Universidade Estadual de Londrina

DIONAI DE SOUZA LIMA

CONCEITOS DA ARITMÉTICA MODULAR UTILIZADOS POR ALUNOS DA EDUCAÇÃO BASICA E DO ENSINO SUPERIOR AO RESOLVEREM UM MESMO PROBLEMA

Londrina

2019

DIONAI DE SOUZA LIMA

CONCEITOS DA ARITMÉTICA MODULAR UTILIZADOS POR ALUNOS DA EDUCAÇÃO BASICA E DO ENSINO SUPERIOR AO RESOLVEREM UM MESMO PROBLEMA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Cezar Ferreira

Profª. Drª Magna Natalia Marin Pires (co-orientadora)

Londrina

2019

DIONAI DE SOUZA LIMA

CONCEITOS DA ARITMÉTICA MODULAR UTILIZADOS POR ALUNOS DA EDUCAÇÃO BASICA E DO ENSINO SUPERIOR AO RESOLVEREM UM MESMO PROBLEMA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Cezar Ferreira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Co-orientadora: Profª. Drª Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof. Drª Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –
Campus Londrina

____

Profª. Drª Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 17 de dezembro de 2019.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Lima, Dionai de Souza

Lima, Dionai de Souza .

Conceitos da Aritmética Modular utilizados por alunos da Educação Básica e do Ensino Superior ao resolverem um mesmo problema / Dionai de Souza Lima. - Londrina, 2019.
84 f. : il.

Orientador: Ricardo Cezar Ferreia.
Coorientador: Magna Natalia Marin Pires.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Aritmética Modular - Tese. 2. Ensino de Matemática - Tese. 3. Estratégias de Resolução de Problemas - Tese. I. Ferreia, Ricardo Cezar. II. Pires, Magna Natalia Marin. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDU 51

A Deus, quem esteve ao meu lado durante todo o trajeto. Quem me sustentou nos caminhos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que ajudou a superar as dificuldades, a Ele toda a honra e glória.

Agradeço a meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Cezar Ferreira, pela paciência, dedicação e ensinamentos que possibilitaram que eu realizasse este trabalho.

À Profª. Drª Magna Natalia Marin Pires, co-orientadora, por toda sua atenção, dedicação e por transmitir confiança e segurança para que eu pudesse realizar este trabalho.

À minha esposa Neriane pelo apoio, compreensão e demonstração de amor.

Aos meus filhos, Daniel, Davi, Elisa e Gabriel que são a maior manifestação do amor de Deus em minha vida.

Agradeço de forma especial ao meu pai Inácio (in memoriam) e à minha mãe Audenira pelos cuidados e ensinamentos.

A todos os professores do PROFMAT/UEL pelos ensinamentos.

Aos colegas da Turma PROFMAT 2014, por compartilhar seus conhecimentos, pela descontração, companheirismo e trocas de experiência.

Agradeço aos demais familiares e amigos, por confiarem em mim e estarem do meu lado em todos os momentos da vida.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse momento fosse possível.

“Tudo o que fizerem, façam de todo o coração, como para o Senhor, e não para os homens”

Colossenses 3:23

LIMA, Dionai de Souza. **Conceitos de Aritmética Modular:** uma experiência com alunos da Educação Básica e do Ensino Superior. 84 f. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019

RESUMO

O questionamento que norteou essa pesquisa foi: Como o aumento de escolaridade influencia na utilização de ferramentas matemáticas mais elaboradas na resolução de um problema? Na busca por essa resposta foi apresentado um mesmo problema em turmas de 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, assim como 1º e 2º anos do Ensino Médio de duas escolas públicas paranaense e em turmas de 1º, 2º e 3º anos dos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática de uma universidade pública também no estado do Paraná. Optamos por agrupar as soluções de acordo com a estratégia utilizada e estabelecemos relações entre essas estratégias nos diferentes níveis de ensino, dessa forma, entre outras coisas, é possível perceber que a estratégia mais utilizada foi a abordagem por meio dos múltiplos e divisores, seguida da tentativa e erro, assim como podemos verificar que algumas estratégias não foram utilizadas, que foi o caso do critério de divisibilidade por 7. Fizemos um relato dos resultados obtidos com a pesquisa, é possível verificar que o percentual de alunos que conseguiram resolver o problema no Ensino Fundamental é praticamente o mesmo no Ensino Médio. Podemos observar também que quase a totalidade dos alunos do Ensino Superior chegaram a solução do problema. Também apresentamos uma sugestão de como introduzir conceitos básicos da Aritmética Modular em anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Aritmética Modular. Ensino de Matemática. Estratégias de Resolução de Problemas.

LIMA, Dionai de Souza. **Conceitos de Aritmética Modular:** uma experiência com alunos da Educação Básica e do Ensino Superior. 84 f. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019

ABSTRACT

The questioning guided this research was: How does the increase in schooling influence the use of more elaborated mathematical tools in the resolution of a problem? In the search for this answer, the same problem was presented in classes of 7th and 9th grades of Elementary School, as well as 1st and 2nd grades of Secondary School in two public schools in Paraná and also in classes of 1st, 2nd and 3rd grades of undergraduate and/or bachelor's degree in mathematics from a public university also in the state of Paraná. We chose to group the solutions according to the strategy used and established relationships between these strategies at different levels of education, so, among other things, it is possible to understand that the most used strategy was the approach through multiples and dividers, followed by trial and error, as we can verify that some strategies were not used, in the case of the criteria of divisibility by 7. We reported the results obtained with the research, it is possible to verify that the percentage of students who managed to solve the problem in Elementary school is virtually the same in high school. We can also observe that almost all students in Higher Education have reached the solution of the problem. We also present a suggestion on how to introduce basic concepts of Modular Arithmetic in the final years of Elementary School.

Keywords: Modular Arithmetic. Mathematics teaching. Problem Resolution Strategies.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação de um relógio analógico 17
Figura 2: Distribuição dos números na teia 19
Figura 3: Resolução de EF_{24} – Buscando Padrões 58
Figura 4: Resolução de EF_{24} - Buscando Padrões (continuação) 58
Figura 5: Resolução de EF_{48} – Buscando Padrões 60
Figura 6: Resolução de EF_{28} – MMC 61
Figura 7: Resolução de ES_{10} - MMC 62
Figura 8: Resolução de EF_{10} – Tentativa e Erro 63
Figura 9: Resolução de EF_{10} – Tentativa e Erro (continuação) 64
Figura 10: Resolução de ES_{2} – Tentativa e Erro 65
Figura 11: Resolução de EF_{20} – Múltiplos e divisores 66
Figura 12: Resolução de EF_{44} – Múltiplos e Divisores 67
Figura 13: Resolução de EM_{16} – Múltiplos e Divisores 68
Figura 14: Resolução de ES_{1} – Múltiplos e Divisores 69
Figura 15: Resolução de EM_{9} – Critério de divisibilidade 70
Figura 16: Resolução de ES_{2} – Critério de divisibilidade 71
Figura 17: Resolução de ES_{17} – Critério de divisibilidade 74
Figura 18: Resolução de ES_{17} – Critério de divisibilidade (continuação) 74
Figura 19: Resolução de ES_{17} – Critério de divisibilidade (continuação) 74
Figura 20: Resolução de ES_{5} – Teorema Chinês do Resto 74
Figura 21: Resolução de ES_{6} – Sistema de Congruências 75
Figura 22: Resolução de ES_{6} – Sistema de Congruências (continuação) 76
Figura 23: Resolução de EF_{36} – Múltiplos e divisores 77
Figura 24: Resolução de ES_{5} – Teorema Chinês do Resto 78

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Percentual de solução correta em cada nível 52
Gráfico 2: Estratégias utilizadas no Ensino Fundamental 53
Gráfico 3: Estratégias utilizadas no Ensino Médio..53
Gráfico 4: Estratégias utilizadas no Ensino Superior...54
Gráfico 5: Estratégias utilizadas em todos os níveis de ensino pesquisados............56
Gráfico 6: Estratégias de solução e seus respectivos aproveitamentos (todos os níveis de ensino) 57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Distribuição dos números em seus respectivos fios 20
Quadro 2: Algoritmo do Teorema Chinês do Resto 33
Quadro 3: Analisando o resultado parcial...41
Quadro 4: Algoritmo do Teorema Chinês do Resto 42
Quadro 5: Algoritmo do Teorema Chinês do Resto 43
Quadro 6: Analisando resultado parcial da congruência 44
Quadro 7: Classificação das estratégias de Resolução dos alunos pesquisados 49
Quadro 8: Classificação das estratégias de resolução dos alunos pesquisados (apenas os que chegaram a resposta)...51
Quadro 9: Justificativa referente à solução EF_{36} 79

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
mod	Módulo.
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.
Mmc	Mínimo múltiplo comum.
SD1	Primeira solução do autor.
SD2	Segunda solução do autor.
SD3	Terceira solução do autor.
SD4	Quarta solução do autor.
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
ES	Ensino Superior
$\equiv$	Congruente

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14
CAPÍTULO 1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 17
1.1. Conceito de congruência a partir de 2 situações para os anos finais do Ensino Fundamental 17
1.2. Teoremas, proposições e outras definições 21
CAPÍTULO 2 - Apresentação do problema e algumas soluções 34
2.1. Solução $SD1$ - Teorema Fundamental da Aritmética e Critério de divisibilidade por 7 34
2.2. Solução $SD2$ – Mínimo Múltiplo Comum 37
2.3. Solução $SD3$ – Sistema de Congruências Lineares 38
2.4. Solução $SD4$ – Teorema Chinês do Resto 41
CAPÍTULO 3 – Aplicação do problema e critérios utilizados nos agrupamentos 45
CAPÍTULO 4 – Apresentação e análise dos resultados 48
4.1. Apresentação dos resultados 48
4.2. Uma análise geral dos resultados obtidos 51
4.3. Análise de algumas soluções 57
4.4. Estabelecendo relações entre soluções de grupos diferentes 77
CONSIDERAÇÕES FINAIS 81
Referências 83

INTRODUÇÃO

A palavra aritmética, proveniente do grego arithmetiké, significa “ciência dos números”. É a parte da matemática que estuda as operações numéricas, adição, subtração, multiplicação e divisão.

Esta dissertação tem como foco a Aritmética Modular, parte da Matemática que estuda os restos da divisão de números inteiros, este estudo deu origem ao conceito de congruência entre dois números inteiros, uma ferramenta muito importante na Teoria dos Números.

O matemático suíço Euler foi o precursor no estudo das congruências por volta de 1750. Outros matemáticos também realizaram contribuições, mas a Aritmética Modular foi mais evidenciada pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ que contribuiu com importantes publicações em teoria dos números. Em sua tese de doutorado, intitulada Disquisitiones Arithmeticae, entre outras coisas, ele faz uma reformulação compacta da teoria dos números do século XVIII, inclusive os conceitos de congruências e classes de restos, por meio de simbologias e definições utilizadas até hoje.

O estudo da aritmética faz parte do currículo obrigatório do Ensino Fundamental brasileiro, já a aritmética modular é presente geralmente em cursos específicos do Ensino Superior. Acreditamos que o ensino de congruências pode contribuir de maneira expressiva como uma ferramenta na resolução de problemas, consideramos que as ideias base dessa teoria pode ser ensinada nos anos finais do Ensino Fundamental.

Minha experiência com alunos do Ensino Fundamental me permite perceber que muitos não compreenderam conceitos importantes de aritmética trabalhados nos anos iniciais, o que pode comprometer a aprendizagem de diversos conteúdos nos anos posteriores, essa defasagem pode também provocar o desinteresse dos alunos, já que eles não conseguem acompanhar as aulas. O que fazer nessa circunstância?

Mesmo que o professor se dedique a fazer um resgate, preenchendo essas lacunas, em muitos casos pode não ser suficiente. Acreditamos que um fator importante seria trabalhar para que esse aluno acredite que pode compreender a matemática.

Freudenthal (1973), considera que os alunos têm maior chance de aprender matemática construindo-a, reinventando-a, recriando-a, e esse processo deve estar relacionado as experiências que fazem parte da realidade desses alunos.

Segundo VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (2003, apud FERREIRA.; BURIASCO, 2006), Freudenthal considerava a matemática como uma atividade de busca e resolução de problemas e, de forma mais geral, como a atividade de organizar e lidar "matematicamente" a "realidade" – atividade que chamou de "matematização".

Considerando isso, queremos propor aos alunos um problema que faça parte da sua realidade, com as quais ele se sinta capaz de interagir, mesmo que domine apenas as ferramentas mais elementares da matemática. Acreditamos que ao conseguir envolver o aluno com a atividade, o professor tem a possibilidade de conduzi-lo a descoberta de novas ferramentas e possa ampliar seu conhecimento.

A intenção desse trabalho é verificar como alunos de diferentes níveis de ensino lidam com um mesmo problema. Nesta perspectiva, pretendemos responder a seguinte questão: **O aumento de escolaridade influencia na utilização de ferramentas matemáticas mais elaboradas[1] na resolução de um problema?**

O desenvolvimento dessa pesquisa perpassa pelos objetivos que seguem:

- verificar quais ferramentas matemáticas são utilizadas por alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior na resolução de um problema;
- identificar relações entre as estratégias utilizadas, na resolução de um problema, por alunos de diferentes níveis;

Nosso trabalho está estruturado em três capítulos. O primeiro é a fundamentação teórica, que servirá de base para o entendimento dos cálculos e das aplicações apresentadas posteriormente. Nele apresentamos também, uma sugestão de como introduzir conceitos básicos da Aritmética Modular em anos finais do Ensino Fundamental.

No capítulo dois apresentamos o problema que será proposto aos alunos dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior, assim como algumas possibilidades de resolução.

[1] Aritmética Modular

O terceiro capítulo traz um relato sobre os resultados que obtivemos, apresentamos um agrupamento das resoluções considerando as estratégias matemáticas desenvolvidas pelos alunos e fazemos alguns comparativos entre as soluções de diferentes níveis de ensino.

Por fim fazemos algumas considerações finais, reflexões que o desenvolvimento do trabalho permitiu, tanto no trato com os conteúdos matemáticos quanto na contribuição na formação profissional do autor.

CAPÍTULO 1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma poderosa ferramenta da Teoria dos Números é a Aritmética Modular, que está relacionada ao conceito de congruência. Apesar de não ser comum a apresentação deste conteúdo no Ensino Básico, acreditamos que é possível por meio de uma linguagem apropriada, que alguns conceitos iniciais sejam acessíveis aos anos finais do Ensino Fundamental.

Nesse capítulo apresentaremos a base teórica para o desenvolvimento deste trabalho, dando ênfase em definições e teoremas que serão mencionados nos próximos capítulos.

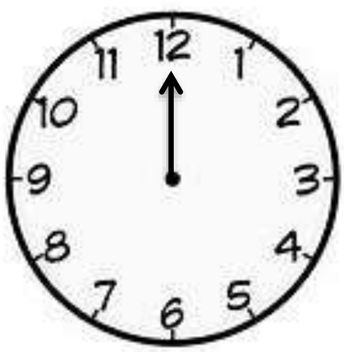
Uma sugestão para introduzir o conhecimento sobre aritmética modular já no Ensino Fundamental será apresentada na parte inicial desse capítulo.

1.1. Conceito de congruência a partir de 2 situações para os anos finais do Ensino Fundamental

Para começar o estudo de congruências vamos pensar em uma situação que faça sentido a expressão $8 + 7 \equiv 3$.

Imagine que uma pessoa comece a trabalhar às 8 horas da manhã, se ela permanecer no serviço por um período de 7 horas, o horário de sua saída será 3 horas da tarde.

Figura 1: Representação de um relógio analógico



Fonte: o autor

Mas, observe que nem todos iriam se referir ao horário de saída como 3 horas da tarde, muitas pessoas preferem dizer 15 horas. Portanto, 15 horas e 3 horas da tarde são equivalentes, pois ambos são representados da mesma forma em um relógio analógico.

Iremos representar essa equivalência da seguinte forma $15 \equiv 3$, e lemos 15 é congruente a 3. Dessa forma, com base em nosso relógio, teremos:

$$13 \equiv 1$$
$$14 \equiv 2$$
$$15 \equiv 3$$
$$16 \equiv 4$$
$$17 \equiv 5$$
$$18 \equiv 6$$
$$19 \equiv 7$$
$$20 \equiv 8$$
$$21 \equiv 9$$
$$22 \equiv 10$$
$$23 \equiv 11$$
$$24 \equiv 12$$

Mas, precisamos informar de alguma maneira que nosso relógio está dividido em 12 partes, então teremos $15 \equiv 3\, mod\ 12$, e diremos que 15 é congruente a 3 módulo 12. Dessa forma temos as seguintes congruências para as 24 horas do dia em relação ao nosso relógio de 12 horas:

$$13 \equiv 1\, mod 12$$
$$14 \equiv 2\, mod 12$$
$$15 \equiv 3\, mod 12$$
$$16 \equiv 4\, mod 12$$
$$17 \equiv 5\, mod 12$$
$$18 \equiv 6\, mod 12$$
$$19 \equiv 7\, mod 12$$
$$20 \equiv 8\, mod 12$$
$$21 \equiv 9\, mod 12$$
$$22 \equiv 10\, mod 12$$
$$23 \equiv 11\, mod 12$$
$$24 \equiv 12\, mod 12$$

Podemos agora, formalizar os conceitos de Divisibilidade dos Números Inteiros e também o de Congruência:

Definição 1.1: (divisibilidade dos números inteiros) Se a e b são números inteiros com $a \neq 0$, dizemos que a divide b, denotando por $a|b$, se existir um inteiro c tal que $b = ac$.

Se a não divide b escrevemos $a \nmid b$, que significa: $b \neq ak$ para todo k inteiro.

Exemplo 1:

i) $3|21$, pois existe 7 tal que $21 = 3 \times 7$.

ii) $5|-75$, pois existe -15 tal que $-75 = 5 \times (-15)$.

iii) $7 \nmid 9$, pois não existe um número inteiro que multiplicado por 7 resulte em 9.

Definição 1.2 (congruência): Sejam a, b e m números inteiros com $m > 1$. Diz-se que a é congruente a b módulo m, denotado por $a \equiv b\ mod(m)$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m.

