UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ADRIANO DA SILVA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES NAS LINHAS DE UMA MATRIZ COMO FERRAMENTA ADICIONAL PARA O CÁLCULO DE MATRIZES INVERSAS E RESOLUÇÃO PROBLEMAS

FORTALEZA
2013

ADRIANO DA SILVA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES NAS LINHAS DE UMA MATRIZ COMO FERRAMENTA ADICIONAL PARA O CÁLCULO DE MATRIZES INVERSAS E RESOLUÇÃO PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

O45t Oliveira, Adriano da Silva de

Transformações elementares nas linhas de uma matriz como ferramenta adicional para o cálculo de matrizes inversas e resolução de problemas / Adriano da Silva de Oliveira. – 2013.

103 f. : il. color. , enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra de Montenegro.

1. Matrizes (Matemática). 2. Sistemas lineares. I. Título.

CDD 512.9434

ADRIANO DA SILVA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES NAS LINHAS DE UMA MATRIZ COMO FERRAMENTA ADICIONAL PARA O CÁLCULO DE MATRIZES INVERSAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 18 / 07 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

José Fábio Bezerra Montenegro

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Luiz Antonio Caetano Monte

Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

RESUMO

Determinar a matriz inversa, quando essa existir, e resolver um sistema linear de equações são tarefas que conforme aumentem a ordem da matriz e o tamanho do sistema aumentam também as dificuldades de serem realizadas. Habitualmente, os livros de ensino médio trabalham a determinação de uma matriz inversa usando o produto de matrizes, pois o produto de uma matriz com sua inversa e igual à matriz identidade, e a resolução de um sistema linear pela regra de Cramer e escalonamento do sistema de equações. Neste trabalho, propõe-se apresentar aos alunos do ensino médio o conceito de Transformações Elementares nas linhas de uma matriz e utilizá-lo como uma nova ferramenta para a determinação de uma matriz inversa e a resolução de um sistema de equações lineares. As Transformações Elementares são, de certa forma, operações simples e mais leves, principalmente, em comparação aos cálculos realizados para encontrar inversas de matrizes de ordem maiores ou iguais a três e soluções de sistemas lineares maiores que um sistema dois por dois.

Palavras-chave: Matriz inversa. Sistema de equações lineares. Transformações Elementares. Nova ferramenta.

SUMÁRIO

SUMÁRIO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho abordará três assuntos que, de certa forma, se completam ou poderíamos dizer que “fazem parte de uma sequência”: ***Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares***.

Mas, curiosamente, do ponto de vista histórico, a ideia de determinante aparece em soluções de sistemas lineares ocorreu pelo menos um século antes do matemático inglês ***Arthur Cayley,*** com sua famosa ***Memoir on the Theory of Matrices***, ***1858*** criar as teorias das matrizes e demonstrar sua utilidade, portanto a ordem histórica foi: *sistemas lineares, determinantes e matrizes*, porém, estudamos primeiro as matrizes, depois os determinantes e, em seguida, os sistemas de equações lineares.

Bem, neste trabalho abordaremos detalhadamente os conteúdos sobre estes três assuntos, apresentando diversos exemplos e exercícios resolvidos, a fim de demonstrar as mais diversas formas de aplicações dos conceitos apresentados.

Entretanto, o *foco principal* deste trabalho é apresentar ao estudante do ensino médio o conceito de ***transformações elementares nas linhas de uma matriz***, que não é usual no ensino médio, mas é perfeitamente aplicável como uma ferramenta adicional para o cálculo de matrizes inversas, quando estas existirem, e resolução de sistemas de equações lineares.

• *MATRIZES*

Muitas vezes, para designar com clareza certas situações, é necessário formar um grupo ordenado de números que se apresentem dispostos em linhas e colunas numa tabela. Em Matemática, essas tabelas são chamadas *matrizes*. Com o advento da computação e a crescente necessidade de guardar muitas informações, as *matrizes* adquiriram grande importância.

Historicamente, as matrizes surgiram da necessidade de resolver problemas, que envolviam mensuração de terras, agricultura, impostos e etc., os quais resultavam em sistemas de equações de 1º grau. Embora haja indícios de que por volta de 2500 a.C. os chineses já resolvessem alguns tipos de problemas com cálculos efetuados sobre uma tabela (apresentados num dos nove capítulos do livro chinês *Chui-Chang Suan-Shu*, que trata da arte matemática). *Augustin-Louis Cauchy* (1789 – 1857), matemático francês, parece ter sido o primeiro a nomear essas configurações numéricas de *tableau* (tabela, em francês), em 1826, e só em 1850, com o matemático inglês *James Joseph Sylvester* (1814 – 1897), é que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de *matriz*.

Hoje em dia, as matrizes têm uma importância muito significativa no campo das aplicações em Matemática, especialmente na Álgebra Linear e Computação Gráfica. Também são muito utilizadas em nosso cotidiano, por exemplo, na organização de dados, como a tabela de um campeonato (figura abaixo), calendário, ficha de aposta de loteria e até a tela do computador que você observa é formada por pixels, gerado por uma matriz.

CLASSIFICAÇÃO	PG	J	V	E	D
1º Remo (PA)	10	6	3	1	2
2º América (RN)	10	6	3	1	2
3º Ipatinga (MG)	9	6	2	3	1
4º Novo Hamburgo (RS)	4	6	1	1	4

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} PG & J & V & E & D \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Remo (PA)} \\ \text{América (RN)} \\ \text{Ipatinga (MG)} \\ \text{Novo Hamburgo (RS)} \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observe que os dados (pontos ganhos, quantidade de jogos, vitórias, empates e derrotas), referentes a cada time, estão descrito na tabela.

1. Noções de Matrizes.

Definição:

Dados $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, definimos uma *matriz real de ordem* $\boldsymbol{m}$ *por* $\boldsymbol{n}$, ou simplesmente uma matriz $\boldsymbol{m}$ por $\boldsymbol{n}$ (escreve-se $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$), como uma tabela formada por $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}$ elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em $\boldsymbol{m}$ linhas e $\boldsymbol{n}$ colunas.

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} & \sqrt{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$ é $\boldsymbol{martriz}\ \mathbf{2} \times \mathbf{3}$

c) $\begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-7} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ é $\boldsymbol{martriz}\ \mathbf{3} \times \mathbf{1}$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ é $\boldsymbol{martriz}\ \mathbf{2} \times \mathbf{2}$

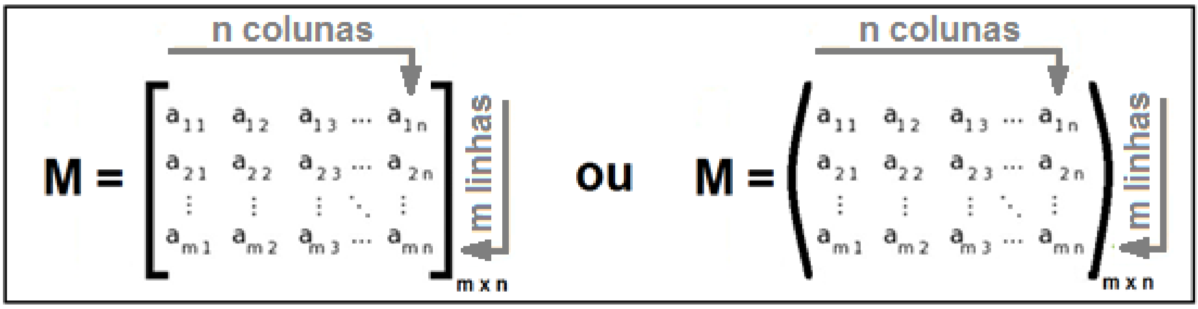
d) $[\ \mathbf{3}\ ]$ é $\boldsymbol{martriz}\ \mathbf{1} \times \mathbf{1}$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{21} \end{pmatrix}$ é $\boldsymbol{martriz}\ \mathbf{3} \times \mathbf{3}$

c) $\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} & \sqrt[3]{\mathbf{4}} \end{bmatrix}$ é $\boldsymbol{martriz}\ \mathbf{1} \times \mathbf{4}$

2. Representação Genérica de uma Matriz.

Os números que aparecem na matriz são chamados de *elementos* ou *termos* da matriz. Em uma matriz qualquer $\boldsymbol{M}$, cada termo é indicado por $\boldsymbol{a_{ij}}$. O índice $\boldsymbol{i}$ indica a linha e o índice $\boldsymbol{j}$ a coluna às quais o termo pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de $\mathbf{1}$ até $\boldsymbol{m}$) e as colunas, da esquerda para a direita (de $\mathbf{1}$ até $\boldsymbol{n}$), uma matriz $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ é representada genericamente por:



Uma matriz $\boldsymbol{M}$ do tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ também pode ser indicada por: $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{a_{ij}})$; $\boldsymbol{i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots, \boldsymbol{m}\}$ e $\boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots, \boldsymbol{n}\}$ ou simplesmente $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$.

Exemplos:

a) Vamos escrever a matriz $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, com $1 \leq \boldsymbol{i} \leq \mathbf{2}$ e $1 \leq \boldsymbol{j} \leq \mathbf{3}$, tal que $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{3}\boldsymbol{i} + \mathbf{2}\boldsymbol{j} - \mathbf{5}$.

Solução

Temos por definição:

$a_{11} = 3 + 2 - 5 = 0,\quad a_{12} = 3 + 4 - 5 = 2,\quad a_{13} = 3 + 6 - 5 = 4$
$a_{21} = 6 + 2 - 5 = 3,\quad a_{22} = 6 + 4 - 5 = 5,\quad a_{23} = 6 + 6 - 5 = 7$

Assim, a matriz é: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$.

b) Indique os elementos da matriz $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}$, tal que $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

Solução

Temos por definição:

$a_{11} = 1 - 1 = 0,\quad a_{12} = 1 - 2 = -1,\quad a_{13} = 1 - 3 = -2$
$a_{21} = 2 - 1 = 1,\quad a_{22} = 2 - 2 = 0,\quad a_{23} = 2 - 3 = -1$
$a_{31} = 3 - 1 = 2,\quad a_{32} = 3 - 2 = 1,\quad a_{33} = 3 - 3 = 0$

Assim, a matriz é: $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

3. Matrizes Especiais.

Há matrizes que, por apresentarem uma utilidade maior nesta teoria, recebem um nome especial:

3.1. **Matriz Linha** – é toda matriz do tipo $\mathbf{1} \times \boldsymbol{n}$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{L}' = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & \sqrt{\mathbf{7}} \end{pmatrix}_{\mathbf{1}\times\mathbf{3}}$ b) $\boldsymbol{L}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{4} & \mathbf{2} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{1}\times\mathbf{5}}$

Forma Genérica:

$$L = \overset{\text{n colunas}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}}_{1\times n}$$

3.2. **Matriz Coluna** – é toda matriz do tipo $\boldsymbol{m} \times \mathbf{1}$**,** isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{C}' = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}_{\mathbf{4}\times\mathbf{1}}$ b) $\boldsymbol{C}'' = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix}_{\mathbf{2}\times\mathbf{1}}$

Forma Genérica:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1} \text{m linhas}$$

3.3. **Matriz Nula** – é toda matriz que tem todos os elementos iguais à zero.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{N}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\mathbf{3}\times\mathbf{4}}$ b) $\boldsymbol{N}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}$

3.4. **Matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$** – é toda matriz do tipo $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, isto é, é uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos:

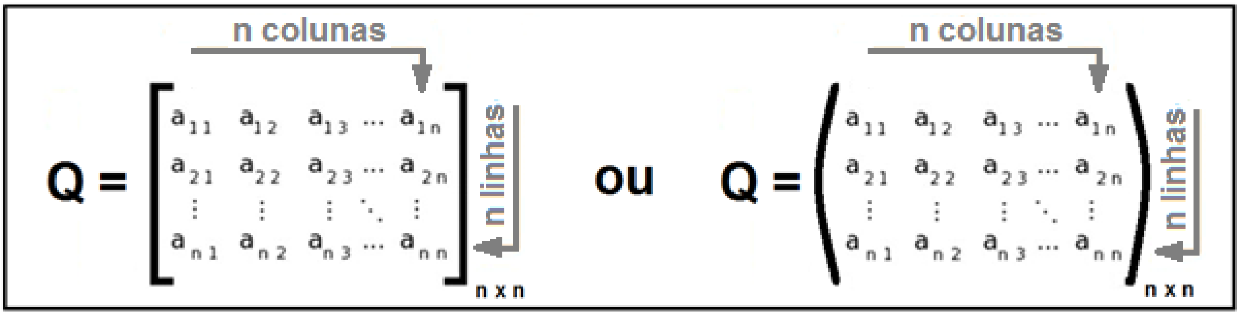
a) $\boldsymbol{Q}' = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{pmatrix}_{\mathbf{2\times 2}}$

b) $\boldsymbol{Q}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} \\ \mathbf{15} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{4\times 4}}$

c) $\boldsymbol{Q}''' = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{13} & \mathbf{7} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times 3}}$

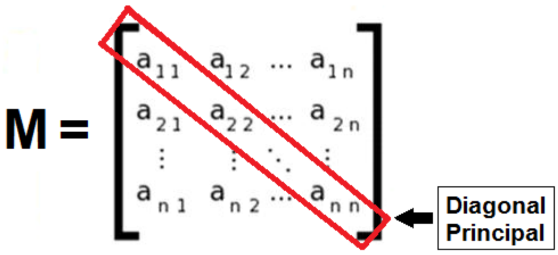
d) $\boldsymbol{Q}'''' = \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\right)_{\mathbf{1\times 1}}$

3.4.1. **Forma Genérica da Matriz Quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$:**



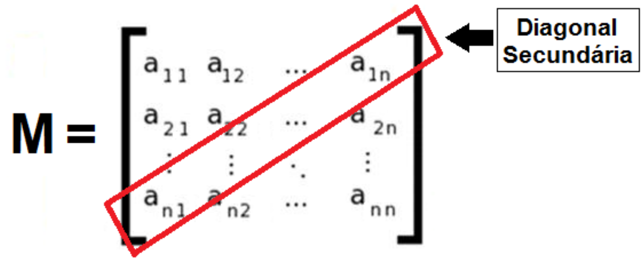
3.4.2. **Diagonal Principal de uma Matriz Quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$:**

Numa matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$, os elementos $\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{22}}, \boldsymbol{a_{33}}, \dots, \boldsymbol{a_{nn}}$ formam a diagonal principal da matriz (elementos $\boldsymbol{a_{ij}}$ sendo $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$).



3.4.3. Diagonal Secundária de uma Matriz Quadrada de ordem n:

Numa matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$, a diagonal secundária da matriz é formada pelos elementos $\boldsymbol{a_{ij}}$, nos quais $\boldsymbol{i+j=n+1}$.



3.5. Matriz Triangular

Matriz Triangular – é toda matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$, na qual todos os elementos acima **ou** abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

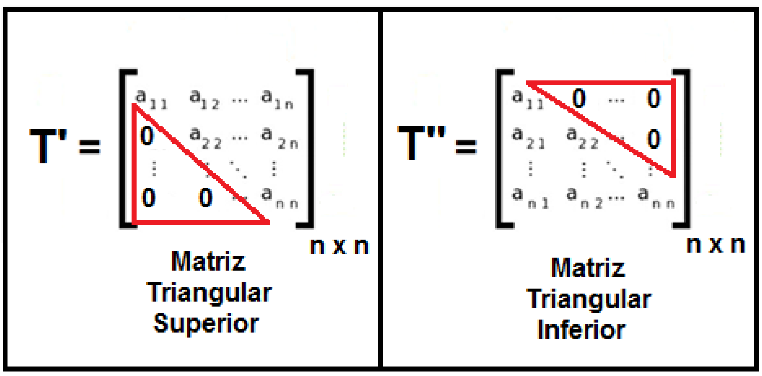
a) Matriz Triangular Superior (matriz de elementos $\boldsymbol{a_{ij}=0}$ para $\boldsymbol{i>j}$).

$$\boldsymbol{T'} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{4\times 4}} \qquad \boldsymbol{T'} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times 3}}$$

b) Matriz Triangular Inferior (matriz de elementos $\boldsymbol{a_{ij}=0}$ para $\boldsymbol{i<j}$).

c) $$\boldsymbol{T''} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{11} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times 3}} \qquad \boldsymbol{T''} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}_{\mathbf{2\times 2}}$$

Forma Genérica:

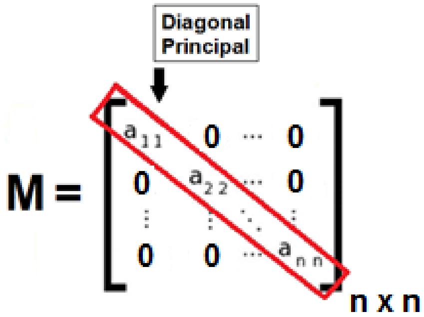


3.6. **Matriz Diagonal** – é toda matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$ em que todos os elementos acima **e** abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, é toda matriz de elementos $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}$ sempre que $\boldsymbol{i \neq j}$.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{D'} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}_{\mathbf{4\times4}}$ b) $\boldsymbol{D''} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times3}}$

Forma Genérica:



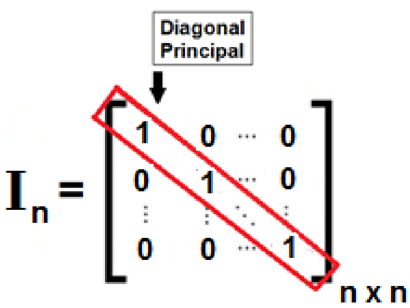
3.7. **Matriz Identidade (ou unidade) –** é toda matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a $\mathbf{1}$. Indicamos uma matriz identidade de ordem $\boldsymbol{n}$ por $\boldsymbol{I_n}$.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{I_4} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{4\times4}}$ b) $\boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times3}}$

Em uma matriz identidade, temos: $\boldsymbol{I_n} = \begin{cases} \boldsymbol{a_{ij} = 1,\ para\ i = j} \\ \boldsymbol{a_{ij} = 0,\ para\ i \neq j} \end{cases}$

Forma Genérica:



4. Igualdade de Matrizes.

Consideremos duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, de mesmo tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, no caso $\boldsymbol{3} \times \boldsymbol{2}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} \\ \boldsymbol{b_{31}} & \boldsymbol{b_{32}} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Em matrizes do mesmo tipo, os elementos que ocupam a mesma posição são denominados *elementos correspondentes*.

