UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

MATHEUS SIQUEIRA ARAÚJO DANTAS

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES EM PROVAS DO ENEM

JUAZEIRO DO NORTE
2020

MATHEUS SIQUEIRA ARAÚJO DANTAS

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES EM PROVAS DO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

D21e Dantas, Matheus Siqueira Araújo.
Um estudo sobre funções em provas do ENEM / Matheus Siqueira Araújo Dantas. – 2020.
172 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.
(Inclui bibliografia p.170-172).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2020.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. ENEM. 2. Funções polinomiais. 3. Funções exponenciais e logarítmicas. 4. Funções trigonométricas. I. Título.

. CDD 510.07

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Um Estudo Sobre Funções em Provas do Enem

MATHEUS SIQUEIRA ARAÚJO DANTAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 31 de julho de 2020.

Banca Examinadora

Maria Silvana A. Costa

Prof.ª Dr.ª Maria Silvana Alcântara Costa
Orientadora

Glauber M. S. Pereira

Prof. Dr. Glauber Marcio Silveira Pereira

Érica B. Batista

Prof. ª Dr.ª Érica Boizan Batista

UFCA

Aos meus pais Cristiano e Ivone, por todas as dificuldades que enfrentaram para nos dá a melhor vida possível.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por permitir que eu fizesse as escolhas que me conduziram até aqui e por estar comigo em todos os momentos da minha vida.

Agradeço, ao meu pai, pelo orgulho que sempre teve de mim, por me apoiar em qualquer escolha que eu fizesse e por ter feito de tudo para que eu tivesse sucesso em meus projetos.

À minha mãe, pela educação que me deu, pelos ensinamentos da palavra de Deus, por me ensinar a ler, por me ajudar nas tarefas de casa, pelas palavras difíceis, por ser uma referência na minha vida, por todas as orações e por todo cuidado que teve e tem comigo até hoje.

À minha irmã por todo apoio e por ser uma guerreira trabalhadora que me inspira a ser um homem mais forte.

À minha esposa Maria Valéria, pelo companheirismo, por ter me incentivado a ir fazer a prova do ENA, pela compreensão durante todo esse período cursando o mestrado e pela ajuda com os programas LaTeX e GeoGebra que possibilitou a elaboração deste trabalho.

Às minhas avós Edite e Maria por todo amor e cuidado que tiveram comigo.

Ao meu primo-irmão Vinícius, por todos os momentos de conversas e distrações, por ser um exemplo de homem e por todo suporte que me deu quando precisei.

A todos os meus tios e primos que sempre me apoiaram e torceram por mim. Em especial, agradeço a tia Ana Maria por todo acolhimento que teve durante anos, a tia Lúcia pela ajuda no tempo de faculdade e a tia Cristina pelos óculos.

Aos meu amigo Daniel Quesado por toda força e incentivo.

Ao Professor Ronildo Rocha que me deu a primeira oportunidade de trabalhar em sala de aula aos 18 anos de idade e ao Professor José Maria por me incentivar a seguir na profissão, além de toda ajuda no período de graduação.

À escola Maria Núbia Vieira Novais, a quem devo minha formação escolar e meus primeiros anos na profissão de professor.

Às minhas professoras Edilânia Medeiros e Graça Bringel pelo exemplo de profissional que sempre foram.

À Faculdade de Formação de Professores de Serra Talhada (Fafopst) e ao Programa Universidade para Todos em Pernambuco (PROUPE) que possibilitaram a formação de professor.

Ao diretor Jackson David por flexibilizar meu horário de trabalho, a todos os professores e funcionários que fazem parte da família Carlos Pena Filho.

A todos os colegas que estiveram comigo nesse mestrado, cada um teve parcela significativa para que esse objetivo pudesse ser alcançado. Em especial, agradeço a Érica pelo compartilhando das emoções durante os momentos difíceis do curso e pela imensa ajuda em todas as cadeiras, principalmente no exame de qualificação. A Vonaldo pela companhia e ajuda com as viagens, além da parceria nos trabalhos. A Arquimedes pelas distrações e brincadeiras na hora do almoço e pelas palavras de incentivo.

Ao meu amigo Matheus Queiroz por ser um exemplo de vencedor, por apontar o caminho de entrada no PROFMAT, por todas as conversas, brincadeiras, discussões e compartilhamento dos sentimentos vividos durante o período de mestrado.

Aos meus professores do programa: Francisco de Assis Benjamim Filho, Francisco Pereira Chaves, Clarice Dias de Albuquerque, Steve da Silva Vicentim, Valdinês Leite de Sousa Júnior, Érica Boizan Batista, Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho e Leandro da Silva Tavares, a convivência com vocês me acrescentou muito mais que conhecimentos matemáticos.

À professora Drª Maria Silvana Alcântara Costa, a quem tenho uma enorme admiração e respeito, pelo acolhimento na universidade, por ser minha orientadora nesse trabalho, pela paciência em corrigir os erros do texto e por toda contribuição que deu para o mesmo.

À UFCA pela oportunidade de cursar esse mestrado maravilhoso.

Por fim, agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática-SBM e a CAPES por terem ofertado este Curso em todo Brasil.

"Em tudo dai graças, porque esta é a vontade de Deus em Cristo Jesus para convosco." (Tessalonicenses 5:18)

RESUMO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um dos principais meios de acesso as universidades públicas e privadas do Brasil e a prova de matemática é um fator determinante nesse acesso, pois corresponde a 25% das questões objetivas desse exame, além de geralmente ter maior valor entre as quatro grandes áreas de conhecimento cobradas no exame. Por conta dessa importância, este trabalho foi elaborado, pensando em oferecer aos alunos e professores de escolas públicas, um material didático que expõe conteúdos sobre Gráficos, Funções Afins, Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas, Ciclo trigonométrico e Funções Trigonométricas, que fazem parte dos conteúdos de conhecimentos algébricos cobrados no exame, os quais correspondem a 14% das questões de matemática que foram abordadas nas provas entre os anos de 2009 a 2019, com intuito de ajudar na compreensão desses conceitos, para que as chances de ingresso nas universidades por parte desses alunos sejam maximizadas. Ao final de cada capítulo apresentamos exemplos diretos, contextualizados e questões comentadas do exame.

Palavras-chave: ENEM. Funções polinomiais. Funções exponenciais e logarítmicas. Funções trigonométricas.

ABSTRACT

The National High School Exam (ENEM) is the principal mean by which high school students can get into public universities or private institutions. Moreover, the mathematics test is a determining factor in that regard, because it corresponds to 25% of the objective questions and, apart from the dissertation, is the highest valued among the four major areas in the entire exam. Because of this importance, this work was elaborated in order to provide public school teachers a didactic material and help in the understanding Functions, Quadratic, Exponential and Logarithmic Functions, Trigonometric, Cycle and Triple Functions gonometric, which are part of the algebraic knowledge content required for the exam. All those subjects correspond to 14% of the mathmatics questions approached between 2009 and 2019. The theoretical part of these concepts was divided into five chapters, which present direct and contextualized examples, besides offering commented questions from the exam at the end of each chapter.

Keywords: ENEM. Polynomial functions. Exponential and Logarithmic functions. Trigonometric functions.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é o principal meio de acesso às universidades públicas e particulares do Brasil. Quase todas as instituições federais, utilizam a nota do exame como forma de seleção, através do Sistema de Seleção Unificada (SISU). Por outro lado, o ENEM é critério para participação no Programa Universidade para Todos (ProUni) que oferece bolsas em instituições particulares, além de ser pré-requisito para o Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (Fies).

Todo brasileiro que concluiu o ensino médio tem direito a realizar o ENEM e concorrer as vagas ofertadas pelas universidades por meio do exame. A prova é muito acessível, pois é aplicada em todo o Brasil e de forma gratuita para pessoas de baixa renda, tornando o ingresso nas universidades mais democrático. Entretanto, estudos apresentados nas referências [2] e [33], com base em resultados da Prova Brasil e das provas do Sistema de Avaliação Ensino Básico (SAEBE), apontam que a educação escolar no Brasil é ofertada de maneira heterogênea. Isso acontece por fatores intra-escolares e extra-escolares como estrutura e gestão dos estabelecimentos de ensino, região onde o aluno mora, escolaridade dos pais, condições econômicas entre outros. Estes fatores são responsáveis por uma grande desigualdade na formação dos estudantes. Vale enfatizar que essas diferenças ocorrem não só na comparação entre pública e privada, mas também quando comparamos exclusivamente escolas públicas segundo [2]. Assim, se existem desigualdades nas formações dos estudantes, então existe um desequilíbrio na concorrência entre as vagas ofertadas nas universidades por meio do ENEM.

