Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Equação de Pell e Aplicações

Danilo Pezzini da Silva
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

agosto de 2020

Equação de Pell e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Danilo Pezzini da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 10 de agosto de 2020.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dra. Thais Silva do Nascimento
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586e Silva, Danilo Pezzini da.
Equação de Pell e Aplicações / Danilo Pezzini da Silva. -- 2020
xi, 30 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Equações. 2. Diofantinas. 3. Quadráticas. 4. Aritmética. 5. Pell. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: A equação de Pell e aplicações

Autor: mestrando **Danilo Pezzini da Silva**

Dissertação defendida e aprovada em 10 de Agosto de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Aldi Nestor de Souza (Presidente Banca/Orientador)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
2. Doutora Thais Silva do Nascimento (Examinadora Interna)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
3. Doutor Junior Cesar Alves Soares (Membro Externo)
Instituição: UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, **10/08/2020**.

Documento assinado eletronicamente por **THAIS SILVA DO NASCIMENTO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 10/08/2020, às 18:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **ALDI NESTOR DE SOUZA**, **Usuário Externo**, em 10/08/2020, às 18:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Junior Cesar Alves Soares**, **Usuário Externo**, em 10/08/2020, às 19:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23108.058192/2020-01 SEI nº 2729600

À minha minha base

Danielli Catiani Pezzini

Josefa Samara da Conceição Carlos

Marli Terezinha Pezzini

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus;

A todos os professores que contribuíram com a minha formação acadêmica;

Ao meu orientador Professor Doutor Aldi Nestor de Souza, pelo incentivo, dedicação e confiança;

A professora Doutora Thais Silva do Nascimento e ao professor Doutor Junior Cesar Alves Soares, membros da banca examinadora, pelos apontamentos e sugestões que guiaram a versão final deste trabalho.

Aos colegas de turma, com os quais mesmo em meio a desafios e dúvidas foram divididos bons momentos. Em especial à aqueles que foram companheiros de viagem, e que com boas histórias e risadas tornavam o percurso entre cidades menos cansativos;

Aos amigos, que sempre se fizeram presentes incentivando e dividindo as aflições e alegrias neste período;

Por fim, agradeço minha família, em especial minha querida irmã Danielli Catiani Pezzini, minha esposa Josefa Samara da Conceição Carlos e a minha mãe Marli Terezinha Pezzini, pessoas especiais que me inspiram e motivam a buscar ser e fazer melhor.

Muito obrigado a todos.

"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo".

Albert Einstein.

Resumo

Nesta dissertação é feito um estudo sobre a Equação de Pell, sendo analisados casos particulares e apresentada a construção de suas soluções gerais, caso estas existam. São apresentados também métodos particulares na busca de tais soluções. Os resultados obtidos são utilizados no final do trabalho na resolução de alguns problemas.

Palavras chave: Equações, Diofantinas, Quadráticas, Aritmética, Pell.

Abstract

In this paper, it is made a study about the Pell Equation, by analyzing particular cases and presenting the constructions of its general solutions, if they exist. Particular methods are also presented in the search for such solutions. The results obtained are used at the end of the work to solve some problems.

Keywords: Equations, Diophantine, Quadratic, Arithmetic, Pell.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse
mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação"
(Carl Friedrich Gauss)

Atribuída erroneamente a John Pell (1601-1685) por Leonard Euler (1707 - 1783), a equação $x^2 - dy^2 = m,\ d\ e\ m \in \mathbb{Z}$, denominada Equação de Pell, foi estudada por diversos matemáticos ao longo dos anos, tendo sido Joseph Louis Lagrange (1736-1813) o primeiro a publicar uma prova da existência de infinitas soluções para o caso $m = 1$.

Esta dissertação tem por objetivo, realizar um estudo sobre tal equação, respondendo se existem ou não soluções, a forma como se pode encontrá-las e a generalização das soluções.

A inspiração inicial desta dissertação se deu pelos trabalhos desenvolvidos por Souza (2018) e Gonçalves (2011), onde, respectivamente, fazem um estudo sobre frações contínuas aplicando a teoria na solução da equação de Pell e um estudo da equação particular de Pell onde $m = 1$.

Assim, no primeiro capítulo são apresentados alguns conceitos necessários para a construção dos argumentos utilizados no centro da proposta, como por exemplo, as frações continuas, com as quais podemos chegar a soluções da equação de Pell.

O segundo capítulo vem a cumprir a proposta do trabalho, onde são apresentados desde o caso fundamental $x^2 - dy^2 = 1$, mostrando a existência de infinitas soluções e que todas são geradas a partir da chamada solução minimal ou fundamental, que nos fornece um entendimento inicial de tal equação, até a apresentação das condições para soluções do caso geral $x^2 - dy^2 = m$, sendo apresentado também a forma na qual todas as soluções, caso existam, são escritas.

Por fim, no terceiro capítulo trazemos alguns problemas resolvidos via análise da Equação de Pell envolvida.

Capítulo 1

Noções fundamentais

Neste capítulo serão apresentados definições e teoremas que servirão de argumentos durante a análise de nossa proposta. Usaremos como referência Souza (2018), Morgado (2013) e Silva (2015).

1.1 Princípio das gavetas

Teorema 1. ***Princípio das gavetas:*** *Dados $m,n \in \mathbb{Z}$, com $m \geq n$, se colocarmos m objetos em n gavetas, então em pelo menos uma gaveta haverão pelo menos dois objetos.*

Demonstração: De fato, o número médio de objetos por gaveta é $\dfrac{m}{n} > 1$. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1.

Exemplo 1. *Em qualquer conjunto de 8 inteiros há sempre dois deles cuja diferença é um múltiplo de 7.*

Solução: Sabemos que todo inteiro pode ser escrito da forma $7k+i$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $i = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, que são os possíveis restos da divisão por 7. Logo, pelo princípio das gavetas ao menos dois deles terão o mesmo resto i, portanto:

$$(7k_j + i) - (7k_l + i) = 7(k_j - k_l) + i - i = 7k$$

$\square$

1.2 Densidade dos racionais nos reais

Definição 1. *Dizemos que o conjunto dos números racionais é denso nos reais pelo fato de todo número real possuir uma boa aproximação pelos racionais.*

Teorema 2. ***(Dirichlet)*** *Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existem infinitos $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, com $MDC(p, q) = 1$ tal que:*

$$| \alpha - \frac{p}{q} |< \frac{1}{q^2}$$

Demonstração: Dado $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x e por $\{x\}$ a parte decimal de x. Assim, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

Seja N $\in \mathbb{N}$. Consideremos os N + 1 números seguintes:

$$0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, ..., \{N\alpha\} \in [0, 1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right).$$

Agora, pelo princípio das gavetas, existem i, j, k tais que $0 \leq i, j \leq N$ e $1 \leq k \leq N$ e temos $\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right)$. Note que:

$$|j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |(j - i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |q\alpha - p|$$

Onde $0 < q := j - i \leq N$ e $p := \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Portanto:

$$|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q}$$

implica que

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

$\square$

1.3 O conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

Para o estudo da equação de Pell iremos considerar o conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d};\ x, y \in \mathbb{Z}\}$. Observe que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja, são números reais obtidos da forma $x + y\sqrt{d}$ com x, y e $d \in \mathbb{Z}$.

