



Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
Campus Reitor Edgar Santos
Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias
Mestrado Profissional em Matemática



ULISSES SURIANO DA SILVA NETO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FENÔMENOS PERIÓDICOS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

BARREIRAS

2020

ULISSES SURIANO DA SILVA NETO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FENÔMENOS PERIÓDICOS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof^a Dra. Samara Costa Lima

BARREIRAS
2020

FICHA CATALOGRÁFICA

S586

Silva Neto, Ulisses Suriano da

Funções trigonométricas e fenômenos periódicos: uma proposta metodológica. / Ulisses Suriano da Silva Neto. – 2020.

66f.: il

Orientadora: Profa. Dra. Samara Costa Lima

Dissertação (Mestrado) – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, BA, 2020.

1. Matemática – Estudo e Ensino I. Lima, Samara Costa II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias III. Título.

CDD 510.7

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Ulisses Suriano da Silva Neto

Funções trigonométricas e fenômenos periódicos:
Uma proposta metodológica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, vinculado à Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB, Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado, 03 de julho de 2020:

Samara Costa Lima

Prof. Dra. SAMARA COSTA LIMA
UFOB – Núcleo de Matemática Estatística e Probabilidade –
Orientadora e presidente

Valdir Ferreira de Paula Junior

Prof. Dr. VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR
Universidade Federal do Cariri

Gilson do Nascimento Silva

Prof. Dr. GILSON DO NASCIMENTO SILVA
UFOB – Núcleo de Matemática Estatística e Probabilidade

Dedico este trabalho ao meu irmão querido Luiz Carlos dos Santos Ribeiro (in memoriam), que sempre nos apoiou e foi um modelo de conduta para toda a família.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por delinear grandes bênçãos em minha vida, entre elas o ingresso no PROFMAT.

À minha família, que sempre se manteve ao meu lado e me incentivou nos meus projetos.

Aos meus amigos, Rodrigo dos Santos Ferreira e Marcos Antônio Santos Vieira, amigos de longa data. Reforço meus agradecimentos ao Rodrigo, por participar da construção desse trabalho, dando excelentes contribuições.

À minha namorada Regilan Francisca de Souza, por me ouvir e sempre me aconselhar nos momentos mais difíceis, agradeço a sua paciência comigo.

Aos Professores do PROFMAT-UFOB, em especial à minha orientadora Profa. Dra. Samara Costa Lima por indicar a direção correta que o trabalho deveria tomar, ao Prof. Dr. Gilson do Nascimento Silva, que sempre foi solidário e paciente com os estudantes do programa.

Aos meus colegas de turma, por mostrarem-se dispostos a ajudar. Sou grato por fazer parte da primeira turma do PROFMAT-UFOB e conhecer excelentes profissionais.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade Federal do Oeste da Bahia, que tornou o acesso à pós-graduação mais democrático e contribuiu para a capacitação dos professores.

Resumo

Este trabalho constitui-se como uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas a partir de alguns fenômenos periódicos, tais como ondas sonoras, marés e o movimento de translação dos planetas. Pretendemos fornecer ao professor alternativas didáticas, que proporcionem aos estudantes a compreensão do comportamento das funções trigonométricas a partir de situações práticas. Para a realização das atividades, apresentamos *softwares* interativos que permitem a manipulação e interpretação tanto algébrica quanto geométrica dessas funções. As atividades foram elaboradas de acordo com o que é proposto pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como condição de aprendizagem em Matemática. Esta proposta destina-se aos professores e estudantes do ensino médio, especificamente a 2ª série, e almeja um processo de ensino-aprendizagem mais significativo e contextualizado, como estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: Funções trigonométricas. Fenômenos periódicos. Representações semióticas. Sequência didática.

Abstract

This work is like a proposal methodological for the teaching of the trigonometric functions from some periodic phenomena, such as sound waves, tides and the movement of transfer of the planets. We intend to supply with a teacher educational alternatives, which provide to the students the understanding of the behavior of the trigonometric functions from practical situations. For the realization of the activities, we present softwares interactive what allow the handling and interpretation so much algebraic how much geometrical of these functions. The activities were prepared in accordance with what is proposed by the Theory of the Registers of Representation Semiotics, like condition of apprenticeship in Mathematics. This proposal is destined to the teachers and students of the secondary education, specifically of the 2nd series, and longs for a process of teaching-learning more significant and contextualized, as it establishes the Common National Base (BNCC).

Keywords: Trigonometric functions. Periodic phenomena. Representations semiotics. Educational sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Arco de um ângulo	18
Figura 2 – Razões trigonométricas	20
Figura 3 – Ciclo Trigonométrico	22
Figura 4 – $m\widehat{AP} = t$	23
Figura 5 – $m\widehat{AP} = t$	24
Figura 6 – $m\widehat{AP} = t$	25
Figura 7 – $\hat{A} < 90^\circ$	26
Figura 8 – $\hat{A} > 90^\circ$	27
Figura 9 – Triângulo inscrito na circunferência	28
Figura 10 – Cosseno da diferença	29
Figura 11 – Gráficos das funções	30
Figura 12 – Parâmetro a	31
Figura 13 – Parâmetro b	32
Figura 14 – Parâmetro c	32
Figura 15 – Parâmetro d	33
Figura 16 – Gráfico da função $g(x) = \text{tg}(x)$	34
Figura 17 – Sistema massa-mola	35
Figura 18 – Onda em uma corda.	38
Figura 19 – Onda Complexa	39
Figura 20 – Movimento circular uniforme	40
Figura 21 – Roda-gigante Rio star	41
Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = 44 + 44 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{18} + \frac{27\pi}{18} \right)$	42
Figura 23 – Janela de visualização	44
Figura 24 – Triângulo	45
Figura 25 – Tabela de marés	46
Figura 26 – Gráfico de marés	47
Figura 27 – Gráfico de $f(x)$	49
Figura 28 – Fourier: Criando ondas	50
Figura 29 – Ondas harmônicas	51
Figura 30 – Sound Analysis Oscillocope	52
Figura 31 – Simulador Astronoo	53
Figura 32 – Representação do movimento terrestre	54
Figura 33 – Planilha	55
Figura 34 – Janela: análise de dados	56
Figura 35 – Gráfico da função.	56

Sumário

	Introdução	8
1	REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	11
2	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E UTILIZAÇÃO DAS TICS	16
3	TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	18
3.1	Panorama histórico	18
3.2	Razões trigonométricas no triângulo retângulo	19
3.3	Ciclo trigonométrico	21
3.4	Leis do seno e do cosseno	25
3.4.1	Lei do cosseno	25
3.4.2	Lei do seno	27
3.5	Funções trigonométricas	30
4	FENÔMENOS PERIÓDICOS	35
4.1	Movimento Harmônico Simples (MHS)	35
4.2	Movimento ondulatório	37
4.3	Movimento Circular Uniforme	40
5	PROPOSTAS DE ATIVIDADES INTERDISCIPLINARES	43
5.1	Atividade 1: Relação entre objeto e sombra	43
5.2	Atividade 2: Estudo das marés	45
5.3	Atividade 3: Ondas Sonoras e Séries de Fourier	49
5.4	Atividade 4: Movimento de translação	52
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
	REFERÊNCIAS	59

Introdução

O conceito de função vem sendo objeto de estudo e discussão dos educadores matemáticos desde 1970, no entanto constata-se que existem poucas produções voltadas para o processo de ensino desse conceito, sendo que o modo como os professores encaminham o ensino passou a interessar os pesquisadores só a partir de 1980 (MAGGIO; NEHRING, 2014).

A motivação para a realização desta pesquisa surgiu a partir das observações realizadas durante a prática docente, onde identificamos que muitos estudantes apresentam dificuldades ao estudarem as funções trigonométricas, dado que sua abordagem majoritariamente se limita ao tratamento algébrico e descontextualizado, porém Ponte (1990) sugere que seu estudo deve ter como ponto de partida as representações numérica e gráfica, através de contextualizações, valendo-se da intuição e da visualização. Para Schoen (1995) a apresentação abrupta do simbolismo algébrico significa ignorar o processo de desenvolvimento gradual da matemática ao longo da história.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) proposta por Duval chegou ao Brasil por volta da década de 90 e, basicamente, se refere às formas de representar um objeto matemático (MORETTI, 2008). De acordo com Maggio e Nehring (2014) as pesquisas produzidas entre 1990 e 2010 voltadas para o estudo das representações das funções, têm como centralidade: Livros didáticos, currículo e a prática do ensino do professor.

Acreditamos que a compreensão de um objeto matemático perpassa a manipulação de suas diferentes representações, tal como propõe Raymond Duval. Nessa perspectiva, elaboramos uma proposta didática com o objetivo de fornecer ao professor material que possibilite o ensino das funções trigonométricas de forma contextualizada, privilegiando suas diferentes representações, sejam elas algébrica, geométrica ou tabular.

Este trabalho também é fundamentado e guiado pelo que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Com o propósito de garantir o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver no transcorrer do ensino básico, cujas mudanças e implementações entram em vigor no início do ano letivo de 2020, a BNCC aplica-se exclusivamente à educação escolar de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) e tem como principal meta a formação humana e integral, além da construção de uma sociedade justa democrática e inclusiva (BNCC, 2017). Este documento institui que tais aprendizagens essenciais devem ocorrer de modo que os estudantes desenvolvam competência gerais ao mobilizarem conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para interpretar e resolver problemas cotidianos.

Com intuito de analisar os trabalhos de conclusão de curso do PROFMAT que têm como principal objeto de estudo as funções trigonométricas, fizemos um levantamento bibliográfico no banco de dissertações do programa¹ e, com a tag "trigonométrica", encontramos um total

¹ <https://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/>

de 33 obras distribuídas entre os anos de 2013 e 2019 (sem nenhum registro em 2020). Os trabalhos foram classificados sob três categorias: abordagem técnico e conceitual, abordagem metodológica e principais conclusões. No geral, notamos que as justificativas das pesquisas convergem para a dificuldade e falta de pré-requisitos que os alunos apresentam na hora de entender e correlacionar o comportamento destas funções do ponto de vista puro e aplicado, além da existência de um aspecto ideológico e documental quanto ao seu ensino no momento em que não chega a ser trabalhado de forma abrangente em sala de aula, como apontado por Silva (2015) e Junior (2019). Além disso, houve uma convergência para a relevância didática das aplicações deste assunto, tal como será discutido a seguir.

Por abordagem técnica e conceitual consideramos as aplicações e conceitos associados às funções trigonométricas, bem como as ferramentas e métodos empregados nas execuções e análises. O comportamento deste tipo de função está diretamente relacionado à grande gama de fenômenos periódicos parametrizados e modelados nas dissertações, dentre os quais destacamos as ondas sonoras (PRADO, 2013; DEPIZOLI, 2015; RODRIGUES, 2017; MARVILA, 2019; FILHO, 2017), as marés (JUNIOR, 2017; SANTOS, 2018; TORMA, 2018), a pressão arterial (JUNIOR, 2017; TORMA, 2018; COSTA, 2019), a temperatura (SANTOS, 2018), as fases da lua e movimento dos planetas (COSTA, 2019). As séries de Fourier e a modelagem foram recursos recorrentes empregados tanto para deduções algébricas como também para a análise e resolução de problemas.

Considerando as funções como principal objeto de estudo, todos os trabalhos recorreram em algum momento a representação e/ou estudo gráfico, sejam em produções essencialmente teóricas ou intervenções pedagógicas. Destacamos, assim, o *software* GeoGebra como o mais empregado e recomendado pelos pesquisadores, estando presente como núcleo de pesquisa em 14 trabalhos (CAJUELA, 2013; MAGALHÃES, 2013; MAIA, 2013; SILVA, 2013; BRUGINSKI, 2014; SOUZA, 2014; DEPIZOLI, 2015; SOUZA, 2015; FERREIRA, 2016; FILHO, 2017; JUNIO, 2018; SANTOS, 2018; COSTA, 2019; MARVILA, 2019), além de ser uma ferramenta de suporte em outros trabalhos. Além deste, também foram empregados os *softwares* Scilab e Winplot (BOMFIM, 2013), Maxima (MAGALHÃES, 2013), Graphmatica (FERREIRA, 2017; TORMA, 2018), Oscilloscope (MARVILA, 2019), Photomath (NEIVA, 2019) e o aplicativo Série de Fourier: Fazendo Ondas (DEPIZOLI, 2015), estando este último, assim como o GeoGebra, no cerne de nossa pesquisa.

Quanto à abordagem metodológica das pesquisas, verificamos que 48,48 % foram intervenções didáticas realizadas no Ensino Médio, o que se justifica pelo fato de a BNCC considerar que identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), através de suas múltiplas representações (BRASIL, 2018) faz parte das habilidades matemáticas que devem ser desenvolvidas no Ensino Médio.

Em relação às principais considerações destas pesquisas, destacamos a preocupação em elencar a hegemonia do uso de *softwares* matemáticos sob a intenção de dar a aula um caráter mais experimental e manipulativo, além de otimizar alguns processos de aprendizagem

através da correlação entre diferentes representações de um mesmo objeto. Neste sentido, alguns autores, tais como Silva (2013), alertaram para a importância do balanceamento entre os processos algébricos/manuais e aqueles com auxílio das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), bem como para a necessidade de domínio e interesse da aplicação destas ferramentas por parte da escola e dos professores (SILA, 2015; FERREIRA, 2016). A modelagem matemática mostrou-se recorrente nos trabalhos que abordaram os fenômenos periódicos aplicados nas sequências didáticas, evocando, assim, para a exploração do caráter interdisciplinar deste conteúdo em uma perceptiva de motivação e análise da realidade (FILHO, 2017; OLIVEIRA, 2019).

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos, sendo que no Capítulo 1 apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, destacando seus principais termos e contribuições didáticas. No Capítulo 2, discorremos brevemente sobre a relevância da utilização das TICs em sala de aula. No Capítulo 3, é apresentado o panorama histórico do desenvolvimento da trigonometria, além de suas principais definições aliadas à formalização do conceito de função trigonométrica. No Capítulo 4, são discutidos alguns fenômenos periódicos no intuito de evidenciar sua relação com as funções trigonométricas. No Capítulo 5, encontra-se quatro propostas de atividades, que abordam fenômenos distintos. Por fim, no último capítulo tecemos alguns comentários acerca da relevância de um ensino contextualizado aliado a um aporte tecnológico.

1 Registros de Representação Semiótica

Os Registros de Representação Semiótica (RRS) são produções constituídas de símbolos pertencentes a um sistema semiótico próprio, além disso, desempenham funções fundamentais no funcionamento cognitivo (DUVAL, 2011). Existem três funções centrais dos RRS: comunicação, tratamento, objetivação. A primeira refere-se a transmissão de uma informação entre indivíduos através de um código que seja comum aos participantes da comunicação. O tratamento é a transformação de uma representação em outra, utilizando unicamente os elementos do sistema de representação mobilizado. A objetivação permite que o indivíduo tome consciência daquilo que até então era inconsciente, geralmente está associada à exteriorização (DUVAL, 2005).

De acordo com a teoria, compreender um conceito matemático significa ser capaz de transitar entre diferentes registros e diferenciar o objeto matemático da representação utilizada. Destaca-se ainda que "[...] os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos" (DUVAL, 2005, p.14).

Desta forma, os objetos matemáticos não são passíveis de observações diretas e carecem da utilização de uma representação, que pode ser tanto interna quanto externa (DUVAL, 2005). Desse modo, compreender um objeto matemático, implica em saber reconhecer suas características e representações, além de relacioná-lo com outros objetos. Existe ainda uma distinção entre as representações mentais (internas) e semióticas, sendo que a primeira está relacionada à subjetividade do sujeito, pois refere-se às concepções e imagens que o mesmo apresenta sobre um objeto ou uma situação e são decorrentes da interiorização das reproduções externas cumprindo o papel de objetivação.

Com relação ao objeto matemático, as representações internas ou computacionais caracterizam-se por privilegiar o tratamento de uma informação, por meio da execução automática de um determinado processo, a fim de se adquirir uma resposta adequada ao problema (DUVAL, 2009). Um exemplo deste tipo de representação, são os algoritmos operacionais, que tem por objetivo a codificação de uma informação. Geralmente o indivíduo executa os registros de forma mecânica e inconsciente, sem refletir sobre os passos necessários para a sua resolução.

As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos (símbolos), oriundos de um sistema de representação carregado de significado e funcionamento próprio. Cita-se como exemplos as representações gráfica, a escrita algébrica e a língua natural. Segundo Almoloud (2007), diferentemente das representações internas, as semióticas são conscientes ao sujeito e intencionais, de forma indissociável às funções de objetivação e tratamento.

Devido às funções desempenhadas pelas representações semióticas, dar-se-á maior ênfase à esta forma de representação em nossa pesquisa. Entre suas funções está a comunicação, ou seja, por meio dela é possível exteriorizar as representações mentais e, conseqüentemente, torná-las acessíveis à outras pessoas. Conhecer como o estudante lida com uma representação semiótica ajuda a identificar de que maneira ele representou uma informação internamente, ao

passo que conhecer e interpretar as produções do aluno facilita a realização de intervenções adequadas ao processo de construção do conhecimento matemático.

As representações semióticas são fundamentais para a apreensão dos conceitos matemáticos, uma vez que, a utilização de diferentes formas de representação viabiliza a reorganização do pensamento, ao mesmo tempo que contribui para as atividades cognitivas de quem as utiliza, cumprindo portanto, um papel que vai além do suporte para as representações mentais. Duval (2009) faz a distinção entre os termos semiósis (representações) e noésis (compreensão de um objeto matemático), destacando a impossibilidade da dissociação entre ambos. O primeiro termo refere-se à apreensão ou produção de uma representação semiótica, já o segundo remete aos atos cognitivos, como a compreensão de um conceito ou discriminação de um objeto.

A aprendizagem em matemática acontece na medida em que o estudante consegue coordenar diferentes registros associados a um mesmo objeto, desse modo a noésis se dá por meio de sucessivas semiósis (DUVAL, 2009). No entanto, durante as representações, os alunos, ou até mesmo os professores, confundem o que é o objeto matemático representado e a representação que está sendo feita. Possivelmente esta interpretação acontece devido a maneira como é abordado o conteúdo na sala de aula, de forma fragmentada e em momentos distintos, sem estabelecer uma relação entre as representações, o que acaba fragilizando a importância das mesmas para a compreensão do objeto matemático.

No que se refere às funções trigonométricas, por exemplo, primeiro é feita a abordagem da definição por meio da representação algébrica para posteriormente, esboçar o gráfico. Sendo assim, não é feita a devida associação entre ambas representações. Neste caso, uma das justificativas da necessidade da mobilização de ao menos duas representações de um mesmo objeto, está na identificação das características que cada representação apresenta e na correspondência entre as mesmas (DUVAL, 2009).

A necessidade do emprego dos registros de representação semiótica se relaciona diretamente com o próprio desenvolvimento da Matemática. Diferentemente das outras áreas do conhecimento, como biologia e física, em que é possível ter acesso ao objeto de estudo por meio da observação direta e utilização de instrumentos apropriados, os objetos matemáticos não são acessíveis diretamente (Duval, 2005). Dessa forma, a Matemática desenvolveu-se na medida em que foram sendo criados símbolos para representar seus objetos e conceitos, como o sistema de numeração e as operações. Assim, só é possível manipular um objeto matemático através de suas representações.