Então, nas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ consideradas, são elementos correspondentes:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a_{11}\ e\ b_{11}} & \boldsymbol{a_{12}\ e\ b_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}\ e\ b_{21}} & \boldsymbol{a_{22}\ e\ b_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}\ e\ b_{31}} & \boldsymbol{a_{32}\ e\ b_{32}} \end{array}$$

Definição:

Duas matrizes $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ são iguais quando $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{b_{ij}}$ para todo $\boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \cdots, \boldsymbol{m}\}$ e todo $\boldsymbol{j} \in \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \cdots, \boldsymbol{n}\}$**.** Isto significa que para serem iguais, duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Exemplos:

a) Determine $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de modo que se tenha $\begin{bmatrix} \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{3y} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x+1} & \boldsymbol{2y} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{y+4} \end{bmatrix}$.

Solução

Temos, por definição, que satisfazer o sistema:

$\begin{cases} \boldsymbol{2x = x + 1} \\ \boldsymbol{3y = 2y} \\ \boldsymbol{4 = y + 4} \end{cases}$ e, então, $\boxed{\boldsymbol{x = 1}}\ \boldsymbol{e}\ \boxed{\boldsymbol{y = 0}}$**.**

5. Adição de Matrizes.

Consideremos duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ do tipo $\mathbf{3} \times \mathbf{2}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times2}} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-4} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times2}}$$

Determinemos uma matriz $\boldsymbol{C}$ tal que $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$, ou seja, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-4} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2+6} & \mathbf{3+(-3)} \\ \mathbf{-1+4} & \mathbf{0+7} \\ \mathbf{1+(-4)} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}$$

A matriz $\boldsymbol{C}$ assim obtida denomina-se *soma da matriz* $\boldsymbol{A}$ *com a matriz* $\boldsymbol{B}$ ou, simplesmente, *soma das matrizes* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$.

Definição:

Dadas duas matrizes $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, chama-se soma de $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a matriz $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ tal que $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$, para todo $\boldsymbol{i}$ e todo $\boldsymbol{j}$. Isto significa que a soma de duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ do tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ é uma matriz $\boldsymbol{C}$ do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

Proposição:

Sejam $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ matrizes de mesma ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, então:

(i) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (*associatividade da adição*);

(ii) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (*comutatividade da adição*);

(iii) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, onde $\boldsymbol{O}$ denota a matriz nula $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ (*possui elemento neutro*);

(iv) $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ (a matriz $\boldsymbol{A}$ possui simétrica ou oposta).

Demonstração:

(i) *Fazendo* $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{X}$ *e* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{Y}$, *temos:*

$$\boldsymbol{x_{ij}}=\boldsymbol{a_{ij}}+\left(\boldsymbol{b_{ij}}+\boldsymbol{c_{ij}}\right)=\left(\boldsymbol{a_{ij}}+\boldsymbol{b_{ij}}\right)+\boldsymbol{c_{ij}}=\boldsymbol{y_{ij}},$$

para todo $\boldsymbol{i}$ e todo $\boldsymbol{j}$.

(ii) *Fazendo* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Y}$, *temos:*

$$\boldsymbol{x_{ij}}=\boldsymbol{a_{ij}}+\boldsymbol{b_{ij}}=\boldsymbol{b_{ij}}+\boldsymbol{a_{ij}}=\boldsymbol{y_{ij}}.$$

(iii) *Impondo* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}$, *resulta:*

$$\boldsymbol{a_{ij}}+\boldsymbol{m_{ij}}=\boldsymbol{a_{ij}} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{m_{ij}}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}$$

Isto é, o elemento neutro é a matriz nula do tipo $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$.

(iv) *Impondo* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A'}=\boldsymbol{O}$, *resulta:*

$$\boldsymbol{a_{ij}}+\boldsymbol{a'_{ij}}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a'_{ij}}=-\boldsymbol{a_{ij}}, \forall\boldsymbol{i},\forall\boldsymbol{j}$$

Isto é, a simétrica ou oposta da matriz $\boldsymbol{A}$ *para a adição é a matriz* $\boldsymbol{A'}$ *de mesmo tipo que* $\boldsymbol{A}$, *na qual cada elemento é simétrico ou oposto ao seu correspondente em* $\boldsymbol{A}$.

Definição:

Dada a matriz $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$, chama-se *oposta de* $\boldsymbol{A}$ (indica-se $-\boldsymbol{A}$) a matriz $\boldsymbol{A'}$ tal que $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A'}=\boldsymbol{O}$.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}} \Rightarrow \boxed{-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}}$

b) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4} & \mathbf{7} & \mathbf{-2}\\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} & \mathbf{1} & \sqrt{\mathbf{3}}\end{pmatrix}_{\mathbf{2}\times\mathbf{3}} \Rightarrow \boxed{-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{-7} & \mathbf{2}\\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} & \mathbf{-1} & -\sqrt{\mathbf{3}}\end{pmatrix}_{\mathbf{2}\times\mathbf{3}}}$

6. Subtração de Matrizes.

Definição:

Dadas duas matrizes $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, denomina-se diferença entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ (representado por $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$) a soma da matriz $\boldsymbol{A}$ com a matriz *oposta* à $\boldsymbol{B}$.

Exemplo:

Consideremos duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ do tipo $\boldsymbol{2} \times \boldsymbol{4}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Determinemos uma matriz $\boldsymbol{C}$ tal que $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} - \boldsymbol{b_{ij}}$, ou seja, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & -7 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}$$

7. Multiplicação de um número real $\boldsymbol{k}$ por uma Matriz.

Dada a matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ -2 & \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, vamos determinar $\boldsymbol{3 \cdot M}$.

$$\boldsymbol{3 \cdot M} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ -2 & \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(2) & 3\cdot(1) & 3\cdot(4) \\ 3\cdot(5) & 3\cdot(0) & 3\cdot(7) \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right) & 3\cdot(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 15 & 0 & 21 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Definição:

Dado um número real $\boldsymbol{k}$ e uma matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, chama-se produto $\boldsymbol{k\cdot A}$ a matriz $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, tal que $\boldsymbol{b_{ij} = k\cdot a_{ij}}$ para todo $\boldsymbol{i}$ e todo $\boldsymbol{j}$. Isto significa que multiplicar uma matriz $\boldsymbol{A}$ por um número real $\boldsymbol{k}$ é construir uma matriz $\boldsymbol{B}$ formada pelos elementos de $\boldsymbol{A}$, todos multiplicados por $\boldsymbol{k}$.

Proposição:

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes de mesma ordem $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{k,t}\in\mathbb{R}$, então:

(i) $\boldsymbol{k\cdot(A+B) = k\cdot A + k\cdot B}$;

(ii) $\boldsymbol{(k+t)\cdot A = k\cdot A + t\cdot A}$;

(iii) $\boldsymbol{k\cdot(t\cdot A) = (k\cdot t)\cdot A}$;

(iv) $\boldsymbol{1\cdot A = A}$.

Demonstração:

(i) *Sejam as matrizes* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ *e o número real* $\boldsymbol{k}$, *então:*

$$\boldsymbol{k\cdot(A+B) = k\cdot\big((a_{ij}) + (b_{ij})\big) = k\cdot(a_{ij}) + k\cdot(b_{ij}) = k\cdot A + k\cdot B}$$

(ii) *Sejam os reais* $\boldsymbol{k}$ *e* $\boldsymbol{t}$, *e a matriz* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, *então:*

$$\boldsymbol{(k+t)\cdot A = (k+t)\cdot(a_{ij}) = k\cdot(a_{ij}) + t\cdot(a_{ij}) = k\cdot A + t\cdot A}$$

(iii) *Sejam os reais* $\boldsymbol{k}$ *e* $\boldsymbol{t}$, *e a matriz* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, *então:*

$$\boldsymbol{k\cdot(t\cdot A) = k\cdot\big(t\cdot(a_{ij})\big) = \big(k\cdot t\cdot(a_{ij})\big) = (k\cdot t)\cdot(a_{ij}) = (k\cdot t)\cdot A}$$

(iv) *Seja a matrizes* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, *então:*

$$\boldsymbol{1\cdot A = 1\cdot(a_{ij}) = (a_{ij}) = A}$$

8. Produto de Matrizes.

Definição:

Dadas duas matrizes $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b_{jk}}\right)_{\boldsymbol{n\times p}}$, chama-se *produto* $\boldsymbol{A\cdot B}$ a matriz $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ik}})_{\boldsymbol{m\times p}}$ **,** tal que:

$$\boldsymbol{c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}},$$

para todo $\boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\cdots,\boldsymbol{m}\}$ e todo $\boldsymbol{k} \in \{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\cdots,\boldsymbol{p}\}$.

Observações:

(i) O produto de matrizes $\boldsymbol{A\cdot B}$ existirá se, e somente se, o número de colunas da matriz $\boldsymbol{A}$ for igual ao número de linhas da matriz $\boldsymbol{B}$, logo a matriz $\boldsymbol{A}$ sendo do tipo $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, então $\boldsymbol{B}$ deverá ser do tipo $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}$. $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}\setminus\{\boldsymbol{0}\})$

(ii) O produto $\boldsymbol{A\cdot B}$ resultará em uma matriz $\boldsymbol{C}$ com o mesmo número de linhas de $\boldsymbol{A}$ e o mesmo número de colunas de $\boldsymbol{B}$, pois $\boldsymbol{C = A\cdot B}$ é do tipo $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}$.

(iii) Pela definição, um elemento $\boldsymbol{c_{ik}}$ da matriz $\boldsymbol{A\cdot B}$ deve ser obtido pelo seguinte procedimento:

I. Tomamos a linha $\boldsymbol{i}$ da matriz $\boldsymbol{A}$:

$$\boxed{\boldsymbol{a_{i1}\quad a_{i2}\quad a_{i3}\quad \cdots\quad a_{in}}} \qquad (\boldsymbol{n\ elementos})$$

II. Tomamos a coluna $\boldsymbol{k}$ da matriz $\boldsymbol{B}$:

$$\boxed{\begin{matrix}\boldsymbol{b_{1k}}\\ \boldsymbol{b_{2k}}\\ \boldsymbol{b_{3k}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b_{nk}}\end{matrix}} \qquad (\boldsymbol{n\ elementos})$$

III. Colocamos a linha $\boldsymbol{i}$ da matriz $\boldsymbol{A}$ na "vertical" ao lado da coluna $\boldsymbol{k}$ da matriz $\boldsymbol{B}$, conforme o esquema abaixo:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}}$$

IV. Calculamos os $\boldsymbol{n}$ produtos dos elementos que ficaram lado a lado, conforme o esquema abaixo:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \times b_{1k} \\ a_{i2} \times b_{2k} \\ a_{i3} \times b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \times b_{nk} \end{matrix}}$$

V. Agora, para obtermos $\boldsymbol{c_{ik}}$ basta somarmos estes $\boldsymbol{n}$ produtos, vejamos:

$$c_{ik} = (a_{i1} \cdot b_{1k}) + (a_{i2} \cdot b_{2k}) + (a_{i3} \cdot b_{3k}) + \cdots + (a_{in} \cdot b_{nk})$$

Exemplos:

a) Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, calculemos $\boldsymbol{A \cdot B}$.

Solução

Sendo $\boldsymbol{A}$ do tipo $\boldsymbol{2 \times 3}$ e $\boldsymbol{B}$ do tipo $\boldsymbol{3 \times 1}$, então existirá o produto $\boldsymbol{A \cdot B}$, que será do tipo $\boldsymbol{2 \times 1}$. Sendo $\boldsymbol{C = A \cdot B}$, devemos calcular $\boldsymbol{c_{11}}$ e $\boldsymbol{c_{21}}$:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^{\underline{a}} linha\ de\ A \times 1^{\underline{a}} coluna\ de\ B) \\ (2^{\underline{a}} linha\ de\ A \times 1^{\underline{a}} coluna\ de\ B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 7 \\ 2 \times 8 \\ 3 \times 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \times 7 \\ 5 \times 8 \\ 6 \times 9 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} (7 + 16 + 27) \\ (28 + 40 + 54) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boxed{C = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}}$$

b) Dadas $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{bmatrix}_{2\times 2}$, calculemos $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Solução

Sendo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes do tipo $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, então existirá o produto $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, que será, também, do tipo $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$. Fazendo $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, teremos:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} (1^{\underline{a}} linha\ A \times 1^{\underline{a}} coluna\ B) & (1^{\underline{a}} linha\ A \times 2^{\underline{a}} coluna\ B) \\ (2^{\underline{a}} linha\ A \times 1^{\underline{a}} coluna\ B) & (2^{\underline{a}} linha\ A \times 2^{\underline{a}} coluna\ B) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 5 \\ 2 \times 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 6 \\ 2 \times 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \times 5 \\ 4 \times 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \times 6 \\ 4 \times 8 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 + 14) & (6 + 16) \\ (15 + 28) & (18 + 32) \end{bmatrix} \therefore$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}}$$

Observações:

(i) Não há comutatividade na multiplicação de matrizes, ou seja, para duas matrizes quaisquer $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é falso que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, necessariamente.

Suponhamos que existam matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, tais que exista $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, analisemos:

Caso 1 – existe $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ e não existe $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, isto ocorre quando $\boldsymbol{A}$ é do tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{B}$ é do tipo $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{p}$:

- $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ e $\boldsymbol{B} = (b_{jk})_{n\times p}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (c_{ik})_{m\times p}$, pois o número de colunas de $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de linhas de $\boldsymbol{B}$.
- $\boldsymbol{B} = (b_{jk})_{n\times p}$ e $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ $\Rightarrow$ $\nexists$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, pois o número de colunas de $\boldsymbol{A}$ é diferente do número de linhas de $\boldsymbol{B}$.

Caso 2 – existem $\boldsymbol{A \cdot B}$ e $\boldsymbol{B \cdot A}$, porem são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A}$, isto ocorre quando $\boldsymbol{A}$ é do tipo $\boldsymbol{m \times n}$, $\boldsymbol{B}$ é do tipo $\boldsymbol{n \times m}$ e $\boldsymbol{m \neq n}$:

- $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{m\times n}}$ e $\boldsymbol{B = (b_{ji})_{n\times m}}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\boldsymbol{C = A \cdot B}$, pois o número de colunas de $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de linhas de $\boldsymbol{B}$, sendo que <u>$\boldsymbol{C}$ é uma matriz do tipo $\boldsymbol{m \times m}$</u>.
- $\boldsymbol{B = (b_{ji})_{n\times m}}$e $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{m\times n}}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\boldsymbol{C' = B \cdot A}$, pois o número de colunas de $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de linhas de $\boldsymbol{B}$, sendo que <u>$\boldsymbol{C'}$ é uma matriz do tipo $\boldsymbol{n \times n}$</u>.

Logo, como $\boldsymbol{m \neq n}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{C \neq C'}$, pois são de tipos diferentes.

Caso 3 – existem $\boldsymbol{A \cdot B}$ e $\boldsymbol{B \cdot A}$ é são do mesmo tipo (ocorrem quando $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são quadradas de mesma ordem), temos quase sempre $\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A}$.

Exemplo:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} e\, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 0 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 0 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix} \\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 6 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}}$$

(ii) Para que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sejam tais que $\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A}$, é necessário, mas não suficiente, que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sejam matrizes quadradas e de mesma ordem.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ comuta com $\boldsymbol{I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

b) $\boldsymbol{B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ comuta com $\boldsymbol{N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

c) $\boldsymbol{C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ comuta com $\boldsymbol{M = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

(iii) É importante observar que a implicação, $\boldsymbol{A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \ \ ou \ \ B = 0}$, não é valida para matrizes, pois é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

Exemplo: $\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

Proposições:

Sejam $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{I}$ matrizes, sendo $\boldsymbol{I}$ a matriz identidade, desde que as operações sejam possíveis, teremos:

(i) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);

(ii) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);

(iii) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$ (associatividade);

(iv) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ (existência de elemento identidade).

9. Matriz Transposta.

Definição:

Dada uma matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m \times n}}$, chama-se *transposta de* $\boldsymbol{A}$ a matriz $\boldsymbol{A^t} = (\boldsymbol{a'_{ji}})_{\boldsymbol{n \times m}}$ tal que $\boldsymbol{a'_{ji}} = \boldsymbol{a_{ij}}$, para todo $\boldsymbol{i}$ e todo $\boldsymbol{j}$. Isto significa, por exemplo, que $\boldsymbol{a'_{11}}, \boldsymbol{a'_{21}}, \boldsymbol{a'_{31}}, \cdots, \boldsymbol{a'_{n1}}$ são respectivamente iguais a $\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{12}}, \boldsymbol{a_{13}}, \cdots, \boldsymbol{a_{1n}}$; vale dizer que a $\mathbf{1}$ª coluna de $\boldsymbol{A^t}$ é igual à $\mathbf{1}$ª linha de $\boldsymbol{A}$. Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de $\boldsymbol{A^t}$ são ordenadamente iguais às linhas de $\boldsymbol{A}$.

Exemplos:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}_{\mathbf{2 \times 2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}_{\mathbf{2 \times 2}}}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix}_{\mathbf{2 \times 3}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{B^t} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix}_{\mathbf{3 \times 2}}}$

c) $\boldsymbol{C} = (\mathbf{-7} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})_{\mathbf{1 \times 4}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{C^t} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{4 \times 1}}}$

Propriedades:

(i) $(\boldsymbol{A^t})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A}$, para toda matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$;

(ii) Se $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, então $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A^t} + \boldsymbol{B^t}$;

(iii) Se $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$, então $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A^t}$;

(iv) Se $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{\boldsymbol{n\times p}}$, então $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{B^t}\cdot\boldsymbol{A^t}$.

Demonstração:

(i) *Fazendo* $(\boldsymbol{A^t})^{\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{a}''_{\boldsymbol{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$, *resulta:*

$\boldsymbol{a}''_{\boldsymbol{ij}} = \boldsymbol{a}'_{\boldsymbol{ji}} = \boldsymbol{a_{ij}}$, *para todos* $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$.

(ii) *Fazendo* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}})_{\boldsymbol{m\times n}}$ *e* $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{C^t} = (\boldsymbol{c}'_{\boldsymbol{ji}})_{\boldsymbol{n\times m}}$, *temos:*

$\boldsymbol{c}'_{\boldsymbol{ji}} = \boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}} = \boldsymbol{a}'_{\boldsymbol{ji}} + \boldsymbol{b}'_{\boldsymbol{ji}}$, *para todos* $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$.