Exemplo 2:

i) $3 \equiv 8\ mod\ 5$, pois, 3 e 8 deixam resto 3 quando divididos por 5.

ii) $13 \equiv 19\ mod\ 6$, pois, 13 e 19 deixam resto 1 quando divididos por 6.

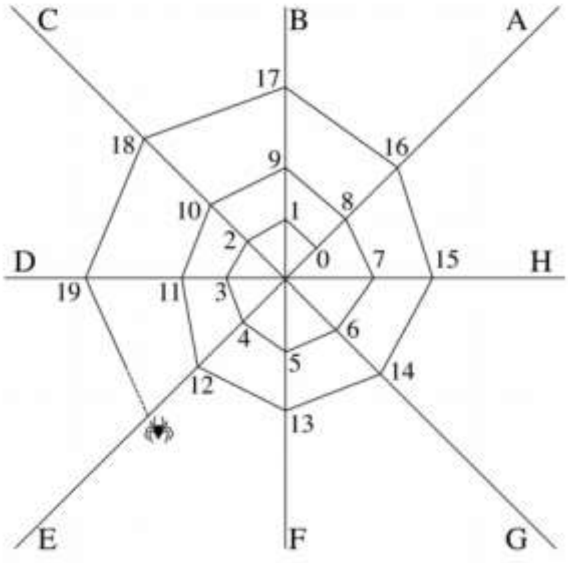
iii) $10 \equiv 35\ mod\ 5$, pois, 10 e 35 deixam resto 0 quando divididos por 5.

Essa noção de congruência, já é uma ferramenta para solucionar diversos problemas, e que inclusive, pode ser trabalhada com alunos do Ensino Fundamental. A seguir será apresentado, como exemplo um, entre diversos outros problemas, que podemos encontrar no site da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas).

Exemplo 3: A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a Figura 2. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?[2]

Figura 2: Distribuição dos números na teia

[2] Equipe da OBMEP. **Banco de questões:** 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Ministério da Educação, Nível 2 - lista 2. 2006.



Fonte: Equipe da OBMEP. **Banco de questões:** 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Ministério da Educação, Nível 2 - lista 2. 2006.

Se organizarmos os valores em uma tabela é mais fácil perceber o que está acontecendo:

Quadro 1: Distribuição dos números em seus respectivos fios

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	…	…	…	…

Fonte: Própria autoria, 2019

Observe que a relação que existe entre cada fio e os números que estão sobre ele é a seguinte:

A: contém os números que deixam resto 0 na divisão por 8.

B: contém os números que deixam resto 1 na divisão por 8.

C: contém os números que deixam resto 2 na divisão por 8.

D: contém os números que deixam resto 3 na divisão por 8.

E: contém os números que deixam resto 4 na divisão por 8.

F: contém os números que deixam resto 5 na divisão por 8.

G: contém os números que deixam resto 6 na divisão por 8.

H: contém os números que deixam resto 7 na divisão por 8.

Para saber em qual fio está o número 118, basta verificar que:

$118 \div 8$ deixa resto 6, ou seja, $118 \equiv 6\ mod\ 8$, portanto o número 118 estará sobre o fio G, o que finaliza a solução.

Observe que apenas esses conceitos iniciais são possíveis de serem ensinados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, se bem contextualizados podem ser compreendidos, o que descarta qualquer alegação da não possibilidade de ser inserido no planejamento, pois não estamos sugerindo nenhum aprofundamento que demande tanto tempo.

1.2. Teoremas, proposições e outras definições

Dando continuidade, vamos ver algumas proposições que serão utilizadas no decorrer desse trabalho, tomados a partir de (HEFEZ, 2014) e (SANTOS, 2014).

Proposição 1.1: Se a, b, c são inteiros quaisquer, $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração: Como $a|b$ e $b|c$, existem inteiros k_1 e k_2 com $b = k_1 a$ e $c = k_2 b$. Substituindo o valor de b na equação $c = k_2 b$ teremos $c = (k_2 k_1)a$ com $(k_2 k_1) \in \mathbb{Z}$, logo $a|c$. ■

Exemplo 4: Como $12|48$ e $48|96$, implica que $12|96$.

Proposição 1.2: Se $a, b, c,$ são inteiros quaisquer, $c|a$ e $c|b$, então $c|(ma + nb)$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Se $c|a$ e $c|b$ então $a = k_1 c$ e $b = k_2 c$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Multiplicando-se estas duas equações, respectivamente, por m e n teremos $ma = mk_1 c$ e $nb = nk_2 c$. Somando-se membro a membro obtemos $ma + nb = (mk_1 + nk_2)c$, com $(mk_1 + nk_2) \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $c|(ma + nb)$. ■

Exemplo 5: Como $9|27$ e $9|36$, então pela Proposição 1.2, segue que $9|(\underbrace{\underbrace{4.27}_{108} + \underbrace{5.36}_{180}}_{288})$.

Definição 1.3 (máximo divisor comum): O Máximo Divisor Comum de dois inteiros a e b (a ou b diferente de zero), denotado por (a, b) é o maior inteiro que divide a e b.

Exemplo 6: Vejamos qual é o máximo divisor comum entre 14 e 35:

Note que o maior inteiro que divide 14 é 7. Da mesma forma o maior inteiro que divide 35 é 7. Portanto, $(14, 35) = 7$.

Teorema 1.1: Seja d o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros n_0 e m_0 tais que $d = n_0a + m_0b$.

Demonstração: Seja B o conjunto de todas as combinações lineares $\{na + mb\}$ onde n e m são inteiros. Este conjunto contém, claramente, números negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher n_0 e m_0 tais que $c = n_0a + m_0b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B. Vamos provar que $c|a$ e $c|b$. Como as demonstrações são similares, mostraremos apenas que $c|a$. A prova é por contradição. Suponhamos que $c \nmid a$. Neste caso, existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$. Portanto, $r = a - qc = a - q(n_0a + m_0b) = (1 - qn_0)a + (-qm_0)b$. Isto mostra que $r \in B$, pois $(1 - qn_0)$ e $(-qm_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de B. Logo $c|a$ e de forma análoga se prova que $c|b$.

Como d é um divisor comum de a e b, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a = k_1$d e $b = k_2$d e, portanto, $c = n_0a + m_0b = n_0k_1d + m_0k_2d = d(n_0k_1 + m_0k_2)$ o que implica $d|c$, logo temos que $d \leq c$ (ambos são positivos) e como $d < c$ não é possível, uma vez que d é o máximo divisor comum, concluímos que $d = n_0a + m_0b$.■

Exemplo 7: Note que 4 é o máximo divisor comum entre 12 e 16. Pelo teorema que acabamos de ver existem números inteiros n_0 e m_0 que atendem a seguinte condição $4 = n_0 12 + m_0 16$, observe que para $n_0 = -1$ e $m_0 = +1$ teremos $4 = \underbrace{\underbrace{(-1)12}_{-12} + \underbrace{1.16}_{16}}_{4}$

Teorema 1.2: Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração: Como $(a, b) = 1$ pelo Teorema 1.1 existem inteiros n e m tais que $na + mb = 1$. Multiplicando-se os dois lados desta igualdade por c temos: $n(ac) + m(bc) = c$. Como $a|ac$ e, por hipótese, $a|bc$ então, pela Proposição 1.2, segue que, $a|c$.■

Exemplo 8: Se $7|(5.1099)$, então $7|1099$ já que 7 e 5 são primos entre si.

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.

Demonstração: Se n é primo não há nada a ser demonstrado. Suponhamos, pois, n composto. Seja $p_1 (p_1 > 1)$ o menor dos divisores positivos de n.

Afirmamos que p_1 é primo. Isto é verdade, pois, caso contrário existiria $p,$ tal que $1 < p < p_1$ com $p|n$, contradizendo a escolha de p_1. Logo, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo, a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor fator de n_1. Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos que $n = p_1 p_2 n_2$.

Repetindo este procedimento, obtemos uma sequência decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, \dots, n_r$. Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os primos na sequência $p_1, p_2, \dots, p_k$ não são necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Para mostrar a unicidade usamos indução em n. Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira. Assumimos, então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores do que n. Vamos provar que ela também é verdadeira para n. Se n é primo, não há nada a provar. Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_r.$$

Vamos provar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j. Como p_1 divide o produto $q_1 q_2 \dots q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 | q_1$. Como são ambos primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo $\frac{n}{p_1} = p_2 \dots p_s = q_2 \dots q_r$. Como $1 < \frac{n}{p_1} < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 p_2 \dots p_s$ e $q_1 q_2 \dots q_r$ são iguais. ■

Em seguida iremos formalizar um conceito que já é conhecido desde os anos iniciais do Ensino Básico que é o Mínimo Múltiplo Comum, conhecimento que pode conduzir a solução de vários problemas matemáticos interessantes, inclusive o que será apresentado no próximo capítulo.

Definição 1.4 (Mínimo Múltiplo Comum): O Mínimo Múltiplo Comum de dois inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivo que é divisível por a e b. Vamos denotá-lo por $[a, b]$.

Proposição 1.3: Se $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$ e $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \dots p_n^{b_n}$ onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são os primos que ocorrem nas fatorações de a e b, então

$$[a, b] = p_1^{max\{a_1, b_1\}} p_2^{max\{a_2, b_2\}} \dots p_n^{max\{a_n, b_n\}}.$$

Demonstração: Da definição de Mínimo Múltiplo Comum nenhum fator primo p_i deste mínimo poderá ter um expoente que seja inferior nem a a_i e nem a b_i. Se tomarmos, pois, o maior destes dois para expoente de p_i teremos, não apenas um múltiplo comum, mas o menor possível dentre todos eles. O que conclui a demonstração. ∎

Exemplo 9: Determinar o mínimo múltiplo comum (mmc) entre 300 e 63.

$$63 = \underbrace{3^{\mathbf{2}}.7^1}_{\substack{decomposição \\ do\ 63\ em \\ fatores \\ primos}} \qquad 300 = \underbrace{2^2.3^{\mathbf{1}}.5^2}_{\substack{decomposição \\ do\ 300\ em \\ fatores \\ primos}}$$

O mmc entre 63 e 300 será o produto dos fatores primos que aparecem na decomposição dos mesmos, e quando um deles se repete utilizamos o maior expoente.

$$[63{,}300] = 2^2.3^2.5^2.7^1$$

$$[63{,}300] = 4.9.25.7$$

$$[63{,}300] = 6300.$$

Ou podemos aplicar o procedimento a seguir que é comum e utilizado por alunos no Ensino Fundamental:

$$\left.\begin{array}{r|l} 63,300 & 2 \\ 63,150 & 2 \\ 63,75 & 3 \\ 21,25 & 3 \\ 7,25 & 5 \\ 7,5 & 5 \\ 7,1 & 7 \\ 1,1 & \end{array}\right\} mmc(63,300) = 2.2.3.3.5.5.7 = 6300$$

Agora vamos verificar quais as condições para que possamos afirmar que um número é divisível por 7. Dentre os vários critérios de divisibilidade, inclusive mais conhecidos e utilizados que o do 7, escolhemos a abordagem deste pois será parte importante em soluções do capítulo a seguir.

Proposição 1.4 (Critério de Divisibilidade por 7): Sejam k e i números inteiros. E $10k + i$ é múltiplo de 7 $\Leftrightarrow$ $k - 2i$ é múltiplo de 7.

Demonstração: Se $10k + i$ é múltiplo de 7, então existe um inteiro m tal que $10k + i = 7m$ e, portanto, $k - 2i = k - 2(7m - 10k) = k - 14m + 20k = 21k - 14m = 7(3k - 2m)$ o que implica $k - 2i$ ser múltiplo de 7. Reciprocamente, se $k - 2i$ é múltiplo de 7, então existe um inteiro n, tal que $k - 2i = 7n$ e, portanto $10k + i = 10(7n + 2i) + i = 70n + 20i + i = 70n + 21i = 7(10n + 3i)$, o que implica $10k + i$ ser múltiplo de 7. Isto conclui a prova. ■

Exemplo 10: Vamos verificar se o número 14224 é divisível por 7.

$$\underbrace{14224}_{\substack{separamos\ o\ número\ em\ duas\ partes, \\ onde\ uma\ delas\ é\ o\ algarismo\ das\ unidades \\ e\ a\ outra\ o\ restante\ do\ número}}$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{1422\ e\ 4}_{\substack{agora\ multiplicamos\ por\ 2 \\ o\ menor\ valor}}$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{1422\ e\ 8}_{em\ seguida\ basta\ subtrair\ os\ valores\ obtidos}$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{1422 - 8 = 1414}_{\substack{se\ 1414\ é\ divisível\ por\ 7, então\ o \\ 14224\ também\ será\ divisivel\ por\ 7}}$$

Como o resultado obtido não é facilmente reconhecido como divisível por 7 devemos repetir o processo, agora com o número (1414).

$$\underbrace{1414}_{separando\ em\ duas\ partes}$$
$$\downarrow$$

$$\underbrace{141\ e\ 4}_{duplicamos\ o\ segundo\ valor}$$
$$\downarrow$$

$$\underbrace{141\ e\ 8}_{em\ seguida\ subtraimos\ os\ valores\ obtidos}$$
$$\downarrow$$

$$\underbrace{141 - 8 = 133}_{\substack{verificamos\ se\ o\ resultado\ é\ divisivel\ por\ 7,\\ se\ necessário\ repetimos\ o\ processo}}$$

Vamos repetir mais uma vez, agora com o número 133.

$$\underbrace{133}_{\downarrow}$$

$$\underbrace{13\ e\ 3}_{\substack{\downarrow\\ separamos\ em\ duas\ partes}}$$

$$\underbrace{13\ e\ 6}_{\substack{\downarrow\\ dobramos\ o\ menor\ valor,\\ para\ na\ sequência\ subtraí-los}}$$

$$\underbrace{13 - 6 = 7}_{\substack{\downarrow\\ como\ o\ resultado\ é\ divisível\ por\ 7\\ então\ nosso\ valor\ original\ também\ é}}$$

Como o resultado 7 é divisível por 7, implica que o número original (14224) também é, e mais ainda, podemos afirmar que 1414 e 133 também são divisíveis por 7.

Em um primeiro momento o processo pode parecer mais trabalhoso do que fazer o cálculo direto da divisão, mas basta entender o funcionamento e esses cálculos podem ser processados mentalmente de forma rápida, tornando viável a utilização desse critério de divisibilidade.

Teorema 1.4: Se $a \equiv b(\ mod\ m_1), a \equiv b(\ mod\ m_2),\ldots,\ a \equiv b(\ mod\ m_k)$ onde $a,\ b,\ m_1,$ $m_2,\ \ldots,\ m_k$ são inteiros com m_i positivos, $i = 1, 2, \ldots, k$, então

$$a \equiv b(mod[m_1, m_2, \dots, m_k]),$$

onde $[m_1, m_2, \dots, m_k]$ é o mínimo múltiplo comum de $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Demonstração: Seja p_n o maior primo que aparece nas fatorações de $m_1, m_2, \dots, m_k$. Cada, m_i, $i = 1, 2, \dots, k$ pode, então, ser expresso como:

$$m_i = p_1^{\alpha_{1i}} . p_2^{\alpha_{2i}} \dots p_n^{\alpha_{ni}},$$

onde alguns α_{ji} podem ser nulos.

Como $m_i|(a-b)$ para $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{k}$ temos que $p_j^{\alpha_{ji}}|(a-b), i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$. Logo, se tomarmos $\alpha_j = \max_{1 \leq i \leq k}\{\alpha_{ji}\}$ teremos que:

$$p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = [m_1, m_2, \dots, m_k],$$

conforme Proposição 1.3, o que implica $a \equiv b(mod[m_1, m_2, \dots, m_k])$. ■

Definição 1.5 (congruência linear): A congruência $ax \equiv b \ (mod \ m)$ onde x é uma variável inteira é chamada de congruência linear.

Note que resolver essa congruência linear é equivalente a solucionar a equação $ax + my = b$, que é conhecida como equação diofantina linear (relacionada ao matemático Diofanto).

Teorema 1.5: Sejam a e b inteiros e $d = (a, b)$.

(a) Se $d \nmid c$, então a equação $ax + by = c$ não possui nenhuma solução inteira.

(b) Se $d|c$, então a equação $ax + by = c$ possui infinitas soluções, e se $x = x_0$ e $y = y_0$ é uma solução particular, então todas as soluções são dadas por:

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)k$$

$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)k,$$

onde k é um inteiro.

Demonstração: (a) Se $d \nmid c$, então a equação $ax + by = c$, não possui solução inteira, pois como $d|a$ e $d|b$, d deveria dividir c, o qual é uma combinação linear de a e b. Suponha que $d|c$. Pelo Teorema 1.1 existem inteiros n_0 e m_0, tais que:

$$an_0 + bm_0 = d. \qquad \textbf{(1)}$$

Como $d|c$, existe um inteiro k tal que $c = kd$. Se multiplicarmos, ambos os membros de **(1)** por k, teremos $a(n_0k) + b(m_0k) = kd = c$. Isto nos diz que o par (x_0, y_0) com $x_0 = n_0k$ e $y_0 = m_0k$ é uma solução de $ax + by = c$. É fácil a verificação de que os pares da forma:

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)k$$

$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)k$$

são soluções, uma vez que:

$$ax + by = a\left(x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)k\right) + b\left(y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)k\right)$$

$$= ax_0 + \frac{ab}{d}k + by_0 - \frac{ab}{d}k$$

$$= ax_0 + by_0 = c.$$

O que acabamos de mostrar é que, conhecida uma solução particular (x_0, y_0) podemos, a partir dela, gerar infinitas soluções. Precisamos, agora, mostrar que toda solução da equação $ax + by = c$ é da forma $x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)k$, $y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)k$. Vamos supor que $(x,\ y)$ seja uma solução, ou seja, $ax + by = c$. Mas, como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos, subtraindo membro a membro que:

$$ax + by - ax_0 - by_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

o que implica,

$$a(x - x_0) = b(y - y_0). \qquad \textbf{(2)}$$

Como $d = (a, b)$ temos, $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Portanto, dividindo-se os dois membros da última igualdade **(2)** por d, teremos:

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y - y_0) \qquad \textbf{(3)}$$

Logo, $\left(\frac{b}{d}\right) | \frac{a}{d}(x - x_0)$, segue do Teorema 1.2 que, $\left(\frac{b}{d}\right) | (x - x_0)$, portanto existe um inteiro k satisfazendo $(x - x_0) = k\left(\frac{b}{d}\right)$, ou seja, $x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)k$. Substituindo-se este valor de x na equação **(3)** teremos $y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) k$, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 1.5: Se a e b são inteiros, temos que $a \equiv b(\mathrm{mod\ m})$ se, e somente se, existir um inteiro k tal que $a = b + km$.