Além dos fatores já citados, Raymond Duval apresenta três justificativas para existência de vários registros de representação, bem como sua influência no desenvolvimento do pensamento humano, sendo estes: a economia de tratamento, complementariedade dos registros e a coordenação dos registros.

A economia de tratamento remete à existência de vários registros de representação que viabiliza a praticidade da escolha de um tipo, além de suas mudanças. Cita-se como exemplo

um problema que envolva uma expressão numérica. Durante a resolução pode-se optar por uma representação mais econômica ou não, no caso um registro decimal ou fracionário.

A complementariedade se baseia nas possibilidades que um tipo de registro pode oferecer. Em síntese, cada um apresenta características específicas de um objeto, sem representá-lo em sua totalidade. De acordo com Moretti (2002), uma representação é parcial em relação ao objeto que representa de modo que registros distintos não transmitem o mesmo conteúdo, apesar de se referirem a mesma situação. Segundo Duval (1993):

As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a consequência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado. (p. 18).

Portanto pode-se dizer que é um equívoco acreditar que há uma representação completa para um objeto, uma vez que cada sistema possui características e limitações próprias. A representação algébrica de uma função trigonométrica, por exemplo, não evidencia diretamente algumas informações, como extremos e período, que podem ser visualizadas no gráfico. Deste modo, a existência de vários registros de representação semiótica servem para corrigir as insuficiências que um sistema possa apresentar.

Como última justificativa, Duval (1993) destaca que a conceitualização de um objeto matemático acarreta na coordenação de registros semióticos distintos. Para o autor, a coordenação entre diferentes representações se dá através de duas operações: a conversão e o tratamento.

O tratamento é definido como a transformação de representações na qual, há permanência de registro, ou seja, a operação ocorre dentro de um mesmo registro. Segundo Aumoloud (2007) os tratamentos podem ter o caráter de algoritmo, com um conjunto de regras específicas. Por exemplo, os algoritmos empregados nas operações aritméticas ou os procedimentos utilizados para extrair as raízes de uma equação. Além dos tratamentos já citados, existem os que não são algoritmos, nesse caso cita-se os gráficos e figuras geométricas, que frequentemente não são considerados objetos de aprendizagem, sendo que os tratamentos que recorrem aos algoritmos são mais valorizados no ensino. Segundo Duval (2009, p.56):

Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecessem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema.

Duval (2009) chama a atenção para a existência de dois tipos de tratamentos que são complementares e indispensáveis para o desenvolvimento cognitivo: os tratamentos quase instantâneos e os tratamentos intencionais. Os primeiros ocorrem externamente à atenção, e geralmente produzem informações de forma imediata. Neste tipo de tratamento a quantidade de elementos envolvidos não influencia no tempo de reação, além disso, é possível realizar mais

de uma operação simultaneamente e corresponde à experiência oriunda de uma longa prática, ou a competência adquirida em algum campo do conhecimento.

Os tratamentos intencionais caracterizam-se por serem conscientes e só ocorrem de forma gradativa, ou seja, um depois do outro. Diferentemente da primeira forma de tratamento, o tempo de reação deste aumenta em função do número de elementos utilizados. Para Duval (2009, p.52), "toda a atividade cognitiva humana repousa sobre a complementariedade desses dois tipos de tratamentos". De acordo com o autor, o aumento dos tratamentos quase instantâneos assume um papel fundamental na construção hierárquica do conhecimento, no entanto, essa aquisição só ocorre através dos tratamentos intencionais. Tais considerações, podem ser exemplificadas, por meio das aquisições numéricas e das operações aritméticas que as crianças aprendem progressivamente, através de uma atividade intencional no processo de contagem ou na utilização de um algoritmo, até atingirem uma fase em que os tratamentos são quase instantâneos. Apesar da importância do tratamento, é necessário evitar seu uso excessivo, uma vez que o estudante pode ser levado a confundir o objeto matemático estudado com a representação empregada, devido a permanência em um único registro, sendo que tais confusões podem ser minimizadas através do emprego da conversão.

Segundo Duval (2009), converter é o ato de transformar a representação de um objeto ou de uma situação em outra representação, mudando-se o registro. Desse modo a conversão seria uma transformação externa ao registro de partida. O autor destaca que o ensino privilegia as regras de tratamento, assim como as de formação das representações. Frequentemente, a conversão é efetuada com a finalidade de economia de tratamento e simplicidade, ou seja, após a operação mantém-se no registro mais cômodo. Do ponto de vista cognitivo, a conversão assume papel fundamental na condução de mecanismos relacionados à compreensão de um objeto matemático, no entanto este tipo de transformação apresenta-se como a atividade cognitiva mais difícil, e menos espontânea para a maioria dos estudantes. Neste sentido,

Não somente a mudança de registros levanta obstáculos que são independentes da complexidade do campo conceitual no qual se trabalha, mas além disso, a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais (DUVAL, 2009, p.63)

Essas dificuldades podem ser explicadas pelo nível de congruência ou não congruência que uma conversão pode apresentar. A congruência ocorre quando há semelhança entre a representação de chegada (terminal) e a de saída, de modo que exista transparência da representação final na representação de saída e define-se a não congruência quando não há nenhuma semelhança entre a representação de saída e de chegada, apesar de se referir ao mesmo objeto (DUVAL, 2003). Os bloqueios dos alunos aumentam consideravelmente a medida que é exigido a mudança de registro ou a mobilização simultânea de mais de um registro, sendo que essas dificuldades são agravadas quando as conversões não são congruentes.

A análise da congruência entre representações, ocorre a partir de três critérios definidos por Duval (2009): A possibilidade de uma congruência semântica dos elementos significantes, a

univocidade semântica terminal e organização das unidades significantes. No primeiro critério, cada unidade significativa de uma das representações se associa à uma unidade significativa elementar, sendo que a unidade significativa se refere ao conjunto de símbolos que compõe um registro. Na univocidade semântica terminal, existe uma relação de "injetividade" que remete ao conceito de função, ou seja, cada unidade significativa da representação de partida corresponde a uma única no registro em que se encontra a representação de chegada. No terceiro critério a organização das unidades significantes das representações de chegada e de partida, conduz a apreensão das unidades que as formam. Os três critérios apresentados, possibilitam identificar a congruência entre duas representações distintas para um mesmo objeto.

Além disso, Duval (2009) refere que os fenômenos (sucessos e fracassos) identificados durante o processo de avaliação apresentam uma relação direta com os casos de congruência ou não congruência, oriundos da mudança de sistema semiótico. Portanto, questões em que as conversões são congruentes destacam-se por apresentar uma taxa mais elevada de acertos, enquanto que, questões que envolvem situações de não congruência são caracterizadas por apresentarem taxas mais baixas de acertos. É importante chamar a atenção para o fato de que os usos das conversões congruentes proporcionam uma aprendizagem parcial dos conteúdos, apesar dos resultados positivos que podem ser obtidos. Desse modo, a utilização de situações que abordem a não congruência, seria um meio de potencializar a compreensão de um conteúdo. Além disso, é necessário que seja abordado casos que exijam a conversão em ambos os sentidos (ida e volta), devido ao caráter heterogêneo que algumas transformações possuem. Algumas conversões podem ser congruentes em sentido e não congruente no processo inverso. Por exemplo, a passagem de um problema que envolve o conceito de função em língua natural para a representação algébrica, pode ser congruente, mais espontâneo, enquanto que no processo contrário a conversão não seja congruente.

As atividades presentes no Capítulo 5 foram elaboradas de modo que exigem dos participantes tanto o tratamento quanto a conversão em diferentes registros, dos quais priorizamos o tabular, o algébrico e o geométrico. O primeiro, auxilia na construção do gráfico de uma função a partir de alguns pontos previamente determinados. A representação algébrica prioriza a operação de tratamento e apresenta parâmetros (unidades significantes) que caracterizam a função. Por fim, o registro geométrico possibilita a "visualização" das características globais, como amplitude, período e intervalos de crescimento ou decrescimento.

2 Educação Matemática e utilização das TICs

A educação matemática é uma grande área de estudo cuja consolidação como campo acadêmico e profissional se entrelaça com o próprio desenvolvimento dos cursos de licenciatura em matemática no país e se caracteriza por sempre discutir e se atualizar quanto à forma como os estudantes aprendem e todos os fatores que incidem sobre este processo. Um fator que, indiscutivelmente, incide sobre a forma com nossos alunos aprendem, bem como se comunicam e pensam em sociedade é a tecnologia que, em uma perspectiva educacional, pode ser definida como um conjunto de conhecimentos e princípios científicos voltados para o planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade (KENSKI, 2011), e, em uma perspectiva global, se tornou um fator social cujo desenvolvimento se intercala e direciona a forma como vivemos em sociedade.

O uso das tecnologias da informação e comunicação (TICs) em sala de aula é uma tendência atual em educação matemática que evoluiu de um recurso metodológico para uma prática que, se ainda não podemos classificar como indispensável, podemos encara-la como essencial no momento em que buscamos entender nossos alunos e potencializar nosso exercício profissional.

A introdução das tecnologias da informação e da comunicação no processo educacional tem a finalidade de intensificar a melhoria dos recursos midiáticos utilizados em sala de aula pelos professores que atuam em uma instituição de ensino, seja ela particular ou pública. A tecnologia vem modificando os conceitos de toda a sociedade ao longo de sua evolução pela história. No campo educacional, o resultado não seria diferente, ela torna-se mais uma ferramenta no processo de ensino-aprendizagem. (GERALDI e BIZELLI, 2015).

No entanto, é importante salientar que tal introdução das TICs em sala de aula requer atenção e planejamento. É necessário que haja uma intenção didática por trás do uso de um *software*, da internet ou de um aparelho qualquer, que o professor tenha domínio sobre o recurso com o qual irá trabalhar, que haja respaldo nas necessidades dos estudantes e que seu uso não seja esporádico e avulso (KENSKY, 2011). Em suma,

Para incorporar a TIC na escola, é preciso ousar, vencer desafios, articular saberes, tecer continuamente a rede, criando e desatando novos nós conceituais que se inter-relacionam com a integração de diferentes tecnologias, com a linguagem hipermídia, as teorias educacionais, a aprendizagem do aluno, a prática do educador e a construção da mudança em sua prática, na escola e na sociedade. Essa mudança torna-se possível ao propiciar ao educador o domínio da TIC e o uso desta para inserir-se no contexto e no mundo, representar, interagir, refletir e compreender e atuar na melhoria de processos e produções, transformando-se e transformando-os (ALMEIDA, 2008).

Falando especificamente do uso de *softwares* e aplicativos (dado que fazem parte do cerne desta pesquisa), a forma como hoje são capazes de processar informações, otimizar processos e auxiliar em procedimentos de análises e decisões os coloca como ferramentas pedagógicas

ricas que, se usadas de maneira correta, podem preencher lacunas epistemológicas e quebrar barreiras de aprendizagem. Preocupada justamente com esta questão, Tjara (2012) classifica tais *softwares* da seguinte forma:

- A) Programa desenvolvido especificamente para finalidades educativas. São exemplos desses softwares: Ortografando, Math Blaster, ECO XXI, os quais atendem a uma necessidade específica disciplinar.
- B) Qualquer programa que seja utilizado para atingir resultados educativos. Esses softwares não foram desenvolvidos com finalidades educativas, mas podem ser utilizados para esse fim. Exemplo: editores de texto, planilha eletrônica etc (TAJRA, 2012, p. 56).

As propostas didáticas elaboradas neste trabalho envolvem o uso de uma série de *softwares* e aplicativos. Como exemplo do tipo A podemos citar o Geogebra, programa gratuito de fácil manuseio pertencente aos chamados *softwares* da Geometria Dinâmica caracterizados por permitirem a manipulação de objetos geométricos a partir de suas propriedades (ALVES E SOARES, 2003). Foi criado como objeto de pesquisa por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria em 2001 com o objetivo de obter uma ferramenta útil para todos os níveis de ensino reunindo recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente (SERRANO, 2014).

Ainda na linha de programas com finalidades educativas, utilizamos o simulador "Fourier: Criando Ondas", uma plataforma que permite, dentre uma série finalidades, somar senos e cossenos para produzir funções periódicas, entender que os sons e os componentes de Fourier correspondem a uma onda senoidal e perceber a distinção do seu comportamento no espaço e no tempo (PHET COLORADO, 2011).

Com relação à programas de escopo não necessariamente educativos, mas que são adaptados e utilizados para tal, empregamos o "Sound Analysis Ascilloscope", aplicativo desenvolvido pela "Guitar Tabs" que captura e exhibe frequências de sons, bem como sua forma, comprimento de onda e período.

No Capítulo 5 explicitaremos como cada software foi empregado nesta pesquisa. Em suma, o GeoGebra e o Fourier: Criando Ondas foram ferramentas indicadas para a modelagem e manipulação de curvas trigonométricas e o o Sound Analysis Ascilloscope, foi um suporte para captura e posterior estudo destas curvas. Na perspectiva das representações semióticas, uma das virtudes destes programas é a possibilidade de trabalhar simultaneamente com diferentes registros de um mesmo objeto, sejam eles as representações tabular, gráfica ou algébrica.

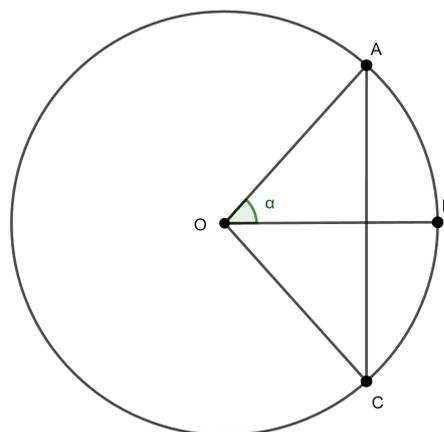
3 Trigonometria e Funções Trigonométricas

Neste capítulo apresentamos um breve panorama histórico, acerca da trigonometria e das funções trigonométricas, além de definir uma série de conceitos e propriedades que servirão de suporte teórico ao leitor para a compreensão das discussões e propostas deste trabalho.

3.1 Panorama histórico

Atribui-se à civilização grega a criação da Trigonometria. Seu surgimento é devido, principalmente, aos problemas relacionados à astronomia, navegação e agrimensura. Pode-se citar os nomes de inúmeros matemáticos gregos que contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, como Aristarco, Euclides, Ptolomeu e Hipsiclo, contudo é creditado a Hiparco (120 a.c) o título de fundador da trigonometria. Hiparco foi o primeiro a determinar com certa precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, através da utilização de uma tabela de cordas. Dentre suas principais contribuições, está a divisão do círculo em 360° , que se deu a partir da tabela de cordas por ele inventada. De acordo com Carvalho (2005), os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim a corda de um arco duplo. Desse modo, se o ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ subtende o arco \widehat{AB} , a corda do arco duplo \widehat{AC} será AC (Figura 1).

Figura 1 – Arco de um ângulo



Fonte: Autor, 2020

Assim como os gregos, os hindus aplicaram a trigonometria principalmente à astronomia. Porém a diferença entre as duas civilizações está no fato de que os astrônomos hindus abandonaram as tabelas de cordas e adotaram as tabelas de senos. Com as conquistas dos árabes, os mesmos acabaram incorporando a trigonometria dos hindus e dos gregos, e introduziram a noção de tangente, cotangente, secante e cossecante. Os árabes foram

responsáveis (indiretamente) pelo uso da palavra seno e já conheciam a lei dos senos para triângulos, sendo demonstrada em um trabalho do matemático Al-Biruni.

A partir do Renascimento, a trigonometria tomou um novo impulso, devido principalmente à expansão marítima que necessitou do desenvolvimento da Cartografia e Topografia, além da revisão dos dados obtidos na astronomia posicional, uma vez que o sistema heliocêntrico de Copérnico passou a ser utilizado gradativamente. É importante destacar que inúmeras identidades trigonométricas foram descobertas nesse período, entre elas:

$$2 \cos(A) \cos(B) = \cos(A + B) + \cos(A - B).$$

Nota-se que através das investigações acerca das identidades trigonométricas, o estudo sobre as relações funcionais tomou ênfase. O estudo das curvas desenvolveu-se significativamente a partir de Galileu (1564-1642), e com a descoberta da Geometria Analítica por Descartes (1596-1650) e por Fermat (1601-1665). Ainda de acordo com o autor, a curva seno foi introduzida por Roberval (1602-1675) em 1670, no livro intitulado Mecânica. Gradativamente as funções trigonométricas passaram a ocupar um espaço na Matemática, de modo que nos séculos XVIII e XIX elas se tornaram essenciais para a solução de vários problemas relacionados à Matemática e à Física, (CARVALHO, 2005).

Na seção a seguir, definiremos as principais razões trigonométricas a partir de construções geométricas, a princípio, no triângulo retângulo. A escolha por essa abordagem se justifica, pela forma como que este conteúdo é proposto no ensino básico, inicialmente limitado aos triângulos e em seguida generalizado.

3.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para os resultados obtidos nesta seção, bem como nas próximas utilizaremos os casos de semelhança apresentados a seguir, cujas demonstrações encontram-se no livro de Geometria da coleção do PROFMAT escrito por Antonio Caminha Muniz Neto-2013.

Proposição 3.1. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$, $C \longleftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$ (Caso LLL).

Proposição 3.2. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \text{ e } \hat{B} = \hat{B}'$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$, $C \longleftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$ (Caso LAL).

Proposição 3.3. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que:*

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}'.$$

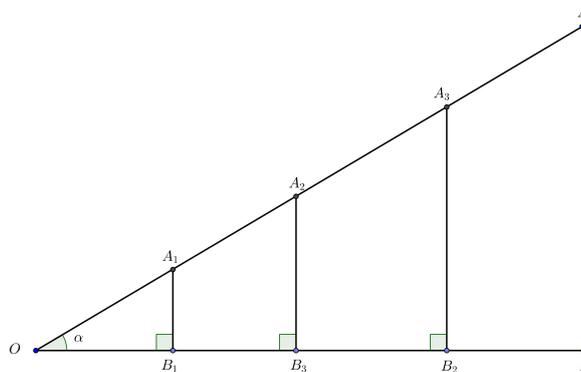
Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$, $C \longleftrightarrow C'$.

Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \text{ (Caso AA)}.$$

Considere um ângulo $\hat{A}OB = \alpha$, tal que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, ao traçar a partir dos pontos A_1, A_2 e A_3 , os segmentos perpendiculares $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_3B_3}$, determinam três triângulos. Note que os triângulos OA_1B_1 , OA_2B_2 e OA_3B_3 , são semelhantes pelo caso AA (ângulo, ângulo) (Figura 2).

Figura 2 – Razões trigonométricas



Fonte: Autor, 2020.

Portanto, podemos escrever as seguintes relações:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = k,$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = w,$$

$$\text{e, } \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = z.$$

Usando as nomenclaturas usuais da trigonometria,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \text{sen } \alpha,$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \text{cos } \alpha,$$

$$e, \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\text{Cateto posto}}{\text{Cateto adjacente}} = \text{tg}\alpha.$$

Observe que as relações apresentadas dependem somente do ângulo α e não dos comprimentos dos segmentos envolvidos. Cada razão mencionada é uma função de α , definidas no intervalo $(0^\circ, 90^\circ)$ e possuem nomenclaturas específicas.