(iii) *Fazendo* $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{a}''_{\boldsymbol{ji}})_{\boldsymbol{n\times m}}$, *resulta:*

$\boldsymbol{a}''_{\boldsymbol{ji}} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}'_{\boldsymbol{ji}}$, *para todos* $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$.

(iv) *Fazendo* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ik}})_{\boldsymbol{m\times p}}$ *e* $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{C^t} = (\boldsymbol{c}'_{\boldsymbol{ki}})_{\boldsymbol{p\times m}}$, *resulta:*

$$\boldsymbol{c}'_{\boldsymbol{ki}} = \boldsymbol{c_{ik}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ij}}\cdot\boldsymbol{b_{jk}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b_{jk}}\cdot\boldsymbol{a_{ij}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b}'_{\boldsymbol{kj}}\cdot\boldsymbol{a}'_{\boldsymbol{ji}}$$

Definição:

Chama-se *matriz simétrica* toda matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem $\boldsymbol{n}$, tal que

$$\boldsymbol{A^t = A}.$$

Decorre da definição que, se $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{n\times n}}$ é uma matriz simétrica, temos:

$$\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}} \; ; \; \forall\, \boldsymbol{i}, \forall \boldsymbol{j} \in \{\boldsymbol{1, 2, 3, \cdots, n}\},$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplos: São simétricas as matrizes:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{g} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \end{pmatrix}$

Definição:

Chama-se *matriz anti-simétrica* toda matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem $\boldsymbol{n}$, tal que:

$$\boldsymbol{A^t = -A}.$$

Decorre da definição que, se $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{n\times n}}$ é uma matriz anti-simétrica, temos:

$$\boldsymbol{a_{ij} = -a_{ji}} \; ; \; \forall\, \boldsymbol{i}, \forall \boldsymbol{j} \in \{\boldsymbol{1, 2, 3, \cdots, n}\},$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplos: São anti-simétricas as matrizes:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{-d} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{-e} & \boldsymbol{-f} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

10. Transformações Elementares de Matrizes.

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz do tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$. Para cada $\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{m}$, denotemos por $\boldsymbol{L_i}$ a $\boldsymbol{i}-$é$\boldsymbol{sima}$ linha de $\boldsymbol{A}$. Definimos as *transformações elementares nas linhas* da matriz $\boldsymbol{A}$ como se segue:

1) Permutação das linhas $\boldsymbol{L_i}$ e $\boldsymbol{L_t}$, indicaremos por $\boldsymbol{L_i} \leftrightarrow \boldsymbol{L_t}$.
2) Substituição de uma linha $\boldsymbol{L_i}$ pela adição desta mesma linha com outra linha $\boldsymbol{L_t}$ multiplicada por um valor real $\boldsymbol{k}$, indicaremos por $\boldsymbol{L_i} \rightarrow \boldsymbol{L_i} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L_t}$.
3) Multiplicação de uma linha $\boldsymbol{L_i}$ por um número real $\boldsymbol{k}$ não nulo, indicaremos por $\boldsymbol{L_i} \rightarrow \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L_i}$.

Exemplo:

Vamos efetuar algumas transformações elementares nas linhas da matriz,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow \frac{1}{2} L_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7/2 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 + 2 \cdot L_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 14 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes de ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$. A matriz $\boldsymbol{A}$ é dita ser *equivalente por linhas* à matriz $\boldsymbol{B}$ se $\boldsymbol{B}$ pode ser obtida de $\boldsymbol{A}$ pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.

Exemplo:

As matrizes $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ são equivalentes por linhas já que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{} _{\boldsymbol{L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_1}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{} _{\boldsymbol{L_3 \to L_3 + 2 \cdot L_1}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{} _{\boldsymbol{L_3 \to L_3 - 3 \cdot L_2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Note que se $\boldsymbol{A}$ é equivalente por linhas a uma matriz $\boldsymbol{B}$, então $\boldsymbol{B}$ é equivalente por linhas à matriz $\boldsymbol{A}$, já que toda transformação elementar sobre linhas é reversível. Mais precisamente, se $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa uma transformação elementar nas linhas de uma matriz $\boldsymbol{A}$ de ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, denotada por $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{A})$ a matriz obtida de $\boldsymbol{A}$ aplicando-lhe a transformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, temos o resultado a seguir.

Proposição:

Toda transformação elementar $\boldsymbol{\varepsilon}$ nas linhas de uma matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ (notação: $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{A})$) é reversível, no sentido de que existe uma transformação elementar $\boldsymbol{\varepsilon}'$ tal que $\boldsymbol{\varepsilon}'\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{A})\big) = \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}\big(\boldsymbol{\varepsilon}'(\boldsymbol{A})\big) = \boldsymbol{A}$, para todo matriz $\boldsymbol{A}$.

Demonstração:

(i) *Se $\boldsymbol{\varepsilon}$ é uma transformação elementar do tipo $\boldsymbol{L_i} \leftrightarrow \boldsymbol{L_t}$, basta tomar $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}$.*

(ii) *Se $\boldsymbol{\varepsilon}$ é uma transformação elementar do tipo $\boldsymbol{L_i} \to \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L_i}$, com $\boldsymbol{k}$ não nulo, tome $\boldsymbol{\varepsilon}'$como a transformação $\boldsymbol{L_i} \to \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{L_i}$.*

(iii) *Se $\boldsymbol{\varepsilon}$ é uma transformação elementar do tipo $\boldsymbol{L_i} \to \boldsymbol{L_i} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L_t}$, tome $\boldsymbol{\varepsilon}'$como a transformação $\boldsymbol{L_i} \to \boldsymbol{L_i} - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{L_t}$.*

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz equivalente por linhas a uma matriz $\boldsymbol{B}$, (e, então, $\boldsymbol{B}$ é equivalente por linhas à $\boldsymbol{A}$) dizemos simplesmente que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são *matrizes equivalentes*.

11. Forma Escalonada de uma Matriz

Definição:

Uma matriz $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ será dita estar na *forma escalonada* se for nula, ou se:

1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo de todas as linhas não nulas;
2) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é $\mathbf{1}$;
3) Os demais termos da coluna, à qual pertence o primeiro termo não nulo de uma linha não nula, são todos nulos;
4) A coluna à qual pertence o primeiro termo não nulo de uma linha não nula fica à direita da coluna à qual pertence o primeiro termo não nulo da linha anterior, isto é, se $\boldsymbol{p}$ é o número de linhas não nulas e se o primeiro termo não nulo da $\boldsymbol{i}-$é$\boldsymbol{sima}$ linha não nula ocorre na $\boldsymbol{k_i}-$é$\boldsymbol{sima}$ coluna, então $\boldsymbol{k_1} < \boldsymbol{k_2} < \cdots < \boldsymbol{k_p}$.

Exemplos:

As matrizes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Estão na forma escalonada, pois todas as condições da definição anterior são satisfeitas, mas as matrizes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Não estão na forma escalonada, pois a primeira não satisfaz a condição $\mathbf{3}$, enquanto a segunda não satisfaz as condições $\mathbf{2}$ e $\mathbf{4}$.

Vejamos agora um algoritmo que *reduz por linhas* uma matriz dada não nula qualquer a uma matriz na forma escalonada. O termo reduzir por linhas significa transformar uma matriz usando as transformações elementares sobre linhas. Este processo é também chamado de escalonamento de matrizes.

$\boldsymbol{Passo\ 1} \rightarrow$ Seja $\boldsymbol{k_1}$ a primeira coluna da matriz dada com algum elemento não nulo. Troque as linhas entre si de modo que esse elemento não nulo apareça na primeira linha, isto é, de modo que na nova matriz o elemento $\boldsymbol{a_{1k_1} \neq 0}$.

$\boldsymbol{Passo\ 2} \rightarrow$ Para cada $\boldsymbol{i > 1}$, realize a transformação,

$$\boldsymbol{L_i \rightarrow L_i - \frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}} L_1}.$$

Repita os $\boldsymbol{passos\ 1}$ e $\boldsymbol{2}$ na matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os $\boldsymbol{passos\ 1}$ e $\boldsymbol{2}$ nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas etc., até alcançar a última linha não nula.

$\boldsymbol{Passo\ 3} \rightarrow$ Se $\boldsymbol{L_1, L_2, \cdots, L_p}$ são as linhas não nulas da matriz obtida após terminar o processo acima e se $\boldsymbol{k_i}$ é a coluna na qual aparece o primeiro elemento não nulo $\boldsymbol{a_{ik_i}}$ da linha $\boldsymbol{L_i}$, aplique as transformações

$$\boldsymbol{L_i \rightarrow \frac{1}{a_{ik_i}} L_i}, \text{ para todo } \boldsymbol{1 \leq i \leq p.}$$

$\boldsymbol{Passo\ 4} \rightarrow$ Realize na matriz obtida até então as transformações

$$\boldsymbol{L_t \rightarrow L_t - a_{tk_i} L_i, t = 1, \cdots, i - 1},$$

Para $\boldsymbol{i = 2}$. Depois para $\boldsymbol{i = 3}$, e assim por diante, até $\boldsymbol{i = p}$. Dessa forma, obteremos uma matriz na forma escalonada que é equivalente por linhas à matriz dada.

Teorema:

Toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada.

Exemplo:

a) Encontrar a matriz equivalente da matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_1 \leftrightarrow L_3}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \leftrightarrow L_3}]{}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \leftrightarrow L_3}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \to \frac{1}{4} L_2}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to \frac{1}{7} L_3}]{}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to \frac{1}{7} L_3}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \to L_2 - 2L_3}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_1 \to L_1 + 3L_2}]{}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{L_1 \to L_1 + 3L_2}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \textit{matriz escalonada equivalente à matriz } \boldsymbol{A}.$$

b) Encontrar a matriz equivalente da matriz $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$ na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \to L_2 - 4L_1}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - 7L_1}]{}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - 7L_1}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{-12} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \to -\frac{1}{3} L_2}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{-12} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 + 6L_2}]{}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 + 6L_2}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{L_1 \to L_1 - 2L_2}]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\textit{matriz escalonada equivalente à matriz } \boldsymbol{B}.$$

12. Matriz Inversa.

Definição:

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$, se $\boldsymbol{X}$ é uma matriz tal que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I_n}$ e $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$, então $\boldsymbol{X}$ é denominada matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ e é indicada por $\boldsymbol{A^{-1}}$**.** ($\boldsymbol{A}$ é dita matriz invertível ou não singular e $\boldsymbol{I_n}$ é a matriz identidade).

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas de ordem $\boldsymbol{n}$. Se $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_n}$, dizemos que $\boldsymbol{B}$ é uma *inversa à direita* de $\boldsymbol{A}$ e que $\boldsymbol{A}$ é uma *inversa à esquerda* de $\boldsymbol{B}$. Se $\boldsymbol{A}$ admite uma inversa à esquerda $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$ é uma inversa à direita, logo $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$ e $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_n}$, então $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

De fato, vejamos:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{I_n} = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_n} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$$

Dizemos que uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $\boldsymbol{n}$ é invertível, se ela admite inversa à esquerda e à direita. Pelo visto acima, se $\boldsymbol{A}$ é invertível, então ela admite uma única inversa à direita e à esquerda, ou seja, $\boldsymbol{A}$ possui uma única inversa denotada por $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Teorema:

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$**.**

i. Se $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_n}$, então $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$**.**
ii. Se $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$, então $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_n}$.

O teorema nos diz que para verificar se uma matriz é invertível, basta verificar se ela possui uma inversa à direita ou uma inversa à esquerda.

Exemplos:

a) Determinar a matriz inversa de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$, caso exista.

Solução

Seja $\boldsymbol{X}$ a matriz quadrada de ordem $\mathbf{2}$ procurada, isto é, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$.

Pela definição, inicialmente devemos ter:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{5} \cdot \boldsymbol{a} + \mathbf{8} \cdot \boldsymbol{c} & \mathbf{5} \cdot \boldsymbol{b} + \mathbf{8} \cdot \boldsymbol{d} \\ \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{a} + \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{c} & \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{b} + \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$\begin{cases} \mathbf{5}\boldsymbol{a} + \mathbf{8}\boldsymbol{c} = \mathbf{1} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{a} + \mathbf{3}\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{a} = -\mathbf{3}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{c} = \mathbf{2} \qquad \begin{cases} \mathbf{5}\boldsymbol{b} + \mathbf{8}\boldsymbol{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{b} + \mathbf{3}\boldsymbol{d} = \mathbf{1} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{8}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{d} = -\mathbf{5}$$

Daí, temos $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{5} \end{bmatrix}$, para a qual $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}$.

Então, podemos dizer que $\begin{bmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{5} \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$.

b) Vamos determinar a matriz inversa de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$, se existir.

Solução

Seja $\boldsymbol{X}$ a matriz quadrada de ordem $\mathbf{2}$ procurada, isto é, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$.

Pela definição, devemos ter inicialmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{a} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{c} & \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{b} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{d} \\ \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{a} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{c} & \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{b} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$① \begin{cases} \mathbf{3}\boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{c} = \mathbf{1} \quad \times (\mathbf{2}) \\ \mathbf{6}\boldsymbol{a} + \mathbf{4}\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{6}\boldsymbol{a} + \mathbf{4}\boldsymbol{c} = \mathbf{2} \\ \mathbf{6}\boldsymbol{a} + \mathbf{4}\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \end{cases}, \boldsymbol{imposs\acute{\imath}vel}$$

$$② \begin{cases} \mathbf{3}\boldsymbol{b} + \mathbf{2}\boldsymbol{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{6}\boldsymbol{b} + \mathbf{4}\boldsymbol{d} = \mathbf{1} \end{cases}$$

Como o sistema ① é impossível, não há necessidade da resolução do sistema ②.

Podemos afirmar que a matriz $\boldsymbol{A}$ não admite inversa ou que a matriz $\boldsymbol{A}$ não é invertível ou que é singular.

Proposição:

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas de ordem $\boldsymbol{n}$:

(i) Se $\boldsymbol{A}$ é invertível, então $\boldsymbol{A}^{-1}$ também é invertível, então:

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$$

(ii) Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são invertíveis, então $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ também será invertível e:

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$$

Teorema:

Para uma *matriz quadrada* $\boldsymbol{A}$ *de ordem* $\boldsymbol{n}$, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $\boldsymbol{A}$ *é invertível;*

(ii) *Se* $\boldsymbol{B}$ *é uma matriz na forma escalonada equivalente a* $\boldsymbol{A}$*, então* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I_n}$*;*

Proposição:

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz invertível e $\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon_s}$ uma sequência de transformações elementares tais que $\boldsymbol{\varepsilon_s}\left(\cdots\left(\boldsymbol{\varepsilon_2}(\boldsymbol{\varepsilon_1}(\boldsymbol{A}))\right)\cdots\right) = \boldsymbol{I}$, onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade. Então essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas a $\boldsymbol{I}$ produz $\boldsymbol{A}^{-1}$, isto é $\boldsymbol{\varepsilon_s}\left(\cdots\left(\boldsymbol{\varepsilon_2}(\boldsymbol{\varepsilon_1}(\boldsymbol{I}))\right)\cdots\right) = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Exemplo:

a) Para ilustrar o uso do teorema e da proposição, consideremos a matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Logo, se aplicarmos uma sequência de transformações em A até obtermos uma matriz B na forma escalonada, *pelo teorema*, A é invertível se, e somente se, $B = I_3$, *pela proposição*, se essa mesma sequência de transformações elementares for aplicada a I_3 resultará em A^{-1}. Assim, vamos transformar as matrizes em um bloco:

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Agora vamos reduzir esta matriz 3×6 a uma matriz na forma escalonada.

Solução

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_1]{}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to -L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_3]{}$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Como obtemos uma matriz na forma $[\, I_3 \mid C]$*, temos que* A *é invertível e* $C = A^{-1}$*. Assim,*

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to Matriz\ inversa\ a\ matriz\ \boldsymbol{A}.}$$

b) Consideremos agora a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ao reduzirmos a matriz em blocos $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I_3}]$ a uma matriz na forma escalonada,

Solução

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{2}L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Obtemos a matriz $[B \mid C]$, *onde* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e, portanto, diferente de* I_3. *Logo, a matriz* A *não é invertível por ser equivalente a uma matriz com uma linha nula.*

13. Exercícios Resolvidos

1) Uma matriz A possui 32 elementos, e a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas. Qual é a ordem dessa matriz?

Resolução:

Lembremos, primeiramente, que uma matriz de ordem $m \times n$ *possui* $m \cdot n$ *elementos, logo, se* A *é uma matriz de ordem* $m \times n$ *então,* $m \cdot n = 32.$ *Como a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas, temos* $n = 2m$, *ou seja:*

$$m \cdot n = 32 \Rightarrow m \cdot 2m = 32 \Rightarrow 2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m = 4} \\ m = -4 \ (absurdo) \end{cases}$$

Substituindo $m = 4$ *na igualdade* $m \cdot n = 32$, *teremos:*

$$m \cdot n = 32 \Rightarrow 4 \cdot n = 32 \Rightarrow \boxed{n = 8}$$

Portanto, a ordem da matriz A *será* 4×8.

2) Escrever a matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{1\times 3}$ tal que $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{3i - 2j}$.

Resolução:

A ordem da matriz $\boldsymbol{A}$ *é* $\boldsymbol{1} \times \boldsymbol{3}$*, então:*

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{11}} \quad \boldsymbol{a_{12}} \quad \boldsymbol{a_{13}}]$$

Substituindo o valor de $\boldsymbol{i}$ *e* $\boldsymbol{j}$ *na lei de formação, temos:*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1} \\ \boldsymbol{a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1} \\ \boldsymbol{a_{13} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3}\end{gathered}$$

Portanto, a matriz é $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{-1} \quad \boldsymbol{-3}]$.

3) Escrever a matriz $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})_{3\times 2}$, tal que $\boldsymbol{a_{ij}} = \begin{cases} (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{se\ i \leq j} \\ \boldsymbol{2i + j}, \boldsymbol{se\ i > j} \end{cases}$.

