \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}(c_1T_1+T_2)\varphi_g \\ &= c_1\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T_1\varphi_g + \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T_2\varphi_g \\ &= c_1T_1^\sharp + T_2^\sharp = c_1P(T_1)+P(T_2). \end{aligned}$$

Se $T \in Hom_G(\varphi,\rho)$, então (b) implica $T = T^\sharp = P(T)$ e, portanto, P é sobrejetivo. ∎

Antes de enunciarmos a próxima proposição, vamos provar os seguintes lemas:

Lema 3.2. *O Traço de uma matriz é uma transformação linear.*

Notação: Traço$(A) = Tr(A)$.

Demonstração: Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Sabemos que:

$$\begin{aligned} Tr(A+B) &= [(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+\cdots+(a_{nn}+b_{nn})] \\ &= [(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn})] \\ &= Tr(A)+Tr(B). \end{aligned}$$

Também sabemos que, dado $k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} Tr(kA) &= k\cdot a_{11}+k\cdot a_{22}+\cdots+k\cdot a_{nn} \\ &= k\cdot(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) \\ &= k\cdot Tr(A). \end{aligned}$$

∎

Lema 3.3. *Sejam A e B duas matrizes de ordem n, então $Tr(AB) = Tr(BA)$.*

Demonstração: Defina as matrizes AB e BA como

$$(AB)_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$
$$(BA)_{ij} = d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$$

Assim, utilizando a definição de traço, temos

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{k=1}^{n} c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_{kk} \\ &= Tr(BA) \end{aligned}$$

■

Proposição 3.4 (Variante do Lema de Schur)**.** *Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$, representações irredutíveis de G e seja $T : V \longrightarrow W$, um mapa linear. Então:*
a) se $\varphi \nsim \rho$, então $T^\sharp = 0$.
b) se $\varphi \sim \rho$, então $T^\sharp = \frac{Tr(T)}{grau\ \varphi} I$.

Demonstração: Suponha que $\varphi \nsim \rho$. Então $Hom_G(\varphi, \rho) = 0$ pelo *Lema de Schur* e, portanto, $T^\sharp = 0$. Agora, suponha que $\varphi \sim \rho$. Também, pelo *Lema de Schur* temos:

$$P(T) = T^\sharp \text{ e } T = \lambda I.$$

Assim,

$$T^\sharp = P(\lambda I) = \lambda P(I) = \lambda I$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Como $T^\sharp : V \longrightarrow V$, temos

$$\begin{aligned} Tr\left(T^\sharp\right) &= Tr(\lambda I) \\ &= \lambda Tr(I) \\ &= \lambda \cdot dimV \\ &= \lambda \cdot grau\ \varphi. \end{aligned}$$

Segue que $\lambda = \frac{Tr\left(T^\sharp\right)}{grau\ \varphi}$, e portanto,

$$T^\sharp = \frac{Tr(T^\sharp)}{grau\ \varphi}.$$

Por outro lado, utilizando os resultados dos Lema 3.2 e Lema 3.3, temos

$$\begin{aligned} Tr(T^\sharp) &= Tr\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{g^{-1}}T\varphi_g\right) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(\varphi_{g^{-1}}T\varphi_g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(T) \\ &= \frac{|G|}{|G|}Tr(T) \\ &= Tr(T) \end{aligned}$$

Logo,

$$T^\sharp = \frac{Tr(T)}{grau\ \varphi}I$$

■

De acordo com Steinberg[2], sejam $\varphi : G \longrightarrow GL_n(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL_m(W)$ duas representações, então $Hom(V, W) = M_{mn}(\mathbb{C})$. Portanto, $Hom_G(\varphi, \rho)$ é um subespaço de $M_{mn}(\mathbb{C})$. Além disso, o mapa $P : Hom(V, W) \longrightarrow Hom_G(\varphi, \rho)$ dado por $P(T) = T^\sharp$, pode ser visto como uma transformação linear $P : M_{mn}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{C})$. Nesse caso, poderíamos pensar na matriz de P com respeito a base canônica de $M_{mn}(\mathbb{C})$. Mas antes, vamos lembrar que a base canônica de $M_{mn}(\mathbb{C})$ é formada pelas matrizes elementares $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$, onde cada matriz E_{ij} é uma matriz $m \times n$ com a entrada ij igual a 1 e todas as outras entradas iguais a 0. Assim podemos enunciar o seguinte Lema:

Lema 3.4. *Seja $A \in M_{rm}(\mathbb{C})$, $B \in M_{ns}(\mathbb{C})$ e $E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Então, vale a igualdade*

$$(AE_{ki}B)_{lj} = a_{lk}b_{ij}$$

onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

Demonstração: Por definição:

$$(AE_{ki}B)_{lj} = \sum_{x,y} a_{lx}(E_{ki})_{xy}b_{yj}$$

No entanto, para quaisquer $x \neq k$ e $y \neq i$, os termos da soma valem 0. Logo

$$(AE_{ki}B)_{lj} = a_{lk}b_{ij}$$

como desejávamos. ■

O exemplo a seguir ilustra melhor o Lema 3.4:

Exemplo 3.1. Considere as Matrizes $A_{3\times 2}$, $B_{2\times 3}$ e $E_{12} \in M_{22}(\mathbb{C})$. Efetuando o produto $AE_{12}B$, temos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} \\ a_{31}b_{21} & a_{31}b_{22} & a_{31}b_{23} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

No entanto, poderíamos construir a matriz utilizando apenas o Lema 3.4, da seguinte maneira. O Lema diz que um elemento $(AE_{ki}B)_{lj}$ pode ser obtido por $a_{lk}b_{ij}$. No exemplo temos $k = 1$ e $i = 2$. Portanto o elemento

$$(AE_{12}B)_{31} = a_{31}b_{21}$$

que é exatamente o mesmo elemento obtido quando multiplicamos as matrizes.

Lema 3.5. *Seja $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ e $\psi : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ representações unitárias. Seja $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Então $\left(A^\sharp\right)_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle$.*

Demonstração: Temos que $\psi_{g^{-1}} = (\psi_g)^{-1}$. Como ψ é unitária, então $\psi_{lk}(g^{-1}) = \overline{\rho_{kl}(g)}$. Assim

$$\begin{aligned}
A^\sharp_{lj} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\psi_{g^{-1}}E_{ki}\varphi_g)_{lj} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{lk}(g^{-1})\varphi_{ij}(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\psi_{kl}(g)}\varphi_{ij}(g) \\
&= \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é consequência direta do Lema 3.4. ∎

Observação 3.3. Seja $P : M_{mn}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{C})$ a transformação linear dada por $P(T) = T^\sharp$, e seja B a matriz de T com respeito a base canônica para $M_{mn}(\mathbb{C})$. Então, B é uma matriz $mn \times mn$ cujas linhas e colunas são indexadas por pares lj, ki onde $1 \leq l$, $k \leq m$ e $1 \leq j$, $i \leq n$. O lema anterior nos diz que as entradas lj, ki da matriz B são o produto interno $\langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle$

Finalmente podemos enunciar o Teorema das Relações Ortognais de Schur. Esse resultado será uma base importante para provarmos, no próximo capítulo, que os Caracteres irredutíveis formam um conjunto ortonormal de funções de classe.

Teorema 3.1. *(Relações Ortogonais de Schur). Seja $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ e $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ representações irredutíveis, unitárias, não equivalentes. Então:*

a) $\langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle = 0$;

b) $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} 1/n \text{ se } i = k \text{ e } j = l \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Demonstração: Vamos, primeiro, provar a). Seja $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Daí, pelo Lema 3.5, temos que $A^\sharp_{ij} = \langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle$, para todo i, j.

Para provar b), vamos utilizar a Proposição 3.3 e tomar $\varphi = \psi$ no Lema 3.5. Seja $A = E_{ki} \in M_{nn}(\mathbb{C})$. Então

$$A^\sharp = \frac{Tr(E_{ki})}{n} I$$

pela Proposição 3.4. Pelo Lema 3.5 temos que

$$A^\sharp_{ij} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle$$

Vamos supor, primeiro, que $j \neq l$. Então, se $I_{lj} = 0$, segue que

$$0 = A^\sharp_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle .$$

Agora, vamos supor que $i \neq k$. Então, E_{ki} tem somente 0 na diagonal, implicando que $Tr(E_{ki}) = 0$. Desse modo, temos, novamente, que

$$0 = A^\sharp_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle .$$

Por último, supondo que $l = j$ e que $i = k$, temos que E_{ki} tem um único 1 na diagonal principal, sendo as outras entradas, iguais a 0. Logo, $Tr(E_{ki}) = 1$ e

$$\frac{1}{n} = A^{\sharp}_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle .$$

■

3.3 Caracteres e Funções de Classe

Essa seção é muito importante pois nela iremos demonstrar que uma representação pode ser decomposta, de maneira única, em representações irredutíveis. Para isso, vamos associar a cada representação φ uma função $\chi_\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ que iremos definir a seguir.

Definição 3.3 (**Caracter**)**.** Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. O caracter $\chi_\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de φ é definido por $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)$. O caracter de uma representação irredutível é dito caracter irredutível.

Observação 3.4. Segue da Definição 3.3 que $\chi_\varphi \in L(G)$.

Portanto, se $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ é uma representação dada por $\varphi_g = (\varphi_{ij}(g))$, então

$$\chi_\varphi(g) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(g)$$

.

Observação 3.5. Se $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ é uma representação de grau 1, então $\chi_\varphi = \varphi$.

Partindo da definição de *Caracter* e utilizando os resultados da Teoria de Representação de Grupos e da Álgebra Linear, podemos enunciar as três proposições a seguir.

Proposição 3.5. *Seja φ uma representação de G. Então $\chi_\varphi(1) =$ grau φ.*

Demonstração: Suponha $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. Então,

$$Tr(\varphi_1) = Tr(I) = dimV = \text{grau } \varphi.$$

■

Observação 3.6. Como φ é *homomorfismo*, $\varphi(1_G) = 1$.