A vantagem do emprego das razões trigonométricas e da semelhança de triângulos, reside na possibilidade de se calcular comprimentos inacessíveis, como a altura de um prédio ou a distância entre corpos celestes, além disso as funções trigonométricas são importantes para o estudo de vários fenômenos físicos, que serão discutidos no Capítulo 4. Para facilitar a compreensão dos resultados obtidos no capítulo sobre as aplicações, estenderemos o domínio das funções apresentadas anteriormente para o conjunto dos números reais, através do ciclo trigonométrico, o qual estudaremos na próxima seção.

3.3 Ciclo trigonométrico

Defini-se o ciclo trigonométrico como o círculo Γ pertencente ao plano cartesiano, centrado na origem $O(0, 0)$ e com raio igual a 1. Dado uma arco \widehat{AP} , sobre Γ e um número real $0 < t < 2\pi$, diremos que o arco \widehat{AP} tem comprimento t radianos quando o comprimento do percurso do ponto A ao P sobre o arco \widehat{AP} mede t , isto é, "esticando" o arco \widehat{AP} obtemos um segmento de reta AP cuja medida é exatamente t . Denotaremos o comprimento do arco \widehat{AP} por $m\widehat{AP}$. Como consequência, temos que 2π radianos correspondem a 360° , sendo θ a medida em graus e t a medida em radianos de um mesmo arco, conclui-se que:

$$\frac{\theta}{360} = \frac{t}{2\pi} \quad (3.1)$$

Com o objetivo de estender as funções trigonométricas para o conjunto dos números reais, introduziremos a *função de Euler* que associa a cada número real $m\widehat{AP} = t$ um ponto de Γ , denominado imagem de t , dado por:

$$\begin{aligned} E: \mathbb{R} &\rightarrow \Gamma \\ t &\rightarrow E(t) = P(x, y) \end{aligned}$$

Fixemos o ponto $A(1, 0)$ do círculo Γ . Vamos definir agora uma função de \mathbb{R} sobre Γ , chamada função de Euler, que associa a cada número real t um único ponto P da circunferência Γ do seguinte modo:

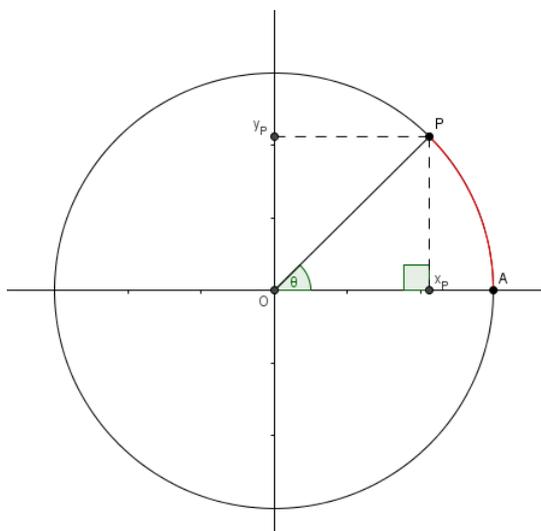
- 1) Se $t = 0$, então P coincide com A ;
- 2) Se $t > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento t , no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso;

3) Se $t < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|t|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P .

A função assim definida é chamada função de Euler, ela será denotada por $E(t)$, usaremos ela para estender a definição das funções trigonométricas ao conjunto dos números reais. Note que a função de Euler satisfaz:

- 1) $E(0) = E(2\pi) = A$;
- 2) Restrita ao intervalo $[0, 2\pi)$ é injetiva sobre Γ ;
- 3) $E(t + 2\pi) = E(t)$, para todo t real.

Figura 3 – Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor, 2020.

Dado qualquer ponto $P(x_P, y_P)$ do círculo trigonométrico, usando as definições de seno e cosseno temos, $\text{sen } \theta = \frac{y_P}{1}$ e $\text{cos } \theta = \frac{x_P}{1}$, conseqüentemente temos $P(\text{cos } \theta, \text{sen } \theta)$, onde o ângulo indicado está em graus. Como pretendemos estender as funções trigonométricas para o conjunto dos números reais, convém representar o ângulo em radianos. Chamamos a atenção para o fato de que a medida do ângulo coincide com o comprimento do arco correspondente, pois o raio do círculo mede 1. A partir dessas informações pode-se concluir que se $m\widehat{AP} = t$, então $\theta = t$ radianos, portanto $P(\text{cos } t, \text{sen } t)$.

É imediato que a definição apresentada coincide com as razões trigonométricas obtidas no triângulo retângulo, quando $0 < t < \frac{\pi}{2}$ (primeiro quadrante). Além disso, é possível concluir que $\text{cos } 0 = 1$ e $\text{sen } 0 = 0$ (quando $P = A$), $\text{cos } \frac{\pi}{2} = 0$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ (quando $A\widehat{OP}$ é reto). Decorrem dos resultados apresentados, duas relações importantes,

$$\text{tgt} = \frac{\text{sen } t}{\text{cos } t}, \text{ se } \text{cos } t \neq 0, \quad (3.2)$$

$$\text{e } \text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t = 1. \quad (3.3)$$

Observando na Figura 3 que as coordenadas de P são os catetos do triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 1, conclui-se facilmente a relação (3.2). Quanto à identidade (3.3), pode ser interpretada como uma consequência direta do teorema de Pitágoras.

Antes de analisar separadamente os casos em que o ponto P está em quadrantes distintos, apresentaremos uma propriedade importante da função $E(t)$ que se refere a periodicidade. Uma função é periódica de período T , quando $f(x + T) = f(x)$. Ao tomar um arco de comprimento $t > 2\pi$, será necessário dar mais de uma volta no círculo, uma vez que seu comprimento é 2π , desse modo um ponto de Γ será imagem de uma infinidade de números reais, que podem ser escritos na forma,

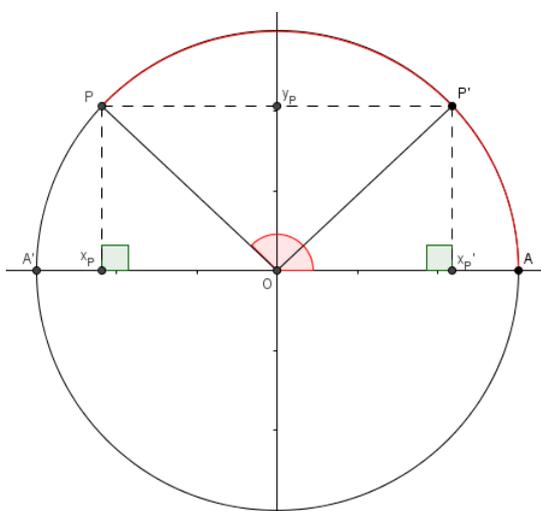
$$t + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Refere-se aos números da forma $t + 2k\pi$ como as várias determinações do arco \widehat{AP} , ou seja, são os inúmeros pontos da imagem inversa de P. Ainda é comum dizer que t e $t + 2k\pi$ são *côngruos*, uma vez que a diferença entre eles é um múltiplo de 2π (CARVALHO, 2005). Segue que para k e t reais, $E(t + 2k\pi) = E(t)$, conseqüentemente $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$.

Decorre desse fato que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π , isto é, para conhecer como essas funções se comportam na reta real, basta analisar seu comportamento no intervalo $[0, 2\pi]$. Desse modo restringiremos a análise dessas funções ao intervalo $[0, 2\pi]$, que corresponde a estudar as coordenadas de um ponto que realizou no máximo uma volta. As funções seno e cosseno, por representarem as coordenadas de ponto, sofrem variação no sinal de acordo com o quadrante em que se encontram. Mostraremos como determinar os valores dessas funções, em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante.

1. P está no segundo quadrante, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

Figura 4 – $m\widehat{AP} = t$

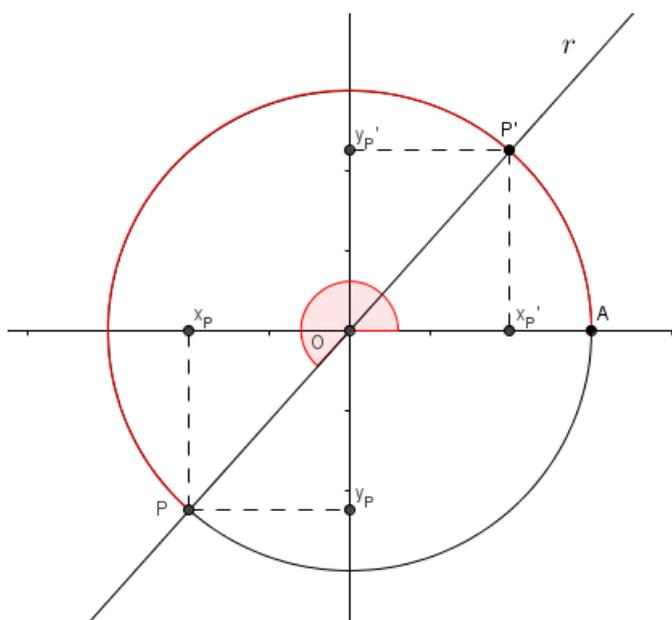


Fonte: Autor, 2020

Traçando por P uma reta paralela ao eixo das abscissas que intersecta o círculo Γ em P' (Figura 4), é possível mostrar por semelhança que os ângulos $\widehat{AOP'}$ e $\widehat{POA'}$ são iguais, ou seja $\widehat{mAP'} = \widehat{mPA'} = \pi - t$, portanto, $\text{sen } t = \text{sen}(\pi - t)$, $\text{cos } t = -\text{cos}(\pi - t)$ e $\text{tg } t = -\text{tg}(\pi - t)$. Justificamos os sinais das funções, devido à posição do ponto P , por pertencer ao segundo quadrante o ponto possui abscissa negativa e ordenada positiva.

2. P está no terceiro quadrante, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

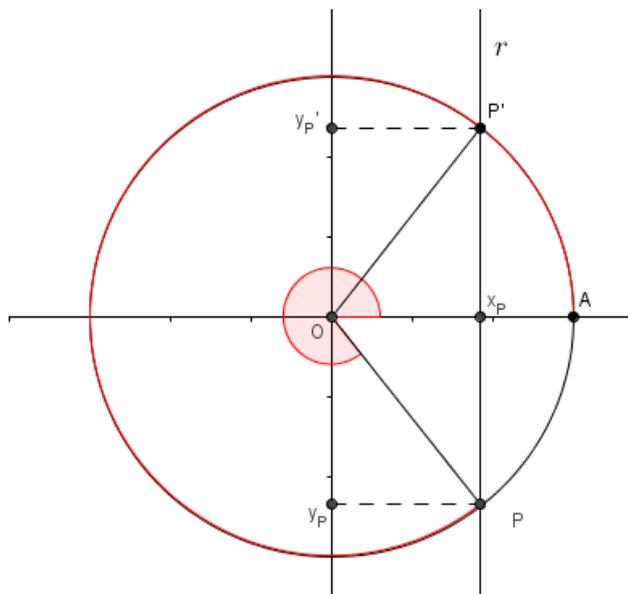
Figura 5 – $\widehat{mAP} = t$



Fonte: Autor, 2020

A reta r que liga que liga os pontos P e O , intersecta o círculo Γ no ponto P' (simétrico de P). Como os ângulos $\widehat{AOP'}$ e $\widehat{A'OP}$ são iguais, temos $\widehat{mAP'} = \widehat{mA'P} = t - \pi$, de onde se conclui que $\text{sen } t = -\text{sen}(t - \pi)$, $\text{cos } t = -\text{cos}(t - \pi)$ e $\text{tg } t = \text{tg}(t - \pi)$. Assim como no caso anterior, os sinais das funções variam de acordo com o quadrante ocupado pelo ponto.

3. P está no quarto quadrante, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.

Figura 6 – $m\widehat{AP} = t$ 

Fonte: Autor, 2020

Tomando a reta r paralela ao eixo das ordenadas e que passa por P , obtemos o ponto P' que é a interseção de r com círculo. Nota-se que os ângulos $A\hat{O}P$ e $A\hat{O}P'$ são iguais, como consequência $m\widehat{AB'} = m\widehat{BA} = 2\pi - t$, de modo que $\text{sen } t = -\text{sen}(2\pi - t)$, $\text{cos } t = \text{cos}(2\pi - t)$ e $\text{tg } t = -\text{tg}(2\pi - t)$. O processo empregado nos três casos é denominado "redução ao primeiro quadrante", que permite concluir que os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante, isto é, conhecendo-se os valores assumidos pelas funções no primeiro quadrante, é possível determinar os valores dos demais quadrantes.

3.4 Leis do seno e do cosseno

Nesta seção encontram-se duas relações importantes da trigonometria, conhecidas como leis do seno e do cosseno. A lei do cosseno, também conhecida como Teorema do Cosseno, permite calcular a medida do terceiro lado de um triângulo conhecendo-se as medidas dos outros dois lados e a medida do ângulo formado por estes lados. A lei do seno estabelece uma relação entre a medida do lado de um triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado, de modo que a razão entre tais medidas é sempre constante. A seguir apresentamos a demonstração das referidas leis.

3.4.1 Lei do cosseno

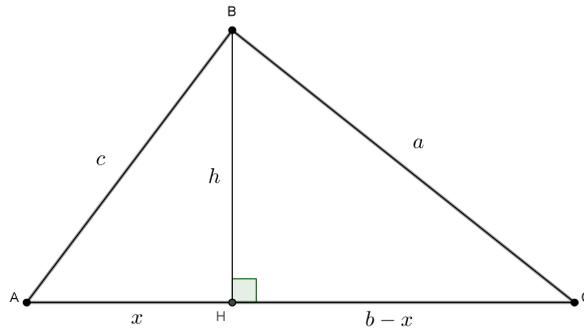
Seja ABC um triângulo qualquer com lados a , b e c , iremos mostrar que,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \text{ (lei do cosseno).}$$

. Para demonstrar a identidade anterior, devemos considerar os dois casos a seguir:

1. \hat{A} é agudo, $0 < \hat{A} < 90^\circ$

Figura 7 – $\hat{A} < 90^\circ$



Fonte: Autor, 2020

Tracemos a altura $\overline{BH} = h$ relativa ao lado $\overline{AC} = b$. Fazendo $\overline{AH} = x$, temos os triângulos retângulos BHC e BHA representados na Figura 7. Pelo Teorema de Pitágoras segue que,

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b - x)^2 \\ \Rightarrow a^2 &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ \Rightarrow c^2 &= x^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - x^2, \end{aligned}$$

substituindo na segunda igualdade temos:

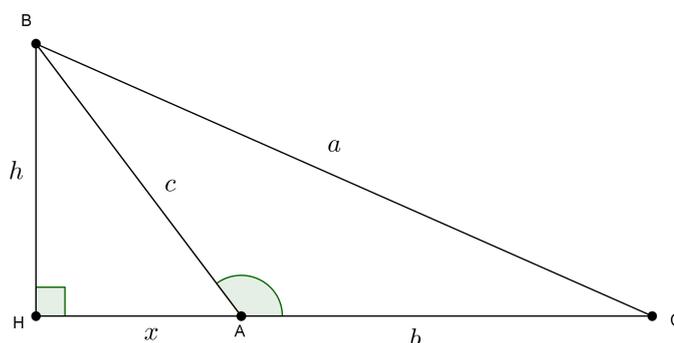
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Sendo,

$$\cos \hat{A} = \frac{x}{c} \Leftrightarrow x = c \cdot \cos \hat{A},$$

Segue que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$, como queríamos mostrar.

2. \hat{A} é obtuso, $\hat{A} > 90^\circ$

Figura 8 – $\hat{A} > 90^\circ$ 

Fonte: Autor, 2020

De modo análogo ao caso anterior, traçamos a partir de B a altura do triângulo ABC, relativa ao lado AC. Fazendo $\overline{HA} = x$ e $\overline{BH} = h$, temos no triângulo BHC (Figura 8):

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b + x)^2 \\ \Rightarrow a^2 &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2. \end{aligned}$$

Como o triângulo ABH é retângulo, temos:

$$c^2 = x^2 + h^2 \iff h^2 = c^2 - x^2.$$

Substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 + 2bx. \end{aligned}$$

Sabendo que $x = c \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{H}) = c \cdot \cos(180^\circ - \hat{A})$, devemos lembrar que $\cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos(\hat{A})$, portanto,

$$x = -c \cos(\hat{A}) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$

Para o caso em que $\hat{A} = 90^\circ$ é imediado pelo Teorema de Pitágoras, logo concluímos que a lei do cosseno é válida para qualquer ângulo analisado.

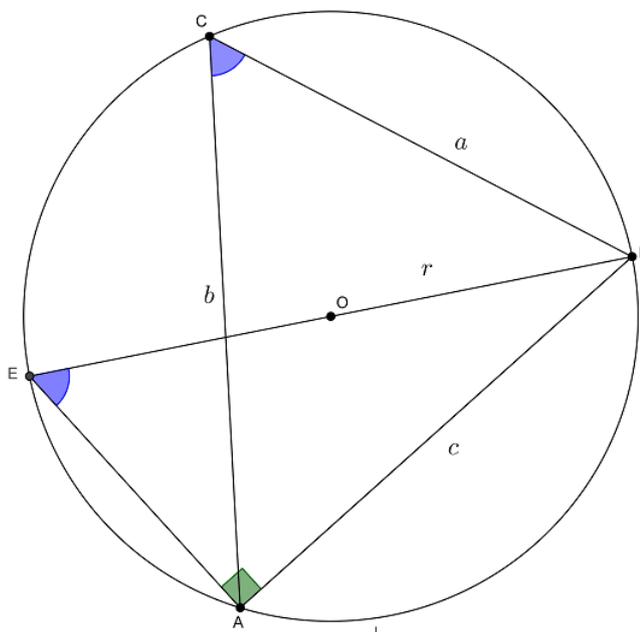
3.4.2 Lei do seno

Antes de apresentarmos a lei dos senos, faz-se necessário mencionar um resultado que relaciona a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência com o arco correspondente.

Proposição 3.4. *Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle BOC$ correspondente (MUNIZ NETO, 2013).*

Para demonstrar a lei dos senos, vamos considerar um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio r (Figura 9).