Resolução:

A ordem da matriz $\boldsymbol{B}$ *é* $\boldsymbol{3} \times \boldsymbol{2}$*, então:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} \\ \boldsymbol{b_{31}} & \boldsymbol{b_{32}} \end{bmatrix}$$

Temos duas sentenças que definem a matriz $\boldsymbol{B}$*:*

- ✓ *se* $\boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{b_{11}} = (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{-1}; \qquad \boldsymbol{b_{12}} = (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1}; \qquad \boldsymbol{b_{22}} = (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1}$$

- ✓ *se* $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{b_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5}; \qquad \boldsymbol{b_{31} = 2 \cdot 3 + 1 = 7}; \qquad \boldsymbol{b_{32} = 2 \cdot 3 + 2 = 8}$$

Portanto, a matriz é $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{7} & \boldsymbol{8} \end{bmatrix}$.

4) Determinar os valores de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ que tornam as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ iguais.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2y-3 \\ 6 & x+11 & 0 \\ |z-2| & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

As matrizes $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *serão iguais se, e somente se, os elementos correspondentes forem iguais, logo teremos que:*

- ✓ $x + 11 = 2 \Rightarrow x = 2 - 11 \therefore \boxed{x = -9}$
- ✓ $2y - 3 = -7 \Rightarrow 2y = -7 + 3 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} \therefore \boxed{y = -2}$
- ✓ $|z - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} z - 2 = -1 \Rightarrow z = -1 + 2 \Rightarrow \boxed{z = 1} \\ z - 2 = 1 \Rightarrow z = 1 + 2 \Rightarrow \boxed{z = 3} \end{cases}$

Portanto, para $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ *é necessário que* $\begin{cases} x = -9 \\ y = -2 \\ z = 1 \; ou \; z = 3 \end{cases}$.

5) Calcular $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de modo que as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sejam iguais.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3x+2y & 7 \\ 3 & 5x-y \end{pmatrix} ; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

Resolução:

Para que as matrizes $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *sejam iguais, devemos ter:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \;\; (\times 3) \\ 5x - y = \frac{13}{3} \;\; (\times 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ 30x - 6y = 26 \end{cases}$$

$$39x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{39} \therefore \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Substituindo $\boldsymbol{x}$ *por* $\frac{2}{3}$ *em* $3x + 2y = 0$, *teremos:*

$$3 \cdot \frac{2}{3} + 2y = 0 \Rightarrow 2 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} \therefore \boxed{y = -1}$$

Portanto, para $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ *é necessário que* $x = \frac{2}{3}$ *e* $y = -1$.

6) *Dadas as matrizes* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, *calcule* $[\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})] + (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}$.

Resolução:

Utilizando as propriedades da adição de matrizes, temos:

$$[\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})] + (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \underbrace{=}_{\substack{\text{propriedade comutativa} \\ \text{e associativa}}} [\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A})] + (-\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} \underbrace{=}_{\substack{\text{elemento} \\ \text{oposto}}} \boldsymbol{O_2} + (-\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} \underbrace{=}_{\substack{\text{elemento} \\ \text{neutro}}} -\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$$

Segue que:

$$\boxed{[\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})] + (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

7) Dadas $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, determine as matrizes $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ tal que: $\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$.

Resolução:

Resolvendo o sistema teremos:

$$\begin{cases} 2X + Y = A - 3B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases} \quad (\times 2) \quad \Rightarrow \begin{cases} 4X + 2Y = 2A - 6B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$$

$$X = -5B = (-5) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \therefore \boxed{X = \begin{bmatrix} 10 & -30 \\ 5 & -35 \end{bmatrix}}$$

Substituindo $\boldsymbol{X = -5B}$ *em* $\boldsymbol{2X + Y = A - B}$*, teremos:*

$$2 \cdot (-5B) + Y = A - B \Rightarrow Y = A - B - 2(-5B) \Rightarrow Y = A - B + 10B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = A + 9B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 9 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \cdot (-2) & 9 \cdot 6 \\ 9 \cdot (-1) & 9 \cdot 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 + (-18) & -3 + 54 \\ 0 + (-9) & 5 + 63 \end{bmatrix} \therefore \boxed{Y = \begin{bmatrix} -16 & 51 \\ -9 & 68 \end{bmatrix}}$$

8) Calcule o produto $\boldsymbol{A \cdot B \cdot C}$, sendo dadas:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\boldsymbol{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 3 & 5\cdot 1 + 1\cdot 2 & 5\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A \cdot B}) \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 3 + 5\cdot 1 + 3\cdot 2 & 7\cdot 1 + 5\cdot 0 + 3\cdot(-1) \\ 8\cdot 3 + 7\cdot 1 + 6\cdot 2 & 8\cdot 1 + 7\cdot 0 + 6\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{A \cdot B}) \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 32 & 4 \\ 43 & 2 \end{pmatrix}}$$

9) (UFRN-RN) Um empresário produz goiabada e bananada. A produção desses doces passa por dois processos: a colheita das frutas e a fabricação das compotas. O tempo necessário para a conclusão dos processos é dado, em dias, pela matriz:

$$\begin{array}{cccl} & \text{colheita} & \text{fabricação} & \\ \boldsymbol{M} = & \left[\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \leftarrow \text{goiaba} \\ \leftarrow \text{banana} \end{matrix} \end{array}$$

Esse empresário possui duas fábricas: $\boldsymbol{I}$ e $\boldsymbol{II}$. Os gastos diários, *em milhares de reais,* para a realização de cada um dos processos são dados pela matriz:

$$\begin{array}{cccl} & \text{fábrica I} & \text{fábrica II} & \\ \boldsymbol{N} = & \left[\begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 4 \\ 10 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \leftarrow \text{colheita} \\ \leftarrow \text{fabricação} \end{matrix} \end{array}$$

Considerando essa situação:

a) Calcule o produto $\boldsymbol{M \cdot N}$.

b) Explicite que informação cada elemento da matriz produto $\boldsymbol{M \cdot N}$ fornece.

Resolução:

a) $\boldsymbol{M \cdot N} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 12 + 4\cdot 8 & 5\cdot 4 + 4\cdot 10 \\ 6\cdot 12 + 5\cdot 8 & 6\cdot 4 + 5\cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92 & 60 \\ 112 & 74 \end{bmatrix}$

b) $\begin{array}{ccl} \text{fábrica I} & \text{fábrica II} & \\ \left[\begin{matrix} 92 \\ 112 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 60 \\ 74 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \leftarrow \text{goiabada} \\ \leftarrow \text{bananada} \end{matrix} \end{array}$

$\rightarrow \mathbf{92}\ (custo\ da\ produção\ de\ goiabada\ fábrica\ I)$.
$\rightarrow \mathbf{60}\ (custo\ da\ produção\ de\ goiabada\ fábrica\ II)$.
$\rightarrow \mathbf{112}\ (custo\ da\ produção\ de\ bananada\ fábrica\ I)$.
$\rightarrow \mathbf{74}\ (custo\ da\ produção\ de\ bananada\ fábrica\ II)$.

10) Veja parte da tabela de classificação da série **A** do campeonato brasileiro de futebol:

	Vitórias	Derrotas	Empates
Palmeiras (SP)	12	8	4
Internacional (RS)	13	4	7
São Paulo (SP)	12	7	5
Atlético Mineiro (MG)	11	7	6
Goiás (GO)	11	6	7
Campeonato Brasileiro de 2009 - 24ª rodada			

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos $\mathbf{3}$ pontos para vitorias, $\mathbf{1}$ para empates e $\mathbf{0}$ para derrotas. Utilizando multiplicações de matrizes, determine qual a pontuação de cada um destes times.

Resolução:

Note que, podemos representar as vitórias, empates e derrotas dos times pela matriz $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 13 & 4 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 11 & 7 & 6 \\ 11 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ *e as pontuações atribuídas pela matriz* $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Desta forma encontraremos as pontuações dos times pelo produto* $\boldsymbol{R \cdot P}$, *vejamos:*

$$\boldsymbol{R \cdot P} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 13 & 4 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 11 & 7 & 6 \\ 11 & 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 13 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \\ 12 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ 11 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \\ 11 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7.0 \end{bmatrix} = \begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 44 \\ 43 \\ 43 \\ 40 \\ 39 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Palmeiras (SP)} \\ \leftarrow \text{Internacional (RS)} \\ \leftarrow \text{São Paulo (SP)} \\ \leftarrow \text{Atlético Mineiro (MG)} \\ \leftarrow \text{Goiás (GO)} \end{array} \end{array}$$

11) Determine $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$ para que a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{pmatrix}$ seja simétrica.

Resolução:

A matriz $\boldsymbol{A}$ *ser simétrica significa que* $\boldsymbol{A = A^t}$, *logo teremos:*

$$\boldsymbol{A = A^t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 7 & z \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases}$$

12)Determine se a matriz é invertível e, caso seja, indique a sua inversa:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to -L_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{4}L_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 + 3L_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Logo: $$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to \frac{1}{3}L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \to L_3 - 4L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + 6L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{28}{3} & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -\frac{3}{25}L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{28}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{21}{25} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - \frac{1}{3}L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 & -7 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{28}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{21}{25} \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + 7L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{3}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{28}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{21}{25} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{28}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{21}{25} \end{pmatrix}}$$

Resolução:

c)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -19 & -32 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_1]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -19 & -32 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -13 & -19 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -19 & -32 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -13 & -19 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 8L_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -13 & -19 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 6L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 1 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to \frac{1}{3} L_4]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 + 2L_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - 5L_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 8L_4]{}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 8L_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{40}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{5} L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{8}{3} & \frac{11}{15} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{8}{3} & \frac{11}{15} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - 3L_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{15} & \frac{-11}{3} & \frac{-8}{15} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{8}{3} & \frac{11}{15} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{15} & \frac{-11}{3} & \frac{-8}{15} & \frac{7}{3} \\ \frac{-8}{15} & \frac{8}{3} & \frac{11}{15} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

- ***DETERMINANTES***

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos *Nove capítulos sobre a arte da matemática*, um texto que data provavelmente do século III a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês *Seki Kowa*, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. *Kowa*, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de *Leibniz*, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, *Leibniz* estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem $\mathbf{3}$ formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como $\boldsymbol{a_{12}}$, *Leibniz* indicava por $\mathbf{1_2}$.

A conhecida regra de *Cramer* para resolver sistemas de $\boldsymbol{n}$ equações com $\boldsymbol{n}$ incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês *Colin Maclaurin (1698-1746),* datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu *Treatise of algebra*. Mas o nome do suíço *Gabriel Cramer* (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. *Cramer* também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à Análise das Curvas Planas (1750), em conexão com o problema de encontrar os coeficientes da cônica geral $\boldsymbol{A + By + Cx + Dy^2 + Exy + Fx^2 = 0}$.

O francês *Étienne Bézout (1730-1783),* autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, *Alexandre Vandermonde (1735-1796),* em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares — embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio *Laplace* num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo ***determinante***, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de *Cauchy* sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, *Cauchy* sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com *Arthur Cayley*) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes — meses antes *J. F. M. Binet (1786-1856)* dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de *Cauchy* era superior.

Além de *Cauchy*, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão *Carl G. J. Jacobi (1804-1851)*, cognominado às vezes "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, *Jacobi* era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

1. Determinantes de matrizes de ordem n $(n \leq 3)$:

Definição:

Consideremos o conjunto das *matrizes quadradas de ordem* $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{3})$ de elementos reais. Seja $\boldsymbol{M}$ uma matriz desse conjunto, chamaremos de ***determinante da matriz*** $\boldsymbol{M}$ (notação: $\boldsymbol{det\,M}$) o número que podemos obter operando com os elementos de $\boldsymbol{M}$ da seguinte forma:

i) Se $\boldsymbol{M}$ é de ordem $\boldsymbol{n = 1}$, então $\boldsymbol{det\,M}$ é o único elemento de $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = |a_{11}| = a_{11}}$$

ii) Se $\boldsymbol{M}$ é de ordem $\boldsymbol{n = 2}$**,** então $\boldsymbol{det\,M}$ é o produto dos elementos da diagonal principal subtraído do produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\boldsymbol{M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

iii) Se $\boldsymbol{M}$ é de ordem $\boldsymbol{n = 3}$, isto é, $\boldsymbol{M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}$, definimos:

$$\boldsymbol{det\,M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{det\,M = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{det\,M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -}$$
$$\boldsymbol{- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}}$$

1.1. Regra de Sarrus.

O matemático ***Pierre Frédéric Sarrus*** *(1789-1861)* foi responsável pela regra prática de resolução de *determinantes de ordem* **3**. Regras, teoremas e postulados sempre foram batizados pelo nome dos seus inventores e com essa regra não seria diferente. Ficou conhecida, portanto, como Regra de Sarrus.

Essa regra diz que para encontrar o valor numérico de um determinante de ordem **3**, basta repetir as duas primeiras colunas à direita do determinante e multiplicar os elementos do determinante da seguinte forma:

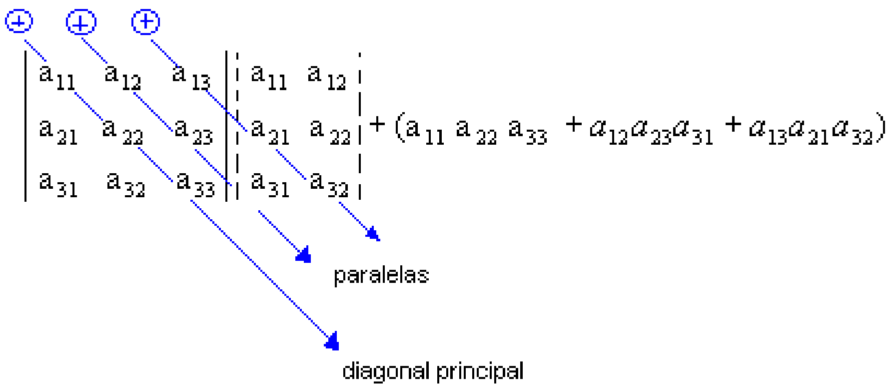
Acompanhe como devemos aplicar a regra para:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

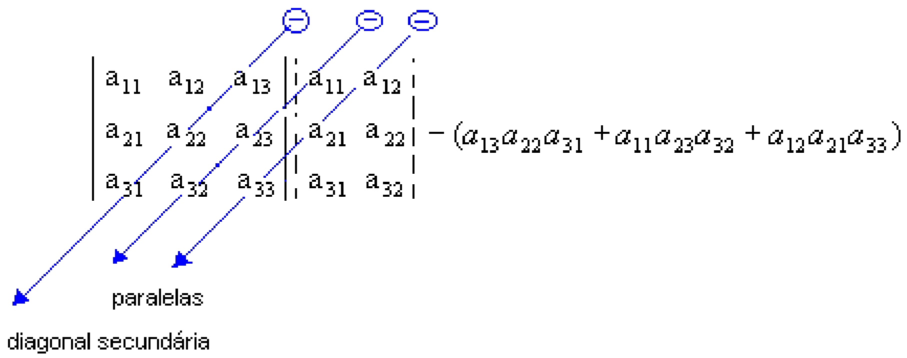
1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

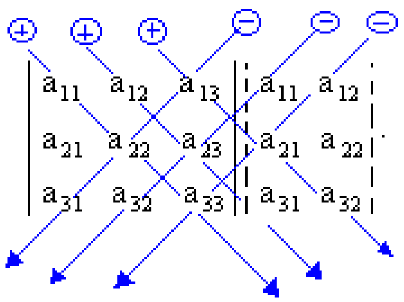
2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):



3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):



Assim:



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

2. Propriedades dos Determinantes.

O estudo das propriedades dos determinantes nos permite mais agilidade em alguns cálculos de determinantes.

I. **Fila de Zeros** – se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$ forem iguais à zero, seu determinante será **nulo**, isto é, $\boldsymbol{det\ M = 0}$.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{0 \cdot 3 - (-7) \cdot 0 = 0}$

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{4 \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 11 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 0 - 4 \cdot 11 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0}$

II. **Filas Iguais** – se os elementos correspondentes de duas filas paralelas (linhas ou colunas paralelas) de uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$ forem iguais, seu determinante será **nulo**, isto é, $\boldsymbol{det\ M = 0}$.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{(-1) \cdot 5 - (-1) \cdot 5 = (-5) - (-5) = -5 + 5 = 0}$

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3 \cdot 5 \cdot 1 + 6 \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 7 \cdot 6 - 6 \cdot 2 \cdot 1 =}$

$$\mathbf{= 15 + 126 + 12 - 15 - 126 - 12 = 0}$$

III. **Filas Proporcionais** – se uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$ possui duas filas paralelas (linhas ou colunas paralelas) proporcionais, seu determinante será **nulo**, isto é, $\boldsymbol{det\,M = 0}$.

Exemplo: Sejam $\boldsymbol{a, b, c, x, y, z, m} \in \mathbb{R}$,

a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{2b} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a \cdot (2b) - b \cdot (2a) = 2ab - 2ab = 0}$

b) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{mx} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{my} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{mz} \end{vmatrix} = \boldsymbol{xbmz + amyz + mxyc - mxbz - xmyc - aymz = 0}$

IV. **Multiplicação de uma fila por uma constante** – se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$ forem multiplicados por um mesmo número real $\boldsymbol{k}$, então seu determinante ficará também multiplicado por $\boldsymbol{k}$.

Exemplo:

a) Veja que:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{4} \end{vmatrix} = \boldsymbol{1 \cdot 7 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 4 =}$$

$$\boldsymbol{= 28 + 0 + 0 - 70 - 0 - 0 = -42}$$

Calculemos agora:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(-\frac{1}{6}) \cdot 2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{(-\frac{1}{6}) \cdot 3} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(-\frac{1}{6}) \cdot 4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-\frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{1 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 \cdot 0 -}$$

$$\boldsymbol{-\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 7 \cdot 5 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{3} + 0 + 0 + \frac{35}{3} - 0 - 0 =}$$

$$\boldsymbol{= -\frac{14}{3} + \frac{35}{3} = \frac{21}{3} = 7 = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-42) = (-\frac{1}{6}) \cdot} \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{4} \end{vmatrix}$$

V. **Multiplicação da matriz por uma constante** – se uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$ de ordem $\boldsymbol{n}$ é multiplicada por um número real $\boldsymbol{k}$, o seu determinante fica multiplicado por $\boldsymbol{k^n}$, isto é:

$$\boxed{\det(k \cdot M_n) = k^n \cdot \det M_n}$$

Exemplo:

a) Veja que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 1 \cdot 4 =$$

$$= 28 + 90 + 0 - 70 - 0 - 24 = 118 - 94 = 24$$

Calculemos agora:

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 2 & 14 & 6 \\ 10 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 \cdot 8 + 12 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot 14 \cdot 10 -$$

$$-2 \cdot 6 \cdot 0 - 12 \cdot 2 \cdot 8 = 224 + 720 + 0 - 560 - 0 - 192 = 944 - 752 =$$

$$= 192 = 8 \cdot 24 = 2^3 \cdot 24 = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

VI. **Determinante da Transposta** – o determinante de uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$ é igual ao determinante de sua transposta, isto é:

$$\boxed{det(A) = det(A^t)}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A = 4 \cdot 7 - 10 \cdot (-3) = 28 + 30 = 58$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow det\ A^t = 4 \cdot 7 - (-3) \cdot 10 = 28 + 30 = 58$$

VII. **Troca de filas paralelas** – se trocarmos de posição duas filas paralelas (linhas ou colunas paralelas) de uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}$, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz original.