Proposição 3.6. *Se φ e ρ são representações equivalentes, então $\chi_\varphi = \chi_\rho$.*

Demonstração: Suponha duas representações φ e $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$. Como, por hipótese, são *equivalentes*, existe uma matriz invertível $T \in GL_n(\mathbb{C})$, tal que $\varphi_g = T\rho_g T^{-1}$, para todo $g \in G$. Assim,

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\rho_g) = Tr(T\rho_g T^{-1}) = Tr(TT^{-1}\rho_g) = Tr(\rho_g) = \chi_\rho(g).$$

∎

Essencialmente, o que provamos, nos diz que os caracteres são constantes em classes de conjugação.

Proposição 3.7. *Seja φ uma representação de G. Então, para todo $g, h \in G$, vale a igualdade $\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(hgh^{-1})$.*

Demonstração: De fato, temos:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(hgh^{-1}) &= Tr(\varphi_{hgh^{-1}}) = Tr(\varphi_h\varphi_g\varphi_h^{-1}) \\ &= Tr(\varphi_h^{-1}\varphi_h\varphi_g) \\ &= Tr(\varphi_g) \\ &= \chi_\varphi(g). \end{aligned}$$

∎

Funções que são constantes nas classes de conjugação serão importantes para a Teoria da Representação de Grupos. Mas antes, precisamos defini-las.

Definição 3.4 (Funções de Classe)**.** Uma função $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita *função de classe* se $f(g) = f(hgh^{-1})$, $\forall\ g, h \in G$. Ou seja, f é constante em classes de conjugação de G. O espaço das funções de classe é denotado por $Z(L(G))$.

Observação 3.7. Segue da Proposição 3.7 que $\chi_\varphi \in Z(L(G))$.

Proposição 3.8. *$Z(L(G))$ é um subespaço de $L(G)$.*

Demonstração: Sejam f_1 e f_2 funções de classe em G e $c \in \mathbb{C}$. Então:

$$\begin{aligned}(cf_1 + f_2)(hgh^{-1}) &= cf_1(hgh^{-1}) + f_2(hgh^{-1}) \\ &= cf_1(g) + f_2(g) \\ &= (cf_1 + f_2)(g).\end{aligned}$$

Isso mostra que $cf_1 + f_2$ é uma função de classe. ■

Seja $Cl(G)$ o conjunto das classes de conjugação de G. Defina, para $C \in Cl(G)$, a função $\delta : G \longrightarrow \mathbb{C}$, por:

$$\delta_C(g) = \begin{cases} 1, \text{se } g \in C \\ 0, \text{se } g \notin C. \end{cases}$$

Proposição 3.9. *O conjunto $B = \{\delta_C | C \in Cl(G)\}$ é uma base para $Z(L(G))$. Consequentemente, dim $Z(L(G)) = |Cl(G)|$.*

Demonstração: Cada função δ_C é constante em classes de conjugação, e, por isso, é uma função de classe. Vamos mostrar, primeiro, que B gera $Z(L(G))$. Se $f \in Z(L(G))$, então:

$$f = \sum_{C \in Cl(G)} f(C)\delta_C$$

Desse modo, se um dado C' é a classe de conjugação de um elemento g, por definição, $f(C') = f(g)$. Para verificarmos a independência linear, vamos verificar que B é um conjunto ortogonal de vetores não nulos. Se $C, C' \in Cl(G)$ então:

$$\langle \delta_C, \delta_{C'} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta_C(g) \cdot \overline{\delta_{C'}(g)} = \begin{cases} \frac{|C|}{|G|}, \text{se } C = C' \\ 0, \text{se } C \neq C' \end{cases}$$

Assim, B é uma base para $Z(L(G))$ e, como $|B| = |Cl(G)|$ concluímos que

$$dim(Z(L(G)) = |Cl(G)|.$$

■

Segundo Steinberg[2], o Teorema que será apresentado a seguir é fundamental na Teoria da Representação de Grupos pois mostra que caracteres irredutíveis formam um conjunto ortonormal de funções de classe. Esse resultado será utilizado, mais a frente, para mostrar a unicidade da decomposição de uma representação em fatores irredutíveis. Além disso, poderemos calcular a quantidade exata de classes de equivalências de representações irredutíveis.

Teorema 3.2. *Sejam φ e ρ representações irredutíveis de G. Então:*

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, \, se \; \varphi \sim \rho \\ 0, \, se \; \varphi \not\sim \rho \end{cases}$$

Além disso, os caracteres irredutíveis de G, formam um conjunto ortonormal de funções de classe.

Demonstração: Sabemos que, de acordo com a Proposição 2.3, toda representação de um grupo finito é equivalente a uma representação unitária e que se φ e ρ são *representações equivalentes*, então, pela Proposição 3.6, $\chi_\varphi \sim \chi_\rho$. Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade que $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ e $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ são unitárias. Portanto:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varphi(g) \overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(g) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\rho_{jj}(g)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{ii}(g) \overline{\rho_{jj}(g)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_{ii}, \rho_{jj} \rangle
\end{aligned}$$

Sabemos que se φ e ρ não são equivalentes, então de acordo com as *Relações Ortogonais de Schur* (Teorema 3.1) $\langle \varphi_{ii}, \rho_{jj} \rangle = 0$ e, consequentemente, $\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = 0$ e, por outro lado, se φ e ρ são equivalentes, podemos assumir que $\varphi = \rho$. Nesse caso,

$$\langle \varphi_{ii}, \rho_{jj} \rangle = \begin{cases} 1/n, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e, portanto

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_{ii}, \rho_{ii} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

■

Corolário 3.3. *Há no máximo $|Cl(G)|$ classes de equivalência de representações irredutíveis de G.*

Demonstração: Sabemos que representações irredutíveis não equivalentes têm caracteres distintos. Mais ainda, como vimos no Teorema 3.2 os caracteres irredutíveis formam um conjunto ortonormal. Como $Z(L(G)) = |Cl(G)|$ e conjuntos ortonormais são linearmente independentes, concluímos que há no máximo $|Cl(G)|$ classes de equivalência de representações irredutíveis. ■

Seja V um espaço vetorial, φ uma representação e $m > 0$. Então

$$mV = V \oplus \underbrace{\cdots}_{\text{m vezes}} \oplus V \text{ e } m\varphi = \varphi \oplus \underbrace{\cdots}_{\text{m vezes}} \oplus \varphi.$$

Seja $\left\{\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(i)}\right\}$ o conjunto de todas as representações unitárias irredutíveis de G. Defina $d_i = \text{grau } \varphi^{(i)}$.

Definição 3.5. Se $\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus m_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)}$, então m_i é dita a *multiplicidade* de $\varphi^{(i)}$ em ρ. Se $m_i > 0$, então dizemos que $\varphi^{(i)}$ é um *fator irredutível* de ρ

Observação 3.8. Se $\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)}$, então

$$\text{grau } \rho = m_1 \cdot d_1 + \cdots + m_s \cdot d_s$$

Lema 3.6. *Seja $\varphi = \rho \oplus \psi$. Então, $\chi_\varphi = \chi_\rho + \chi_\psi$.*

Demonstração: Considere duas representações $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ e $\psi : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$. Então, $\varphi : G \longrightarrow GL_{m+n}(\mathbb{C})$ tem a forma de matriz em blocos

$$\varphi_g = \begin{bmatrix} \rho_g & 0 \\ 0 & \psi_g \end{bmatrix}$$

Como o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal, temos que:

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(\rho_g) + Tr(\psi_g) = \chi_\rho(g) + \chi_\psi(g).$$

■

O Teorema a seguir é uma boa maneira de checar se uma representação é irredutível.

Teorema 3.3. *Sejam $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(s)}$ as representações irredutíveis de G e, suponha $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, tal que*

$$\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus m_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)}$$

Então, $m_i = \left\langle \chi_\rho, \chi_{\varphi^{(i)}} \right\rangle$. Consequentemente, a decomposião de ρ em fatores irredutíveis é única e ρ é determinado, em suas equivalências, pelos seus caracteres.

Demonstração: Sabemos que $\chi_\rho = m_1\chi_{\varphi^{(1)}} + \cdots + m_s\chi_{\varphi^{(s)}}$. Sabemos, também, que

$$\left\langle \chi_\rho, \chi_{\varphi^{(i)}} \right\rangle = m_1 \cdot \left\langle \chi_{\varphi^{(1)}}, \chi_{\varphi^{(i)}} \right\rangle + \cdots + m_s \cdot \left\langle \chi_{\varphi^{(s)}}, \chi_{\varphi^{(i)}} \right\rangle = m_i,$$

pois $\varphi^{(i)}$ é equivalente a $\varphi^{(j)}$ se, somente se $i = j$, já que cada $\varphi^{(i)}$ representa uma classe de equivalência das representações irredutíveis de G.

Além disso, se $\rho \sim \varphi$ então $\chi_\rho \sim \chi_\varphi$. Portanto, temos unicidade e que ρ é determinada pelos caracteres de sua decomposição em fatores irredutíveis. ■

Corolário 3.4. *Uma representação é irredutível se, e somente se,* $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$.

Demonstração: Suponha que $\rho \sim m_1\varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^{(s)}$. Pela ortonormalidade dos caracteres irredutíveis, temos que $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \cdots + m_s^2$. Cada m_i é um inteiro não negativo, portanto $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$ se, e somente se, existe um índice j, de modo que $m_j = 1$, e $m_i = 0$ para todo $i \neq j$. No entanto, esse resultado é sempre válido se ρ é irredutível. ■

Exemplo 3.2. Seja ρ uma representação de S_3 do Exemplo 2.7 . Como $e, (12)$ e (123) geram S_3, podemos calcular o produto interno $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle$ dos valores dos caracteres nesses elementos. Lembrando que

$$\rho_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{(123)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\chi_\rho(e) = 1 + 1 = 2,\ \chi_\rho(12) = (-1) + 1 = 0 \text{ e } \chi_\rho(123) = -1 + 0 = -1$$

Como há três transposições e dois 3-ciclos, temos

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6} \cdot (2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

Logo, ρ é irredutível.