Definição 2. *Se $x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d}$, então $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.*

De fato:

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d} \Longleftrightarrow (y_1 - y_2)\sqrt{d} = x_2 - x_1$$

Se $y_1 - y_2 = 0$ *então* $x_2 - x_1 = 0$, *ou seja,* $y_1 = y_2$ *e* $x_1 = x_2$. *Caso contrário, teríamos:*

$$y_1 - y_2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{d} = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} \in \mathbb{Q}. \textit{ Absurdo!!!}$$

$\square$

Definição 3. *A soma e o produto são definidos por:*

$$\begin{cases} + : (x_1 + y_1\sqrt{d}) + (x_2 + y_2\sqrt{d}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{d} \\ \cdot : (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d}) = (x_1x_2 + dy_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{d} \end{cases}$$

Definição 4. *Em* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d};\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, *definimos a* ***Função Norma*** *como:*

$$\begin{aligned} &N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \longrightarrow \mathbb{Z} \\ &N(x + y\sqrt{d}) := x^2 - dy^2 = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposição 3. *Dados* $x + y\sqrt{d}$ *e* $u + v\sqrt{d} \in \mathbb{Z}\sqrt{d}$ *temos que:*

$$N((x + y\sqrt{d})(u + v\sqrt{d})) = N(x + y\sqrt{d})N(u + v\sqrt{d}) \tag{1.2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} N((x + y\sqrt{d})(u + v\sqrt{d})) &= N((xu + dyv) + (xv + uy)\sqrt{d}) \\ &= (xu + dyv)^2 - d(xv + uy)^2 \\ &= (xu)^2 + (dyv)^2 - d((xv)^2 + (uy)^2) \\ &= (x^2 - dy^2)(u^2 - dv^2) \\ &= N(x + y\sqrt{d})N(u + v\sqrt{d}) \end{aligned}$$

$\square$

1.4 Frações contínuas simples

Damos o nome de fração contínua simples de $\alpha \in \mathbb{R}$ à expressão:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}}$$

onde $a_n \in \mathbb{Z}$, e representamos de forma simplificada como $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$.

- Se existe $a_k \in \mathbb{Z}$, tal que,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$$

dizemos que a fração contínua é finita.

Exemplo:

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = [2; 1, 2]$$

Lema 4. *Todo número racional possui representação por uma fração contínua simples finita.*

Demonstração: De fato, seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, pelo algoritmo de Euclides temos que:

$$a = ba_0 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1 a_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 a_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2$$

$$...$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} a_{n-1} + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n a_n$$

Observe que $0 \leq r_n < r_{n-1} < ... < r_2 < r_1 < b$, e como existe uma quantidade finita de números inteiros entre 0 e b garantimos que o processo acima é finito.

Logo:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}} = \cdots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots \frac{1}{a_k}}}}$$

□

- Se o número for irracional, a fração contínua simples será infinita, e teremos a seguinte representação.

$$\begin{cases} \alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\} = a_0 + \alpha_1 = a_0 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}} \\ \alpha_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\} = a_1 + \alpha_2 = a_0 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_2}} \\ \alpha_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor + \{\alpha_2\} = a_2 + \alpha_3 = a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_3}} \\ \vdots \ = \ \vdots \end{cases} \Rightarrow \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$$

Definição 5. *Ao número* $c_k = \dfrac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ *damos o nome de k-ésimo convergente da fração contínua* $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$.

Assim, temos:

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1};\ c_1 = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1};\ c_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}; \cdots ; c_k = \frac{p_k}{q_k} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k}}}$$

Definição 6. *Dizemos que uma fração contínua simples infinita de um dado* $\alpha \in \mathbb{R}$ *é periódica se existir r, tal que, a partir de algum n tenha-se* $a_{n+r} = a_n$. *Assim, por exemplo,*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+r}, a_{(n+1)+r}, a_{(n+2)+r}, ..., a_{n+2r}, a_{(n+1)+2r}, a_{(n+2)+2r}, ...]$$

possui representação periódica, podendo ser reescrita de forma simplificada como:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., \overline{a_{n+r}, a_{(n+1)+r}, a_{(n+2)+r}, ..., a_{(n-1)+r}}]$$

Se, n=0 então dizemos que a fração contínua é puramente periódica, com período r, e a representamos por,

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_{(n-1)+r}}]$$

$\square$

Exemplo 2.

$$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+2}{3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-1}{3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{2}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+1}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{7}+2}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{7}-2)}}}}$$

Observe que o processo se repetira e teremos a representação $[2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4...]$

Exemplo 3.

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}$$

Assim a representação do número de ouro será $[\overline{1};]$

Exemplo 4.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}}}}$$

Logo π *tem representação* $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...]$.

Capítulo 2

A equação de Pell

As equações da forma $x^2 - dy^2 = m$, com $m, d \in \mathbb{Z}$, recebem o nome de **Equação de Pell**, no qual, o interesse é encontrar inteiros x e y que a satisfazem. Na subseção (2.1.1) são apresentados alguns casos triviais nos esclarecendo que os problemas mais interessantes da equação de Pell está nos casos em que d é positivo e não é um quadrado perfeito. Cabe ressaltar que do ponto de vista geométrico, se $d > 0$ e $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ então a equação de Pell representa um hipérbole e a busca de soluções se dá por encontrar pontos com coordenadas $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ sobre a cônica.

$$x^2 - dy^2 = m \Rightarrow \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{\frac{m}{d}} = 1$$