Exemplo:

a) Veja que:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{4 \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 -}$$

$$\mathbf{-(-2) \cdot 1 \cdot 1 = -4 - 12 + 0 + 4 - 0 + 2 = -10}$$

Troquemos agora a ***coluna 1*** $(\boldsymbol{C_1})$ com a ***coluna 3*** $(\boldsymbol{C_3})$**:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{C_1} \leftrightarrow \boldsymbol{C_2}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Agora façamos:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{2 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 -}$$

$$\mathbf{-(-2) \cdot 3 \cdot 2 = -4 - 2 + 0 + 4 + 12 = 10}$$

VIII. **Determinante de uma Matriz Triangular** – o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos de sua *diagonal principal*.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{12} \end{vmatrix} = \mathbf{(-2) \cdot 12 - 0 \cdot 1 =} \underbrace{\mathbf{-24}}_{\mathbf{(-2)\cdot 12}}$

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{3 \cdot (-10) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-10) \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 0 -}$

$$\mathbf{-1 \cdot 0 \cdot 5 = -150 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 =} \underbrace{\mathbf{-150}}_{\mathbf{3\cdot(-10)\cdot 5}}$$

IX. **Teorema de Binet**

Sendo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes quadradas de mesma ordem e $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ a matriz produto, então:

$$\boxed{\boldsymbol{det(A\cdot B) = (\mathbf{det}\ A)\cdot(\mathbf{det}\ B)}}$$

Exemplo:

Sejam as matrizes $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, teremos que:

$$\boldsymbol{A\cdot B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 2\cdot 2 + 3\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + (-5)\cdot 3 & 0\cdot 2 + (-5)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$$

Vejamos que,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = [2\cdot(-5) - 3\cdot 0]\cdot[1\cdot 4 - 2\cdot 3] = (-10)\cdot(-2) = 20$$

e $$\begin{vmatrix} 11 & 16 \\ -15 & -20 \end{vmatrix} = 11\cdot(-20) - 16\cdot(-15) = -220 + 240 = 20$$

X. **Determinante da Inversa** – seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada invertível e $\boldsymbol{A^{-1}}$ sua inversa. Então,

$$\boxed{\boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{det\ \ A}}}$$

Exemplo: Observe que:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 4\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 2\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2 & 0\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ (-1)\cdot 4 + 2\cdot 2 & (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Logo, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e invertível e $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, então teremos:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{det\ A} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 0 - (-1)\cdot 2 = 2 \\ \boldsymbol{det\ A^{-1}} &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \boldsymbol{det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}}$$

Observação: Vejamos que essa propriedade sugere um fato importante: $\boldsymbol{A}$ é invertível se, e somente se, $\boldsymbol{det\ A \neq 0}$. De fato, se ∃ $\boldsymbol{A^{-1}}$, então:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I_n \implies \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) \implies \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \implies}$$

$$\boldsymbol{\implies det\ A \neq 0 \quad e \quad det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}}$$

XI. **Teorema de Jacobi**

O determinante de uma matriz quadrada não se altera quando se adicionam aos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer, os elementos correspondentes de outra fila (linha ou coluna) paralela previamente multiplicada por uma constante.

Exemplo:

a) Veja que:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 1 \cdot 4 =}$$

$$\boldsymbol{= 28 + 90 + 0 - 70 - 0 - 24 = 118 - 94 = 24}$$

Vamos somar à ***linha 2*** $(\boldsymbol{L_2})$ o produto da ***linha 3*** $(\boldsymbol{L_3})$ por $(-\boldsymbol{3})$, teremos:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 6 + 2 \cdot (-3) & 2 \\ 1 & 7 + 3 \cdot (-3) & 3 \\ 5 & 0 + 4 \cdot (-3) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot (-12) - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot (-12) -}$$

$$\boldsymbol{-0 \cdot 1 \cdot 4 = -8 - 0 - 24 + 20 + 36 - 0 = -32 + 56 = 24}$$

3. Determinantes de matrizes de ordem n qualquer:

Vimos até aqui algumas regras que permitem o cálculo de determinantes de matrizes de ordem $1, 2$ ou 3. Estudaremos agora como calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$. Para isso consideraremos:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.1. Cofator de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Chama-se de **cofator** de um elemento a_{ij} de A o número real $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é a determinante obtido da matriz A quando se elimina a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij}.

Exemplo:

a) Seja $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} \\ 3 & \boxed{-1} & 2 \\ 4 & \boxed{-2} & 5 \end{pmatrix}$. O termo $a_{12} = 2$ e seu cofator será:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-1) \cdot (15 - 8) \implies \boxed{A_{12} = -7}$$

b) Seja $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & \boxed{2} \\ -2 & 1 & 3 & \boxed{6} \\ \boxed{5} & \boxed{7} & \boxed{9} & \boxed{4} \\ -4 & 8 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$. O termo $b_{34} = 4$ e seu cofator será:

$$B_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (0 + 0 - 16 + 4 - 96 - 0) = (-1) \cdot (-108) \implies$$

$$\implies \boxed{B_{34} = 108}$$

3.2. Teorema de Laplace:

O determinante de uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Isto é,

i) Se escolhermos a coluna $\boldsymbol{j}$ da matriz $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \boxed{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então,

$$\boxed{\det \boldsymbol{M} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}}$$

ii) Se escolhermos a linha $\boldsymbol{i}$ da matriz $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então,

$$\boxed{\det \boldsymbol{M} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}}$$

Para calcularmos o determinante:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Se escolhermos a $\mathbf{3}^{\boldsymbol{a}}$ linha para seu cálculo, obteremos:

$$\det \boldsymbol{M} = \mathbf{3}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{31}} + \underbrace{\mathbf{0}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{32}}}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{0}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{33}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{2}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{34}} = \mathbf{3}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{31}} + \mathbf{2}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{34}}$$

Então só teremos que calcular dois cofatores, em vez de quatro.

Concluímos então que, quanto mais zeros houver em uma fila, mais fácil será o cálculo do determinante se usarmos essa fila. Em particular, se a matriz tiver uma fila de zeros, seu determinante será nulo, ou seja, igual à zero.

Exemplo:

a) Calcule o determinante de matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \boxed{\mathbf{1}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \boxed{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{5}} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{0}} \end{pmatrix}$.

Convenientemente, vamos optar pela $\boldsymbol{coluna}\ \mathbf{4}$, *pois ela possui dois elementos zero.*

$$\boldsymbol{det\ A} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{14}}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{14}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{24}}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{24}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{34}}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{34}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{44}}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{44}}$$

$$\boldsymbol{det\ A} = \mathbf{1}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{14}} + \underbrace{\mathbf{0}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{24}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{5}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{34}} + \underbrace{\mathbf{0}\cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{44}}}_{\mathbf{0}}$$

$$\boldsymbol{det\ A} = \mathbf{1}\cdot(\mathbf{-1})^{\mathbf{5}}\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} + \mathbf{5}\cdot(\mathbf{-1})^{\mathbf{7}}\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{det\ A} = (\mathbf{-1})\cdot(\mathbf{4}+\mathbf{2}+\mathbf{0}+\mathbf{6}-\mathbf{4}-\mathbf{0}) - \mathbf{5}\cdot(\mathbf{0}-\mathbf{6}+\mathbf{12}-\mathbf{6}-\mathbf{0}-\mathbf{4})$$

$$\boldsymbol{det\ A} = (\mathbf{-1})\cdot \mathbf{8} - \mathbf{5}\cdot(\mathbf{-4}) = \mathbf{-8}+\mathbf{20}$$

$$\boxed{\boldsymbol{det\ A} = \mathbf{12}}$$

b) Calcular o determinante de matriz $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 5 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{5} \\ -3 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{det\, B = b_{31} \cdot B_{31} + b_{32} \cdot B_{32} + b_{33} \cdot B_{33} + b_{34} \cdot B_{34}}$$

$$\boldsymbol{det\, B = \underbrace{0 \cdot B_{31}}_{0} + 1 \cdot B_{32} + 2 \cdot B_{33} + 5 \cdot B_{34}}$$

$$\boldsymbol{det\, B = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \underbrace{2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 5 \\ -3 & 9 & 3 \end{vmatrix}}_{B_{33}=0,\ pois\ C_2=(-3)\cdot C_1} +}$$

$$\boldsymbol{+\underbrace{5 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 1 \\ -3 & 9 & 0 \end{vmatrix}}_{B_{34}=0,\ pois\ C_2=(-3)\cdot C_1}}$$

$$\boldsymbol{det\, B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 60 + 0 - 0 - 0 - 24}$$

$$\boxed{\boldsymbol{det\, B = -81}}$$

c) Aplicando o teorema de Laplace, calcular o determinante de $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 \\ \boxed{2} & 4 & 1 \\ \boxed{6} & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Vemos que a matriz C não possui nenhum elemento igual à zero, então escolheremos a coluna $\boldsymbol{1}$.

$$\boldsymbol{det\, C = c_{11} \cdot C_{11} + c_{21} \cdot C_{21} + c_{31} \cdot C_{31}}$$

$$\boldsymbol{det\, C = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{det\, C = 1 \cdot (8 - 5) - 2 \cdot (6 - 25) + 6 \cdot (3 - 20)}$$

$$\boldsymbol{det\, C = 1 \cdot (3) - 2 \cdot (-19) + 6 \cdot (-17) = 3 + 38 - 102}$$

$$\boxed{\boldsymbol{det\, C = -61}}$$

3.3. Regra de Chió

A *regra de Chió* é uma técnica que facilita muito o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2})$. Dada uma matriz $\boldsymbol{A}$ de ordem $\boldsymbol{n}$, ao aplicarmos essa regra, obtemos outro determinante de ordem $\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$ e com valor igual ao determinante de $\boldsymbol{A}$.

Essa regra pode ser utilizada em uma matriz $\boldsymbol{A}$ em que $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$, por meio dos seguintes procedimentos:

- ✓ Suprimimos a $\mathbf{1}$ª linha e a $\mathbf{1}$ª coluna de $\boldsymbol{A}$.
- ✓ De cada elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ restantes subtraímos o produto dos elementos suprimidos da mesma linha e coluna de $\boldsymbol{a_{ij}}$, ou seja, $\boldsymbol{a_{1j}} \cdot \boldsymbol{a_{i1}}$.
- ✓ A matriz $\boldsymbol{B}$ obtida, de ordem $\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$, tem determinante igual ao de $\boldsymbol{A}$, ou seja, $\boldsymbol{det\ A} = \boldsymbol{det\ B}$.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & 5 & 4 & 5 \\ \boxed{1} & 7 & 1 & 3 \\ \boxed{4} & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-0\cdot 2 & 4-3\cdot 2 & 5-2\cdot 2 \\ 7-0\cdot 1 & 1-3\cdot 1 & 3-2\cdot 1 \\ -3-0\cdot 4 & 2-3\cdot 4 & 0-2\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -3 & -10 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{5}\cdot(-\mathbf{2})\cdot(-\mathbf{8}) + (-\mathbf{2})\cdot\mathbf{1}\cdot(-\mathbf{3}) + \mathbf{1}\cdot\mathbf{7}\cdot(-\mathbf{10}) - \mathbf{1}\cdot(-\mathbf{2})\cdot(-\mathbf{3}) -$$

$$-\mathbf{5}\cdot\mathbf{1}\cdot(-\mathbf{10}) - (-\mathbf{2})\cdot\mathbf{7}\cdot(-\mathbf{8}) = \mathbf{80} + \mathbf{6} - \mathbf{70} - \mathbf{6} + \mathbf{50} - \mathbf{112} = -\mathbf{52}$$

Observação:

A regra de Chió somente pode ser aplicada à matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ em que $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$. Contudo, nos casos em que $\boldsymbol{a_{11}} \neq \mathbf{1}$, pode ser utilizado inicialmente o teorema de Jacobi (ou a propriedade de troca de filas, quando há outro elemento da matriz igual a $\mathbf{1}$) para obter uma matriz $\boldsymbol{B}$, de mesma ordem e mesmo valor do determinante de $\boldsymbol{A}$, com $\boldsymbol{b_{11}} = \mathbf{1}$ e, na sequência, aplicar a regra de Chió.

Exemplo:

a) $\boldsymbol{det\ M} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$, observe que $\boldsymbol{a_{11} \neq 1}$, logo não podemos aplicar a regra de Chió diretamente, mas podemos através de trocas de filas paralelas, transformar a matriz $\boldsymbol{M}$ em outra matriz que tenha $\boldsymbol{a_{11} = 1}$, vejamos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 5 & 3 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 - 3 \cdot 3 & 2 - 5 \cdot 3 & 2 - 0 \cdot 3 \\ 2 - 3 \cdot 2 & 2 - 5 \cdot 2 & 3 - 0 \cdot 2 \\ 0 - 3 \cdot 7 & 4 - 5 \cdot 7 & 2 - 0 \cdot 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -13 & 2 \\ -4 & -8 & 3 \\ -21 & -31 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot (-8) \cdot 2 + (-13) \cdot 3 \cdot (-21) + 2 \cdot (-4) \cdot (-31) - 2 \cdot (-8) \cdot (-21) -$$

$$-(-5) \cdot 3 \cdot (-31) - (-13) \cdot (-4) \cdot 2 = 80 + 819 + 248 - 336 - 465 - 104 = 242$$

b) $\boldsymbol{\det N} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$, observe que $\boldsymbol{a_{11} \neq 1}$, mas podemos aplicar o teorema de Jacobi e obter uma nova matriz que tenha um elemento igual a $\boldsymbol{1}$, vejamos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \underset{C_1 \rightarrow C_1 - 2 \cdot C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - 2 \cdot 3 & 2 - 4 \cdot 3 & 4 - 3 \cdot 3 \\ 4 - 2 \cdot 0 & 5 - 4 \cdot 0 & 2 - 3 \cdot 0 \\ 2 - 2 \cdot 3 & 0 - 4 \cdot 3 & 7 - 3 \cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -10 & -5 \\ 4 & 5 & 2 \\ -4 & -12 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 \cdot (-2) + (-10) \cdot 2 \cdot (-4) + (-5) \cdot 4 \cdot (-12) -$$

$$-(-5) \cdot 5 \cdot (-4) - (-3) \cdot 2 \cdot (-12) - (-10) \cdot 4 \cdot (-2) =$$

$$= 30 + 80 + 240 - 100 - 72 - 80 = 98$$

Analisando as técnicas que vimos:

Observando as características dessas técnicas (Sarrus, Laplace e Chió), podemos estabelecer um “tipo de esquema” para determinar qual seria a melhor escolha para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, com $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$, vejamos:

I. A regra de Sarrus é usada para calcular determinantes de uma matriz $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ e na maioria das vezes é a melhor escolha para a resolução do determinante, mas mesmo que não seja a melhor escolha, seus cálculos não são complexos, ou seja, não haverá grandes dificuldades para a resolução.

II. O teorema de Laplace calcula o determinante a partir da escolha de uma fila (linha ou coluna) qualquer de uma matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$. Pela definição fica claro que quanto mais elementos nulos houver na fila escolhida, mais simples e curtos serão os cálculos, logo podemos concluir que se uma matriz de ordem $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ tiver uma fila repleta de termos nulos, então o teorema de Laplace será a melhor escolha para o cálculo do determinante. Lembrando que se a fila for totalmente nula o determinante da matriz será zero.

III. A regra de Chió calcula o determinante de uma matriz de ordem $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ baixando a ordem da matriz para $\boldsymbol{n} - \mathbf{1} \times \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ e podendo ser usada o tanto de vezes que for necessário, logo ideal para ser usada em matrizes de ordem elevada.

Fizemos aqui uma pequena comparação de aplicabilidade entre as três regras abordadas neste trabalho, para o cálculo de determinantes. Deixemos claro ao leitor que há outras técnicas de cálculos de determinantes, ficará a cargo do leitor, pesquisar outras formas de realização desses cálculos.

4. Exercícios Resolvidos

1) Sejam as matrizes $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. Determine $\boldsymbol{x}$, de modo que $\boldsymbol{det\ A} = \boldsymbol{det\ B}$.