Exemplo 3.3. Sabemos que S_3 admite o caracter trivial $\chi_1 : S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^*$, dado por $\chi_1(\sigma) = 1$ para todo $\sigma \in S_3$. Também, temos o caracter χ_3 das representações irredutíveis do exemplo anterior. Como S_3 possui 3 classes de conjugação, pelo Teorema 3.3 esperamos que existam três representações irredutíveis, não equivalentes, de S_3. Portanto, seja d o grau da representação que está faltando. De acordo com o Corolário 3.3 e utilizando o resultado da Proposição 3.5, sabemos que $1^2 + d^2 + 2^2 \leq 6$ e, portanto $d = 1$. De fato, podemos definir uma nova representação de grau 1, chamada *representação de sinais* por

$$\chi_2(\sigma) = \begin{cases} 1, \text{se } \sigma \text{é par} \\ \\ -1, \text{ se } \sigma \text{ é ímpar} \end{cases}$$

3.4 A Representação Regular

Seja X um conjunto finito. Vamos construir um espaço vetorial com base X, tomando:

$$\mathbb{C}X = \left\{ \sum_{x \in X} c_x x | c_x \ \in \mathbb{C} \right\}$$

Observação 3.9. Se X possui n elementos, podemos tomar um isomorfismo

$$T : \mathbb{C}X \longrightarrow \mathbb{C}^n.$$

Logo, $\mathbb{C}X$ consiste em todas as combinações lineares dos elementos de X.

Dois elementos $\sum_{x \in X} a_x x$ e $\sum_{x \in X} b_x x$ são ditos iguais se, e somente se, $a_x = b_x$, para todo $x \in X$. A adição é dada por:

$$\sum_{x \in X} a_x x + \sum_{x \in X} b_x x = \sum_{x \in X} (a_x + b_x) x.$$

A multiplicação por escalar é definida de modo similar. Identificamos $x \in X$ com a combinação linear $1 \cdot x$. X é uma base para $\mathbb{C}X$. Um produto interno pode ser definido em $\mathbb{C}X$, tomando:

$$\left\langle \sum_{x \in X} a_x x, \sum_{x \in X} b_x x \right\rangle = \sum_{x \in X} a_x \overline{b_x}$$

Definição 3.6 (**Representação Regular**)**.** Seja G um grupo finito. A *Representação Regular* de G é o homomorfismo $L : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}G)$ definido por:

$$L_g \left(\sum_{h \in G} c_h h \right) = \sum_{h \in G} c_h gh = \sum_{x \in G} c_{g^{-1}x} x,$$

para todo $g \in G$, onde a última igualdade vem da mudança de variável $g^{-1}x = g^{-1}gh = h$.

Em outras palavras, dado um elemento $h \in G$, temos que $L_g h = gh$. Ou seja, a ação do operador L_g em h é multiplicar à esquerda, h por g. Segundo Steinberg[2] a fórmula da definição de *Representação Regular* é a fórmula usual para a ação de um operador linear sobre uma combinação linear de vetores da base dada a ação na base.

Veremos que a *Representação Regular* nunca é irredutível se G for não trivial. Por outro lado, ela contém todas as representações irredutíveis de G como elementos.

Proposição 3.10. *A Representação Regular é uma representação unitária de G.*

Demonstração: Sabemos que o mapa L_g é linear para $g \in G$. Também, se $g_1, g_2 \in G$ e $h \in G$ é um elemento da base de $\mathbb{C}G$, então

$$L_{g_1}L_{g_2}(h) = L_{g_1}(g_2h) = g_1g_2h = L_{g_1g_2}(h)$$

e portanto, L é um homomorfismo. Se mostrarmos que L_g é unitário, seguirá que L_g é invertível e que L é uma representação unitária. Pela definição de Representação Regular, temos:

$$\left\langle L_g \sum_{h\in G} c_h h, L_g \sum_{h\in G} k_h h \right\rangle = \left\langle \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} x, \sum_{x\in G} k_{g^{-1}x} x \right\rangle = \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x}\overline{k_{g^{-1}x}}$$

Tomando $y = g^{-1}x$, teremos:

$$\sum_{y\in G} c_y \overline{k_y} = \left\langle \sum_{y\in G} c_y y, \sum_{y\in G} k_y y \right\rangle$$

Concluíndo, assim, pela Definição 2.10 que a *Representação Regular* é *unitária*. ∎

Proposição 3.11. *O caracter da Representação Regular L é dado por:*

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G|, \textit{se } g = e \\ 0, \textit{se } g \neq e \end{cases}$$

Demonstração: Seja $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$, onde $n = |G|$. Então, $L_g g_j = g \cdot g_j$. Além disso, se $[L_g]$ é a matriz de L_g com respeito a base G, então:

$$[L_g]_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } g_i = g \cdot g_j \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

E, portanto

$$[L_g]_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } g = g_i \cdot g_j^{-1} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em particular

$$[L_g]_{ii} = \begin{cases} 1, \text{se } g = e \\ \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Daí, concluímos que

$$\chi_L(g) = Tr(L_g) = \begin{cases} |G|, \text{se } g = e \\ \\ 0, \text{se } g \neq e \end{cases}$$

■

Agora vamos decompor a representação regular L em fatores irredutíveis.

Fixe o conjunto $\{\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(n)}\}$ de todas as representações irredutíves, não equivalentes do grupo finito G e tome $d_i = \text{grau}\varphi^{(i)}$. Por conveniência, colocaremos

$$\chi_i = \chi_{\varphi^{(i)}}, \text{para } i = 1, \cdots, n$$

Teorema 3.4. *Seja L a representação regular de G. Então, vale a decomposição*

$$L \sim d_1\varphi^{(1)} \oplus d_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus d_s\varphi^{(n)}$$

Demonstração: Como $\chi_L(g) = 0$ para todo $g \neq e$ e $\chi_L(e) = |G|$,

$$\begin{aligned} \langle \chi_L, \chi_i \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_L(g)\overline{\chi_i(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \cdot |G| \cdot \overline{\chi_i(e)} \\ &= \text{grau } \varphi^{(i)} \\ &= d_i \end{aligned}$$

■

Corolário 3.5. *Vale a fórmula $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2$. Além disso, se $g \neq e$, então $\sum\limits_{k=1}^{s} d_k\chi_k(g) = 0$.*

Demonstração: Já sabemos que $\chi_L = d_1\chi_1 + \cdots + d_s\chi_s$. Portanto, pelo Teorema 3.4, calculando χ_L em e e em $g \neq e$, temos

$$|G| = \chi_L(e) = d_1\chi_1(e) + \cdots + d_s\chi_s(e) = d_1^2 + \cdots + d_s^2$$

$$0 = \chi_L(g) = d_1\chi_1(g) + \cdots + d_s\chi_s(g)$$

■

Consequentemente, podemos perceber que a matriz dos coeficientes das representações unitárias irredutíveis formam uma base ortogonal para o espaço de todas as funções em G.

Teorema 3.5. *O conjunto* $B = \left\{\sqrt{d_k \varphi_{ij}^{(k)}} | 1 \leq k \leq s, 1 \leq i, j \leq d_k\right\}$ *é uma base ortonormal para* $L(G)$.

Demonstração: Nós já sabemos que B é um conjunto ortonormal. Como

$$|B| = d_1^2 + \cdots + d_s^2 = |G| = dim L(G),$$

segue que B é uma base. ∎

Agora, vamos mostrar que $\chi_1, \ldots, \chi_s$ é uma base ortonormal para o espaço das funções de classe $Z(L(G))$.

Teorema 3.6. *O conjunto* $\chi_1, \ldots, \chi_s$ *é uma base ortonormal para* $Z(L(G))$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2 que os caracteres irredutíveis de G formam um conjunto ortonormal das funções de classe. Precisamos mostrar, agora, que os caracteres geram $Z(L(G))$. Seja $f \in Z(L(G))$. Pelo teorema anterior:

$$f = \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}^{(k)}$$

para $c_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}$, onde $1 \leq k \leq s$ e $1 \leq i, j \leq d_k$. Como f é função de classe, para qualquer $x \in G$ temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g^{-1}xg) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}^{(k)}(g^{-1}xg) \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{ij}^{(k)}(g^{-1}xg) \\ &= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \left[\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{g^{-1}}^{(k)} \varphi_x^{(k)} \varphi_g^{(k)}\right]_{ij} \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.3 temos que $\left(\varphi_x^{(k)}\right)^\sharp = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{g^{-1}}^{(k)} \varphi_x^{(k)} \varphi_g^{(K)}$. Logo,

$$= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \left[\left(\varphi_x^{(k)}\right)^\sharp\right]_{ij}$$

E utilizando o resultado da *Variante do Lema de Schur* (Proposição 3.4), segue que,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k} c_{ij}^{(k)} \cdot \frac{Tr\left(\varphi_x^{(k)}\right)}{\text{grau } \varphi^{(k)}} I_{ij} \\
&= \sum_{i,k} c_{ij}^{(k)} \frac{1}{d_k} \cdot \chi_k(x)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$f = \sum_{i,k} c_{ij}^{(k)} \frac{1}{d_k} \cdot \chi_k$$

e vemos que f é combinação linear dos χ_k. Logo, o conjunto de caracteres irredutíveis de G gera o espaço das funções de classe $Z(L(G))$. ■

Corolário 3.6. *O número de classes de equivalência de representações irredutíveis de G é o número de classes de conjugação de G.*

Demonstração: De acordo com o teorema anterior, temos que

$$s = dim\ Z(L(G))$$

E, pela Proposição 3.9

$$dim\ Z(L(G)) = |Cl(G)| \Rightarrow s = |Cl(G)|$$

■

Definição 3.7. Seja G um grupo finito com caracteres irredutíveis $\chi_1, \cdots, \chi_s$ e classes de conjugação $C_1, \cdots, C_s$. A Tabela de Caracteres de G é a matriz X, $s \times s$, com $\chi_{ij} = \chi_i(C_j)$. Em outras palavras, as colunas da matriz X são indexadas pelos caracteres de G, as linhas, pelas classes de conjugação de G e, a ij-ésima entrada é o valor do i-ésimo caracter na j-ésima classe de conjugação.