A prova do ENEM abrange a maioria dos conteúdos do ensino básico, ela consiste em 180 questões objetivas e uma redação. As questões são divididas em quatro cadernos que correspondem a quatro grandes áreas de conhecimento: Linguagens e Códigos; Ciências Humanas; Ciências da Natureza e Matemática.

A Matemática tem suma importância no exame, pois é a única área de conhecimento que tem um caderno exclusivo no ENEM, ou seja, as questões sobre conhecimentos matemáticos correspondem a 25% das questões objetivas do exame. Além disso, as provas são corrigidas com base na Teoria de Resposta ao Item (TRI) que leva em conta, entre outros critérios, o desempenho geral dos candidatos. Neste cenário, o caderno de Matemática sempre teve maior valor entre todos os cadernos.

Considerando esse fato, todo jovem estudante que tem o desejo de ingressar no ensino superior através do ENEM, sabe que a prova de Matemática é um fator determinante para alcançar esse objetivo.

Na hora de se preparar para a prova, apenas saber quais assuntos estão no conteúdo programático do exame não basta, é preciso ter em mente os assuntos mais recorrentes e como as questões são abordadas, assim é fundamental que o estudante tenha um bom material que o direcione para aquele tipo de teste. Um levantamento feito das provas do ENEM desde que tomou esse novo formato, de 2009 a 2019, mostrou que 34% das questões de Matemática exigiam do candidato domínio sobre Conhecimentos numéricos, 32% Conhecimentos geométricos, 18% Conhecimentos de estatística e probabilidade, 14% Conhecimentos algébricos e 2% Conhecimentos algébricos/geométricos. Este levantamento foi feito pelo autor e por outros dois alunos do PROFMAT da Universidade Federal do Cariri (UFCA), Érica Ferreira de Alcântara e Vonaldo Feitosa de Siqueira que fizeram seus trabalhos voltados para o ENEM. O trabalho de Érica foi voltado para os conteúdos de Conhecimentos Numéricos exigidos no exame e o de Vonaldo para os conteúdos de Conhecimentos Geométricos, conforme [1] e [37].

A motivação para elaboração desse trabalho, surgiu quando a Professora Drª Maria Silvana Alcântara Costa, sugeriu a produção de apostilas para o cursinho Edificar, vinculado ao Programa de Extensão Edifique Ações da UFCA para alunos de escolas públicas.

Além do público mencionado anteriormente, espera-se que o material aqui proposto seja utilizado por alunos e professores de escolas públicas na compreensão dos conhecimentos algébricos cobrados no ENEM. De acordo com a matriz de referência do exame, conforme [18], os conteúdos relacionados aos conhecimentos algébricos são: gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. No entanto, os conteúdos são muito amplos e não abordamos alguns assuntos como funções racionais e polinomiais, além de não termos aprofundado o estudo sobre equações e inequações. É importante ressaltar ainda que este material foi elaborado com base em levantamentos feitos previamente sobre a forma de abordagem das questões da prova, desde 2009 e nos levantamentos expostos nas referências [12], [26] e [34], de maneira a direcionar e otimizar esse estudo, a fim de tornar a concorrência pelas vagas nas universidades mais equilibrada.

Desta forma, em todo o texto, busca-se tratar o conteúdo de forma simples e direta, indo de encontro ao que de fato interessa para a resolução das questões. Entretanto, revisões de assuntos considerados importantes para o desenvolvimento da teoria estão presentes no texto, deixando a critério do professor ou aluno, diante de sua realidade, revisá-los ou não.

Por ser uma prova contextualizada e interdisciplinar que exige do candidato um bom nível de interpretação textual, procuramos expor as funções, protagonistas desse estudo, através de exemplos associadas sempre que possível a situações cotidianas, para que o estudante se sinta envolvido com o problema e compreenda que as características de cada tipo de função as associam a uma situação específica.

Este trabalho está dividido do seguinte modo: no Capítulo 2 introduz-se o conceito de função, seu gráfico e algumas de suas propriedades. Nos capítulos 3, 4, 5 e 6 destacam-se respectivamente as funções: afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas e trigonométricas. Para cada uma delas, apresenta-se definições, propriedades, gráficos e situações que podem ser modeladas através das mesmas. Finaliza-se cada um desses capítulos, com uma coletânea de questões do ENEM e soluções comentadas.

2 FUNÇÕES

Muitos fenômenos naturais e sociais se comportam de tal maneira que as grandezas envolvidas obedecem alguma relação de dependência e isto permite que tais fenômenos sejam compreendidos e modelados através de um conjunto de instruções que relacionam essas grandezas. Para entender essa relação, o estudo das funções é indispensável e, neste caso, não só na Matemática, mas também na Física, Química, Biologia, Geografia, etc.

Situações simples do dia a dia expressam essa dependência. Na padaria, o preço a pagar depende da quantidade de pão que pretende-se comprar; na prova do ENEM, um dos fatores que definem a nota é a quantidade de questões resolvidas corretamente; o tempo de viagem de uma cidade A para uma cidade B depende da velocidade do veículo; o valor a pagar por uma conta de luz, depende da quantidade de quilowatts-hora que se utiliza ao longo do mês. Enfim, existem inúmeras situações como estas onde uma grandeza "Y", depende de uma variável "X" e, neste caso, dizemos que Y está em função de X.

Vejamos a tabela a seguir que relaciona a quantidade e o preço que se paga por litro de combustível.

Tabela 1: Preço de gasolina por litro

Quantidade de litros	**Preço a pagar** (R$)
1	4,50
2	9
3	13,50
...	...
10	45
100	450
...	...

Fonte: Autor.

Veja que o preço a pagar depende da quantidade de litros comprados. Neste caso, dizemos que o preço está em função do número de litros, e como um litro de combustível custa R$4,50, então sem muito esforço é fácil perceber que cada quantidade de litros esta associada a um único valor em reais e que o preço P a se pagar é R$4,50 vezes o número l de litros comprados. Podemos então expressar o comportamento do preço através da quantidade de litros por uma fórmula matemática $P = 4,50l$, ou $P(l) = 4,50l$, também chamada de lei da função. Veja que não é preciso ir muito longe para nos depararmos com a necessidade de se estudar funções.

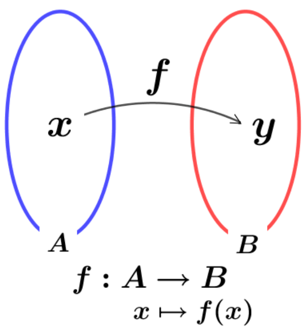
Para dar continuidade ao trabalho faz-se necessário destacar que este capítulo foi baseado nas referências [5], [9], [13], [14], [19], [22], [28] e [30].

2.1 Definição de função

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função f de A em B é uma regra que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Chamamos o conjunto A de domínio da função f e representamos por D_f. O conjunto B é chamado de contradomínio da função. Para cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ associado a x por f é chamado de imagem de x pela função f e denotado por $y = f(x)$, o conjunto imagem da função é representado por $Im(f)$. Usamos a notação $f : A \to B$ (lê-se: f é uma função de A em B) e escrevemos $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma x em $f(x)$.

Figura 1: Função de A em B



Fonte: Autor, baseado em [9].

Observação 2.1. *É importante frisar que para termos uma função $f : A \to B$:*

i) todo elemento $x \in A$ está associado a algum elemento $y \in B$;

ii) esta associação deve ser única, ou seja, um elemento $x \in A$ não pode estar associado a mais de um elemento $y \in B$.

Exemplo 2.2. *São funções:*

a) $f : \{1,2\} \to \{c,d,e,f\}$, tal que $f(1) = c$ e $f(2) = d$.

- $D_f = \{1,2\}$, o contradomínio é $\{c,d,e,f\}$ e $Im(f) = \{c,d\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 5$.

- $D_f = \mathbb{R}$, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e $Im(f) = \{5\}$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x + 1$.

- $D_f = \mathbb{R}$, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $f(n) = n+1$.

- $D_f = \mathbb{N}$, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{N}^*$.

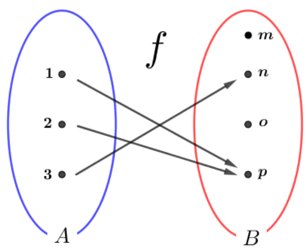
e) $f : [-2,5] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$.

- $D_f = [-2,5]$, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e $Im(f) = [0,25]$.