Resolução:

Calculando os determinantes das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, temos:

$$\boldsymbol{det\ A} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{3} - \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{3} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{det\ B} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = \mathbf{2} + \mathbf{0} - \mathbf{2} - \mathbf{3} + \boldsymbol{x} - \mathbf{0} = \boldsymbol{x} - \mathbf{3}$$

Segue que: $\boldsymbol{det\ A} = \boldsymbol{det\ B} \Rightarrow \mathbf{3} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \mathbf{3} \Rightarrow -\mathbf{3}\boldsymbol{x} = -\mathbf{6} \therefore \boxed{\boldsymbol{x} = \mathbf{2}}$

2) Mostre que são válidas as seguintes propriedades para um matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $\mathbf{2}$:

a) $\boldsymbol{det\ A} = \boldsymbol{det\ A^t}$

b) $\boldsymbol{det(k \cdot A)} = \boldsymbol{k^2 \cdot det\ A}\, , com\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

Resolução:

Seja a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$, *logo:* $\boldsymbol{det\ A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a \cdot d - b \cdot c}$.

a) Temos que:

$$\boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{det\ A^t} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \underbrace{\boldsymbol{a \cdot d - b \cdot c}}_{\boldsymbol{det\ A}} \therefore \boxed{\boldsymbol{det\ A} = \boldsymbol{det\ A^t}}$$

b) Temos que:

$$\boldsymbol{k \cdot A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k \cdot a} & \boldsymbol{k \cdot b} \\ \boldsymbol{k \cdot c} & \boldsymbol{k \cdot d} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{det\ (k \cdot A)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{k \cdot a} & \boldsymbol{k \cdot b} \\ \boldsymbol{k \cdot c} & \boldsymbol{k \cdot d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{k \cdot a \cdot k \cdot d - k \cdot b \cdot k \cdot c} =$$

$$= \boldsymbol{k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2}\, \underbrace{\boldsymbol{(a \cdot d - b \cdot c)}}_{\boldsymbol{det\ A}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{det\ (k \cdot A) = k^2 \cdot det\ A}}$$

3) Determine o valor de x para que seja verdadeira a igualdade:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-x} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-x} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ x & -1 \end{matrix} = \mathbf{-8 - x + 3x + 2x^2 + 2 - 6 = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{2x^2 + 2x - 12 = 0} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}}{\mathbf{2 \cdot 1}} = \frac{\mathbf{-1 \pm 5}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\mathbf{x = 2}} \\ ou \\ \boxed{\mathbf{x = -3}} \end{cases}$$

4) Das seis matrizes a seguintes, cinco têm o determinante igual à zero. Determine quais são elas, usando as propriedades dos determinantes. Justifique:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-4} & \mathbf{10} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$; e) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{9} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$; d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$; f) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

Resolução:

a) $\mathbf{det\,A = 0}$, *pois a* $\mathbf{1^a}$ *e* $\mathbf{3^a}$ *colunas são proporcionais.* $(\mathbf{C_3 = 2 \cdot C_1})$

b) $\mathbf{det\,B = 0}$, *pois a* $\mathbf{3^a}$ *e* $\mathbf{4^a}$ *linhas são iguais.* $(\mathbf{L_3 = L_4})$

c) $\mathbf{det\,C = 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 480}$, *pois a matriz é triangular e seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.*

d) $\mathbf{det\,D = 0}$, *pois a* $\mathbf{2^a}$ *coluna tem todos os elementos iguais a zero.*

e) $\mathbf{det\,E = 0}$, *pois a matriz é triangular é um dos elementos da diagonal principal é igual à zero.*

f) $\mathbf{det\,F = 0}$, *pois a* $\mathbf{1^a}$ *e* $\mathbf{3^a}$ *linhas são proporcionais.* $(\mathbf{L_1 = (-1) \cdot L_3})$

5) Mostre que, se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz invertível de ordem $\boldsymbol{n}$, com $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}$, então $\boldsymbol{detA^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{det\,A}}$.

Resolução:

Da definição de matriz inversa temos que, $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I_n}$*. Logo:*

$$\boldsymbol{det\,(A \cdot A^{-1}) = \underbrace{det\,(I_n)}_{=1} \overset{\overbrace{\text{Teorema de Binet}}}{\Longrightarrow} detA \cdot detA^{-1} = 1 \Rightarrow detA^{-1} = \frac{1}{det\,A}}$$

6) Dada a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{3} \end{bmatrix}$, calcule $\boldsymbol{det(A^{-1})}$.

Resolução:

Para calcular $\boldsymbol{det(A^{-1})}$*, primeiro calculamos* $\boldsymbol{detA}$*, pois* $\boldsymbol{detA^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{det\,A}}$*.*

Usaremos o teorema de Laplace, escolheremos a **3ª** *coluna para os cálculos, pois ela possui dois elementos iguais à zero, logo:*

$$\boldsymbol{detA = \underbrace{a_{13} \cdot A_{13}}_{\substack{=0\,, \\ pois\; a_{13}=0}} + a_{23} \cdot A_{23} + \underbrace{a_{33} \cdot A_{33}}_{\substack{=0\,, \\ pois\; a_{33}=0}} + a_{43} \cdot A_{43}}$$

$$\boldsymbol{detA = 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{detA = (-3) \cdot (6 - 3 - 12 - 3 + 24 + 3) + (-6 - 5 + 0 + 3 - 10 - 0)}$$

$$\boldsymbol{detA = (-3) \cdot (15) + (-18) = -45 - 18 = -63}$$

Portanto, temos que:

$$\boxed{\boldsymbol{detA^{-1} = -\frac{1}{63}}}$$

7) Determine os valores reais de x que justifiquem a igualdade:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 6 & x \\ x & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolução:

Vemos que a $1^{\underline{a}}$ *linha possui três elementos iguais à zero, logo a melhor opção de escolha para resolver esse determinante é o teorema de Laplace.*

$$\det A = \underbrace{a_{11} \cdot A_{11}}_{\substack{=0\,, \\ pois\ a_{11}=0}} + a_{12} \cdot A_{12} + \underbrace{a_{13} \cdot A_{13}}_{\substack{=0\,, \\ pois\ a_{13}=0}} + \underbrace{a_{14} \cdot A_{14}}_{\substack{=0\,, \\ pois\ a_{14}=0}}$$

$$\det A = 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x^2 & 6 & x \\ x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (3x^2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 6x)$$

$$\det A = -12x^2 + 24x = 12x(-x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ ou \\ \boxed{x = 2} \end{cases}$$

8) Utilizando a regra de Chió, calcule:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\det B = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 10 & 3 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Resolução:

a) $$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} & 0 \cdot \frac{1}{2} & 4 \cdot \frac{1}{2} & 8 \cdot \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ \boxed{-1} & 3 & -2 & 5 \\ \boxed{3} & 0 & 6 & 4 \\ \boxed{-2} & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \begin{vmatrix} 3 - 0 \cdot (-1) & -2 - 2 \cdot (-1) & 5 - 4 \cdot (-1) \\ 0 - 0 \cdot 3 & 6 - 2 \cdot 3 & 4 - 4 \cdot 3 \\ 5 - 0 \cdot (-2) & -1 - 2 \cdot (-2) & 6 - 4 \cdot (-2) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -8 \\ 5 & 3 & 14 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = 2 \cdot (0 + 0 + 0 - 0 + 72 - 0) \therefore \boxed{\det A = 144}$$

Resolução:

b) A matriz $\boldsymbol{B}$ é de ordem $\mathbf{5}$, logo será necessário aplicar a regra de Chió duas vezes para baixar sua ordem até $\mathbf{3}$. Primeiramente, trocaremos a linha $\mathbf{1}$ com a linha $\mathbf{5}$, pois dessa forma faremos $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 10 & 3 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_5}{=} - \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{5} & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ \boxed{5} & -2 & 1 & 4 & 7 \\ \boxed{0} & 2 & -2 & -3 & 1 \\ \boxed{10} & 3 & -3 & -4 & -1 \\ \boxed{4} & 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 - 5 \cdot 5 & 1 - 5 \cdot 5 & 4 - 2 \cdot 5 & 7 - (-1) \cdot 5 \\ 2 - 5 \cdot 0 & -2 - 5 \cdot 0 & -3 - 2 \cdot 0 & 1 - (-1) \cdot 0 \\ 3 - 5 \cdot 10 & -3 - 5 \cdot 10 & -4 - 2 \cdot 10 & -1 - (-1) \cdot 10 \\ 0 - 5 \cdot 4 & 2 - 5 \cdot 4 & 3 - 2 \cdot 4 & -1 - (-1) \cdot 4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -27 & -24 & -6 & 12 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ -47 & -53 & -24 & 9 \\ -20 & -18 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Agora trocaremos a linha $\mathbf{1}$ com a linha $\mathbf{2}$, depois trocaremos na matriz obtida a coluna $\mathbf{1}$ com a coluna $\mathbf{4}$, desta forma faremos $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$.

$$\det B = - \begin{vmatrix} -27 & -24 & -6 & 12 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ -47 & -53 & -24 & 9 \\ -20 & -18 & -5 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ -27 & -24 & -6 & 12 \\ -47 & -53 & -24 & 9 \\ -20 & -18 & -5 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_4}{=}$$

$$\underset{C_1 \leftrightarrow C_4}{=} - \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{-3} & \boxed{2} \\ \boxed{12} & -24 & -6 & -27 \\ \boxed{9} & -53 & -24 & -47 \\ \boxed{3} & -18 & -5 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -24 - (-2) \cdot 12 & -6 - (-3) \cdot 12 & -27 - 2 \cdot 12 \\ -53 - (-2) \cdot 9 & -24 - (-3) \cdot 9 & -47 - 2 \cdot 9 \\ -18 - (-2) \cdot 3 & -5 - (-3) \cdot 3 & -20 - 2 \cdot 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 30 & -51 \\ -35 & 3 & -65 \\ -12 & 4 & -26 \end{vmatrix} =$$

$$= -(0 + 23.400 + 7.140 - 1.836 - 0 - 27.300) \therefore \boxed{\det B = -1.404}$$

- **SISTEMAS LINEARES**

Por volta do século IX e $VIII\ a.C.$ a matemática já dava seus primeiros passos na Babilônia, aonde os egípcios tinham uma álgebra e uma geometria, mas utilizavam apenas para suprir as necessidades do cotidiano. Apesar de todo material que tinham os babilônios e egípcios, só podemos encarar a matemática como ciência, no sentido moderno da palavra, a partir dos séculos VI e $V\ a.C$ na Grécia.

O sistema linear só veio a surgir no século $II\ a.C.$ e teve reconhecimento nas duas partes do mundo (oriente e ocidente), sendo que o oriente teve mais impacto no que se referem os estudos mais aprofundados. No oriente médio os chineses representavam o sistema linear por meio de bambus em tabuleiros, pelos quais começaram a perceber um método que eliminava incógnitas por meio de operações elementares.

Só em 1693 que o uso do determinante veio a ser trabalhado por Leibniz, ligado a sistema linear. Sendo que Leibniz foi um pouco mais ousado estabelecendo a condição de se trabalhar com um sistema envolvendo três equações e duas incógnitas em termos do determinante de ordem três formado pelos coeficientes e pelos termos independentes.

Para desenvolver sua regra (resolver sistemas de n equações e n incógnitas), *Cramer* baseou-se na ideia do escocês *Colin Maclauri*, mas não foi por acaso que seu nome veio à tona, pois também conseguiu chegar à regra independentemente, contribuindo assim para a sua introdução sobre analise das curvas planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral: $a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 = 0$.

Podemos dizer que como em qualquer outro assunto, o sistema linear sofre mudanças a cada dia, as quais contribuem gradativamente para o sucesso da matemática, seja ele na antiguidade ou nos dias atuais, pois independentemente do lugar ou momento em que estejamos a matemática estará presente principalmente com sistema linear, basta observar com atenção e com um olhar matemático.

1. Equações Lineares.

Acompanhe a situação a seguir.

Luiza foi ao caixa eletrônico sacar $\boldsymbol{R\$\ 100,00}$ de sua conta. Se no caixa havia apenas notas de $\boldsymbol{R\$\ 10,00, R\$\ 20,00\ e\ R\$\ 50,00}$, de quantas maneiras ela pode ter efetuado o saque?

Esse é o tipo de problema que pode ser expresso por meio de uma equação linear. Chamando de $\boldsymbol{x}$ o número de cédulas de $\boldsymbol{R\$\ 10,00}$, $\boldsymbol{y}$ o número de cédulas de $\boldsymbol{R\$\ 20,00}$ e $\boldsymbol{z}$ o número de cédulas de $\boldsymbol{R\$\ 50,00}$, podemos associar a equação $\boldsymbol{10x + 20y + 50z = 100}$.

A equação $\boldsymbol{10x + 20y + 50z = 100}$ é chamada de equação linear.

Definição:

Equação linear é toda equação que pode ser escrita na forma:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = \mathbf{b}}$$

Na qual:

- $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n}$ são as incógnitas;
- $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n}$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas;
- $\mathbf{b}$ é o termo independente.(quando o termo independente é nulo, a equação linear é dita *homogênea)*.

Exemplo:

a) $\boldsymbol{3x + 2y = 0}$, é uma *equação linear homogênea* nas incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$;
b) $\boldsymbol{2x + 3y - 2z = 10}$, é uma *equação linear* nas incógnitas $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$;
c) $\boldsymbol{x - 5y + z - 4t = 5}$, é uma *equação linear* nas incógnitas $\boldsymbol{x, y, z}$ e $\boldsymbol{t}$;
d) $\boldsymbol{4x_1 - 3x_2 = x_1 + x_2 + 1}$, é uma *equação linear* nas incógnitas $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$.

Pela definição, não são equações lineares:

a) $\boldsymbol{xy = 10}$ b) $\boldsymbol{x^2 + y = 6}$ c) $\boldsymbol{x^2 - xy - yz + x^2 = 1}$

2. Sistema de Equações Lineares.

Definição:

Denomina-se $\boldsymbol{sistema\ linear}$ $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ o conjunto $\boldsymbol{S}$ formado por $\boldsymbol{m}$ equações e $\boldsymbol{n}$ incógnitas, que pode ser indicado da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{S} = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No sistema linear $\boldsymbol{S}$, por exemplo, temos que:

- $\boldsymbol{a_{11}}$ é o coeficiente da incógnita $\boldsymbol{x_1}$ na $\mathbf{1}$ª equação.
- $\boldsymbol{a_{23}}$ é o coeficiente da incógnita $\boldsymbol{x_3}$ na $\mathbf{2}$ª equação.
- $\boldsymbol{a_{m2}}$ é o coeficiente da incógnita $\boldsymbol{x_2}$ na $\boldsymbol{m} - \text{é}\boldsymbol{sima}$ equação.

Exemplos:

a) $\begin{cases} -x - y = -5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$, *Sistema linear* $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ *nas incógnitas* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*.*

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$, *Sistema linear* $\mathbf{3} \times \mathbf{2}$ *nas incógnitas* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*.*

c) $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 7 \end{cases}$, *Sistema linear* $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ *nas incógnitas* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{z}$*.*

3. Solução de um Sistema Linear.

Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema, veja:

i) $(5, 1)$, é solução do sistema, $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 10 \end{cases}$

ii) $(2, 3)$, não é solução do sistema, $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \neq 10 \end{cases}$

iii) $(1, 3, -2)$, é solução do sistema, $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 1 \\ 4 \cdot 1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{cases}$

iv) $(0, 2, 5)$, não é solução do sistema, $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \neq 1 \\ 4 \cdot 0 - 2 - 5 \neq 3 \\ 0 + 2 - 5 \neq 6 \end{cases}$

4. Matrizes Associadas a um Sistema.

Todo sistema linear pode ser associado a matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Exemplo:

a) Vamos considerar o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$

- Chamamos de **matriz associada incompleta** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, formada apenas pelos coeficientes das incógnitas.
- Chamamos de **matriz associada completa** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

b) Em relação ao sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$, definimos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{matriz\ associada \\ incompleta}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{\substack{matriz\ associada \\ completa}}$$

Note que, quando uma das incógnitas do sistema não aparece em alguma das equações, seu coeficiente é nulo, vejamos:

O sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$, pode ser visto como $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y + 0z = -5 \end{cases}$

5. Representação Matricial de um Sistema.

Aplicando a definição de multiplicação de matrizes e o conceito de matriz associada incompleta de um sistema, é possível representar um sistema em forma de equação matricial.

Exemplo:

a) Sistema $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$, representação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$, representação matricial $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

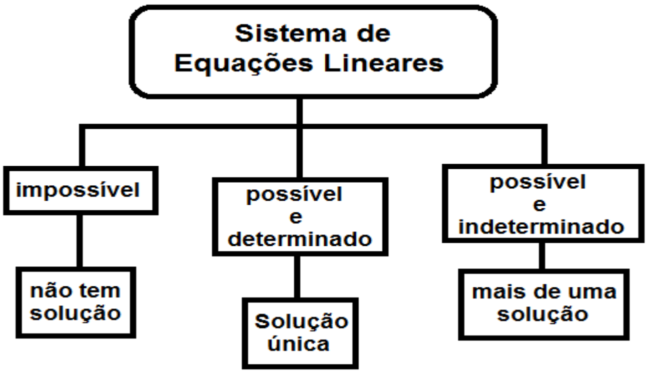
c) Sistema $\begin{cases} 3x + 4y - z = 2 \\ x - y + z = 7 \end{cases}$, representação matricial $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) Sistema $\begin{cases} 5x - 2y - 6z + 11w = 13 \\ -x + 15y + 23w = -10 \\ 17y - 9z - w = 7 \\ -7x - 9y - 20z - 5w = 3 \end{cases}$, representação matricial

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 & 11 \\ -1 & 15 & 0 & 23 \\ 0 & 17 & -9 & -1 \\ -7 & -9 & -20 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. Classificação de Sistemas Lineares.

Quanto as suas soluções, um sistema linear se classifica como impossível, ou possível e determinado, ou possível e indeterminado.



7. Regra de Cramer.

Considere o sistema de equações: $\begin{cases} Ax + By = K_1 \\ Cx + Dy = K_2 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} Ax + By = K_1 \ (\times\ D) \\ Cx + Dy = K_2 \ (\times\ -B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ADx + BDy = K_1D \\ -CBx - DBy = -K_2B \end{cases}$$

$$(AD - CB)x = K_1D - K_2B$$

$$\boxed{x = \frac{K_1D - K_2B}{AD - CB}}, \text{ se } AD - CB \neq 0$$

Substituindo x em qualquer das equações, encontraremos: $\boxed{y = \frac{K_2A - K_1C}{AD - CB}}$

Veja agora os determinantes de algumas matrizes obtidas do sistema:

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC; \quad D_x = \begin{vmatrix} K_1 & B \\ K_2 & D \end{vmatrix} = K_1D - K_2B; \quad D_Y = \begin{vmatrix} A & K_1 \\ C & K_2 \end{vmatrix} = AK_2 - CK_1$$

Se $D \neq 0$, a solução do sistema é dada pela ***regra de Cramer***:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}} \quad \text{e} \quad \boxed{y = \frac{D_y}{D}}$$

A regra de Cramer pode ser aplicada a qualquer sistema $\boldsymbol{n \times n}$ (com $\boldsymbol{n}$ equações e $\boldsymbol{n}$ incógnitas) com $\boldsymbol{D \neq 0}$. Neste caso, o sistema é possível e determinante.