Figura 9 – Triângulo inscrito na circunferência



Fonte: Autor, 2020

Tomando o ponto E simétrico a B em relação ao centro do círculo, temos o triângulo retângulo ABE cuja hipotenusa mede $2r$. Pela Proposição 3.4, a mediana do ângulo \widehat{BAE} é igual a metade do ângulo central correspondente, logo $\widehat{BAE} = 90^\circ$. Além disso, os ângulos \widehat{BEA} e \widehat{BCA} subtendem o mesmo arco \widehat{AB} , portanto são congruentes. Analisando o ângulo \widehat{BEA} , temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{E} = \frac{c}{2r} &\iff \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c}{2r}, \\ \text{logo, } 2r &= \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}. \end{aligned}$$

Repetindo-se o processo para os vértices A e C, obtemos a lei dos senos:

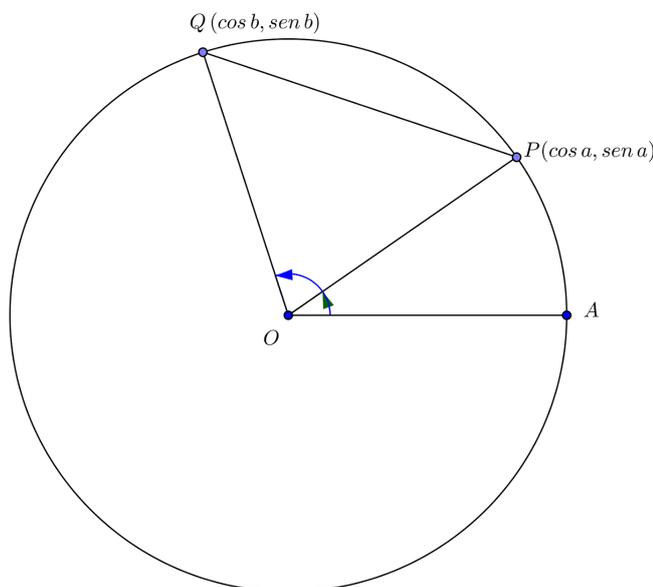
$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2r.$$

A partir das leis apresentadas é possível deduzir as expressões que permitem calcular as funções trigonométricas da soma $(a + b)$ e da diferença $(a - b)$ de dois números reais quaisquer a e b , cujas funções são conhecidas previamente nos pontos a e b . Para determinar essas expressões vamos utilizar a relação que fornece a distância entre dois pontos no plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{3.4}$$

Para mostrar que $\cos(b - a) = \cos b \cdot \cos a + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a$, tomemos dois arcos $m(\widehat{AP}) = a$ e $m(\widehat{AQ}) = b$, pertencentes ao círculo unitário (raio mede 1 u.c), como indicado a seguir na Figura 10.

Figura 10 – Cosseno da diferença



Fonte: Autor, 2020

Na Figura 10, temos o triângulo OPQ, sendo que o ângulo \widehat{POQ} mede $b - a$. Podemos relacionar a lei dos cossenos com a expressão que fornece a distância entre pontos, através do segmento \overline{PQ} , de modo que:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \cos^2 b - 2 \cos b \cdot \cos a + \cos^2 a + \sin^2 b - 2 \sin b \cdot \sin a + \sin^2 a \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(b - a). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Note que $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$ e $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, fazendo os devidos ajustes na igualdade (3.5) obtemos a expressão que fornece o cosseno da diferença de dois arcos:

$$\cos(b - a) = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a.$$

Para obter o cosseno da soma, basta lembrar que $\cos(-a) = \cos a$ e $\sin(-a) = -\sin a$. Fazendo $\cos(b + a) = \cos(b - (-a))$, temos:

$$\cos(b - (-a)) = \cos b \cdot \cos(-a) + \sin b \cdot \sin(-a).$$

Decorre das igualdades citadas anteriormente, a relação para o cosseno da soma de dois arcos:

$$\cos(b + a) = \cos b \cdot \cos a - \sin b \cdot \sin a.$$

O seno da soma de dois arcos, pode ser calculado tomando-se os arcos de medidas $\frac{\pi}{2} - a$ e b . Ao substituir esses arcos na expressão anterior, obtemos:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b. \quad (3.6)$$

Sabendo-se que $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ e $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, decorre da manipulação algébrica da igualdade (3.6), a relação que fornece o seno da soma:

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$$

O seno da diferença, é facilmente determinado ao tomar os arcos de medidas a e $-b$ e fazer a substituição na expressão anterior. As fórmulas apresentadas serão úteis para a obtenção das expressões que descrevem os fenômenos periódicos discutidos no Capítulo 4.

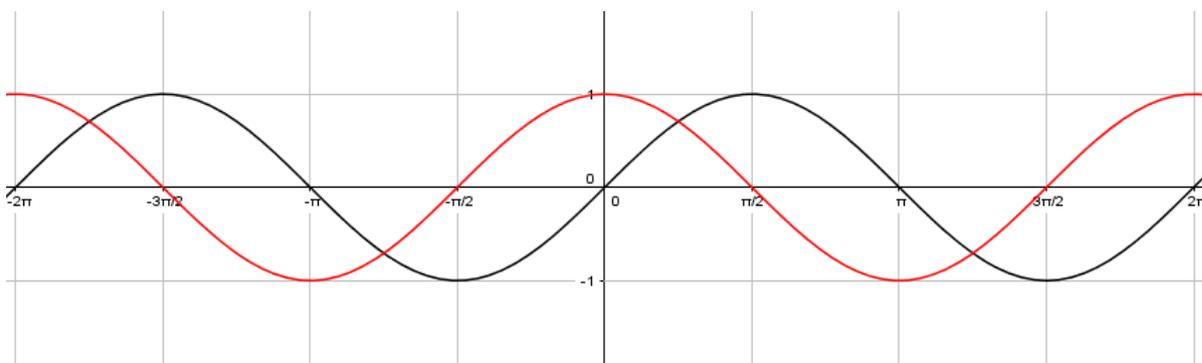
3.5 Funções trigonométricas

Nesta seção encontram-se as principais características das funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente), como domínio, imagem, período e suas representações gráficas, além discutir como os parâmetros influenciam no comportamento das funções.

Definição 3.1. *Defini-se a função seno, como a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o seno de x .*

Como já mencionado, a função seno é periódica e tem período 2π , de modo que sua imagem corresponde ao intervalo $[-1, 1]$, ou seja $\text{Im}(f) = [-1, 1]$. Quanto a função cosseno, é definida como a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real x o cosseno de x . Em termos de características, as duas funções possuem o mesmo período e suas imagens estão definidas no mesmo intervalo, porém apresentam paridades diferentes. A função seno é dita ímpar, pois para todo $x \in D(f)$, tem-se $f(x) = -f(-x)$, já a função cosseno é par, com $g(x) = g(-x)$. A seguir é possível visualizar as características mencionadas, por meio dos gráficos das funções.

Figura 11 – Gráficos das funções



Fonte: Autor, 2020

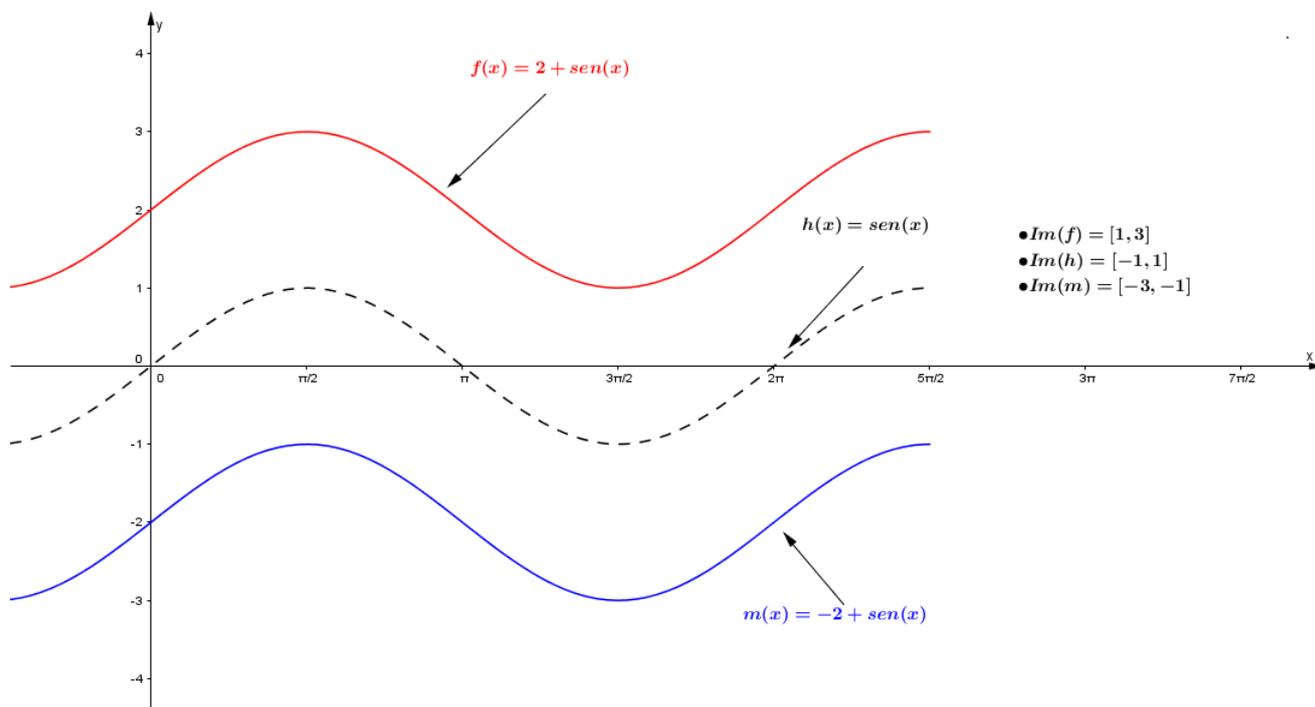
Na Figura 11, a curva preta corresponde ao gráfico de $f(x) = \sin(x)$ e curva vermelha representa o gráfico de $g(x) = \cos(x)$, sendo que x está expresso em radianos. Nota-se que o gráfico da função cosseno é congruente ao da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, em outras palavras temos que $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, pode-se verificar tal resultado

utilizando o seno da soma de dois arcos. A partir dessa observação, somos motivados a discutir as variações que ocorrem nos gráficos das funções trigonométricas, ao manipularmos alguns parâmetros.

Muitos fenômenos periódicos são modelados por funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$, sendo a , b , c e d números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Tais parâmetros influenciam diretamente o comportamento da função trigonométrica e representam determinadas características do fenômeno estudado, como veremos a seguir.

- O parâmetro a translada o gráfico da função em $|a|$ para cima se $a > 0$, ou para baixo se $a < 0$. Em síntese, a constante a é responsável por alterar a imagem da função. Na Figura 12, as funções $f(x)$ e $m(x)$ equivalem a $h(x)$ transladada duas unidades para cima e duas unidades para baixo, respectivamente.

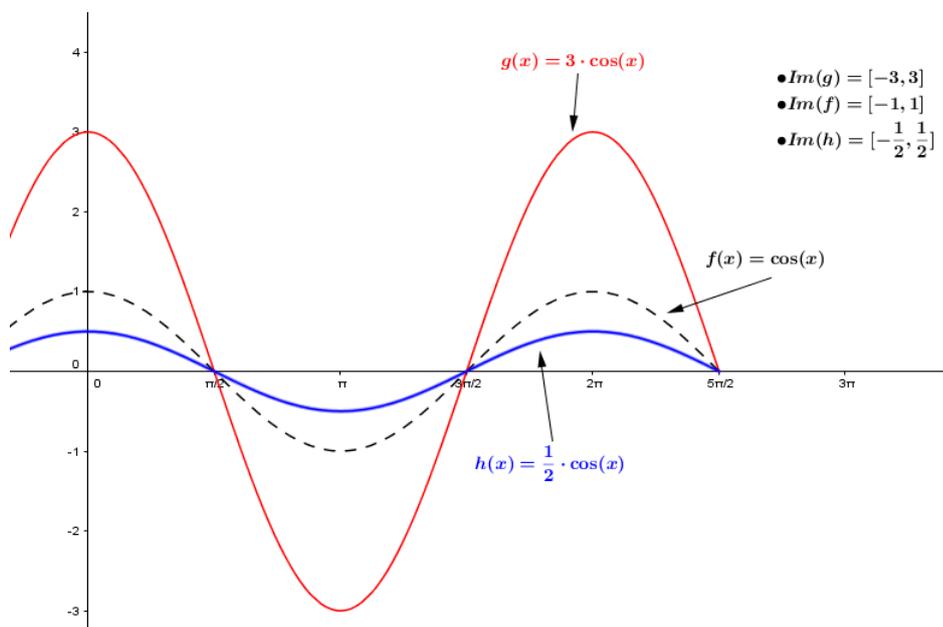
Figura 12 – Parâmetro a



Fonte: Autor, 2020

- O parâmetro b amplia verticalmente o gráfico da função (aumenta o intervalo da imagem) se $|b| > 1$ e comprime verticalmente (diminui o intervalo da imagem) se $|b| < 1$. Assim como a constante a , b altera a imagem da função e tem relação direta com a amplitude (A) de um fenômeno periódico, sendo $A = |b|$ (Figura 13).

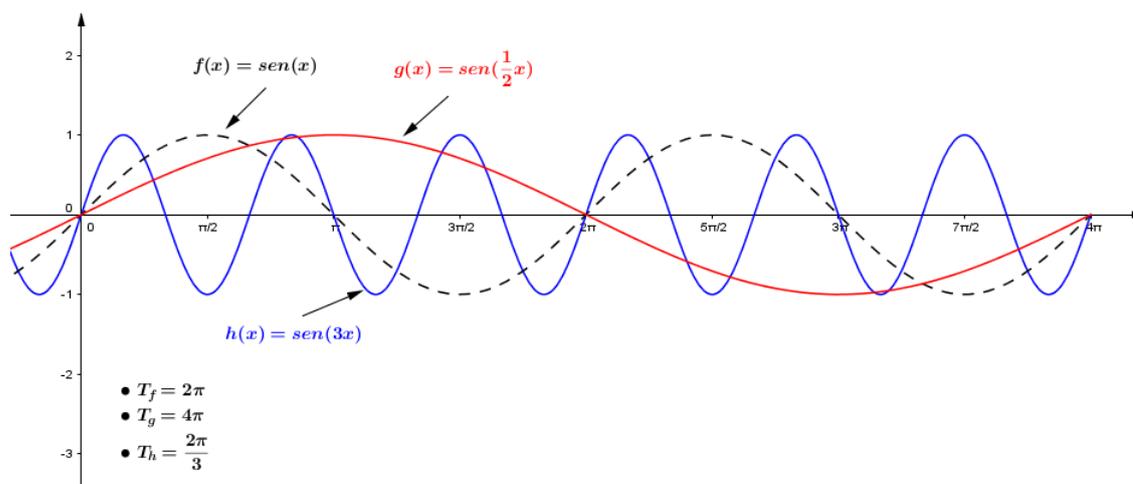
Figura 13 – Parâmetro b



Fonte: Autor, 2020

• A constante c é responsável por alterar o período (T) da função por meio da equação $T = \frac{2\pi}{|c|}$. Nota-se que, quanto maior for o valor $|c|$, menor será o período da função. Em contrapartida, o mesmo aumenta a medida que $|c|$ reduz (Figura 14). O período pode ser obtido, através do gráfico, tomando-se a distância entre dois valores de máximo consecutivos ou dois valores de mínimo consecutivos, em outras palavras, o período equivale ao comprimento de uma onda, como veremos no Capítulo 4.

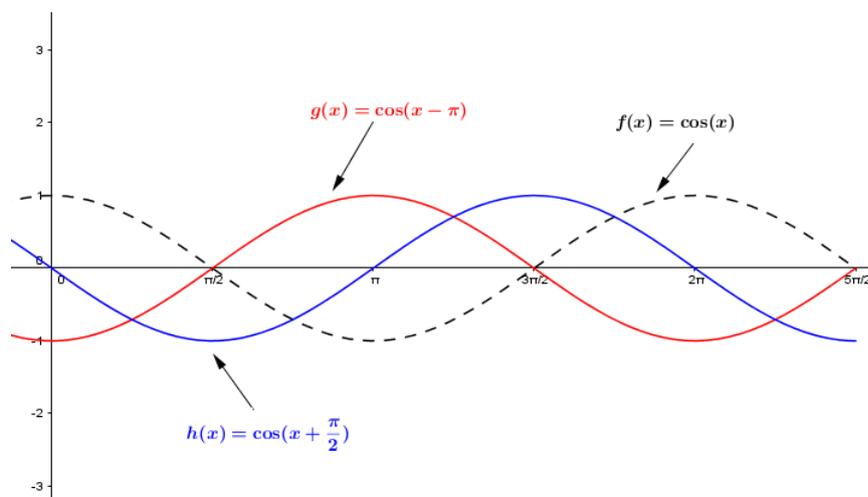
Figura 14 – Parâmetro c



Fonte: Autor, 2020

• A constante d , também conhecida como ângulo de fase, translada o gráfico da função em $|\frac{d}{c}|$ unidades para a esquerda se $\frac{d}{c} > 0$, ou para a direita se $\frac{d}{c} < 0$.

Figura 15 – Parâmetro d



Fonte: Autor, 2020

Nota-se que na Figura 15, que a curva azul equivale ao gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ transladada $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, enquanto a curva vermelha corresponder a uma translação de π unidades para a direita. Além disso, verifica-se que as demais características (período, imagem, domínio e amplitude) foram conservadas nas três funções.

Exibiremos algumas propriedades da função tangente, bem como sua definição, porém omitiremos a análise dos parâmetros apresentados, pois o gráfico dessa função sofre variações semelhantes às discutidas anteriormente. Lembramos que a tangente é dada razão:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}.$$

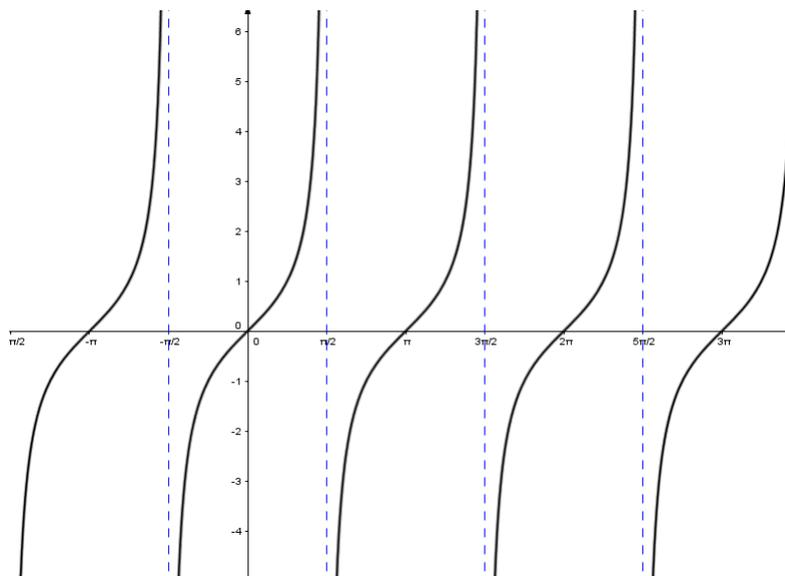
Portanto a função $g(x) = \operatorname{tg}(x)$ só tem significado no conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$. A partir das informações apresentadas até momento sobre as funções seno e cosseno, é possível deduzir o comportamento da função tangente. Nos quadrantes ímpares $g(x)$ é positiva, dado que o seno e cosseno possuem o mesmo sinal e nos quadrantes pares a função é negativa, pois seno e cosseno possuem sinais distintos.

A partir do seu gráfico (Figura 16), verifica-se que a função tangente é crescente em todo seu domínio, além disso possui período igual a π e assíntotas em $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Quanto a paridade, $g(x)$ é ímpar, uma vez que:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cos}(-x)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$$

Figura 16 – Gráfico da função $g(x) = \text{tg}(x)$ 

Fonte: Autor, 2020

Normalmente, as funções trigonométricas são apresentadas de forma estática e simplificada. Como o principal recurso do professor, ainda é o quadro branco a construção do gráfico é realizada através de alguns pontos determinados previamente. Esse método impede a manipulação direta do gráfico e conseqüentemente dificulta a compreensão das transformações sofridas pelo mesmo. É recomendado que o professor e os estudantes disponham de algum recurso que permita a manipulação dos parâmetros apresentados, como o Geogebra, que minimiza o tempo gasto em sala de aula e contribui para a aprendizagem.