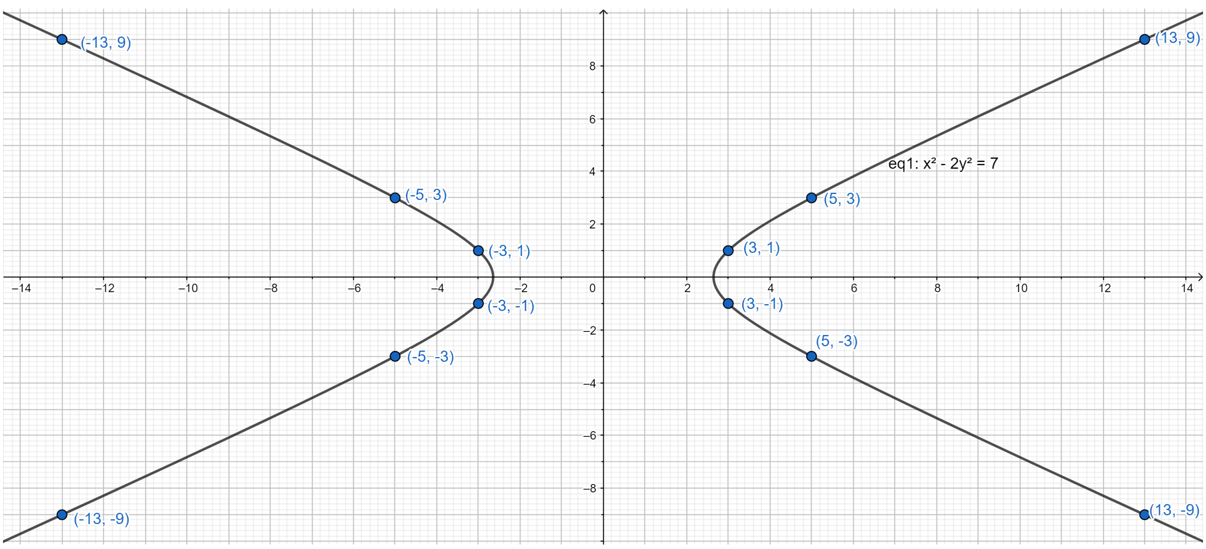

Figura 2.1: Representação cartesiana da hipérbole $x^2 - 2y^2 = 7$.

Por exemplo, na figura (2.1), temos a equação $x^2 - 2y^2 = 7$, que possui entre suas soluções os pares $(\pm 3, \pm 1), (\pm 5, \pm 3), (\pm 13, \pm 9)$.

Este capítulo está baseado nas referências Souza (2018), Gonçalves (2011), Moreira (2014a) e Moreira (2014b).

2.1 O caso particular $x^2 - dy^2 = 1$

Neste seção iremos estudar o caso particular com m=1, onde, estaremos interessados em mostrar a existência de infinitas soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$.

2.1.1 Soluções triviais

Verifiquemos inicialmente os casos em que a equação $x^2 - dy^2 = 1$ possui apenas soluções triviais.

- Se $d < -1$, temos:

$$1 = x^2 - dy^2 = x^2 + |d|y^2 \geq |d|y^2 \geq 0$$

Como, $d < -1$, temos que $|d| > 1 \Rightarrow y = 0$ e $x = \pm 1$. Observe que neste caso teremos uma elipse. $\square$

- Se $d = -1$, temos:

$$x^2 - dy^2 = x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \ e \ y = 0 \ ou \\ x = 0 \ e \ y = \pm 1 \end{cases}$$

Observe que neste caso temos uma circunferência de raio 1. $\square$

- Se $d = 0$, temos:

$$x^2 - dy^2 = x^2 - 0.y^2 = x^2 = \pm 1$$

$Assim\ x = \pm 1\ e\ y \in \mathbb{Z}.$ $\square$

- Se $d = a^2 > 0$, temos:

$$x^2 - dy^2 = x^2 - a^2y^2 = (x - ay)(x + ay) = 1$$

Como $(x - ay), (x + ay) \in \mathbb{Z}$ temos que $(x - ay) = (x + ay) = \pm 1$.

Logo $x = \pm 1$ e $y = 0$. $\square$

Sendo assim, ao longo do trabalho, estaremos interessados em encontrar soluções inteiras, $(x, y) \neq (1, 0)$, não triviais da equação de Pell, ou seja, onde d é um número natural e não é um quadrado perfeito.

2.1.2 Existência de infinitas soluções

O nosso estudo da Equação de Pell, se dará com o uso dos elementos do conjunto $\mathbb{Z}\sqrt{d}$, pois de (1.1) temos que $N((x + y\sqrt{d})) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$, assim queremos encontrar números da forma $x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}\sqrt{d}$, tais que:

$$N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = 1$$

Proposição 5. *Se existir $x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}\sqrt{d}$, tal que, $N(x + y\sqrt{d}) = 1$, então, a equação de Pell $x^2 - dy^2$ possui infinitas soluções.*

Demonstração: Primeiro, observe que:

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{d})^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y\sqrt{d} + \binom{k}{2}x^{k-2}(y\sqrt{d})^2 + ...+ \\ &+ ... + \binom{k}{k-2}x^2(y\sqrt{d})^{k-2} + \binom{k}{k-1}x(y\sqrt{d})^{k-1} + (y\sqrt{d})^k \\ &= x_k + y_k\sqrt{d}\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{cases} x_k = x^k + \binom{k}{2}x^{k-2}(y\sqrt{d})^2 + ... = \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2i} x^{k-2i}y^{2i}d^i \\ y_k = \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{3}x^{k-3}y^3\sqrt{d}^2 + ... = \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k}{2i+1} x^{k-2i-1}y^{2i+1}d^i \end{cases}$$

Assim $\forall k \in \mathbb{N}$ temos:

$$x_k^2 - dy_k^2 = N(x_k + y_k\sqrt{d}) = N((x + y\sqrt{d})^k) = (N(x + y\sqrt{d}))^k = 1^k = 1$$

Ou seja, se (x, y) é uma solução então (x_k, y_k), tal que, $x_k - dy_k = (x - dy)^k$ também é solução. $\square$

Exemplo 5. *Observe que o par (7, 4) é uma solução da equação* $x^2 - 3y^2 = 1$. *Assim pelo proposição (5), temos também como soluções os pares* (x_k, y_k), *tais que,* $x_k - y_k\sqrt{3} = (7+4\sqrt{3})^k$, *sendo algumas delas:*

- $k = 2 \Rightarrow (7+4\sqrt{3})^2 = 97 + 56\sqrt{3} \Rightarrow (x_2, y_2) = (97, 56)$
- $k = 3 \Rightarrow (7+4\sqrt{3})^3 = 1351 + 780\sqrt{3} \Rightarrow (x_3, y_3) = (1351, 780)$

2.1.3 Solução minimal

Iniciaremos agora a busca por soluções de $x^2 - dy^2 = 1$. No entanto, note que se o par (x, y) for uma solução da equação de Pell então serão também soluções os pares $(x, -y)$, $(-x, y)$ e $(-x, -y)$. Sendo assim, sem perca de generalidade, buscaremos soluções com $x, y \in \mathbb{N}$.

Definição 7. *Se existem* x, y *inteiros positivos com* $x^2 - dy^2 = 1$, *então chamamos de* ***solução fundamental*** *ou* ***solução mínima*** *o par* (x_1, y_1), *tal que o número* $x_1 + y_1\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ *é o menor elemento do conjunto* $\mathbb{Z}^+_*[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d},\ x, y > 0 \text{ inteiros};\ x^2 - dy^2 = 1\}$.

