UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRAÇÕES DECIMAIS PERIÓDICAS E SUAS REPRESENTAÇÕES

REGINALDO VANDRÉ MENEZES DA MOTA

RIO DE JANEIRO
2020

Reginaldo Vandré Menezes da Mota

FRAÇÕES DECIMAIS PERIÓDICAS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador:Silas Fantin
Professor Doutor em Matemática
Unirio

Rio de Janeiro
2020

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

M917 Menezes da Mota, Reginaldo Vandré
Frações decimais periódicas e suas representações / Reginaldo Vandré Menezes da Mota. -- Rio de Janeiro, 2020.
79 f

Orientador: Silas Fantin.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Dízimas periódicas. 2. Bases numéricas. 3. Divisibilidade. 4. Números racionais. I. Fantin, Silas , orient. II. Título.

Reginaldo Vandré Menezes da Mota

FRAÇÕES DECIMAIS PERIÓDICAS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovada em 05 de março de 2020

BANCA EXAMINADORA

Silas Fantin

Prof. Silas Fantin – Orientador

UNIRIO

Luzia da Costa Tonon Martarelli

Profª. Luzia da Costa Tonon Martarelli

UNIRIO

Francisco Roberto Pinto Mattos

Prof. Francisco Roberto Pinto Mattos

UERJ

Rio de Janeiro
2020

Dedico este trabalho ao meu amado pai e amigo, que mesmo não estando mais entre nós, sempre foi um grande incentivador em minha trajetória.

RESUMO

Sabemos da grande vantagem prática de realizarmos operações aritméticas com frações decimais e ao transformamos uma fração ordinária irredutível em decimal geramos uma fração decimal exata ou uma dízima periódica (simples ou composta) dependendo da relação estabelecida do denominador com a base 10.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar que este resultado continua válido quando estendido para uma base b qualquer. Além disso, iremos abordar como operar em uma base b qualquer e refletir sobre algumas questões básicas tais como: paridade e finitude da representação.

Apresentamos uma seleção de possíveis atividades a serem implementadas em sala de aula para consolidar o conteúdo abordado no ensino básico.

Palavras-chave: dízimas periódicas; bases numéricas, divisibilidade; números racionais.

ABSTRACT

We know the great practical advantage of performing arithmetic operations with decimal fractions and by transforming an irreducible ordinary fraction to decimal, we generate an exact decimal fraction or a periodic tithe (simple or compound) depending on the relationship established between the denominator and the base 10.

The main objective of this work is to show that this result remains valid when extended to any base b. In addition, we will discuss how to operate on any basis and reflect on some basic issues such as: parity and finitude of representation.

We present a selection of possible activities to be implemented in the classroom to consolidate the content covered in basic education.

Keywords: periodic tithes; numerical bases, divisibility; rational numbers.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tornar possível a realização deste sonho.

Agradeço aos meus pais Raulino (*in memoriam*) e Gessi bem como minha esposa Luciana e filhas Yasmin, Isadora e Ísis por suportarem minha ausência nas sextas feiras e isolamento em inúmeros fins de semanas para estudo.

Agradeço ao Professor Silas Fantin, pela orientação, competência, profissionalismo, dedicação. Tantos foram os encontros e por mais que em algumas vezes chegasse desestimulado, bastava alguns minutos de conversa e umas poucas palavras de incentivo e lá estava eu novamente com o ânimo renovado. Seu mantra muitas vezes repetido sempre esteve em minha mente nos momentos de desânimo: “TUDO VAI DAR CERTO!!!”. Tenho a absoluta certeza que jamais chegaria neste ponto sem o seu apoio. Hoje posso afirmar que fostes em muitas ocasiões mais do que um orientador e tenho a plena convicção que para mim serás um Mestre e Amigo.

Agradeço aos professores do PROFMAT – UNIRIO por todo carinho ofertado bem como conhecimentos compartilhados e sempre dispostos a ajudar.

SUMÁRIO

Introdução

A priori, farei um breve relato sobre minha experiência até a chegada ao Profmat. Graduado com licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, Especialização em Educação Matemática pela UNISUAM. Como docente atuei em diversas escolas particulares, cursos pré-militares, pré-vestibulares, rede estadual do Rio de Janeiro, em que fiz parte da equipe de elaboração do Currículo Mínimo de Matemática, dos Cadernos de Matemática do Mais Educação e dos Cadernos de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada de Matemática. Atualmente dedico-me exclusivamente como Professor na Educação Básica no Instituto Nacional de Educação de Surdos.

Desta forma, conforme estudos e aplicações observa-se que após a publicação do autor holandês Simon Stevin (em 1585) sobre Aritmética, verifica-se a importância das frações decimais. É fácil escrevê-las, compará-las bem como mais fácil realizar com elas as operações aritméticas usuais do que efetuar as mesmas operações com frações ordinárias (principalmente somar e subtrair). Podemos mesmo dizer, sem cometer exagero, que o uso das frações decimais foi um grande fator de progresso para a Astronomia, para a Navegação e, consequentemente, para a Humanidade, de maneira geral. Para esse uso fez-se necessário encontrar um meio de representar qualquer fração sob forma decimal.

Uma fração decimal é, por definição, uma fração (ordinária) cujo denominador é uma potência de 10. As dízimas periódicas surgiram como um recurso para socorrer a quem procura realizar a tarefa "impossível" de transformar certas frações ordinárias, como 1/3 ou 5/11 em frações decimais.

As propriedades das dízimas periódicas são estabelecidas a partir do algoritmo da divisão prolongada, usado para transformar uma fração ordinária em decimal, onde uma fração ordinária irredutível p/q com $q \neq 0$, quando transformada em decimal gera:

i. **Uma fração decimal exata** (finita) quando q é de forma $2^m \cdot 5^n$;
ii. **Uma dízima periódica simples** quando q é primo com 10;
iii. **Uma dízima periódica composta** quando q for divisível por 2 ou por 5 e, além disso, por outro número primo.

A principal finalidade desse trabalho é mostrar que o resultado continua válido para uma base b qualquer, isto é, dada uma fração ordinária irredutível p/q, $q \neq 0$, as expansões da fração ordinária irredutível no sistema posicional de base b gera:

i. **Uma representação finita**, quando q não possui fatores primos diferente dos fatores de b;
ii. **Uma dízima periódica simples** quando q é primo com b;
iii. **Uma dízima periódica composta** quando q for divisível por alguns dos fatores de b e por um fator m primo com q.

A organização deste trabalho foi sistematizado em cinco capítulos, onde estes são precedidos de uma introdução esclarecendo o que será tratado em cada um deles e exemplos com problemas resolvidos mostrando as mais diversas formas de abordagem dos conteúdos trabalhados em cada capítulo.

No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais de teoria dos números nos quais foram baseados os assuntos abordados nesta dissertação.

No capitulo 2, apresentamos os sistemas de numeração conhecido como Teorema das bases, que é uma aplicação sucessiva do algoritmo da divisão euclidiana bem como o resultado de mudança de bases e como generalizar as quatro operações elementares em uma base b qualquer.

No capítulo 3, trataremos do comportamento das expansões de frações ordinárias irredutíveis em uma base decimal bem como a unicidade da sua respectiva forma escrita.

No capítulo 4, mostraremos o comportamento da expansão de frações ordinárias, o comprimento da parte não periódica, bem como o comprimento do período se ela for uma dízima infinita, com o auxílio da função φ de Euler, obtendo a expansão periódica de frações ordinárias na base b para diferentes bases a geração de dízimas periódicas simples e compostas.

Apresentaremos no capítulo 5 algumas possíveis atividades a que podem ser aplicadas em sala de aula no ensino básico de maneira lúdica e prática.

Capítulo 1 – Conceitos básicos de teoria dos números

Iremos introduzir alguns conceitos e resultados fundamentais nos quais se baseiam inúmeros assuntos abordados ao longo desta dissertação. Iniciamos o nosso estudo com a introdução de uma das noções importantes para o estudo dos números.

Definição 1.1: (Divisibilidade) Sejam a e b dois inteiros. Se $a \neq 0$ e existir um inteiro q tal que $b = aq$, dizemos que a divide b, e escrevemos $a|b$. Se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.

Atendendo a esta definição, verificamos que qualquer número inteiro admite divisores positivos e negativos. No entanto, e uma vez para estes últimos é dada pouca importância no contexto dos conceitos e/ou resultados a estudar, sendo o estudo similar, de agora em diante fazemos apenas referência aos números positivos.

A noção de divisibilidade introduzida na definição 1.1 está na base de algumas propriedades básicas de grande importância, verificadas pelos números inteiros, dentre as quais, por nos serem úteis ao longo deste texto, destacamos:

1. Se $a|b$ verifica-se $a|bx$, para qualquer inteiro x;
2. Se $a|b$ e $b|c$ verifica-se $a|c$;
3. Se $a|b$ e $a|c$ então $a|(bx + cy)$, para quaisquer inteiro x e y.

Exemplo 1.2: De acordo com a definição:

- $4|12$ mas $12 \nmid 4$;
- $d|4$ se, e somente se, $d \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$;
- um número inteiro a é par se, e somente se, $2|a$;
- um número inteiro a é ímpar se, e somente se, $2 \nmid a$;
- $d|0$, $d|d$ e $d|-d$ para todo inteiro d;

Exemplo 1.3: Prove que se $a|b$ e $a|b+c$, então $a|c$.

Solução: Como

$$\left.\begin{array}{rcl} a|b & \Rightarrow & b = k_1 a, \quad k_1 \in Z \\ a|b+c & \Rightarrow & b + c = k_2 a, \quad k_2 \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 a + c = k_2 a \Rightarrow c = a(k_2 - k_1).$$

Logo, $a|c$.

Exemplo 1.4: Se a, b e c são três números naturais consecutivos, mostre que

$$7 \text{ divide } 2^a + 2^b + 2^c.$$

Solução: Se a, b e c são números naturais consecutivos, então $b = a + 1$ e $c = a + 2$. A expressão se reduz a:

$$2^a + 2^{a+1} + 2^{a+2} = 2^a \cdot (1 + 2 + 2^2) = 2^a \cdot 7$$

Logo, a expressão dada é divisível por 7.

Exemplo 1.5: Mostre que $31|(20^{15} - 1)$.

Solução: Observando que $32 = 2^5$ e com isso $31 = 2^5 - 1$, temos:

$$31|(2^5 - 1)(2^5 + 1) = 2^{10} - 1,$$

é possível escrever uma combinação linear conforme a propriedade (3) da definição 1.1 de maneira que se tenha como resultado $2^{15} - 1$.

$$31|2^5(2^{10} - 1) + (2^5 - 1) = 2^{15} - 1$$

Logo, $31|(2^{15} - 1)$.

Alguns inteiros positivos, como 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17, são apenas divisíveis por 1 e por ele mesmo. Estes números são chamados de números primos. Assim, podemos definir números primos da seguinte maneira:

Definição 1.6: (Números primos e números compostos) A qualquer inteiro maior que 1 que só possui divisores positivos 1 e ele próprio, chamamos de número primo. Um inteiro maior que 1 e que não seja primo será dito número composto.

O estudo dos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... constitui um assunto de grande interesse na Teoria dos Números. Vale ressaltar que ao longo dessa dissertação estes mesmos números terão importante papel no estudo de resultados importantes.

Exemplo 1.7: Se x e y são dois números naturais, resolva a equação

$$x^2 - y^2 = 97.$$

Solução: Fatorando o primeiro membro, obtemos:

$$(x + y)(x - y) = 97$$

Como 97 é primo, tem apenas dois divisores naturais distintos que são 1 e 97, então:

$$\begin{cases} x + y = 97 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos os números $x = 49$ e $y = 48$.

Exemplo 1.8: O número $13^{24} + 4^{29}$ é primo ou composto?

Solução: Temos que

$$13^{24} + 4^{29} = (13^6)^4 + 4 \cdot (4^7)^4$$

Observe que a expressão tem a forma da identidade de Sophie Germain, isto é:

$$3a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab) \cdot (a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

Aplicando essa identidade obtemos a seguinte fatoração:

$$[(13^6)^2 + 2(4^7)^2 + 2(13^6)(4^7)] \cdot [(13^6)^2 + 2(4^7)^2 - 2(13^6)(4^7)]$$

Logo, esse número é composto.

Definição 1.9: (Máximo divisor comum) Sejam a e b dois inteiros tais que pelo menos um deles é não nulo, chamamos máximo divisor comum ao maior elemento do conjunto dos divisores comuns de a e b e designamos este elemento por (a, b).

Corolário 1.10: $d \geq 0$ é o $mdc\ (a, b)$, isto é, $(a, b) = d$ e $c|a$ e $c|b$ então, $c|d$.

Demonstração: $d = mdc\ (a, b) \quad \Rightarrow \quad d = ua + bv$

$$
\begin{aligned}
d &= u(k_1c) + v(k_2c) \\
d &= c(k_1u) + c(k_2v) \\
d &= c(k_1u + k_2v) \\
&c|d.
\end{aligned}
$$

■

Teorema 1.11: (Lema de Euclides) Se a, b e $n \in Z$ temos que $mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
d = mdc(a, b - na) &\Rightarrow d|a \ \ e \ \ d|b - na \\
&\Rightarrow d|b \text{ pois } b = b - na + na \\
&\qquad\qquad\quad = k_2d + k_1d \\
&\qquad\qquad\quad = d(k_2 + k_1) \\
&\Rightarrow d|b \\
&\Rightarrow d \text{ é divisor comum de a e b} \\
&\Rightarrow d|c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c = mdc(a, b) &\Rightarrow c|a \ \ e \ \ c|b \\
&\Rightarrow a = k_1c \ \text{ e } \ b = k_2c \\
&\Rightarrow b - na = k_2c - nk_1c \\
&\qquad\qquad\ \ = c(k_2 - nk_1) \\
&\Rightarrow c|(b - na) \\
&\Rightarrow c|d \ \ e \ \ d|c \\
&\Rightarrow c = d
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 1.12: Mostre que a fração abaixo é irredutível para todo $n \in N$.

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
mdc(21n + 4, 14n + 3) &= mdc(14n + 3, 21n + 4) \\
&= mdc(14n + 3, (21n + 4) - 1(14n + 3)) \\
&= mdc(7n + 1, 14n + 3) \\
&= mdc(7n + 1, (14n + 3) - 2(7n + 1)) \\
&= mdc(7n + 1, 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.13: Calcule o $mdc(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.

Solução:
$$\begin{aligned} mdc(2^{100}-1, 2^{120}-1) &= mdc\left(2^{100}-1, (2^{120}-1) - 2^{20}(2^{100}-1)\right) \\ &= mdc(2^{20}-1, 2^{100}-1) \\ &= mdc\left(2^{20}-1, (2^{100}-1) - 2^{80}(2^{20}-1)\right) \\ &= mdc(2^{20}-1, 2^{80}-1) \\ &= mdc\left(2^{20}-1, 2^{60}(2^{20}-1)\right) \\ &= mdc(2^{20}-1, 2^{60}-1) \\ &= mdc\left(2^{20}-1, (2^{60}-1) - 2^{40}(2^{20}-1)\right) \\ &= mdc(2^{20}-1, 2^{40}-1) \\ &= mdc\left(2^{20}-1, (2^{40}-1) - 2^{20}(2^{20}-1)\right) \\ &= mdc(2^{20}-1, 2^{20}-1) \\ &= 2^{20}-1. \end{aligned}$$

Consequentemente, a noção de máximo divisor comum nos leva a um outro conceito fundamental.

Definição 1.14: (Números primos entre si) Sejam a e b dois inteiros e pelo menos um deles é não nulo, se $(a, b) = 1$, então dizemos que a e b são primos entre si.

Devemos ter atenção sobre a forma de como podemos determinar o máximo divisor comum entre dois inteiros a e b não simultaneamente nulos. A este processo chamamos algoritmo de Euclides. Assim, através do algoritmo da divisão, podemos obter dois inteiros q_0 e r_0, tais que:

$$a = bq_0 + r_0, com\ 0 \leq r_0 < b.$$

Se $r_0 \neq 0$, podemos utilizar o algoritmo da divisão para os inteiros b e r_0. Então existem q_1 e r_1, tais que:

$$b = q_1 r_0 + r_1, com\ 0 \leq r_1 < r_0.$$

Continuando desta forma, ou seja, procedendo à divisão de um resto pelo seguinte (denotando b por r_{-1} e a por r_{-2}) divide-se o resto i pelo resto $(i+1)$, com $-2 \leq i \leq k-1$. O último resto não nulo, r_k, vai ser o máximo divisor comum entre a e b. Com efeito, obtemos uma sequência de inteiros não negativos $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$, tais que $r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > r_k > 0$, pelo que o algoritmo de Euclides termina ao fim de um número finito de passos.

Teorema 1.15: *Se a e b são dois inteiros positivos e r_k é o último resto não nulo obtido pelo algoritmo de Euclides, então $r_k = (a, b)$. Mais, o algoritmo de Euclides permite encontrar inteiros u e v tais que:*

$$au + bv = (a, b)$$

Demonstração: O algoritmo de Euclides pode ser esquematizado pelo seguinte sistema de equações que iremos provar por indução:

$$\begin{cases} a = bq_0 + r_0 \\ b = r_0\, q_1 + r_1 \\ r_0 \ = r_1\, q_2 + r_2 \\ \vdots \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k \\ r_{k-1} = r_k q_{k+1} \end{cases}$$

Seja $d = (a, b)$, vamos provar por indução que $d|r_{i+1}$, para qualquer $0 \leq i \leq k-1$. Como $d|a$ e $d|b$, temos que $d|(a - bq_0)$, isto é, $d|r_0$ então $d|(b - r_0q_1) = r_1$. Agora, suponhamos que $d|r_1$ e $d|r_{i+1}$, queremos provar que $d|r_{i+2}$, onde $0 \leq i \leq k-2$. Usando a hipótese de indução, obtemos que $d|(r_1 - r_{i+1}q_{i+2})$, Mas $r_1 - r_{i+1}q_{i+2} = r_1 - r_{i+2}$. Portanto, $d|r_{i+2}$.
Acabamos de provar que $d|r_i$ para todo $0 \leq i \leq k$. Em particular, $d|r_k$.
Como $d, r_k > 0$,temos $d < r_k$.
Reciprocamente, a última equação em (**1.1**) e o fato de $r_k \neq 0$, diz-nos que$r_k|r_{k-1}$. Usando a penúltima equação, obtemos $r_k|r_{k-2}$. Por indução, concluímos que $r_k|r_i$, para qualquer $0 \leq i \leq k$. Usando a segunda equação, temos $r_k|b$ e usando a primeira, $r_k|a$. Logo, $r_k|d$. Portanto, $r_k = d$.
Agora, provamos a segunda parte do teorema. Seja $r_{-2} = a$ e $r_{-1} = b$.
Sabemos que:

$$r_i = r_{i-2} - r_{i-1}q_i,$$

para qualquer $0 \leq i \leq k$. Vamos provar por indução que, para qualquer $0 \leq i \leq k$, existem inteiros u_i e v_i tais que $r_i = u_i a + v_i b$.
Como $r_0 = a - bq_0$, o resultado é válido para $i = 0$, bem como $r_1 = b - r_0q_1$ e o que mostra que também é válido para $i = 1$. Suponhamos, por hipótese de indução, que resultado é verdadeiro para i e $i + 1$.
Então:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_{i-1} - r_i q_{i+1} \\ &= u_{i-1}a + v_{i-1}b - (u_i a + v_i b)q_{i+1} \\ &= (u_{i-1} + u_i q_{i+1})a + (v_{i-1} - v_i q_{i+1})b \\ &= v_{i+1}a + v_{i+1}b. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $0 \leq i \leq k$, $r_i = u_i a + v_i b$. Em particular, existem inteiros u e v tais que $r_i = ua + vb$.