Sobre as funções exibidas nos itens c e d note que ambas têm a mesma regra $f(x) = x+1$, porém a diferença entre seus domínios faz com que suas imagens sejam distintas. Enquanto a função do item c tem como imagem o conjunto dos números reais, a do item d se limita apenas aos números naturais positivos, ou seja, elas são funções diferentes. Assim, é importante ressaltar que uma função só está bem definida quando exibimos seu domínio, contradomínio e sua regra de associação.

Podemos visualizar uma função $f : A \to B$ por meio de um diagrama como o da Figura 2.

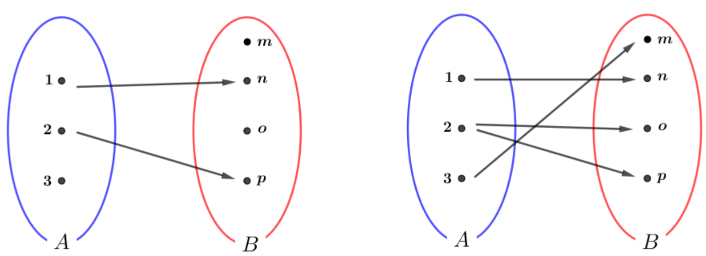
Figura 2: Diagrama de f



Fonte: Autor, baseada em [28].

Note, porém, na Figura 3 a seguir, que os diagramas não representam funções. No primeiro caso o elemento $3 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B e no segundo caso o elemento $2 \in A$ está associado a mais de um elemento de B.

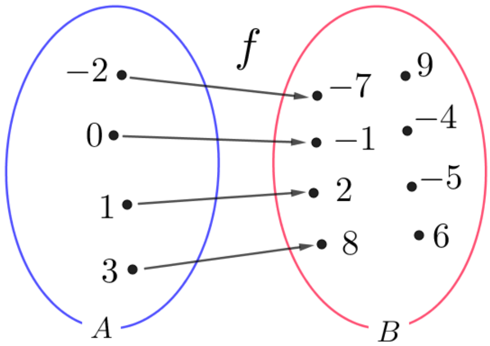
Figura 3: Diagramas que não representam funções



Fonte: Autor, baseado [28].

Exemplo 2.3. *Dados dois conjuntos* $A = \{-2, 0, 1, 3\}$ *e* $B = \{-7, -5, -4, -1, 2, 6, 8, 9\}$*. Considere a função* $f : A \to B$ *tal que* $f(x) = 3x - 1$ *representada no diagrama da Figura 4 a seguir.*

Figura 4: Diagrama de f.



Fonte: Autor.

Determine:

a) *o domínio, contradomínio e a imagem da função* f;

b) $f(0)$ *e* $f(1)$;

c) y, *quando* $x = 1$;

d) x, *tal que* $f(x) = 8$.

Solução do item a:

$D_f = \{-2, 0, 1, 3\}$, o contradomínio é $\{-7, -5, -4, -1, 2, 6, 8, 9\}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = \{-7, -1, 2, 8\}$.

Solução do item b:

Note na Figura 4 que o número 0 está associado ao -1 por meio de f, assim como o 1 está associado ao 2. Portanto $f(0) = -1$ e $f(1) = 2$.

Solução do item c:

Pelo item b temos $f(1) = 2$. Isto significa que quando $x = 1$, temos $y = 2$.

Solução do item d:

Note que o elemento 3 de A está associado ao elemento 8 de B, ou seja, $f(3) = 8$. Portanto $x = 3$. $\diamond$

2.2 Gráfico de uma função

Para melhor compreensão da definição do gráfico de uma função faz-se necessários os conceitos de par ordenado e de produto cartesiano os quais apresentaremos a seguir.

Um par ordenado formado pelos números reais x e y nessa ordem é denotado por (x,y). Neste caso, são chamados de coordenadas, sendo x a primeira coordenada e y a segunda. Dois pares ordenados (a,b) e (c,d) são iguais se, e somente se, $a=c$ e $b=d$.

Definição 2.4. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, chama-se produto cartesiano de A por B, e indicamos por $A\times B$, o conjunto formado por todos os pares ordenados (x,y) tais que $x\in A$ e $y\in B$.*

Em símbolos:

$$A\times B=\{(x,y);\, x\in A,\ y\in B\}.$$

Se A e B são conjuntos finitos com p e q elementos respectivamente, então o conjunto $A\times B$ também é finito e possui $p\cdot q$ elementos.

Exemplo 2.5. *Considere os conjuntos $A=\{0,1,2\}$ e $B=\{1,2\}$. Explicite todos os elementos do produto cartesiano $A\times B$.*

Solução:

Devemos determinar todos os pares ordenados (x,y) tais que $x\in A$ e $y\in B$. Note que A tem 3 elementos e B tem 2, logo $A\times B$ tem $3\cdot 2=6$ elementos. Segue que

$$A\times B=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

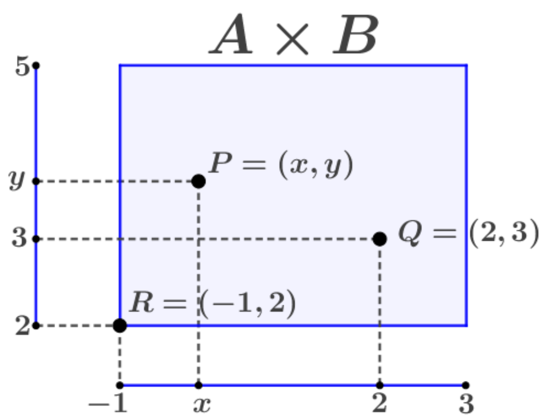
$\Diamond$

Exemplo 2.6. *Considere os conjuntos $A=[-1,3]$ e $B=[2,5]$. Represente geometricamente o produto cartesiano $A\times B$.*

Solução:

Inicialmente note que o conjunto A pode ser representado como o segmento da reta real cujos extremos são pontos associados aos números -1 e 3. Perceba também que cada elemento $x\in A$ representa um ponto desse segmento. De maneira análoga, o conjunto B pode ser interpretado como o segmento da reta real cujos extremos são pontos associados aos números 2 e 5. Logo, cada elemento $y\in B$ pode ser compreendido como um ponto desse segmento. Assim, se tomarmos esses dois segmentos de forma perpendicular, o produto cartesiano $A\times B$ pode ser interpretado geometricamente como o retângulo da Figura 5 a seguir.

Figura 5: Produto cartesiano $A \times B$



Fonte: Autor, baseado em [22].

Cada ponto desse retângulo representa um único par ordenado $(x,y) \in A \times B$. O ponto $P = (x,y)$ é o ponto de interseção da reta perpendicular ao segmento de extremos -1 e 3, tirada a partir do ponto x, com a reta perpendicular ao segmento de extremos 2 e 5 tirada a partir do ponto y. $\diamondsuit$

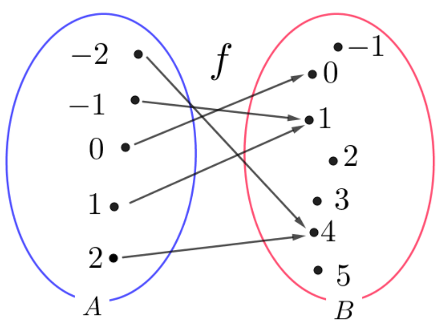
Definição 2.7. *O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x,y), onde $x \in A$ e $y = f(x) \in B$.*

Denotamos:

$$G(f) = \{(x,y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Exemplo 2.8. *Dados dois conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ e $B = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$. Considere a função $f : A \to B$ tal que $f(x) = x^2$ representada no diagrama da Figura 6 a seguir. Determine o conjunto $G(f)$.*

Figura 6: Diagrama de f.



Fonte: Autor.

Solução:

Como $f(-2)=4,\ f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$, e $f(2)=4$, então

$$G(f)=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}.$$

$\Diamond$

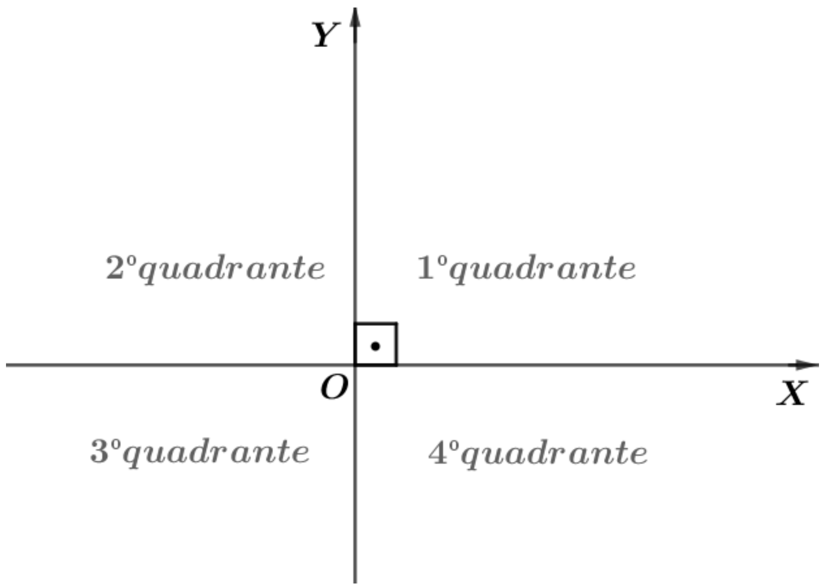
A representação geométrica do conjunto $G(f)$ é uma ferramenta poderosa que auxilia na compreensão de conceitos e propriedades das funções através de uma linguagem geométrica.