Demonstração: Se $a \equiv b(mod\ m)$ então $m|(a-b)$ o que implica na existência de um inteiro k tal que $a - b = km$, isto é, $a = b + km$ Reciprocamente, se existe um inteiro k tal que $a = b + km$, então $a - b = km$, sendo assim, $m|(a-b)$, consequentemente, $a \equiv b(\mathrm{mod\ m})$. ■

Teorema 1.6: Se a, b, c e m são inteiros e $ac \equiv bc(mod\ m)$, então $a \equiv b\left(mod\,\frac{m}{d}\right)$ onde $d = (c, m)$.

Demonstração: Por hipótese temos que $ac \equiv bc\ (mod\ m)$ logo $ac - bc = c(a-b) = km.$ Se dividirmos os dois membros por d, teremos $\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}\right)(a-b) = k\left(\frac{m}{d}\right)$. Logo $\left(\frac{m}{d}\right) | \left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}\right)(a-b)$ e como $\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1,$ pelo Teorema 1.2, $\left(\frac{m}{d}\right)|(a-b)$ o que implica $a \equiv b\left(mod\,\frac{m}{d}\right)$. ■

Teorema 1.7: Sejam a, b e m inteiros tais que m >0 e $(a, m) = d$. No caso em que $d \nmid b$ a congruência $ax \equiv b(mod\ m)$ não possui nenhuma solução e quando $d|b$, possui exatamente d soluções incongruentes módulo m.

Demonstração: Pela Proposição 1.5 sabemos que o inteiro x é solução de $ax \equiv b(mod\ m)$ se, e somente se, existe um inteiro y tal que $ax = b + my$, ou, o que é equivalente, $ax - my = b$. Do Teorema 1.5 sabemos que esta equação não possui nenhuma solução caso $d \nmid b$, e que se $d|b$ ela possui infinitas soluções dadas por $x = x_0 - \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}}\right) k$ e y $= y_0 - \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}\right) k$ onde (x_0, y_0) é uma solução particular de $ax - my = b$. Logo a congruência de $ax \equiv b(mod\ m)$ possui infinitas soluções dadas por $x = x_0 - \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}}\right) k$. Como estamos interessados em saber o número de soluções incongruentes, vamos descobrir sob que condições $x_1 = x_0 - \left(\frac{m}{d}\right) k_1$ e $x_2 = x_0 - \left(\frac{m}{d}\right) k_2$ são congruentes módulo m.

Se x_1 e x_2 são congruentes, então $x_0 - \left(\frac{m}{d}\right)k_1 \equiv x_0 - \left(\frac{m}{d}\right)k_2 (mod\ m)$. Isto implica $\left(\frac{m}{d}\right)k_1 \equiv \left(\frac{m}{d}\right)k_2 (mod\ m)$, e como $\left(\frac{m}{d}\right)|m$, temos $\left(\frac{m}{d}, m\right) = \left(\frac{m}{d}\right)$, o que nos permite o cancelamento de $\left(\frac{m}{d}\right)$ resultando, pelo Teorema 1.6, $k_1 \equiv k_2 (mod\ d)$. Observe que m foi substituido por $d = m/\left(\frac{m}{d}\right)$. Isto nos mostra que soluções incongruentes serão obtidas ao tomarmos $x = x_0 - \left(\frac{m}{d}\right)k$ onde k percorre um sistema completo de restos módulo d, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 1.8 (Teorema Chinês do Resto): Se $(a_i\ , m_i)\ =\ 1$, $(a_i\ , m_j)\ =\ 1$ para $i \neq j$ e c_i inteiro, então o sistema:

$$a_1 x \equiv c_1\ (mod\ m_1)$$

$$a_2 x \equiv c_2\ (mod\ m_2)$$

$$a_3 x \equiv c_3\ (mod\ m_3)$$

$$\vdots$$

$$a_r x \equiv c_r\ (mod\ m_r),$$

possui solução e a solução é única módulo m, onde $m =\ m_1.m_2 \ldots m_r$.

Demonstração: Do fato de $(a_i\ , m_j)\ =\ 1$, o Teorema 1.7 diz que $a_i x \equiv c_i\ (mod\ m_j)$ possui uma única solução que denotamos por b_i. Se definirmos $y_i = \frac{m}{m_i}$ onde, $m = m_1.m_2 \ldots m_r$, teremos $(y_i, m_i)\ =\ 1$, uma vez que $(m_i, m_j)\ =\ 1$ para $i \neq j$. Novamente, o Teorema 1.7 nos garante cada uma das congruências:

$$y_i x\ \equiv\ 1(mod\ m_i),\ i = 1{,}2 \ldots, r.$$

Afirmamos que o número x dado por:

$$x = b_1\, y_1 \bar{y}_1 + b_2\, y_2 \bar{y}_2 + \cdots + b_r\, y_r \bar{y}_r,$$

é uma solução simultânea para o nosso sistema de congruências. De fato,

$$a_i x = a_i b_1\, y_1 \bar{y}_1 + a_i b_2\, y_2 \bar{y}_2 + \cdots + a_i b_i\, y_i \bar{y}_i + \cdots + a_i b_r y_r \bar{y}_r$$

$$\equiv a_i b_i\, y_i \bar{y}_i (mod\ m_i) \equiv a_i b_i \equiv c_i (mod\ m_i).$$

Uma vez que y_i é divisível por m_i para $i \neq j$, $y_i\bar{y}_i \equiv 1(mod\ m_i)$ e b_i é solução de $a_ix \equiv c_i(mod\ m_i)$.

Provamos, a seguir, que esta solução é única módulo m. Se $\bar{x}$ é uma outra solução para o nosso sistema, então $a_i\bar{x} \equiv c_i \equiv a_ix(mod\ m_i)$ e, sendo $(a_i, m_i) = 1$ obtemos $\bar{x} \equiv x(mod\ m_i)$. Logo $m_i\ |(\bar{x} - x)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Mas, como $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$ temos que:

$$[m_1, m_2, \dots, m_r] = m_1. m_2 \dots m_r.$$

Portanto, pelo Teorema 1.4, $m_1. m_2 \dots m_r|(\bar{x} - x)$, ou seja, $\bar{x} \equiv x(mod\ m)$, o que conclui a demonstração. ■

Exemplo 11: Resolver o sistema de congruência:

$$x \equiv 1\ (mod\ 5)$$

$$x \equiv 2\ (mod\ 7)$$

$$x \equiv 3\ (mod\ 11).$$

Aplicando o Teorema Chinês do Resto, temos:

$m_1 = 5$; $m_2 = 7$; $m_3 = 11$; $m = 5 \times 7 \times 11$; $b_1 = 1$; $b_2 = 2$; $b_3 = 3$

$$y_1 = \frac{m}{m_1} = 7 \times 11$$

$$y_2 = \frac{m}{m_2} = 5 \times 11$$

$$y_3 = \frac{m}{m_3} = 5 \times 7.$$

Para determinar $\bar{y}_1$, o que buscamos é a classe inversa de $y_1$módulo m_1, então basta resolver:

$$y_1x \equiv 1\ (mod\ m_1)$$

$$7 \times 11x \equiv 1\ (mod\ 5)$$

$$77x \equiv 1\ (mod\ 5)$$

$$2x \equiv 1\ (mod\ 5)$$

$$\bar{y}_1 = 3.$$

De maneira semelhante encontramos $\bar{y}_2$

$$y_2 x \equiv 1\ (mod\ m_2)$$

$$5 \times 11x \equiv 1\ (mod\ 7)$$

$$55x \equiv 1\ (mod\ 7)$$

$$6x \equiv 1\ (mod\ 7)$$

$$\bar{y}_2 = 6,$$

e também $\bar{y}_3$

$$y_3 x \equiv 1\ (mod\ m_3)$$

$$5 \times 7x \equiv 1\ (mod\ 11)$$

$$35x \equiv 1\ (mod\ 11)$$

$$2x \equiv 1\ (mod\ 11)$$

$$\bar{y}_3 = 6.$$

Portanto, a solução do sistema é dada por

$$x \equiv b_1\, y_1 \bar{y}_1 + b_2\, y_2 \bar{y}_2 + b_3\, y_3 \bar{y}_3\ mod(m_1 . m_2 . m_3)$$

$$x \equiv 1 \times 7 \times 11 \times 3 + 2 \times 5 \times 11 \times 6 + 3 \times 5 \times 7 \times 6\ mod(5 \times 7 \times 11)$$

$$x \equiv 366(mod\ 385)$$

Pretendemos em soluções futuras adotar o algoritmo do Teorema Chinês do Resto, e para apresentá-lo vamos relacionar ao exemplo que acabamos de ver.

Resolver o sistema de congruência:

$$x \equiv 1\ (mod\ 5)$$

$$x \equiv 2\ (mod\ 7)$$

$$x \equiv 3\ (mod\ 11),$$

onde $m_1 = 5$; $m_2 = 7$; $m_3 = 11$; $m = 5 \times 7 \times 11$; $b_1 = 1$; $b_2 = 2$; $b_3 = 3$

Na coluna que chamaremos de A, informaremos os valores b_i.

Na coluna que chamaremos de M, informaremos os valores $\frac{m}{m_i}$.

Na coluna que chamaremos de $\overline{M}$, informaremos os valores M módulo m_i.

Na coluna que chamaremos de $\overline{M}^{-1}$, informaremos a classe inversa de $\overline{M}$ módulo m_i.

Na coluna que chamaremos de $A M \overline{M}^{-1}$, informaremos o produto das três colunas A, M, e $\overline{M}^{-1}$.

Nos casos acima i se refere à congruência $1, 2, \ldots$

Quadro 2: Algoritmo do Teorema Chinês do Resto

	A	M	$\overline{M}$	$\overline{M}^{-1}$	$AM\overline{M}^{-1}$
$N \equiv 1\ (mod\ 5)$	1	$7.11 = 77$	2	3	$1.77.3$
$N \equiv 2\ (mod\ 7)$	2	$5.11 = 55$	6	6	$2.55.6$
$N \equiv 3\ (mod\ 11)$	3	$5.7 = 35$	2	6	$3.35.6$

Fonte: o autor

A solução é dada pela soma de todos os valores da coluna $AM\overline{M}^{-1}$, módulo o produto dos módulos de todas as congruências. Logo,

$$1.77.3 + 2.55.6 + 3.35.6\ mod\ (5.7.11)$$

$$231 + 660 + 630\ mod\ (385)$$

$$1521\ mod\ (385),$$

que equivale a

$$1521 \equiv 366\ mod\ (385),$$

é solução para o nosso sistema.

Para os leitores que queiram aprofundar o estudo do Teorema Chinês do Resto veja (HEFEZ, 2014).

CAPÍTULO 2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E ALGUMAS SOLUÇÕES

O problema que será apresentado a seguir serviu de base para este trabalho. Sua escolha foi feita por ele permitir uma possibilidade diversificada de caminhos que podem ser percorridos na busca pela solução, especialmente relacionados à aritmética. Buscamos por uma opção que pudesse oferecer desafios tanto aos estudantes da Educação Básica como também do Ensino Superior.

O Problema[3]

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribui-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar $2, 3, 4, 5$ ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Para ilustrar essa diversidade referente às possibilidades de estratégias de resolução, serão apresentadas quatro abordagens, duas delas talvez sejam acessíveis inclusive para alunos de 7º ano do Ensino Fundamental e outras duas exijam um grau maior de conhecimento de alguns conteúdos que geralmente são ensinados em cursos de graduação.

2.1. Solução $\mathbf{SD_1}$ - Teorema Fundamental da Aritmética e Critério de divisibilidade por 7

Seja F o número de fotos. Logo, $F \in \mathbb{N}$.

Sabemos que:

F deixa resto 1 ao ser dividido por 2

F deixa resto 1 ao ser dividido por 3

[3] Retirado da dissertação de (FARIA, 2019).

F deixa resto 1 ao ser dividido por 4

F deixa resto 1 ao ser dividido por 5

F deixa resto 1 ao ser dividido por 6

F deixa resto 0 ao ser dividido por $7 \quad (*)$

Vamos inicialmente desconsiderar a condição $(*)$ e voltar a pensar nela ao final.

Sendo assim, $F - 1$ é múltiplo de $2, 3, 4, 5,$ e 6. De maneira equivalente, podemos dizer que $F - 1$ tem em sua composição os fatores $2, 3$ e 5, ou seja:

$$F - 1 = 2^a . 3^b . 5^c .$$

Note que $F - 1$ apesar de ser múltiplo de 4 e 6, estes não aparecem na sua composição, e a justificativa está no Teorema Fundamental da Aritmética.

Observe que:

Se $a \geq 1$, então $2^a . 3^b . 5^c$ é múltiplo de 2.

Se $b \geq 1$, então $2^a . 3^b . 5^c$ é múltiplo de 3.

Se $c \geq 1$, então $2^a . 3^b . 5^c$ é múltiplo de 5.

Perceba que, apenas com as condições acima, já podemos afirmar que $2^a . 3^b . 5^c$ é múltiplo de 6, por ter ao menos um fator 2 e um fator 3 em sua composição. Entretanto, para que seja múltiplo de 4 serão necessários dois fatores 2 para atender essa condição.

Considerando todas as condições, tem-se finalmente que:

$F - 1 = 2^a . 3^b . 5^c$, para $a \geq 2, \quad b \geq 1$, $c \geq 1$.

Isso implica que o menor valor $F - 1$ possível, é quando $a = 2, b = 1$ e $c = 1$, ou seja, $F - 1 = 2^2 . 3^1 . 5^1 = 60$, mas também qualquer $60k$ com $k \in \mathbb{N}$ é solução, o que resulta em:

$$60, 120, 180, 240, 300, 360, \ldots$$

Então, até o momento temos que

$$F - 1 = 60k,$$

Isso implica que

$$F = 60k + 1.$$

O que nos leva a todas as possibilidades a seguir:

$$61, 121, 181, 241, 301, 361, \ldots$$

Precisamos considerar que F é múltiplo de 7 (critério que não foi aplicado no início), portanto podemos utilizar o critério de divisibilidade por 7:

$$61 \to (6 - 2.1) = \underbrace{4}_{\substack{\text{não é } \boldsymbol{divisível} \\ por\ 7}}$$

Como 4 não é divisível por 7, então 61 também não é.

$$121 \to (12 - 2.1) = \underbrace{10}_{\substack{\text{não é } divisível \\ por\ 7}}$$

Como 10 não é divisível por 7, então 121 também não é.

$$181 \to (18 - 2.1) = \underbrace{16}_{\substack{\text{não é } divisível \\ por\ 7}}$$

Como 16 não é divisível por 7, então 181 também não é.

$$241 \to (24 - 2.1) = \underbrace{22}_{\substack{\text{não é } divisível \\ por\ 7}}$$

Como 22 não é divisível por 7, então 241 também não é.

$$301 \to (30 - 2.1) = \underbrace{28}_{\substack{\text{é } divisível \\ por\ 7}}$$

Como 28 é divisível por 7, então 301 também é.

Finalmente, 301 atende a todos os critérios, sendo esse o número de fotos no cartão de memória.

2.2. Solução $\mathbf{SD_2}$ – Mínimo Múltiplo Comum

Sabemos que F deixa resto 1 na divisão por $2, 3, 4, 5$ e 6, então ao subtrair 1 de F, teremos $F - 1$ que deixará resto 0 ao ser dividido por $2, 3, 4, 5$ e 6.

Isso significa que $F - 1$ é múltiplo de $2, 3, 4, 5$ e 6.

Portanto, vamos encontrar o Mínimo Múltiplo Comum entre $2, 3, 4, 5$ e 6.

$$\left.\begin{array}{r|c} 2,3,4,5,6 & 2 \\ 1,3,2,5,3 & 2 \\ 1,3,1,5,3 & 3 \\ 1,1,1,5,1 & 5 \\ 1,1,1,1,1 & \end{array}\right\} mmc(2,3,4,5,6) = 2.2.3.5 = 60$$

Como 60 é o menor múltiplo, sabemos que todo número da forma $60k$ com $k \in \mathbb{N}$, também é um múltiplo comum de $2, 3, 4, 5$ e 6. São eles:

$$60, 120, 180, 240, 300, 360, \ldots$$

Mas, lembrando que F é múltiplo de 7, pois, segundo o enunciado do problema tem resto 0 na divisão por 7, implica que $F - 1$ deixa resto 6 na divisão por 7.

Ao verificar qual múltiplo de $2, 3, 4, 5$ e 6 deixa resto 6 ao ser dividido por 7 e encontraremos $F - 1$.

$$60 \div 7 = 8 \text{ e o resto é } 4$$

$$120 \div 7 = 17 \text{ e o resto é } 1$$

$$180 \div 7 = 25 \text{ e o resto é } 5$$

$$240 \div 7 = 34 \text{ e o resto é } 2$$

$$300 \div 7 = 42 \text{ e o resto é } 6$$

Como $F - 1 = 300$, implica $F = 300 + 1 = 301$. Portanto, 301 é o número de fotos, já que atende a todos os critérios descritos acima.

2.3. Solução $\mathbf{SD_3}$ – Sistema de Congruências Lineares

Considere, pela natureza do problema, $F, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, onde F é o número de fotos no cartão de memória.

Desta forma poderíamos pensar em representar o problema por um sistema de **congruências:**

$$\begin{cases} F \equiv 1\ (mod\ 2) \\ F \equiv 1\ (mod\ 3) \\ \boldsymbol{F \equiv 1\ (mod\ 4)} \\ F \equiv 1\ (mod\ 5) \\ \boldsymbol{F \equiv 1\ (mod\ 6)} \\ F \equiv 1\ (mod\ 7) \end{cases}$$

Mas ocorre que esse sistema de congruências não tem solução, pois os módulos deveriam ser primos entre si dois a dois.