Nos exemplos a seguir, bem como na próxima seção, falaremos sobre as tabelas de caracteres irredutíveis. A primeira linha da tabela contém as classes de conjugação do grupo em questão. Denotaremos por $[s]$ a classe de conjugação do elemento $s \in G$. A segunda linha, que contém o número de elementos de cada classe, será denotada por $\#[s]$. Nas linhas seguintes, serão computados os caracteres irredutíveis do grupo, um em cada linha, com o respectivo valor deste caracter na classe de conjugação.

Exemplo 3.4 (**Tabela de Caracteres Irredutíveis de** $\mathbb{Z}_3$)**.** Vamos construir a Tabela de Caracteres Irredutíveis do conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. De acordo com o Corolário 3.1 Toda representação irredutível de um grupo *abeliano* tem grau 1. Como $\mathbb{Z}_3$ é abeliano e, além disso, $|\mathbb{Z}_3| = 3$, o grupo possui 3 classes de conjugação e, consequentemente, 3 representações irredutíveis não isomorfas.

Denotaremos por χ_μ o caracter da *representação unitária* do Exemplo 2.1, por χ_1 o caracter da representação do Exemplo 2.4 e por χ_2 o caracter da terceira representação irredutível. Os caracteres da representação unitária são triviais

$$\chi_\mu(\overline{0}) = \chi_\mu(\overline{1}) = \chi_\mu(\overline{2}) = 1$$

Vamos lembrar que a representação $\rho : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ do Exemplo 2.4 é dada por $\rho(\overline{k}) = w^k$. Como $\mathbb{C}^*$ tem dimensão 1, temos que

$$\chi_1(\overline{0}) = 1, \chi_1(\overline{1}) = w \text{ e } \chi_1(\overline{2}) = w^2.$$

Para obtermos os valores do caracter χ_2 utilizaremos os resultados do Teorema 3.4 e do Corolário 3.5. Sabemos que $\sum\limits_{g \in \mathbb{Z}_3} d_{\chi_g} \chi_g(e) = |G|$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \chi_2\left(\overline{0}\right) = |G| \\
&1 + 1 + \chi_2\left(\overline{0}\right) = 3 \\
&2 + \chi_2\left(\overline{0}\right) = 3 \\
&\chi_2\left(\overline{0}\right) = 1
\end{aligned}$$

Antes de calcularmos $\chi_2\left(\overline{1}\right)$ e $\chi_2\left(\overline{2}\right)$ vale lembrar que se $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ então $w^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
w + w^2 &= \left[cos\left(\frac{2\pi i}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{4\pi i}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{4\pi i}{3}\right)\right] \\
&= \left[\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \left[\frac{-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{-1}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$[s]$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\#[s]$	1	1	1
χ_μ	1	1	1
χ_1	1	w	w^2
χ_2	1	w^2	w

Tabela 3.1: Tabela de Caracteres de $\mathbb{Z}_3$

Como $\sum\limits_{g\in\mathbb{Z}_3} d_{\chi_g}\chi_g(g) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in\mathbb{Z}_3} d_{\chi_g}\chi_g\left(\overline{1}\right) = 0\\
&1\cdot 1 + 1\cdot w + 1\cdot \chi_2\left(\overline{1}\right) = 0\\
&1 + w + \chi_2\left(\overline{1}\right) = 0\\
&w + \chi_2\left(\overline{1}\right) = -1\\
&\chi_2\left(\overline{1}\right) = w^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in\mathbb{Z}_3} d_{\chi_g}\chi_g\left(\overline{2}\right) = 0\\
&1\cdot 1 + 1\cdot w^2 + 1\cdot \chi_2\left(\overline{2}\right) = 0\\
&1 + w^2 + \chi_2\left(\overline{2}\right) = 0\\
&w^2 + \chi_2\left(\overline{2}\right) = -1\\
&\chi_2\left(\overline{2}\right) = w
\end{aligned}$$

Com os valores dos caracteres irredutíveis de $\mathbb{Z}_3$, podemos construir a Tabela 3.1.

Exemplo 3.5 (Tabela de Caracteres de S_3). Agora, construiremos a tabela de caracteres do conjunto de permutações S_3. Como vimos nos Exemplos 2.1 e 2.2, já sabemos que S_3 possui duas representações de grau 1. Como S_3 possui 3 classes de conjugação, a saber, e, $[(12)]$ e $[(123)]$, falta encontrar uma representação irredutível. Seja d o grau dessa representação. Sabemos que S_3 possui 6 elementos, ou seja, $|S_3| = 6$. Para encontrar d podemos utilizar o resultado do Corolário 3.5. Assim, temos $1^2 + 1^2 + d^2 = 6$. Logo, $d = 2$. Essa é a representação exibida no Exemplo 2.7. Vamos mostrar que a mesma, é uma representação é irredutível.

A representação $\rho : S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ do Exemplo 2.7 é dada por

$$\rho_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \rho_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \rho_{(123)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $\rho_{(13)} = \rho_{(123)} \cdot \rho_{(12)}$, $\rho_{(23)} = \rho_{(12)} \cdot \rho_{(123)}$ e que $\rho_{(132)} = \rho_{(123)} \cdot \rho_{(123)}$. Assim

$$\rho_{(13)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\rho_{(23)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\rho_{(132)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pela Definição 3.3, podemos calcular os caracteres da representação ρ

$$\begin{aligned}
\chi_\rho(e) &= Tr(\rho_e) = 1 + 1 = 2, \\
\chi_\rho(12) &= Tr(\rho_{(12)}) = -1 + 1 = 0, \\
\chi_\rho(123) &= Tr(\rho_{(123)}) = -1 + 0 = -1, \\
\chi_\rho(13) &= Tr(\rho_{(13)}) = 1 + (-1) = 0, \\
\chi_\rho(23) &= Tr(\rho_{(23)}) = 0 + 0 = 0, \\
\chi_\rho(132) &= Tr(\rho_{(132)}) = 0 + (-1) = -1.
\end{aligned}$$

O resultado do Corolário 3.4 que nos diz que uma representação é irredutível se, e somente se, $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$. Calculando $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \cdot \overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) \\
&= \frac{1}{6} \cdot (4 + 2 + 2) \\
&= \frac{6}{6} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a representação do Exemplo 2.7 é irredutível. Sabemos que os caracteres da *representação unitária* μ são tais que

$$\chi_\mu(s) = 1,$$

para todo $s \in S_3$. Além disso, como as permutações e e (123) são permutações pares e (12) é uma permutação ímpar, de acordo com a *representação de sinais de* S_3, temos

$$\begin{aligned}
\chi_\sigma(e) &= \chi_\mu(123) = 1 \text{ e} \\
\chi_\sigma(12) &= -1.
\end{aligned}$$

Com os valores dos caracteres irredutíveis de S_3, podemos construir a Tabela 3.2.

$[s]$	$[e]$	$[(12)]$	$[(123)]$
$\#[s]$	1	3	2
χ_μ	1	1	1
χ_σ	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Tabela 3.2: Tabela de Caracteres de S_3

Podemos perceber que nas tabelas 3.1 e 3.2 as colunas são ortogonais com respeito ao produto interno padrão. Vamos mostrar que esse resultado sempre acontece. Se g, $h \in G$, então o produto interno das colunas correspondentes às suas classes de conjugação é dado pela expressão:

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)}$$

Lembremos que C é uma classe de conjugação. Então:

$$\delta_C(g) = \begin{cases} 1 \text{ se } g \in C \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

δ_C com $C \in Cl(G)$ forma uma base para $Z(L(G))$ assim como os caracteres irredutíveis. É natural expressar δ_C em termos de caracteres irredutíveis. Daí , temos a ortogonalidade das colunas da tabela de caracteres.

3.5 Tabela de Caracteres Irredutíveis

Conhecendo as tabelas de caracteres irredutíveis de um grupo finito G, temos informações suficientes para conhecer os caracteres do grupo e assim conhecer as representações de G. Nessa seção faremos a construção das tabelas de caracteres irredutíveis dos grupos A_4, S_4 e A_5. No próximo capítulo iremos relacionar os caracteres desses grupos com ações destes grupos nos sólidos de Platão.

3.5.1 Tabela de Caracteres Irredutíveis de A_4

Primeiro, vamos observar que o grupo A_4 possui um subgrupo normal, conhecido como *Grupo de Klein*:

$$K := \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset A_4.$$

Além disso, como A_4/K tem ordem 3, o conjunto será *isomorfo* a $\mathbb{Z}_3$. Então, podemos usar esse isomorfismo para induzir representações em A_4 utilizando as representações de $\mathbb{Z}_3$.

Assim, dada uma representação irredutível em $\mathbb{Z}_3$ $\rho : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow GL(V)$, a composição

$$A_4 \xrightarrow{\pi} \frac{A_4}{K} \cong \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\rho} GL(V)$$

é uma representação irredutível de A_4. Além disso, se s e t são elementos de A_4, tais que $\pi(s) = \pi(t)$, então teremos que $\rho \circ \pi(s) = \rho \circ \pi(t)$.