■

Exemplo 1.16: Para cada par de números naturais a e b dados abaixo, ache (a, b) e determine números inteiros u e v tais que $(a, b) = au + bv$.

a) 637 e 3887

b) 648 e 1218

c) 551 e 874

d) 7325 e 8485

Solução:

a) $(3887, 637) = 13 = 10 \cdot 3887 - 61 \cdot 637$

b) $(1218, 648) = 6 = -25 \cdot 1218 + 47 \cdot 648$

c) $(874, 551) = 19 = 19 \cdot 874 - 19 \cdot 551$

d) $(8485, 7325) = 5 = -562 \cdot 8485 + 651 \cdot 7325$

Observamos, o seguinte resultado que nos auxilia em algumas temáticas desta dissertação.

Teorema 1.17: *Se $(a, b) = 1$ e $n|ab$ então $n|\ b$. Em particular, se p é primo e $p|ab$ então $p|a$ ou $p|b$.*

Demonstração: Pelo teorema 1.15, se $(a, b) = 1$ então existem inteiros u e v, tais que $nu + av = 1$, onde $nbu + abv = b$. Como $n|ab$, obtemos $n|b$. Para o caso particular apresentado, $p|a$, ele está provado. Se considerarmos que $p\nmid a$, então $(a, b) = 1$ e, como acabamos de provar, $p|b$.

■

Definição 1.18: (Congruência) Sejam a e b inteiros e n um inteiro positivo. Se $n|(a - b)$, dizemos que a é congruente com b módulo n e escrevemos:

$$a \equiv b \ \ mod\, n.$$

Atendendo a definição de divisibilidade, temos o seguinte: $a \equiv b \ \ mod\, n$ não existe um inteiro k tal que $a = b + kn$.

Na nossa vida diária usamos congruência em várias situações, como, por exemplo, os relógios de ponteiros “medem” as horas mod 12 e os dias da semana “medem” os dias mod 7.

O resultado que a seguir apresentamos indica-nos que as relações de congruência verificam, ainda, outras propriedades básicas importantes:

Teorema 1.19: *Sejam a, b, c e d inteiros. Se $a \equiv b \ \ mod\, n$ e $c \equiv d \ \ mod\, n$ então:*

(1) $a + c \equiv b + d \ \ mod\, n;$
(2) $a - c \equiv b - d \ \ mod\, n;$
(3) $ac \equiv bd \ \ mod\, n.$

Demonstração: A demonstração de (1), (2) e (3) é imediata, uma vez que, tendo em conta as propriedades da divisibilidade e a definição 1.7, temos:

$$a + c \equiv (b + kn) + (d + k^{'}n) = b + d + k"n;$$
$$a - c \equiv (b + kn) - (d + k^{'}n) = b - d + k"n;$$
$$ac \equiv (b + kn)(d + k^{'}n) = bd + bk^{'}n + dkn + kk^{'}n = bd \ + k"n;$$

■

Exemplo 1.20: Ache o resto da divisão

a) de 7^{10} por 51.

b) de 2^{100} por 11.

c) de 14^{256} por 17.

d) de $(116 + 17^{17})^{21}$ por 8.

e) de $13^{16} - 2^{25}5^{15}$ por 3.

f) de $1! + 2! + \cdots + (10^{10})!$ Por 40.

Solução:
a) Observe que $7^2 \equiv -2 \ mod\ 51$, logo

$$7^2 \equiv (-2)^5 = -32 \equiv 19 \ mod\ 51.$$

Logo, o resto procurado é 19.

b) Sabendo que $2^5 = 32 \equiv -1 \ mod\ 11$. Temos que:

$$2^{100} \equiv (-1)^{20} \equiv 1 \ mod\ 11.$$

Portanto, o resto é 1.

c) Temos que $14 \equiv -3\, mod\ 17$, logo

$$14^4 \equiv (-3)^4 = 81 \equiv -4 \ mod\ 17.$$

Assim,

$$14^8 \equiv (-4)^2 \equiv -1 \ mod\ 17.$$

Portanto,

$$14^{256} \equiv (14^8)^{32} \equiv (-1)^{32} \equiv 1 \ mod\ 17.$$

Logo, o resto procurado é 1.

d) Observe que $17 \equiv 1 \ mod\ 8$, logo

$$17^{17} \equiv 1 \ mod\ 8.$$

Por outro lado,

$$116 \equiv 4 \ mod\ 8.$$

Logo,

$$(116 + 17^{17})^{21} \equiv (4+1)^{21} \equiv 5 \cdot (5^2)^{10} \equiv 5 \ mod\ 8,$$

Pois

$$5^2 \equiv 1 \ mod\ 8.$$

Logo, a resposta é 5.

e) Temos que $13 \equiv 1 \ mod\ 3$, $5 \equiv 2 \ mod\ 3$ e $4 \equiv 1 \ mod\ 3$. Logo,

$$13^{16} - 2^{25}5^{15} \equiv 1^{16} - 2^{25}2^{15} \equiv 1 - 2^{40} \equiv 1 - 4^{20} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \ mod\ 3.$$

Portanto, o resto é 0.

f) Observe que 40 divide $n!$ para todo $n \geq 5$, logo

$$1! + 2! + \cdots + (10^{10})! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 33 \ mod\ 40.$$

Portanto, o resto é 33.

Exemplo 1.21: Ache o menor número natural que deixa restos 5, 4, 3 e 2 quando dividido, respectivamente, por 6, 5, 4 e 3.

Solução: Devemos achar a menor solução natural do sistema de congruências

$$X \equiv 5 \ mod\ 6, \qquad X \equiv 4 \ mod\ 5, \qquad X \equiv 3 \ mod\ 4, \qquad X \equiv 2 \ mod\ 3.$$

Note que esse sistema é equivalente ao seguinte sistema:

$$X \equiv -1 \ mod\ 6, mod\ 5, mod\ 4, mod\ 2$$

que por sua vez é equivalente a

$$X \equiv -1 \ mod \ 60,$$

já que $[6, 5, 4, 3, 2] = 60$. Portanto, a solução natural do problema é 59.

Teorema 1.22: *Se* $(a, b) = 1$ *e* $ab \equiv ac \ mod \ n$, *então* $b \equiv c \ mod \ n$. *Em geral, se* $(a, b) = d$ *e* $ab \equiv ac \ mod \ n$ *então*

$$b \equiv c \ mod \ \frac{n}{d}.$$

Demonstração: Suponhamos que $(a, n) = d$ e $ab \equiv ac \ mod \ n$. Então existe um inteiro k tal que $ab \equiv ac + kn$. Sejam

$$a_1 = \frac{a}{d}, \qquad n_1 = \frac{n}{d}.$$

Claramente, a_1 e n_1 são inteiros e $(a_1, n_1) = 1$. Dividindo ambos os membros de $ab \equiv ac + kn$ por d, obtém-se $a_1(b - c) = kn_1$. Onde, $a_1 | kn_1$. Como $(a_1, n_1) = 1$, pelo teorema 1.6, $a_1 | k$. Portanto, $k = a_1 k_1$, para algum inteiro k_1. Assim, $b - c = k_1 n_1$, ou seja $n_1 = (b - c)$. Logo, $b \equiv c \ mod \ \frac{n}{d}$.

Definição 1.23: (Sistema completo de resíduos) Um conjunto inteiro de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ diz-se um sistema completo de resíduos $mod \ n$, se qualquer inteiro é congruente, $mod \ n$ com um e só a_i, ou seja, se para cada número inteiro x existe um e um só a_j, tal que $x \equiv a_j \ mod \ n$.

Exemplo 1.24: Os conjuntos $\{-3, -2, -1, 0, \ 1, \ 2, \ 3\}$ e $\{-7, \ 8, -5, 10, -3, 19, 13\}$ são sistemas completos de resíduos módulo 7.

Definição 1.25: (Sistema reduzido de resíduos) Seja S um sistema completo de resíduos $mod \ n$. Ao conjunto T formado pelos membros de S que são primos com n chamamos sistema reduzido de resíduos $mod \ n$.

Definição 1.26: (Função φ de Euler) Seja $n \geq 1$. O número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são primos com n é denotado por $\varphi(n)$. Esta função de n é chamada função φ de Euler ou, também, por número indicador de Euler. Simbolicamente, tem-se:

$$\varphi(n) = \#\{k \in N: 1 \leq k < n \ e \ mdc(k, n) = 1\}.$$

Algumas propriedades básicas deste conceito:

(1) Se $a \equiv b \ mod \ n$ e a é primo com n então também b é primo com n.

(2) Se p é primo então qualquer inteiro positivo menor que p é primos com p, portanto $\varphi(p) = p - 1$.

(3) $\varphi(p_1^{\propto}) = p_1^{\propto} - p_1^{\propto - 1} = p_1^{\propto}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$

Lema 1.27: Suponhamos que $(a, n) = 1$. Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ forma um sistema completo de resíduos. Então $aa_1, aa_2, aa_3, \ldots, aa_n$ também forma um sistema completo de resíduos. Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\varphi(n)}$ um sistema reduzido de resíduos, então

$aa_1, aa_2, aa_3, \dots, aa_{\varphi(n)}$ também forma um sistema reduzido de resíduos.

Demonstração: Vamos começar provando a primeira parte. Como $(a, n) = 1$, então $aa_i \equiv aa_j \ mod \ n$ implica $a_i \equiv a_j \ mod \ n$, mas por definição de sistema completo de resíduos, isto não pode acontecer. Assim $aa_i \not\equiv aa_j \ mod \ n$ para $i \neq j$. O fato de a ser primo com n também implica que existe c tal que:

$$ac \equiv 1 \ mod \ n$$

Seja d um inteiro. Então $cd \equiv a_i \ mod \ n$, para algum $1 \leq i \leq n$. Onde

$$d \equiv acd \equiv aa_i \ mod \ n$$

Portanto, $aa_1, aa_2, aa_3, \dots, aa_n$ também forma um sistema completo de resíduos.
Mas, se $(a, n) = 1$ e $(a_i, n) = 1$ então $(aa_i, n) = 1$. Portanto, os inteiros $aa_1, aa_2, aa_3, \dots, aa_{\varphi(n)}$ também formam um sistema reduzido de resíduos.

Tendo este resultado as seguintes consequências:

Teorema 1.28: (Teorema de Euler) *Se* $(a, n) = 1 e \ a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ mod \ n.$

Demonstração: Seja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\varphi(n)}$ um sistema reduzido de resíduos. Pelo lema anterior, $aa_1, aa_2, aa_3, \dots, aa_{\varphi(n)}$ também forma um sistema reduzido de resíduos. Mas para cada $1 \leq i \leq \varphi(n)$, $aa_i \equiv a_j \ mod \ n$, para algum $1 \leq j \leq \varphi(n)$. Portanto,

$$aa_1 \cdot aa_2 \cdot aa_3 \cdot \dots \cdot aa_{\varphi(n)} \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)} \ mod \ n.$$

Como $\left(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)}, n\right) = 1$, então pelo teorema 1.9

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ mod \ n.$$

■

Exemplo 1.29: Ache o resto da divisão de

a) 5^{60} por 26.

b) 3^{100} por 10.

Solução:
a) Temos que $\varphi(26) = \varphi(2)\varphi(13) = 12$. Como $(5,26) = 1$, pelo Teorema de Euler, temos que $5^{12} \equiv 1 \ mod \ 26$, que elevada à quinta potência nos dá $5^{60} \equiv 1 \ mod \ 26$. Portanto, o resto da divisão 5^{60} por 26 é 1.

b) Temos que $\varphi(10) = 4$. Como $(3,10) = 1$, pelo Teorema de Euler, temos que $3^4 \equiv 1 \ mod \ 10$, que elevada à vigésima potência nos dá $3^{100} \equiv 1 \ mod \ 10$. Portanto, o resto da divisão 3^{100} por 10 é 1.

Teorema 1.30: *(Pequeno Teorema de Fermat) Se p é primo então*

$$a^p \equiv a \ mod \ p.$$

para qualquer inteiro a.

Demonstração: Se $p|a$ então $a^p \equiv a \ mod \ p$ e $a \equiv 0 \ mod \ p$. Logo, $a^p \equiv a \ mod \ p$. Se $p\nmid a$então $(a, p) = 1$, e pelo teorema de Euler, $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \ mod \ p$. Mas $\varphi(p) = p - 1$.

Portanto, $a^p \equiv a \mod p$.

■

Exemplo 1.31: Mostre que se p é um número primo, então para todo $a \in Z$ e para todo $k \in N$, tem-se que

$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \mod p.$$

Solução: A congruência é imediata se $p|a$, já que nesse caso ambos os membros são divisíveis por p.

Se $p \nmid a$, temos pelo Pequeno Teorema de Fermat que $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$; logo, elevando à potência k e multiplicando por a ambos os membros dessa congruência, obtemos o resultado.

Importante salientar que o teorema de Euler, em 1760, visou generalizar o pequeno teorema de Fermat, enunciado em 1640, para quaisquer números inteiros, utilizando, para isso, a função de Euler. É interessante notar, ainda, que para um número primo, o teorema de Euler é exatamente o pequeno teorema de Fermat.

Iremos, agora, apresentar uma fórmula para $\varphi(n)$ que depende da fatoração em primos de n. Porém, precisamos definir função multiplicativa.

Definição 1.32: (Função Multiplicativa) Se a função $f(n)$ está definida para todos os inteiros positivos, então dizemos que $f(n)$ é multiplicativa se para qualquer par de inteiros m e n, tais que $(m,n) = 1$, tem-se $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$.

Daí, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.33: *A função $\varphi(n)$ é multiplicativa.*

Demonstração: Sejam m e n inteiros positivos tais que $(m,n) = 1$. Vamos colocar os primeiros mn inteiros numa tabela com m colunas e n linhas, da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m \\ m+1 & m+2 & \dots & m+m \\ 2m+1 & 2m+2 & \cdots & 2m+m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+1)m+1 & (n+1)m+2 & \cdots & (n+1)m+m \end{array}$$

Os números da coluna j são $0 \cdot m + j, 1 \cdot m + j, 2 \cdot m + j, \dots, (n-1)m + j$.

Mostrando que $(ma + j, m) = (j, m)$, para qualquer inteiro a. Consideramos $(j,m) = q$ e seja $r = (ma + j, m)$. Como $r|m$ então temos que $r|ma$ e tem-se também que $r|(ma + j - ma) = j$. Assim, como $r|m$ e $r|j$ então $r|q$. Evidentemente, $q(ma + j)$ e $q|m$, logo $q|r$. Assim, temos $r = q$.

Portanto, ou qualquer elemento da coluna j é primo com m ou nenhum elemento da coluna j é primo com m. Assim, há exatamente $\varphi(m)$ colunas é primos com m.

Como $(m,n) = 1$, os n elementos de cada coluna j formam um sistema completo de resíduos $mod\ n$. Portanto, por definição, cada coluna j contém exatamente $\varphi(n)$ elementos primos com n. Onde, em cada uma das $\varphi(m)$ colunas que têm os elementos que são primos com m, há exatamente $\varphi(n)$ elementos primos com n. Isto é, há exatamente $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ elementos na tabela que são primos com m e, ao mesmo tempo, primos com n.

Mas um inteiro é primo com mn se, e somente se, for primo simultaneamente com m e com n. Portanto,

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

e a função de Euler é multiplicativa.

■

Teorema 1.34: *Suponhamos que a fatoração de* n *em primos seja*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Então

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Demonstração: Calculando $\varphi(p^\alpha)$, para p primo e $\alpha \geq 1$. Um inteiro é primo com p^α exceto se for divisível por p. Os números de 1 a p^α que são divisíveis por p, são $1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, p^{\alpha-1}p$. Portanto,

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Como a função $\varphi(n)$ é multiplicativa, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right) \\
&= p_1^{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\
&= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\
&= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.35: Seja n um inteiro positivo. Então:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Apresentamos a seguir como encontrar a menor potência positiva, r, tal que $a^r \equiv 1 \ mod \ n$, assim como, os valores de a para os quais essa menor potência é $\varphi(n)$.

Definição 1.36: (Ordem de a módulo n) Suponhamos que $(a, n) = 1$. Definimos a ordem de a módulo n como sendo o menor inteiro positivo, digamos b, para o qual

$$a^b \equiv 1 \ mod \ n$$

e denotado por $ord_n(a)$.

Exemplo 1.37: $ord_7(10) \equiv 6$, pois

$$\begin{array}{lll}
10^1 \equiv 3 \ mod \ 7 & 10^3 \equiv 6 \ mod \ 7 & 10^5 \equiv 5 \ mod \ 7 \\
10^2 \equiv 2 \ mod \ 7 & 10^4 \equiv 4 \ mod \ 7 & 10^6 \equiv 1 \ mod \ 7
\end{array}$$

Pelo teorema de Euler, $ord_n(a)$ existe sempre que $(a, n) = 1$, e

$$ord_n(a) \leq \varphi(n).$$

Teorema 1.38: *Se* $(a, n) = 1$ *e se* $a^b \equiv 1 \; mod \; n$, *para algum* $b > 0$, *então* $ord_n(a)|b$. *Em particular,*

$$ord_n(a)|\varphi(n).$$

Reciprocamente, se $ord_n(a)|b$ *então* $a^b \equiv 1 \; mod \; n$.