A alternativa que temos nesse caso é desconsiderar os critérios que foram destacados no sistema acima ficando com um sistema que funcionará como um filtro, que irá reduzir muito nosso número de candidatos à solução.

Então, vamos à solução do nosso sistema:

$$\begin{cases} F \equiv 1\ (mod\ 2) \\ F \equiv 1\ (mod\ 3) \\ F \equiv 1\ (mod\ 5) \\ F \equiv 1\ (mod\ 7) \end{cases}$$

1º critério: F deixa resto 1 quando agrupado de 2 em 2, ou seja, é um múltiplo de 2 mais 1.

$$F \equiv 1\ (mod\ 2)$$

$$F = 2a + 1. \qquad \text{(I)}$$

2º critério: F deixa resto 1 quando agrupado de 3 em 3, ou seja, é um múltiplo de 3 mais 1.

$$F \equiv 1\ (mod\ 3) \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$2a + 1 \equiv 1\ (mod\ 3)$$

$$2a \equiv 0\ (mod\ 3)$$

$$a \equiv 0\ (mod\ 3)$$

$$a = 3b. \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I):

$$F = 2(3b) + 1$$

$$F = 6b + 1 \qquad \text{(IV)}$$

$$F \equiv 1\ (mod\ 6).$$

3º critério: F deixa resto 1 quando agrupado de 5 em 5, ou seja, é um múltiplo de 5 mais 1.

$$F \equiv 1\ (mod\ 5). \qquad \text{(V)}$$

Substituindo (IV) em (V):

$$6b + 1 \equiv 1\ (mod\ 5)$$

$$6b \equiv 0\ (mod\ 5)$$

$$b \equiv 0\ (mod\ 5)$$

$$b = 5c. \qquad \text{(VI)}$$

Substituindo (VI) em (IV):

$$F = 6(5c) + 1$$

$$F = 30c + 1 \qquad \text{(VII)}$$

$$F \equiv 1\ (mod\ 30).$$

4º critério: F deixa resto 0 quando agrupado de 7 em 7, ou seja, é um múltiplo de 7.

$$F \equiv 0 \ (mod\ 7) \qquad \text{(VIII)}$$

Substituindo (VII) em (VIII):

$$30c + 1 \equiv 0 \ (mod\ 7)$$

$$30c \equiv -1 \ (mod\ 7)$$

$$30c \equiv 6 \ (mod\ 7)$$

$$60c \equiv 12 \ (mod\ 7)$$

$$11c \equiv 5 \ (mod\ 7)$$

$$22c \equiv 10 \ (mod\ 7)$$

$$c \equiv 3 \ (mod\ 7)$$

$$c = 7d + 3 \qquad \text{(IX)}$$

Substituindo (IX) em (VII):

$$F = 30(7d + 3) + 1$$

$$F = 210d + 90 + 1$$

$$F = 210d + 91.$$

Concluímos que F é um múltiplo de 210 mais 91. Agora, precisamos verificar os critérios do problema que não fizeram parte do sistema de congruências:

- F deixa resto 1 quando agrupado de 6 em 6, ou seja, $F \equiv 1 \ (mod\ 6)$. Esse critério acabou aparecendo no meio da nossa solução, observe o item (IV).
- F deixa resto 1 quando agrupado de 4 em 4, isto é, $F \equiv 1 \ (mod\ 4)$.

Quadro 3: Analisando o resultado parcial

d	$F = 210d + 91$	Deixa resto 1 na divisão por 4
0	91	Não
1	301	Sim
2	511	Não

Fonte: o autor

Portanto, o valor que atende a todos os critérios estabelecidos no problema é 301, logo esse é o número de fotos no cartão de memória.

2.4. Solução SD_4 – Teorema Chinês do Resto

Em resumo, queremos encontrar um número $F \in \mathbb{N}$ que tem as seguintes características:

$F \equiv 1\ (mod\ 2)$ ou seja, deixa resto 1 na divisão por 2

$F \equiv 1\ (mod\ 3)$ ou seja, deixa resto 1 na divisão por 3

$F \equiv 1\ (mod\ 4)$ ou seja, deixa resto 1 na divisão por 4

$F \equiv 1\ (mod\ 5)$ ou seja, deixa resto 1 na divisão por 5

$F \equiv 1\ (mod\ 6)$ ou seja, deixa resto 1 na divisão por 6

$F \equiv 0\ (mod\ 7)$ ou seja, não deixa resto na divisão por 7

Em um primeiro momento pensamos ser um problema para aplicar o Teorema Chinês do Resto, sem avaliar com cuidado as restrições para utilizar esse teorema, mas pode-se ver no quadro abaixo que não foi possível chegar a solução:

Quadro 4: Algoritmo do Teorema Chinês do Resto

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\bar{M}}$	$\boldsymbol{\bar{M}^{-1}}$	$\boldsymbol{A M \bar{M}^{-1}}$
$F \equiv 1\ (mod\ 2)$	1	$3.4.5.6.7 = 2520$	0	$\nexists$	
$F \equiv 1\ (mod\ 3)$	1	$2.4.5.6.7 = 1680$	0	$\nexists$	
$F \equiv 1\ (mod\ 4)$	1	$2.3.5.6.7 = 1260$	0	$\nexists$	
$F \equiv 1\ (mod\ 5)$	1	$2.3.4.6.7 = 1008$	3	2	2016
$F \equiv 1\ (mod\ 6)$	1	$2.3.4.5.7 = 840$	0	$\nexists$	
$F \equiv 0\ (mod\ 7)$	0	$2.3.4.5.6 = 720$	6	6	0

Fonte: o autor

Note que para alguns valores de $\bar{M}$, não existe a classe inversa ($\bar{M}^{-1}$), e portanto, não foi possível prosseguir com o algoritmo.

Agora vamos analisar com cuidado o que diz o Teorema para saber qual foi o problema:

O Teorema Chinês do Resto nos diz que:

Se m_1, m_2, m_3,..., m_k são inteiros positivos, primos dois a dois, então o sistema:

$$X \equiv A_1 (mod\ m_1)$$

$$X \equiv A_2 (mod\ m_2)$$

$$\vdots$$

$$X \equiv A_k (mod\ m_k)$$

tem solução única $mod\ (m_1 . m_2 \ldots m_k)$.

Observe que a princípio nosso problema não permite a utilização do Teorema Chinês do Resto, já que $2,3,4,5,6$ e 7 não são primos dois a dois. Entretanto se desconsiderarmos, inicialmente, as informações que F deixa resto 1 na divisão por 4 e também por 6, podemos aplicar o Teorema Chinês do Resto e à sua solução acrescentamos os critérios deixados de fora no início.

Agora, que fizemos essas considerações, podemos iniciar a solução do nosso problema, aplicando o algoritmo:

Quadro 5: Algoritmo do Teorema Chinês do Resto

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\bar{M}}$	$\boldsymbol{\bar{M}^{-1}}$	$\boldsymbol{AM\bar{M}^{-1}}$
$F \equiv 1\ (mod\ 2)$	1	$3.5.7 = 105$	1	1	105
$F \equiv 1\ (mod\ 3)$	1	$2.5.7 = 70$	1	1	70
$F \equiv 1\ (mod\ 5)$	1	$2.3.7 = 42$	2	3	126
$F \equiv 0\ (mod\ 7)$	0	$2.3.5 = 30$	2	4	0

Fonte: o autor

A solução será $105 + 70 + 126 + 0\ (mod\ 2.3.5.7)$, ou seja, $301(\ mod\ 210)$ que equivale a $301 \equiv 91\ (mod\ 210)$.

Então, $F = 210k + 91$. Veja que aplicando apenas uma parte dos critérios mencionados no problema já restringimos nossa busca a um número múltiplo de 210 somado a 91, basta agora verificar para quais valores de k, os critérios que desconsideramos no início são atendidos, como podemos observar na tabela abaixo:

Quadro 6: Analisando resultado parcial da congruência

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{F = 210k + 91.}$	**Deixa resto $\mathbf{1}$ na divisão por $\mathbf{4}$**	**Deixa resto $\mathbf{1}$ na divisão por $\mathbf{6}$**
0	91	Não	Sim
1	301	Sim	Sim

Fonte: o autor

Note que para $k = 1$, temos $F = 301$, valor que atende a todos os critérios estabelecidos.

Perceba que o Teorema Chinês do Resto, não precisa ser utilizado apenas em problemas que apresentam as condições ideais para sua aplicação, nesse caso ele funcionou como um bom filtro que reduziu, de 500 para 2 as possibilidades de resposta e depois só aplicamos os outros critérios para concluir a solução.

CAPÍTULO 3 – APLICAÇÃO DO PROBLEMA E CRITÉRIOS UTILIZADOS NOS AGRUPAMENTOS

Como podemos verificar no Capitulo 2, encontramos quatro abordagens diferentes que resolveram o problema, algumas utilizando conhecimentos acessíveis a alunos do Ensino Fundamental e outras, conteúdos específicos do Ensino Superior. Esse procedimento foi importante para validar a escolha do nosso problema, além de ser um indício de que ao final do estudo, poderemos obter um número maior de estratégias. Estas soluções, como já foi mencionado, denominamos por SD_1, SD_2, SD_3, e SD_4.

Com base nos conteúdos matemáticos que utilizamos nestas quatro soluções, era preciso definir em quais anos do Ensino Fundamental seria possível apresentar o problema. Em um primeiro momento, consideramos iniciar o estudo a partir do 9º ano, por acreditar que alunos do 7º ano poderiam apresentar dificuldades em organizar uma estratégia que levasse a solução, mesmo com o conhecimento de ferramentas matemáticas suficientes para realização da atividade. Entretanto, após algumas considerações, resolvemos iniciar o estudo a partir do 7º ano.

Para iniciar a atividade, entregamos para cada aluno uma folha com o problema, e estes puderam escolher entre fazer a atividade individualmente ou em grupo. Nos casos em que optaram por fazer em grupo recolhemos apenas uma das folhas, e para a nossa análise esse grupo de alunos será tratado como o único aluno. Apenas nos casos em que um grupo de alunos apresentou mais de uma solução, utilizando diferentes estratégias, foi que recolhemos mais de uma folha de resposta, mas sempre em quantidade menor ou igual ao número de participantes do grupo. A maioria dos alunos principalmente no Ensino Fundamental e Médio optaram por fazer individualmente.

Em todas as turmas evitamos interferir nas tomadas de decisões referentes às escolhas da estratégia. Entretanto, por meio de questionamentos procuramos garantir que os alunos tivessem a correta interpretação do problema, nos limitamos a fazer intervenções como:

- Parabéns, gostei da estratégia que você escolheu!

- Talvez fosse melhor você tentar outro caminho!

- Será que você não está esquecendo nenhuma informação do problema?
- Pense um pouco mais sobre isso!
- Será que não tem alguma forma de diminuir um pouco todas essas opções?

No Ensino Fundamental o problema foi resolvido por 3 turmas de 7º ano e 1 turma de 9º ano, as soluções obtidas nesse nível de ensino foram nomeadas por EF.

No Ensino Médio, o problema foi apresentado para 2 turmas de 1º ano e 2 turmas de 2º ano. As soluções obtidas foram nomeadas por EM, nas quais também se fez necessário realizar uma discussão a respeito dos detalhes do enunciado do problema, com objetivo de garantir a exata compreensão por parte de alguns alunos que chegaram a conclusões equivocadas ao interpretá-lo.

Já no Ensino Superior, apresentamos o problema a 2 turmas de 1º ano, 1 turma do 2º ano e 1 turma do 3º ano, nesse caso não ocorreram dificuldades com a interpretação do problema e as soluções nomeamos por ES.

Após a coleta das soluções optamos por agrupá-las utilizando como critério a principal estratégia utilizada na tentativa de solução.

Ao final chegamos a 11 diferentes agrupamentos, sendo que 2 deles não podemos considerar como estratégia de solução, pois, o primeiro grupo se refere aos alunos que entregaram a atividade em branco, portanto, nomeamos como “Não apresentou tentativas de solução”, e o outro grupo é o grupo nomeado por “Apenas iniciou uma tentativa que não leva a uma solução”, que são aqueles alunos que fizeram algumas poucas anotações, mas não foi possível identificar nenhuma estratégia.

Nos 9 grupos restantes foi possível identificar uma abordagem principal, e estes foram denominados de “Mínimo Múltiplo Comum (MMC)”,”Múltiplos e divisores”, “Critérios de divisibilidade”, “Sistema de congruências”, “Teorema Chinês do Resto”, “Álgebra - sistema de equações do 1º grau”, “Buscando padrões”, “Tentativa e erro” e “Potenciação”.

Alguns agrupamentos apresentam certa semelhança quando comparados, portanto, relataremos abaixo qual o critério usado para distingui-los.

As soluções que apresentavam diversas divisões sem utilizar nenhum tipo de filtro que limitasse um pouco o número de candidatos à resposta, denominamos como “Tentativa e erro”. Entretanto, em algumas soluções observamos que o aluno utilizou diversas divisões, mas antes, aplicou algum critério de divisibilidade que reduziu muito suas opções, logo, estas soluções foram denominadas de “Critérios de divisibilidade”.

Algumas soluções que utilizavam os múltiplos de um determinado número em comparação à outras que falavam sobre os divisores, acabavam sendo muito semelhantes, e devido à forte relação entre os dois termos optamos por um grupo que juntasse todas elas, que é o grupo “Múltiplos e divisores”.

Obtivemos soluções em que os alunos listaram as possibilidades de resposta de acordo com os critérios apresentados no enunciado do problema, e a partir dessa lista passaram a observar determinado padrão, a esse tipo de abordagem demos o nome de “Buscando padrões”.

Em relação aos demais grupos, o próprio nome evidencia a estratégia de solução utilizada, não existindo a necessidade de comentar a respeito.

Ao denominar cada grupo, não levamos em consideração se a estratégia adotada levaria ou não a solução do problema, verificamos apenas se era utilizado algum conteúdo matemático específico que pudesse ser caracterizado como estratégia. Também é importante ressaltar que a maioria delas agrupa mais de uma estratégia, mas consideramos sempre aquela que predomina.

CAPÍTULO 4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresentamos o problema discutido no Capítulo 2 a algumas turmas do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio em duas escolas estaduais no norte do Paraná. O objetivo é verificar como ocorre a evolução dos alunos em relação ao conhecimento matemático, à medida que vão avançando pelos níveis de ensino, em especial com relação a aritmética. O estudo também foi realizado no Ensino Superior com alunos do curso de Licenciatura e também Bacharelado em Matemática de uma universidade pública, também do norte do Paraná.

4.1. Apresentação dos resultados

Para melhor apresentação dos resultados obtidos, chamaremos de (EF) as soluções obtidas no Ensino Fundamental, (EM) as soluções apresentadas no Ensino Médio e por (ES) as soluções que tem origem no Ensino Superior. Lembramos também que as soluções que apresentamos no Capítulo 2 foram nomeadas por (SD).

No Ensino Fundamental o problema foi aplicado a 89 alunos, e, portanto, listaremos as soluções obtidas por $\mathrm{EF}_1, \mathrm{EF}_2, \mathrm{EF}_{3,} \ldots, \mathrm{EF}_{88}, \mathrm{EF}_{89}$. No Ensino Médio obtivemos 67 soluções nomeadas por $\mathrm{EM}_1, \mathrm{EM}_2, \mathrm{EM}_{3,} \ldots, \mathrm{EM}_{66}, \mathrm{EM}_{67}$, por fim as 29 soluções obtidas no Ensino Superior são $\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_2, \mathrm{ES}_{3,} \ldots, \mathrm{ES}_{28}, \mathrm{ES}_{29}$.

Em alguns casos, os alunos pensaram juntos em uma a solução para o problema, então consideramos como uma única solução.

Todos os resultados obtidos foram agrupados de acordo com a estratégia que foi utilizada na tentativa de resolução. O critério escolhido para fazer os agrupamentos foi considerar aquele conteúdo que parece ter sido o mais relevante para chegar a solução ou, ainda que não levasse a solução, aquele em que o aluno concentrou suas ações, as quais podemos verificar no quadro a seguir:

Quadro 7: Classificação das estratégias de Resolução dos alunos pesquisados

Grupo	Estratégia	Resolveram	Total
1	MMC	$EF_{28}, EF_{32}, EF_{49}$, $EF_{50}, ES_{4}, ES_{10}, ES_{11}, ES_{19}, ES_{21}, ES_{22}, ES_{23}$	11
2	Múltiplos e divisores	$EF_{2}, EF_{9}, EF_{21}, EF_{16}, EF_{20}, EF_{22}, EF_{23}, EF_{30}, EF_{31}, EF_{33}, EF_{36}, EF_{37}, EF_{38}, EF_{39}, EF_{40}, EF_{44}, EF_{45}, EF_{47}, EF_{55}, EF_{56}, EF_{64}, EF_{65}, EF_{74}, EF_{75}, EM_{3}EM_{4}, EM_{6}, EM_{12}, EM_{16}, EM_{18}, EM_{20}, EM_{21}, EM_{22}, EM_{24}, EM_{32}, EM_{33}, EM_{37}, EM_{39}, EM_{43}, EM_{44}, EM_{47}, EM_{48}, EM_{49}, EM_{50}, EM_{52}, EM_{53}, EM_{54}, EM_{55}, EM_{57}, EM_{58}, EM_{61}, EM_{62}, EM_{63}, EM_{64}, EM_{65}, EM_{67}$, $ES_{1}, ES_{8}, ES_{9}, ES_{13}, ES_{14}, ES_{15}, ES_{16}, ES_{25}, ES_{26}, ES_{29}$	66
3	Critérios de divisibilidade	$EM_{9}, EM_{10}, ES_{2}, ES_{12}, ES_{20}, ES_{28}$	6
4	Sistema de congruências	ES_{6}, ES_{7}	2
5	Teorema Chinês do Resto	ES_{3}, ES_{5}	2
6	Álgebra - Sistema de equações do 1º grau	ES_{17}, ES_{24}	2
7	Buscando padrões	EF_{24}, EF_{48}	2
8	Tentativa e erro	$EF_{1}, EF_{3}, EF_{4}, EF_{5}, EF_{6}, EF_{7}, EF_{8}, EF_{10}, EF_{11}, EF_{12}, EF_{14}, EF_{15}, EF_{17}, EF_{18}, EF_{19}, EF_{25}, EF_{27}, EF_{29}, EF_{34}, EF_{41}, EF_{42}, EF_{43}, EF_{46}, EF_{57}, EF_{58},$	44

		$EF_{59}, EF_{66}, EF_{67}, EF_{76}, EF_{77}, EF_{78}, EF_{86}$, $EM_7, EM_{13}, EM_{15}, EM_{17}, EM_{23}, EM_{25}, EM_{26}, EM_{29}, EM_{30}, EM_{35}, EM_{41}, ES_{27}$	
9	Potenciação	$EF_{26}, EM_8, EM_{14}, EM_{38}$	4
10	Apenas iniciou uma tentativa que não leva a uma solução	$EF_{13}, EF_{35}, EF_{53}, EF_{54}, EF_{62}, EF_{63}, EF_{70}, EF_{71}, EF_{72}, EF_{73}, EF_{82}, EF_{83}, EF_{84}, EF_{85}, EF_{87}, EF_{88}, EF_{89}, EM_1, EM_2, EM_5, EM_{11}, EM_{19}, EM_{27}, EM_{42}, EM_{45}, EM_{46}, EM_{51}, EM_{56}, EM_{60}, EM_{66}, ES_{18}$	31
11	Não apresentou tentativas de solução	$EF_{51}, EF_{52}, EF_{60}, EF_{61}, EF_{68}, EF_{69}, EF_{79}, EF_{80}, EF_{81}, EM_{28}, EM_{31}, EM_{34,} EM_{36}, EM_{40}, EM_{59}$	15

Fonte: o autor

O Quadro 6 apresenta a relação de todas as tentativas de resolução, inclusive as que não obtiveram êxito.