Na construção da Tabela 3.3, para os elementos $[e]$, $[(123)]$ e $[(132)]$, os valores dos caracteres χ_μ, χ_1 e χ_2 são os mesmos da Tabela 3.1 de $\mathbb{Z}_3$ vista no Exemplo 3.4.

Já para $[(12)(34)]$, como $\pi\left((12)(34)\right) = \pi(e)$, então

$$\rho \circ \pi\left((12)(34)\right) = \rho \circ \pi(e) = \rho(e).$$

Portanto, $\chi_\mu\left((12)(34)\right) = 1$, $\chi_1\left((12)(34)\right) = 1$ e $\chi_2\left((12)(34)\right) = 1$.

Nos falta, agora, encontrar os valores para a outra representação irredutível de A_4. Primeiro, vamos encontrar o *grau* dessa representação, denotado por d_3. O Corolário 3.5 nos diz que se $d_1, \ldots, d_s$ são os graus das representações irredutíveis de um Grupo, então $d_1^2 + \cdots + d_s^2 = |G|$. Sabemos que $|A_4| = 12$ $(|S_4|/2)$. Já vimos que as representações χ_μ, χ_1 e χ_2 têm grau 1. Assim

$$\begin{aligned}
&1^2 + 1^2 + 1^2 + (d_3)^2 = 12\\
&1 + 1 + 1 + (d_3)^2 = 12\\
&3 + (d_3)^2 = 12\\
&(d_3)^2 = 9\\
&d_3 = 3.
\end{aligned}$$

Usando o resultado do Corolário 3.5 e os valores já encontrados dos outros caracteres podemos calcular os valores que faltam na tabela. Denote por χ_3 o caracter da representação irredutível de grau 3. Assim,

$$\begin{aligned}
&\sum_{g \in A_4} d_{\chi_g} \chi_g\left([(123)]\right) = 0\\
&1 \cdot 1 + 1 \cdot w + 1 \cdot w^2 + 3 \cdot \chi_3\left([(123)]\right) = 0\\
&1 + w + w^2 + 3 \cdot \chi_3\left([(123)]\right) = 0\\
&1 + (-1) + 3 \cdot \chi_3\left([(123)]\right) = 0\\
&3 \cdot \chi_3\left([(123)]\right) = 0\\
&\chi_3\left([(123)]\right) = 0.
\end{aligned}$$

$[s]$	$[e]$	$[(123)]$	$[(132)]$	$[(12)(34)]$
$\#[s]$	1	4	4	3
χ_μ	1	-1	1	1
χ_1	1	w	w^2	1
χ_2	1	w^2	w	1
χ_3	3	1	0	-1

Tabela 3.3: Tabela de Caracteres de A_4

$$\sum_{g\in A_4} d_{\chi_g}\chi_g\left([(132)]\right) = 0$$
$$1\cdot 1 + 1\cdot w + 1\cdot w^2 + 3\cdot \chi_3\left([(132)]\right) = 0$$
$$1 + w + w^2 + 3\cdot \chi_3\left([(132)]\right) = 0$$
$$1 + (-1) + 3\cdot \chi_3\left([(132)]\right) = 0$$
$$3\cdot \chi_3\left([(132)]\right) = 0$$
$$\chi_3\left([(132)]\right) = 0.$$

$$\sum_{g\in A_4} d_{\chi_g}\chi_g\left([(12)(34)]\right) = 0$$
$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot \chi_3\left([(12)(34)]\right) = 0$$
$$1 + 1 + 1 + 3\cdot \chi_3\left([(12)(34)]\right) = 0$$
$$3\cdot \chi_3\left([(12)(34)]\right) = -3$$
$$\chi_3\left([(12)(34)]\right) = -1.$$

No próximo capítulo, encontraremos a representação χ_3 a partir das rotações do tetraedro regular.

3.5.2 Tabela de Caracteres Irredutíveis de S_4

De maneira análoga ao caso do grupo de permutação A_4, o *grupo de Klein*

$$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

também é subgrupo normal de S_4. Existe um isomorfismo de S_4/K com S_3. Assim, as representações irredutíveis de S_3 induzem representações irredutíveis em S_4 via a composição

$$S_4 \xrightarrow{\pi} \frac{S_4}{K} \xrightarrow{\rho} GL(V).$$

$[s]$	$[e]$	$[(12)]$	$[(123)]$	$[(1234)]$	$[(12)(34)]$
$\#[s]$	1	6	8	6	3
χ_μ	1	-1	1	1	1
χ_σ	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

Tabela 3.4: Tabela de Caracteres de S_4

$[s]$	$[e]$	$[(123)]$	$[(12)(34)]$	$[(12345)]$	$[(13245)]$
$\#[s]$	1	20	15	12	12
χ_μ	1	-1	1	1	1
$\Phi_{\mathbb{I}_1}$	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\Phi_{\mathbb{I}_2}$	1	w^2	1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_V	4	1	0	-1	-1
χ	5	-1	1	0	0

Tabela 3.5: Tabela de Caracteres de A_5

Para construirmos a Tabela 3.4, nos elementos $[e]$, $[(12)]$ e $[(123)]$, os valores dos caracteres χ_μ, χ_σ e χ_3 são os mesmos da Tabela 3.2 de S_3 vista no Exemplo 3.5.
Para $[(1234)]$, como $\pi\left((1234)\right) = \pi\left((12)\right)$, então $\rho \circ \pi\left((1234)\right) = \rho \circ \pi\left((12)\right) = \rho(e)$. Portanto, $\chi_\mu\left((1234)\right) = 1$, $\chi_\sigma\left((1234)\right) = -1$ e $\chi_3\left((1234)\right) = 0$.
Para $[(12)(34)]$, como $\pi\left((12)(34)\right) = \pi(e)$, então $\rho \circ \pi\left((12)(34)\right) = \rho \circ \pi(e) = \rho(e)$. Portanto, $\chi_\mu\left((12)(34)\right) = 1$, $\chi_\sigma\left((12)(34)\right) = 1$ e $\chi_3\left((12)(34)\right) = 2$.

Os caracteres χ_4 e χ_5 serão encontrados no próximo capítulo a partir da ação do grupo S_4 no cubo.

3.5.3 Tabela de Caracteres Irredutíveis de A_5

A Tabela 3.5 apresenta os caracteres irredutíveis de A_5. Esses valores também serão encontrados no próximo capítulo observando as rotações do dodecaedro ou do icosaedro regular.

4 Simetrias nos Sólidos de Platão

Os Sólidos de Platão, também conhecidos como poliedros regulares, são aqueles onde todas as faces são polígonos regulares e congruentes. Existem cinco sólidos platônicos: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro. Esses sólidos estão descritos no décimo terceiro livro de *Os Elementos* de Euclides. Cada um desses sólidos possui um número finito de rotações no espaço tridimensional, que preservam a posição inicial do sólido. Se pensarmos em cada vértice dos poliedros como elementos de um conjunto, então as simetrias observadas no tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, são geradas a partir da ação desses grupos de permutação nos sólidos.
Um octaedro pode ser construído a partir de segmentos de reta unindo os centros das faces de um cubo. De maneira análoga, um cubo pode ser construído unindo os centros das faces de um octaedro. Por definição, esses sólidos são chamados de *sólidos duais*. O mesmo ocorre no caso do dodecaedro e do icosaedro. Sólidos *duais* possuem o mesmo grupo de simetria.

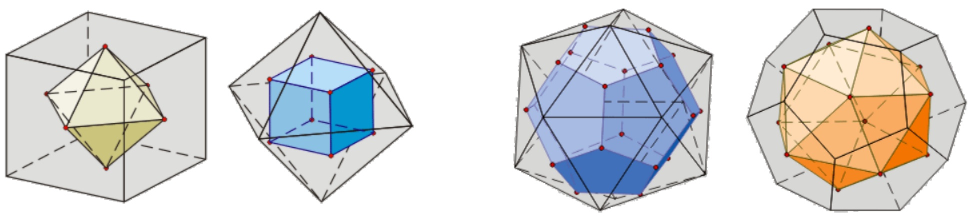


Figura 4.1: Duais Cubo-Octaedro, Octaedro-Cubo, Dodecaedro-Icosaedro e Icosaedro-Dodecaedro[1]

Observação 4.1. O *dual* de um sólido platônico é sempre um outro sólidos platônico. O *dual* do tetraedro é o próprio tetraedro.

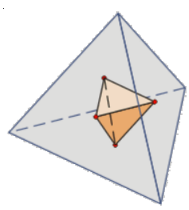


Figura 4.2: Dual Tetraedro[1]

4.1 Representação por permutações e pontos fixos

Seja V o espaço vetorial complexo com base $\{e_x\}_{x\in X}$ indexada pelos elementos de X. Para cada $g \in G$ defina $\varphi_s : V \longrightarrow V$, por $\varphi_g(e_x) = e_{gx}$. A função $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ definida por $g \longmapsto \varphi_g$ é chamada de *representação por permutações* de X. A proposição a seguir relaciona o caracter da representação por permutações com os pontos fixos da ação de G em X e será utilizada para achar os caracteres que ficaram faltando no capítulo anterior.

Proposição 4.1. *Seja G um grupo finito age no conjunto X e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ a representação por permutações de X. Então o valor do caracter χ_φ em $g \in G$ é o número de pontos fixos de g:*

$$\chi_\varphi(g) = \#\{x \in X | gx = x\}$$

Demonstração: Considere $\beta := \{e_x\}_{x\in X}$, a base de V indexada pelos elementos de X. Por definição, para todo $x \in X$ temos que $\varphi_g(e_x) = e_{gx}$. Logo, se (a_{ij}) é a matriz que representa φ_g na base β e a k-ésima coluna dessa matriz está associada ao elemento $x \in X$, então

$$a_{kk} = \begin{cases} 1, & \text{se } gx = x, \\ 0, & \text{se } gx \neq x \end{cases}.$$

Portanto,

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(a_{ij}) = \#\{x \in X | gx = x\},$$

concluindo, assim, a demonstração. ∎

4.2 Simetrias no Sólidos de Platão

Todas as ações nos sólidos, descritas nesta seção, podem ser vistas na atividade no *applet Geogebra*, elaborada pelo professor Humberto José Bortolossi[3] através do *QR Code* abaixo.