Demonstração: Seja $b > 0$, tal que $a^b \equiv 1 \; mod \; n$ e $d = (ord_n(a), b)$. Então $d \leq ord_n(a)$. Temos $d = ub + vord_n(a)$, para alguns u e v inteiros, logo

$$a^d \equiv \left(a^{ub+vord_n(a)}\right) \equiv (a^b)^u \cdot \left(a^{ord_n(a)}\right)^v \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \; mod \; n.$$

Portanto, $a^d \equiv 1 \; mod \; n$, onde $ord_n(a) < d$ (por definição de $ord_n(a)$). Logo

$$ord_n(a) = d.$$

Portanto, $ord_n(a)|b$.
Reciprocamente, se $ord_n(a)|b$, então $b = kord_n(a)$, para algum inteiro k, e

$$a^b \equiv \left(a^{ord_n(a)}\right)^k \equiv 1 \; mod \; n.$$

■

Definição 1.39: (Raiz Primitiva) Se $(a, n) = 1$ e $ord_n(a) = \varphi(n)$, dizemos que a é uma raiz primitiva de n.

Exemplo 1.40: Consideremos $n = 10$. Há exatamente 4 inteiros em $\{1, 2, \dots, 10\}$ que são primos com 10, logo $\varphi(10) = 4$. Uma vez que $(3,10) = 1$, $3^1 \equiv 3 \; mod \; 10$, $3^2 \equiv 9 \; mod \; 10$, $3^3 \equiv 7 \; mod \; 10$, $3^4 \equiv 1 \; mod \; 10$, conclui-se que 3 é uma raiz primitiva módulo 10.

Definição 1.41: *Se* p *é primo e* $d|(p-1)$ *então a congruência*

$$x^d \equiv 1 \; mod \; p$$

Tem exatamente d *soluções distintas* $mod \; p$.

Teorema 1.42: *Se* p *é primo e* d *um inteiro tal que* $d|(p-1)$. *Então há exatamente* $\varphi(d)$ *inteiros distintos* $mod \; p$ *cuja ordem* $mod \; p$ *é* d. *Em particular, há exatamente* $\varphi(p-1)$ *raízes primitivas de* p.

Demonstração: Seja p um primo e seja $d|(p-1)$. Vamos provar por indução que há exatamente $\varphi(d)$ elementos cuja ordem $mod \; p$ é d. Efetivamente, 1 é o único elemento cuja ordem é 1. Seja $n > 1$ tal que $n|(p-1)$ e suponhamos que para qualquer $d < n$ tal que $d|(p-1)$, há exatamente $\varphi(d)$ elementos cuja ordem $mod \; p$ é d. Consideremos a congruência

$$x^n \equiv 1 \; mod \; p$$

Pelo teorema 1.41 esta congruência tem exatamente n soluções. Se $d|n$ e $ord_p(a) = d$ então a é solução da congruência. Mas, por indução, há exatamente $\varphi(d)$ elementos com ordem d, para $d < n$. Como menciona o teorema 1.35,

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Temos exatamente $\varphi(n)$ elementos cuja ordem $mod\ p$ é n. Portanto, o teorema é válido para qualquer $n|(p-1)$.

Capítulo 2 – Sistema de numeração

O sistema decimal, de numeração posicional de base 10, surgiu na Índia, conhecido como sistema indo-arábico foi divulgado na Europa em torno de 825 d.C, pelo matemático Mohamed Bem Mussa Al Khawarismi, mas vale lembrar que muito antes, os primeiros sistemas de escritas já haviam sido conhecidos pelos sumérios e pelos egípcios, por volta de 3500 a.C.

O sistema decimal é mundialmente aceito nos dias atuais, porém, nem sempre foi assim, face que civilizações antigas em períodos diferentes da história, usaram ou ainda usam sistemas de numerações diferentes. Podemos citar alguns exemplos:

- tribos da Austrália e da Polinésia usaram o sistema binário, ou de base2;

- várias tribos da África usaram o sistema quinário, isto é, de base5;

- os ingleses ainda nos dias atuais preservam vestígios do sistema duodecimal, o de base 12, em seu sistema de medidas e bem como no sistema monetário;

- astecas e maias no México além dos celtas na Europa Ocidental empregaram o sistema de base 20 ou vigesimal;

- o sistema de base 60 denominado sexagesimal foi difundido na Babilônia antiga e não se tem certeza da motivação do seu uso. Uma possível motivação para o aparecimento deste sistema de numeração poderá residir no elevado número de divisores de 60 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60). Outra hipótese poderá vir de uma união de um sistema de contagem de base 5 que se baseava em contar com os dedos da mão e o sistema de contagem de base 12 que usava o método das três falanges. O sistema consistia em contar as falanges dos dedos da mão direita, utilizando o polegar, totalizando doze falanges (três falanges em quatro dedos), com os cinco dedos da mão esquerda, contam-se as dúzias, totalizando cinco dúzias, isto é, 60. Fato, que vestígios desse sistema permanecem na contagem do tempo e na medida de ângulos.

Como o homem possui dez dedos nas mãos, acostumou-se a contar em dezenas, e assim, o número 10 foi escolhido como base do sistema de numeração. Bases diferentes de 10 podem ser úteis para alguns problemas específicos, como base 2 para utilização em computadores. Vale a pena ressaltar que os resultados fundamentais em matemática não são dependentes da base em que os números são escritos.

2.1 Definições

O método que conhecemos para escrever os números utiliza um sistema de numeração posicional, onde cada algarismo, além do seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número.

Devemos a priori definir base de um sistema de numeração, ordem e classe:

- **Base** - é a quantidade de símbolos (letras ou algarismos) necessários para representar um natural em uma notação posicional a partir de zero, onde estes símbolos possuem diferentes valores de acordo com a posição ocupada na representação do referido número.
- **Ordem** – posição ocupada por cada símbolo em um número.
- **Classe** – é a reunião de três ordens. Porém, apenas a última classe à esquerda pode ter uma ou duas ordens.

Exemplo 2.1: $(12034)_5$ ou $12034_{(5)}$ lê-se: um, dois, zero, três, quatro na base 5 que representa um número de cinco ordens com duas classes:

$$\left(\underbrace{12}_{2^{a}\ classe}\ \underbrace{034}_{1^{a}\ classe}\right)_5$$

Procedimentos que devem ser seguidos para se adotar um sistema de numeração posicional de base b:

1º) b unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

2º) da direita para esquerda, o valor do algarismo a de ordem n é b vezes o valor que teria se estivesse na ordem imediatamente inferior $n - 1$.

3º) o menor número de k algarismos é formado pelo algarismo 1 seguido de $k - 1$ zeros e será denotado por $(100...000)_b$.

4º) o maior número de k algarismo é constituído de k algarismos iguais a $b - 1$.

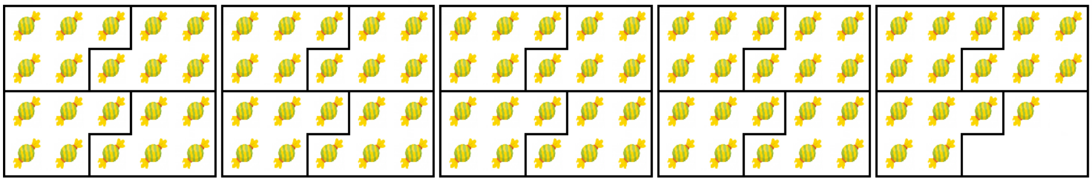
Assim, podemos afirmar:

Base	Quantidade de dígitos	Menor número	Maior número
3	4	$(1000)_3$	$(2222)_3$
4	3	$(100)_4$	$(333)_4$
5	6	$(100000)_5$	$(444444)_5$
6	5	$(10000)_6$	$(55555)_6$

Exemplo 2.2: Contar na base b é formar grupos de b unidades para gerar uma unidade de ordem imediatamente superior. Vamos, agora, recontar os bombons em um pacote na base 5.

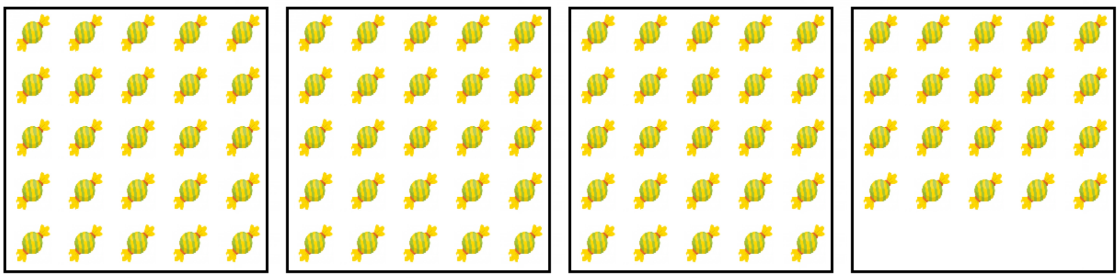
Solução:

1º) Retirando-se os bombons do pacote em grupos de cinco, tal como a figura abaixo:



Obteremos um total de 19 grupos de 5 com sobra de uma unidade de primeira ordem, isto é, $1 \cdot 5^0$ bombons.

2º) Formando-se conjuntos de cinco grupos com cinco, isto é, conjuntos de 25 bombons.



Observa-se a sobra de quatro grupos com cinco bombons que corresponde a 4 unidades de segunda ordem, isto é, $4 \cdot 5^1$ bombons.

Os três grupos de 25 bombons equivalem a três unidades de terceira ordem, isto é, $3 \cdot 5^2$ bombons. Assim, o número de bombons nessa caixa e igual a

$$3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$$

que pode ser registrado do seguinte modo: $(341)_5$ e lê-se: "três, quatro e um na base cinco".

De um modo geral a notação do número com $n+1$ algarismos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, na base b é:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b \qquad \text{ou} \qquad a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_{0(b)}$$

sendo a_i o algarismo de ordem $i+1$. Além disso, tem-se que:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

2.2 Teorema das bases

Para iniciarmos essa seção devemos prontamente responder as perguntas a seguir:

- *É possível representar algum número $a \in N$ de mais de uma maneira em um sistema posicional de base b?*
- *Há algum número que não possa ser representado nesses sistemas?*

Para que o sistema posicional de base b fique bem definido, é preciso garantir duas coisas: que qualquer número $a \in N$ admita uma representação e que essa representação seja única.

O processo de divisões sucessivas de um número por b para em um número finito de passos? O que garante isso? Isto é, pode acontecer que esse processo continue indefinidamente e não consigamos obter uma representação finita para esse número?

O teorema a seguir responde as perguntas anteriores garantindo que o sistema posicional de base b é bem definido: a representação de qualquer número natural a neste sistema existe e é única bem como garante a validade do algoritmo de divisões sucessivas. Para esta demonstração, precisaremos de duas ferramentas: a Divisão Euclidiana e o Princípio da Boa Ordem.

Definição 2.3: (Princípio da Indução Finita) Seja $A \subset N$ um conjunto com as seguintes propriedades:

(i) $0 \in A$;
(ii) $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

Então, $A = N$.

Definição 2.4: (Princípio da Boa Ordem) Todo subconjunto $A \subset N$ não vazio possui um elemento mínimo.

Teorema 2.5: (Divisão Euclidiana) *Dados* $a, b \in N, b \neq 0,$ *existem* $q, r \in N,$ *com* $0 \leq r_k < b$*, unicamente definidos, tais que:*

$$a = bq + r.$$

Teorema 2.6: (Representação na base b) *Seja* $b \geq 2$ *um número natural fixado. Dado qualquer* $a \in N$*, existem números naturais* $r_0, \ldots, r_n$ *com* $0 \leq r_k \leq b$ *e* $r_n \neq 0$*, unicamente determinados, tais que:*

$$a = \sum_{k=0}^{n} r_k b^k.$$

Demonstração: Dividindo a por b, temos que existem q_0, $r_0 \in N, 0 \leq r_0 < b$, únicos, tais que:

$$a = bq_0 + r_0.$$

Dividimos o quociente q_0 por b obtendo $q_1, r_1 \in N, 0 \leq r_1 < b$, únicos, tais que:

$$q_0 = bq_1 + r_1.$$

Dividimos q_1 novamente por b. Continuamos esse processo indefinidamente (a princípio), obtemos sequências de números naturais q_k, r_k, com $0 \leq r_k \leq b$, $k \in N$, relacionados por meio do algoritmo da divisão da seguinte forma:

$$q_k = bq_{k+1} + r_{k+1}.$$

Como $r_k \geq 0$ e $b \geq 2$, podemos concluir da expressão acima que $\forall k$ temos $2q_{k+1} \leq q_k$. Em particular, se $q_k \neq 0$ então $q_{k+1} < q_k$.

Suponhamos que fosse possível termos $q_k \neq 0, \forall k \in N$. O conjunto dos quocientes $Q = \{q_k \ / \ k \in N\}$ seria, então, formado apenas por números naturais positivos. Pelo Princípio da Boa Ordem, Q teria um elemento $q_{k_0} > 0$. Neste caso, poderíamos tomar o próximo quociente q_{k_0+1}, e teríamos, por um lado, que $q_{k_0+1} < q_{k_0} = \min Q$ e, por outro, que $q_{k_0+1} \in Q$, o que é uma contradição. Concluímos daí que $q_k = 0$ para algum índice k e, portanto, para todos os índices a partir deste. Isto é, o processo de divisões sucessivas para em algum ponto. Chamemos de n este índice em que o processo para. Então, temos:

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_0 \\
&= b(bq_1 + r_1) + r_0 = b^2 q_1 + br_1 + r_0 \\
&= b^2(bq_2 + r_2) + br_1 + r_0 = b^3 q_2 + b^2 r_2 + br_1 + r_0 \\
&\quad \vdots \\
&= b^k(bq_k + r_k) + \cdots + br_1 + r_0 = b^{k+1} q_k + b^k r_k + \cdots + br_1 + r_0 \\
&\quad \vdots \\
&= b^n(bq_n + r_n) + \cdots + br_1 + r_0 = b^n r_n + \cdots + br_1 + r_0
\end{aligned}$$

Isto é:

$$a = \sum_{k=0}^{n} r_k b^k.$$

■

Resta mostrar a unicidade da expressão acima; esta decorre da unicidade do quociente e do resto no algoritmo da divisão. Suponhamos que pudesse haver duas expressões diferentes na forma acima; completando com zeros, caso necessário, podemos escrever, sem perda de generalidade:

$$a = \sum_{k=0}^{n} r_k b^k = \sum_{k=0}^{n} r'_k b^k.$$

Então, teríamos:

$$a = b\left(\sum_{k=1}^{n} r_k b^{k-1}\right) + r_0 = b\left(\sum_{k=1}^{n} r'_k b^{k-1}\right) + r'_0.$$

Pela unicidade do algoritmo da divisão, as expressões acima correspondem ao resto e ao quociente da divisão de a por b.

Logo:

$$r_0 = r'_0, \qquad \sum_{k=1}^{n} r_k b^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} r'_k b^{k-1}.$$

Da expressão acima, temos:

$$b\left(\sum_{k=2}^{n} r_k b^{k-2}\right) + r_1 = b\left(\sum_{k=22}^{n} r'_k b^{k-2}\right) + r'_1.$$

Da mesma forma, segue que:

$$r_1 = r'_1, \qquad \sum_{k=2}^{n} r_k b^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} r'_k b^{k-2}.$$

Repetindo este argumento até $k = n$, concluímos que

$$r_k = r'_k \qquad \forall k \in N.$$

■

Definição 2.7: (Sistema de numeração posicional de base b) Seja $b \geq 2$ um número natural fixado. Dizemos que o número $a \in N$ está expresso no sistema de numeração posicional de base b se a está escrito na forma:

$$a = \sum_{k=0}^{n} r_k b^k$$

em que $r_0, \dots, r_n$ são os únicos números naturais tais que $0 \leq r_k < b$ e $r_n \neq 0$.

Neste caso, denotamos:

$$a = (r_n, \dots, r_0)_b.$$

Cada índice k é chamado uma ordem na representação posicional de a na base b.

Observação: Não convém escrever a base 10 pois a mesma é a base do sistema de numeração indo arábico.Por exemplo:

$$76593 = 7 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Consequências: Seja um número inteiro b uma base qualquer, $b \geq 2$.

i. O número $10_{(b)}$ é na base 10 igual a $1 \cdot b + 0 = b$;

ii. A potência $\left[10_{(b)}\right]^n$, $n \in N$, é na base b igual a

$$b^n = 1 \cdot b^n + 0 \cdot b^{n-1} + \cdots + 0 \cdot b^1 + 0 \cdot b^0 = 100 \dots 0_{(b)}$$

isto é, o algarismo 1 seguido de n zeros.

A zona de conforto que a familiaridade com a base 10 proporciona pode também nos levar a confundir propriedades dos próprios números com propriedades de suas representações. Um mesmo número pode ser representado de diferentes formas, isto é, por diferentes numerais. Ao mudarmos, porém, a representação, o número em si não é alterado. Portanto, suas propriedades também são preservadas.

Por exemplo, estamos acostumados, a reconhecer um número par em sua representação decimal, observando o algarismo das unidades. Mas será que essa caracterização é valida também em outras bases? Vide o exemplo a seguir.

Exemplo 2.8: O número $(37)_9$ é par ou ímpar? E o número $(47)_9$?

Solução: Para responder ambas perguntas, devemos lembrar que, por definição, um número natural a é par se é múltiplo de 2, isto é, se existe um número $q \in N$ tal que $a = 2q$. Então,

$$(37)_9 = 3 \cdot 9 + 7 = 2 \cdot (1 \cdot 9 + 8) = 2 \cdot (18)_9$$
$$(47)_9 = 4 \cdot 9 + 7$$

Segue que $(37)_9$ é par e $(47)_9$ é impar.

Exemplo 2.9: Como podemos reconhecer se um número é ou não par com base em sua representação na base 9?