A coluna da estratégia indica a característica escolhida por cada aluno para resolver a questão. Para exemplificar, considere que um aluno tenha utilizado a informação que o número de fotos tem resto zero ao serem organizadas em grupos de 7, se ele investigou apenas múltiplos de 7, por meio da tentativa e erro, esse aluno foi colocado no grupo dos múltiplos, pois seu conhecimento sobre múltiplos reduziu consideravelmente seu universo de busca de 500 para 70 números.

Considere agora um aluno que, sem utilizar nenhum tipo de filtro, simplesmente aplicou a tentativa e erro ao universo dos 500 números, esse foi colocado no grupo da tentativa e erro.

Em seguida, apresentamos no Quadro 7, semelhante ao anterior, porém nesse estão relacionados apenas aqueles alunos que conseguiram solucionar o problema:

Quadro 8: Classificação das estratégias de resolução dos alunos pesquisados (apenas os que chegaram à resposta)

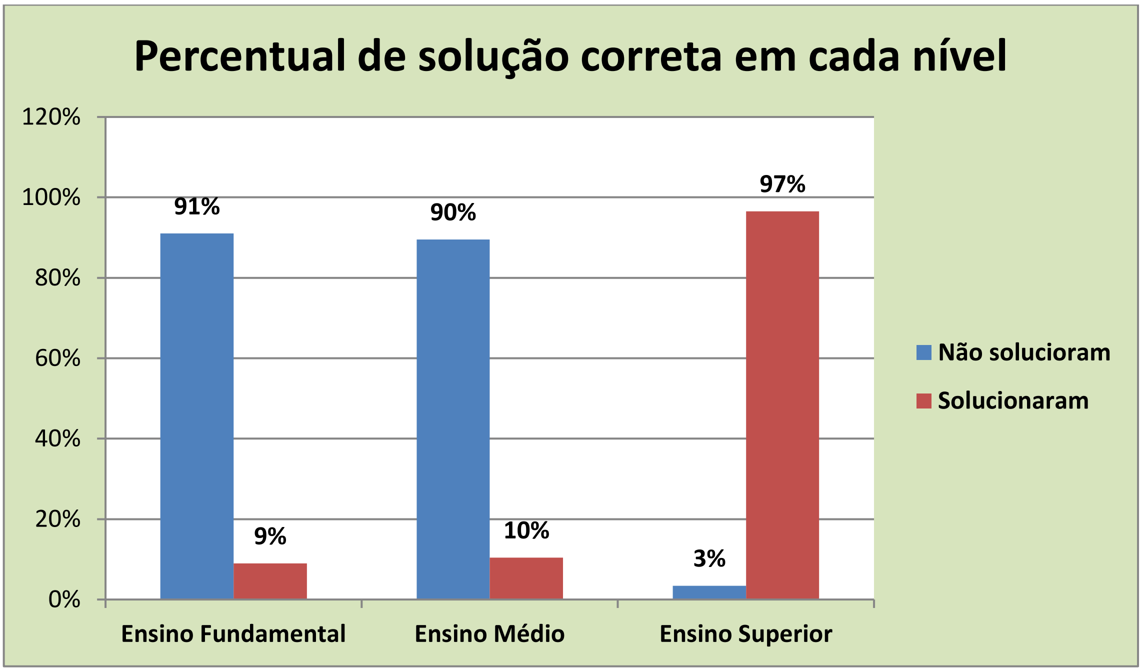
Grupo	Estratégia	Resolveram	Total
1	MMC	$EF_{28}, ES_4, ES_{10}, ES_{11}, ES_{19}, ES_{21}, ES_{22}, ES_{23}$	8
2	Múltiplos e divisores	$EF_{16}, EF_{36}, EF_{40}, EF_{44}, EM_6, EM_{12}$ $EM_{16}, EM_{18}, EM_{20}, EM_{21}, ES_1, ES_8, ES_9, ES_{13}, ES_{14}, ES_{15}, ES_{16}, ES_{25}, ES_{26}, ES_{29}$	20
3	Critérios de divisibilidade	$EM_9, ES_2, ES_{12}, ES_{20}, ES_{28}$	5
4	Sistema de congruências	ES_6, ES_7	2
5	Teorema Chinês do Resto	ES_3, ES_5	2
6	Álgebra - Sistema de equações do 1º grau	ES_{17}, ES_{24}	2
7	Buscando padrões	EF_{24}	1
8	Tentativa e erro	$EF_{10}, EF_{12}, ES_{27}$	3

Fonte: o autor

4.2. Uma análise geral dos resultados obtidos

Uma constatação importante é que as mesmas dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Fundamental, como dificuldade em interpretar o problema, em organizar uma estratégia na busca da solução que, em princípio imaginávamos que ocorreriam em menor proporção no Ensino Médio, para nossa surpresa não foi o que aconteceu. Observamos que as dificuldades permaneceram, e isso pode ser verificado no Gráfico 1.

Gráfico 1: Percentual de solução correta em cada nível



Fonte: o autor

Note que o percentual de alunos que conseguiram resolver o problema no Ensino Fundamental é praticamente o mesmo no Ensino Médio.

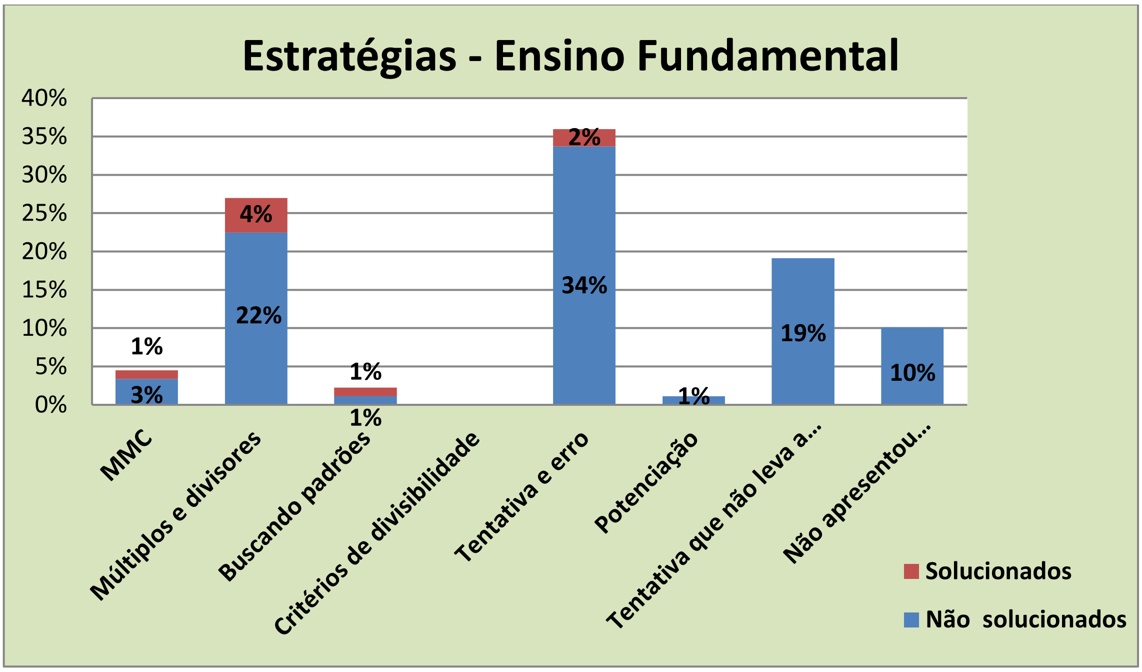
Esses dados podem indicar que os alunos não estão ampliando seus conhecimentos matemáticos, ou talvez que aprenderam os conteúdos, mas não conseguem fazer uma relação entre esse conhecimento e as possibilidades de sua aplicação.

Outra informação relevante é que a maioria dos alunos que resolveram o problema no Ensino Fundamental são do sétimo ano, e que existe, no mínimo, três anos a menos de contato com a matemática desses alunos com os alunos do Ensino Médio, esse fato nos fez esperar que o índice de acertos dos últimos fosse maior.

Podemos observar também que quase a totalidade dos alunos do Ensino Superior chegaram a solução do problema, o que já era esperado, considerando que se tratam de alunos de cursos de Matemática.

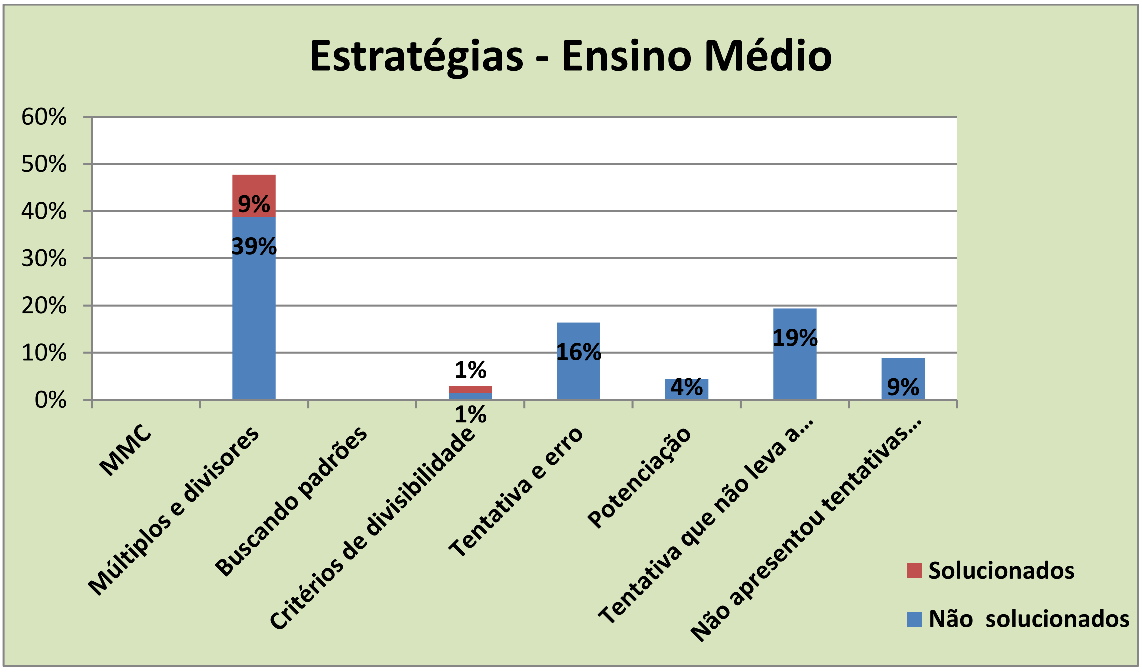
Já que a semelhança do aproveitamento obtido no Ensino Fundamental e no Ensino Médio nos chamou a atenção, vamos detalhar um pouco mais esses dados por meio de dois gráficos que irão permitir uma melhor observação e uma análise mais detalhada desses resultados, respectivamente no Gráfico 2 e no Gráfico 3.

Gráfico 2: Estratégias utilizadas no Ensino Fundamental



Fonte: o autor

Gráfico 3: Estratégias utilizadas no Ensino Médio



Fonte: o autor

O percentual dos alunos que entregaram em branco é praticamente o mesmo nos dois níveis de ensino, e os que apenas iniciaram uma tentativa, que não levavam a uma solução, é exatamente igual.

Também é possível verificar que no Ensino Fundamental mais do que 36% dos alunos iniciaram a solução por tentativa e erro, ou seja, não utilizaram nenhuma das informações do enunciado que possibilitavam reduzir o universo de números pesquisados. No Ensino Médio, verificamos uma considerável redução, apenas 16%, o que pode indicar que os alunos do Ensino Médio avaliaram a tentativa e erro como uma estratégia com poucas possibilidades de sucesso, ou que demandaria um longo tempo para chegar ao resultado. Utilizando esse recurso verificamos que nenhum aluno do Ensino Médio obteve sucesso e, aproximadamente $5{,}5\%$ dos alunos do Ensino Fundamental, que utilizaram essa estratégia, encontraram a resposta.

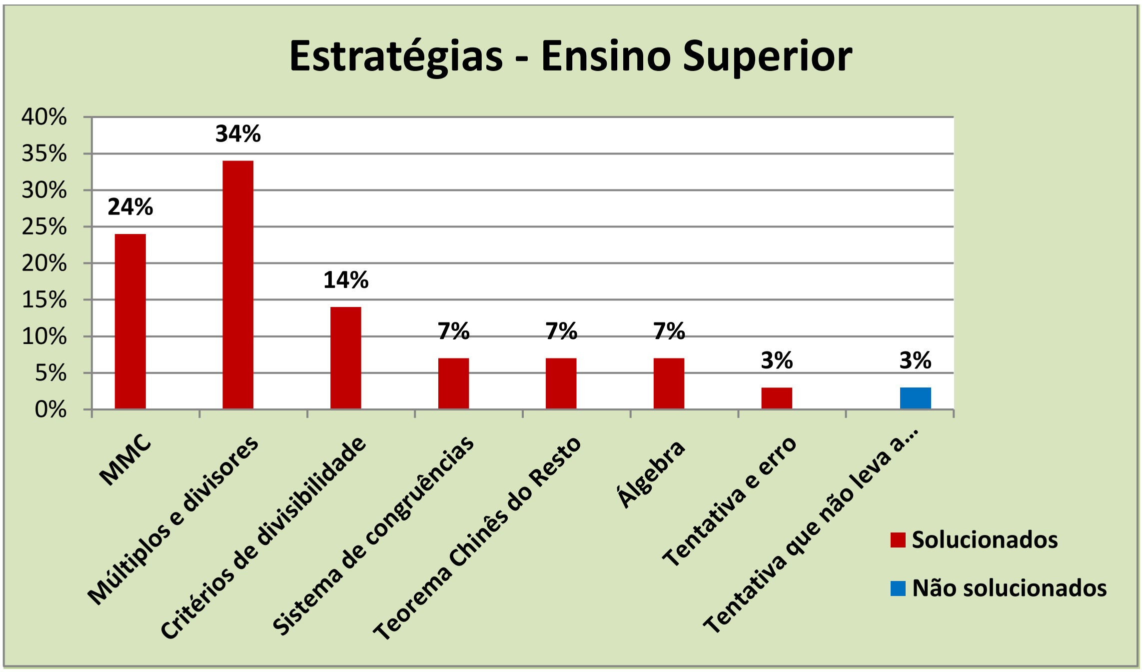
Percebemos também que no Ensino Fundamental, o MMC foi lembrado por 4% dos alunos em suas tentativas de solução, dos quais 25% chegaram a solução do problema. Nos chama a atenção que nenhum aluno do Ensino Médio tenha pensado em utilizar esse recurso, pois provavelmente é um conteúdo de conhecimento de todos, já que é constantemente utilizado após ser aprendido no sexto ano. Pode ter influenciado nesse resultado o fato de os alunos do Ensino Fundamental terem apreendido esse conteúdo há menos tempo. De qualquer maneira, é mais uma evidência de que os alunos não relacionam os conteúdos apreendidos com a aplicação deles em problemas.

Talvez a mesma justificativa anterior explique o fato de a potenciação ter aparecido em 4% das soluções no Ensino Médio, contra 1% das soluções no Ensino Fundamental. É importante salientar que apesar de colocar a potenciação como uma estratégia de solução, ela não se mostrou eficaz para ser aplicada nesse problema.

Outro resultado muito semelhante que percebemos foi entre alunos que escolheram a abordagem por meio dos múltiplos e divisores, podemos verificar que 17% no Ensino Fundamental e 19% no Ensino Médio, chegaram a solução utilizando essa estratégia.

Apresentamos a seguir algumas considerações gerais sobre as estratégias obtidas no Ensino Superior.