Proposição 6. *Se* (x_1, y_1) *é a solução minimal de* $x^2 - dy^2 = 1$, *então toda solução será da forma:*

$$(x_k, y_k);\ x_k + y_k\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}$$

Demonstração: Seja (x, y) uma solução da equação $x^2 - dy^2 = 1$. Existe $k \in \mathbb{N}$, tal que:

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^k \leq x + y\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{k+1} \tag{2.1}$$

Multiplicando (2.1) por $(x_1 - y_1\sqrt{d})^k$, temos:

$$1 \leq (x + y\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^k = u + v\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d} \qquad u, v \in \mathbb{Z}$$

Segue de (1.1) e (1.2) que:

$$\begin{aligned} u^2 - dv^2 = N(u+v\sqrt{d}) &= N((x+y\sqrt{d})(x_1-y_1\sqrt{d})^k) \\ &= N(x+y\sqrt{d})N(x_1-y_1\sqrt{d})^k \\ &= (x^2-dy^2)(x_1^2-dy_1^2)^k \\ &= 1.1^k \\ &= 1 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} &0 < u - v\sqrt{d} = (u+v\sqrt{d})^{-1} \leq 1 \leq u+v\sqrt{d} \\ &\Rightarrow 0 \leq 2v\sqrt{d} \Rightarrow v \geq 0,\ u > v\sqrt{d} \geq 0 \end{aligned}$$

observe que se v for positivo, então, $u, v > 0$ e $u+v\sqrt{d} < x_1+y_1\sqrt{d}$, Absurdo!!!
Portanto,

$$\begin{aligned} &v = 0 \ e \ u^2 = u^2 - dv^2 = 1 \Rightarrow u = 1 \\ &\Rightarrow u + v\sqrt{d} = 1 \\ &\Rightarrow (x+y\sqrt{d})(x_1-y_1\sqrt{d})^k = 1 \\ &\Rightarrow x+y\sqrt{d} = (x_1+y_1\sqrt{d})^k \end{aligned}$$

□

Observação 1. *Utilizando a solução minimal, podemos definir também* (x_k, y_k) *por uma recorrência de segunda ordem:*
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_k + y_k\sqrt{d} = (x_1+y_1\sqrt{d})^k \\ x_k - y_k\sqrt{d} = (x_1-y_1\sqrt{d})^k \end{cases} ,(x_1 \pm y_1\sqrt{d}), (x_k \pm y_k\sqrt{d}) \in \mathbb{Z}\sqrt{d}$$

Temos que:

$$x_k = \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})^k + (x_1-y_1\sqrt{d})^k}{2} \ e \ y_k = \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})^k - (x_1-y_1\sqrt{d})^k}{2\sqrt{d}}$$

Note que:

- $k = 0 \Rightarrow x_0 = 1,\ y_0 = 0$
- $k = 1 \Rightarrow x_1 = x_1,\ y_1 = y_1$

E como $x_1 + y_1\sqrt{d}$ e $x_1 - y_1\sqrt{d}$ são raízes da equação $x^2 - 2x_1x + 1 = 0$, temos:

$$\begin{cases} x_{k+2} = 2x_1x_{k+1} - x_k \\ y_{k+2} = 2x_1y_{k+1} - y_k \end{cases}, \ k \geq 0$$

Exemplo 6. *Para d=3, temos que $x_1 + y_1\sqrt{d} = 2 + 1\sqrt{3}$ é a solução minimal da equação $x^2 - 3y^2 = 1$.*

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1x_1 - x_0 = 2.2.2 - 1 = 7 \\ y_2 = 2x_1y_1 - y_0 = 2.2.1 - 0 = 4 \end{cases}$$

$$k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1x_2 - x_1 = 2.2.7 - 2 = 26 \\ y_3 = 2x_1y_2 - y_1 = 2.2.4 - 1 = 15 \end{cases}$$

$$k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2x_1x_3 - x_2 = 2.2.26 - 7 = 97 \\ y_4 = 2x_1y_3 - y_2 = 2.2.15 - 4 = 56 \end{cases}$$

Portanto os pares (7, 4), (26, 15), (97, 56), são soluções da equação $x^2 - 3y^2 = 1$

Observação 2. *A solução minimal para equações do tipo $x^2 - dy^2 = 1$ pode ser encontrada através do uso das frações contínuas, onde r sendo o período de $\sqrt{d}$, tem-se:*

$$\begin{cases} x = p_{r-1} \ e \ y = q_{r-1}, se \ r \ \acute{e} \ par \ e \\ y = p_{2r-1} \ e \ y = q_{2r-1}, se \ r \ \acute{e} \ \acute{\imath}mpar \end{cases}$$

a prova desta afirmação pode ser vista na seção 4.4.1 de Brochero Martinez et al. (2010).

Exemplo 7. *Vimos que $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$, assim como o período é 4, segue que:*

$$\frac{p_{4-1}}{q_{4-1}} = \frac{p_3}{q_3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

. Portanto a solução minimal da equação de Pell $x^2 - 7y^2 = 1$ é o par $(x, y) = (8, 3)$

Exemplo 8. *Temos que* $\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$, *assim como o período é 5, segue que:*

$$\frac{p_{2\cdot5-1}}{q_{2\cdot5-1}} = \frac{p_9}{q_9} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}} = \frac{649}{180}$$

Portanto a solução minimal da equação de Pell $x^2 - 13y^2 = 1$ *é o par* $(x, y) = (649, 180)$

2.1.4 Existe solução

Nas subseções anteriores, mostramos a existência de infinitas soluções no caso de haver uma, e que todas elas podem ser expressas a partir da chamada solução minimal. O próximo teorema, tem por propósito mostrar que a equação de Pell na forma $x^2 - y^2\sqrt{d}$ sempre possui solução não trivial.

Teorema 7. *Se* $d \in \mathbb{N}, \sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, *então existem* $x + y\sqrt{d} \in Z_*^+[\sqrt{d}]$, *tal que,* $N(x+y\sqrt{d}) = x^2 - y^2\sqrt{d} = 1.$

Demonstração: Como $d \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt{d} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, pois, se $\sqrt{d} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ com $mdc(p,q) = 1$, ($q > 1$ *pois* $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$), teríamos $d = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}$, pois, $mdc(p^2, q^2) = 1$ *e* $q^2 > 1$, o que é absurdo, pois $d \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema (2), existem infinitos $(p,q) \in \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\backslash\{0\})$ com $\left|\sqrt{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, assim:

$$\begin{aligned} p^2 - dq^2 &= (p + q\sqrt{d})(p - q\sqrt{d}) \\ &= q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{d}\right)\left(\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
|p^2 - dq^2| &= q^2\left|\frac{p}{q} + \sqrt{d}\right|\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| \\
&< q^2\left|\frac{p}{q} + \sqrt{d}\right|\frac{1}{q^2} = \left|\frac{p}{q} + \sqrt{d}\right| \\
&\leq 2\sqrt{d} + \left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| \\
&< 2\sqrt{d} + \frac{1}{q^2} \\
&\leq 2\sqrt{d} + 1
\end{aligned}$$

Portanto, existem infinitos pares $(p, q) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ com:

$$|N(p + q\sqrt{d})| = |p^2 - dq^2| < 2\sqrt{d} + 1$$

Então existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que, para infinitos pares $(p, q) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$,

$$p^2 - dq^2 = k \tag{2.2}$$

Observe que $k \neq 0$, pois se $p^2 - dq^2 = 0$, teríamos:

$$p^2 = dq^2 \Rightarrow d = \frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{d} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \;\; Absurdo!!!$$

Observe que temos k^2 possibilidades para $(p(mod|k|), q(mod|k|))$, então, pelo princípio das gavetas, existem $(r_1, r_2) \in \{0, 1, ..., |k| - 1\}^2$, tal que, para infinitos pares $(p, q) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, temos $p \equiv r_1(mod|k|)\ e\ q \equiv r_2(mod|k|)$. Sejam $(p_1, q_1)\ e\ (p_2, q_2)$ dois desses pares.