Solução: Para responder a esta pergunta, podemos começar examinando o caso mais simples com dois algarismos. Se um número natural a é representado por $(a_1 a_0)_9$, então:

$$a = 9a_1 + a_0.$$

A partir daí, pode-se concluir que o número a será par se, e somente se, os algarismos a_0 e a_1 forem ambos pares ou ambos ímpares. De forma mais geral, consideremos $a \in N$ representado por $a = (a_n, \dots, a_0)_9$, isto é:

$$a = \sum_{k=0}^{n} 9^k a_k.$$

Mas, como 9 é impar, então todas as potências de 9 são números ímpares, isto é, para cada $k = 1, \dots, n, \exists q_k \in N$ tal que $9^k = 2q_k + 1$. Portanto:

$$a = \sum_{k=0}^{n} (2q_k + 1)a_k = 2\sum_{k=0}^{n} q_k a_k + \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Como

$$2\sum_{k=0}^{n} q_k a_k$$

é par, então o número a será para se, e somente se,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

for par. Isto é, vale o seguinte critério de divisibilidade por 2 na representação posicional de base 9:

Um número $a = (a_n, \dots, a_0)_9$ é múltiplo de 2 se, e somente se, a soma de seus algarismos for um múltiplo de 2

Exemplo 2.10: Em uma determinada aula de matemática o professor Mota escreveu no quadro a sentença $3 \cdot 5 = 10$ afirmando que a mesma é verdadeira, assim, determine a base β desse sistema de numeração.

Solução: Seja β, $\beta > 3$a base do sistema, então:

$$10_\beta = 1 \cdot \beta + 0 = 3 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \beta = 15$$

Exemplo 2.11: Seja N um número natural com *n* algarismos iguais a *b*, escrito no sistema de base $b + 1$. Calcule no sistema de base 10.

Solução: Escrevendo N, temos:

$$N = b \cdot (b+1)^0 + b \cdot (b+1)^1 + b \cdot (b+1)^2 + \cdots b \cdot (b+1)^{n-1}$$

Observa-se que N é igual à soma dos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é b e a razão $b + 1$. Assim,

$$N = \frac{b \cdot [(b+1)^n - 1]}{(b+1) - 1} \Rightarrow \quad N = (b+1)^n - 1.$$

De onde podemos concluir que:

- $88888_{(9)} = 9^5 - 1$
- $77777777_{(8)} = 8^8 - 1$
- $222222_{(3)} = 3^6 - 1$
- $5555555_{(6)} = 6^7 - 1$

Exemplo 2.12: Um número é **capicua** quando lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda representa sempre o mesmo valor. como por exemplo:

747, 4334, 16461, 893398.

a) Considere dois algarismos quaisquer a e b, $a \neq 0$, do sistema de numeração de base 6. Determine o resto da divisão de $abba_{(6)}$ por $11_{(6)}$.

b) Demonstre que se $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$, são algarismos do sistema de base β, então um número capicua N com uma quantidade par de algarismos,

$$N = (a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k),$$

é sempre divisível por $(11)_\beta$.

Solução:

a) Seja

$$abba_{(6)} = a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + b \cdot 6 + a$$

colocando a e b em evidência e fatorando, temos:

$$abba_{(6)} = a \cdot (6^3 + 1) + b \cdot (6^2 + 6)$$

$$abba_{(6)} = a \cdot (6+1) \cdot (6^2 - 6 + 1) + 6b \cdot (6+1)$$

$$abba_{(6)} = \underbrace{(6+1)}_{11_{(6)}} \cdot [a \cdot (6^2 - 6 + 1) + 6b]$$

Logo, $abba_{(6)}$ é divisível por $11_{(6)}$, isto é, o resto da divisão é 0.

b) Seja N comum a quantidade par de algarismos dado por

$$N = (a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k)_\beta$$

Assim, podemos reescrever Nda seguinte maneira:

$$N = a_k \cdot \beta^{2k-1} + a_{k-1} \cdot \beta^{2k-2} + \cdots + a_1 \cdot \beta^k + a_1 \cdot \beta^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \cdot \beta^1 + a_k \cdot \beta^0$$

Agrupando os termos que têm o mesmo algarismo em comum, obtemos:

$$N = \left(a_k \cdot \beta^{2k-1} + a_k \cdot \beta^0\right) + \left(a_{k-1} \cdot \beta^{2k-2} + a_{k-1} \cdot \beta^1\right) + \cdots + \left(a_1 \cdot \beta^k + a_1 \cdot \beta^{k-1}\right)$$

Colocamos em evidência os fatores comuns de cada agrupamento, temos:

$$N = a_k \cdot \left(\beta^{2k-1} + 1\right) + a_{k-1} \cdot \beta^1 \cdot \left(\beta^{2k-2} + 1\right) + \cdots + a_1 \cdot \beta^{k-1} \cdot \left(\beta^k + 1\right)$$

Da seguinte identidade para todo ***n* ímpar**:

$$A^n + B^n = (A + B) \cdot (A^{n-1} - A^{n-2}B^1 + A^{n-3}B^2 - \cdots + B^{n-1})$$

Daí, podemos afirmar que:

$$(A + B) | (A^n + B^n)$$

e observamos que na última expressão de N cada parcela pode ser fatorada pela propriedade acima, isto é:

$$(\beta + 1) | \left(\beta^{2k-j} + 1\right), \quad j \in \{1, 3, 5, \dots., 2k - 1\}.$$

Assim, $(\beta + 1) | N$.

2.3 Mudança de Base

Mudança da base 10 para outra base: Para transformar um número m na base dez para outra base b deve-se fazer divisões sucessivas de m por b até que o quociente seja menor do que b.

Exemplo 2.13: Transforme para a base 5 o número 267.

Solução: Como a base 5 trabalha em grupos de 5, devemos dividir, sucessivamente, essas 267 unidades por 5.

$$\begin{array}{r|l} 267 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 53 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 53 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

ou dessa forma, mais prática:

$$\begin{array}{rlll}
\multicolumn{1}{r|}{267} & 5 & & \\ \cline{2-2}
2 & \multicolumn{1}{l|}{53} & 5 & \\ \cline{3-3}
 & 3 & \multicolumn{1}{l|}{10} & 5 \\ \cline{4-4}
 & & 0 & 2
\end{array}$$

E lendo o número de trás para frente, e considerando, apenas o último quociente e os demais restos, teremos a nossa solução:

$$267 = 2032_{(5)}$$

E lê-se: “dois, zero, três, dois na base cinco”.

Mudança de uma base não decimal para decimal: Se o número m está escrito na base b,

$$m = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b,$$

para passar *m* na base *b* para base dez basta resolver a expressão:

$$m = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0$$

Exemplo 2.14: Transforme para a base decimal o número $(1246)_7$.

Solução: $(1246)_7 = 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 343 + 98 + 28 + 6 = 475$

Mudança de uma base não decimal *b* para outra não decimal *b´*: Nesse caso transformamos o número inicial na base *b* para a base decimal e transformamos dessa para a base não decimal b' solicitada. Outra maneira é o caminho direto que consiste em fazer divisões sucessivas do número escrito na base *b* por *b´*.

Exemplo 2.15: Transforme para a base 8 o número $(4312)_5$.

Solução:
1ª Etapa: Transformar $(4312)_5$ para a base decimal.

$$(4312)_5 = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 500 + 75 + 5 + 2 = 582$$

2ª Etapa: Transformar 582 para a base 8.

$$\begin{array}{rlll}
\multicolumn{1}{r|}{582} & 8 & & \\ \cline{2-2}
6 & \multicolumn{1}{l|}{72} & 8 & \\ \cline{3-3}
 & 0 & \multicolumn{1}{l|}{9} & 8 \\ \cline{4-4}
 & & 1 & 1
\end{array}$$

Assim,

$$(4312)_5 = 582 = (1106)_8$$

Exemplo 2.16: Passe para a base 8 o número$(4312)_5$ de maneira direta.

Solução:

•**1º passo:** Vamos dividir inicialmente $(43)_5$ por 8. Mudamos esse número mentalmente para base 10, isto é: $(43)_5 = 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 20 + 3 = 23$ e dividimos por 8. Obtemos 2 e resto 7. Como 7 > 5, devemos reescrever 7 na base 5, isto é; $7 = (12)_5$. Assim:

$$\begin{array}{l|l} 4312_{(5)} & 8 \\ \cline{2-2} 12_{(5)} & 2_{(5)} \end{array}$$

Abaixamos a ordem seguinte, isto é, o algarismo1, temos, assim o número $(121)_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 25 + 10 + 1 = 36$ que dividido por 8 obtemos 4 e resto também 4.

$$\begin{array}{l|l} 4312_{(5)} & 8 \\ \cline{2-2} 121_{(5)} & 24_{(5)} \\ \ \ 4_{(5)} & \end{array}$$

Abaixamos a ordem seguinte, isto é, o algarismo 2, temos, assim o número $(42)_5 = 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 20 + 2 = 22$ que dividido por 8 obtemos 2 e resto 6.

$$\begin{array}{l|l} 4312_{(5)} & 8 \\ \cline{2-2} 121_{(5)} & 242_{(5)} \\ \ \ 42_{(5)} & \\ \ \ \ \ 6_{(5)} & \end{array}$$

Logo, o algarismo de primeira ordem, na base 8, é 6.

• **2º passo:** Dividir o quociente $(242)_5$ por 8. Mudamos mentalmente $(24)_5$ para base 10, isto é: $(24)_5 = 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 10 + 4 = 14$, que dividido por 8 temos 1 e resto 6. Como 6 > 5, devemos reescrever 6 na base 5, isto é; 6 = $(11)_5$. Assim:

$$\begin{array}{l|l} 242_{(5)} & 8 \\ \cline{2-2} 11_{(5)} & 1_{(5)} \end{array}$$

Abaixamos a ordem seguinte, isto é, o algarismo 2, temos, assim o número $(112)_5 = 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 25 + 5 + 2 = 32$ que dividido por 8 obtemos 4 e resto também 0.

$$\begin{array}{l|l} 242_{(5)} & 8 \\ \cline{2-2} 112_{(5)} & 14_{(5)} \\ \ \ \ \ 0_{(5)} & \end{array}$$

Assim, o algarismo de segunda ordem, na base 8, é 0.

• **3º passo:** Dividir o quociente $(14)_5$ por 8. Mais uma vez mudamos mentalmente $(14)_5$ para base 10, isto é: $(14)_5 = 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 5 + 4 = 9$, que dividido por 8 temos 1 e resto 1. Assim:

$$\begin{array}{r|l} 14_{(5)} & 8 \\ \cline{2-2} 1_{(5)} & 1_{(5)} \end{array}$$

Daí, obtemos os algarismos de quarta e terceira ordem, na base 8, que são respectivamente 1 e 1 e chegamos a igualdade

$$(4312)_5 = (1106)_8$$

De maneira ainda mais direta, temos:

$$\begin{array}{r|lr|lr|l} 4312_{(5)} & 8 & & & & \\ \cline{2-3} 121_{(5)} & 242_{(5)} & & 8 & & \\ \cline{4-5} 42_{(5)} & 112_{(5)} & & 14_{(5)} & & 8 \\ \cline{6-6} 6_{(5)} & 0_{(5)} & & 1_{(5)} & & 1_{(5)} \end{array}$$

Exemplo 2.17: Determinar o algarismo das unidades de primeira ordem do quociente da operação $d\ divide\ D$, escrito na base 10, sabendo que cada número d e D têm 100 algarismos iguais,

$$d = 111 \ldots 1_{(2)} \qquad \text{e} \qquad D = 333 \ldots 3_{(4)}.$$

Solução: Passando os dois números para base 10 e efetuando a divisão, conforme o exemplo 2.5, temos:

$$\frac{D}{d} = \frac{333 \ldots 3_{(4)}}{111 \ldots 1_4} = \frac{4^{100} - 1}{2^{100} - 1} = \frac{(2^{100})^2 - 1}{2^{100} - 1} = \frac{(2^{100} - 1)(2^{100} + 1)}{2^{100} - 1} = 2^{100} + 1$$

Observe que $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Para obtermos o algarismo das unidades simples de 16^{25} devemos efetuar a multiplicação dos 25 fatores iguais ao algarismo 6, de 16, que resulta 6. Logo, o algarismo das unidades de $2^{100} + 1$ é igual a 6 + 1 =7.

Exemplo 2.18: Seja n um número natural, não nulo. Escreva a expressão:

$$(n + 1)(n^2 + 3n + 2)$$

no sistema de base $n + 1$.

Solução: Temos que

$$(n + 1)(n^2 + 3n + 2) = (n + 1)(n + 1)(n + 2) = (n + 1)^2(n + 2)$$

$$(n + 1)^2[(n + 1) + 1] = (n + 1)^3 + (n + 1)^2$$

Então podemos escrever que:

$$(n+1)(n^2+3n+2) = 1 \cdot (n+1)^3 + 1 \cdot (n+1)^2 + 0 \cdot (n+1)^1 + 0 \cdot (n+1)^0$$

$$(n+1)(n^2+3n+2) = 1100_{(n+1).}$$

2.4 Operações elementares

As quatro operações elementares, com os números escritos em bases não decimais, podem ser resolvidas com os mesmos algoritmos que são usados para números escritos no sistema decimal.

Adição:

Vamos apresentar o algoritmo da adição:

- alinham-se as parcelas escrevendo as respectivas ordens na mesma coluna;
- somam-se os algarismos, um a um, da direita para a esquerda;
- se a soma de dois algarismos alinhados na mesma ordem resulta em valor com um único algarismo (na base b), este é colocado no resultado, caso contrário, coloca-se o algarismo **menos significativo** no resultado e **vai um** para ordem imediatamente superior.

Exemplo 2.19:

Base 2

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1\,1} \\ 1\,0\,1\,1\,0 \\ +\quad 0\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

Base8

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\quad\;\; 1} \\ 1\;\;2\;\;5\;\;3\;\;5 \\ +\;3\;\;3\;\;6\;\;1\;\;4 \\ \hline 4\;\;6\;\;3\;\;5\;\;1 \end{array}$$

Base16

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ B\;\;2\;\;A\;\;4\;\;7 \\ +\;\;3\;\;F\;\;0\;\;6\;\;1 \\ \hline F\;\;1\;\;A\;\;A\;\;8 \end{array}$$

Subtração:

Para efetuar a subtração procedemos da seguinte maneira:

- alinham-se o minuendo e o subtraendo escrevendo as respectivas ordens na mesma coluna;
- subtraem-se os algarismos, um a um, da direita para a esquerda;
- se todos os algarismos do minuendo forem maiores ou iguais aos algarismos do subtraendo, a subtração é direta;
- se em alguma ordem o algarismo do minuendo é menor que o algarismo do subtraendo, isto é, se a diferença entre estes algarismos for negativa, faz-se necessário pedir emprestado uma unidade ao algarismo imediato à esquerda;
- o algarismo que empresta é diminuído de uma unidade;
- o algarismo 0 (zero) quando empresta um vira 9.

Exemplo 2.20:

Base2

$$
\begin{array}{rccccc}
 & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 10} \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
- & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Base8

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 8} & \\
 & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 8} \\
 & 7 & 3 & 1 & 2 \\
- & 3 & 4 & 6 & 5 \\
\hline
 & 3 & 6 & 2 & 5
\end{array}
$$

Multiplicação:

Vamos mostrar o algoritmo da multiplicação no exemplo que segue:

- Começa-se como na adição, posicionando os operandos um sobre o outro com seus algarismos alinhados;
- Em seguida, percorrem-se os algarismos do segundo, da para a esquerda;
- Para cada algarismo, multiplica-se este pelo primeiro operando;
- O resultado é anotado alinhando-se o algarismo menos significativo com o algarismo atual do segundo operando;
- Ao final, as multiplicações de algarismos individuais são somadas.

Exemplo 2.21: $1011_{(2)} \cdot 110_{(2)}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 0 & 1 & 1_{(2)} \\
 & x & & & 1 & 1 & 0_{(2)} \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{(2)}
\end{array}
$$

Exemplo 2.22: $342_{(5)} \cdot 24_{(5)}$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & 4 & 2_{(5)} \\
 & & x & 2 & 4_{(5)} \\
\hline
 & 3 & 0 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
2 & 0 & 4 & 1 & 3_{(5)}
\end{array}
$$

Divisão:

Vamos mostrar o algoritmo da divisão com o exemplo seguinte.

Exemplo 2.23: Calcule o quociente da divisão de $3103_{(4)}$ por $33_{(4)}$.

Solução: Inicialmente é preciso saber os resultados das multiplicações dos algarismos usados na base 4 por $33_{(4)}$.

$0 \cdot 33_{(4)} = 0_{(4)}$	$2 \cdot 33_{(4)} = 132_{(4)}$
$1 \cdot 33_{(4)} = 33_{(4)}$	$3 \cdot 33_{(4)} = 231_{(4)}$

$(*)$

Então vamos aplicar em passos o algoritmo da divisão.

1º passo: Separamos os dois primeiros algarismos de maior ordem de $3103_{(4)}$ e formamos o número $33_{(4)}$. Como este número é menor do que $33_{(4)}$ separamos o algarismo seguinte e obtemos $310_{(4)}$.

Voltando aos produtos $(*)$ verificamos que é o maior produto que não supera $310_{(4)}$, logo, este número dividido por $33_{(4)}$é igual a 3. A diferença $310_{(4)} - 3 \cdot 33_{(4)}$, que pode ser calculada pelo algoritmo que segue abaixo, é igual ao primeiro resto parcial.

$$\begin{array}{r|l} 3\,1\,0\,3_{(4)} & 3\,3_{(4)} \\ \cline{2-2} -\underline{2\,3\,1}\phantom{_{(4)}} & 3 \\ 1\,3_{(4)} & \end{array}$$

2º passo: Baixamos o próximo algarismo para o lado direito do resto parcial e obtemos$133_{(4)}$. Voltando aos produtos $(*)$ verificamos que $2 \cdot 33_{(4)}$, é o maior produto que não supera $133_{(4)}$, logo, este número dividido por $33_{(4)}$ é igual a 2. A diferença $133_{(4)} - 2 \cdot 33_{(4)}$, que pode ser calculada pelo algoritmo da divisão, é igual resto da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 3\,1\,0\,3_{(4)} & 3\,3_{(4)} \\ \cline{2-2} -\underline{2\,3\,1}\phantom{\,3_{(4)}} & 3\,2_{(4)} \\ 1\,3\,3 & \\ -\underline{1\,3\,2} & \\ 1 & \end{array}$$

Logo, o quociente procurado é $33_{(4)}$.

Exemplo 2.24: Considere que

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \boxed{10}, \boxed{11}, \boxed{12}, \boxed{13}\ e\ \boxed{14}$$

são os quinze algarismos do sistema de numeração de base 15. Determine o resto da divisão do número $N = \left(123456789\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\right)_{(15)}$ por 7.