A seguir definiremos plano cartesiano, que utilizaremos para representar o gráfico de qualquer função f cujo domínio e contradomínio sejam subconjuntos dos números reais.

2.2.1 Plano Cartesiano

Sejam OX e OY dois eixos perpendiculares em O, os quais determinam um plano α. Os eixos OX e OY são chamados eixo das abscissas e eixo das ordenadas respectivamente. Tais eixos, dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes que são enumerados no sentido anti-horário, partindo do quadrante superior direito.

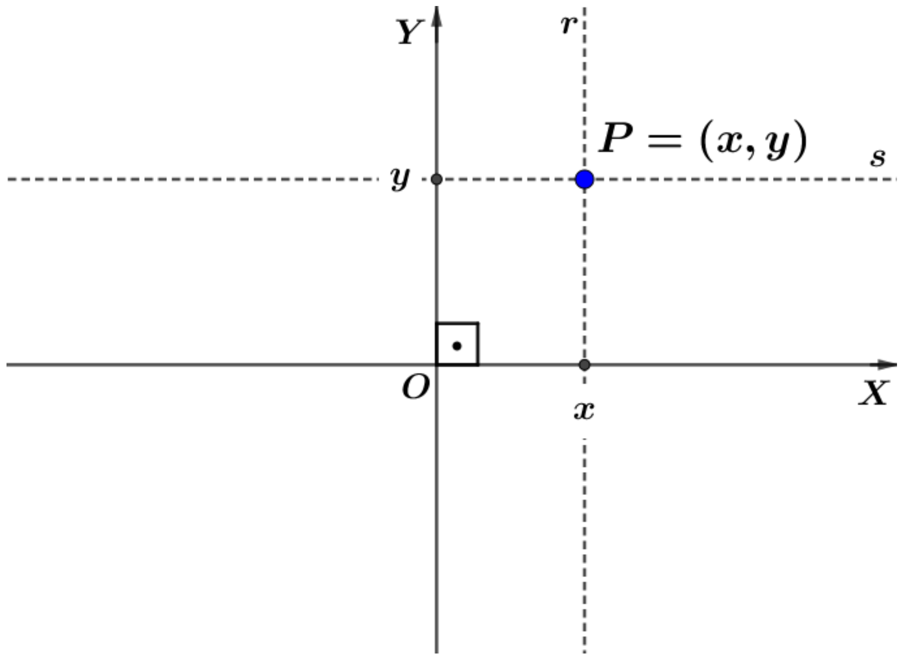
Figura 7: Plano cartesiano



Fonte: Autor, baseado em [9].

Para indicar a localização de um ponto P no plano faz-se necessário conhecer duas coordenadas, este par de coordenadas é representado por um par ordenado (x,y). Chamamos as coordenadas x e y de abscissa e ordenada do ponto $P=(x,y)$ respectivamente. De modo geral, para determinar a abscissa e a ordenada de um ponto P qualquer no plano como o da Figura 8 abaixo, basta usar o seguinte procedimento:

Figura 8: Ponto no plano cartesiano



Fonte: Autor, baseado em [9].

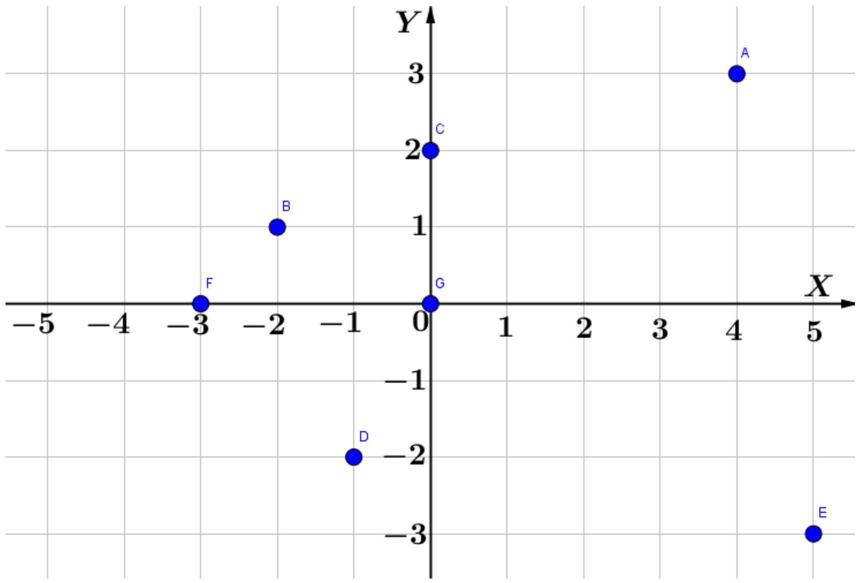
- Trace uma reta r perpendicular ao eixo OX, passando pelo ponto P.
- Trace uma reta s perpendicular ao eixo OY, passando pelo ponto P.
- Sejam x e y números reais associados aos pontos de interseção das retas r e s com os eixos OX e OY respectivamente.
- Represente o ponto P pelo par ordenado (x, y).

Observação 2.9. *Se um ponto está sobre o eixo OX, então ele tem ordenada igual a zero. Por outro lado, se ele está sobre o eixo OY, então sua abscissa é igual a zero.*

O plano α equipado com um sistema de coordenadas, assim definido, é chamado de *Plano Cartesiano* e o ponto $O = (0, 0)$ a origem do sistema de coordenadas. Diante do exposto, perceba que o plano cartesiano é uma representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemplo 2.10. *Determine as coordenadas cartesianas de cada um dos pontos representado na Figura 9 a seguir.*

Figura 9: Pontos no plano cartesiano

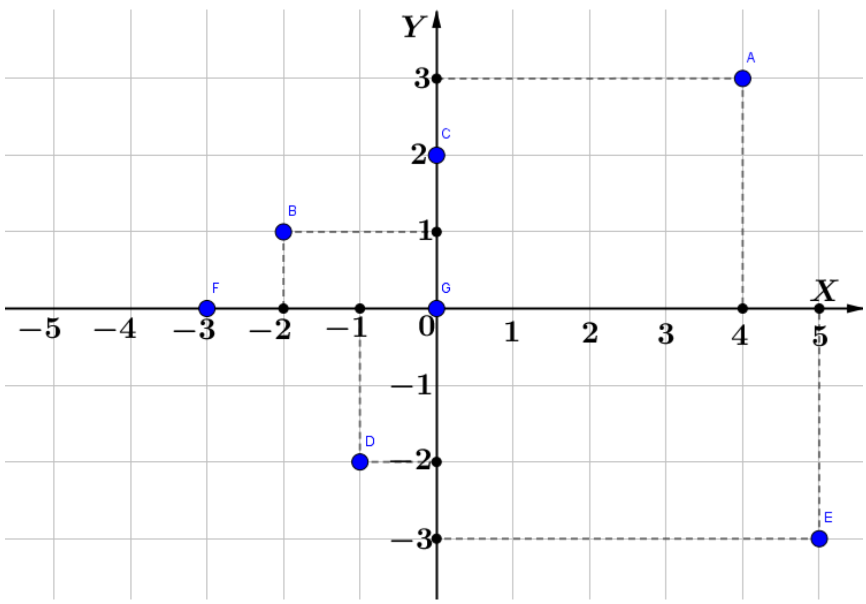


Fonte: Autor.

Solução:

Para determinar as coordenadas cartesianas dos pontos A, B, C, D, E, F e G, utilizaremos o procedimento apresentado na seção 2.2.1. Assim, vamos traçar as retas perpendiculares aos eixos OX e OY que passam por cada um desses pontos. Observe a Figura 10 abaixo.

Figura 10: Pontos no plano cartesiano



Fonte: Autor.