Assim:

$$\begin{cases} p_2 \equiv p_1(mod|k|) \\ q_2 \equiv q_1(mod|k|) \end{cases}, (p_1, q_1) \neq (p_2, q_2) \Rightarrow p_1 + q_1\sqrt{d} \neq p_2 + q_2\sqrt{d}$$

Suponha sem perda de generalidade que

$$1 \leq p_1 + q_1\sqrt{d} < p_2 + q_2\sqrt{d}$$

Considerando o número

$$x + y\sqrt{d} = \frac{p_2 + q_2\sqrt{d}}{p_1 + q_1\sqrt{d}} > 1$$

Temos:

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{d} &= \frac{(p_2+q_2\sqrt{d})(p_1-q_1\sqrt{d})}{p_1^2-dq_1^2} \\ &= \frac{(p_1p_2-dq_1q_2)+(p_1q_2-p_2q_1)\sqrt{d}}{k} \end{aligned}$$

como,

$$\begin{cases} p_1p_2-dq_1q_2 \equiv p_1^2-dq_1^2 = k \equiv 0(mod|k|)\ e \\ p_1q_2-p_2q_1 \equiv p_1q_1-p_1q_1 = 0(mod|k|) \end{cases}$$

segue que,

$$1 < \frac{p_2+q_2\sqrt{d}}{p_1+q_1\sqrt{d}} = x+y\sqrt{d}, com \begin{cases} x = \dfrac{p_1p_2-dq_1q_2}{k} \in \mathbb{Z}\ e \\ y = \dfrac{p_1q_2-p_2q_1}{k} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

portanto

$$p_2+q_2\sqrt{d} = (p_1+q_1\sqrt{d})(x+y\sqrt{d})$$

e de (2.2) e (1.2) concluímos:

$$\begin{aligned} & k = N(p_2+q_2\sqrt{d}) = N(p_1+q_1\sqrt{d})N(x+y\sqrt{d}) = kN(x+y\sqrt{d}) \\ & \Rightarrow x^2-dy^2 = N(x+y\sqrt{d}) = \frac{k}{k} = 1 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} & x+y\sqrt{d} > 1 > (x+y\sqrt{d})^{-1} = x-y\sqrt{d} \Rightarrow 2y\sqrt{d} > 0 \Rightarrow y > 0 \\ & x-y\sqrt{d} = (x+y\sqrt{d})^{-1} > 0 \Rightarrow x = y\sqrt{d}+(x-y\sqrt{d}) > 0 \end{aligned}$$

Sendo assim, (x,y) uma solução não trivial. □

2.2 O caso geral: $x^2-dy^2=m$

Com os resultados do caso particular, $m=1$, podemos fazer um melhor estudo dos casos onde $x^2-dy^2=m,\ m\in\mathbb{Z}$, que seguem.

Observação: Para $m=0$, temos apenas a solução trivial $x=y=0$, veja,

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ y\neq 0 \Rightarrow x^2=dy^2 \Rightarrow d=\dfrac{x^2}{y^2},\ absurdo, pois\ d\in\mathbb{N} \text{ e não é quadrado perfeito.} \end{cases}$$

$\square$

2.2.1 Existência de infinitas soluções

Inicialmente, podemos afirmar que nem toda equação de Pell possui solução, por exemplo, a equação $x^2 - 5y^2 = -2$.
De fato, se houvesse solução, deveríamos ter:

$$x^2 - 5y^2 \equiv -2(mod 5) \Rightarrow x^2 \equiv -2(mod 5)$$

Porém, observe que os possíveis restos da divisão de x^2 por 5 são 0, 1 ou 4, assim como não há $x \in \mathbb{Z}$, tal que, $x^2 \equiv -2(mod5)$, concluímos que a equação não possui solução.

Agora, se para $m \neq 0$ existir (x, y) solução de $x^2 - dy^2 = m$, então, $N(x+y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = m,\ x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Considerando ainda $x_1 + y_1\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ a solução fundamental de $x^2 - dy^2 = 1$, então para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que $u + v\sqrt{d} = (x + y\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^k, u, v \in \mathbb{Z}$, satisfaz:

$$\begin{aligned} u^2 - dv^2 &= N(u + v\sqrt{d}) \\ &= N(x + y\sqrt{d})N(x_1 + y_1\sqrt{d})^k \\ &= m.1^k \\ &= m \end{aligned}$$

Como $x + y\sqrt{d} \neq 0$ e $x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$, então os números $(x + y\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^k$ são todos distintos e assim obtemos infinitas soluções (u, v) com $u^2 - dv^2 = m$.

Proposição 8. *Seja $x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}_*^+[\sqrt{d}]$ com $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = m$ e $\alpha = x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$ a solução fundamental de $x^2 - dy^2 = 1$. Então existem $u, v \in \mathbb{N}$ com $u^2 - dv^2 = m$, tal que:*

$$u + v\sqrt{d} \leq \sqrt{\alpha|m|} \ e \ k \in \mathbb{N} \ com \ x + y\sqrt{d} = \begin{cases} \alpha^k(u + v\sqrt{d}), \ ou \\ \alpha^{k+1}(u - v\sqrt{d}), \ ou \\ -\alpha^{k+1}(u - v\sqrt{d}) \end{cases}$$

.