4.2.1 Tetraedro

Vamos considerar a ação do grupo de permutação A_4 nos vértices do tetraedro. Denote essa ação por T. Geometricamente, essa ação nos elementos e, (123), (132) e $(12)(34)$,

Figura 4.3: QR Code para a atividade Simetrias de Rotação dos Sólidos Platônicos

$[s]$	$[e]$	$[(123)]$	$[(132)]$	$[(12)(34)]$
Φ_T	4	1	1	0

Tabela 4.1: Caracter da ação de A_4 no tetraedro

representantes das classes de conjugação do grupo, pode ser descrita da seguinte maneira:[1]

(123): rotação de $\frac{2\pi}{3} rad$ em torno do eixo que passa por $V(4)$ e $C(123)$.

(123): rotação de $\frac{4\pi}{3} rad$ em torno do eixo que passa por $V(4)$ e $C(123)$.

(12)(34): rotação de πrad em torno do eixo que passa por $M(1,2)$ e $M(3,4)$.

Assim, com a descrição geométrica, podemos utilizar a Proposição 4.1 para obter o caracter da ação T, denotado por Φ_T. Os valores estão apresentados na Tabela 4.1.

Podemos observar que Φ_T não é um caracter irredutível. De fato, de acordo com o Corolário 3.4, um caracter χ_ρ é irredutível se, e somente se, $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$. Como A_4 possui oito 3-ciclo e três composições de transposições, temos

$$\begin{aligned} \langle \Phi_T, \Phi_T \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_T(g) \cdot \overline{\Phi_T(g)} \\ &= \frac{1}{12} \left(4^2 + 8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

[1] O leitor pode observar as ações, geometricamente, utilizando a Figura 5.3, com a atividade do professor Humberto Bortolossi.

concluindo assim que T não é irredutível.

Vale lembrar do resultado da Proposição 3.5 que o grau de uma representação φ é igual a $\chi_\varphi(e)$. Portanto, segue que *grau* $T = \Phi_T(e) = 4$. Quando construímos a tabela de caracteres irredutíveis de A_4 vimos que esse grupo não possui nenhuma representação irredutível de grau 4. Assim, podemos decompor a representação em fatores irredutíveis. Calculando o produto interno do caracter da ação T com o caracter da representação unitária μ, podemos obter, de acordo com a Proposição 3.5 a multiplicidade de μ em T. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_T, \chi_\mu \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \Phi_T(g)\cdot\overline{\chi_\mu(g)} \\
&= \frac{1}{12}(4\cdot 1 + 8(1\cdot 1) + 3(0\cdot 1)) \\
&= \frac{1}{12}(4+8) \\
&= \frac{12}{12} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Logo a representação unitária ocorre apenas uma vez em T e podemos escrever $T = \mu \oplus W$, onde W é uma representação de A_4 de grau 3. Utilizando o resultado obtido no Lema 3.6,

$$\Phi_T = \chi_\mu + \chi_W,$$

resultando que $\chi_W = \Phi_T - \chi_\mu$. Agora, podemos obter os valores do caracter χ_W.

$$\begin{aligned}
&\chi_W(e) = \Phi_T(e) - \chi_\mu(e) = 3 - 1 = 2, \\
&\chi_W\ ([(123)]) = \Phi_T\,([(123)]) - \chi_\mu\,([(123)]) = 1 - 1 = 0, \\
&\chi_W\,([(132)]) = \Phi_T\,([(132)]) - \chi_\mu\,([(132)]) = 1 - 1 = 0, \\
&\chi_W\,([(12)(34)]) = \Phi_T\,([(12)(34)]) - \chi_\mu\,([(12)(34)]) = 0 - 1 = -1.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que χ_W é irredutível, calculando $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$. Se compararmos os valores dos caracteres de χ_W com os valores obtidos na Tabela 3.3 verificamos que $\chi_W = \chi_3$ e concluímos que o caracter da ação de A_4 no tetraedro é a soma dos caracteres das representações irredutíveis $\chi_\mu + \chi_3$.

4.2.2 Cubo e Octaedro

Vamos considerar a ação do grupo de permutação S_4 que permuta as diagonais principais do cubo. Denote essa ação por C. Geometricamente, essa ação nos elementos

$[s]$	$[e]$	$[(12)]$	$[(123)]$	$[(1234)]$	$[(12)(34)]$
Φ_C	4	2	1	0	0

Tabela 4.2: Caracter da ação de S_4 no tetraedro

$e, (12), (123), (1234)$ e $(12)(34)$, representantes das classes de conjugação do grupo, pode ser descrita da seguinte maneira:

(12): rotação de πrad em torno do eixo que passa por $M(1,2)$ e $M(7,8)$.

(123): rotação de $\frac{2\pi}{3} rad$ em torno do eixo que passa por $V(4)$ e $V(6)$.

(1234): rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ em torno do eixo que passa por $C(1,2,3,4)$ e $C(5,6,7,8)$.

$(12)(34)$: rotação de πrad em torno do eixo que passa por $C(1,2,5,6)$ e $C(3,4,7,8)$.

Assim, com a descrição geométrica e utilizando o resultado da Proposição 4.1, podemos obter o caracter da ação C, denotado por Φ_C. Os valores estão apresentados na Tabela 4.2.

Sabendo que S_4 possui seis transposições, oito 3-ciclo, seis 4-ciclo e três composições de duas transposições, podemos calcular $\langle \Phi_C, \Phi_C \rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_C, \Phi_C \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_C(g) \cdot \overline{\Phi_C(g)} \\
&= \frac{1}{24} \left(4^2 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2\right) \\
&= \frac{1}{24} (16 + 24 + 8) \\
&= \frac{48}{24} \\
&= 2
\end{aligned}$$

e, portanto, Φ_C não é uma representação irredutível.

O *grau* $C = \Phi_C(e) = 4$. Calculando o produto interno $\langle \Phi_C, \chi_\mu \rangle = 1$, obtemos que a representação C pode ser decomposta como $C = \mu \oplus W$, onde W é uma representação de S_4 de grau 3. Dessa forma,

$$\Phi_C = \chi_\mu + \chi_W$$

resultando que $\chi_W = \Phi_C - \chi_\mu$. Agora, podemos obter os valores do caracter χ_W.

$$\begin{aligned}
&\chi_W(e) = \Phi_C(e) - \chi_\mu(e) = 4 - 1 = 3,\\
&\chi_W\ \ ([(12)]) = \Phi_C\left([(123)]\right) - \chi_\mu\left([(123)]\right) = 2 - 1 = 1,\\
&\chi_W\ \ ([(123)]) = \Phi_C\left([(123)]\right) - \chi_\mu\left([(123)]\right) = 1 - 1 = 0,\\
&\chi_W\left([(1234)]\right) = \Phi_C\left([(132)]\right) - \chi_\mu\left([(132)]\right) = 0 - 1 = -1,\\
&\chi_W\left([(12)(34)]\right) = \Phi_C\left([(12)(34)]\right) - \chi_\mu\left([(12)(34)]\right) = 0 - 1 = -1.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que χ_W é irredutível, calculando $\langle \chi_W, \chi_W \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \chi_W, \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g) \cdot \overline{\chi_W(g)}\\
&= \frac{1}{24} \left(3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2\right)\\
&= \frac{1}{24} (9 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1)\\
&= \frac{1}{24} (9 + 6 + 6 + 3)\\
&= \frac{1}{24} (24)\\
&= \frac{24}{24}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Comparando os valores obtidos para o caracter com os valores da Tabela 3.4, verificamos que $\chi_W = \chi_4$.

Já o caracter χ_5 é obtido tomando o produto tensorial $\chi_\sigma \cdot \chi_W$, correspondente à representação $\sigma \otimes W$. A definição e as propriedades do produto tensorial de representações podem ser encontradas em [4].

4.2.3 Dodecaedro e Icosaedro

O grupo de permutações que age no Icosaedro e no Dodecaedro é um grupo de permutações pares A_5, onde $|A_4| = 60$. As classes de conjugação são $[e], [(123)], [(12)(34)]$, $[(12345)]$ e $[(13245)]$. Podemos pensar nas formas de rotacionar o Icosaedro de modo que sua posição inicial seja preservada. Como o sólido possui 20 faces triangulares, existem 20×3 maneiras de efetuar essas simetrias (cada uma das 20 faces pode ser a base do sólido e podemos permutar os vértices da base).

Considere a ação natural do grupo A_5 nos elementos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Denote por ψ o caracter dessa ação. De acordo com a Proposição 4.1 obtemos os valores Tabela 4.3.

$[s]$	$[e]$	$[(123)]$	$[(12)(34)]$	$[(12345)]$	$[(13245)]$
ψ	5	2	1	0	0

Tabela 4.3: Caracter da ação de A_5 no tetraedro

Sabendo que A_5 possui vinte 3-ciclo, quinze composições de duas transposições e vinte e quatro 5-ciclo $(12+12)$, podemos calcular $\langle \psi, \psi \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \psi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \cdot \overline{\psi(g)} \\
&= \frac{1}{60} \left(5^2 + 20 \cdot 2^2 + 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 0^2\right) \\
&= \frac{1}{60} (25 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 24 \cdot 0) \\
&= \frac{1}{60} (25 + 80 + 15) \\
&= \frac{120}{60} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

e, portanto, ψ não é uma representação irredutível.