Solução: Segue que

$$N = 1 \cdot 15^{13} + 2 \cdot 15^{12} + 3 \cdot 15^{11} + \cdots + \boxed{12} \cdot 15^2 + \boxed{13} \cdot 15^1 + \boxed{14} \cdot 15^0$$

Como 15 dividido por 7 deixa resto 1, isto é: $15 = 7 \cdot 2 + 1$.

$$15 \equiv 1 \quad mod\ 7 \qquad \Rightarrow \qquad 15^k \equiv 1 \quad mod\ 7,\ \ 0 \leq k \leq 13.$$

Então:

$$\left.\begin{array}{r} 1\cdot 15^{13} \equiv 1 \quad mod\ 7 \\ 2\cdot 15^{12} \equiv 2 \quad mod\ 7 \\ 3\cdot 15^{11} \equiv 3 \quad mod\ 7 \\ \vdots \\ 12\cdot 15^{2} \equiv 12 \quad mod\ 7 \\ 13\cdot 15^{1} \equiv 13 \quad mod\ 7 \\ 14\cdot 15^{0} \equiv 14 \quad mod\ 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{1\cdot 15^{13} + 2\cdot 15^{12} + \cdots + \boxed{13}\cdot 15^{1} + \boxed{14}\cdot 15^{0}}_{N} \equiv$$

$$\equiv \underbrace{(1 + 2 + \cdots + 13 + 14)}_{105} \quad mod\ \ 7$$

Assim,

$$\left.\begin{array}{l} N \ \equiv 105 \ \ mod\ 7 \\ 105 \equiv 0 \quad mod\ 7 \end{array}\right\} \Rightarrow N \equiv 0 \ \ mod\ 7.$$

Logo, o resto da divisão de N por 7 é 0.

Exemplo 2.25: Considere um sistema de numeração de base $x, x \geq 2$, cujos dígitos são $\{0, 1, 2, 3, \ldots, x-1\}$. Vamos tomar n/x conjuntos de dígitos usados nesse sistema. Com esses n elementos é possível escrever todos os números naturais consecutivos, no sistema de base x que possuem até n/x dígitos.

Solução: Para calcular a quantidade total desses números, vamos dividir o problema em n/x acontecimentos.

- **1º acontecimento -** escolha do algarismo de primeira ordem $\rightarrow$ o número de escolhas é igual a x.
- **2º acontecimento -** escolha do algarismo de segunda ordem $\rightarrow$ o número de escolhas é igual a x.

$$\vdots$$

- **Último acontecimento -** escolha do algarismo de última ordem $\rightarrow$ o número de escolhas é igual a x.

Para cada acontecimento há sempre x escolhas. Logo, pelo princípio multiplicativo a quantidade total de números naturais distintos que podem ser escritos na base x com esses n dígitos é:

$$x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x^{\frac{n}{x}}.$$

Observe que com dois conjuntos $\{0,1,2,3,4\}$ de dígitos do sistema de base $x = 5$, ou seja, com $n = 10$ algarismos é possível escrever no máximo

$$x^{\frac{n}{x}} = 5^{\frac{10}{5}} = 5^2 = 25 \text{ números que vão de } 00_{(5)} \text{ até } 44_{(5)}.$$

Já com três com três conjuntos $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ de dígitos do sistema de base $x = 8$, ou seja, com $n = 24$ algarismos é possível escrever no máximo

$$x^{\frac{n}{x}} = 8^{\frac{24}{8}} = 8^3 = 512 \text{ números que vão de } 000_{(8)} \text{ até } 777_{(8)}.$$

O próximo exemplo mostrará que a representação finita na base 10 não implica representação finita em qualquer base.

Exemplo 2.26: Mostre que o número

$$N = \frac{23}{5}$$

tem representação finita na base 10 e não tem representação finita na base 7.

Solução: Com efeito, afirmamos que

$$(4{,}6)_{10} = \frac{(23)_{10}}{(5)_{10}} = N = \frac{(3\cdot 7^1 + 2\cdot 7^0)_{10}}{(5)_{10}} = \frac{(32)_7}{(5)_7} = (4{,}41254\ldots)_7$$

Claramente $N = (4{,}6)_{10}$. Por outro lado, temos:

$$\begin{cases} 2\cdot 5 = (10)_{10} = (1\cdot 7^1 + 0\cdot 7^0)_{10} = (32)_7 \\ 3\cdot 5 = (15)_{10} = (2\cdot 7^1 + 1\cdot 7^0)_{10} = (21)_7 \\ 4\cdot 5 = (20)_{10} = (2\cdot 7^1 + 6\cdot 7^0)_{10} = (26)_7 \\ 5\cdot 5 = (25)_{10} = (3\cdot 7^1 + 4\cdot 7^0)_{10} = (34)_7 \\ 6\cdot 5 = (30)_{10} = (4\cdot 7^1 + 2\cdot 7^0)_{10} = (42)_7 \end{cases}$$

Segue das somas dos números na base 7 que:

$$\begin{cases} (26)_7 + (3)_7 = (32)_7 \Rightarrow (32)_7 - (26)_7 = (3)_7 \\ (26)_7 + (1)_7 = (30)_7 \Rightarrow (30)_7 - (26)_7 = (1)_7 \\ (5)_7 + (2)_7 = (10)_7 \Rightarrow (10)_7 - (5)_7 = (2)_7 \\ (13)_7 + (4)_7 = (20)_7 \Rightarrow (20)_7 - (13)_7 = (4)_7 \\ (34)_7 + (3)_7 = (40)_7 \Rightarrow (40)_7 - (34)_7 = (3)_7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 32 & 5_{(7)} \\ \underline{-\,26} & \overline{4{,}41254\ldots} \\ \quad 30 & \\ \quad \underline{-\,26} & \\ \qquad 10 & \\ \qquad \underline{-\;\;5} & \\ \qquad\quad 20 & \\ \qquad\quad \underline{-\,13} & \\ \qquad\qquad 40 & \\ \qquad\qquad \underline{-\,34} & \\ \qquad\qquad\;\; 3 & \end{array}$$

E consequentemente:

A partir do 5º resto, a representação se torna periódica, pois o resto igual a 3 se repete e o resultado segue.

2.5 Exercícios de aprofundamento:

2.27 Existe alguma base β tal que $(47)_\beta$ represente um número par? Em caso afirmativo, determine todas.

2.28 Considere o sistema de numeração posicional de base β. Determine um critério para decidir se um numeral expresso na base β representa um número par ou ímpar, nos casos em que:

(a) β é um número par;

(b) β é um número ímpar.

2.29 Existem algarismos a_0, a_1 e a_2 tais que o numeral $(a_2a_1a_0)_\beta$ representa um número ímpar, qualquer que seja a base β? Generalize para números com n algarismos.

2.30 Responda:

(a) O número $(57)_9$ é múltiplo de 3? E $(123)_9$?

(b) Qual é o critério para determinar se um numeral na base 9 representa um múltiplo de 3?

(c) Considere $a = (a_n, \dots, a_0)_9$. Existe algum outro número (diferente de 3) para o qual se aplique este mesmo critério de divisibilidade na base 9? Isto é, existe algum outro $p \in N$ para o qual valha que: a é múltiplo de $p \Leftrightarrow a_0$ é múltiplo de p?

2.31 Considere o critério de divisibilidade por 11 na base 10:

Um número $a = a_n \dots a_0$ é divisível por 11 se, e somente se,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

é divisível por 11.

(a) Na base 9, podemos enunciar um critério análogo a este para determinar a divisibilidade por qual número?

(b) Enuncia e prove uma generalização deste critério para uma base $\beta \geq 2$ qualquer.

2.32 No sistema de numeração decimal, para escrever os números naturais de 1 até 11, são necessários 13 dígitos: e para escrever os números naturais de 1 até n, $n \in N$, são necessários 1341 dígitos. Calcule o valor de n.

2.33 Um livro de 200 páginas está numerado de 1 até 200 no sistema decimal e vai ser renumerado no sistema de numeração de base 8. Calcule o número, na base 10, de algarismos que serão utilizados.

Capítulo 3 – Expansão de frações na base decimal

Usualmente as propriedades das dízimas periódicas são estabelecidas a partir do algoritmo de divisão prolongada, usada para transformar uma fração ordinária em decimal na qual se acrescentam sucessivos zeros ao dividendo para continuar o processo de divisão.

Veremos que uma fração ordinária irredutível p/q quando transformada em decimal, gera uma fração decimal exata (finita) ou uma dízima periódica, que será obtida a partir das seguintes definições preliminares.

3.1 Definições

Lema 3.1: Todo número natural q, primo com 10, tem um múltiplo cuja representação decimal é formada por noves.

Demonstração: Há uma infinidade de números, tais que 9, 99, 999, etc., formados apenas por algarismos 9. Quando divididos por q, esses números deixam restos que vão de 0 a $q-1$, ao todo um número finito de restos possíveis. Logo, existem dois números formados por noves, os quais divididos por q deixam o mesmo resto. A diferença entre esses dois números é, por um lado, divisível por q, e por outro lado, um número formado por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. Tem-se então:

$$n \cdot q = 999\ldots 90 = 999\ldots 9 \cdot 10^{m}$$

Assim, q divide o produto $999\ldots 9 \cdot 10^{m}$ e, como q é primo com 10^{m}, concluímos que q divide $999\ldots 9$.

Lema 3.2: Todo número natural q tem um múltiplo cuja representação decimal é formada por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. O menor múltiplo de q desta forma termina com um número de zeros igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual q é divisível.

Demonstração: Temos $q = 2^{a} \cdot 5^{b} \cdot q'$, onde q' é primo como 10. Para fixar idéias, suponhamos $a > b$. Então a é o maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual q é divisível. Seja n o menor número natural tal que $n \cdot q' = 99\ldots.9$. Então o menor múltiplo de q formado por noves seguidos de zeros é:

$$5^{a-b} \cdot n \cdot q = 10^{a} \cdot n \cdot q' = 99\ldots.90\ldots 0 \qquad \text{(com } a \text{ zeros no final)}$$

Teorema 3.3: *Toda fração irredutível p/q onde $q = 2^{a} \cdot 5^{b}$ é quivalente a uma fração cujo denominador tem a forma 10...0 $=10^{k}$.*

Demonstração: Afirmação:

$$q = 2^a \cdot 5^b \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p}{q} = \frac{n}{10^k}$$

Supondo $(a \geq b)$

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^a \cdot 5^b} = \frac{p}{2^a \cdot 5^b} \cdot \frac{5^{a-b}}{5^{a-b}} = \frac{n}{10^k}$$

Supondo $(b > a)$

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^a \cdot 5^b} = \frac{p}{2^a \cdot 5^b} \cdot \frac{2^{b-a}}{2^{b-a}} = \frac{n}{10^k}$$

Neste caso, obtemos um decimal exato ou finito.

■

Por exemplo:

- $\frac{39}{8} = \frac{39}{2^3} = \frac{39}{2^3} \cdot \frac{5^3}{5^3} = \frac{39 \cdot 125}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{4875}{10^3}$
- $\frac{67}{25} = \frac{67}{5^2} = \frac{67}{5^2} \cdot \frac{2^2}{2^2} = \frac{67 \cdot 4}{(5 \cdot 2)^2} = \frac{268}{10^2}$
- $\frac{371}{80} = \frac{371}{2^4} = \frac{371}{2^4 \cdot 5} \cdot \frac{5^3}{5^3} = \frac{371 \cdot 5^3}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{46375}{10^4}$
- $\frac{91}{50} = \frac{91}{2 \cdot 5^2} = \frac{91}{2 \cdot 5^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{91 \cdot 2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{182}{10^2}$

Teorema 3.4: *Toda fração irredutível p/q e q é primo com 10 é equivalente a uma fração cujo denominador tem a forma 99...9.*

Demonstração: Suponhamos que o denominador q da fração p/q seja primo com 10, isto é, $mdc\,(q, 10) = 1$.
Pelo teorema acima, p/q é equivalente a uma fração $n/99 \ldots 9$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a fração dada é própria. Se p/q for imprópria, separamos a parte inteira para colocá-la antes da vírgula.
Temos a fração $n/99 \ldots 9$, cujo denominador tem m algarismos iguais a 9. Sendo ela própria, seu numerador *n* é um número de, no máximo, m algarismos. Completando-o com zeros à esquerda, podemos admitir que n tem exatamente m algarismos. Com esta convenção, podemos afirmar, que transformando $n/99 \ldots 9$ em fração decimal, obtemos a dízima periódica $0, nnn$ ..., isto é, uma dízima periódica simples.

■

Por exemplo:

- $\frac{2}{9} = 0{,}222 \ldots$

- $\dfrac{2}{99} = 0{,}020202\ldots$
- $\dfrac{347}{999} = 0{,}347347347\ldots$

A prova dessa afirmação se baseia na fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada. Segundo ela, $0 \leq a \leq 1$então:

$$\frac{a}{1-a} = a + a^2 + a^3 + \cdots$$

Em particular, temos:

- $\dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{10-1} = 2 \cdot \dfrac{1}{10-1} = 2 \cdot \dfrac{1/10}{1-1/10} =$

  $= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \cdots\right) = \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \dfrac{2}{10^3} + \cdots =$

  $= 0{,}222\ldots$

- $\dfrac{2}{99} = \dfrac{2}{100-1} = 2 \cdot \dfrac{1}{100-1} = 2 \cdot \dfrac{1/100}{1-1/100} =$

  $= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^4} + \dfrac{1}{10^6} + \cdots\right) = \dfrac{2}{10^2} + \dfrac{2}{10^4} + \dfrac{2}{10^6} + \cdots =$

  $= 0{,}020202\ldots$

- $\dfrac{347}{999} = \dfrac{347}{1000-1} = 347 \cdot \dfrac{1}{1000-1} = 347 \cdot \dfrac{1/1000}{1-1/1000} =$

  $= 347 \cdot \left(\dfrac{1}{10^3} + \dfrac{1}{10^6} + \dfrac{1}{10^9} + \cdots\right) = \dfrac{347}{10^3} + \dfrac{347}{10^6} + \dfrac{347}{10^9} + \cdots =$

  $= 0{,}347347347\ldots$

Teorema 3.5: *Toda fração irredutível p/q e $q = 2^a \cdot 5^b \cdot q'$, onde q' é primo como 10 é equivalente a uma fração cujo denominador tem a forma 99...90...0.*

Demonstração: Finalmente, se a fração própria irredutível p/q tiver o denominador q divisível por 2 ou por 5 e, além disso, por outro primo diferente destes, então p/q é equivalente a uma fração do tipo $n/99\ldots 90\ldots 0$, onde podemos admitir que o numerador n não termina em 0. Neste caso, ao transformar p/q em decimal, obtemos uma dízima periódica composta na qual a parte não periódica tem tantos algarismos quantos são os zeros do denominador acima. Para ver isto, basta escrever (supondo que sejam m zeros):

$$\frac{n}{99\ldots 90\ldots 0} = \frac{1}{10^m}\left(\frac{n}{99\ldots 9}\right)$$

e recair no caso anterior. Evidentemente, $n/99\dots9$ agora pode não ser uma fração própria mas sua parte inteira tem, no máximo m algarismos (já que a fração original era própria). Então, completando a parte inteira de $n/99\dots9$ com zeros à esquerda, podemos admitir que ela tenha m algarismos e estes serão precisamente os algarismos não periódicos.

■

Este caso fica bem mais fácil de entender com alguns exemplos concretos, como os que mostramos abaixo:

- $\frac{17}{90} = \frac{1}{10} \cdot \frac{17}{9} = \frac{1}{10} \cdot 1\frac{8}{9} = \frac{1}{10} \cdot 1{,}888\dots = 0{,}1888\dots$
- $\frac{41}{900} = \frac{1}{100} \cdot \frac{41}{9} = \frac{1}{100} \cdot 4\frac{5}{9} = \frac{1}{100} \cdot 4{,}555\dots = 0{,}04555\dots$
- $\frac{871}{9900} = \frac{1}{100} \cdot \frac{871}{99} = \frac{1}{100} \cdot 8\frac{79}{99} = \frac{1}{100} \cdot 8{,}797979\dots = 0{,}08797979\dots$

Resumindo: *Toda fração irredutível p/q é equivalente a uma fração cujo denominador tem uma das formas 10...0, 99...9 ou 99...90...0. Ocorrem os seguintes casos:*

1) *Se $q = 2^a \cdot 5^b$ então $\frac{p}{q} = \frac{n}{10\dots0}$;*
2) *Se q for primo com 10 então $\frac{p}{q} = \frac{n}{99\dots9}$;*
3) *Se $q = 2^a \cdot 5^b \cdot q'$, onde q' é primo como 10, então $\frac{p}{q} = \frac{n}{99\dots90\dots0}$.*

Nos casos 1) e 3), se o numerador n não terminar em zero, o número de zeros do denominador é igual ao maior dos expoentes a ou b.

Convém observar, de maneira geral, para obtermos os resultados acima, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração p/q pelo mesmo número, escolhido de modo que o novo denominador tenha a forma desejada, o que é possível em virtude dos lemas anteriores.

Na prática, suponhamos dada a fração 2/37. Para obter uma fração do tipo n/99...9 equivalente a ela, devemos efetuar a divisão prolongada de 99/37, acrescentando NOVES ao dividendo até obtermos um resto igual a zero! Isto é sempre possível, em virtude do primeiro lema.Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 99 & \underline{37} \\ 259 & 27 \\ 00 & \end{array}$$

Então, $37 \cdot 27 = 999$.

$$\frac{2}{37} = \frac{2 \cdot 27}{37 \cdot 27} = \frac{54}{999}$$

Se a fração dada for, por exemplo, $3/260$, estamos no caso 3 e facilmente o reduzimos ao anterior. Temos $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$. Começamos com $3/13$. A divisão prolongada (acrescentando-se noves ao dividendo) nos dá:

$$\begin{array}{l|l}
99 & 13 \\ \cline{2-2}
089 & 76923 \\
\ \ 119 & \\
\ \ \ \ 029 & \\
\ \ \ \ \ \ 039 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 00 &
\end{array}$$

Portanto, $13 \cdot 76\,923 = 999\,999$.

$$\frac{3}{260} = \frac{3}{20 \cdot 13} = \frac{15}{100 \cdot 13} = \frac{15 \cdot 76\,923}{100 \cdot 13 \cdot 76\,923} = \frac{1\,153\,845}{99\,999\,900}$$

Iremos estender para uma base b qualquer no próximo capítulo.