Demonstração: Seja (x, y) uma solução de $x^2 - dy^2 = m$, com $x, y \in \mathbb{N}$ e $(x, y) \neq (0, 0)$, implicando em $x + y\sqrt{d} \geq 1$. Assim, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$\alpha^k \sqrt{|m|} \leq x + y\sqrt{d} < \alpha^{k+1}\sqrt{|m|} \tag{2.3}$$

Se $k < 0$, então

$$x + y\sqrt{d} < \alpha^{k+1}\sqrt{|m|} \leq \sqrt{|m|} < \sqrt{\alpha|m|}$$

então, basta tomar $k = 0$, que teremos $(u, v) = (x, y)$. □

Se $k \geq 0$, consideremos o número

$$u' + v'\sqrt{d} = \alpha^{-k}(x + y\sqrt{d}) = (x_1 - y_1\sqrt{d})^k(x + y\sqrt{d})$$

multiplicando (2.3) por α^{-k}, temos:

$$\sqrt{|m|} \leq \alpha^{-k}(x + y\sqrt{d}) = u' + v'\sqrt{d} < \alpha\sqrt{|m|}$$

além disso, por (1.1) e (1.2), temos:

$$u'^2 - dv'^2 = N(u' + v'\sqrt{d}) = N(\alpha^{-1})^k N(x + y\sqrt{d}) = 1^k.m = m$$

assim

$$(u' + v'\sqrt{d})(u' - v'\sqrt{d}) = m \ e$$

$$u' - v'\sqrt{d} \leq |u' - v'\sqrt{d}| = \frac{|m|}{u' + v'\sqrt{d}} \leq \sqrt{|m|} \leq u' + v'\sqrt{d}$$

onde

$$\begin{cases} 0 \leq 2v'\sqrt{d} \Rightarrow v' \geq 0 & \\ 2u' = (u' + v'\sqrt{d}) + (u' - v'\sqrt{d}) & \geq (u' + v'\sqrt{d}) - |(u' - v'\sqrt{d})| \quad \Rightarrow (u', v') \in \mathbb{N}^2 \\ & \geq \sqrt{|m|} - \sqrt{|m|} = 0 \Rightarrow u \geq 0 \end{cases}$$

Portanto, se $u' + v'\sqrt{d} \leq \sqrt{\alpha|m|}$, basta tomar $(u, v) = (u', v')$.

Caso contrário, se $u' + v'\sqrt{d} > \sqrt{\alpha|m|}$, temos que:

$$1 < \sqrt{\alpha|m|} < u' + v'\sqrt{d} < \alpha\sqrt{|m|}$$

onde segue

$$\begin{aligned}
(u' + v'\sqrt{d})(u' - v'\sqrt{d}) = m \Rightarrow |u' - v'\sqrt{d}| &= \frac{|m|}{|u' + v'\sqrt{d}|} \\
&\Rightarrow \frac{|m|}{\alpha\sqrt{|m|}} < |u' - v'\sqrt{d}| < \frac{|m|}{\sqrt{\alpha|m|}} \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{|m|}}{\alpha} < |u' - v'\sqrt{d}| < \sqrt{\frac{|m|}{\alpha}} \\
&\Rightarrow \sqrt{|m|} < \alpha|u' - v'\sqrt{d}| < \sqrt{\alpha|m|}
\end{aligned}$$

daí,

$$\alpha|u' - v'\sqrt{d}| = (x_1 - y_1\sqrt{d})|u' - v'\sqrt{d}| = u + v\sqrt{d},\ u, v \in \mathbb{Z},\ \textit{portanto}$$

$$\sqrt{|m|} < u + v\sqrt{d} < \sqrt{\alpha|m|}$$

Note que,

$$\begin{cases} N(u + v\sqrt{d}) = N(\alpha(u' - v'\sqrt{d})) = N(\alpha)N(u' - v'\sqrt{d}) = 1.m = m \\ u + v\sqrt{d} > \sqrt{|m|} \\ u - v\sqrt{d} \leq |u - v\sqrt{d}| = \dfrac{|m|}{|u + v\sqrt{d}|} < \dfrac{|m|}{\sqrt{|m|}} = \sqrt{|m|} < u + v\sqrt{d} \end{cases}$$

assim

$$(u, v) \in \mathbb{N}, pois, \begin{cases} 0 \leq 2v\sqrt{d} \Rightarrow v \geq 0 \\ 2u = (u + v\sqrt{d}) + (u - v\sqrt{d}) \quad \geq (u + v\sqrt{d}) - |(u - v\sqrt{d})| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geq \sqrt{|m|} - \sqrt{|m|} = 0 \Rightarrow u \geq 0 \end{cases}$$

Por fim, temos que

$$u + v\sqrt{d} = \alpha(u' - v'\sqrt{d}) \Rightarrow u' - v'\sqrt{d} \in \{\alpha^{-1}(u + v\sqrt{d}), -\alpha^{-1}(u + v\sqrt{d})\}$$

sendo $u' + v'\sqrt{d}$ o conjugado de $u' - v'\sqrt{d}$, e $\alpha^{-1} = x_1 - y_1\sqrt{d}$ e $\alpha = x_1 + y_1\sqrt{d}$, vem

$$u' + v'\sqrt{d} \in \{\alpha(u - v\sqrt{d}), -\alpha(u - v\sqrt{d})\}$$

Portanto

$$x + y\sqrt{d} = \alpha^k(u' + v'\sqrt{d}) \in \{\alpha^{k+1}(u - v\sqrt{d}), -\alpha^{k+1}(u - v\sqrt{d})\}$$

$$\begin{cases} m > 0 \Rightarrow x + y\sqrt{d} = \alpha^{k+1}(u - v\sqrt{d}) \\ m < 0 \Rightarrow x + y\sqrt{d} = -\alpha^{k+1}(u - v\sqrt{d}) \end{cases}$$

$\square$

Exemplo 9. *Verifiquemos a equação:* $x^2 - 3y^2 = -2$.

Temos
$x^2 - 3y^2 = -2 \Rightarrow m = -2$; $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ a solução minimal de $x^2 - 3y^2 = 1$ e

$$u + v\sqrt{3} \leq \sqrt{\alpha|m|} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})| - 2|} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} < 3$$

Portanto, se houver solução, devemos ter, $u^2 - 3v^2 = -2$ com $u \in \{0, 1, 2\}$ e $v \in \{0, 1, 2\}$ com $u + v\sqrt{3} < 3$.
$0^2 - 3.0^2 = 0$; $0^2 - 3.1^2 = -3$; $0^2 - 3.2^2 = -12$; $1^2 - 3.0^2 = 1$; $\underline{1^2 - 3.1^2 = -2}$; $2^2 - 3.0^2 = 4$;
Assim, temos $(u, v) = (1, 1)$, tal que para todo $x+y\sqrt{3} = \alpha^k(1+\sqrt{3})$ temos $x^2-3y^2 = -2$.

Por exemplo, para:

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow \alpha^0(1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} \\ k = 1 \Rightarrow \alpha^1(1 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 5 + 3\sqrt{3} \\ k = 2 \Rightarrow \alpha^2(1 + \sqrt{3}) = (7 + 4\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 19 + 11\sqrt{3} \end{cases}$$

Encontramos as soluções $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(19, 11)$ de $x^2 - 3y^2 = -2$.

Exemplo 10. *Façamos o mesmo para a equação da figura (2.1)* $x^2 - 2y^2 = 7$.

Temos $m = 7$ e temos $(3, 2)$ a solução minimal de $x^2-2y^2 = 1$, logo, $\alpha = 2+3\sqrt{2}$. Assim, se a equação $x^2 - 2y^2 = 7$ possuir solução, devemos encontrar (u, v), tal que

$u^2 - 2v^2 = 7$ e:

$$u + v\sqrt{2} \leq \sqrt{\alpha|m|} = \sqrt{(2+3\sqrt{2})|7|} = \sqrt{14 + 21\sqrt{2}} < 7$$

Busquemos então as possíveis soluções, de $u^2 - 2v^2 = 7$ com $u \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $v \in \{0,1,2,3,4,5\}$ e $u + v\sqrt{2} < 7$.