Exemplo:

Resolva o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x + 5y = 28 \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17 \\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 28 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 56 = -51 \\ D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 28 \end{vmatrix} = 84 + 1 = 85 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-51}{17} \therefore \boxed{x = -3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{85}{17} \therefore \boxed{y = 5} \end{array}$$

Teorema

Seja $\boldsymbol{S}$ um sistema linear em que o número de equações seja igual ao de incógnitas:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Representação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{matriz\ A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Seja $\boldsymbol{D}$ o determinante da matriz $\boldsymbol{A}$ (matriz associada incompleta do sistema $\boldsymbol{S}$):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$, então o sistema é possível e tem solução única $(\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\beta_3}, \cdots, \boldsymbol{\beta_n})$, tal que:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta_i} = \frac{\boldsymbol{D_i}}{\boldsymbol{D}}}\ , \forall\, \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \cdots, \boldsymbol{n}\}$$

Em que $\boldsymbol{D_i}$ é o determinante da matriz obtida de $\boldsymbol{A}$, substituindo-se a $\boldsymbol{i}-$é$\boldsymbol{sima}$ coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema, vejamos:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Resolva os sistemas usando Cramer:

a) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}.$

$$\left.\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10 \\ D_x &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 20 = 20 \\ D_y &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 0 = -5 \end{aligned}\right\rangle \quad \begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{20}{10} \therefore \boxed{x = 2} \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{10} \therefore \boxed{y = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} 3x + 4y - z = -1 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 2x + 5z = 2 \end{cases}.$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 8 + 0 + 4 - 0 + 20 = 62$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 8 + 0 + 4 - 0 + 60 = 62$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -45 - 2 + 2 - 6 - 6 - 5 = -62$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 24 + 0 + 4 - 0 + 8 = 0$$

Logo,

$$\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D} = \frac{62}{62} \therefore \boxed{x = 1}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D} = \frac{-62}{62} \therefore \boxed{y = -1}}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{62} \therefore \boxed{z = 0}}$$

8. Escalonamento da Matriz Associada Completa de um Sistema Linear.

Um método bem eficaz para se resolver um sistema linear é o *método do escalonamento*. Este consiste em se tomar a matriz associada completa de um sistema linear e aplicar uma sequência de transformações elementares a esta matriz, de modo a obtermos uma matriz equivalente que seja a matriz associada completa de um sistema linear “fácil” de resolver.

Observação: (Matrizes Equivalentes)

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes de ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$. A matriz $\boldsymbol{A}$ é dita ser *equivalente por linhas* à matriz $\boldsymbol{B}$ se $\boldsymbol{B}$ pode ser obtida de $\boldsymbol{A}$ pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.

Observe que a noção de equivalência de matrizes por linhas corresponde à noção de equivalência de sistemas lineares quando se efetuam as respectivas transformações sobre as equações. De fato, a sistemas equivalentes, correspondem matrizes associadas equivalentes, e vice-versa.

Proposição:

Dois sistemas lineares com matrizes associadas completas equivalentes têm o mesmo conjunto solução.

Teorema: (unicidade da forma escalonada)

Existe uma única matriz na forma escalonada equivalente por linhas a uma dada matriz.

Transformações Elementares de Matrizes e *Forma Escalonada de uma Matriz* são conceitos já vistos anteriormente na parte, deste trabalho, referente a ***matrizes***, logo nos resta utilizar estes conceito como ferramentas para a resolução de sistemas lineares.

Exemplos:

Resolva os sistemas usando o escalonamento sobre a matriz associada completa dos sistemas lineares:

a) $\begin{cases} -x - 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + 2L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 + 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 4L_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{6}L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to (-1)L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 + 3L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Então,

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = -2 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{y = -2} \\ \boxed{z = 1} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é o terno $(x, y, z) = (2, -2, 1)$.

b) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=-1 \\ y-z+2t=2 \\ 2x+z-t=-1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 2L_3]{L_2 \to L_2 + 2L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{2}L_3]{L_1 \to L_1 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 3L_3]{L_2 \to L_2 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to -\frac{1}{5}L_4]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_4]{L_1 \to L_1 - 3L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right)$$

Então,

$$\begin{cases} \boxed{x = -\frac{1}{5}} \\ \boxed{y = 1} \\ \boxed{z = -\frac{1}{5}} \\ \boxed{t = \frac{2}{5}} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema será $(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{5}, 1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

c) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + z = 4 \\ 4x - 5y = 22 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & -5 & 0 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_1]{L_3 \to L_3 + 5L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to -\frac{1}{5}L_4]{L_3 \to -\frac{1}{19}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 + 3L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3} \\ \boxed{y = -2} \\ \boxed{z = 1} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é $(x, y, z) = (3, -2, 1)$.

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ -4x = 2 \\ x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_4]{L_1 \to L_1 - L_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_2 \to L_2 + 4L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -22 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{2}L_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -22 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 5L_3]{L_1 \to L_1 - 4L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 16 & -22 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 16L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -2} \\ \boxed{y = -1} \\ \boxed{0 = -6} \\ \boxed{0 = 6} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é impossível.

9. Discussão de um sistema linear.

Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros é indicar para quais valores desses parâmetros o sistema é:

- Possível e determinado (SPD);
- Possível e indeterminado (SPI);
- Impossível (SI).

9.1. Aplicação do Determinante

Dado o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = e} \\ \boldsymbol{cx + dy = f} \end{cases}$, sabemos pela regra de Cramer, que se o determinante da matriz incompleta for diferente de zero, isto é $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{0}$, o sistema é possível e determinado (SPD).

Agora, se $\boldsymbol{D = 0}$, o sistema será possível e indeterminada (SPI) ou impossível (SI). Neste caso, podemos usar escalonamento para descobrir se o sistema é SPI ou SI.

Exemplos:

a) Para discutir o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{3x + ky = 3} \end{cases}$ em função de $\boldsymbol{k}$, calculamos:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \boldsymbol{k - 3} \begin{cases} Se\ \boldsymbol{D \neq 0 \Rightarrow k \neq 3} \Rightarrow sistema\ possível\ e\ determinado\ (\boldsymbol{SPD}). \\ Se\ \boldsymbol{D = 0 \Rightarrow k = 3} \Rightarrow sistema\ possível\ e\ indeterminado\ (\boldsymbol{SPI}) \\ \qquad ou\ sistema\ impossível\ (\boldsymbol{SI}). \end{cases}$$

Para saber o que ocorre no sistema quando $\boldsymbol{k = 3}$, *iremos substituí-lo no sistema:*

$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{3x + 3y = 3} \end{cases}$, *dividindo a* $\boldsymbol{2}$ª *equação por* $\boldsymbol{3}$, *teremos* $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{x + y = 1} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{2 = 1}\ (\boldsymbol{absurdo})$

Logo, o sistema é impossível ($\boldsymbol{SI}$).

Conclusão: $\begin{cases} \boldsymbol{k \neq 3 \Rightarrow SPD} \\ \boldsymbol{k = 3 \Rightarrow SI} \end{cases}$

b) Para discutir o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x+ky=0} \\ \boldsymbol{kx+y=1-k} \end{cases}$ em função de $\boldsymbol{k}$, calculamos:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{1-k^2}$$

Se $\boldsymbol{D \neq 0 \Rightarrow 1-k^2 \neq 0}$ *ou* $\boldsymbol{k \neq \pm 1 \Rightarrow SPD}$

$$\textit{Se } \boldsymbol{D=0} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{k=-1} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x-y=0} \\ \boldsymbol{-x+y=2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{SI} \\ \\ \boldsymbol{k=1} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y=0} \\ \boldsymbol{x+y=0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{SPI} \end{cases}$$

Observação 1: Se um sistema linear possui $\boldsymbol{n}$ equações e $\boldsymbol{n}$ incógnitas, vejamos:

$$\boldsymbol{S} = \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \boldsymbol{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n} \end{cases}$$

Forma Matricial do Sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \boldsymbol{a_{n3}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \boldsymbol{A \cdot X = B}$$

Esse sistema poderá ser:

a) *Possível e determinado*, se $\boldsymbol{D = \det A \neq 0}$, caso em que o sistema possuirá solução única.

b) *Possível e indeterminado*, se $\boldsymbol{D = D_{x_1} = D_{x_2} = \cdots = D_{x_n} = 0}$, para $\boldsymbol{n=2}$. Se $\boldsymbol{n \geq 3}$ essa condição só será válida se não houver equações com coeficientes das incógnitas, respectivamente, proporcionais e termos independentes não proporcionais, neste caso o sistema apresentará infinitas soluções.

c) *Impossível*, se $\boldsymbol{D=0}$ e existir $\boldsymbol{D_{x_i} \neq 0}$, com $\boldsymbol{1 \leq i \leq n}$, neste caso o sistema linear não possui solução.

Observação 2: Se um sistema linear possui $\boldsymbol{m}$ equações e $\boldsymbol{n}$ incógnitas, sendo $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$ vejamos:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Forma Matricial do Sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \Longrightarrow A \cdot X = B$$

Então teremos:

a) Se $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$, ou seja, o número de equações for maior que o número de incógnitas. O sistema será possível e determinado ou impossível.

Exemplo 1: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$

Solução:

Resolveremos primeiro o sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

$$3x = 6 \;\therefore\; \boxed{x = 2}$$

Assim teremos: $x + y = 6 \Longrightarrow 2 + y = 6 \;\therefore\; \boxed{y = 4}$

Agora, basta substituir os valores achados na equação $3x + 2y = 14$*, vejamos:*

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

Logo, o sistema é possível e determinado, tendo como solução o par $(x, y) = (2, 4)$.

Exemplo 2: $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 4} \\ \mathbf{x + y = 3} \\ \mathbf{3x - y = 2} \end{cases}$

Solução:

Resolveremos primeiro o sistema: $\begin{cases} \mathbf{x + y = 3} \\ \mathbf{3x - y = 2} \end{cases}$

$$\mathbf{4x = 5} \therefore \boxed{\mathbf{x = \frac{5}{4}}}$$

Assim teremos: $\mathbf{x + y = 3 \Rightarrow \frac{5}{4} + y = 3 \Rightarrow y = 3 - \frac{5}{4} = \frac{12}{4} - \frac{5}{4} = \frac{12-5}{4}} \therefore \boxed{\mathbf{y = \frac{7}{4}}}$

Agora, basta substituir os valores achados na equação $\mathbf{2x + y = 4}$*, vejamos:*

$$\mathbf{2 \cdot \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10 + 7}{4} = \frac{17}{4} \neq 2}$$

Logo, o sistema é impossível, não há solução.

b) Se $\mathbf{m < n}$, ou seja, o número de equações for menor que o número de incógnitas. O sistema será possível e indeterminado.

Exemplo: $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y - z = 8} \\ \mathbf{x + y + 2z = 5} \end{cases}$

Solução:

Resolveremos o sistema como se fosse um $\mathbf{2 \times 2}$*, vejamos:*

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 8 + z} \\ \mathbf{x + y = 5 - 2z} \ \times (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 8 + z} \\ \mathbf{-2x - 2y = -10 + 4z} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{y = 5z - 2}}$$

Assim teremos: $\mathbf{x + y = 5 - 2z \Rightarrow x + 5z - 2 = 5 - 2z} \therefore \boxed{\mathbf{x = 7 - 7z}}$

Então, a solução desse sistema é o trio $(\mathbf{x, y, z}) = (\mathbf{7 - 7z, 5z - 2, z}), \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}$*, logo o sistema possível e indeterminado, possuindo infinitas soluções.*

10. Sistema Linear Homogêneo.

Definição:

Quando todos os termos independentes de um sistema linear são nulos, o sistema é denominado ***homogêneo***.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Em um sistema linear homogêneo, a ênupla $(0, 0, 0, \cdots, 0)$ é uma das soluções, denominada **solução nula**, **trivial** ou **imprópria.**

Qualquer solução diferente de $(0, 0, 0, \cdots, 0)$ para o sistema homogêneo é chamada **não nula**, **não trivial** ou **própria**.

Exemplo:

a) Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{2}L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_3]{L_1 \to L_1 - 2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{A única solução do sistema é} \\ (x, y, z) = (0, 0, 0), \textit{ou seja o} \\ \textit{sistema só tem solução trivial} \end{array}$$

b) Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+2z+2w=0 \\ -x+y+2w=0 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{2}L_2]{L_3 \to L_3 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{5}L_3]{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - L_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-2w=0 \\ y=0 \\ z+2w=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=2w \\ y=0 \\ z=-2w \end{cases}$$

Então, a solução desse sistema será $(x,y,z,w)=(2w,0,-2w,w), \forall\, w \in \mathbb{R}$, *logo o sistema possui solução não trivial sempre que* $w \neq 0$.

Observação 1:

Seja um sistema linear homogêneo $n \times n$ (n equações e n incógnitas),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Forma Matricial do sistema;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{O} \Rightarrow A \cdot X = O$$

O sistema $A \cdot X = O$ terá somente a solução trivial ($X = O$) sempre que a matriz A for invertível, ou seja, sempre que existir A^{-1}.

De fato, se a matriz $\boldsymbol{A}$ do sistema $\boldsymbol{A \cdot X = O}$, for invertível, termos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{escalonando} \\ \text{a matriz}}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Logo, a solução do sistema será $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0}$, ou seja, $\boldsymbol{X = O}$.

Observação 2:

Seja um sistema homogêneo de $\boldsymbol{m}$ equações com $\boldsymbol{n}$ incógnitas $(\boldsymbol{m \neq n})$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Forma Matricial do sistema;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{O} \Longrightarrow A \cdot X = O$$

Corolário:

Se um sistema linear homogêneo tem $\boldsymbol{m}$ equações com $\boldsymbol{n}$ incógnitas e admite somente a solução trivial $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0}$, então $\boldsymbol{m \geq n}$.

Teorema:

Se um sistema linear homogêneo tem $\boldsymbol{m}$ equações com $\boldsymbol{n}$ incógnitas, tal que $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$, então ele terá uma solução não trivial.

Demonstração:

Seja $\boldsymbol{A}$ a matriz associada incompleta de ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n})$ de um sistema homogêneo $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ e $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{O}]$ a matriz associada completa, e seja $[\boldsymbol{C}|\boldsymbol{O}]$ a sua forma escalonada por linhas. Temos que os dois sistemas são equivalentes. Seja $\boldsymbol{r}$ o número de linhas não nulas da matriz $\boldsymbol{C}$, então $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$. Logo o sistema $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ tem $\boldsymbol{r}$ equações com $\boldsymbol{n}$ incógnitas. Assim podemos resolver o sistema para $\boldsymbol{r}$ incógnitas em termos das $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$ incógnitas restantes. As $(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r})$ incógnitas podem assumir qualquer valor, logo podem assumir valores diferentes de zero e, portanto temos uma solução não trivial. Como os dois sistemas $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ são equivalentes, conclui-se o teorema.

11. Exercícios Resolvidos

1) Sabendo que o par ordenado $(\boldsymbol{2a}, \boldsymbol{a})$ é solução da equação linear $\boldsymbol{4x + 3y = 10}$, determine o valor de $\boldsymbol{a}$.

Resolução:

Substituindo $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{2a}$ e $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{a}$, temos:

$$\boldsymbol{4 \cdot (2a) + 3 \cdot a = 10 \;\Rightarrow 8a + 3a = 10 \;\Rightarrow 11a = 10} \;\therefore \boxed{\boldsymbol{a = \frac{10}{11}}}$$

2) Determine o valor de t, de modo que a terno $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{-2t}, \boldsymbol{1-t})$ seja solução da equação linear $\boldsymbol{5x + y - 2z = 13}$.

Resolução:

Substituindo ordenadamente os valores de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ na equação temos:

$$\boldsymbol{5 \cdot t + (-2t) - 2 \cdot (1 - t) = 13 \Rightarrow 5t - 2t - 2 + 2t = 13 \Rightarrow 5t = 13 + 2} \;\therefore \boxed{\boldsymbol{t = 3}}$$

Observe que substituindo $\boldsymbol{t = 3}$ na terna dada teremos $(\boldsymbol{3}, \boldsymbol{-6}, \boldsymbol{-1})$, que é uma solução da equação linear dada.

3) Em um supermercado, há três marcas de cestas básicas ($\boldsymbol{A, B\ e\ C}$), cada uma contendo macarrão, arroz e feijão. As cestas diferenciam-se não pelo conteúdo, mas pela quantidade desses produtos, assim distribuídos:

- **Cesta A:** 3 pacotes de macarrão, 1 de arroz e 2 de feijão;
- **Cesta B:** 5 pacotes de macarrão, 2 de arroz e 3 de feijão;
- **Cesta C:** 2 pacotes de macarrão, 1 de arroz e 3 de feijão.

Sabendo que os preços das cestas são, respectivamente, ***R$ 20,00, R$ 35,00*** e ***R$ 21,00***, qual é o valor do pacote de cada produto citado?

Resolução:

Representando os preços dos pacotes de macarrão, arroz e feijão por $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{f}$*, respectivamente, construímos o sistema:*

$$\begin{cases} 3m + a + 2f = 20 \\ 5m + 2a + 3f = 35 \\ 2m + a + 3f = 21 \end{cases}$$

Usando Cramer:

$$\begin{cases} D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 6 + 10 - 8 - 9 - 15 = 2 \\ D_m = \begin{vmatrix} 20 & 1 & 2 \\ 35 & 2 & 3 \\ 21 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 120 + 63 + 70 - 84 - 60 - 105 = 4 \\ D_a = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 2 \\ 5 & 35 & 3 \\ 2 & 21 & 3 \end{vmatrix} = 315 + 120 + 210 - 140 - 189 - 300 = 16 \\ D_f = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 20 \\ 5 & 2 & 35 \\ 2 & 1 & 21 \end{vmatrix} = 126 + 70 + 100 - 80 - 105 - 105 = 6 \end{cases}$$

Portanto:

$$m = \frac{D_m}{D} = \frac{4}{2} = 2\,; \quad a = \frac{D_a}{D} = \frac{16}{2} = 8\,; \quad f = \frac{D_f}{D} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, os preços dos pacotes de macarrão, arroz e feijão são ***R$ 2,00, R$ 8,00*** e ***R$ 3,00***, respectivamente.