Verificando a interseção das retas traçadas com os eixos OX e OY, podemos concluir que $A = (4,3), B = (-2,1), C = (0,2), D = (-1,-2), E = (5,-3), F = (0,-3)$ e $G = (0,0)$.

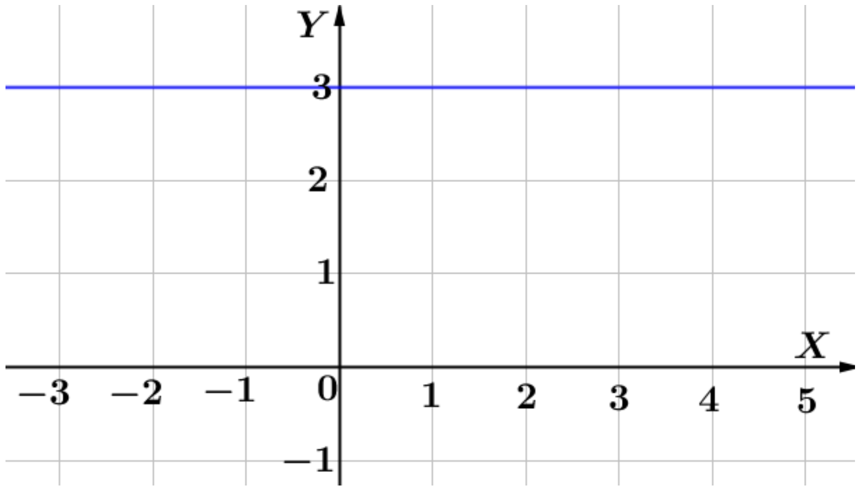
$\lozenge$

Exemplo 2.11. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3$. *Esboce uma representação geométrica do conjunto* $G(f)$.

Solução:

Note que $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, assim podemos representar geometricamente $G(f)$ no plano cartesiano. Perceba que cada ponto de $G(f)$ tem coordenadas dadas por $(x, f(x))$. Como $f(x) = 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então as coordenadas de $G(f)$ são dadas por $(x,3)$. Desse modo, fazendo um esboço do gráfico de f, temos uma reta paralela ao eixo OX que passa pelo ponto $(0,3)$ como a reta em azul exibida na Figura 11 abaixo.

Figura 11: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3$



Fonte: Autor.

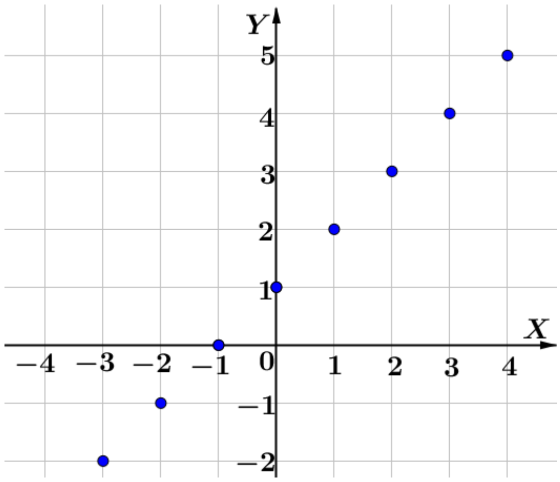
$\lozenge$

Exemplo 2.12. *Considere a função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $f(x) = x + 1$. *Esboce no plano cartesiano o conjunto* $G(f)$.

Solução:

Como cada ponto de $G(f)$ tem coordenadas dadas por $(x, x+1)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, então marcando sobre o plano cartesiano alguns pontos de $G(f)$, temos o gráfico em azul representado na Figura 12 a seguir.

Figura 12: Gráfico da função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que $f(x)=x+1$



Fonte: Autor.

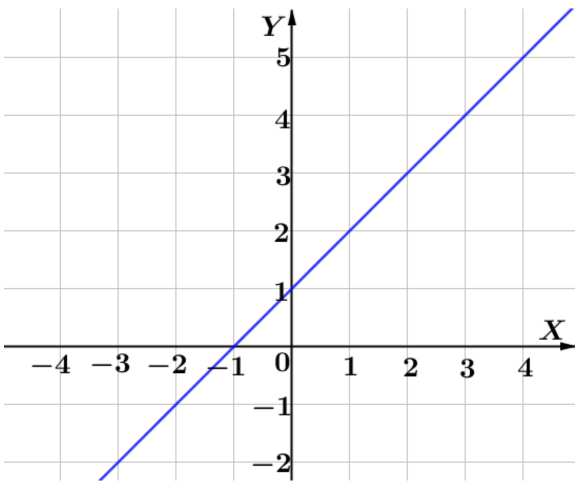
◊

Exemplo 2.13. *Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x+1$. Represente no plano cartesiano o conjunto $G(f)$.*

Solução:

Como cada ponto de $G(f)$ tem coordenadas dadas por $(x,x+1)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, então marcando sobre o plano cartesiano os pontos de $G(f)$ temos o gráfico em azul representado na Figura 13 a seguir.

Figura 13: Gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x+1$



Fonte: Autor.

◊

2.3 Crescimento da função

A operadora de telefonia celular "Fale Mais" oferece o plano mensal "Standart" para clientes que utilizam até 400 minutos de ligações ao mês. O plano Standart funciona da seguinte maneira: se o cliente utilizar até 100 minutos ao mês, paga um valor fixo de R$ 16,00. Caso utilize mais de 100 minutos, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por minuto, a partir do 101º até o 200º; e caso utilize entre 200 e 400 minutos, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 26,00.

A função $f : [0,400] \to [16,26]$ tal que

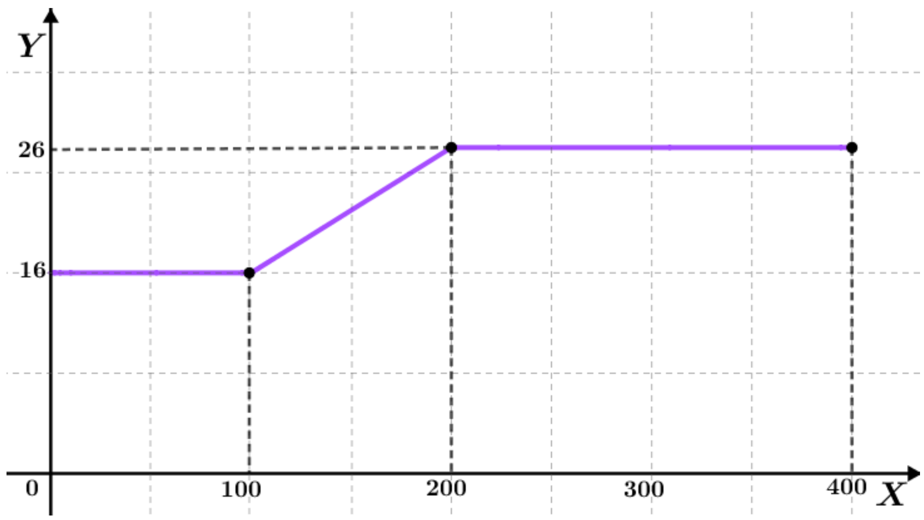
$$f(x) = \begin{cases} 16, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 100 \\ 6 + 0,10x, & \text{se} \quad 100 < x < 200 \\ 26, & \text{se} \quad 200 \leq x \leq 400. \end{cases}$$

expressa o valor $f(x)$ pago pelo cliente que contrata o plano Standart em função do número x de minutos utilizados no mês.

Note que para $0 \leq x \leq 100$, o valor $f(x)$ pago pelo cliente é sempre igual a 16. Por exemplo, o cliente que utiliza apenas 10 minutos de ligação paga o mesmo valor daquele que utiliza 90. Por outro lado, quando os valores de x crescem no intervalo $[100,200]$, os valores $f(x)$ crescem no intervalo $[16,26]$. Por exemplo, o cliente que utiliza 175 minutos de ligação paga um valor maior do que aquele que utiliza 115. Por fim, se $200 \leq x \leq 400$ o valor $f(x)$ é sempre igual a 26.

Considere então o gráfico de f exibido na Figura 14 a seguir.

Figura 14: Valor pago pelo cliente por minuto utilizado



Fonte: Autor.