As funções trigonométricas discutidas são objetos centrais no estudo das séries de Fourier, que são usadas para representar funções periódicas complexas que descrevem o comportamento de fenômenos físicos através das funções seno e cosseno. Jean-Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico francês, que destacou-se por seu estudo sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas simples, denominadas séries de Fourier.

O desenvolvimento tecnológico, acompanhado do surgimento de computadores de alta capacidade de processamento, possibilitou a análise e apuração de dados, por exemplo, no processamento de imagens digitais e sons, que por sua vez exige o emprego da Transformada de Fourier:

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

A transformada de Fourier representa a soma de uma série de ondas, com diferentes amplitudes, frequências e fases. A constante L corresponde ao período da função, a_0 , a_n e b_n ($n \in \mathbb{N}$) são denominados coeficientes de Fourier. O leitor pode encontrar o método para a obtenção de tais coeficientes em Santos (2004).

4 Fenômenos Periódicos

No presente capítulo, apresentamos alguns exemplos de fenômenos periódicos, buscando relacioná-los com as funções trigonométricas. Como o próprio nome sugere, diz-se que um fenômeno é periódico quando o mesmo se repete em um dado intervalo de tempo. Cita-se como exemplo a passagem dos dias, que ocorre em um intervalo de aproximadamente 24 horas. Geralmente esses fenômenos são modelados através de funções trigonométricas, que permitem antever com certa precisão o comportamento de um evento. A seguir descrevemos quatro exemplos de fenômenos periódicos: movimento harmônico simples (MHS), movimento ondulatório e movimento circular.

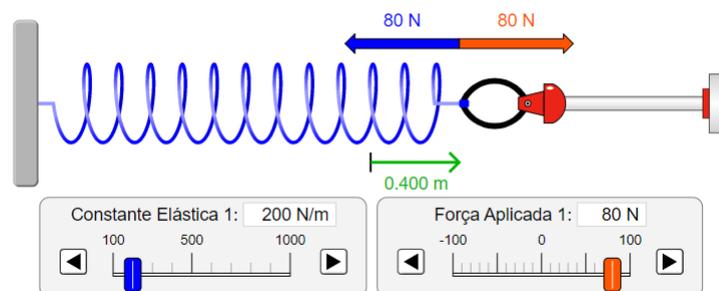
4.1 Movimento Harmônico Simples (MHS)

O movimento harmônico é o movimento periódico mais simples, contudo não é o menos importante. O MHS é muito comum, estando presente no movimento de gangorras, pêndulos, molas, entre outros. Por essa razão o movimento harmônico simples é um importante exemplo da aplicação das leis da mecânica (MARQUES, 2012). Um corpo efetua um movimento harmônico simples, quando oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio, descrevendo uma trajetória retilínea. Passaremos a descrever o sistema massa-mola, que comporta-se como um oscilador harmônico simples. De acordo com Marques (2012) uma partícula que encontra-se em um MHS, está sob a ação de uma força elástica, que é proporcional ao deslocamento x e representada por:

$$F(x) = -kx. \quad (4.1)$$

A constante k é denominada constante elástica, e varia de acordo com o material que constitui o objeto. Na Figura 17, apresentamos uma ilustração para o sistema massa-mola.

Figura 17 – Sistema massa-mola



Fonte: Autor, 2020

Note que quanto maior for o valor de k , o objeto apresentará maior resistência à deformação e conseqüentemente será necessário uma força de maior intensidade. Além disso a força aplicada ao sistema e a força elástica possuem a mesma direção e sentidos contrários. É possível estabelecer uma relação entre a Lei de Hooke e a segunda Lei de Newton, de modo que:

$$F = ma \Rightarrow -kx = ma. \quad (4.2)$$

Sendo que m corresponde à massa do corpo que sofre a ação da força e a se refere à aceleração adquirida pelo corpo. A solução geral para a equação (4.2), pode ser representada através da função trigonométrica:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0). \quad (4.3)$$

Onde A e ω são números reais positivos, de modo que A é denominado amplitude do movimento e ω corresponde à frequência angular. O leitor pode encontrar a demonstração do resultado 14 consultando Negrini (2000). Usando a última igualdade e relações trigonométricas vistas na seção anterior obtemos a seguinte igualdade:

$$x(t) = A[\cos(\omega t) \cos(\theta_0) - \sin(\omega t) \sin(\theta_0)].$$

Recorrendo-se à técnicas de derivação, é possível encontrar as funções que descrevem a velocidade ($v(t)$) e a aceleração ($a(t)$) do movimento, de modo que:

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0),$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta_0).$$

Como esta dissertação é uma proposta voltada para o ensino básico, as demonstrações das expressões apresentadas serão omitidas, pois exige um certo conhecimento acerca das equações diferenciais e de Cálculo, que são abordados nos cursos de ensino superior.

A seguir iremos caracterizar os parâmetros, presentes na equação (4.1). Devemos notar que a função assume valor máximo quando $x(t) = A$ e valor mínimo quando $x(t) = -A$ (pois $-1 \leq \cos(\omega t + \theta_0) \leq 1$), portanto o parâmetro A é denominado amplitude do movimento. O termo $\omega t + \theta_0$ é denominado fase do MHS, de modo que a constante θ_0 (rad) é a fase inicial, e pode ser determinada a partir das condições iniciais do movimento. A constante ω corresponde à frequência angular do movimento, e depende da massa da mola e da constante elástica:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Como já mencionado, o movimento harmônico simples é periódico, portanto vale as seguintes relações, para o intervalo de tempo T conhecido como período.

$$x(t + T) = x(t),$$

$$v(t + T) = v(t).$$

Da equação (4.1) e da condição para que um movimento seja periódico, é possível determinar o período do MHS:

$$\cos(\omega t + \omega T + \theta_0) = \cos(\omega t + \theta_0),$$

$$\text{sen}(\omega t + \omega T + \theta_0) = \text{sen}(\omega t + \theta_0).$$

As condições apresentadas são satisfeitas, para os valores de ωT tais que:

$$\omega T = 2\pi.$$

Portanto, o período do movimento é representado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Como a frequência é o inverso do período, conclui-se que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

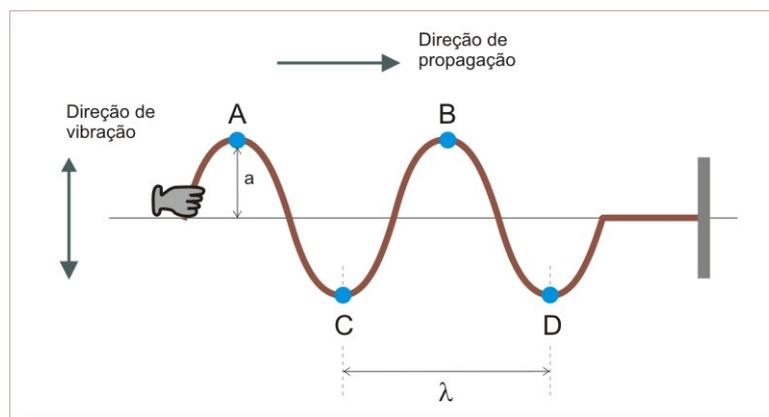
A partir das relações obtidas, concluímos que a frequência e o período do oscilador harmônico dependem somente da massa da partícula e da constante elástica k .

4.2 Movimento ondulatório

O movimento ondulatório caracteriza-se por transportar informações e energia entre sistemas físicos, através da propagação de ondas. As ondas são perturbações que se propagam no vácuo ou em meios materiais, e podem ser classificadas em ondas mecânicas e não-mecânicas (BONJORNO, 2003). Ondas mecânicas necessitam de um meio para se propagarem, por exemplo, as ondas sonoras, ondas em uma corda e as ondas que se formam na superfície de um lago. As ondas não-mecânicas não necessitam de um meio material para se propagarem, como por exemplo a luz e as ondas eletromagnéticas.

Passaremos a estudar um tipo especial de onda, denominado onda harmônica unidimensional, cujo comportamento pode ser descrito por funções do tipo seno ou cosseno. Uma onda harmônica pode ser produzida, por exemplo, ao mover verticalmente uma das extremidades de uma corda, enquanto a outra extremidade encontra-se fixa. Após algumas oscilações a corda passará a se mover periodicamente, com um aspecto senoidal, como pode ser identificado na Figura 18.

Figura 18 – Onda em uma corda.



Fonte: NICOLAU, 2020, p.1

Os pontos A e B são denominados cristas da onda, e correspondem aos pontos de máximo, quanto aos pontos C e D recebem o nome de vale e estão relacionados aos pontos de mínimo. A constante λ é denominada comprimento da onda, e equivale à distância entre duas cristas ou dois vales sucessivos. Assim como no MHS, a amplitude da onda é representada pela constante a e corresponde à distância entre a crista e o ponto de equilíbrio.

Pode-se verificar que uma onda harmônica percorre distâncias iguais para um mesmo intervalo de tempo (período da onda). A partir desse fato, conclui-se que a velocidade de propagação da onda é constante e só depende das propriedades físicas do meio de propagação.

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (4.4)$$

De modo análogo ao MHS a frequência da onda é o inverso da período. Além disso, defini-se uma constante k , denominada número da onda e representada pela expressão:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.5)$$

Para determinar a equação, iremos considerar uma onda que se propaga na direção do eixo das abscissas com sentido positivo, como ilustra a Figura 18. À medida que a onda se propaga pela corda, cada um de seus pontos executa um movimento harmônico, com frequência igual a da fonte. A oscilação dos pontos é descrita pela função a seguir, sendo A e ω números reais positivos:

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

Dentre as ondas mecânicas, certamente as ondas sonoras são as mais comuns no cotidiano. Elas são classificadas como ondas longitudinais, pois as moléculas constituintes do meio se aproximam e se afastam uma das outras de forma alternada, através de um processo de compressão e descompressão. Em decorrência desse fato, as ondas sonoras são consideradas ondas de pressão, por exemplo, quando um músico toca um violão, a vibração das cordas produz alternadamente compressões e rarefações do ar, ou seja, produz variações de pressão

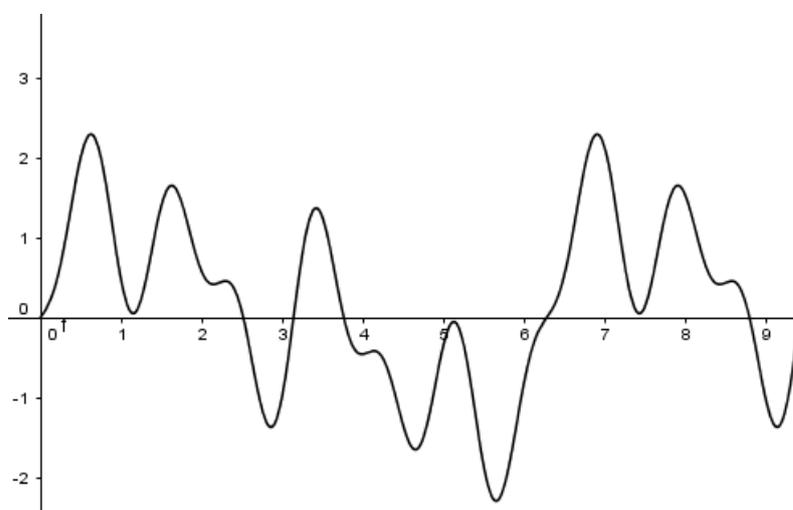
que se propagam através do meio. As ondas sonoras podem apresentar características distintas, que levam à classificação do som, quanto a: altura, intensidade e timbre.

A altura do som se refere à sua frequência, de modo que sons com grandes frequências são ditos agudos, por sua vez aqueles que apresentam menores frequências são classificados como sons graves, os seres humanos são capazes de perceber somente sons entre 20 Hz e 20.000 Hz. A intensidade do som diz respeito à quantidade de energia que a onda sonora transporta e está relacionada com amplitude da onda sonora, sendo sua unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades, o "bel". Os sons mais intensos são chamados de sons fortes, enquanto os de baixa intensidade são denominados sons fracos.

O timbre é a propriedade do som que permite distinguir uma fonte sonora de outra, apesar de estarem a produzir sons com a mesma frequência e intensidade, por exemplo é possível distinguir a nota musical "dó" produzida por um piano e por um violão, apesar das notas apresentarem a mesma intensidade, possuem timbres diferentes. O timbre de uma fonte sonora é representado por uma onda complexa, que é a soma de uma onda fundamental (som puro, ou simples, como o produzido por um diapásão) e sons harmônicos (SOARES, 2011). A seguir apresentamos a representação algébrica e gráfica (Figura 19) de uma onda complexa:

$$P(t) = \sin(t) + 0.7 \sin(2t) + 0.8 \sin(4t) - 0.6 \sin(7t).$$

Figura 19 – Onda Complexa



Fonte: Autor, 2020

A soma das ondas senoidais é chamada de síntese de Fourier e a decomposição da onda complexa em suas componentes é conhecida como análise de Fourier, além disso o gráfico das amplitudes das ondas senoidais que formam a onda complexa recebe o nome de espectro de Fourier. Nota-se que assim como suas componentes, a onda complexa também é periódica.

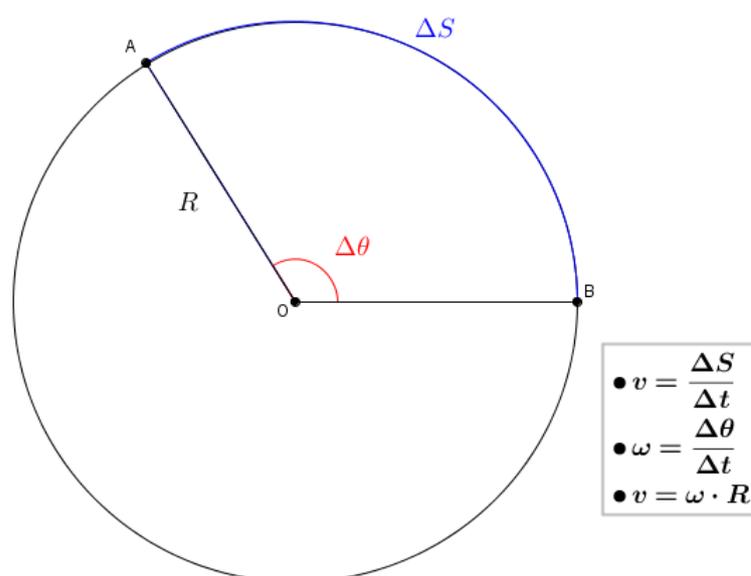
Na próxima seção apresentamos o movimento circular, destacando as principais variáveis que auxiliam no seu estudo.

4.3 Movimento Circular Uniforme

No movimento circular uniforme (MCU), o corpo descreve uma trajetória circular com velocidade constante. Isaac Newton foi o primeiro a analisar esse movimento do ponto de vista da dinâmica, constatando, por exemplo, que a Lua executa um movimento quase circular, observação que contribuiu para que estabelecesse a Teoria da Gravitação Universal.

Como os demais fenômenos periódicos, o MCU apresenta variáveis, dentre as quais citamos o período (tempo, em segundos, gasto para que uma partícula execute uma volta completa), a frequência (quantidade de voltas, em que partícula executa a cada segundo, sua unidade no SI é o Hertz), velocidade angular (taxa de variação pela qual o ângulo se altera em função do tempo) e velocidade escalar (taxa pela qual o espaço muda em função do tempo).

Figura 20 – Movimento circular uniforme



Fonte: Autor, 2020

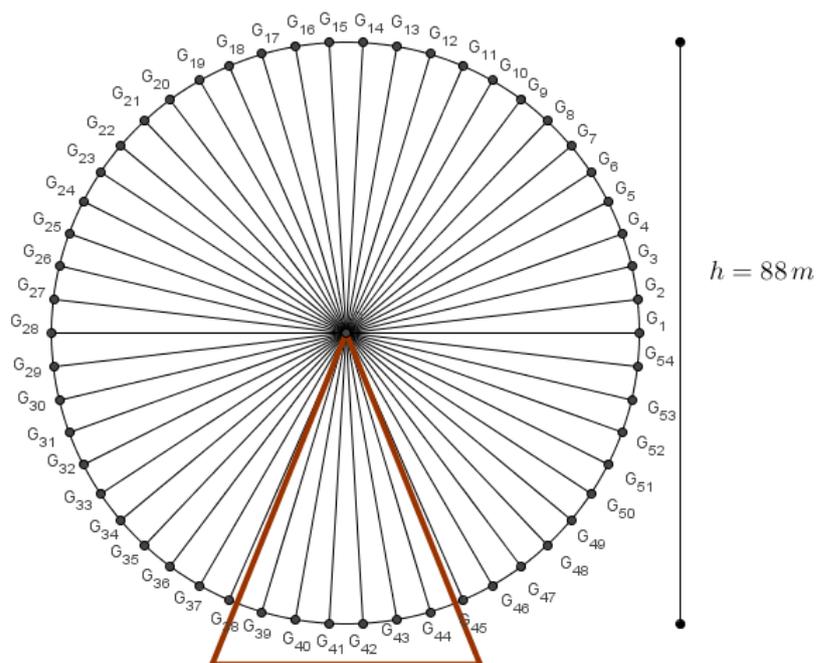
Na Figura 20, representamos uma partícula que realiza um deslocamento (ΔS) do ponto B ao ponto A, ao longo de uma circunferência de raio R . A velocidade escalar (v) é dada pela razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo, de modo que é sempre constante. A velocidade angular (ω), por sua vez, é obtida dividindo-se o deslocamento angular pelo intervalo de tempo. Destacamos que ΔS e R devem estar na mesma unidade de medida e o deslocamento angular em radianos.

É comum nos depararmos com situações diárias que descrevem um movimento circular, uniforme ou não, como por exemplo, os ponteiros de um relógio, os pneus de um automóvel, as hélices de um ventilador e o movimento realizado por uma roda-gigante. Com o objetivo de exemplificar com mais clareza, analisaremos o último exemplo.