O grau dessa ação é $\psi(e) = 5$. Calculando o produto interno $\langle \psi, \chi_\mu \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \chi_\mu \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \cdot \overline{\chi_\mu(g)} \\
&= \frac{1}{60} (5 \cdot 1 + 20 \cdot (2 \cdot 1) + 15 \cdot (1 \cdot 1) + 24 \cdot (0 \cdot 1)) \\
&= \frac{1}{60} (5 + 20 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 24 \cdot 0) \\
&= \frac{1}{60} (5 + 40 + 15) \\
&= \frac{60}{60} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

concluindo que a multiplicidade da representação unitária, nessa representação, é 1. Portanto, podemos decompô-la como $V \oplus 1$. Dessa forma, denotando por χ_V o caracter de V

$$\psi = \chi_\mu + \chi_V$$

resultando que $\chi_V = \psi - \chi_\mu$. Agora, podemos obter os valores do caracter χ_V.

$$\chi_V(e) = \psi(e) - \chi_\mu(e) = 5 - 1 = 4,$$
$$\chi_V\ ([(123)]) = \psi\left([(123)]\right) - \chi_\mu\left([(123)]\right) = 2 - 1 = 1,$$
$$\chi_V\ ([(12)(34)]) = \psi\left([(12)(34)]\right) - \chi_\mu\left([(123)]\right) = 1 - 1 = 0,$$
$$\chi_V\left([(12345)]\right) = \psi\left([(12345)]\right) - \chi_\mu\left([(132)]\right) = 0 - 1 = -1,$$
$$\chi_V\left([(13245)]\right) = \psi\left([(13245)]\right) - \chi_\mu\left([(12)(34)]\right) = 0 - 1 = -1.$$

Podemos verificar que χ_V é irredutível, calculando $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_V \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)\cdot \overline{\chi_V(g)} \\
&= \frac{1}{60}\left(4^2 + 20\cdot 1^2 + 15\cdot 0^2 + 24\cdot(-1)^2\right) \\
&= \frac{1}{60}\left(16 + 20\cdot 1 + 15\cdot 0 + 24\cdot 1\right) \\
&= \frac{1}{60}\left(16 + 20 + 24\right) \\
&= \frac{1}{60}\left(60\right) \\
&= \frac{60}{60} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Outra representação pode ser obtida a partir das rotações que preservam a posição inicial do sólido. Chamaremos essa ação de I_1. Utilizando uma base adequada, podemos obter as matrizes de rotação para cada classe de conjugação:

e: mantém o sólido fixo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(123): rotação de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ em torno de um eixo perpendicular a duas faces opostas

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(12)(34): rotação de ângulo π em torno de um eixo perpendicular a duas arestas opostas

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(12345): rotação de ângulo $\theta_1 = \frac{2\pi}{5}$ em torno de um eixo através de dois vértices opostos

$$\begin{bmatrix} cos\,(\theta_1) & -sen\,(\theta_1) & 0 \\ sen\,(\theta_1) & cos\,(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(13245): rotação de ângulo $\theta_2 = \frac{4\pi}{5}$ e torno de um eixo através de dois vértices opostos

$$\begin{bmatrix} cos\,(\theta_2) & -sen\,(\theta_2) & 0 \\ sen\,(\theta_2) & cos\,(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denote por Φ_{I_1} o caracter desta representação. Outra ação de A_5 no icosaedro pode ser obtida permutando θ_1 e θ_2 e mantendo fixa a ação dos elementos $e, (123)$ e $(12)(34)$. Denotaremos o caracter desta nova representação por Φ_{I_2}. Os valores dos caracteres Φ_{I_1} e Φ_{I_2} podem ser obtidos utilizando a definição de caracter (Definição 3.3).

$$\begin{aligned}
&\Phi_{I_1}(e) = Tr\,(I_{1_e}) = 1+1+1 = 3,\\
&\Phi_{I_1}(123) = Tr\left(I_{1_{(123)}}\right) = -\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right) + 1 = 0,\\
&\Phi_{I_1}(12)(34) = Tr\left(I_{1_{(12)(34)}}\right) = -1 + (-1) + 1 = -1,\\
&\Phi_{I_1}(12345) = Tr\left(I_{1_{(12345)}}\right) = cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + 1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2},\\
&\Phi_{I_1}(13245) = Tr\left(I_{1_{(12)(34)}}\right) = cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + 1 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2},\\
&\Phi_{I_2}(e) = Tr\,(I_{1_e}) = 1+1+1 = 3,\\
&\Phi_{I_2}(123) = Tr\left(I_{1_{(123)}}\right) = -\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right) + 1 = 0,\\
&\Phi_{I_2}(12)(34) = Tr\left(I_{1_{(12)(34)}}\right) = -1 + (-1) + 1 = -1,\\
&\Phi_{I_2}(12345) = Tr\left(I_{1_{(12345)}}\right) = cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + 1 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2},\\
&\Phi_{I_2}(13245) = Tr\left(I_{1_{(12)(34)}}\right) = cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + 1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Calculando os produtos internos $\langle \Phi_{I_1}, \Phi_{I_1} \rangle$ e $\langle \Phi_{I_2}, \Phi_{I_2} \rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{I_1}, \Phi_{I_1} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \Phi_{I_1}(g) \cdot \overline{\Phi_{I_1}(g)} \\
&= \frac{1}{60} \left(3^2 + 20 \cdot 0^2 + 15 \cdot (-1)^2 + 12 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + 12 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{60} \left(9 + 15 \cdot 1 + 3 \left(6 + 2\sqrt{5} \right) + 3 \left(6 - 2\sqrt{5} \right) \right) \\
&= \frac{1}{60} \left(9 + 15 + 18 + 6\sqrt{5} + 18 - 6\sqrt{5} \right) \\
&= \frac{1}{60} (9 + 15 + 18 + 18) \\
&= \frac{60}{60} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{I_2}, \Phi_{I_2} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \Phi_{I_2}(g) \cdot \overline{\Phi_{I_2}(g)} \\
&= \frac{1}{60} \left(3^2 + 20 \cdot 0^2 + 15 \cdot (-1)^2 + 12 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + 12 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{60} \left(9 + 15 \cdot 1 + 3 \left(6 - 2\sqrt{5} \right) + 3 \left(6 + 2\sqrt{5} \right) \right) \\
&= \frac{1}{60} \left(9 + 15 + 18 - 6\sqrt{5} + 18 + 6\sqrt{5} \right) \\
&= \frac{1}{60} (9 + 15 + 18 + 18) \\
&= \frac{60}{60} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

concluindo, assim que Φ_{I_1} e Φ_{I_2} são irredutíveis com grau $\Phi_{I_1}(e) = \Phi_{I_2}(e) = 3$.

Até agora já encontramos quatro caracteres irredutíveis ($\chi_\mu, \chi_V, \Phi_{I_1}$ e Φ_{I_2}) de A_5. Somando os quadrados dos graus desses caracteres temos $1^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 = 35 < 60$. Portanto, nos falta achar mais um caracter irredutível. Denotaremos o mesmo por χ Seja d_5 o grau de χ. Então

$$\begin{aligned}
&1^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + (d_5)^2 = 60 \\
&35 + (d_5)^2 = 60 \\
&(d_5)^2 = 25 \\
&d_5 = 5
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado do Corolário 3.5 podemos encontrar o valor de χ nas classes de conjugação:

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in A_5} d_{\chi_g}\chi_g\left([(123)]\right) = 0\\
&1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 3\cdot 0 + 3\cdot 0 + 5\cdot \chi\left([(123)]\right) = 0\\
&1 + 4 + 5\cdot \chi\left([(123)]\right) = 0\\
&5\cdot \chi\left([(123)]\right) = -5\\
&\chi\left([(123)]\right) = -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in A_4} d_{\chi_g}\chi_g\left([(12)(34)]\right) = 0\\
&1\cdot 1 + 4\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + 5\cdot \chi\left([(12)(34)]\right) = 0\\
&1 + (-3) + (-3) + 5\cdot \chi\left([(12)(34)]\right) = 0\\
&5\cdot \chi\left([(12)(34)]\right) = 5\\
&\chi\left([(12)(34)]\right) = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in A_4} d_{\chi_g}\chi_g\left([(12345)]\right) = 0\\
&1\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 3\cdot\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 3\cdot\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 5\cdot \chi\left([(12345)]\right) = 0\\
&1 + (-4) + \left(\tfrac{3+3\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\tfrac{3-3\sqrt{5}}{2}\right) + 5\cdot \chi\left([(12345)]\right) = 0\\
&1 + (-4) + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} + 5\cdot \chi\left([(12345)]\right) = 0\\
&1 + (-4) + 3 + 5\cdot \chi\left([(12345)]\right) = 0\\
&5\cdot \chi\left([(12345)]\right) = 0\\
&\chi\left([(12345)]\right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in A_4} d_{\chi_g}\chi_g\left([(13245)]\right) = 0\\
&1\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 3\cdot\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 3\cdot\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 5\cdot \chi\left([(13245)]\right) = 0\\
&1 + (-4) + \left(\tfrac{3-3\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\tfrac{3+3\sqrt{5}}{2}\right) + 5\cdot \chi\left([(13245)]\right) = 0\\
&1 + (-4) + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} + 5\cdot \chi\left([(13245)]\right) = 0\\
&1 + (-4) + 3 + 5\cdot \chi\left([(13245)]\right) = 0\\
&5\cdot \chi\left([(13245)]\right) = 0\\
&\chi\left([(13245)]\right) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, encontramos todos os caracteres irredutíveis de A_5 que estão presentes na Tabela 3.5.

5 Atividade

Nessa seção será apresentada uma atividade para a 2ª série do Ensino Médio. Em geral, os tópicos de Análise Combinatória e Geometria Espacial são estudadas nesse segmento. A atividade busca não somente integrar esses conhecimentos, mas também realizar um trabalho com materiais manipulativos, visto que não é algo muito comum nas escolas regulares. Além disso, esperamos desenvolver a capacidade de visualização de objetos geométricos, a formulação de conjecturas, o trabalho em grupo e capacidade de abstração dos estudantes.