$0^2 - 2.0^2 = 0;$	$0^2 - 2.1^2 = -2;$	$0^2 - 2.2^2 = -8;$	$0^2 - 2.3^2 = -18;$	$0^2 - 2.4^2 = -32;$
$0^2 - 2.5^2 = -50;$	$1^2 - 2.0^2 = 1;$	$1^2 - 2.1^2 = -1;$	$1^2 - 2.2^2 = -7;$	$1^2 - 2.3^2 = -17;$
$1^2 - 2.4^2 = -31;$	$2^2 - 2.0^2 = 4;$	$2^2 - 2.1^2 = 2;$	$2^2 - 2.2^2 = -4;$	$2^2 - 2.3^2 = -14;$
$3^2 - 2.0^2 = 9;$	$\underline{3^2 - 2.1^2 = 7};$	$3^2 - 2.2^2 = 1;$	$4^2 - 2.0^2 = 16;$	$4^2 - 2.1^2 = 14;$
$5^2 - 2.0^2 = 25;$	$6^2 - 2.0^2 = 36;$			

Logo, existe $(u,v) = (3,2)$ com $3^2 - 2.2^2 = 7$, e portando existem infinitas soluções para a equação $x^2 - 2y^2 = 7$, ainda da proposição (8), temos:

- $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^k(u + v\sqrt{2}) \Rightarrow (3+2\sqrt{2})^0.(3+\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{2} \\ \alpha^{k+1}(u - v\sqrt{2}) \Rightarrow (3+2\sqrt{2})^1.(3-\sqrt{2}) = 5 + 3\sqrt{2} \end{cases}$

- $k = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^k(u + v\sqrt{2}) \Rightarrow (3+2\sqrt{2})^1.(3+\sqrt{2}) = 13 + 9\sqrt{2} \\ \alpha^{k+1}(u - v\sqrt{2}) \Rightarrow (3+2\sqrt{2})^2.(3-\sqrt{2}) = 27 + 19\sqrt{2} \end{cases}$

Assim, encontramos os pares $(3,1)$, $(5,3)$, $(13,9)$ e $(27,19)$ que são algumas das soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 7$.

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo são apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos através da teoria apresentada neste trabalho.

Exemplo 11. *Pinto (2019) cita em seu trabalho que "matemáticos, como Brahmagupta (598-670) e Bhaskara II (1114-1185), utilizaram as equações de Pell em seus estudos, relacionando essas equações com a obtenção de raízes quadradas de números inteiros positivos.".*

Assim, iniciamos as aplicações, mostrando como determinar boas aproximações de raízes quadradas não exatas via equações de Pell.

Sendo (x', y') um solução da equação $x^2 - dy^2 = 1$, podemos encontrar infinitas soluções da forma (x'_k, y'_k); $x'^2_k - dy'^2_k = (x'^2 - dy'^2)^k$, donde:

$$x'^2_k - dy'^2_k = (x'_k - y'_k\sqrt{d})(x'_k + y'_k\sqrt{d}) = 1$$

da segunda igualdade temos que,

$$x'_k - y'_k\sqrt{d} = \frac{1}{x'_k + y'_k\sqrt{d}} \Rightarrow \frac{x'_k}{y'_k} - \frac{y'_k\sqrt{d}}{y'_k} = \frac{1}{y'_k(x'_k + y'_k\sqrt{d})} < \frac{1}{y'^2_k}$$

portanto,

$$\frac{x'_k}{y'_k} - \sqrt{d} < \frac{1}{y'^2_k}$$

e com o uso do corolário (5), podemos encontrar valores para y'_k cada vez maior, fazendo a diferença $\sqrt{d} - \dfrac{x'_k}{y'_k}$ se aproximar de 0.

Vejamos como exemplo, algumas aproximações de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{17}$

- $\sqrt{2}$

  Dado $x^2 - 2y^2 = 1$, é fácil verificar que (3, 2) é uma solução, e pelo corolário (5), podemos encontrar outras soluções da forma $(x_k, y_k); x_k + y_k\sqrt{2}$=(3+2$\sqrt{2})^k$:

$$\begin{cases} (3+2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \Rightarrow (17, 12) \\ (17+12\sqrt{2})^2 = 577 + 408\sqrt{2} \Rightarrow (577, 408) \end{cases}$$

  e assim, observe que o quociente $\dfrac{x}{y}$, das soluções encontradas,

$$\frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{17}{12} = 1,41\overline{6}; \quad \frac{577}{408} = 1,414215...;$$

  são boas aproximações de $\sqrt{2} = 1,41421356....$

- $\sqrt{17}$

  Para $x^2 - 17y^2 = 1$, temos as soluções:

$$\begin{cases} 33 + 8\sqrt{17} \Rightarrow (33, 8) \Rightarrow \dfrac{33}{8} = 4,125 \\ (33+8\sqrt{17})^2 = 2177 + 528\sqrt{17} \Rightarrow (2177, 528) \Rightarrow \dfrac{2177}{528} = 4,1231060... \end{cases}$$

  assim, encontramos boas aproximações de $\sqrt{17} = 4,12310562...$

Exemplo 12. *(Filipe, 2020a) Encontre todos os naturais n tais que $n+1$ e $3n+1$ são ambos quadrados perfeitos.*
Resolução: Queremos $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} n+1 = y^2 \\ 3n+1 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = y^2 - 1 \\ n = \dfrac{x^2-1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = y^2 - 1 = \frac{x^2-1}{3} \tag{3.1}$$

Assim, da última igualdade temos

$$x^2 - 3y^2 = -2 \tag{3.2}$$

Observe que (3.2) é uma Equação de Pell, onde (u, v)=(1, 1) é uma solução e $(x_1, y_1) = (2,1)$ *é a solução minimal de* $x^2 - 3y^2 = 1$. *Logo o sistema possui, infinitas soluções que podem ser escritas na forma*

$$(x,y); x + y\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k, k \in \mathbb{Z}$$

algumas dessas soluções são:

$$(x,y) = \{(1,1),(5,3),(19,11),...\} \tag{3.3}$$

Portanto, substituindo (3.3) em (3.1) encontramos:

$$n = \{0, 8, 120, ...\}$$

Exemplo 13. *(Filipe, 2020a) Mostre que as soluções da equação* $5x^2 - y^2 = 4$ *são* $(x,y) = (F_{2n-1}, L_{2n-1})$, *em que* (F_k)*é a sequência de Fibonacci e* (L_k) *é a sequência de Lucas.*
Resolução: Multiplicando ambos os membros da equação por (-1), temos:

$$y^2 - 5x^2 = -4 \tag{3.4}$$

sendo

$$L_k \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 1 \\ L_2 = 3 \\ L_k = L_{k-1} + L_{k-2} \end{cases} \Rightarrow L_k = (1,3,4,7,11,18,...)$$

$$F_k \Rightarrow \begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \end{cases} \Rightarrow F_k = (1,1,2,3,5,8,...)$$

queremos mostrar que as soluções da equação (3.4) são da forma

$$(y,x) = (L_{2n-1}, F_{2n-1});\ L^2_{2n-1} - 5F_{2n-1} = -4 \tag{3.5}$$

Agora, note que (9, 4) é a solução minimal de $y^2 - 5x^2 = 1$, *(1, 1) é uma solução da equação* $y^2 - 5x^2 = -4$ *e busquemos outras soluções* $(y,x); N(y + x\sqrt{5}) = y^2 - 5x^2 = -4$, *tal que, para $k \in \mathbb{N}$, tenha-se:*

$$(1+\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k \leq y + x\sqrt{5} < (1+\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^{k+1} \tag{3.6}$$

multiplicando (3.6), temos

$$\begin{aligned} &(1+\sqrt{5}) \leq (y+x\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})^k = u + v\sqrt{5} < (1+\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}) \\ &\Rightarrow 1+\sqrt{5} \leq u+v\sqrt{5} < 29+13\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} u+v\sqrt{5} \geq 1+\sqrt{5} \Rightarrow u,v > 0 \\ u+v\sqrt{5} < 29+13\sqrt{5} \Rightarrow v < 13 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.7}$$

assim, procurando soluções "pequenas"de $u^2 - 5v^2 = -4$, *tal que* $0 < v < 13$, *encontramos as soluções* $(u,v) = \{(1,1) = (L_1, F_1), (4,2) = (L_3, F_3), (11,5) = (L_5, F_5)\}$. *Portanto, as soluções de* $y^2 - 5x^2 = -4$ *são:*

$$(y,x);\ \ y + 5x = \begin{cases} (L_1 + F1\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k = \ ou \\ (L_3 + F_3\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k \ ou \\ (L_5 + F_5\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k \end{cases} \tag{3.8}$$

Resta agora mostrar que tais soluções são da forma:

$$(y,x);\ \ y + 5x = L_{2n-1} + F_{2n-1}\sqrt{5}$$

Para isso, provemos inicialmente por indução, que:

$$L_k + F_k\sqrt{5} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k,\ \ k \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$

verifiquemos para os casos inicias

- *Para k=1*

$$L_1 + F_1\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

- *Para k=2*

$$L_2 + F_2\sqrt{5} = 3 + \sqrt{5} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

- *suponha agora a validade de k e k-1, e verifiquemos a validade de k+1*

$$\begin{aligned}
L_{k+1} + F_{k+1}\sqrt{5} &= (L_k + F_k\sqrt{5}) + (L_{k-1} + F_{k-1}\sqrt{5}) \\
&= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \\
&= 2\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) \\
&= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) \\
&= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

logo, (3.9) é válido para todo $n \in N$.

Por fim note que todo número ímpar, pode ser escrito na forma $m+6k$*, onde* $m \in \{1,3,5\}$ *e* $k \in N$*. Logo:*

$$\begin{aligned}
L_{2n-1} + F_{2n-1}\sqrt{5} &= L_{m+6k} + F_{m+6k}\sqrt{5} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+6k} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6\right)^k \\
&= (L_m + F_m\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k
\end{aligned}$$

que são as soluções apresentadas em (3.8). □

Exemplo 14. *(Filipe, 2020b) Resolva* $(x+1)^3 - x^3 = y^2$ *nos inteiros positivos.*

Resolução:

$$\begin{aligned}
(x+1)^3 - x^3 = y^2 &\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = y^2 \\
&\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 = y^2 \\
&\Rightarrow 36x^2 + 36x + 12 = 12y^2 \\
&\Rightarrow (6x+3)^2 - 12y^2 = -3
\end{aligned}$$

fazendo $X = 6x + 3$ *temos a equação de Pell,*

$$X^2 - 12y^2 = -3 \tag{3.10}$$

que tem como solução $(u, v) = (3, 1)$ *e* $(x_1, y_1) = (7, 2)$ *a solução minimal de* $X^2 - 12y^2 = 1$. *Assim as soluções de (3.10) são da forma:*

$$(u, v); u + v\sqrt{12} = (3 + \sqrt{12})(7 + 2\sqrt{12})^k \in \{(3, 1), (45, 13), (627, 181), ...\}$$

portanto

$$(x, y) = \left(\frac{u - 3}{6}, v\right) \in \{(7, 13), (104, 181), ...\}$$

são soluções da equação inicial. □

Considerações finais

.

A proposta inicial do trabalho era fazer uma análise da equação de Pell, apresentando se possível um método que permitisse afirmar a existência ou não de soluções. Tal proposta foi alcançada com a proposição (8), onde provamos que na existência de soluções, podemos encontrar uma solução “pequena”pertencente a um conjunto finito.

Utilizando-se das teorias e aplicações apresentadas, existe a possibilidade deste trabalho ser utilizado por professores do ensino básico na elaboração de atividades interessantes e intrigantes que por séculos foram motivo de investigação e discussão de grandes matemáticos, como por exemplo já apresentado, a busca de raízes quadradas de números inteiros via a Equação de Pell.

Referências Bibliográficas

Brochero Martinez, F. E., Moreira, C. G., Saldanha, N. C., e Tengan, E. (2010). Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. In *Projeto Euclides, IMPA*.

Filipe, R. (2020a). Equação de Pell Generalizada. *Semana Olímpica 2020, Natal/RN*, página 6.

Filipe, R. (2020b). Equação de Pell Generalizada. *Semana Olímpica 2020, Natal/RN*, página 4.

Gonçalves, A. M. H. (2011). Um tratamento particular da equação de Pell. IFPB, Patos/PB.

Moreira, C. G. (2014a). Teoria dos números (A equação de Pell - 1° parte) Nível 3. URL: https://youtu.be/43aK2TwcoIE Acesso em: 30/05/2020.

Moreira, C. G. (2014b). Teoria dos números (A equação de Pell - 2° parte) Nível 3. URL: https://youtu.be/pPLyggpcccY Acesso em: 30/05/2020.

Morgado, A. C. (2013). Matemática Discreta. In *Coleção PROFMAT*, página 176 e 180.

Pinto, F. M. (2019). A Equação de Pell e o Processo de Extração de Raízes Quadradas. Dissertação de Mestrado, IFSP, São Paulo/SP.

Silva, R. P. (2015). Interseção de números geométricos via equação de Pell. Dissertação de Mestrado, UFG, Catalão/GO.

Souza, L. B. (2018). Aproximacões Diofantinas e a Teoria das Fracões Contínuas. Dissertação de Mestrado, IMPA, Rio de Janeiro/RJ.