O problema inverso, de "achar a geratriz", é óbvio no caso de uma dízima periódica simples. Basta inverter as igualdades do tipo

$$\frac{52}{99} = 0{,}525252\ldots$$

lendo-as da direita para a esquerda.

Para uma dízima periódica composta, a regra é mais elaborada. A geratriz de uma dízima periódica composta é uma fração cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica; seu denominador é um número formado por tantos noves quantos são os algarismos periódicos, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos de um período. Assim, por exemplo:

$$0{,}62189189189\ldots = \frac{62189 - 62}{99900} = \frac{62127}{99900}$$

Se $x = 0{,}62189189189\ldots$, então:

$$100x = 62{,}189189189\ldots = 62 + \frac{189}{999} = 62 + \frac{189}{1000 - 1} =$$
$$= \frac{62000 - 62 + 189}{999} = \frac{62189 - 62}{999}.$$

Logo,

$$x = \frac{62189 - 62}{999}.$$

Se q for primo com 10, sabemos que a fração irredutível p/q gera uma dízima simples. O que se pode dizer a respeito do número de algarismo do período? Tomamos o menor número da for/ma 999...9 que seja múltiplo de q. Digamos que o número de noves aí seja m. Então, temos:

$$n \cdot q = 99 \ldots 9 = 10^m - 1, \text{ onde } 10^m = n \cdot q + 1$$

Evidentemente, m é o número de algarismos do período. E a última igualdade mostra que m é também o menor expoente tal que 10^m dividido por q deixa resto 1. Esta caracterização do número de algarismos do período não muito interessante porque não é prática, onde a maior vantagem desta é mostrar que tal número depende apenas do denominador. Mas conduz a uma informação valiosa, que é a seguinte:

"Em Teoria dos Números costuma-se indicar com símbolo $\varphi(q)$o número de inteiros inferiores a q e primos com q. Então se q for primo $\varphi(q) = q - 1$."
Por exemplo,

$$\varphi(6) = 2 \qquad \varphi(9) = 6 \qquad \varphi(21) = 12$$

Prova-se então que se q for primo com 10 então $10^{\varphi(q)}$ deixará resto 1 quando for dividido por q. Daí resulta que, se continuarmos chamando de m o menor número natural tal que 10^mdeixará resto 1 quando for dividido por q (ou seja, m é o número de algarismos periódicos da fração decimal igual a p/q) então m é um divisor de $\varphi(q)$.

É fácil provar que $\varphi(q)$ é múltiplo de *m*. Dividindo $\varphi(q)$ por *m*, seja *a* o quociente e *r* o resto. Temos $\varphi(q) = am + r$, com $0 \leq r \leq m$. Segue-se que:

$$10^{\varphi(q)} = 10^{am} \cdot 10^r = (10^m)^a \cdot 10^r$$

Como $10^{\varphi(q)}$ e 10^m deixam resto 1 quando divididos por q, segue-se que o mesmo ocorre com 10^r. Mas, sendo $r < m$, isto só acontece se for $r = 0$.

Assim, o número de algarismos periódicos da dízima gerada por p/q é um divisor de $\varphi(q)$. Por exemplo, temos $\varphi(13) = 12$, $\varphi(23) = 22$ e $1/13$, $1/23$ geram dízimas com 6 e 22 algarismos no período, respectivamente. Outro exemplo: a fração $1/29$ gera uma dízima cujo período tem um número de algarismos que divide $\varphi(29) = 28$. Tal número deve portanto ser $1, 2, 7, 14$ ou 28.

Um outro resultado é o seguinte: já que o número de algarismos periódicos da dízima gerada pela fração própria irredutível p/q depende apenas do denominador q, vemos que, se tal número for igual a $q - 1$, os algarismo periódicos serão os mesmos, seja qual for o numerador. Motivo: na divisão continuada de p por q devem aparecer os números $1, 2, \ldots, q - 1$ como restos. Depois que o primeiro deles ocorrer, os demais se sucedem na mesma ordem cíclica. O numerador p influi apenas para saber qual é o primeiro algarismo periódico.

Para encerrar, uma observação sobre o lema 3.1. Ele pode ser demonstrado como consequência da fórmula da geratriz de uma dízima simples. Com efeito, dado q primo com 10, desenvolvemos a fração $1/9q$ como dízima periódica simples e tomamos a geratriz dessa dízima, obtendo uma fração do tipo $n/99...9$. Por conseguinte $1/9q = n/99 \ldots 9$. Daí, resulta que, seja qual for o algarismo a, podemos obter um múltiplo de q da forma $aa \ldots a$.

Outra alternativa para demonstrar o lema 3.1 consiste em considerar as potências de 10 em vez dos números 9, 99, 999, etc. Como há infinitas potências e apenas um número finito de restos possíveis quando as dividimos por q, segue-se que há duas potências, digamos $10^p = 10^{m+p}$ que divididas por q deixam o mesmo resto. Logo $10^{m+p} - 10^p = 10^p(10^m - 1)$ é múltiplo de q. Como q é primo com 10, segue-se que $10^m - 1 = 99 \dots 9$ é múltiplo de q.

3.2 Exercícios de aprofundamento:

3.6 Determine uma representação para o racional 3/50 com denominador potência de 10. A seguir responda: é a única representação? Em caso negativo, quantos representações decimais existem para 3/50?

3.7 Determinar a expansão decimal da fração 3837/250.

3.8 Determine racional que tenha representação decimal igual a $0,\overline{123456}$, expressando-o através de uma fração irredutível.

3.9 Determine racional que tenha representação decimal igual a $5,\overline{123456}$, expressando-o através de uma fração irredutível.

3.10 Determine fração ordinária representando o racional cuja expansão decimal é igual a $0{,}12\overline{123456}$. A seguir, expresse-o também por meio de fração irredutível.

Capítulo 4 – Expansão de Frações Base b

4.1. Introdução

Os estudos sobre expansões nos remotam para início do século 18, vários matemáticos observaram regularidades nas expansões decimais de frações comuns, dentre eles destacamos: John Wallis [1657, 1685], Samuel Cunn [1714] e John Marsh [1742]. Algumas regras foram criadas, mas foi só a partir de 1760 em diante, que as primeiras tentativas para estabelecer uma teoria coerente de frações decimais periódicas apareceram. John Heinrich Lambert [1728, 1777] foi o primeiro a dedicar dois ensaios sobre o tema, porém somente em 1801 que Johann Carl Friedrich Gauss provou um teorema importante relacionado a determinação do comprimento de dízimas periódicas no sistema de numeração decimal.

Identificar o comportamento de uma expansão parece ser uma tarefa fácil quando tratamos de expansões relativamente pequenas, basta uma simples divisão do numerador pelo denominador, mas em alguns casos o comprimento da parte finita ou até mesmo do período, não cabe em uma simples calculadora. Por exemplo, a expansão decimal da fração 1/29 gera uma dízima periódica simples com período de 28 algarismos, já a expansão de 1/4096 é finita com 12 algarismos.

Hoje é comum artigos que tratam da expansão decimais de frações ordinárias irredutíveis p/q com $q \neq 0$, mostrando quais números racionais geram dízimas finitas e quais geram dízimas infinitas e periódicas. Queremos aqui generalizar esses conceitos e trabalhar a expansão de frações ordinárias para uma base b qualquer.

Observe a expansão da fração $19/48$ em algumas bases numéricas diferentes:

$$\frac{19}{48} = (0{,}2213)_6 = \left(0,\overline{25}\right)_7 = (0{,}3958\overline{3})_{10}$$

Veja que quando expandida para a base 6, gera uma dízima finita, na base 7 uma dízima periódica simples de período 25, já na base 10 gera uma dízima periódica composta com período 3, ou seja, a mesma fração pode ter comportamentos bem distintos dependendo da base para a qual se deseja a expansão.

4.2 A Função φ de Euler

Antes de analisarmos as expansões vamos retornar algumas definições e resultados da teoria dos números que são importantes.

Dado um número positivo n, representa-se por $\varphi(n)$ a quantidade de inteiros positivos menores que n e primos com n. Escrevemos:

$$\varphi(n) = \#\{k \in N : 1 \leq k < n \text{ } e \text{ } mdc(k,n) = 1\}.$$

Define-se assim uma função que associa cada número inteiro positivo n a um inteiro positivo $\varphi(n)$que goza das seguintes propriedades:

1. $\varphi(1) = 1$.
2. Se $n > 1$, $\varphi(n) \leq n - 1$ tem-se a igualdade se e somente se n é primo.
3. Se $mdc\ (a, n) = 1$, então $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ \ (mod\ n)$ (Teorema de Euler).
4. Se s é o menor inteiro positivo, tal que $a^s \equiv 1 (mod\ n)$ com $mdc\ (a, n) = 1$, então s divide $\varphi(n)$, s é chamado de ordem de $a\ módulo\ n$, e escrevemos como $s = ord_n(a)$.
5. Se p é primo e α é um inteiro positivo, então $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.
6. Se m e n são inteiros positivos, tais que $mdc(m, n) = 1$, então $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

4.3 Expansão na base b

Trataremos nessa seção do comportamento das expansões de frações ordinárias irredutíveis, em uma base *b* qualquer.

Dado um inteiro qualquer $b \geq 2$, todo inteiro positivo $n > 0$ pode ser escrito de modo único na forma $n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0$, com $0 \leq a_i < b$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ e $a_m \neq 0$. Representamos $n = (a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$. E essa é a expansão n na base b.

Expansão finita

Teorema 4.1: *Uma fração irredutível* $\frac{p}{q}$ *com* $q \neq 0$, *possui representação finita no sistema posicional de base b, se e somente se, o denominador q não possui fatores primos diferentes dos fatores de b. Mais precisamente, se a base for tipo* $b = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_k^{\alpha_k}$ *com* P_i *primos e os inteiros* $\alpha_i \geq 0$ *e o seu denominador* $q = \left(P_1^{\alpha_1}\right)^{\beta_1} \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{\beta_2} \ldots \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{\beta_k}$ *com os inteiros* $\beta_j \geq 1, 2, \ldots, k$, *então a expansão será finita e possuirá w algarismos após a vírgula, sendo* $w = máx\ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$.

Demonstração: Como $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} = p \cdot \left(\frac{1}{q}\right)$, basta considerar que $\frac{1}{q} = (0, d_1 d_2 \ldots d_k)_b$ seja a expansão finita na base b, $0 \leq d_i < b$, onde o inteiro $i = 1, 2, \ldots, k$ e o último algarismo $d_k \neq 0$. Logo, vamos ter:

$$\frac{1}{q} = \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \cdots + \frac{d_k}{b^k}$$

$$= \frac{1}{b^k}(d_1 \cdot b^{k-1} + d_2 \cdot b^{k-2} + d_3 \cdot b^{k-3} + \cdots + d_k)$$

Agora, tomamos $M = d_1 \cdot b^{k-1} + d_2 \cdot b^{k-2} + d_3 \cdot b^{k-3} + \cdots + d_k$, então segue que

$$\frac{1}{q} = \frac{M}{b^k} \qquad \Leftrightarrow \qquad Mq = b^k \quad \Rightarrow \quad q|b^k$$

Logo, q não tem fatores primos que não sejam fatores de b.
Reciprocamente, se q não tem fatores primos que não sejam fatores de b, seja $w = máx\,\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$, segue que:

$$\frac{1}{q} \cdot b^w = \left(\left(P_1^{\alpha_1}\right)^w \left(P_2^{\alpha_2}\right)^w \dots \left(P_k^{\alpha_k}\right)^w\right) \cdot \frac{1}{\left(P_1^{\alpha_1}\right)^{\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{\beta_k}} =$$

$$= \left(P_1^{\alpha_1}\right)^{w-\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{w-\beta_2} \cdot \dots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{w-\beta_k}$$

Seja $M = \left(P_1^{\alpha_1}\right)^{w-\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{w-\beta_2} \cdot \dots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{w-\beta_k}$, então $\frac{b^w}{q} = M$ o que significa que $M < b^w$, e assim podemos escrever:

$$M = \frac{b^w}{q} < b^w.$$

Logo:

$$M = a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 =$$

$$= (a_{w-1} a_{w-2} \dots a_2 a_1 a_0)_b.$$

Portanto, temos que, se

$$\frac{b^w}{q} = M \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} = \frac{M}{b^w}$$

$$= \frac{a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0}{b^w} =$$

$$= \frac{a_{w-1}}{b} + \frac{a_{w-2}}{b^2} + \dots + \frac{a_2}{b^{w-2}} + \frac{a_1}{b^{w-1}} + \frac{a_0}{b^w} =$$

$$= \left(0, \underbrace{a_{w-1} a_{w-2} \dots a_2 a_1 a_0}_{w\ algarismos}\right)_b$$

■

Exemplo 4.2: Determinar a expansão de $\frac{7}{48}$ na base 6**.**

Solução: Observe que $48 = 2^4 \cdot 3$. Como o 48 não tem fatores primos diferentes dos fatores de 6 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx\,\{4, 1\} = 4$, vejam:

$$\frac{7}{48} = \frac{7}{2^4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{7 \cdot 27}{(2 \cdot 3)^4} = \frac{189}{6^4} =$$

$$= \frac{5 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3}{6^4} = \frac{5 \cdot 6^2}{6^4} + \frac{1 \cdot 6}{6^4} + \frac{3}{6^4} = \frac{0}{6^4} + \frac{5}{6^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{3}{6^4} =$$

$$= (0{,}0513)_6$$

Exemplo 4.3: Determinar a expansão de $\frac{19}{192}$ na base 12.

Solução: Observe que $192 = 2^6 \cdot 3 = (2^2)^3 \cdot 3$. Como o 192 não tem fatores primos diferentes dos fatores da base $12 = 2^2 \cdot 3$, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx\ \{3, 1\} = 3$, vejam:

$$\frac{19}{192} = \frac{19}{2^6 \cdot 3} = \frac{19 \cdot 3^2}{(2^2)^3 \cdot 3^3} = \frac{171}{12^3} = \frac{1 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 + 3}{12^3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 12^2}{12^3} + \frac{2 \cdot 12}{12^3} + \frac{3}{12^3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12^2} + \frac{3}{12^3} =$$

$$= (0{,}123)_{12}$$

Expansão infinita

Teorema 4.4: *Sendo $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, uma fração irredutível, a expansão irredutível, a expansão de $\frac{p}{q}$ na base b,é uma dízima periódica simples se $mdc\ (b, q) = 1$ e terá período s a menor solução inteira positiva da equação $b^s \equiv 1 \ mod\ q$.*

Demonstração: Se s é o menor inteiro positivo, tal que $b^s \equiv 1\ mod\ q$, então $b^s - 1 \equiv\ qu$, para algum inteiro u, mas $u < b^s$, daí u na base b é dado por

$$u = d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \cdots + d_1 b^1 + d_0 = (d_{s-1}d_{s-2} \ldots d_1 d_0)_b$$

com $0 \leq d_k < b$ e $k = 0, 1, 2, \ldots, s - 1$.

Logo, $b^s - 1 \equiv\ qu$. Equivalente,

$$\frac{1}{q} = \frac{u}{b^s - 1} = \frac{d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \cdots + d_1 b^1 + d_0}{b^s} \cdot \left(\frac{1}{1 - b^{-s}}\right) =$$

$$= \frac{d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \cdots + d_1 b^1 + d_0}{b^s} \cdot \left(1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \cdots\right) =$$

$$= 0, d_{s-1} \ldots d_1 d_0 + 0, \underbrace{00 \ldots 0}_{s\ zeros}\, d_{s-1} \ldots d_1 d_0 + 0, \underbrace{00 \ldots 0}_{2s\ zeros}\, d_{s-1} \ldots d_1 d_0 + 0, \underbrace{00 \ldots 0}_{3s\ zeros}\, d_{s-1} \ldots d_1 d_0 + \cdots =$$

$$= \left(0, \overline{\underbrace{d_{s-1}d_{s-2} \ldots d_2 d_1 d_0}_{Período\ com\ s\ algarismos}}\right)_b$$

∎

Como vimos no item 4 das propriedades da função φ, o comprimento do período s é chamado $s = ord_n(b)$. A função φ de Euler torna-se uma ferramenta importante para determinar o período de uma expansão, pois o comprimento do período s será um divisor de $\varphi(q)$.

Exemplo 4.5: Determinar a expansão de $\frac{5}{168}$ na base 11.

Solução: Como o $mdc(168,11) = 1$ e

$$\varphi(168) = \varphi(2^3 \cdot 3 \cdot 7) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(7) = (2^3 - 2^2) \cdot 2 \cdot 6 = 48,$$

$s = ord_n(b) | \varphi(168) = 48$, portanto $s \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$.

Note que:

$$11^1 \equiv 11 \ \ mod\, 168 \qquad\qquad 11^2 \equiv 121 \ \ mod\, 168$$
$$11^3 \equiv 155 \ \ mod\, 168 \qquad\qquad 11^6 \equiv 1 \ \ mod\, 168$$

Temos

$$s = \ 6, \text{ e } 168 | (11^6 - 1) \ \Rightarrow \ 11^6 - 1 = 168 \cdot k, \text{ com } k \in \text{IN},$$

logo $k = 10545$. Então:

$$\frac{5}{168} = \frac{5k}{11^6 - 1} = \frac{5 \cdot 10545}{11^6 - 1} = \frac{52725}{11^6 - 1} =$$

$$= \frac{0 \cdot 11^5 + 3 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 2}{11^6} \cdot \frac{1}{(1 - 11^{-6})} =$$

$$= \frac{0 \cdot 11^5 + 3 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 2}{11^6} \cdot \left(1 + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{11^{12}} + \frac{1}{11^{18}} + \cdots \right) =$$

$$= \left(\frac{0}{11} + \frac{3}{11^2} + \frac{6}{11^3} + \frac{6}{11^4} + \frac{8}{11^5} + \frac{2}{11^6}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{11^{12}} + \frac{1}{11^{18}} + \cdots \right) =$$

$$= \frac{0}{11} + \frac{3}{11^2} + \frac{6}{11^3} + \frac{6}{11^4} + \frac{8}{11^5} + \frac{2}{11^6} + \frac{0}{11^7} + \frac{3}{11^8} + \frac{6}{11^9} + \frac{6}{11^{10}} + \frac{8}{11^{11}} + \frac{2}{11^{12}} + \cdots =$$

$$= (0,\overline{036682})_{11}$$

Teorema 4.6: Seja *Sendo* $\frac{p}{q}$ *com* $q \neq 0$, *uma fração irredutível,* $b = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_k^{\alpha_k}$ *uma base com* P_i *primos, os inteiros* $\alpha_i \geq 0$, $q = m_0 \cdot \left(P_1^{\alpha_1}\right)^{\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{\beta_k}$ *com* $\beta_j \geq 0$ *para* $j \geq 1, 2, \ldots, k$, *sendo* m_0 *um inteiro positivo tal que* $mdc(m_0, b) = 1$, *então a expansão de* $\frac{p}{q}$ *na base b será uma dízima periódica composta com período de s dígitos, sendo s a menor solução inteira positiva da equação* $b^s \equiv 1 \ mod\, m_0$ *e anteperíodo de w dígitos, onde* $w = máx\ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$.