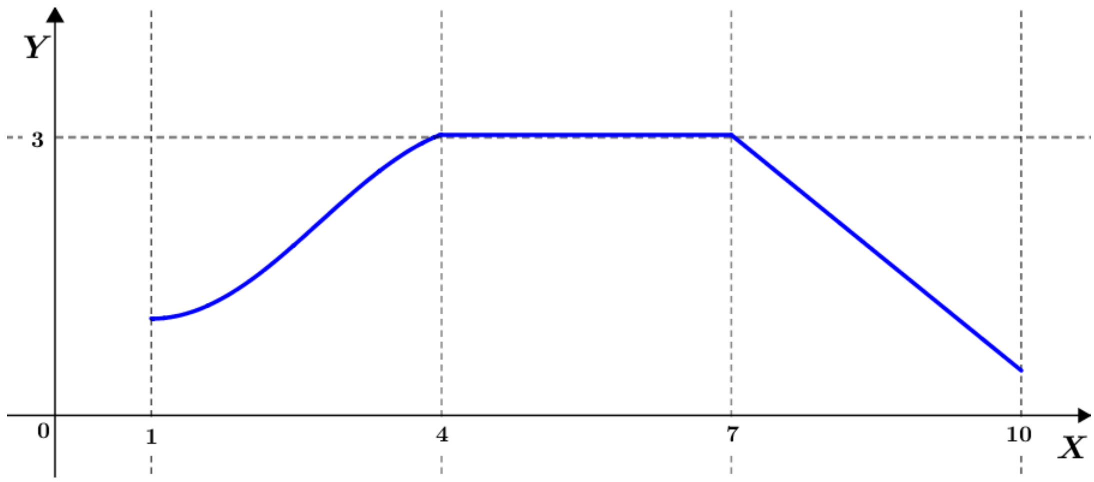
Perceba que os pontos cujas abscissas pertencem ao intervalo $[0,100]$ tem a mesma ordenada $y = 16$. Dizemos neste caso, que f é constante no intervalo $[0,100]$. Por outro lado, quando os valores de x crescem no intervalo $[100,200]$, os valores de y crescem no intervalo $[16,26]$. Dizemos que a função é crescente no intervalo $[100,200]$. Por fim, note que os pontos cuja abscissa x é tal que $200 \leq x \leq 400$, tem a mesma ordenada $y = 26$, ou seja, a função também é constante no intervalo $[200,400]$.

Definição 2.14. *Dados dois conjuntos não vazios A e B com $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : A \to B$ definida por $y = f(x)$ é:*

- *Crescente no conjunto $X \subset A$ se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a X, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *Decrescente no conjunto $X \subset A$ se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a X, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.*
- *Constante no conjunto $X \subset A$ se, para todo x pertencente a X, tivermos $f(x) = k$, onde k é uma constante real.*

Exemplo 2.15. *Considere o gráfico de uma função f conforme Figura 15 a seguir:*

Figura 15: Gráfico de f



Fonte: Autor.

Verifique para quais valores de x a função é crescente, decrescente e para quais valores é constante.

Solução:

Tomando dois pontos de abscissas x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$ no intervalo $[1,4]$, note que a ordenada de x_1 é menor que a ordenada de x_2, ou seja, neste intervalo,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Logo, a função é crescente no intervalo $[1,4]$.

Por outro lado, tomando dois pontos de abscissas x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, no intervalo $[7,10]$ tem-se a ordenada de x_1 maior que a ordenada de x_2, ou seja, neste intervalo,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Logo, a função é decrescente no intervalo $[7,10]$.

Por fim, note que qualquer ponto de abscissa x tal que $x \in [4,7]$, tem ordenada $y = 3$, ou seja, o valor de f não varia nesse intervalo. Assim, f é constante no intervalo $[4,7]$. $\Diamond$

2.4 Função composta

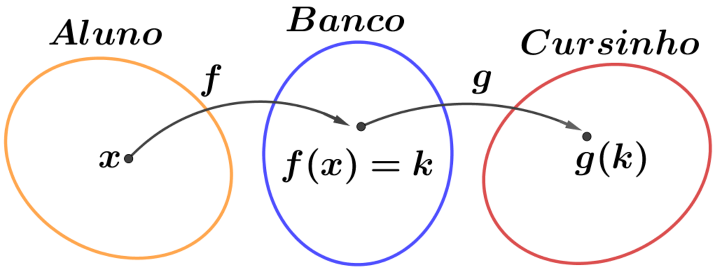
O exemplo a seguir foi baseado na referência [30].

As transações de bancos facilitam os pagamentos de dívidas, pois permitem que o devedor quite seu débito, sem precisar se deslocar para o local do credor. Pensando nisso, a administração do cursinho "Você Passa" decidiu receber as mensalidades dos seus alunos através do "Banco GT".

Para evitar atrasos nos pagamentos, o cursinho oferece um desconto de 10% sobre o valor x na mensalidade para alunos que efetuam o pagamento até o dia 8 de cada mês. Neste caso, o valor $f(x)$ pago pelo aluno, é dado pela função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = 0,9x$.

O banco por sua vez, cobra uma taxa de 3% do cursinho para fazer esse serviço. Assim, para cada k reais recebidos, o banco transfere para a conta do cursinho a quantia $g(k)$ dada pela função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(k) = 0,97k$. Observe o esquema na Figura 16.

Figura 16: Pagamento da mensalidade do cursinho



Fonte: Autor, baseado em [30].

a) A mensalidade no cursinho para as turmas do ENEM é de R$600,00. Se o aluno quiser pagar a mensalidade até o dia 8, qual o valor que ele deverá pagar?

b) Qual o valor que será transferido do banco para o cursinho?

c) Seja x o valor da mensalidade para uma turma qualquer neste cursinho. Qual a função que dá o valor recebido pelo cursinho em função de x, supondo que o aluno pague a mensalidade até o dia 8?

Solução do item a:

O valor pago pelo aluno até o dia 8 é dado pela função $f(x) = 0,9x$, onde x é o valor da mensalidade do curso. Como a mensalidade das turmas do ENEM é 600 reais, então o valor pago pelo aluno é

$$f(600) = 0,9 \cdot 600 = 540 \ \ reais.$$

Solução do item b:

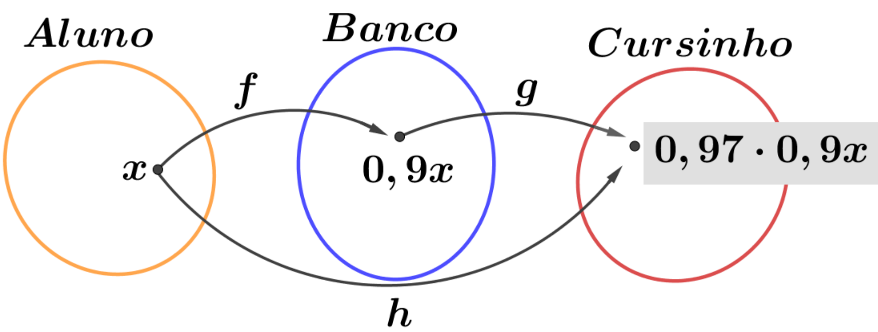
A quantia que o banco transfere para o cursinho é dado pela função $g(k) = 0,97k$. Como o banco terá recebido $k = 540$ reais do aluno, então o banco irá transferir para o cursinho a quantia de

$$g(540) = 0,97 \cdot 540 = 523,80 \ \ reais.$$

Solução do item c:

Considere a representação nos diagramas da Figura 17.

Figura 17: Valor pago ao cursinho em função do valor pago pelo aluno



Fonte: Autor, baseado em [30].

Podemos determinar a função $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que expressa o valor recebido pelo cursinho em função do valor x pago pelo aluno, aplicando a função f e depois a função g, nessa ordem. Assim

$$h(x) = 0,97 \cdot 0,9x \Rightarrow h(x) = 0,873x.$$

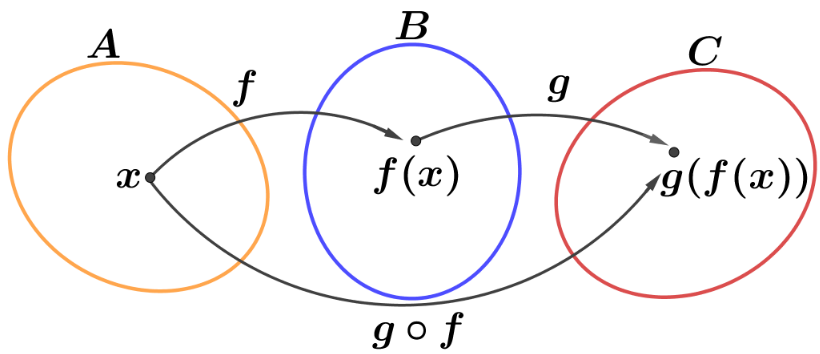
$\Diamond$

A função h é chamada função composta de f e g nessa ordem.