A maior roda-gigante da América Latina está localizada no Rio de Janeiro, possui 88 metros

de altura e realiza uma volta completa em 18 minutos, além de conter 54 gôndolas¹. A partir dessas informações obtemos a velocidade escalar e a velocidade angular da roda-gigante "Rio Star", para isso devemos considerar que sua altura equivale ao seu diâmetro, ou seja, no ponto de embarque a gôndula encontra-se a zero metros de altura (Figura 21)

Figura 21 – Roda-gigante Rio star



Fonte: Autor, 2020

Analisando a Figura 21, verifica-se que a roda possui raio igual 44 m, portanto, seu comprimento é:

$$\Delta S = 2 \cdot \pi \cdot 44$$

$$\Rightarrow \Delta S = 88\pi \text{ m.}$$

Como a roda leva em média 18 minutos para realizar uma volta completa, temos que seu período é $T = 1080 \text{ s}$. A partir das expressões presentes na Figura 20, determinamos a velocidade escalar e angular:

$$v = \frac{88\pi}{1080} \cong 0.256 \text{ m/s,}$$

$$e, \omega = \frac{2\pi}{1080} \cong 0.006 \text{ rad/s.}$$

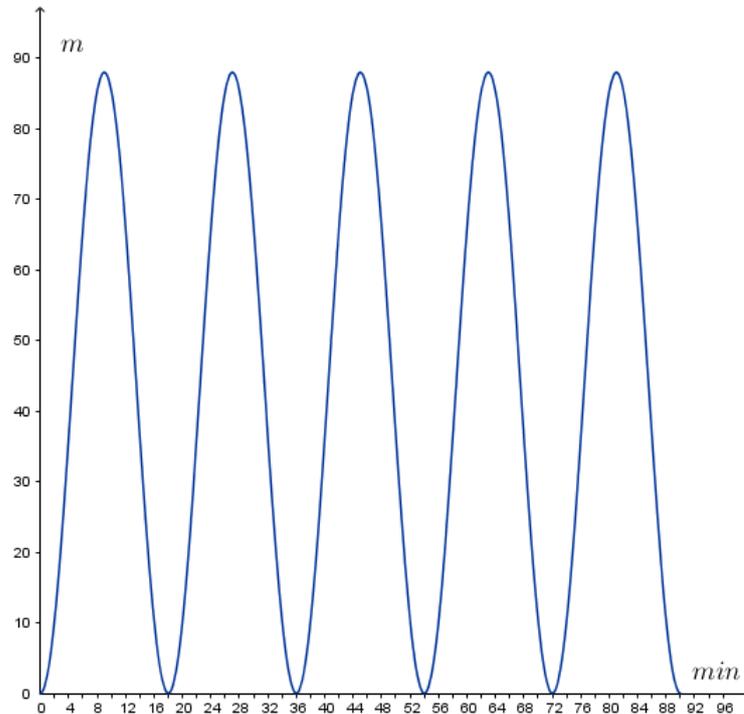
Observando o deslocamento das gôndolas da roda-gigante, constata-se que as mesmas executam um movimento periódico, portanto é possível encontrar uma função trigonométrica do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, que relaciona a altura de uma gôndula com o tempo.

¹ Em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/>. Acesso em: 14 de maio de 2020

Encontramos os parâmetros da função através dos passos apresentados na Seção 3.5, cujas representações algébrica e gráfica são:

$$f(x) = 44 + 44 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{18} + \frac{27\pi}{18} \right).$$

Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = 44 + 44 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{18} + \frac{27\pi}{18} \right)$



Fonte: Autor, 2020

Ressaltamos que a função só tem significado para $x \geq 0$, uma vez que a variável refere-se ao tempo de rotação. Na Figura 22, verificamos que a função possui um valor de máximo para $t = 9 \text{ min}$ e um valor de mínimo para $t = 18 \text{ min}$, momento em que uma gôndula atinge a maior altura e menor altura respectivamente.

5 Propostas de atividades interdisciplinares

Neste capítulo propomos quatro atividades, que podem auxiliar no ensino da trigonometria e principalmente das funções trigonométricas. Além dos exemplos de aplicações desses conteúdos, apresentamos em cada tópico um problema e sua resolução. Levando em consideração que uma parcela significativa dos estudantes chega ao ensino médio sem ter os conhecimentos prévios para o estudo dos conteúdos contemplados nas matrizes de referência, sugerimos a apresentação das funções trigonométricas através de situações práticas. A seguir apontamos os encaminhamentos metodológicos e possíveis discussões em sala de aula.

5.1 Atividade 1: Relação entre objeto e sombra

TEMA: Razões trigonométricas

CARGA HORÁRIA: 2 horas-aula

OBJETIVOS: Compreender as razões trigonométricas através de comprimento de segmentos e perceber que a soma dos ângulos internos de triângulo é igual a 180° .

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Para a realização desta atividade, sugerimos que o professor solicite aos estudantes que baixem o aplicativo *Geogebra*, que encontra-se disponível na *Play Store*. Além disso, será necessário o uso de instrumentos de medida como régua e fita métrica.

No primeiro momento é interessante que o professor deixe que os estudantes escolham livremente um objeto para ser medido, contanto que o mesmo tenha sombra e que seja perpendicular ao plano horizontal em que se encontra. O professor deverá propor aos estudantes que escolham um objeto presente no espaço escolar, em seguida deverão medir o comprimento desse objeto e o comprimento de sua sombra, fazendo os devidos registros no caderno ou outra fonte. Após todos os estudantes obterem as medidas, o professor deverá solicitar que realizem a divisão da medida do comprimento do objeto pela medida da sombra, em seguida a divisão inversa.

Sugerimos que os estudantes representem as situações através de um triângulo que poderá ser construído no caderno ou no Geogebra, porém é interessante que tanto o professor quanto os estudantes conheçam previamente o aplicativo. Após a construção dos triângulos o professor deverá solicitar que os alunos digitem na caixa de entrada do aplicativo a função $\arctg(\arctangente)$ utilizando separadamente os resultados obtidos nas divisões entre as medidas. O professor poderá fazer no quadro uma tabela com as informações obtidas durante os momentos, em seguida propor alguns questionamentos que suscitarão algumas discussões, como por exemplo, qual ao valor obtido da soma $\arctg\left(\frac{\text{objeto}}{\text{sombra}}\right) + \arctg\left(\frac{\text{sombra}}{\text{objeto}}\right)$. Espera-se que a turma perceba que a soma resultará em um valor muito próximo de 90° , a partir desta

percepção o professor terá a oportunidade de explicar para a turma que as parcelas da soma indicada anteriormente, correspondem aos ângulos agudos do triângulo retângulo desenhado por eles. O professor pode perguntar qual seria o resultado obtido ao somar todos os ângulos do triângulo, sabendo-se que um deles necessariamente mede 90° . Espera-se que os estudantes concluam que a soma corresponde a 180° .

Utilizando um dos triângulos elaborados pelos estudantes, o professor poderá iniciar a apresentação das funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente). É interessante que sejam as razões obtidas na atividade sejam relacionadas com a tangente do ângulo, além de explicar que a função arcotangente corresponde a função inversa da tangente. Em um momento oportuno deve ser retomado o estudo das funções trigonométricas inversas, fazendo o devido aprofundamento do tema. A seguir descrevemos um exemplo, com o intuito de nortear o leitor.

Passo 1:

Dado uma garrafa cujo comprimento e sombra medem 19 cm e 12,5 cm. Na caixa de entrada do aplicativo geogebra, deve-se digitar o comando $\text{arctg}(x)$, sendo x a razão entre as medidas obtidas no passo anterior. O procedimento deve ser realizado duas vezes, invertendo-se a ordem das frações.

Figura 23 – Janela de visualização



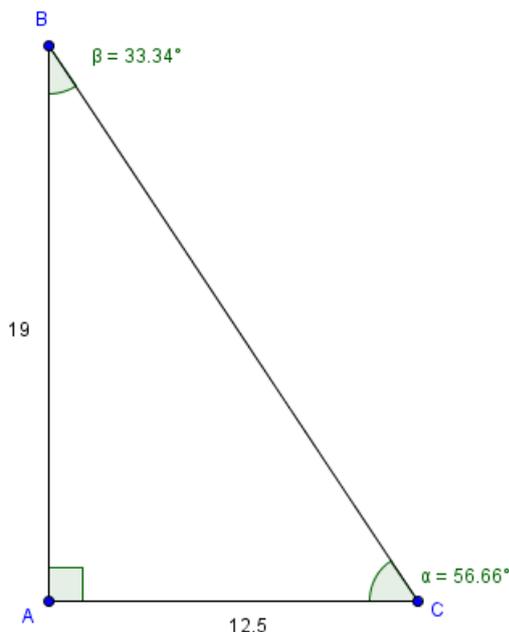
Fonte: Autor, 2020.

A atividade desenvolvida aborda somente a operação de tratamento, cujo custo cognitivo é inferior em relação as situações que envolvem a conversão entre registros, sendo assim espera-se que a maior parte dos estudantes tenha êxito.

Passo 2:

Com as medidas obtidas anteriormente, construímos um triângulo retângulo, de modo que os catetos representam o objeto e sua sombra.

Figura 24 – Triângulo



Fonte: Autor, 2020.

Sugerimos que o triângulo seja construído manualmente, utilizando-se régua e compasso, e posteriormente no Geogebra. Desse modo os estudantes podem comparar os valores encontrados e analisar o grau de precisão.

Passo 3:

Comparando as etapas anteriores, conclui-se que os valores obtidos no Passo 1 correspondem aos ângulos agudos do triângulo construído no Passo 2. Além disso, constata-se que os ângulos α e β são complementares. A partir das construções, o professor pode dar continuidade ao estudo das funções trigonométricas.

5.2 Atividade 2: Estudo das marés

TEMA: Funções periódicas e marés

CARGA HORÁRIA: 2 horas-aula

OBJETIVOS: Associar o comportamento das marés com as funções trigonométricas, identificando suas características (ponto de máximo, mínimo, amplitude e período).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Nesta atividade propomos o estudo do comportamento das marés, relacionando com as funções trigonométricas. Portanto, sugerimos que a turma já conheça as funções seno e cosseno, inclusive as representações gráficas. Para a realização da proposta, recomenda-se que a turma tenha conexão à internet (laboratório ou

aparelho de celular), para que sob a orientação do professor acessem o site "tábua de marés". Apresentamos a seguir, alguns caminhos que o professor poderá usar para executar a proposta.

Passo 1:

O professor deve solicitar que os estudantes (individualmente ou em grupo) acessem o site "tábua de marés" e localizem a tabela de marés.

Figura 25 – Tabela de marés

TÁBUA DE MARÉS		SALVADOR											
		abril de 2020											
DIA			MARÉS DE SALVADOR								COEFICIENTE	ATIVIDADE MÉDIA	
			1ª MARÉ		2ª MARÉ		3ª MARÉ		4ª MARÉ				
1 Qua		▲ 5:39 ▼ 17:36	2:47	0,7 m ▼	9:07	1,6 m ▲	15:27	0,7 m ▼	22:10	1,6 m ▲	37	baixo	
2 Qui		▲ 5:39 ▼ 17:36	4:30	0,7 m ▼	10:56	1,6 m ▲	17:14	0,6 m ▼	23:47	1,7 m ▲	42	baixo	
3 Sex		▲ 5:39 ▼ 17:35	5:59	0,6 m ▼	12:21	1,8 m ▲	18:32	0,5 m ▼			55	médio	
4 Sáb		▲ 5:39 ▼ 17:34	0:54	1,9 m ▲	6:58	0,4 m ▼	13:18	2,1 m ▲	19:26	0,2 m ▼	72	alto	
5 Dom		▲ 5:39 ▼ 17:34	1:44	2,1 m ▲	7:45	0,2 m ▼	14:06	2,3 m ▲	20:13	0,0 m ▼	89	alto	
6 Seg		▲ 5:39 ▼ 17:33	2:28	2,3 m ▲	8:29	0,0 m ▼	14:50	2,5 m ▲	20:57	-0,1 m ▼	104	muito alto	
7 Ter		▲ 5:39 ▼ 17:33	3:10	2,4 m ▲	9:11	-0,1 m ▼	15:33	2,6 m ▲	21:40	-0,1 m ▼	113	muito alto	
8 Qua		▲ 5:39 ▼ 17:32	3:52	2,4 m ▲	9:53	-0,2 m ▼	16:16	2,6 m ▲	22:23	-0,1 m ▼	116	muito alto	
9 Qui		▲ 5:39 ▼ 17:31	4:35	2,4 m ▲	10:36	-0,2 m ▼	17:00	2,6 m ▲	23:06	-0,1 m ▼	111	muito alto	
10 Sex		▲ 5:39 ▼ 17:31	5:18	2,3 m ▲	11:19	-0,1 m ▼	17:44	2,5 m ▲	23:49	0,1 m ▼	99	muito alto	
11 Sáb		▲ 5:39 ▼ 17:30	6:00	2,2 m ▲	12:03	0,0 m ▼	18:29	2,3 m ▲			84	alto	
12 Dom		▲ 5:40 ▼ 17:30	0:34	0,2 m ▼	6:45	2,1 m ▲	12:50	0,2 m ▼	19:16	2,1 m ▲	67	médio	
13 Seg		▲ 5:40 ▼ 17:29	1:21	0,4 m ▼	7:34	1,9 m ▲	13:42	0,4 m ▼	20:11	1,8 m ▲	51	médio	
14 Ter		▲ 5:40 ▼ 17:28	2:19	0,6 m ▼	8:36	1,7 m ▲	14:51	0,6 m ▼	21:26	1,7 m ▲	39	baixo	
15 Qua		▲ 5:40 ▼ 17:28	3:39	0,8 m ▼	10:05	1,6 m ▲	16:29	0,7 m ▼	23:06	1,6 m ▲	36	baixo	
16 Qui		▲ 5:40 ▼ 17:27	5:17	0,8 m ▼	11:44	1,7 m ▲	18:02	0,7 m ▼			42	baixo	
17 Sex		▲ 5:40 ▼ 17:27	0:27	1,7 m ▲	6:29	0,6 m ▼	12:51	1,8 m ▲	19:02	0,5 m ▼	51	médio	
18 Sáb		▲ 5:40 ▼ 17:26	1:18	1,8 m ▲	7:16	0,5 m ▼	13:35	1,9 m ▲	19:43	0,4 m ▼	60	médio	
19 Dom		▲ 5:40 ▼ 17:26	1:55	1,9 m ▲	7:51	0,4 m ▼	14:10	2,1 m ▲	20:15	0,3 m ▼	69	médio	
20 Seg		▲ 5:40 ▼ 17:25	2:26	2,0 m ▲	8:22	0,3 m ▼	14:41	2,2 m ▲	20:46	0,2 m ▼	76	alto	
21 Ter		▲ 5:41 ▼ 17:25	2:55	2,1 m ▲	8:52	0,2 m ▼	15:12	2,2 m ▲	21:16	0,2 m ▼	82	alto	
22 Qua		▲ 5:41 ▼ 17:24	3:25	2,1 m ▲	9:23	0,1 m ▼	15:43	2,3 m ▲	21:46	0,2 m ▼	84	alto	
23 Qui		▲ 5:41 ▼ 17:24	3:55	2,1 m ▲	9:53	0,1 m ▼	16:14	2,3 m ▲	22:18	0,2 m ▼	85	alto	
24 Sex		▲ 5:41 ▼ 17:23	4:27	2,1 m ▲	10:25	0,2 m ▼	16:46	2,2 m ▲	22:50	0,2 m ▼	83	alto	
25 Sáb		▲ 5:41 ▼ 17:23	4:59	2,1 m ▲	10:57	0,2 m ▼	17:19	2,2 m ▲	23:23	0,3 m ▼	78	alto	
26 Dom		▲ 5:41 ▼ 17:22	5:32	2,0 m ▲	11:31	0,3 m ▼	17:54	2,1 m ▲	23:58	0,4 m ▼	71	alto	
27 Seg		▲ 5:41 ▼ 17:22	6:07	1,9 m ▲	12:08	0,3 m ▼	18:32	2,0 m ▲			62	médio	
28 Ter		▲ 5:42 ▼ 17:21	0:36	0,5 m ▼	6:47	1,8 m ▲	12:51	0,4 m ▼	19:17	1,9 m ▲	53	médio	
29 Qua		▲ 5:42 ▼ 17:21	1:24	0,6 m ▼	7:40	1,7 m ▲	13:48	0,6 m ▼	20:18	1,8 m ▲	45	baixo	
30 Qui		▲ 5:42 ▼ 17:20	2:31	0,6 m ▼	8:55	1,7 m ▲	15:10	0,6 m ▼	21:43	1,7 m ▲	42	baixo	

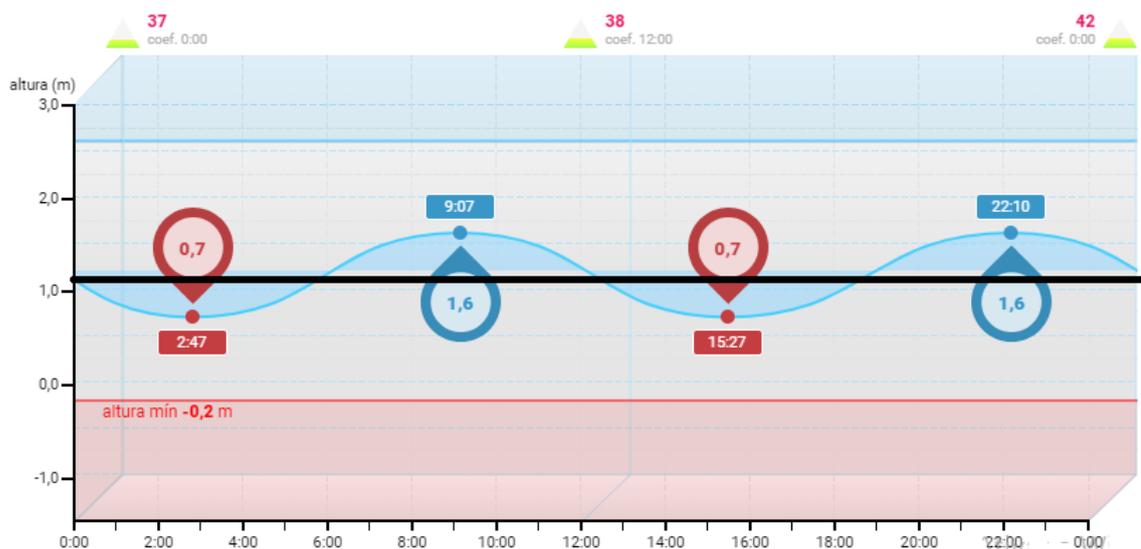
©2020 tabuademares.com

Fonte: Site - Tábua de marés

Passo 2:

Após localizar a tabela, o professor deve orientar que os estudantes cliquem em um dia específico do mês. O usuário será redirecionado para uma nova página, na qual terá acesso à um gráfico que descreve as condições marítimas de uma região no intervalo de 24 horas.

Figura 26 – Gráfico de marés



Fonte: Site - Tábua de marés

A partir do gráfico, os estudantes podem perceber o comportamento periódico das marés fazendo a associação com as funções trigonométricas (seno e cosseno). O professor pode solicitar que os estudantes identifiquem as marés altas e baixas, relacionando-as com os pontos de máximo e mínimo da função. Ainda é possível visualizar a amplitude média e o período de ocorrência.

Na Figura 26, nota-se que no intervalo de 24 horas houveram duas marés baixas medindo 0,7 m e duas marés altas medindo 1,6 m. O intervalo de tempo entre duas marés consecutivas é de aproximadamente 6 horas, de modo que o período completo é de aproximadamente 12 horas. Cabe ao professor ressaltar que as funções trigonométricas ajudam a modelar fenômenos reais, portanto é comum que tais fenômenos sofram pequenas variações, uma vez que os mesmos são influenciados por fatores externos. Analisando a ocorrência das marés em dias distintos, constata-se que tanto o período quanto a amplitude sofrem pequenas variações.