4) Resolva os sistemas usando o escalonamento sobre a matriz associada completa dos sistemas lineares.

a) $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+y-z=5 \\ x+2y+4z=4 \\ 3x+y-2z=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x+2y-t=4 \\ 2x-y+z-t=-3 \\ -4x+y-z+2t=4 \end{cases}$

Resolução:

a) $$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 + 3L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to -\frac{1}{10}L_2]{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - 4L_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot x + 0\cdot y = 2 \\ 0\cdot x + 1\cdot y = -\frac{1}{2} \end{cases} \therefore \quad \boxed{x=2} \quad \boxed{y=-\frac{1}{2}}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{3}L_2]{L_1 \to -L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{9}L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = -2 \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z = 3 \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z = 0 \end{cases} \therefore \quad \boxed{x=-2} \quad \boxed{y=3} \quad \boxed{z=0}$$

c) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -7 \\ -4 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_2]{L_4 \to L_4 + 4L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 5L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 + 2L_3]{L_1 \to L_1 + \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to -\frac{1}{2}L_4]{L_3 \to -\frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 + \frac{3}{2}L_4]{L_2 \to L_2 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{9}{4}L_4]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{4}L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Logo teremos,

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t = -\frac{1}{2} \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t = \frac{9}{4} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 0 \cdot t = \frac{1}{4} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot t = 0 \end{cases} \therefore \quad \boxed{x = -\frac{1}{2}} \quad \boxed{y = \frac{9}{4}} \quad \boxed{z = \frac{1}{4}} \quad \boxed{t = 0}$$

- ***Aplicações de matrizes, determinantes e sistemas lineares na GEOMETRIA ANALÍTICA e ÁLGEBRA LINEAR.***

A Álgebra Linear constitui uma parte da matemática da qual necessitam matemáticos, engenheiros, físicos, programadores de computador e outros cientistas. Este requisito reflete a importância desta disciplina pelas suas múltiplas aplicações e pelo alcance de sua linguagem. Essa importância não se restringe apenas à área de exatas: muitas questões de grande atualidade na área biológica encontram na Álgebra Linear a ferramenta matemática apropriada para sua abordagem. Os objetos de que trata a Álgebra Linear são vetores e matrizes, que aparecem, por exemplo, quando procuramos as soluções para um sistema de equações lineares. Assim, são generalizações do conceito de número.

Veremos nesta parte do trabalho, através de exemplos, as aplicações dos conceitos vistos anteriormente em questões relacionadas à poderosa ferramenta da Álgebra Linear.

1. Independência Linear:

Um conjunto ordenado de vetores $\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_k}\} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ é linearmente independente se a única combinação linear possível com os vetores de $\boldsymbol{\beta}$ para expressar o vetor nulo é a combinação linear cujos coeficientes são todos iguais ao escalar zero. Formalizemos esses comentários numa definição.

Definição:

Um conjunto ordenado $\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_k}\} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ é linearmente independente se, e somente se, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}) = \boldsymbol{a_1 v_1} + \boldsymbol{a_2 v_2} + \cdots + \boldsymbol{a_k v_k}$ então $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} = \cdots = \boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$.

Observação:

Quando existe uma combinação linear para o vetor nulo com coeficientes não todos nulos, diremos que o conjunto ordenado $\boldsymbol{\beta}$ é linearmente dependente.

Exemplo 1:

Mostremos que os vetores $\boldsymbol{v_1} = (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{3})$ e $\boldsymbol{v_2} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1})$ de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ são linearmente independentes.

Resolução:

Devemos determinar os possíveis coeficientes da combinação linear $\boldsymbol{a_1 v_1} + \boldsymbol{a_2 v_2} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$*. Essa equação vetorial dá origem a um sistema de equações lineares cujas incógnitas são* $\boldsymbol{a_1}$ *e* $\boldsymbol{a_2}$*, vejamos:*

$$\boldsymbol{a_1}\underbrace{(\boldsymbol{4},\boldsymbol{3})}_{\boldsymbol{v_1}} + \boldsymbol{a_2}\underbrace{(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})}_{\boldsymbol{v_2}} = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \Longrightarrow (\boldsymbol{4a_1}, \boldsymbol{3a_1}) + (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_2}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \Longrightarrow (\boldsymbol{4a_1} + \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{3a_1} + \boldsymbol{a_2}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{4a_1} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3a_1} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \; \textit{forma matricial do sistema}$$

Usando a regra de Cramer, teremos:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{4} - \boldsymbol{3} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{D_{a_1}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{D_{a_2}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\boldsymbol{D_{a_1}}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{1}} \therefore \boxed{\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{0}}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \frac{\boldsymbol{D_{a_2}}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{1}} \therefore \boxed{\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}}$$

Logo, os únicos coeficientes para escrever o vetor nulo como uma combinação linear de $\boldsymbol{v_1}$ *e* $\boldsymbol{v_2}$ *serão* $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}$*, assim sendo* $\boldsymbol{v_1}$ *e* $\boldsymbol{v_2}$ *são* ***linearmente independentes****.*

Exemplo 2:

Observe o conjunto ordenado com quatro vetores, $\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\}$ contido no $\mathbb{R}^3$, onde $\boldsymbol{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-1,2,0), v_3 = (1,1,1)\ e\ v_4 = (0,2,1)}$. Escreva uma combinação linear para o vetor nulo e determine os seus coeficientes.

Resolução:

$$\boldsymbol{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = (0,0,0,0) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow a_1(1,0,1) + a_2(-1,2,0) + a_3(1,1,1) + a_4(0,2,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow (a_1,0,a_1) + (-a_2,2a_2,0) + (a_3,a_3,a_3) + (0,2a_4,a_4) = (0,0,0,0) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow (a_1 - a_2 + a_3, 2a_2 + a_3 + 2a_4, a_1 + a_3 + a_4) = (0,0,0,0)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 - a_2 + a_3 = 0} \\ \boldsymbol{2a_2 + a_3 + 2a_4 = 0} \\ \boldsymbol{a_1 + a_3 + a_4 = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{a_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad forma\ matricial$$

Não podemos resolver usando a regra de Cramer, pois a matriz associada incompleta não é quadrada. Portanto, faremos o escalonamento da matriz associada completa do sistema, vejamos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{L_2 \to L_2 - L_3}]{\boldsymbol{L_1 \to L_1 + L_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - L_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - L_2}]{}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 + a_3 + a_4 = 0} \\ \\ \boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a_1 = a_2}}$$

Teremos que,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 - a_2 + a_3 = 0} \\ \boldsymbol{2a_2 + a_3 + 2a_4 = 0} \\ \boldsymbol{a_1 + a_3 + a_4 = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\boldsymbol{a_3 = 0}} \\ \boldsymbol{2a_1 + 2a_4 = 0} \\ \boldsymbol{a_1 + a_4 = 0} \end{cases} \rangle\ \boxed{\boldsymbol{a_4 = -a_1}}$$

Logo, não existe unicidade de combinação linear para o vetor nulo. Escolhido arbitrariamente $\boldsymbol{a_1 = k} \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\boldsymbol{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = k \cdot v_1 + k \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 - k \cdot v_4 = k \cdot (v_1 + v_2 - v_4)} =$$

$$= \boldsymbol{k \cdot (1 - 1 + 0, 0 + 2 - 2, 1 + 0 - 1) = k \cdot (0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)}$$

Portanto, os quatro vetores em $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ são linearmente dependentes.

Proposição:

Seja $\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{v_1, v_2, \cdots, v_k}\} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ um conjunto ordenado de vetores. Se $\boldsymbol{k > n}$ então $\boldsymbol{\beta}$ é *linearmente dependente.*

2. *Base de subespaços de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$*

Dentre todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ alguns são especiais, estes são os chamados *subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Definição:

Diz-se que um subconjunto $\boldsymbol{\Gamma} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ é um **subespaço vetorial** quando:

i. $\boldsymbol{\Gamma}$ é um conjunto não vazio;
ii. Se $\boldsymbol{v, w} \in \boldsymbol{\Gamma}$ então $\boldsymbol{v + w} \in \boldsymbol{\Gamma}$ (*fechado em relação à soma de vetores*);
iii. Se $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ então $\boldsymbol{\lambda \cdot v} \in \boldsymbol{\Gamma}$ (*fechado em relação ao produto escalar*).

Seja $\boldsymbol{\Gamma}$ um subespaço vetorial não trivial de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.** Uma base ordenada para $\boldsymbol{\Gamma}$ é um conjunto ordenado de geradores $\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\Gamma}$ linearmente independente.

Exemplo 1:

Determine uma base do espaço gerado pelos vetores $\boldsymbol{v_1 = (1,-2,0,0,3), v_2 = (2,-5,-3,-2,6), v_3 = (0,5,15,10,0)\ e\ v_4 = (2,6,18,8,6)}$.

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 18 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 + 10L_2]{L_3 \to L_3 + 5L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to -\frac{1}{12}L_4]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_1 \to L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 3L_3]{L_1 \to L_1 - 6L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \widetilde{A}$$

Os vetores não nulos, $\boldsymbol{w_1 = (1,0,0,-2,3), w_2 = (0,1,0,-1,0)\ e\ w_3 = (0,0,1,1,0)}$*, da matriz* $\boldsymbol{\widetilde{A}}$ *formam uma base para o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *gerado por* $\boldsymbol{v_1, v_2, v_3\ e\ v_4}$*.*

Exemplo 2:

Determine se $(\boldsymbol{1,1,1})$; $(\boldsymbol{1,2,3})$ e $(\boldsymbol{0,3,1})$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{5}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_3]{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \widetilde{A}$$

Os vetores $\boldsymbol{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)\ e\ e_3 = (0,0,1)}$ *da matriz* $\boldsymbol{\widetilde{A}}$ *são chamados de vetores canônicos, logo* $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{e_1, e_2, e_3}\}$ *é um conjunto ordenado de geradores de* $\mathbb{R}^3$*, ou seja, formam uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

3. *Produto Vetorial em* $\mathbb{R}^3$

Trata-se de uma operação que a partir de dois vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$, associa de modo natural um vetor ortogonal ao plano gerado por estes vetores. (notação: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$).

Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})$ e $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3})$ em $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{det}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix}}$$

Proposição:

O módulo do produto vetorial de dois vetores não nulos $\boldsymbol{u}$, e $\boldsymbol{v}$ em $\mathbb{R}^3$ mede a área do paralelogramo determinado por estes vetores.

Exemplo 1:

Calcule o produto vetorial de $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{-8}, \boldsymbol{3})$ e $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{3})$.

Resolução:

$$\boldsymbol{u \times v = det}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \left(det\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right) e_1 - \left(det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\right) e_2 + \left(det\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\right) e_3$$

$$\boldsymbol{u \times v = -36e_1 - 6e_2 + 8e_3 = -36(1,0,0) - 6(0,1,0) + 8(0,0,1) = u \times v = (-36, -6, 8)}.$$

Exemplo 2:

Calcule a área do paralelogramo que tem por lados os vetores $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})$ e $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{-1})$.

Resolução:

$$\boldsymbol{u \times v = det}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left(det\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) e_1 - \left(det\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) e_2 + \left(det\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) e_3$$

$$\boldsymbol{u \times v = -2e_1 - 2e_2 - 2e_3 = -2(1,0,0) - 2(0,1,0) - 2(0,0,1)} \therefore \boxed{\boldsymbol{u \times v = (-2, -2, -2)}}$$

$$\boldsymbol{\|u \times v\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$$

Portanto, a área do paralelogramo é igual a $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$.

4. Produto Misto de Vetores

Sejam $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\boldsymbol{w} = (x_3, y_3, z_3)$ três vetores em $\mathbb{R}^3$. Chama-se *produto misto* dos vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ ao número real:

$$\boxed{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{det} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}}$$

Proposição:

O módulo do produto misto de três vetores não nulos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ em $\mathbb{R}^3$ mede o volume do paralelepípedo determinado por estes vetores.

Exemplo 1:

Calcule o volume do paralelepípedo que tem por aresta os vetores $\boldsymbol{u} = (\mathbf{-3, 2, 1}), \boldsymbol{v} = (\mathbf{1, 0, -1})$ e $\boldsymbol{w} = (\mathbf{3, 3, -1})$.

Resolução:

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{det} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0 - 6 + 3 - 0 - 9 + 2 = -10}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})| = |\mathbf{-10}| = \mathbf{10}}$$

Logo, o volume do paralelepípedo com arestas $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ é igual a $\mathbf{10}$.

Exemplo 2:

Calcule o volume do paralelepípedo que tem por aresta os vetores $\boldsymbol{u} = (\mathbf{1, 3, 5}), \boldsymbol{v} = (\mathbf{2, 1, 4})$ e $\boldsymbol{w} = (\mathbf{-2, 1, -3})$.

Resolução:

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{det} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{-3 - 24 + 10 + 10 - 4 + 18 = 7}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})| = |7| = \mathbf{7}}$$

Logo, o volume do paralelepípedo com arestas $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ é igual a 7.

5. Transformações Lineares

Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ espaços vetoriais. Uma transformação linear de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{W}$ é uma função $\mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ que possui a seguinte propriedade:

$$\boxed{\boldsymbol{T(v_1 + a \cdot v_2) = T(v_1) + a \cdot T(v_2), \forall\, v_1\ e\ v_2\ em\ V\ e\ \forall\, a\ em\ \mathbb{R}.}}$$

5.1. Imagem

A imagem de $\mathbf{T}$ em uma transformação linear $\mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é o conjunto $\boldsymbol{Im\,T = T(V)}$.

Proposição:

Seja $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ uma transformação linear. Se $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ é um conjunto de geradores de $\boldsymbol{V}$, então $\{\boldsymbol{T(v_1)}, \boldsymbol{T(v_2)}, \cdots, \boldsymbol{T(v_n)}\}$ é um conjunto de geradores do conjunto $\boldsymbol{Im\,T}$.

Exemplo:

Calculemos a imagem da transformação linear $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\boldsymbol{T(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)}$$

Resolução:

Façamos: $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{T(1,0,0,0) = (1,1,1)} \\ \boldsymbol{T(0,1,0,0) = (-1,0,1)} \\ \boldsymbol{T(0,0,1,0) = (1,2,3)} \\ \boldsymbol{T(0,0,0,1) = (1,-1,-3)} \end{array}\right\rangle \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T(1,0,0,0)} \\ \boldsymbol{T(0,1,0,0)} \\ \boldsymbol{T(0,0,1,0)} \\ \boldsymbol{T(0,0,0,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Agora reduziremos a matriz à sua forma escalonada, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 + 2L_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\{\boldsymbol{(1,0,-1), (0,1,2)}\}$ *é uma base de* $\boldsymbol{Im\,T}$*, ou seja,*

$$\boldsymbol{Im\,T = \{(x, y, -x + 2y);\ x, y \in \mathbb{R}\}}.$$

5.2. Núcleo

O núcleo de uma transformação linear é um subespaço de seu domínio.

Proposição:

Seja $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ uma transformação linear. O núcleo de $\boldsymbol{T}$, denotado por $\boldsymbol{Ker\,T}$, é o conjunto de vetores de $\boldsymbol{V}$ que são levados por $\boldsymbol{T}$ no vetor nulo de $\boldsymbol{W}$, ou seja,

$$\boxed{\boldsymbol{Ker\,T = \{\, v \in V / T(v) = 0\}}}$$

Exemplo:

Determinar $\boldsymbol{Ker\,T}$, sendo $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{4}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ a transformação linear definida por:

$$\boldsymbol{T(x,y,s,t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)}$$

Resolução:

Para determinar $\boldsymbol{Ker\,T}$, *devemos obter o conjunto de vetores* $(\boldsymbol{x,y,s,t})$ *em* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{4}}$ *tais que:*

$$\boldsymbol{T(x,y,s,t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t) = (0,0,0)} \implies$$

$$\implies \left.\begin{cases} \boldsymbol{x - y + s + t = 0} \\ \boldsymbol{x + 2s - t = 0} \\ \boldsymbol{x + y + 3s - 3t = 0} \end{cases}\right\rangle \implies \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{forma matricial} \\ \textit{do sistema} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - L_1}]{\boldsymbol{L_2 \to L_2 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{L_3 \to L_3 - 2L_2}]{\boldsymbol{L_1 \to L_1 + L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \boldsymbol{x + 2s - t = 0} \\ \boldsymbol{y + s - 2t = 0} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{x = -2s + t} \\ \boldsymbol{y = -s + 2t} \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Ker\,T = \{(-2s + t, -s + 2t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\}}.$$

Note que $\boldsymbol{Ker\,T}$ *é um subespaço de* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{4}}$**.**

CONCLUSÃO

Nosso foco, como dito inicialmente, foi apresentar ao estudante do ensino médio o conceito de ***transformações elementares nas linhas de uma matriz*** e suas possíveis aplicações em seus estudos no ensino médio. *(Fica como observação que poderíamos ter usado as transformações elementares nas colunas de uma matriz tanto para o cálculo de matriz inversa, quando esta existir, quanto para resolução de sistemas lineares de forma análoga as transformações elementares nas linhas de uma matriz usadas neste trabalho).*

Vimos que em certas situações, como matrizes quadradas de ordem $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3})$ e sistemas lineares maiores que um sistema $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, o uso das transformações elementares nas linhas de uma matriz para o cálculo da matriz inversa, quando esta existir, e a resolução do sistema linear, respectivamente, mostram-se mais simples que as formas de cálculos e resoluções habitualmente mostrados pelos livros didáticos do ensino médio, e utilizados pelos estudantes.

Deixemos bem claro que não se pretende questionar ou propor mudanças nos conteúdos atualmente expostos aos estudantes do ensino médio, mas sim apresentar alternativas, que os ajudem a facilitar certos cálculos e resoluções, ou seja, dar-lhes o mais diverso arsenal de ferramentas matemáticas a fim de desenvolver ao máximo seus conhecimentos, neste sentido incluímos também neste trabalho aplicações dos assuntos vistos em geometria analítica e álgebra linear, desta forma mostrando a importância dos assuntos abordados na continuidade dos estudos após o ensino médio (estudos universitários) e deixando um “pequeno gosto de quero mais”, que esperamos ser mais um incentivo ao desejo de aperfeiçoamento e continuidade dos estudos por parte de nossos alunos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Plácido. *Introdução à álgebra linear*. /S.l./ : Fundamentos, 2003.

AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. *Geometria analítica e álgebra linear*. 2. ed. rev. e ampl. Fortaleza : Premius, 2003.

BARROSO, Juliane Matsubara. *Conexões com a matemática*. 1. ed. São Paulo : Moderna, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática* : contexto e aplicação. 1. ed. São Paulo : Ática, 2011.

HEFEZ, Abramo ; FERNANDEZ, Cecília de Sousa. *Introdução à álgebra linear*. Rio de Janeiro : IMPA, 2012. (Coleção PROFMAT).

IEZZI, Gelson : HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar*. 6. ed. São Paulo : Atual, 1993.

LIMA, Elon Lages. *Geometria analítica e álgebra linear*. 2. ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2011.

SOUSA, Joamir. *Matemática*. 1. ed. São Paulo : FTD, 2010.