Definição 2.16. *Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a função composta de f e g (nessa ordem) é a função $g \circ f : A \to C$, definida, para cada $x \in A$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Figura 18: Função composta



Fonte: Autor, baseado em [30].

Observação 2.17. *Só é possível definir a função composta $g \circ f$ se a imagem de f for um subconjunto do domínio de g.*

2.5 Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

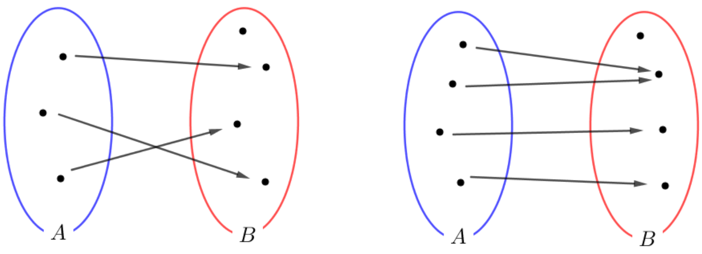
A definição de função exige que todo elemento x do domínio esteja associado a um único elemento y do contradomínio. Note que essa exigência não se aplica aos elementos do contradomínio. Assim, não é necessário que todo elemento y seja imagem de algum elemento x. Além disso, um elemento y pode ser imagem de mais de um elemento x. Essas características são muito importantes no estudo de funções. Vejamos a seguir os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Definição 2.18. *Uma função $f : A \to B$ é injetiva (ou injetora) quando elementos diferentes em A são transformados por f em elementos diferentes em B. Logo, f é injetiva quando $x \neq x'$ em $A \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.*

Podemos expressar essa condição usando sua contrapositiva:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Figura 19: Função injetiva e não injetiva



(a) Função injetiva (b) Função não injetiva

Fonte: Autor, baseado em [9].

Exemplo 2.19. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$ é injetiva.*

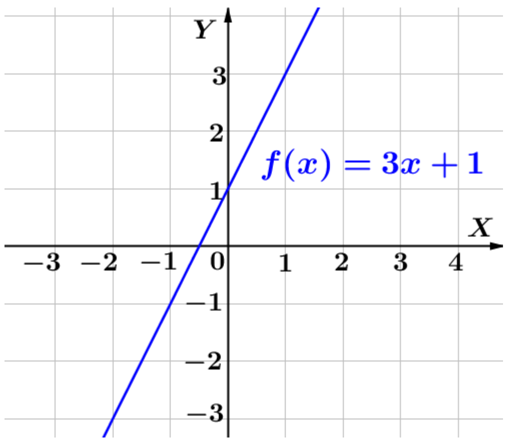
De fato,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Portanto f é injetiva.

Podemos ver que f é injetiva também através de seu gráfico. Observe a Figura 20 abaixo.

Figura 20: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Autor.

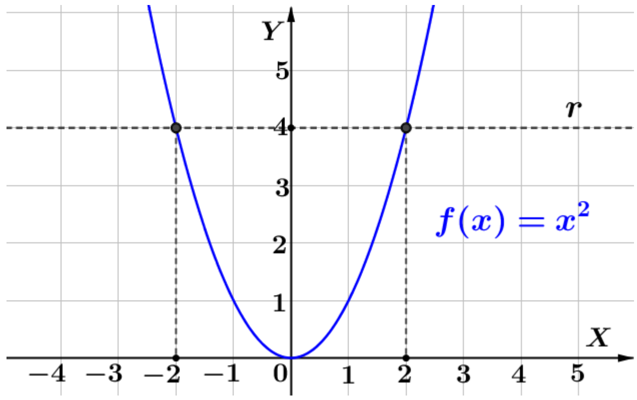
Note que qualquer reta perpendicular ao eixo OY intersecta o gráfico de f em um único ponto, ou seja, não existem dois pontos no conjunto $G(f)$ com abscissas distintas e ordenadas iguais. Portanto f injetiva.

Exemplo 2.20. *A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$ não é injetiva.*

Perceba que $f(2)=2^2=4$ e $f(-2)=(-2)^2=4$, ou seja, existem elementos distintos no domínio com a mesma imagem. Portanto f não é injetiva.

Podemos ver que f não é injetiva através de seu gráfico. Observe a Figura 21.

Figura 21: Gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$



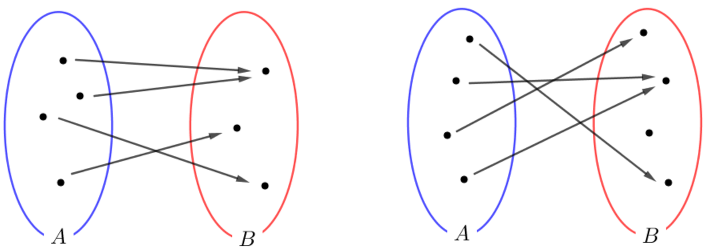
Fonte: Autor.

Veja que a reta r perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto $(0,4)$ intersecta o gráfico de f em mais de um ponto. Isso significa que existem dois pontos no conjunto $G(f)$ com abscissas distintas associadas a ordenada $y=4$. Logo f não é injetiva.

Definição 2.21. *Uma função $f:A\to B$ é sobrejetiva (ou sobrejetora) quando, para qualquer elemento $y\in B$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x\in A$ tal que $f(x)=y$.*

Assim, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, ou seja, o conjunto imagem de f é igual ao conjunto B.

Figura 22: Função sobrejetiva e não sobrejetiva



(a) Função sobrejetiva (b) Função não sobrejetiva

Fonte: Autor, baseado em [9].

Exemplo 2.22. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x+1$ é sobrejetiva.*

Vamos mostrar que para todo $y \in \mathbb{R}$, existe pelo menos um elemento $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$.

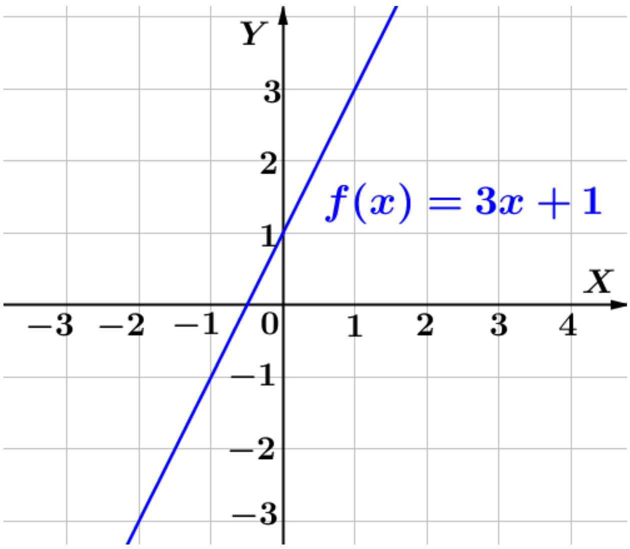
Note que

$$2x+1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe um elemento $x = \dfrac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Portanto f é sobrejetiva.

Podemos ver que f é sobrejetiva a partir do seu gráfico. Considere a Figura 23 a seguir.

Figura 23: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x+1$



Fonte: Autor.

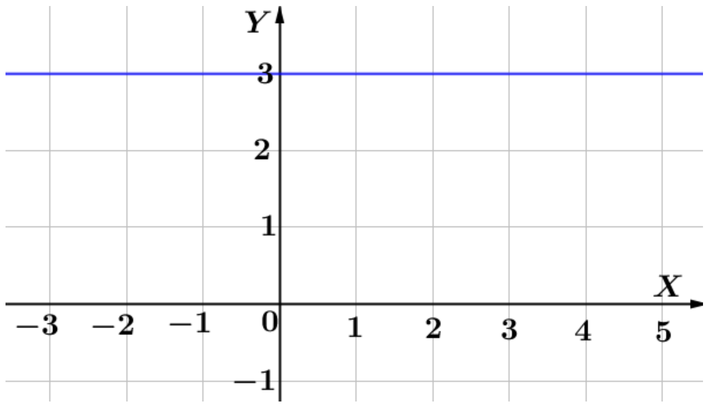
Note que qualquer reta perpendicular ao eixo OY intersecta $G(f)$ em pelo menos um ponto. Isso significa que todo elemento $y \in \mathbb{R}$ é imagem de pelo menos um elemento $x \in \mathbb{R}$. Portanto f é sobrejetiva.

Exemplo 2.23. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3$ não é sobrejetiva.*

Note que o contradomínio da função é $\mathbb{R}$, entretanto $Im(f) = \{3\}$, ou seja, o contradomínio é diferente do conjunto imagem. Portanto f não é sobrejetiva.