Demonstração: De fato, seja $w = máx\ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$, segue que:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{m_0 \cdot \left(P_1^{\alpha_1}\right)^{\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{\beta_k}} = \frac{\left(P_1^{\alpha_1}\right)^{w-\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{w-\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{w-\beta_k}}{\left(P_1^{\alpha_1}\right)^{w} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{w} \cdot \ldots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{w} \cdot m_0} =$$

$$= \frac{\left(P_1^{\alpha_1}\right)^{w-\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{w-\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{w-\beta_k}}{b^w \cdot m_0}.$$

Pelo algoritmo da divisão, teremos que

$$\left(P_1^{\alpha_1}\right)^{w-\beta_1} \cdot \left(P_2^{\alpha_2}\right)^{w-\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(P_k^{\alpha_k}\right)^{w-\beta_k} = M \cdot m_0 + z,$$

com $0 \leq z < m_0$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{M \cdot m_0 + z}{b^w \cdot m_0} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \cdot \frac{1}{m_0}.$$

Como q possui pelo menos um fator primo diferente dos fatores primos da base $b = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$, temos que $0 \leq z < m_0 < b^w$, ou seja, $z < b^w$. Além disso,

$$\frac{1}{q} \cdot b^w = \frac{M \cdot m_0 + z}{m_0} = M + \frac{z}{m_0},$$

com $0 \leq \frac{z}{m_0} < 1$, logo, $M < b^w$.

Se s é o menor inteiro positivo, tal que $b^s \equiv 1 \ mod\ m_0$, então $b^s \equiv 1 \ mod\ m_0 u$, para algum inteiro u, então $u < b^s$. Portanto $uz < b^{w+s}$. Assim, podemos escrever:

$$M = a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 =$$
$$= (a_{w-1} a_{w-2} \dots a_1 a_0)_b \quad \text{com} 0 \leq a_k < b \text{ , } k = 0, 1, 2, \dots, w-1$$

e com

$$uz = d_{w+s-1} \cdot b^{w+s-1} + d_{w+s-2} \cdot b^{w+s-2} + \cdots + d_1 \cdot b^1 + d_0 =$$
$$= (d_{w+s-1} d_{w+s-2} + \cdots + d_1 d_0)_b \ \text{com} 0 \leq d_k < b \text{ , } k = 0, 1, 2, \dots, w+s-1$$

dessa forma obtemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \cdot \frac{1}{m_0} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \cdot \frac{u}{b^s - 1} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \cdot \frac{u}{b^s} \cdot \left(\frac{1}{1 - b^{-s}}\right) =$$
$$= \frac{a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0}{b^w} + \frac{z}{b^{w+s}} \cdot \left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{a_{w-1} \cdot b^{w-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0}{b^w} + \frac{d_{w+s-1} \cdot b^{w+s-1} + \cdots + d_1 \cdot b^1 + d_0}{b^{w+s}} \cdot \left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \cdots\right) =$$
$$= 0, \underbrace{000 \dots 0}_{w\ dígitos} a_{w-1} \dots a_2 a_1 a_0 + 0, \underbrace{000 \dots 0}_{w+s\ zeros} d_{w+s-1} \dots d_1 d_0 + 0, \underbrace{000 \dots 0}_{w+2s\ zeros} d_{w+s-1} \dots d_1 d_0 +$$
$$+ 0, \underbrace{000 \dots 0}_{w+3s\ dígitos} d_{w+s-1} \dots d_1 d_0 + 0, \underbrace{000 \dots 0}_{w+4s\ zeros} d_{w+s-1} \dots d_1 d_0 + \cdots$$
$$= \left(0, \underbrace{a_{w-1} \dots a_2 a_1 a_0}_{w\ algarismos} \underbrace{d_{w+s-1} d_{w+s-2} \dots d_2 d_1 d_0}_{Período\ com\ s\ algarismos}\right)_b$$

■

Exemplo 4.7: Determinar a expansão hexadecimal de $\frac{398131}{5591040}$.

Solução: Temos que: $\frac{398131}{5591040} = \frac{359 \cdot 1109}{2^{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{359 \cdot 1109}{16^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$ e o comprimento da parte não periódica será 3.

Por outro lado, $\frac{398131}{5591040} = \frac{398131}{16^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{291 \cdot 1365 + 916}{16^3 \cdot 1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \frac{1}{1365}$.

Como o $mdc(16{,}1365) = 1$, o período s da expansão de $\frac{1}{1365}$ na base 16, é dado por $s = ord_{1365}(16)$.

Mas $\varphi(1365) = \varphi(3 \cdot 5 \cdot\ 7 \cdot 13) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(\ 7) \cdot \varphi(\ 13) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 576$ e como

$$s|\varphi(1365),$$

$$s \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 64, 72, 96, 144, 192, 288, 576\}.$$

Fazendo a verificação:

$$16^1 \equiv 16\, mod\ 1365 \qquad 16^2 \equiv 256\, mod\ 1365 \qquad 16^3 \equiv 1\, mod\ 1365$$

Com isso concluímos que $s = 3$.
Por outro lado $16^3 \equiv 1\, mod\ 1365 \ \Rightarrow\ 16^3 - 1 = 1365 \cdot k, k \in \text{IN}$, verificamos facilmente que $k = 3$ e $\frac{1}{1365} = \frac{3}{16^3-1}$. Então:

$$\frac{398131}{5591040} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \frac{1}{1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \frac{3}{16^3 - 1} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \left[\frac{3}{16^3} \cdot \left(\frac{1}{1 - 16^{-3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6} \cdot \left(1 + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{16^6} + \frac{1}{16^9} + \frac{1}{16^{12}} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6} + \frac{2748}{16^9} + \frac{2748}{16^{12}} + \frac{2748}{16^{15}} + \frac{2748}{16^{18}} + \frac{2748}{16^{21}} + \cdots =$$

$$= \frac{1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + 3}{16^3} + \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^6} + \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^9} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + 3}{16^{12}} + \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^{15}} + \cdots =$$

$$= \frac{1 \cdot 16^2}{16^3} + \frac{2 \cdot 16}{16^3} + \frac{3}{16^3} + \frac{10 \cdot 16^2}{16^6} + \frac{11 \cdot 16}{16^6} + \frac{12}{16^6} + \frac{10 \cdot 16^2}{16^9} + \frac{11 \cdot 16}{16^9} + \frac{12}{16^9} +$$

$$+ \frac{10 \cdot 16^2}{16^{12}} + \frac{11 \cdot 16}{16^{12}} + \frac{12}{16^{12}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{16^3} + \frac{2}{16^3} + \frac{3}{16^3} + \frac{10}{16^4} + \frac{11}{16^5} + \frac{12}{16^6} + \frac{10}{16^7} + \frac{11}{16^8} + \frac{12}{16^9} +$$

$$+ \frac{10}{16^{10}} + \frac{11}{16^{11}} + \frac{12}{16^{12}} + \cdots =$$

$$= (0{,}123ABCABCABC\ \ldots)_{16} = (1{,}123\overline{ABC})_{16}$$

Finalmente, se $\frac{1}{q}$ gera uma dízima periódica simples de comprimento $q - 1$, então outro fato bastante interessante pode ser notado. Se k é um número inteiro positivo, tal que $1 < k < q$, então, o período da expansão de $\frac{k}{q}$ em uma base b tem exatamente os mesmos algarismos ciclicamente permutados. Observe a expansão decimal de frações cujo denominador é 7, que contém 6 dígitos.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}, \qquad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}, \qquad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571}, \qquad \frac{4}{7} = 0,\overline{571428}.$$

Eles têm os mesmos dígitos permutados ciclicamente. Devemos ter cuidado, no entanto, para lembrar que o período deve conter $q - 1$ digitos, como mencionado acima. Veja que na expansão decimal de: $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ e $\frac{3}{13} = 0,\overline{230769}$ temos os mesmos dígitos permutados ciclicamente em seus períodos, mas isto não vale para todos os k tal que $1 < k < q$.

Por exemplo, $\frac{5}{13} = 0,\overline{384615}$.

Teorema 4.8: *Se* $\frac{1}{q}$ *é uma fração, cujo período contém* $q - 1$ *dígitos, e* b *uma base numérica, tal que* $mdc(b, q) = 1$*, então o período da expansão na base* b *da fração* $\frac{k}{q}$*, em que* $1 < k < q$*, tem os mesmos algarismos ciclicamente permutados.*

Demonstração: De fato, uma condição necessária para o período da fração $\frac{1}{q}$ conter $q - 1$ dígitos, é que cada número inteiro positivo inferior q apareça uma, e apenas uma vez, nos primeiros $q - 1$ passos da divisão. Assim, k é um desses restos obtidos na divisão de 1 por q. O numerador k influi apenas para saber qual o primeiro algarismo periódico, depois que o primeiro ocorrer os demais se sucedem na mesma ordem cíclica.

■

Capítulo 5 – Atividades Propostas para Sala de Aula

ATIVIDADE 1: Jogo do Troca Peças (Atividade direcionada ao 2º segmento do ensino fundamental)

DURAÇÃO: 100 minutos

ASSUNTO: Bases numéricas

OBJETIVO: Escrever números na base dez em uma nova de base.

JOGADORES: 2 a 4

MATERIAL PEDAGÓGICO:

- 30 tampinhas azuis;
- 30 tampinhas vermelhas;
- 30 tampinhas amarelas;
- 9 tampinhas pretas;
- 4 potes para armazenar as tampinhas conforme as cores;
- folha para registro individual de cada jogador;
- 1 dado.

REGRAS:

- ordenar a sequência de jogadores;

- sortear com um dado, número diferente de um para fixar "o agrupamento para mudar de nível";

- o primeiro joga o dado, vê a quantidade que saiu e pega o número correspondente de tampinhas azuis no pote, em seguida, passa a vez para o segundo que faz o mesmo até completar a rodada;

- as jogadas continuam até que o jogador complete tantas tampinhas azuis, conforme o número sorteado para mudança de nível;

- ao completar, o jogador troca as "tantas" tampinhas azuis por uma tampinha vermelha e devolve as correspondentes tampinhas azuis no pote.

- ao completar o nível com tampinhas vermelhas, o jogador troca as "tantas" tampinhas vermelhas por uma tampinha amarela e devolve as correspondentes tampinhas vermelhas no pote.

- Fazendo esse mesmo procedimento ao completar o nível com tampinhas amarelas, o jogador troca as tampinhas amarelas por uma tampinha preta e devolve as correspondentes tampinhas amarelas no pote.

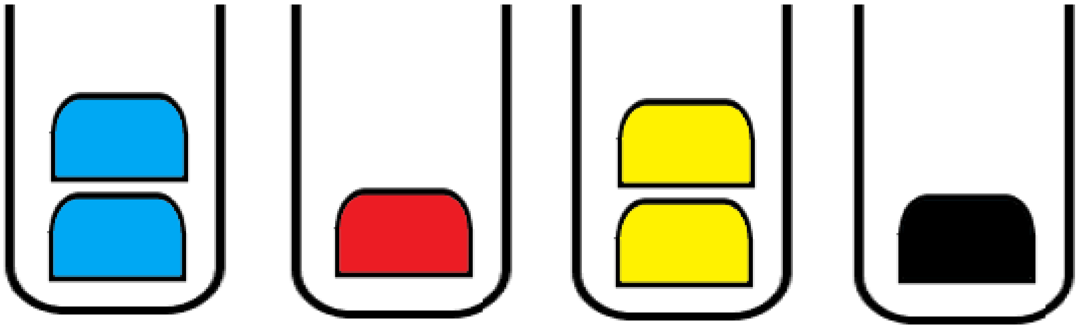
- ganha o jogo quem primeiro completar 3 tampinhas pretas.

Esta atividade visa a promover discussão acerca da transformação de números na base escolhida para fixar “o agrupamento para mudar de nível” em uma nova base através do jogo.

Sugira aos alunos quais equivalências numéricas surgidas (agrupamentos) ao longo do jogo com números na base 10.

Por exemplo:

- um determinado jogador obteve o seguinte resultado ao término de um jogo, usando o número 3 como agrupamento para mudança de nível:



Temos, assim:

- 2 tampinhas azuis;
- 1 tampinha vermelha;
- 2 tampinhas amarelas;
- 1 tampinha preta.

Transformando estes agrupamentos em um número na base 10, temos:

$$\mathbf{2} \cdot 3^0 + \mathbf{1} \cdot 3^1 + \mathbf{2} \cdot 3^2 + \mathbf{1} \cdot 3^3 = 2 + 3 + 18 + 27 = 50$$

Desta forma, promova que os alunos apresente e compare seus respectivos resultados na base 10, tal como o exemplo.

ATIVIDADE 2:

"Extraída do Caderno de Atividades Pedagógicas Mais Educação do Estado do Rio de Janeiro – Plano Mensal 03 – 7º ano – 2º Bimestre" da qual fiz parte da equipe de autores.

Desafio 1: Que racional é este?

O desafio desta atividade consiste em fazer com que os alunos reconheçam os números racionais nas seguintes formas: decimais exatos, dízimas periódicas simples e compostas. Além disso, apresenta aos alunos os decimais infinitos não periódicos, dando ênfase ao fato de que estes números não pertencem ao conjunto dos números racionais. Para atingir tal objetivo utilizaremos um jogo no qual relacionaremos cada número racional com sua respectiva forma decimal.

- **DURAÇÃO PREVISTA:** 90 minutos
- **ÁREA DE CONHECIMENTO:** Matemática
- **ASSUNTO**: Números Racionais
- **OBJETIVOS**: Reconhecer números racionais.
- **PRÉ-REQUISITO:** Nenhum.
- **ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:** Em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.
- **HABILIDADES ASSOCIADAS À OFICINA:**

  – Reconhecer números racionais na forma decimal exata e de dízimas periódicas.

Qual será o nosso desafio nesta aula?

O desafio desta atividade consiste em fazer com que os alunos reconheçam os números racionais nas seguintes formas: decimais exatos, dízimas periódicas simples e compostas. Além disso, apresenta aos alunos os decimais infinitos não periódicos, dando ênfase ao fato de que estes números não pertencem ao conjunto dos números racionais. Para atingir tal objetivo utilizaremos um jogo no qual relacionaremos cada número racional com sua respectiva forma decimal.

De quais materiais iremos precisar?

- Folhas de rascunho;
- Fichas dos Jogos (ver anexos I e II).

Quebrando o gelo!

Inicie a aula comentando com os alunos as diferentes representações dos números racionais. Apresente aos alunos como estes números podem ser representados. Explique cada uma das diferentes formas: decimais exatos, dízimas periódicas simples e dízimas periódicas compostas. É importante explicar aos alunos que os números racionais podem se apresentar na forma fracionária, e que basta dividir o numerador pelo denominador para obter a forma decimal.

Por exemplo:

$\frac{5}{3} = 1,666 \ldots$	$\frac{7}{2} = 3,5$	$\frac{147}{90} = 1,6333 \ldots$
Dízima Periódica Simples	**Decimal Exato**	**Dízima Periódica Composta**

O caminho das pedras

O desafio desta atividade será trabalhado na forma de um jogo. A atividade deve ser realizada em grupos de 2 ou 4 alunos. Para cada grupo será necessário a reprodução das cartelas apresentadas nos anexos I e II.

Para estimular a competição entre os alunos, o jogo pode ser realizado em duplas que irão se revezando entre si na sala de aula, até que se obtenha uma dupla vencedora.

Após separar os alunos em duplas ou grupos, apresente-os as regras do jogo.

REGRAS DO JOGO:

1. O Professor/monitor decide quem irá iniciar o jogo.

2. O jogo se inicia com todas viradas para baixo, tanto as cartas principais como as cartelas numeradas.

3. Para dar início a primeira rodada, vira-se uma das cartas principais. Exemplo: Decimais Exatos.

4. Em seguida, cada dupla irá sortear uma das cartas numeradas.

5. Após o sorteio de uma carta para cada dupla, verificamos se o número sorteado corresponde à forma decimal apresentada na carta principal.

6. Se o número sorteado corresponder à carta principal, a carta ficará com a dupla. Caso contrário, a carta deve ser devolvida para a mesa de jogo. E, dessa forma se encerra uma rodada.

7. Mistura-se a Carta Principal com as outras 3 cartas e realiza-se todo o processo novamente.

8. Quando acabarem todas as cartas numeradas da mesa, vence a dupla ou o grupo que estiver com mais cartas em mãos.

Os Mistérios por trás do Desafio

Este desafio apresenta alguns mistérios que vale a pena discutir com a turma. Por exemplo: que características apresentam as frações que se transformam em decimais exatos? E as frações que se transformam em dízimas?

Discuta com os alunos outras formas de identificar os racionais. Sugira que os alunos fatorem o denominador de uma fração. Observe os exemplos:

■ $1{,}4 = \frac{14^{\div 2}}{10^{\div 2}} = \frac{7}{5}$

Note que $10 = 2 \cdot 5$

■ $2{,}5 = \frac{25^{\div 5}}{10^{\div 5}} = \frac{5}{2}$

Quando o denominador de uma fração apresenta somente fatores 2 e/ou 5 esta fração representará um decimal exato.

Quando a fração representar uma dízima periódica, obrigatoriamente a decomposição do denominador apresenta fatores primos diferentes de 2 e 5. Veja o caso abaixo onde o 3 é fator do denominador.

■ $1{,}333\ldots = 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$

Ressaltamos que neste desafio não abordaremos como transformar números decimais em frações ou vice-versa.