Passo 3:

Partindo da concepção de Duval (2011), de que a compreensão de um objeto matemático perpassa o reconhecimento e mobilização de diferentes registros do mesmo objeto, propomos como último momento dessa atividade, a construção de um modelo algébrico que descreve aproximadamente o comportamento marítimo estudado previamente. Destacamos que esse

tipo de atividade trata-se de uma conversão entre registros, portanto possui um grau elevado de complexidade e exige maior envolvimento dos estudantes sob orientação do professor. Nessa perspectiva, fazemos a análise do gráfico apresentado na Figura 26. A priori, deve-se ressaltar, tal como posto no Capítulo 3, que a função seno tem a seguinte representação algébrica:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(b(x + c)) + d.$$

Os coeficientes que compõem o registro algébrico são denominados unidades significantes (Duval, 2011). Para que ocorra a conversão entre os registros de representação de um objeto e conseqüentemente sua apreensão é necessário que as unidades significantes sejam bem discriminadas. Em outras palavras o indivíduo deve identificá-las e reconhecer as mudanças ocasionadas em um dado registro a partir da variação dessas unidades. Desse modo, os coeficientes a , b , c e d estão relacionados às transformações sofridas pelo gráfico da função identificadas como dilatação e simetria.

Quadro 1 – Unidades significantes

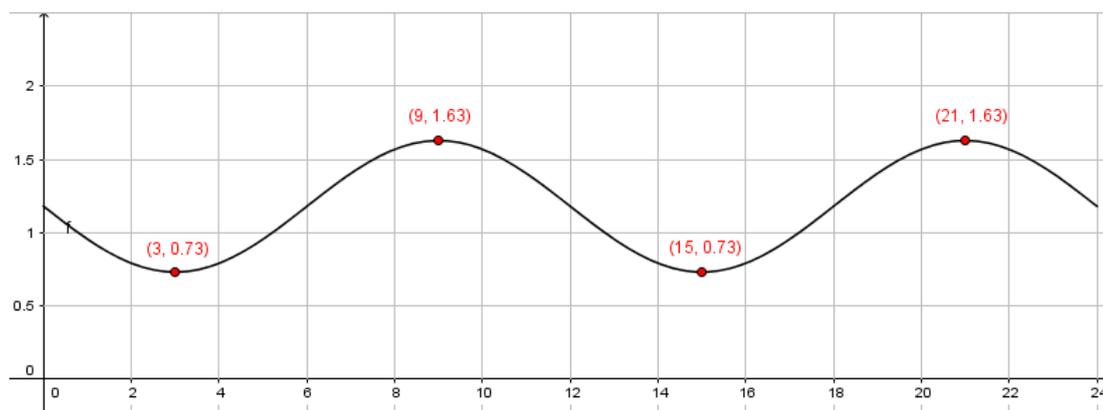
Parâmetros	Variações no gráfico
a	Altera a amplitude da função
b	Altera o período, através da relação $T = \frac{2\pi}{b}$, sendo P o período da função.
c	Translação horizontal
d	Translação vertical

Fonte: Autor, 2020

Analisando a Figura 26, é possível identificar os parâmetros através de estimativas. Verificamos que a curva senoide sofreu uma translação de aproximadamente 1,18 na direção vertical, a amplitude é igual ao valor médio da diferença entre um valor de máximo e mínimo, logo, $a = \frac{1,6 - 0,7}{2} = 0,45$. O coeficiente c pode ser encontrado a partir do deslocamento horizontal sofrido pela curva, visualmente as imagens da função deslocaram-se cerca de 6 unidades para a direita. Como o movimento das marés possui um período de aproximadamente 12 horas, obtemos $b = \frac{2\pi}{12} \cong 0,52$. Utilizando os valores encontrados, chegamos a uma expressão que fornece, com certo grau de precisão, os pontos presentes no gráfico da Figura 26:

$$f(x) = 0,45 \cdot \text{sen}(0,52(x - 6)) + 1,18.$$

Normalmente as atividades presentes nos livros didáticos, que envolvem a conversão entre registros, são organizadas em um único sentido, em outras palavras, os exercícios apresentam algumas funções e solicita que os estudantes façam o esboço dos gráficos. Contudo, Duval (2011) ressalta que as atividades de conversão devem ocorrer nos dois sentidos. Ao propor situações sobre esse tipo de operação, sugerimos que o professor utilize algum recurso, como o Geogebra, para verificar se expressão obtida está correta e fazer as discussões necessárias.

Figura 27 – Gráfico de $f(x)$ 

Fonte: Autor, 2020

Conforme a Figura 27, os extremos da função encontrada coincidem aproximadamente com as condições marítimas presentes na Figura 26. As diferenças existentes decorrem do movimento das marés não serem totalmente uniformes e do fato de os coeficientes terem sido aproximados.

5.3 Atividade 3: Ondas Sonoras e Séries de Fourier

TEMA: Ondas sonoras

CARGA HORÁRIA: 3 horas-aula

OBJETIVOS: Estudar as ondas sonoras através das funções trigonométricas, relacionando as alterações de intensidade e altura com a variação dos parâmetros da função.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Para a realização dessa atividade será necessário o uso do simulador "Fourier: Criando ondas", disponível gratuitamente no site "phet.colorado.edu", portanto os estudantes devem ter acesso a computadores. O simulador é uma extensão Java, que pode ser executado sem a necessidade de internet.

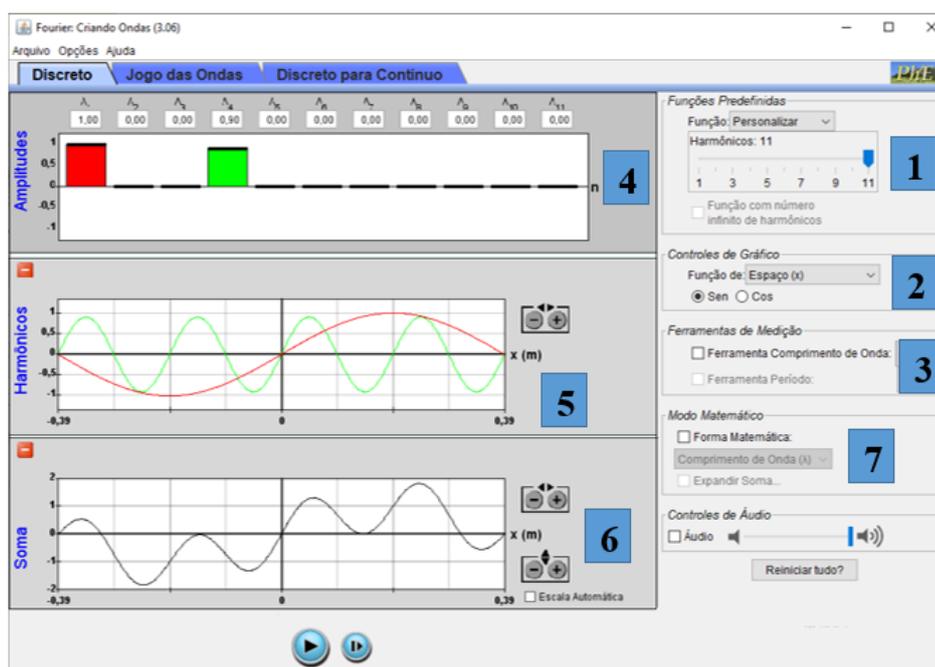
Passo 1:

O professor deverá apresentar a interface do programa, que apresenta os seguintes recursos, tal como disposto na Figura 28

1. Seleção do tipo de função e quantidade de ondas (harmônicos).
2. Seleção da variável da função (espaço, tempo ou espaço e tempo), além da escolha do tipo de função trigonométrica (seno ou cosseno).
3. Habilita a ferramenta de comprimento de onda (quando a variável é o espaço) ou a ferramenta de período (quando a variável é o tempo).

4. Seleção da amplitude da cada harmônico.
5. Visualização gráfica dos harmônicos e seleção da escala dos eixos cartesianos.
6. Visualização gráfica da soma dos harmônicos.
7. Seleção do modelo matemático, evidenciando o comprimento da onda (λ) e o número de ondas (k).

Figura 28 – Fourier: Criando ondas

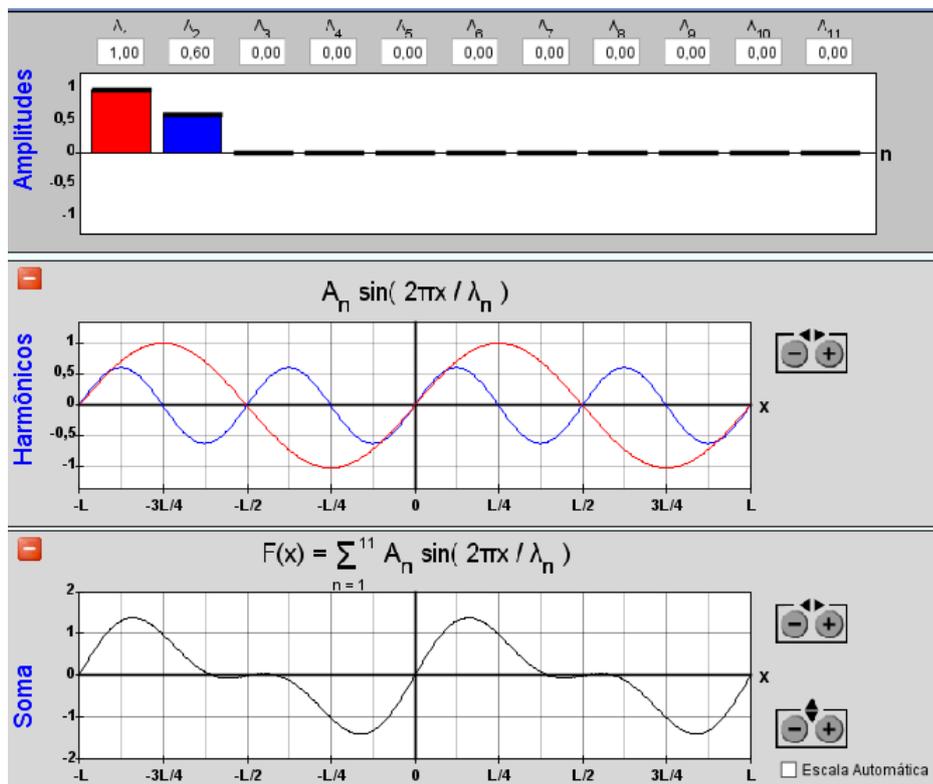


Fonte: Autor, 2020

Passo 2

Sugerimos como atividade a análise da relação entre os tipos de sons harmônicos e as características das curvas que os representam. Como mencionado no Capítulo 4, a altura e intensidade do som estão relacionados respectivamente com o comprimento e amplitude da onda. Na Figura 29, por exemplo, as curvas representam sons distintos, sendo que a vermelha representa um som mais forte que o representado pela azul, pois possui uma amplitude maior. Quanto a altura do som, verifica-se que o representado pela curva azul é mais agudo, dado que seu comprimento é menor. Durante a atividade, o usuário também pode perceber a diferença entre os sons habilitando o áudio.

Figura 29 – Ondas harmônicas



Fonte: Autor, 2020

Passo 3:

Por fim, pode-se propor o estudo dessas ondas na perspectiva da representação algébrica. O Simulador permite a utilização de duas expressões distintas para representar o comportamento da onda, tal como no Quadro 2.

Quadro 2 – Expressões algébricas

Expressões	Parâmetros
$f(x) = A_n \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\lambda_n} \right)$	A_n : Amplitude da n-ésima onda. λ_n : Comprimento da n-ésima onda.
$f(x) = A_n \cdot \text{sen} (k_n x)$	k_n : Grandeza inversamente proporcional ao comprimento da onda, definido por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Fonte: Autor, 2020

A partir da Figura 29, temos que índice $n = 1$ corresponde à curva vermelha e $n = 2$ à curva azul. Sabendo que $A_1 = 1$, $\lambda_1 = L = 2\pi$, $A_2 = 0,6$, $\lambda_2 = \frac{L}{2} = \pi$, obtemos as seguintes expressões, utilizando o primeiro modelo presente no Quadro 2:

$$f(x) = 1 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{2\pi} \right) = \text{sen} (x),$$

$$g(x) = 0,6 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\pi} \right) = \frac{3}{5} \cdot \text{sen} (2x).$$

A Figura 29 apresenta ainda a curva correspondente à soma das ondas citadas anteriormente. Pode-se dizer que os sons cotidianos são ondas complexas formadas pela sobreposição de sons harmônicos. Sugerimos como suporte, a utilização do aplicativo *Sound Analysis Oscilloscope* (Figura 30).

Figura 30 – Sound Analysis Oscilloscope



Fonte: Autor, 2020

O aplicativo fornece o comprimento da onda (m), a frequência (Hz) e o período (s), a partir de sons externos. Uma proposta interessante é o professor solicitar que os estudantes capturem sons distintos e os comparem por meio das informações fornecidas pelo aplicativo e promova uma discussão, relacionando as curvas obtidas tanto pelo *app* quanto pelo simulador.

5.4 Atividade 4: Movimento de translação

TEMA: Movimento periódico dos planetas

CARGA HORÁRIA: 3 horas-aula

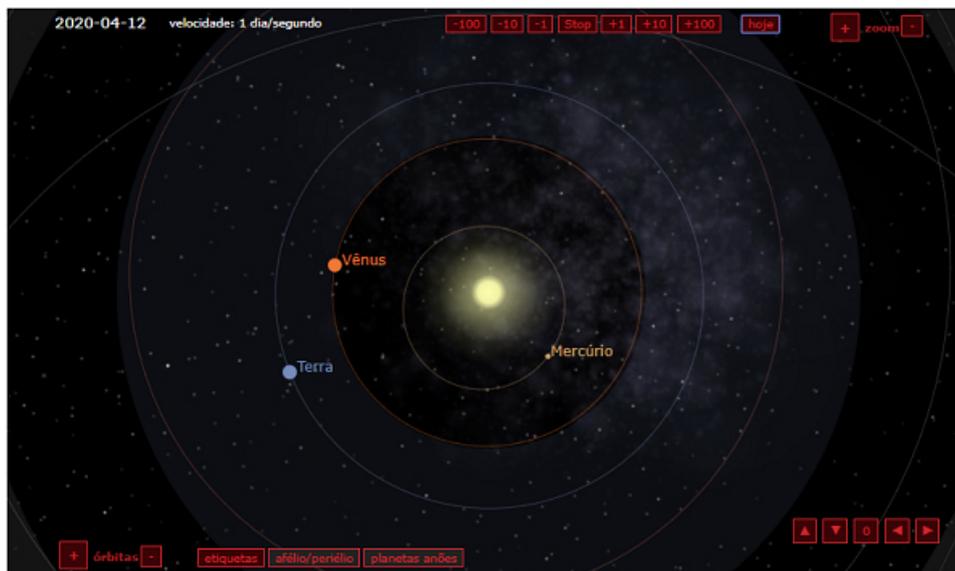
OBJETIVOS: Descrever o movimento de translação dos planetas, através de uma função trigonométrica.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Nesta atividade propomos a análise do movimento de translação dos planetas, sob a ótica das funções trigonométricas. Sabe-se atualmente que os planetas descrevem uma órbita quase elíptica em torno do Sol (que encontra-se em um dos focos), executando um movimento periódico denominado translação. Além disso esses corpos possuem períodos de translação distintos. A partir do exposto, apresentaremos um método para encontrar, com certo grau de precisão, a função que descreve tal movimento. Inicialmente, devemos construir uma elipse que representa o movimento executado pelo planeta, para isso utilizaremos as informações presentes no site "astronoo"¹. Ressaltamos que não faz parte do nosso objeto de estudo, o aprofundamento das cônicas, ficando este a critério do professor.

Passo 1:

Para realização dessa atividade é necessário a utilização do Geogebra e do site citado anteriormente. O professor deverá solicitar que os estudantes acessem a página e escolham um planeta para analisarem (é interessante que cada grupo fique responsável por um planeta). No site, é possível visualizar um simulador que contém as órbitas descritas pelos astros do sistema solar, bem como, algumas informações (periélio, afélio, excentricidade, entre outras.)

Figura 31 – Simulador Astronoo



Fonte: Site - Astronoo

Passo 2:

Construiremos uma elipse que representa o movimento de translação efetuado pela terra, a partir dos dados fornecidos pelo simulador. A órbita terrestre possui excentricidade de

¹ <http://www.astronoo.com/pt/artigos/posicoes-dos-planet.html>

aproximadamente 0,017; Periélio² $\cong 147,1 \cdot 10^6$ Km e afélio³ $\cong 152,1 \cdot 10^6$ Km. Para construir a elipse no Geogebra, são necessários três pontos, que podem ser obtidos por meio das relações a seguir.

$$e = \frac{c}{a},$$

$$e a = \frac{P + A}{2},$$

Onde: e é a excentricidade da elipse,

c é a semi-distância foca,

a é o semi-eixo maior,

P é o periélio terrestre,

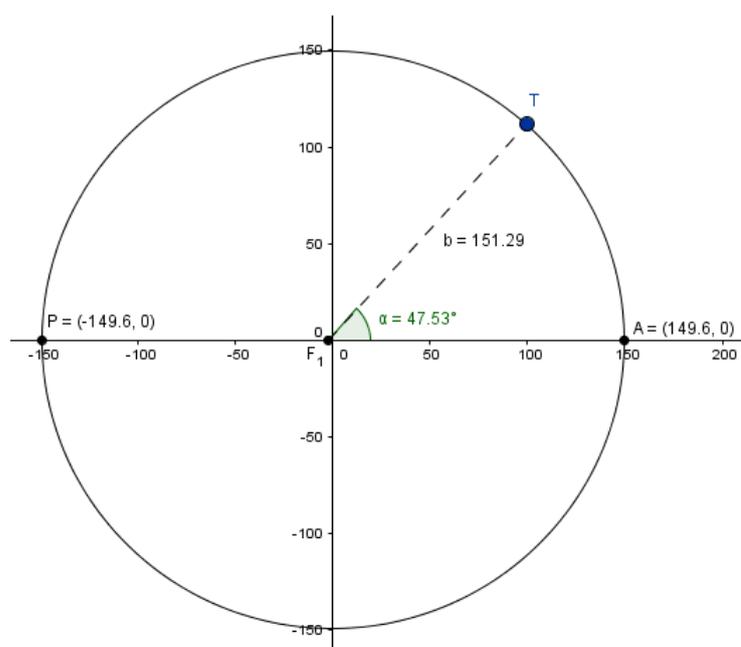
A é o afélio terrestre.

A partir das relações anteriores, obtemos: $a \cong 149,6 \cdot 10^6$, $c \cong 2,54 \cdot 10^6$ e $e \cong 0,017$. Representaremos tais valores no plano cartesiano, através dos pontos: $A = (149,6, 0)$, $P = (-149,6, 0)$ e $F_1 = (-2,54, 0)$.

Passo 3:

Utilizando os pontos determinados no passo anterior, construiremos uma elipse de modo que o Sol será representado pelo foco F_1 e a Terra pelo ponto T (Figura 32). Como a excentricidade do movimento terrestre é relativamente pequena, a elipse tem um aspecto semelhante a uma circunferência.

Figura 32 – Representação do movimento terrestre



Fonte: Autor, 2020

² Ponto da órbita de um corpo, que está mais próximo do Sol

³ Ponto da órbita de um corpo, que está mais distante do Sol

Passo 4:

Pretendemos encontrar uma função que relacione o ângulo $\widehat{AF_1T}$ com a distância entre a Terra e o Sol. Para isso usaremos a ferramenta de regressão (análise bivariada) do *Geogebra*, que fornece a lei de formação de uma função a partir de alguns pontos. Nota-se que os valores de b e α variam a medida que movemos o Ponto T ao longo da elipse (simulando o movimento terrestre), alguns desses valores estão indicadas na planilha, de modo que as colunas A e B correspondem, respectivamente ao ângulo α e a distância entre a Terra e o Sol (Figura 33).