Gráfico 4: Estratégias utilizadas no Ensino Superior



Fonte: o autor

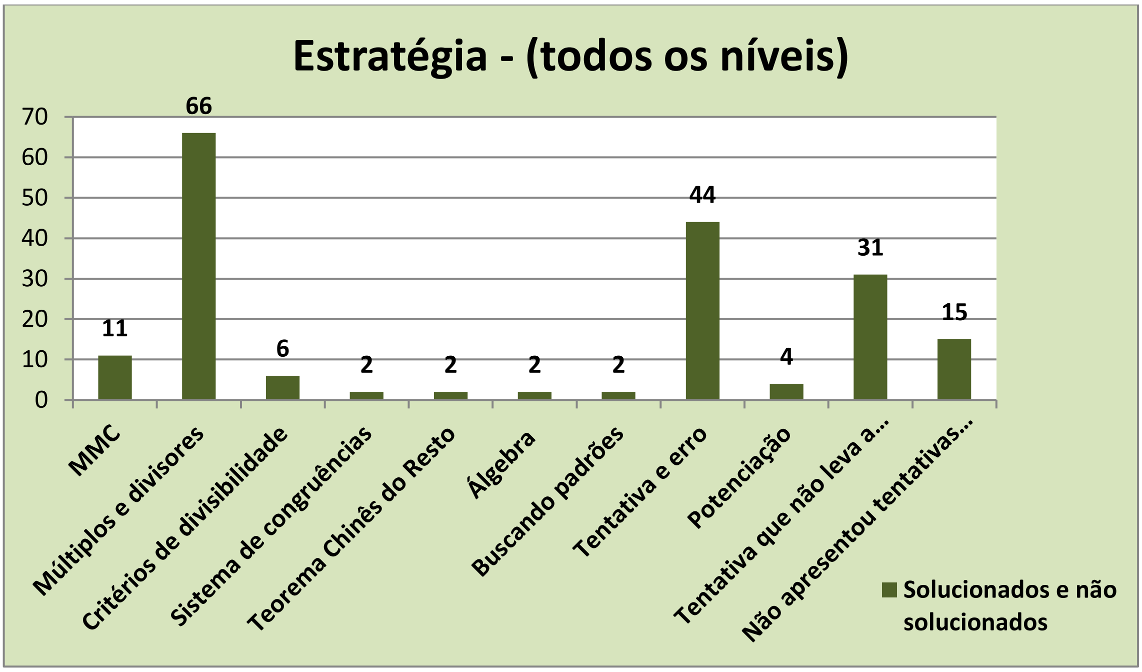
Em relação as tentativas de solução obtidas no Ensino Superior o que podemos observar é que somente 14% dos alunos optaram por utilizar conteúdos específicos do Ensino Superior, contra 83% que escolheram uma abordagem que também é acessível aos demais níveis de ensino, o que possivelmente não quer dizer que não tinham um repertório mais amplo para uma abordagem diferenciada, mas, que as estratégias utilizadas eram suficientes e eficazes para chegar a solução.

Devemos alertar que a solução que foi colocada no grupo de tentativa e erro, foi devido não ter ficado claro qual foi a estratégia utilizada, e talvez não tenha sido essa a verdadeira abordagem dada ao problema.

Os resultados obtidos no Ensino Superior corresponderam as nossas expectativas, considerando que 97% dos alunos solucionaram o problema, e mesmo com um repertório mais refinado não deixaram de apresentar soluções que podem ser compreendidas por alunos do ensino básico, isso pode ser visto como um fator positivo se considerarmos que estão se preparando para possivelmente atuar como professores de matemática nesse nível de ensino.

Finalmente apresentamos dois gráficos que traz todas as soluções obtidas nos três níveis de ensino agrupadas de acordo com a estratégia, diferentemente dos gráficos anteriores estes não estão em valores percentuais.

Gráfico 5: Estratégias utilizadas em todos os níveis de ensino pesquisados



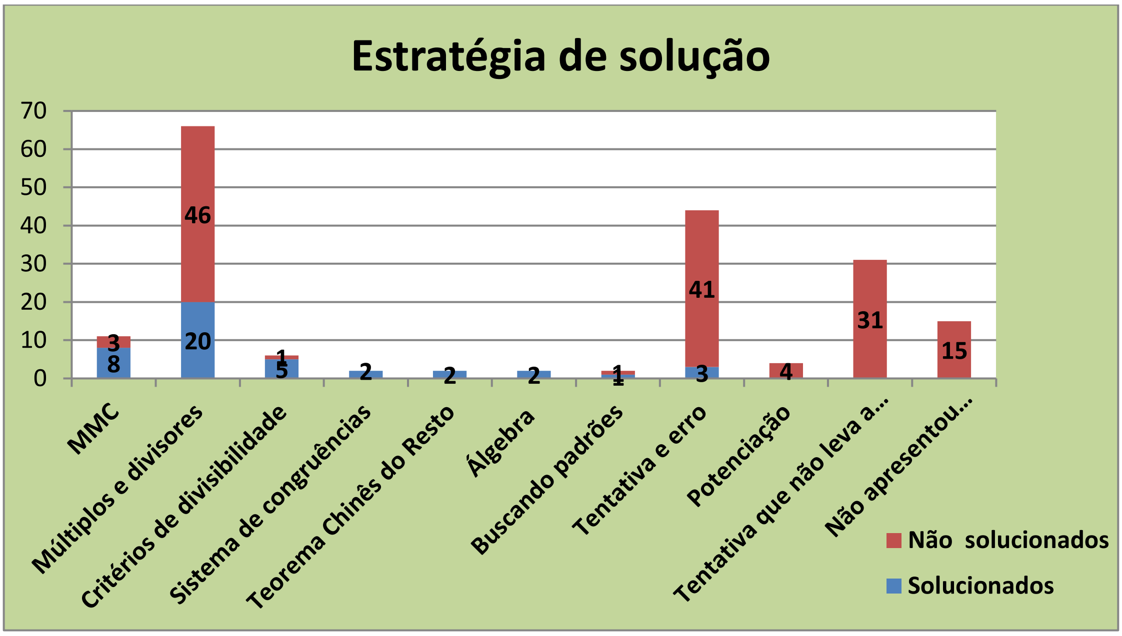
Fonte: o autor

Perceba que fica evidente que a estratégia mais utilizada foi a abordagem por meio dos múltiplos e divisores, seguido da tentativa e erro.

É possível observar também que as estratégias referentes a conhecimentos que são específicos do Ensino Superior, como Sistema de congruências e Teorema Chinês do Resto, foram utilizadas por um número pequeno de alunos pertencentes a esse nível de ensino, apenas por 4 dos 29 participantes optaram por essa estratégia.

Na sequência, apresentaremos um gráfico similar ao anterior em que agora, cada estratégia utilizada evidencia a quantidade de tentativas que tiveram êxito e as que não chegaram a resposta.

Gráfico 6: Estratégias de solução e seus respectivos aproveitamentos (todos os níveis de ensino)



Fonte: o autor

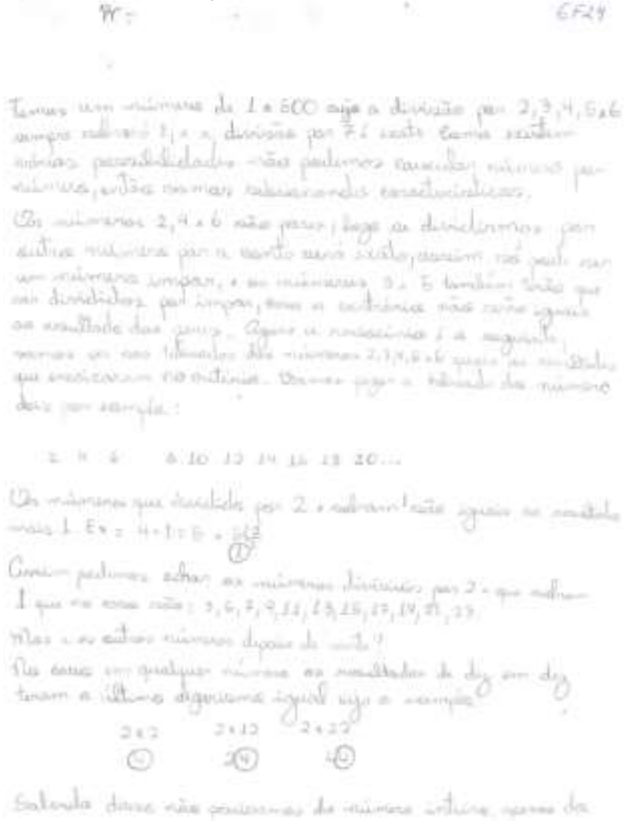
Após finalizar essa análise, com base em uma visão geral dos dados obtidos e também com base no que sentimos no decorrer desse processo de coleta dos resultados, queremos evidenciar algumas soluções apresentando alguns pontos que nos chamaram a atenção.

4.3. Análise de algumas soluções

Agora pretendemos estabelecer relações, evidenciando diferenças ou semelhanças entre as formas de abordagem nos três níveis de ensino que fazem parte desse trabalho.

Para iniciar vamos trazer para nossa discussão a solução EF_{24} que foi inserida no grupo “buscando padrões”.

Figura 3: Resolução de EF_{24} – Buscando Padrões



Fonte: o autor

Figura 4: Resolução de EF_{24} - Buscando Padrões (continuação)

Fonte: o autor

Essa solução chama a atenção por pertencer a um aluno do sétimo ano, e que traz uma riqueza de detalhes ao explicar o caminho percorrido durante a solução.

O aluno inicia tendo uma compreensão clara das informações contidas no enunciado, restringe sua busca a um universo de números entre 1 e 500, percebendo logo que tentativa e erro não é o caminho mais curto para se chegar a solução. Isso pode ser verificado logo nas quatro primeiras linhas de sua solução. Esse rápido entendimento não é tão imediato em se tratando de alunos que estão no 7º ano, pudemos verificar que muitos deles imaginavam que o número de fotos era 500, também prontamente iniciavam o processo de busca por tentativa e erro sem utilizar nenhum dos filtros capazes de reduzir suas opções.

Perceba também que ele comete alguns erros ao elaborar seu raciocínio entre as linhas 5 e 9, parece afirmar que números pares $(2, 4, 6)$ ao serem divididos por outro número par, tem resto zero, o que não é correto, veja que 18 é par e deixa resto 2 ao ser dividido por 4. Mas isso não compromete a continuidade da resolução, devido à afirmação ser verdadeira para 2.

A partir daí ele começa a listar os números que deixam resto 1 na divisão por $2, 3, 4, 5$ e 6, e logo observa que existe um padrão no algarismo das unidades em cada uma dessas listas, e esse padrão se repete a cada período, sendo que o único algarismo comum em todas elas é o 1.

Continuando sua solução ele alerta que o número procurado é divisível por 7, e observa que os únicos múltiplos de 7 que terminam em 1 são $21, 91, 161, 231, 301, 371$ e 441. A justificativa que ele usou para chegar a esses valores é simples, mas não é uma percepção tão imediata entre alunos do 7º ano, ele percebe que para encontrar produtos terminados em 1, o fator que deveria utilizar na multiplicação com 7 deve ter o 3 como algarismo das unidades. Para finalizar sua solução ele verifica, entre esses 7 valores restantes, que o 301 é o único divisível por 7.

Apresentamos agora EF_{48}, essa foi uma tentativa também do grupo “buscando padrões” que por algum motivo não chegou a solução.

Figura 5: Resolução de EF_{48} – Buscando Padrões

Fonte: o autor

Temos aqui outra tentativa, também obtida no 7º ano, em que o aluno inicia uma lista com os números que deixam resto 1 na divisão por 3, e em seguida faz o mesmo com $4, 5$ e 6.

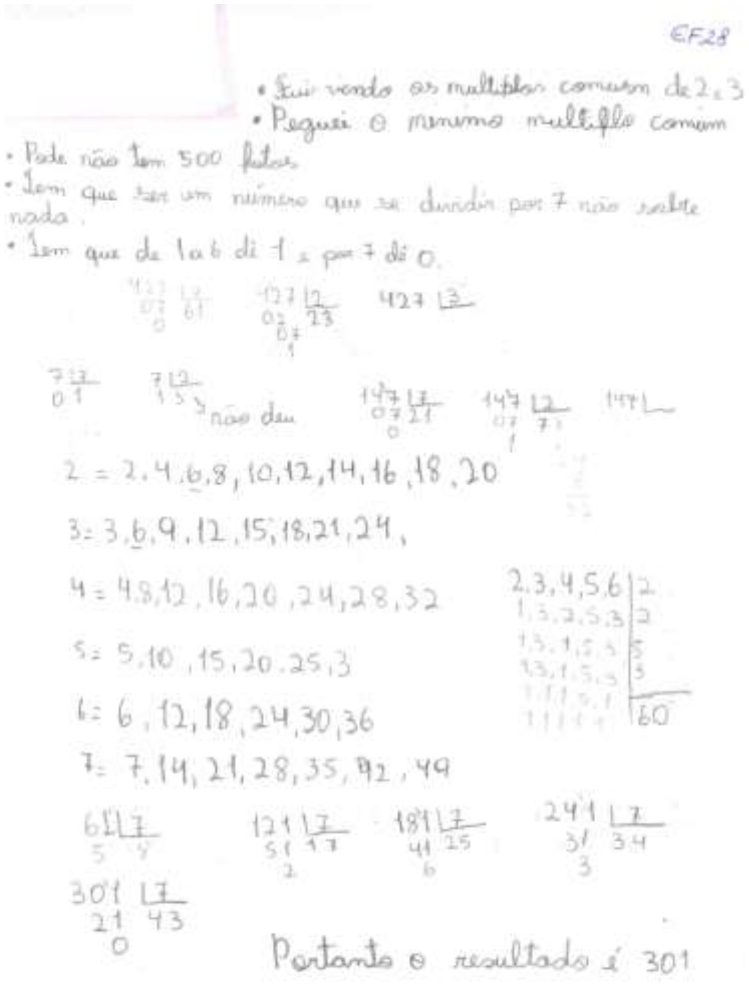
É possível perceber que ele elimina os números pares, não deixa claro o motivo, mas provavelmente por ter percebido que para deixar resto 1 na divisão por 2, esse número dever ser ímpar. Infelizmente sua tentativa parou por aí, e ele não percebeu que dos resultados produzidos na listagem do 5, sobraram apenas números terminados em 1. Se tivesse percebido isso, teria reduzido seu universo de busca de 500 para 50 números e talvez tivesse solucionado o problema. De qualquer forma foi uma boa tentativa, e uma estratégia bem eficaz que poderia ter produzido melhores resultados.

Agora, vamos fazer algumas considerações sobre o grupo MMC (mínimo múltiplo comum). No Capítulo 2, em uma das soluções de nossa autoria chamada de SD_2, consideramos que esse poderia ser um caminho que alguns alunos escolheriam durante a resolução.

É preciso dizer que é no mínimo inesperado que entre 67 tentativas de solução no Ensino Médio, não tenha aparecido nada sobre Mínimo Múltiplo Comum. O único momento em que ouvimos falar em MMC no Ensino Médio, foi quando um aluno do 1º ano perguntou se não teria alguma relação com mínimo múltiplo comum, ao receber a confirmação esperava-se que ele desenvolvesse uma estratégia que solucionaria o problema, porém ele não sabia como utilizar essa informação.

Como temos soluções obtidas nos ensinos Fundamental e Superior, podemos fazer um comparativo entre o que foi obtido. Para isso apresentaremos inicialmente a solução EF_{28} que foi desenvolvida por uma aluna do 7º ano:

Figura 6: Resolução de EF_{28} – MMC



Fonte: o autor

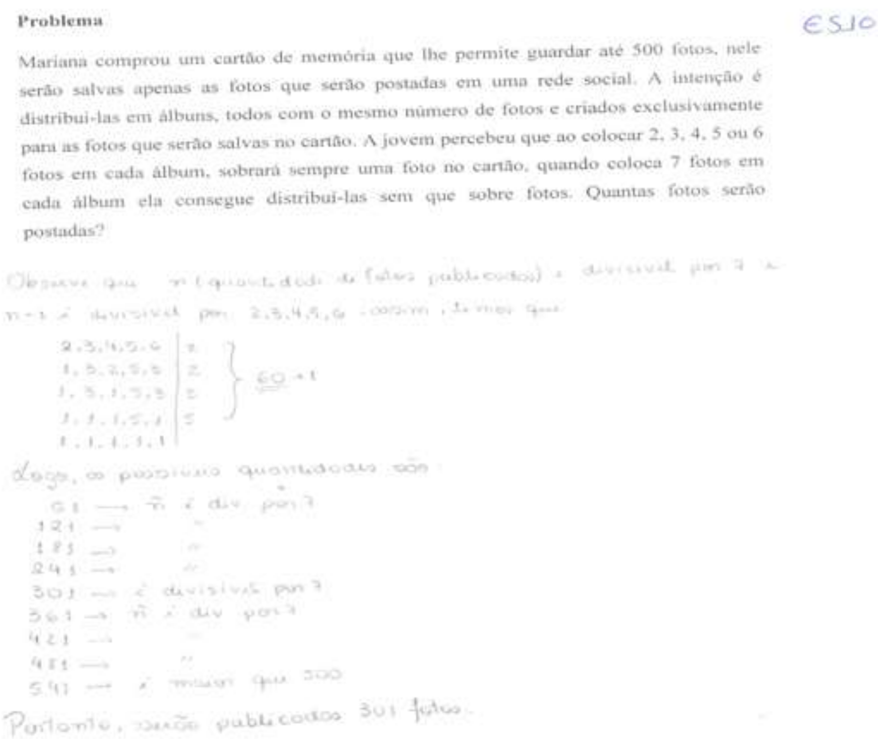
Podemos observar logo nas 6 primeiras linhas de sua solução que esta aluna iniciou percebendo corretamente as condições apresentadas no enunciado. Percebemos que, em um primeiro momento, adotou como estratégia de solução a tentativa e erro, mas ao perceber que não seria uma tarefa tão simples, buscou outro caminho.

Durante a aplicação dessa atividade, foi possível perceber que o aluno EF_{28} estava em um caminho diferente da maioria, e ao ser questionado em relação ao que estava planejando, disse que buscava um múltiplo que fosse comum a todos, e sabia que tinha outra forma de encontrar, mas não lembrava como. Então bastou ser informada de que era aquela onde colocamos os números lado a lado, separados por vírgula e com uma barra e ela já lembrou. Quando retornei já estava no final da aula e então ela não conseguiu escrever todo o seu raciocínio, apenas relatou que como o número deixava resto 1 ao ser divido por $2, 3, 4, 5$ e 6, então era um múltiplo de todos eles somado a 1, que o menor múltiplo de todos ao mesmo tempo era o 60, e então bastou verificar entre os candidatos $61, 121, 181, 241, 301$,... qual deixava resto zero ao ser dividido por 7.

Vamos ver se estabelecemos alguma relação entre EF_{28} e uma solução do Ensino Superior.

Para representar as soluções obtidas no Ensino Superior, utilizaremos a solução ES_{10}.