Amarrando as Idéias

Após o desafio, os alunos serão capazes de reconhecer os números racionais na forma decimal e na forma fracionária. Aproveite para trabalhar outras habilidades relacionadas a este desafio, se achar adequado. Uma das habilidades que podem ser trabalhadas é a transformação de um número na forma fracionária para a forma decimal. Reforce com os alunos que a fração é uma divisão e apresente à turma alguns exemplos. Em seguida, se desejar, avalie o desenvolvimento dessa habilidade com as questões a seguir:

01. (M100082A9) A fração correspondente ao número 1,4 é:

(A) 5/7

(B) 7/5

(C) 1/3

(D) 1/4

(E) 1/5

02. (PAMA0430MS) A representação decimal de $\frac{1}{2}$ é :

(A) 0,5

(B) 0,4

(C) 0,3

(D) 0,2

(E) 0,1

03. (PAMA09042MS) No quadro abaixo estão escritos alguns números

	2,5		5,2	
0,1		0,4		0,5

Neste quadro, o número que representa a fração $\frac{2}{5}$ é:

(A) 0,1

(B) 0,4

(C) 0,5

(D) 2,5

(E) 5,2

04. (PAMA08134MS) O Número 3,025 pode ser representado pela fração:

(A) 325/1000

(B) 121/40

(C) 13/4

(D) 3025/100

(E) 3025/10

GABARITO:

01. B

02. A

03. B

04. B

Decimais
Exatos

Dízimas Periódicas Simples

Dízimas Periódicas Composta

Decimais Infinitos Não Periódicos
ATENÇÃO: Não pertence ao Conjunto dos Números Racionais

Anexo II – Cartas Numeradas

$\frac{21}{9}$	2,3	2,1333...
2,134...	$\frac{574}{10}$	5,744...
57,444...	8,3434...	8,343

8,342...	$\frac{941}{10}$	9,1444...
94,111...	156,9	15,999...
$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{68}{10}$
$\frac{574}{90}$	$\frac{75}{6}$	$\frac{54}{5}$

ATIVIDADE 3:

"Extraída do Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada - 01
1º Bimestre – 9º Ano. SEEDUC - RJ" da qual fiz parte da equipe de autores.

Aula 1: Números decimais finitos ou infinitos

Caro aluno, nesta aula você irá estudar sobre os números decimais. Eles estão intimamente ligados à nossa realidade, principalmente quando lidamos com situações financeiras. Espero que você goste muito desta aula!

http://www.guiasjp.com/fotos_noticias/foto_1238674982.96.jpg

1 – NÚMEROS DECIMAIS:

Existem duas categorias de números decimais: os finitos e os infinitos. Ou seja, os que têm finitas casas decimais e os que têm infinitas casas decimais. Veja alguns exemplos:

Decimais finitos:	Decimais infinitos:
1,2	0,333...
3,11	-6,121212...
-5,84	8,01001000100001...
-11,999	-7,012345678910111213...

1.1 – NÚMEROS DECIMAIS FINITOS:

Os números decimais finitos são chamados assim pois têm finitas casas decimais. Estes números podem ser transformados em fração e, por isso, eles são números racionais. Vamos transformar um decimal finito em fração? Observe o exemplo:

O número escolhido é 0,6. Observe que ele tem apenas uma casa decimal. Por isso, vamos multiplicá-lo e dividi-lo por 10:

$$0{,}6 = 0{,}6 \cdot \frac{10}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Como $\frac{10}{10} = 1$, podemos multiplicar 0,6 por esta fração numa boa! Você concorda?

1.2 – NÚMEROS DECIMAIS INFINITOS:

Os números decimais infinitos podem ser periódicos ou não periódicos. Vamos primeiro estudar os periódicos.

Os decimais periódicos podem ser simples ou compostos, dependendo dos números que aparecem após a vírgula. Observe:

- 0,3333... – Decimal Periódico Simples, pois, após a vírgula, podemos logo identificar o período: 3
- 0,45555... – Decimal Periódico Composto, pois, após a vírgula, temos o número 4, que chamamos de anteperíodo.

Nesta aula, vamos estudar como representar alguns decimais periódicos infinitos na forma de fração. Para isso, iremos utilizar um método prático. Veja como proceder!

A) Para se obter a fração que gera a dízima no caso de decimais periódicos simples, utilizaremos o período como numerador e como denominador um número formado por tantos dígitos **9** quantos forem os dígitos do período. Observe os exemplos:

- $0{,}333\ldots=\dfrac{3}{9}$

- $0{,}454545\ldots=\dfrac{45}{99}$

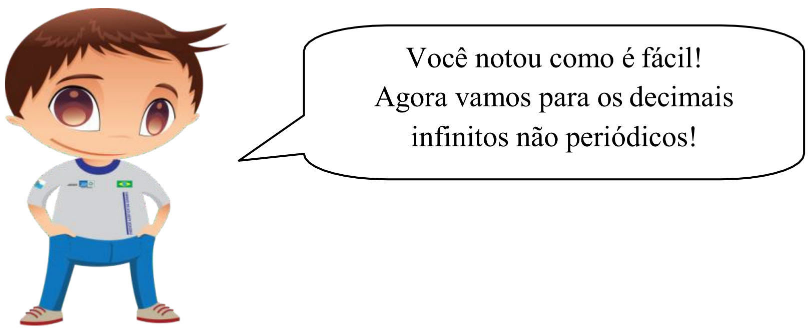
B) No caso dos decimais periódicos compostos, teremos que ter um pouco mais de atenção. Observe o exemplo:

- $0{,}45222\ldots=\dfrac{452-45}{900}=\dfrac{407}{900}$

Note que o número **452** é formado pela junção do anteperíodo **45**, com o período 2. Ao subtrairmos deste número o anteperíodo, obtemos **452** – **45**, que será o numerador da fração. O denominador é formado por tantos dígitos **9**, quantos são os dígitos do período, assim como no caso das dízimas periódicas simples, seguidos de tantos dígitos **0** quantos são os dígitos do anteperíodo. Vamos ver se você entendeu? Observe esses outros exemplos:

$$0{,}1222\ldots=\frac{12-1}{90}=\frac{11}{90}$$

$$0{,}2333\ldots=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}$$



Para terminar nossa aula, faltam os números decimais infinitos não periódicos. Esses não podem ser escritos em forma de fração e, por isso, são números irracionais. Veja alguns exemplos:

- 1,2365894512657842...
- 3,01001000100001000001...
- - 11,12345678910111213141516 17...

Veja que as casas decimais podem até ter um padrão, mas não é um padrão periódico!
Esta é uma ótima oportunidade para ver o que significa a palavra “periódico”. Consulte um dicionário!

A palavra irracional tem o seguinte significado: “aquilo que não é racional”. Ou seja, é importante ressaltar que não existem números que sejam racionais e irracionais ao mesmo tempo.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem/0000001523/0000018247.jpg

Você lembra do Pi (π)? Pi é uma letra grega que representa um número irracional muito famoso. Com ele podemos resolver problemas que envolvem o comprimento e a área de uma circunferência. Abaixo podemos ver as primeiras casas decimais de Pi:

$$\pi = 3{,}14159265\ ...$$

Existe entre os cientistas e pesquisadores uma busca incessante para descobrir cada vez mais as casas decimais do Pi, a fim de mostrar que ele é periódico. Mas, até então, nada foi descoberto neste sentido. Uma das descobertas foi feita no ano de 2009 pelos pesquisadores da Universidade de Tsukuba no Japão. Eles utilizaram um supercomputador, que verificou 2,5 trilhões de casas decimais de Pi e não foi descoberto padrão periódico em suas casas decimais. Atualmente, um engenheiro Japonês anunciou que bateu este recorde, dizendo que encontrou aproximadamente 2,7 trilhões de casas decimais do Pi.

Agora que você relembrou conceitos importantes, chegou a hora de aplicar nas atividades. Vá em frente! Bom estudo!

Atividades Comentadas 1

01. Classifique os números abaixo como decimais infinitos periódicos (P) ou decimais infinitos não periódicos (NP):

a) (   ) - 6,313131...

b) (   ) 4,12112111211112...

c) (   ) 11,111...

d) (   ) 78,1234444...

e) (   ) 3,14156987456321...

02. Represente os decimais finitos em fração:

a) 0,8 =

b) 1,5 =

c) 23,34 =

d) 0,002 =

03. Represente os decimais infinitos periódicos em fração:

a) 0,444... =

b) 0,323232... =

c) 0,123123... =

d) 0,888...=

04. Transforme os decimais infinitos periódicos em fração:

a) 0,41111 ... =

b) 8,1333... =

c) 5,1777... =

d) 2,31444... =

ATIVIDADE 4: Expandindo Frações na base b (Atividade direcionada ao 1º ano do ensino médio)

DURAÇÃO: 100 minutos

ASSUNTO: Bases numéricas e dízimas periódicas

OBJETIVO: Expandir frações em uma nova de base.

PRÉ-REQUISITO: Bases numéricas e números racionais.

MATERIAL PEDAGÓGICO:

- folha com resumo
- lápis e borracha.

A priori o professor deverá fazer uma revisão com os alunos acerca do reconhecimento da forma decimal de uma fração ordinária irredutível p/q, ou seja, decimais exatos, dízimas periódicas simples e compostas na base 10 através das propriedades mencionadas no capítulo 3.

Para isso, o professor deverá propor quadro abaixo:

Sendo p/q uma fração ordinária irredutível quando transformada em decimal, gera:

Classificação	Forma do Denominador	Fração Geratriz
Decimal Exato	$q = 2^a \cdot 5^b$	$\frac{p}{q} = \frac{n}{10^k}$
Dízima Periódica Simples	$mdc(q, 10) = 1$	$\frac{p}{q} = \frac{n}{99\ldots9}$
Dízima Periódica Composta	$q = 2^a \cdot 5^b \cdot q'$ e $mdc(q', 10) = 1$	$\frac{p}{q} = \frac{n}{99\ldots90\ldots0}$

Exemplos:

- $\frac{37}{50} = 0{,}74 \qquad \rightarrow \qquad Decimal\ exato$

Observe que: $50 = 2 \cdot 5^2$

- $\frac{106}{33} = 3{,}212121\ldots = 3{,}\overline{21} \qquad \rightarrow \qquad Dízima\ Periódica\ Simples$

Observe que: $mdc(33{,}10) = 1$

- $\frac{19}{48} = 0{,}3958333\ldots = 0{,}3958\overline{3} \qquad \rightarrow \qquad Dízima\ Periódica\ Composta$

Observe que: $48 = 2^4 \cdot 3\ \ e\ \ o\ \ mdc(3{,}10) = 1$

O professor deverá, neste momento, fomentar aos alunos como seria a representação dessas mesmas frações em outra base numérica. E apresentar que as propriedades continuam válidas em relação ao denominador e a nova base, da seguinte maneira:

Classificação	Forma do Denominador	Forma Decimal
Decimal Exato	q não possui fatores diferentes de b	a expansão finita possui w algarismos após a virgula, onde: $w =$ maior expoente dos fatores primos de q
Dízima Periódica Simples	$mdc(b, q) = 1$	período s onde $b^s \equiv 1\ mod\ q$ e anteperíodo w
Dízima Periódica Composta	$q = m_0\ \cdot$(fatores primos da base b) e $mdc(m_0, b) = 1$	período s onde $b^s \equiv 1\ mod\ m_0$ e anteperíodo w

Exemplos:

a) Determine a expansão $\frac{19}{48}$ na base 6.

Solução: Observe que $\frac{19}{48}$ na base 10 representava uma dízima periódica composta.

Sendo $48 = 2^4 \cdot 3$. Como o 48 não tem fatores primos diferentes dos fatores de 6 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx\,\{4, 1\} = 4$, vejam:

$$\frac{19}{48} = \frac{19}{2^4 \cdot 3} = \frac{19 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{19 \cdot 27}{(2 \cdot 3)^4} = \frac{513}{6^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3}{6^4} = \frac{2 \cdot 6^3}{6^4} + \frac{2 \cdot 6^2}{6^4} + \frac{1 \cdot 6}{6^4} + \frac{3}{6^4} =$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{3}{6^4} = (0{,}2213)_6$$

Portanto, $\frac{19}{48} = (0{,}2213)_6$

b) Determine a expansão $\frac{7}{9}$ na base 8.

Solução: Como o $mdc(9, 8) = 1$e

$$\varphi(9) = \varphi(3^2) = (3^2 - 3) = 6$$

$s = ord_n(b) | \varphi(9) = 6$, portanto $s \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Note que:

$$8^1 \equiv 8 \ mod\ 9 \qquad\qquad 8^2 \equiv 1 \ mod\ 9$$
$$8^3 \equiv 8 \ mod\ 9 \qquad\qquad 8^6 \equiv 1 \ mod\ 9$$

Temos

$$s = 2, \text{ e } 9|(8^2 - 1) \Rightarrow 8^2 - 1 = 9 \cdot k, \text{ com } k \in \text{IN},$$

logo $k = 7$. Então:

$$\frac{7}{9} = \frac{7k}{8^2 - 1} = \frac{7 \cdot 7}{8^2 - 1} = \frac{49}{8^2 - 1} =$$

$$= \frac{6 \cdot 8^1 + 1}{8^2} \cdot \frac{1}{(1 - 8^{-2})} = \frac{6 \cdot 8^1 + 1}{8^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^6} + \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{6}{8} + \frac{1}{8^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^6} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{6}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{6}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \frac{6}{8^5} + \frac{1}{8^6} + \cdots = (0, \overline{61})_8$$

c) Determinar a expansão de $\frac{37}{240}$ na base 4.

Solução: Temos que: $\frac{37}{240} = \frac{37}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot} = \frac{37}{4^2 \cdot 3 \cdot 5}$ e o comprimento da parte não periódica será 2.

Por outro lado, $\frac{37}{240} = \frac{37}{4^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{37}{4^2 \cdot 15} = \frac{2 \cdot 15 + 7}{4^2 \cdot 15} = \frac{2}{4^2} + \frac{7}{4^2} \cdot \frac{1}{15}$.

Como o $mdc(4{,}15) = 1$, o período s da expansão de $\frac{1}{15}$ na base 4, é dado por $s = ord_{15}(4)$.
Mas $\varphi(15) = \varphi(3,5) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$ e como

$$s | \varphi(15),$$

$$s \in \{1, 2, 4, 8\}.$$

Fazendo a verificação:

$$4^1 \equiv 4 \; mod \; 15 \qquad\qquad 4^2 \equiv 1 \; mod \; 15$$
$$4^4 \equiv 1 \; mod \; 15 \qquad\qquad 4^8 \equiv 1 \; mod \; 15$$

Com isso concluímos que $s = 2$.
Por outro lado $4^2 \equiv 1 \; mod \; 15 \;\; \Rightarrow \;\; 4^2 - 1 = 15 \cdot k, k \in$ IN, verificamos facilmente que $k = 1$ e $\frac{1}{15} = \frac{1}{4^2 - 1}$. Então:

$$\frac{37}{240} = \frac{2}{4^2} + \frac{7}{4^2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{4^2} + \frac{7}{4^2} \cdot \frac{1}{4^2 - 1} = \frac{2}{4^2} + \frac{7}{4^2} \cdot \left[\frac{1}{4^2} \cdot \left(\frac{1}{1 - 4^{-2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{4^2} + \frac{7}{4^4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{4^8} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{4^2} + \frac{7}{4^4} + \frac{7}{4^6} + \frac{7}{4^8} + \frac{7}{4^{10}} + \cdots =$$

$$= \frac{2}{4^2} + \left(\frac{1 \cdot 4^1 + 3}{4^4}\right) + \left(\frac{1 \cdot 4^1 + 3}{4^6}\right) + \left(\frac{1 \cdot 4^1 + 3}{4^8}\right) + \left(\frac{1 \cdot 4^1 + 3}{4^{10}}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{2}{4^2} + \left(\frac{1 \cdot 4^1}{4^4} + \frac{3}{4^4}\right) + \left(\frac{1 \cdot 4^1}{4^6} + \frac{3}{4^6}\right) + \left(\frac{1 \cdot 4^1}{4^8} + \frac{3}{4^8}\right) + \left(\frac{1 \cdot 4^1}{4^{10}} + \frac{3}{4^{10}}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{3}{4^6} + \frac{1}{4^7} + \frac{3}{4^8} + \frac{1}{4^9} + \frac{3}{4^{10}} + \cdots =$$

$$= (0{,}2131313\ldots)_4 = (0{,}2\overline{13})_4$$

Após a apresentação dos exemplos convém o professor citar que uma fração ordinária tendo uma representação decimal em uma determinada base ela necessariamente terá o mesmo comportamento em outra base distinta. E que o mesmo possa promover novos exemplos para confirmar essa propriedade.

Capítulo 6 – Conclusão

Esperamos que esse trabalho possa contribuir e incentivar, tanto docentes quanto discentes do Ensino Básico, a estabelecer uma nova relação com as frações decimais periódicas. Geralmente a abordagem do assunto enquanto conteúdo programático obrigatório, nos mostra apenas como transformar estas dízimas em frações ordinárias na base decimal.

A nossa proposta de trabalho busca apresentar as relações pertinentes quando transformamos as frações ordinárias em decimais exatos ou dízimas periódicas dependendo da relação do denominador da fração com a base 10 e verificamos que este resultado continua válido ao estendermos para uma base b qualquer, a partir da aplicação da função φ de Euler, isto é, por meio desta função descrevemos como transformar as frações ordinárias irredutíveis em dízimas periódicas simples e compostas em qualquer base.

Apresentamos também uma abordagem acerca de como operar em uma base b qualquer gerando a reflexão sobre paridade e finitude da representação.

Também esperamos que este trabalho sirva de material bibliográfico para o professor se aprofundar no assunto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ALENCAR FILHO, Edgar de; **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.

HEFEZ, Abramo; Coleção Profmat – Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números racionais, reais e complexos.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor. **Livro do Professor de Matemática. Volume l: Números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

CATALDO, João Carlos; CHAVES, João Jorge F.; FANTIN, Silas; BRENER, Carlos. **Tópicos de Aritmética. Volume II.** Rio de Janeiro: Matvest, 2017.

________. Voltando a falar sobre dízimas. **Revista do Professor de Matemática, n. 10**. Conceitos e controvérsias.1987.

________. Que significa a igualdade 1/9=0,111...?. **Revista do Professor de Matemática, n. 2.** Conceitos e controvérsias.

________. Dúvidas sobre dizímas. **Revista do Professor de Matemática, n. 8.** Conceitos e controvérsias.

________. A Função φ de Euler e a Expansão Periódica de Frações na Base b.**Revista Ciências Exatas e Naturais, Vol. 19, n. 1**. Jan/Jun,2017.