Figura 33 – Planilha

	A	B
1	0	152.14
2	44.32	151.4
3	66.4	150.58
4	128.5	147.99
5	154.9	147.31
6	180	147.06
7	209.35	147.38
8	268.28	149.48
9	297.06	150.74
10	345.3	152.05

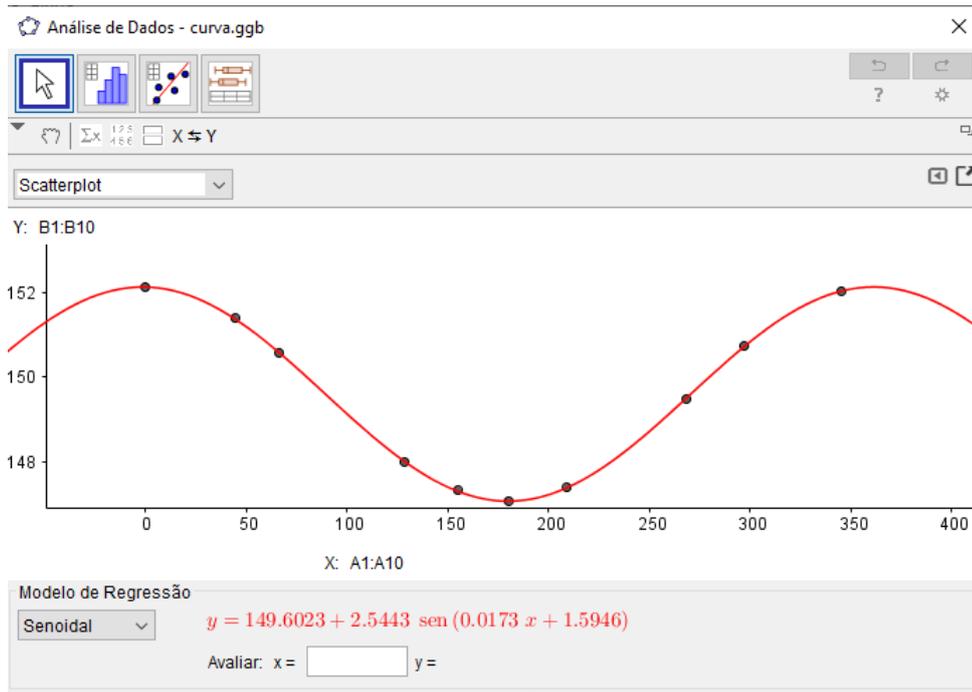
Fonte: Autor, 2020

Para visualizar a planilha, basta clicar no botão "Exibir", em seguida "Planilha". Durante seu preenchimento, o professor pode definir previamente o número de pontos a serem utilizados. Lembramos que o modelo torna-se mais preciso, a medida que aumentamos a quantidade de pontos.

Passo 5:

Após o preenchimento da planilha, devemos selecionar os elementos e clicar em "análise bivariada". Em seguida aparecerá uma nova janela, contendo a distribuição dos pontos na qual selecionaremos o modelo senoidal através do comando "modelo de regressão".

Figura 34 – Janela: análise de dados

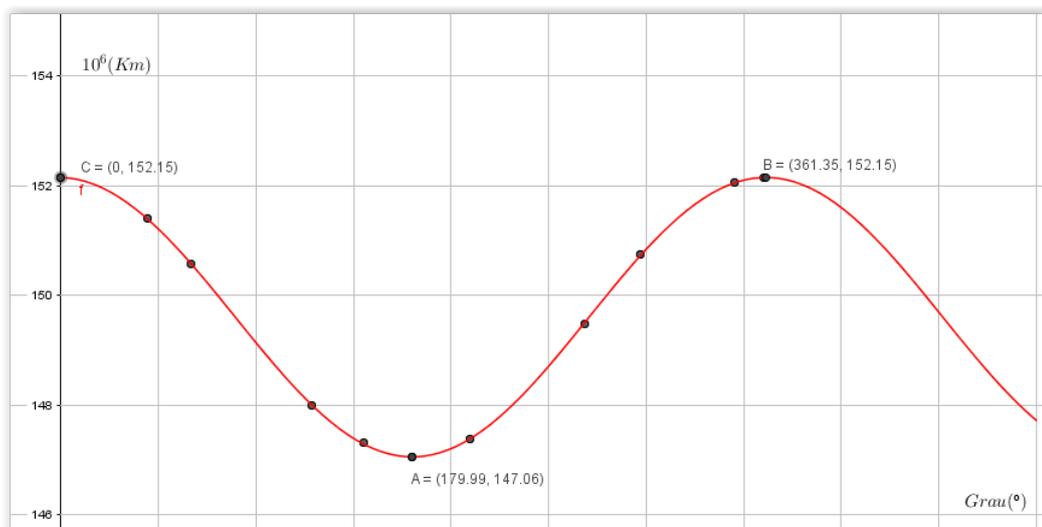


Fonte: Autor, 2020

Passo 6:

A fim de analisar a função encontrada, exportamos o gráfico para a janela de visualização e determinamos seus pontos de máximo e mínimo utilizando o comando "Extremo[< Funcao > , < ValordexInicial > , < ValordexFinal >]" no intervalo [0, 360].

Figura 35 – Gráfico da função.



Fonte: Autor, 2020

Durante as discussões é interessante o professor propor que estudantes relacionem os extremos da função encontrada com o afélio (máximo da função) e periélio (mínimo da função). Recomendamos que sejam reservados momentos para a análise dos conjuntos domínio e imagem das funções abordadas nas atividades.

É importante frisar que, assim como na Atividade 2, os modelos encontrados são aproximações dos fenômenos estudados e portanto podem haver pequenas variações entre os valores assumidos pelas funções e os dados coletados.

6 Considerações Finais

O Processo educacional está atrelado ao contexto e período nos quais os participantes estão inseridos. No atual contexto, é exigido do professor que motive o estudante e o leve a desenvolver as competências e habilidades necessárias para sua atuação em sociedade, para isso é necessário que o espaço escolar seja dinâmico e proporcione ao estudante o desenvolvimento da curiosidade, a construção de saberes e estratégias que auxiliam na intervenção da realidade. Portanto, os estudantes devem utilizar conceitos e procedimentos não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever fenômenos, selecionar modelos matemáticos mais adequado ao problema.

Levando em consideração os trabalhos consultados, a BNCC, bem como as inferências oriundas da prática docente, é evidente que o ensino voltado para a contextualização se apresenta como um encaminhamento que facilita o alcance dos objetivos citados no parágrafo anterior. Ressaltamos a importância dos recursos digitais (aplicativos, *softwares* educacionais e ferramentas de pesquisa) para a realização de propostas de ensino contextualizadas. Tais recursos otimizam o tempo disponível, ao mesmo tempo que aproximam os estudantes do problema em estudo, através da visualização ou da manipulação, além disso, existe uma descentralização das ações na sala de aula, o professor passa a ser um mediador do processo de ensino-aprendizagem.

Propostas pautadas em situações práticas abrem um leque para inúmeras discussões com os estudantes, a medida que o professor apresenta as relações matemáticas é possível constatar sua validade utilizando dados do próprio "experimento". Desse modo, abordar as funções trigonométricas de forma contextualizada possibilita ao estudante uma inter-relação com as demais áreas do conhecimento. Ressaltamos que um trabalho voltado para esse tipo de abordagem não descarta o emprego adequado da linguagem matemática e o estudo dos objetos matemáticos, o professor deve ficar atento para a utilização das representações desses objetos e incentivar os estudantes a empregarem de forma correta, como preconiza a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Esperamos que o presente trabalho possa contribuir para a prática docente de outros professores e servir como material de consulta para os estudantes interessados pelo tema. Destacamos que não tivemos o objetivo de esgotar todas as possibilidades de atividades e exemplos de fenômenos periódicos, e sim propor algumas alternativas que possam reforçar a aprendizagem das funções trigonométricas. Infelizmente, as aulas (do primeiro trimestre de 2020) foram suspensas antes da aplicação das atividades propostas, porém reforçamos o interesse em validar este trabalho com os estudantes e abrir espaço para novas pesquisas.

Referências

ALMEIDA, Luciano Godinho. Expressões Algébricas Exatas para Funções Trigonômétricas. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus / Ba, 2013. Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160276D.pdf>. Acesso em: 11 maio 2020.

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini. Tecnologia na escola: criação de redes de conhecimentos. 2008. Disponível em: http://penta3.ufrgs.br/MEC-CicloAvan/integracao_midias/modulos/1_introdutorio/pdf/texto_Tecnologia_escola.pdf. Acesso em: abril de 2020.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 3. ed. Campinas, SP: Papyrus, 2007, p. 125-147. (Coleção Papyrus Educação).

BOMFIM, Juliana Cristina dos Reis. Estudo das funções trigonométricas com o auxílio de softwares computacionais. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados-MS, 2013. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=44616. Acesso em: 11 maio 2020.

BONJORNO, Jose Roberto et al. Física: historia e cotidiano. Sao Paulo: Ftd, 2003.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRITO FILHO, Agenor Ferreira de. Estudo para resolução de problemas de otimização envolvendo funções trigonométricas. 2016. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2016. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170460554. Acesso em: 10 maio 2020.

BRUGINSKI, William Jose. Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software GeoGebra para o estudo de funções trigonométricas. 2014. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=32240. Acesso em: 10 maio 2020.

- CAJUELA, Renata Ferreira. Funções Trigonométricas. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2013. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=28792. Acesso em: 10 maio 2020.
- CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. A história da trigonometria. In: CARMO, Manfredo Perdigão do. Trigonometria/Números Complexos. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Cap. 9.
- COSTA, Tiago Bezerra da. Funções Trigonométricas com o auxílio do GeoGebra. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2019. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160570721. Acesso em: 10 maio 2020.
- DEPIZOLI, Carlos Antônio. Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas. 2015. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=74225. Acesso em: 09 maio 2020.
- DUARTE FILHO, Sandro Rogério de Abreu. Uma abordagem do ensino de funções trigonométricas por meio de atividades interdisciplinares. 2017. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes - Rj, 2017. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150461253. Acesso em: 10 maio 2020.
- DUVAL, Raymond. Semiósis e Pensamento Humano, Registros semióticos e aprendizagens intelectuais-Tradutores-Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira-São Paulo. Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2005. p. 11-34.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003, p.11- 33.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 5, p. 37-65, 1993.
- FERRARO, Nicolau Gilberto. Ondas. 2010. Disponível em: <http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/11/resolucao-de-preparando-se-para-as.html>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- FERREIRA, André Luiz dos Santos. Trigonometria e funções trigonométricas, uma abordagem didático metodológica. 2016. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=128. Acesso em: 10 maio 2020.

- FERREIRA, Edhana das Graças. Uma Proposta Metodológica Para o Ensino de Gráficos de Funções Trigonométricas. 2017. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, Rj, 2017. Disponível em: https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150510084. Acesso em: 11 maio 2020.
- GERALDI, Luciana Maura Aquaroni; BIZELLI, José Luís. Tecnologias da informação e comunicação na educação: conceitos e definições. Revista on line de Política e Gestão Educacional, n. 18, 2015. Disponível em: <https://periodicos.fclar.unesp.br/rpge/article/view/9379>. Acesso em: Abril de 2020.
- KENSKI, V. M. Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação. Campinas - SP: Papirus, 2011.
- MADUREIRA JÚNIOR, Ismael Soares. Funções trigonométricas sob a ótica das vibrações mecânicas: uma motivação a mais. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, 2019. Disponível em: https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170870159. Acesso em: 11 maio 2020
- MAGALHÃES, Antônio Carlos Oliveira de. Utilizando GeoGebra em Sala de Aula no Estudo de Transformações Aplicadas às Funções Trigonométricas. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27586. Acesso em: 10 maio 2020.
- MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Registros de representação semiótica e práticas discursivas no ensino do conceito de função. In: BRANDT, C. F. (org.), MORETTI, M. T. (org.). As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 89-112.
- MAIA, Joaildo. O ensino de funções trigonométricas através do software geogebra. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caico - Rn, 2013. Disponível em: https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=28728. Acesso em: 11 maio 2020.
- MARQUES, Gil da Costa. Movimento Harmônico Simples. In: CASARO, Beatriz Borges (org.). Dinâmica do Movimento dos Corpos. 11. ed. São Paulo: Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada (cepa) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (usp), 2012. Cap. 11. p. 250-277. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/60251296/texto-base-11>. Acesso em: 02 fev. 2020.
- MARVILA, Mayck Gomes. Música e funções trigonométricas: uma abordagem interdisciplinar. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual

- do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes - Rj, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170460554. Acesso em: 10 maio 2020.
- MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. *Contrapontos*, Itajaí, v.2, n. 6, p.344-362, set/dez. 2002. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicampi.br/ppec/>. Acesso em: 27 dez 2019.
- MORETTI, M.T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. *Portal de Periódicos Eletrônicos Científicos da UNICAMP*, 2008.
- MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria: coleção profmat*. Rio de Janeiro: Sbm, 2013.
- NASCIMENTO, Franciel Araújo do. *Funções trigonométricas complexas: uma abordagem voltada para o ensino médio*. 2015. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, Rr, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=78835. Acesso em: 10 maio 2020.
- NEGRINI, Patrícia Luiz. *Aplicações de equações diferenciais em sistemas oscilantes*. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/94988/Patrícia_Luiz_Negrini.PDF?sequence=1.%20. Acesso em: 15 março de 2020.
- NEIVA, Ramon da Silva. *O ensino da matemática e as novas tecnologias digitais : a aprendizagem das funções trigonométricas com o auxílio do aplicativo photomath*. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas ? Bahia, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170140282. Acesso em: 10 maio 2020.
- NIVEN, Ivan. *Números racionais e irracionais*. Tradução de Renate Watanabe. - Rio de Janeiro: SBM, 1990. 175 p.
- OLIVEIRA, Adriana Tenir Egéa de. *Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática*. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá - MT, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170310374. Acesso em: 10 maio 2020.
- OLIVEIRA, Luiz Fernando Mosolino de. *Funções Trigonométricas*. 2016. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2016. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=84975. Acesso em: 10 maio 2020.
- PIRES JUNIOR, Expedito. *Ensino das funções trigonométricas baseado na resolução de problemas cotidianos e o uso da técnica ?stop motion?*. 2017. Dissertação

- (Mestrado) - PROFMAT, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2017. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150400211. Acesso em: 11 maio 2020.
- PONTE, J.P. O conceito de função no currículo de Matemática. Revista: Educação e Matemática, APM: Portugal, n.15, 1990. p.3-9. SCHOEN, H.L. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A.F.;SHULTE, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. Tradução de Hugino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.
- PRADO, Flávio Brito. Ensino de gráficos de funções trigonométricas e uma aplicação em música. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, -instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 2013. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=34399. Acesso em: 10 maio 2020.
- RODRIGUES, Michelangelo dos Santos. Relacionando as funções trigonométricas com música. 2017. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150221988. Acesso em: 11 maio 2020.
- SANTOS, Fabiano J. Introdução às séries de Fourier. Disponível em: http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf. Acesso em: 23 de fev. 2020.
- SANTOS, Gabriel Velloso Henriques dos; EFFGEN, Luiz Fabiano. Fenômenos Cíclicos - Modelagem com funções trigonométricas. 2018. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2018. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150631116. Acesso em: 10 maio 2020
- SCHOEN, H.L. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A.F.;SHULTE, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. Tradução de Hugino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.
- SERRANO, SERGIO ANTOUN. Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos: Relógio de Pêndulo e Engrenagens. 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/sergio_serrano.pdf. Acesso em: Abril de 2020.
- SILVA, Evandro Alves da. O ensino de funções trigonométricas com o auxílio do GeoGebra. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro-BA, 2013. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=29449. Acesso em: 09 maio 2020.
- SILVA, Fábila Valéria de Jesus. Explorando as ondas trigonométricas através do desenvolvimento de animações em python, usando o raspberry pi como tecnologia de suporte. 2018. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual do

- Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista - Bahia, 2018. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150120359. Acesso em: 09 maio 2020.
- SILVA, Gilberto José da. Reflexões sobre o trabalho docente no ensino do conteúdo: funções trigonométricas. 2015. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal de Viçosa, Viçosas - Minas Gerais, 2015. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=79697. Acesso em: 10 maio 2020.
- SILVA, Ronildo Cavalcante da. A construção de um aplicativo no Microsoft Excel como ferramenta mediadora do ensino de funções trigonométricas na unidade escolar professor Abelardo Pereira, em Brejo do Piauí. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Floriano-PI, 2019. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171000281. Acesso em: 11 maio 2020.
- SIMOES, Christian. Astronoo: o universo em todas as suas formas. O universo em todas as suas formas. 2013. Disponível em: <http://www.astronoo.com/pt/>. Acesso em: 02 fev. 2020.
- SOARES, Ana Catarina. Som e características do som: frequência, amplitude e timbre. Frequência, Amplitude e Timbre. 2011. Disponível em: <https://anasoares1.wordpress.com/2011/01/31/SOM-E-CARACTERISTICAS-DO-SOM-FREQUENCIA-AMPLITUDE-E-TIMBRE/>. Acesso em: 05 out. 2019.
- SOUSA, Jose Alberto de Oliveira. Funções Trigonométricas Matriciais. 2019. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2019. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/11588/2/JOSE_ALBERTO_OLIVEIRA_SOUSA.pdf. Acesso em: 10 maio 2020.
- SOUSA, Juliana Malta de. Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis. 2016. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94846. Acesso em: 11 maio 2020.
- SOUZA ALVES, George; SOARES, Adriana Benevides. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: Anais do Workshop de Informática na Escola. 2003. p. 175-186. Disponível em: <https://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/786>. Acesso em: Abril de 2020.
- SOUZA JÚNIOR, Flávio Ribeiro de. Ensino de funções trigonométricas com applets. 2018. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes - RJ, 2018. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150460711. Acesso em: 10 maio 2020.

- SOUZA, Jakson Ideronaldo Gonzaga de. Utilização do software GeoGebra no ensino das funções trigonométricas. 2014. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=734. Acesso em: 10 maio 2020.
- SOUZA, Leila Maria Salomão de. Uma Proposta de Estudo de Funções Trigonômétricas e Suas Inversas Através do GeoGebra. 2015. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas - Bahia, 2015. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=83918. Acesso em: 10 maio 2020.
- TÁBUA DE MARÉS. TÁBUA DE MARÉS E SOLUNARES DE PESCARIA. Disponível em: <https://tabuademares.com/>. Acesso em: 17 mar. 2020.
- TAJRA, S. F. Informática na Educação. São Paulo: Érica, 2012.
- TAVARES, Wellington Silva. O Ensino das Funções Trigonômétricas com o Auxílio do Software Matemático de Ambiente Gráfico WINPLOT. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=38882. Acesso em: 10 maio 2020.
- TORMA, Luciano da Silva. Funções Trigonômétricas no Ensino Médio: Construindo uma Paisagem Utilizando o Software Graphmatica. 2018. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande - Rio Grande do Sul, 2018. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160680101. Acesso em: 09 maio 2020.