Figura 7: Resolução de ES_{10} - MMC



Problema

ES10

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Observe que n (quantidade de fotos publicadas) é divisível por 7 e n−1 é divisível por 2,3,4,5,6. Assim, temos que

2, 3, 4, 5, 6	2
1, 3, 2, 5, 3	2
1, 3, 1, 5, 3	3
1, 1, 1, 5, 1	5
1, 1, 1, 1, 1	

$\} \; 60 + 1$

Logo, os possíveis quantidades são

61 → n̄ é div. por 7
121 → "
181 → "
241 → "
301 → é divisível por 7
361 → n̄ é div. por 7
421 → "
481 → "
541 → é maior que 500

Portanto, serão publicadas 301 fotos.

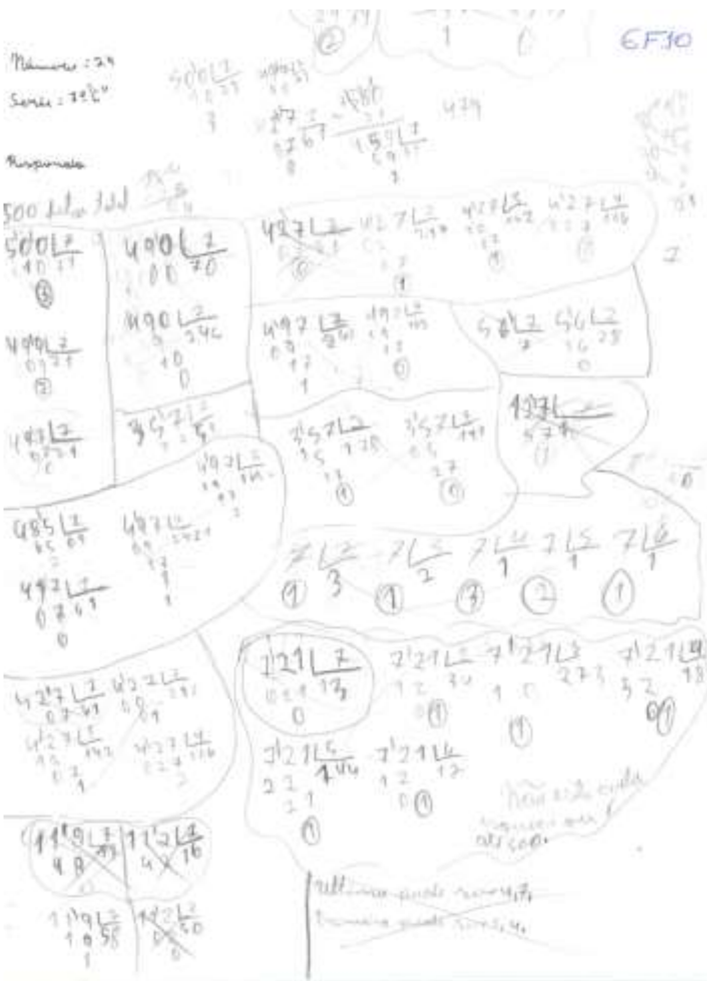
Fonte: o autor

Pode ser observado que a forma de abordagem por meio dessa estratégia, de uma maneira geral é exatamente a mesma nos dois níveis de ensino, o que muda é que no Ensino Fundamental em especial com EF_{28}, aparecem alguns raciocínios dispensáveis. Em ES_{10} o raciocínio é bem objetivo e apresenta apenas informações relevantes, não abordando nenhum conhecimento específico do Ensino Superior, com linguagem acessível a qualquer dos outros níveis de ensino.

Entre todas as demais soluções que utilizaram Mínimo Múltiplo Comum como estratégia principal no Ensino Superior, observa-se que os argumentos são exatamente iguais aos dos alunos do Ensino Fundamental, assim como acabamos de exemplificar.

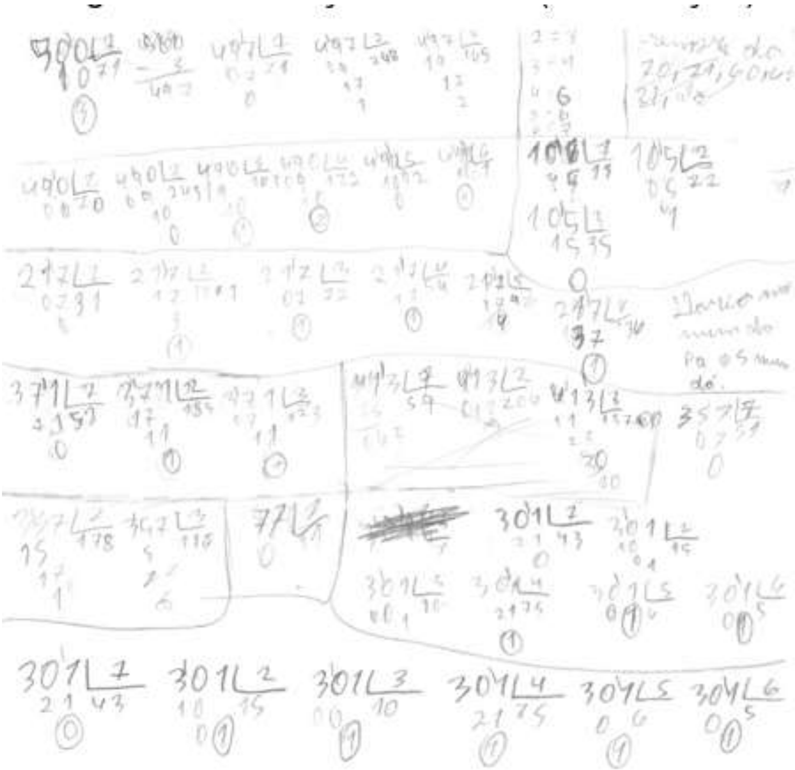
Outra estratégia de solução que apareceu em grande número no Ensino Fundamental foi o que nomeamos pelo grupo “Tentativa e erro”, para exemplificar esse método vamos utilizar a solução EF_{10}.

Figura 8: Resolução de EF_{10} – Tentativa e Erro



Fonte: o autor

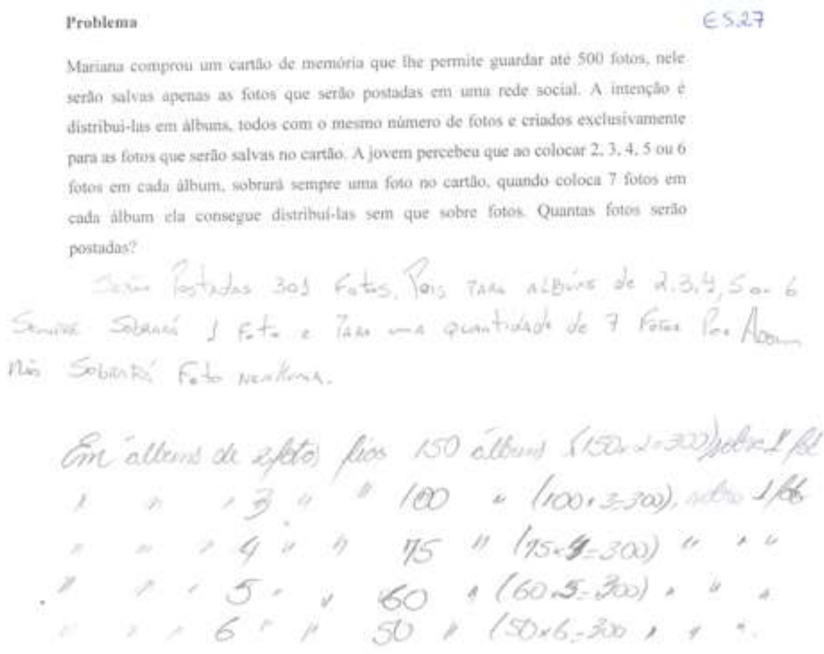
Figura 9: Resolução de EF_{10} – Tentativa e Erro (continuação)



Fonte: o autor

Nessa solução o aluno começa a realizar divisões sem a utilização de alguma restrição, não avalia o significado de nenhuma informação dada no enunciado do problema, nem a mais simples delas que é a busca por um número ímpar, pois perceba que até números pares entraram nas tentativas. Nesse caso específico podemos ver que o aluno chega a solução do problema. Não dá para perceber como ele faz as escolhas dos números, fica ilustrada uma dificuldade em solucionar o problema por meio dessa estratégia, já que é preciso uma grande quantidade de divisões. Observando a quantidade de alunos que chegaram a solução por esse método, tivemos: 2 entre 32 tentativas no Ensino Fundamental, 0 de 11 tentativas no Ensino Médio, e no Ensino Superior temos uma tentativa que obteve a resposta, mas classificamos como tentativa e erro mais por não termos evidências de que tenha sido utilizado outro método do que pela certeza de que tenha sido essa a estratégia usada, como podemos observar em ES_{27}:

Figura 10: Resolução de ES_{27} – Tentativa e Erro


Problema

ES27

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Serão Postadas 301 Fotos, Pois para álbuns de 2,3,4,5 ou 6 Sempre Sobrará 1 Foto e para uma quantidade de 7 Fotos Por Album Não Sobrará Foto nenhuma.

Em álbuns de 2 fotos ficou 150 álbuns (150×2=300) sobra 1 foto
" " " 3 " " 100 " (100×3=300), sobra 1 foto
" " " 4 " " 75 " (75×4=300) " " "
" " " 5 " " 60 " (60×5=300) " " "
" " " 6 " " 50 " (50×6=300 " " "

Fonte: o autor

Nessa solução, o aluno parte da resposta para fazer suas considerações, o que nesse caso não era esperado considerando que se trata de um aluno de curso superior. De qualquer forma essa solução é uma incógnita, não sabemos se ouviu o valor de alguém e tentou justificar, ou se usou algum método e não o apresentou, então limitamos aqui os nossos comentários.

Um grande número de tentativas de solução utiliza múltiplos ou divisores como justificativas em suas estratégias, então criamos um grupo com esse nome. Para ilustrar esse tipo de solução no Ensino Fundamental, apresentamos como exemplo EF_{20}.

Figura 11: Resolução de EF_{20} – Múltiplos e divisores

Fonte: o autor

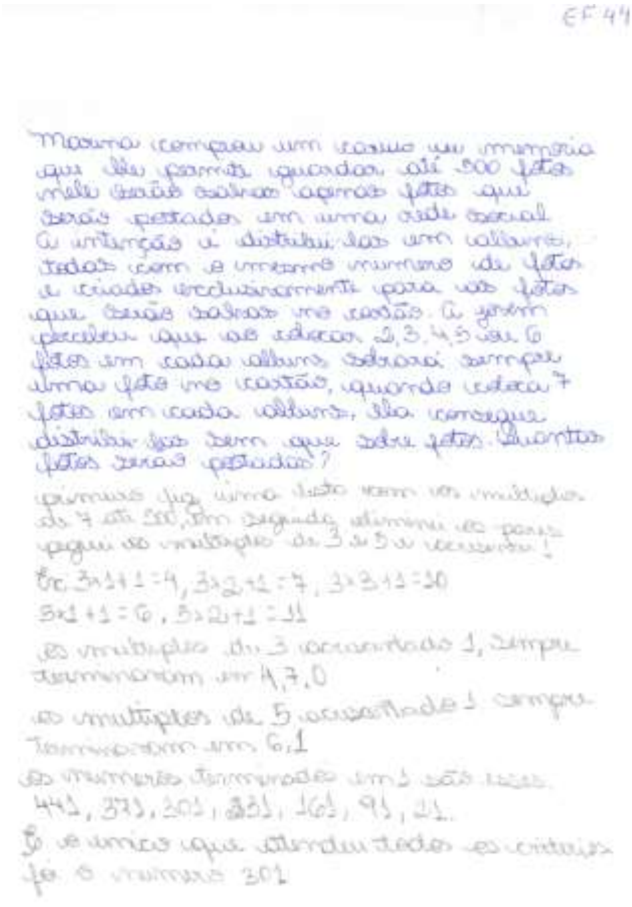
Nessa solução a aluna inicia restringindo seus candidatos à resposta aos múltiplos de 7, em seguida ela elimina os múltiplos de 2 de sua lista, afinal se deixa resto 1 ao agrupar as fotos de 2 em 2, o número de fotos não é múltiplo de 2. Em seguida elimina os múltiplos de 3 seguidos dos múltiplos de 5, ambos pela mesma justificativa utilizada em relação aos múltiplos de 2. Com os múltiplos de 4 e 6 ela justifica que não é necessário se preocupar devido ao fato de já estarem eliminados, pois todos também eram múltiplos de 2.

Note que, aparentemente é uma maneira de utilizar o conceito de múltiplos em busca da resposta, mas é preciso observar que afirmar que um número natural deixa resto 1 na divisão por 2 equivale a dizer que esse número não é um múltiplo de 2. Entretanto o mesmo não ocorre com 3, perceba que, dizer que um número natural deixa resto 1 ao ser dividido por 3, implica em dizer que esse número não é um múltiplo de 3 mas, a recíproca nesse caso não é verdadeira já que não ser múltiplo de 3 significa que a divisão por 3 pode deixar resto 1 ou 2.

Então, vemos que o método utilizado em EF_{20} é valido e pode ser suficiente para solucionar o problema, mas também pode gerar dificuldades no fim do processo.

Agora, vamos considerar uma outra abordagem também utilizando como estratégia o conhecimento sobre múltiplos, observe a solução de EF_{44}.

Figura 12: Resolução de EF_{44} – Múltiplos e Divisores


EF 44

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos. Nele serão salvas apenas fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que se colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum, ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

primeiro fiz uma lista com os múltiplos de 7 até 500, em seguida eliminei os pares peguei os múltiplos de 3 e 5 e acrescentei 1!

Ex: 3x1+1=4, 3x2+1=7, 3x3+1=10
5x1+1=6, 5x2+1=11

os múltiplos de 3 acrescentado 1, sempre terminaram em 4,7,0

os múltiplos de 5 acrescentado 1 sempre terminaram em 6,1

os números terminados em 1 são esses
441, 371, 301, 231, 161, 91, 21.
E o único que atendeu todos os critérios foi o número 301

Fonte: o autor

Essa é uma solução obtida no 9º ano do Ensino Fundamental.

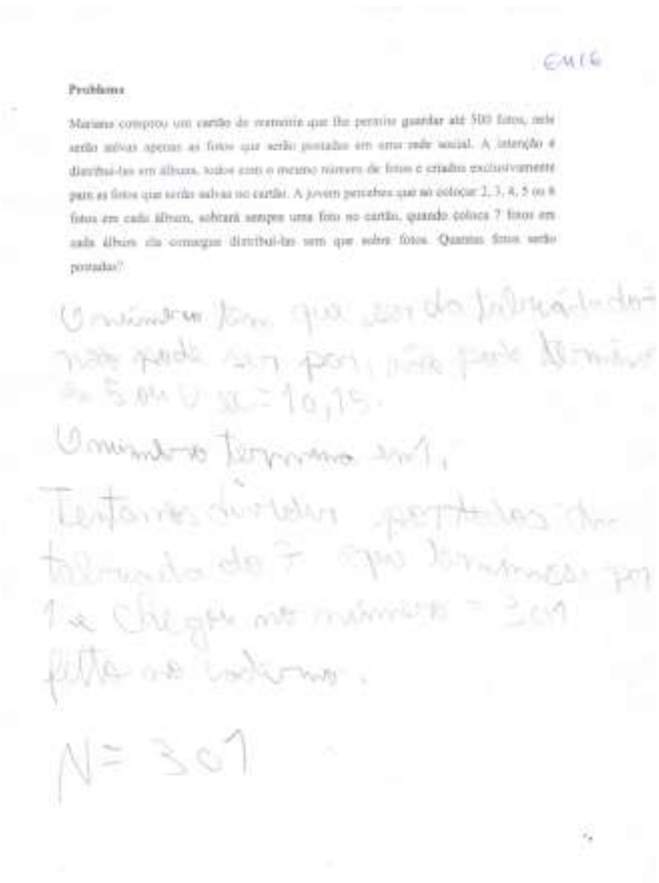
Note que a solução começa exatamente como a anterior, listando múltiplos de 7 mas, após isso percebemos a diferença de abordagem. No lugar de eliminar os múltiplos de $2, 3, 4, 5$ e 6 da lista de múltiplos de 7, ele procura esses múltiplos adicionados a 1 na lista.

Podemos verificar que é cometido um equívoco ao dizer que na lista dos números da forma $3k + 1$, com k natural, estes números terminam em $4, 7,$ e 0, o que não é correto. Considere os números $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28$, são todos números naturais da forma $3k + 1$.

Em seguida observa que os múltiplos de 5 adicionados a 1, tem como algarismo da unidade 1 ou 6. Então, conclui que busca um múltiplo de 7 terminado em 1, chegando à resposta 301.

Vejamos agora uma solução do Ensino Médio, EM_{16}.

Figura 13: Resolução de EM_{16} – Múltiplos e Divisores


EM16

Problema

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

N = 301

Fonte: o autor

EM_{16} também inicia considerando os múltiplos de 7, mas segue para o que talvez seja o caminho mais curto até a solução, que é observar que o número procurado é ímpar e um múltiplo de 5 adicionado a 1, então chegamos a alguns poucos múltiplos de 7 que tem 1 como algarismo da unidade. Restando verificar se atendem aos critérios para o 3 e 4 estabelecidos no enunciado.

Para fazer um comparativo entre as diferentes abordagens realizadas no grupo dos múltiplos e divisores, vamos considerar a solução apresentada no Ensino Superior ES_1.

Figura 14: Resolução de ES_1 – Múltiplos e Divisores


Problema

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrava sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Fonte: o autor

Em ES_1 é possível verificar que o conhecimento sobre múltiplos é a base dessa solução e, a forma de apresentação dos argumentos, claramente evidencia um total domínio do conteúdo, apresenta também uma linguagem matemática bem mais refinada, trazendo todos os detalhes do seu raciocínio de forma clara sem descuidar do rigor matemático.

Se observarmos esse grupo podemos verificar uma evolução na forma de organizar o raciocínio conforme passamos pelos níveis de ensino. Vimos também que a maneira como é aplicado o conhecimento sobre múltiplos, faz toda a diferença em relação as dificuldades que podem ser geradas durante a resolução conforme a escolha que for feita.