De acordo com a nova Base Nacional Comum Curricular, podemos citar a *Competência Específica* 3 da área da Matemática e suas Tecnologias, para resumir o que se espera com essa atividade.

"Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos (...) para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente."

5.1 Habilidades Específicas

Ainda sobre a nova Base Nacional Comum Curricular, é esperado que os estudantes desenvolvam certas habilidades específicas no aprendizado da Matemática. Para essa atividade, se encaixam:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

- (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão.

- (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

- (EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.

- (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Observação 5.1. A Atividade deverá ser realizada em três tempos de aula.

5.2 Material Utilizado

Segue a lista do material a ser utilizado na atividade:

- Oito tetraedros regulares com os vértices identificados com os números $1, 2, 3$ e 4.

- Doze cartas contendo as permutações do grupo A_4 como a do exemplo abaixo.

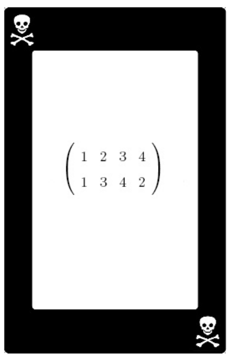


Figura 5.1: Exemplo de Carta da Atividade

- Lápis, borracha, caneta e papel.

- Telefone celular.

- Projetor.

5.3 Descrição da Atividade 1

A turma será separada em grupos de quatro ou cinco integrantes. Cada grupo receberá um tetraedro para trabalhar.

Antes de começar a atividade é necessário que o professor explique a notação da ação do grupo que está contida nas cartas e defina uma posição inicial para os vértices do sólido para orientar as simetrias. Por exemplo:

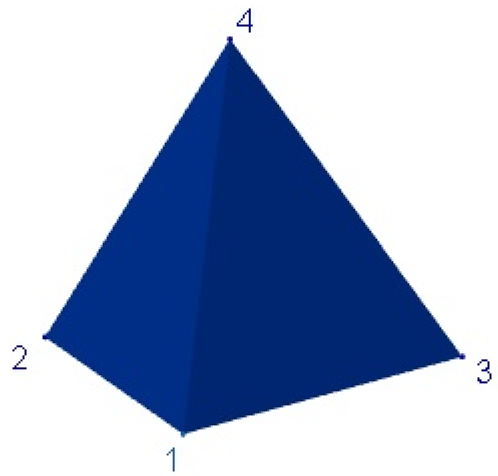


Figura 5.2: Posição Inicial do Tetraedro

Na Figura 5.2 Os vértices $1, 2$ e 3 encontram-se na base, sendo o vértice 1 voltado para o estudante, o vértice 2 à sua esquerda e o vértice 3 à sua direita. O vértice 4 se encontra no topo.

Observação 5.2. Essa figura pode ser projetada no quadro para facilitar a identificação da posição inicial do poliedro.

Agora o professor sorteia duas cartas e explica, como exemplo, as ações das mesmas sobre o tetraedro. Suponha que uma das cartas sorteadas contenham a ação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A carta é interpretada de modo que a primeira linha contém a posição inicial do tetraedro e a linha debaixo representa a nova posição de seus vértices. No exemplo acima, o vértice 1 continua na mesma posição, o vértice 2 vai para a posição onde inicialmente se encontrava o vértice 3, o vértice 3 vai para a posição onde inicialmente se encontrava o vértice 4 e, finalmente, o vértice 4 vai para a posição onde inicialmente se encontrava o vértice 2. A nova posição do sólido é representada pela Figura 5.3

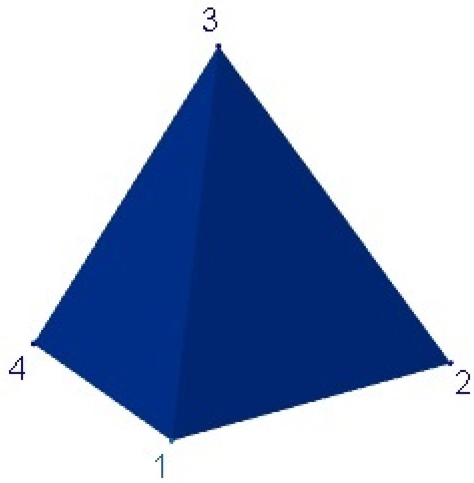


Figura 5.3: Ação de (234) no Tetraedro

Em seguida o professor ilustra o exemplo da segunda carta sorteada. Após os exemplos, as cartas serão embaralhadas e distribuídas entre os grupos.

Agora, cada grupo com suas cartas e seu tetraedro, após discutir sobre a posição do sólido determinada pela carta, deverá capturar uma fotografia do poliedro ao lado da mesma. Quando todos os grupos tiverem terminado o procedimento para todas as cartas que receberam, o professor verificará se os estudantes o fizeram de maneira correta.

5.4 Descrição da Atividade 2

Com os grupos mantidos, os estudantes irão realizar uma segunda atividade. Vamos pensar nos tetraedros como dados de quatro faces. Os dados serão lançados e, se necessário, sua posição ajustada, de modo que na face voltada para a mesa, um dos vértices fique na direção de quem lançou o dado. Agora, os alunos irão representar as ações que antes estavam nas cartas.

Por exemplo, se após o lançamento do dado, o vértice 1 se encontrar onde na posição inicial já determinada se encontrava o vértice 2, o vértice 2 se encontrar onde estava o vértice 3, o vértice 3 onde estava o vértice 1 e o vértice 4 permanecer na mesma posição que estava inicialmente, então a ação é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Após identificarem a ação, esta deverá ser anotada em um papel que será colocado ao lado do tetraedro, para que uma fotografia seja capturada. Esse procedimento deverá ser realizada o número mínimo de vezes para que **três** ações **diferentes** sejam obtidas.

O professor novamente verifica se os estudantes encontraram as ações corretas de acordo com a posição do tetraedro. Em seguida, pede para que cada grupo tente encontrar todas as simetrias possíveis, manipulando o tetraedro e anote cada uma delas.

5.5 Descrição da Atividade 3

Na Atividade 3 os estudantes responderão ao seguinte questionário:

1. As cartas que geravam as ações no tetraedro apresentam permutações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

   a) Quantas permutações são possíveis em um conjunto com quatro elementos?

   b) Liste todas essas permutações.

   c) O que a ação

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   faz com o tetraedro?

2. Compare as ações obtidas na Atividade 2 com a lista obtida na Atividade $1b$.

   a) Todos os itens da lista obtida na Atividade $1b$ são ações no tetraedro?

b) Qual é a relação entre a quantidade de ações obtida na Atividade 2 com a quantidade de permutações de um conjunto de 4 elementos?

c) Discuta com seus colegas de grupo porque algumas permutações listadas na Atividade 1b não podem ser ações sobre um tetraedro.

Observação 5.3. Uma introdução aos duais pode ser feita estendendo a atividade da seguinte maneira. Se numerarmos as faces do tetraedro, no lugar dos vértices, as ações sobre o sólido irão sofrer algum tipo de alteração?
Sabemos que não, pois ao numerarmos as faces, estaríamos numerando os vértices do sólido dual do tetraedro, que é ele próprio.

Conclusão

Em diversos momentos, nós professores, subestimamos a capacidade dos nossos estudantes de compreenderem certos assuntos na matemática. Por isso, acabamos por privar esses jovens de terem contato com alguns conteúdos bastante interessantes. Mesmo que, em alguns casos, seja necessário omitir parte da teoria ou alguns resultados, questões que surgem de campos complexos da ciência podem ser abordados nas salas de aulas das escolas. Esse tipo de atividade pode servir como estímulo e instigar uma vocação para alguma área da ciência.

Esse trabalho expõe a Teoria da Representação de Grupos Finitos, área da Álgebra Contemporânea Abstrata que contém uma matemática bastante densa por trás dela. No entanto, não precisamos definir grupos, representações ou caracteres para poder realizar uma atividade com os estudantes de forma quase intuitiva. Os pré requisitos são apenas algumas noções de contagem e algum conhecimento sobre os poliedros, como as definições de vértices, faces e arestas. Esse conteúdo também é estudado física e na química quando se trata da simetria de moléculas. Um trabalho interdisciplinar também poderia ser pensado. Isso poderia ajudar o estudante a entender melhor algumas propriedades das moléculas e, por exemplo, identificar com maior facilidade a cadeia principal dessas estruturas.

Certamente não são todas as atividades que vão funcionar logo na primeira tentativa. No entanto, é papel do professor se aperfeiçoar e ser resiliente no sentido de proporcionar uma aprendizagem significativa para o estudante. A experiência em sala de aula nos ensina que as atividades que elaboramos precisam ser sempre revistas e adaptadas dependendo do público com que estamos trabalhando.

Referências Bibliográficas

[1] FIGURAS dos Sólidos Duais. 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/exVwHtmk>. Acesso em: 28 jan, 2020.

[2] STEINBERG, B. *Representation theory of finite groups: an introductory approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

[3] SIMETRIAS de rotação nos Sólidos Platônicos. Atividade no *Geogebra* elaborada pelo professor Humberto Bortolossi. 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fgnCEgeG>. Acesso em: 28 jan, 2020.

[4] SERRE, J.-P. *Linear representations of finite groups*. [S.l.]: Springer, 1977. v. 42.

[5] PENNA, F. X. Introdução às representações de grupos finitos iiio colóquio de matemática da região sul.

[6] GALLIAN, J. *Contemporary abstract algebra*. [S.l.]: Nelson Education, 2012.

[7] BICUDO, I. et al. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009.

[8] BASE Nacional Comum Curricular Ensino Médio. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110
Acesso em: 28 jan, 2020.