O grupo de estratégias que trataremos a seguir foi nomeado como “Critério de divisibilidade”, e existe uma linha muito tênue dividindo esse grupo do grupo dos múltiplos e divisores, portanto existe uma proximidade entre as soluções que apresentaremos.

Vamos observar uma solução do Ensino Médio EM_9, que utiliza o critério de divisibilidade como estratégia principal.

Figura 15: Resolução de EM_9 – Critério de divisibilidade

Fonte: o autor

Note que é cometido um erro ao afirmar que todos os números pares são divisíveis por $2, 4$ e 6, como exemplo: $6 \nmid 14$. Mesmo assim sua estratégia não compromete a busca pela resposta pois, em relação ao 2 a afirmação é verdadeira (não é a primeira vez que mencionamos esse mesmo erro). Em seguida é aplicado o critério de divisibilidade por 5, para afirmar que o algarismo das unidades do número procurado deveria ser 1, mas não deixa claro os próximos passos até chegar ao 301.

Observe uma solução que foi feita por aluno do Ensino Superior, ES_2:

Figura 16: Resolução de ES_2 – Critérios de divisibilidade

Problema

ES2

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Fonte: o autor

Perceba que a mesma abordagem feita em EM_9: se repete agora, é aplicado o critério de divisibilidade por 5 para concluir que o número é terminado em 1 ou 6. Depois o critério de divisibilidade por 2, que elimina os números terminados em 6. Então, lista os números terminados em 1 que são divisíveis por 7, e finalmente divide os valores por 4 e 6 para verificar se tem resto 1.

Note que existe um conceito utilizado de forma equivocada que foi destacado na imagem, quando no lugar de divisível ele utiliza divisor, o que talvez possa ter sido apenas distração.

Para falar sobre o grupo que denominamos “álgebra”, vamos comentar a solução apresentada por ES_{17}:

Figura 17: Resolução de ES_{17} – Critério de divisibilidade

Problema

ES17

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribuí-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribuí-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Solução:

Queremos encontrar o $x \in \mathbb{Z}_+$, a quantidade de fotos que Mariana salva no cartão.

Como $7 | x$, $\exists k_0 \in \mathbb{Z} \mid x = 7k_0$. (i)

Como o resto da divisão de x por 2 é 1, então a divisão de $(x-1)$ por 2 é zero.

Logo, $2 | x-1$

De (i),

$x = 7k_0$

$x - 1 = 7k_0 - 1$. (ii)

Para que $2 | 7k_0 - 1$, k_0 deve ser ímpar. Logo, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_0 = 2k_1 + 1$.

Fonte: o autor

Figura 18: Resolução de ES_{17} – Critério de divisibilidade (continuação)

Para que $5 | 84k_3 + 48$, $5 | 3 - k_3$.

Logo, $\exists k_4 \in \mathbb{Z} \mid k_3 = 5k_4 + 2$.

De (ii),

$x - 1 = 84k_3 + 48$

$= 84(5k_4 + 2) + 48$

$= 420k_4 + 300$

$= 6(70k_4 + 50$.

Bem, $k_0 = 2k_1 + 1$

$= 2(k_1) + 1$

$= 6k_2 + 1$

$= 6(2k_3 + 1) + 1$

$= 12k_3 + 7$

$= 12(5k_4 + 3) + 7$

$= 60k_4 + 43$.

Logo, $7k_0 = 7(60k_4 + 43) = 420k_4 + 301 = x$.

Como $0 \leq x \leq 500$, então $k_4 = 0$, e $x = 301$.

Fonte: o autor

Figura 19: Resolução de ES_{17} – Critério de divisibilidade (continuação)

Fonte: o autor

Quando iniciamos as soluções que estão no Capítulo 2 desse trabalho, pensamos que poderíamos ter apresentado alguma solução que tivesse uma relação mais marcante com o Ensino Médio, entretanto mesmo pensando na possibilidade de utilizar um Sistema de Equações, não conseguimos executar sem mencionar congruências.

Podemos ver que na solução ES_{17} foi executado brilhantemente o que gostaríamos de ter realizado, é evidente que essa solução tem muita semelhança com SD_3, que consta no Capítulo 2, porém para compreender SD_3, é preciso ter conhecimento a respeito de congruência, ao passo que ES_{17} pode ser apresentada a um aluno do Ensino Médio.

Nas soluções que vem a seguir são utilizados conteúdos específicos do Ensino Superior.

Trazemos agora, para a luz de nossa discussão, a solução ES_5, que utiliza como estratégia o Teorema Chinês do Resto. Essa estratégia foi uma das que apresentamos no Capítulo 2, nomeada como SD_4, estratégia que tem uma particularidade a ser observada para que possamos utilizá-la, deve ser feita uma consideração às condicionantes do problema para que este não fosse conflitante com o teorema em questão. Conflito que, propositalmente desconsideramos em SD_4, para demonstrar o que aconteceria caso não estivéssemos atentos a esse detalhe, e então, fizemos o ajuste e prosseguimos com a solução.

Agora, observe a solução ES_5:

Figura 20: Resolução de ES_5 – Teorema Chinês do Resto

Fonte: o autor

Podemos ver que logo no início da solução é feita uma observação, em que é informado que serão desconsideradas as congruências módulos 4 e 6, para que pudesse ser usado o Teorema Chinês do Resto. O critério que pode ser verificado no Capítulo 1, está demonstrado no Teorema 1.7, diz que para utilizar o Teorema Chinês do Resto é necessário que os módulos sejam primos dois a dois, e esta é a justificativa para a exclusão inicial do 4 e também do 6. Vale a pena, como já foi mencionado, observar no Capítulo 2, em SD_4, o que ocorreria caso não fosse respeitado essa limitação.

Após a utilização do teorema foi aplicado, ao resultado obtido, as informações que, ao serem distribuídas em grupos de 4 ou de 6 o número de fotos deixa resto 1, chegando assim a solução.

Acreditamos que alguns daqueles que pensarem em solucionar esse problema por meio desse teorema, mudariam de estratégia ao ver a restrição que mencionamos, entretanto ES_5 é uma clara demonstração que podemos e devemos realizar ajustes que permitem solucionar parcialmente o problema e só, então finalizar com os critérios que não foram considerados inicialmente.

Temos em seguida ES_6, que traz algumas soluções diferentes, ES_6 é uma representante do grupo denominado “Sistema de Congruências”.

Figura 21: Resolução de ES_6 – Sistema de Congruências

Fonte: o autor

Figura 22: Resolução de ES_6 – Sistema de Congruências (continuação)

Fonte: o autor

No Capítulo 2, em SD_3, utilizamos sistema de congruências lineares para chegar a resposta. Entretanto, ES_6 utiliza uma abordagem diferente.

Em SD_3, como tínhamos um sistema de congruências módulos $2, 3, 4, 5, 6$ e 7, ao verificar que 4 e 6 não são primos entre si, estes valores foram deixados fora do sistema e somente depois de resolvido, complementamos aplicando os critérios do problema que se referem ao 4 e 6.

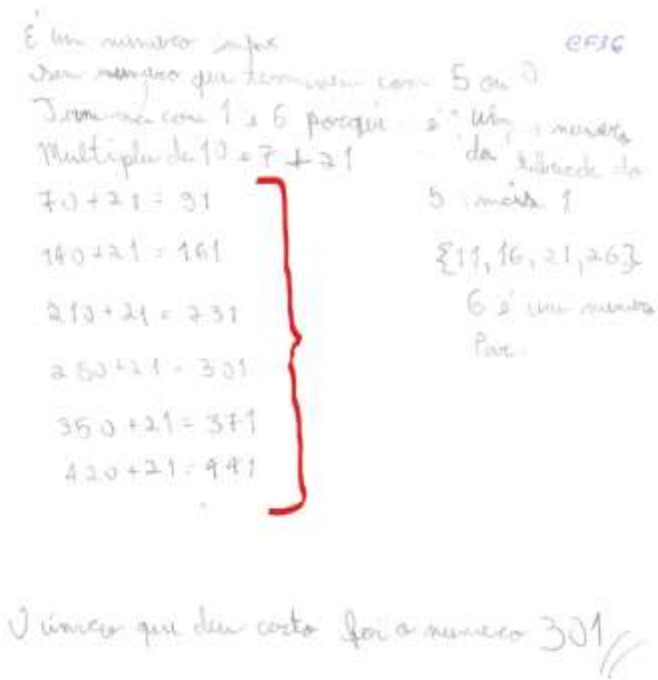
Note que ES_6 ao verificar que os módulos $2, 3, 4, 5$ e 6 deixam o mesmo resto 1, aplica o Teorema 1.4 que se encontra na fundamentação teórica, reduzindo tudo a módulo 60. Ao fazer isso ele tem apenas duas congruências lineares, uma módulo 60 e outra módulo 7, o que possibilitou a resolução do problema sem as restrições que consideramos em SD_3.

Com relação ao grupo que “apenas iniciou uma tentativa que não leva a solução”, consideramos que são situações em que foi feito algum desenho ou cálculo que não tem relação com a solução.

4.4. Estabelecendo relações entre soluções de grupos diferentes

Pretendemos chamar a atenção para alguns pontos específicos de algumas soluções que não estão relacionadas necessariamente com o mesmo grupo no que se refere às estratégias utilizadas. A solução EF_{36} foi desenvolvida por aluno do 7º ano, onde destacaremos o ponto de semelhança:

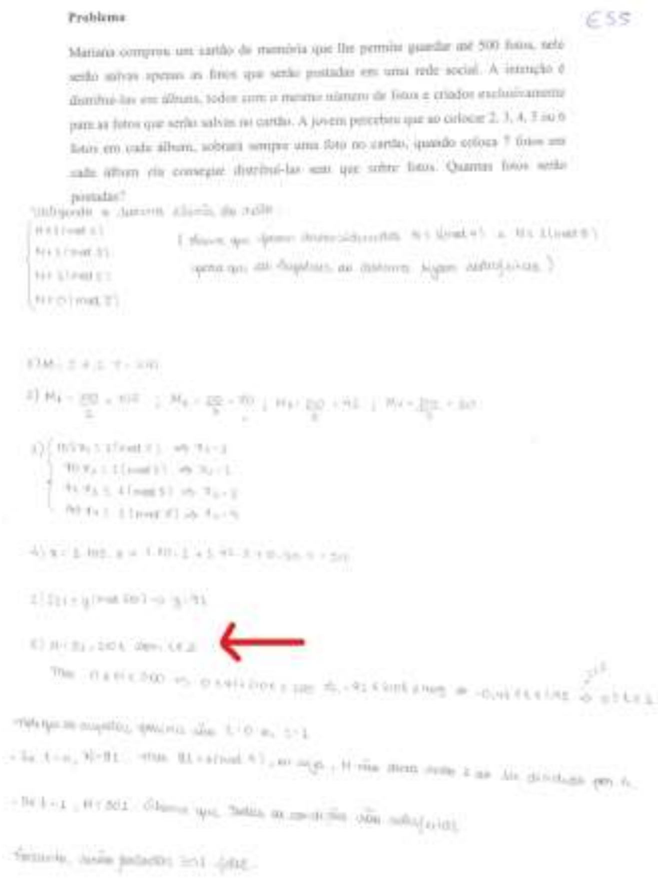
Figura 23: Resolução de EF_{36} – Múltiplos e divisores



Fonte: o autor

Observe também o destaque em ES_5 para o qual queremos chamar atenção.

Figura 24: Resolução de ES_5 – Teorema Chinês do Resto



Fonte: o autor

Observamos certa semelhança no ponto destacado em EF_{36} relacionado ao ponto que foi indicado em ES_5, percebemos que apesar dos valores não serem os mesmos, essa solução com origem no Ensino Fundamental trabalhou exatamente com a mesma essência da resposta obtida por meio do Teorema Chinês do Resto.

$$N = 91 + 210t \text{ é a resposta em } \mathrm{ES}_5.$$

$$\left.\begin{array}{r} 70 + 21 = 91 \\ 140 + 21 = 161 \\ 210 + 21 = 231 \\ 250 + 21 = 301 \\ 350 + 21 = 371 \\ 420 + 21 = 441 \end{array}\right\} \text{solução em } \mathrm{EF}_{36} \text{ e pode ser visto como } N = 21 + 70t.$$

Quando transformamos as informações apresentadas em EF_{36} para uma linguagem algébrica similar à que foi usada em ES_5, obtendo, respectivamente $N = 21 + 70t$ e $N = 91 + 210t$, percebemos que ambas têm como base um múltiplo de 7 terminado em 1 adicionado a um múltiplo de 10 que também é múltiplo de 7.

É evidente a semelhança entre o que os processos de ES_5 e EF_{36} produziram como resultado, a utilização do Teorema Chinês do Resto em ES_5, funcionou como um filtro mais poderoso, restringindo a apenas duas possibilidades de resposta, sendo que EF_{36} filtrou um pouco menos, obtendo 6 candidatos a resposta. Certamente foram estratégias muito eficazes, a solução do aluno do 7º ano, mesmo que de forma implícita, carrega uma forte relação entre um conteúdo do Ensino Superior.

EF_{36} foi o único a desenvolver sua solução baseado em adição de múltiplos, mas a solução não traz um relato tão detalhado de como chegou a essa ideia. Entretanto, no final da atividade foi possível conversar com o aluno EF_{36}, que ao ser questionado quanto aos detalhes de sua solução, ele respondeu que o número procurado era um múltiplo de 2 adicionado a 1 e também um múltiplo de 5 adicionado a 1, portanto só poderia terminar em 1, além disso sabia que procurava por um múltiplo de 7, então justificou as escolhas de cada parcela da maneira que segue.

Quadro 9: Justificativa referente à solução EF_{36}

	Justificativa
1ª parcela (21)	Menor múltiplo de 7 terminado em 1, garante que quando somado com um múltiplo de 10, o resultado terminará também em 1.
2ª parcela $(70.k)$	Escolher múltiplos de 10 que também fossem múltiplos de 7 para garantir que a adição resultasse em um múltiplo de 7. E por ser múltiplo de 10 a soma preservaria o algarismo 1 como unidade.

Fonte: o autor

Quando ele trata o problema como a soma de duas parcelas múltiplas de 7, provavelmente existe aí uma relação com a Proposição 1.2 do Capítulo 1.

Após apresentação de algumas das soluções obtidas, verificamos que o critério de divisibilidade por 7 não foi utilizado por aluno algum.

Certamente existem outras possibilidades que não foram percebidas, porém acreditamos ter alcançado o objetivo de fazer um diagnóstico de como ocorre a evolução das habilidades matemáticas dos alunos, ao progredir pelos níveis de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O caminho percorrido para construir esse estudo teve como objetivo verificar se o aumento de escolaridade influencia na utilização de ferramentas matemáticas quando um aluno resolve um problema.

Ao escolhermos o problema, apresentamos hipoteticamente algumas soluções, utilizando desde tentativa e erro até aritmética modular, e então fomos verificar como os alunos lidavam com as ferramentas já estudadas ao tentar solucionar o problema.

Durante esse processo além das soluções que confirmavam nossas hipóteses fomos surpreendidos positivamente por alguns alunos do Ensino Fundamental que apresentaram um raciocínio mais elaborado do que esperávamos, inclusive foi possível relacionar uma solução de aluno do 7º ano com resultados obtidos pelo Teorema Chinês do Resto que é conteúdo específico do Ensino Superior.

Outros nos surpreenderam negativamente, verificamos que no Ensino Médio não ocorreu a evolução que esperávamos em relação a capacidade de abordar o problema.

No decorrer das atividades desenvolvidas, junto aos alunos, foi possível perceber um bom nível de envolvimento na Educação Básica e até certa ansiedade em ser o primeiro a encontrar a resposta, inclusive por parte dos alunos que apresentam maior dificuldade com a matemática. Logo, no sentido de despertar o interesse do aluno, a atividade se mostrou eficiente. Mas é preciso um direcionamento adequado por parte do professor, esse entusiasmo segue em queda à medida que surgem os obstáculos.

Ao comparar as produções dos alunos do Ensino Fundamental com alunos do Ensino Médio, verificamos que o aumento da escolaridade não resultou em escolhas de ferramentas mais elaboradas na resolução do problema. No Ensino Superior, muitos utilizaram as mesmas ferramentas que alunos da Educação Básica, entretanto obtivemos várias soluções que tratam de conteúdos específicos do Ensino Superior e, os que utilizaram ferramentas menos elaboradas demonstram pleno domínio de suas ações.

A percepção que tivemos é que a dificuldade de interpretação aconteceu tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Além disso, percebemos que os alunos têm dificuldades em reconhecer quais conteúdos podem resolver o problema.

Nossa análise a partir das resoluções indicam que os alunos do Ensino Fundamental têm plenas condições de compreender conceitos relacionados a aritmética modular, mas essa abordagem deve ser bem planejada. Acreditamos que, se os conteúdos fossem desenvolvidos a partir da necessidade de utilizá-los na resolução de um problema, talvez os alunos enxergassem a aplicação dos conteúdos, ou seja, seria produtivo construir o conhecimento a partir da exploração de problemas que façam sentido para os alunos.

Essa pesquisa chama a atenção para a ação docente, evidenciando a importância de qualificar o aluno para ser capaz de aplicar o seu conhecimento, pois não há sentido em conhecer ferramentas matemáticas sem saber como utilizar e nem quando utilizar.

Certamente também contribuiu para desenvolver um pouco mais o meu conhecimento matemático, tanto pelo tempo de dedicação em estudo como pelo contato que tive com diferentes pessoas com variadas formas de pensamentos e abordagens para um mesmo problema.

REFERÊNCIAS

FARIA, Vitor Manoel Candido. **Os Princípios da Educação Matemática Realística Revelados em Trajetórias de Ensino e Aprendizagem**. 2019. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. **Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem**. Educação Matemática Pesquisa. v. 18, n. 1 (2016)

FREUDENTAL, H. **Mathematics as an educational task.** Dordrecht, The Netherlands: Reidel. 1973.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**, Coleção PROFMAT, 1ª edição. Rio de Janeiro, 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná**. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática***.* SEED: Curitiba, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná*.* **Caderno de Expectativa de Aprendizagem**. SEED: Curitiba, 2012.

SANTOS José Plinio de Oliveira**. Introdução à Teoria dos Números**, Coleção Matemática Universitária, 3ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.