Com auxílio de seu gráfico exibido na Figura 24 a seguir, pode-se notar que f não é sobrejetiva.

Figura 24: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3$



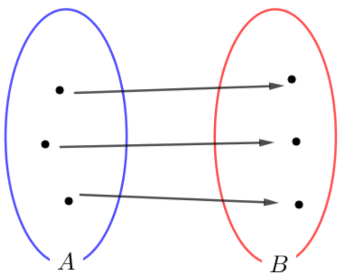
Fonte: Autor.

É fácil ver que é possível traçar retas perpendiculares ao eixo OY que não intersectam $G(f)$ em nenhum ponto. Basta considerar a reta perpendicular a OY que passa pelo ponto $(0,1)$. Isso significa que não existe nenhum ponto de $G(f)$ com ordena $y = 1$, logo não existe nenhum x tal que $f(x) = 1$. Assim, podemos concluir que f não é sobrejetiva.

Definição 2.24. *Uma função $f : A \to B$ é bijetiva (ou bijetora) quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.*

Neste caso dizemos que há uma bijeção de A em B ou que existe uma correspondência biunívoca entre A em B.

Figura 25: Função bijetiva



Fonte: Autor, baseado em [9].

Exemplo 2.25. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$ é bijetiva.*

Vimos no exemplos 2.19 que f é injetiva. Por outro lado, no exemplo 2.22 vimos que f também é sobrejetiva. Dessa forma, podemos concluir que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$ é bijetiva.

Exemplo 2.26. *A função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x + 1$ *não é bijetiva.*

Embora f seja injetiva, note que $Im(f) = \mathbb{N}^*$. Assim, existem elementos no contradomínio de f que não são imagens de nenhum elemento x do domínio. Logo, f não é sobrejetiva. Deste modo, concluímos que f não é bijetiva.

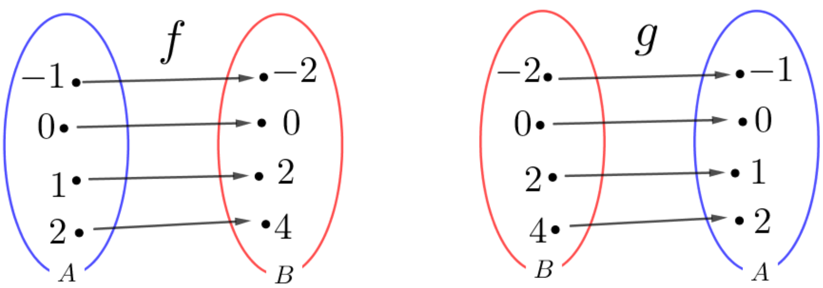
Exemplo 2.27. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *tal que* $f(x) = x^2$ *não é bijetiva.*

A função f é sobrejetiva, pois $Im(f) = \mathbb{R}_+$. Entretanto, note que $f(1) = f(-1) = 1$, ou seja, f não é injetiva. Assim, concluímos que f não é bijetiva.

2.6 Função inversa

Dados dois conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, 0, 2, 4\}$, considere a função $f : A \to B$, tal que $f(x) = 2x$. A função f é bijetiva, ou seja, cada elemento de A corresponde um único elemento de B por meio de f, e vice-versa. A função f nos diz que cada elemento de A está associado ao seu dobro em B. De outra forma, podemos dizer que cada elemento de B está associado a sua metade em A. Podemos então, por meio de f, obter uma função $g : B \to A$, que associa cada $y \in B$ ao número $\dfrac{y}{2} \in A$, ou seja, $g(y) = \dfrac{y}{2}$. A função g assim obtida é a inversa da função f.

Figura 26: Funções f e g



Fonte: Autor, baseado em [13].

Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva qualquer, podemos sempre obter uma função $g : B \to A$ exigindo que

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

É importante frisar que só é possível obter uma função g, como vimos acima, quando f é bijetiva. De fato, se f não fosse injetiva, então teríamos elementos $x_1,\ x_2 \in A$, onde $x_1 \neq x_2$, com a mesma imagem $y \in B$. Este valor y nos deixaria impossibilitados de definir g por meio de f, pois iriam existir dois valores para $g(y)$, contrariando a definição de função. Por outro lado, se f não fosse sobrejetiva, então existiria algum elemento $y \in B$ que não seria imagem de nenhum elemento $x \in A$ por meio de f. Assim, não seria possível determinar o valor de $g(y)$. Logo, não seria possível definir g através de f.

Definição 2.28. *Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva. A função inversa de f é a função $g : B \to A$ tal que, para $x \in A$ e $y \in B$, temos*

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Como consequência da definição a função $g : B \to A$ é a inversa da função $f : A \to B$ quando se tem

- $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo 2.29. *Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$. Determine a função g inversa de f.*

Solução:

A definição de g exige que se tenha $g(y) = x$. Como f associa $x \in A$ ao elemento $y \in B$, tal que $y = 2x - 3$, então

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}.$$

Portanto $g(y) = \dfrac{y+3}{2}$. A função g associa cada elemento $y \in \mathbb{R}$ ao elemento $x \in \mathbb{R}$, tal que $x = \dfrac{y+3}{2}$. ◊

2.6.1 Gráfico da função inversa

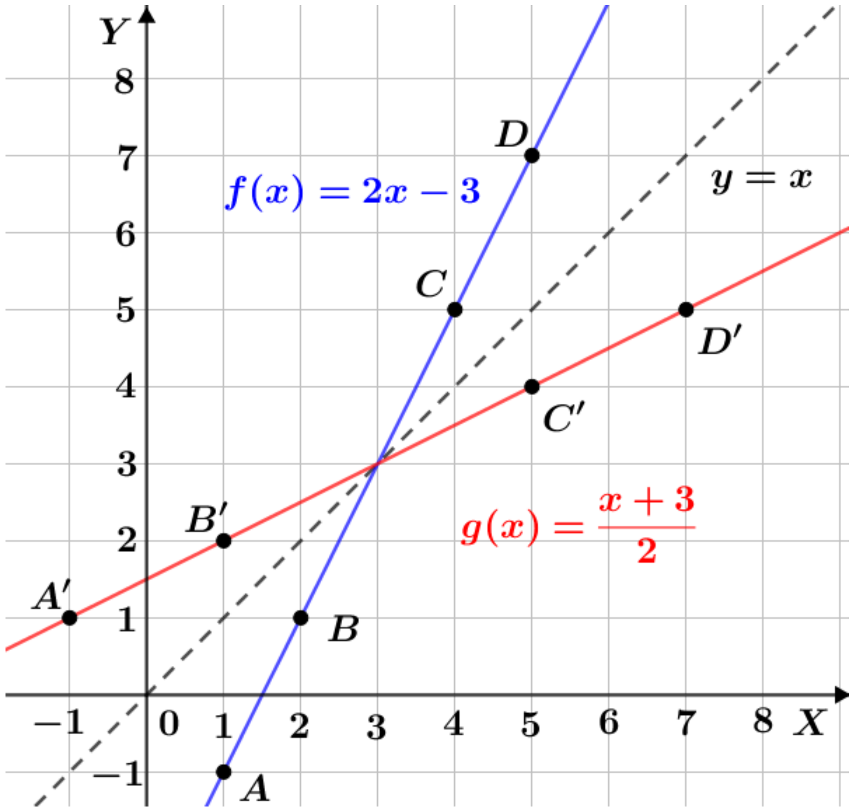
Sendo g a inversa de uma função f, pode-se provar que os gráficos de f e g são simétricos em relação a reta $y = x$ conhecida como bissetriz dos quadrantes ímpares. Para o leitor interessado nessa demonstração, sugerimos a referência [13].

Assim, se $G(f) = \{(x,y) \in A \times B;\ y = f(x)\}$, então $G(g) = \{(y,x) \in B \times A;\ x = g(y)\}$. Em outras palavras, se um ponto $P = (x,y)$ pertence ao gráfico de f, significa dizer que o ponto $P' = (y,x)$ pertence ao gráfico de g. Note que a representação de ambos os gráficos no plano cartesiano fica um pouco confusa, pois as abscissas dos pontos de $G(g)$ estão representadas pela mesma letra que as ordenadas dos pontos de $G(f)$. Geralmente resolvendo esse problema representando ambas as funções na mesma variável. Dessa forma, para representar as funções inversas

$$f(x) = 2x - 3 \;\; e \;\; g(y) = \frac{y+3}{2}$$

vista no exemplo 2.11 em um mesmo plano XOY, trocamos a variável y pela variável x na função g. Com isso, escreveremos que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$ é a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. A Figura 27 exibe o gráfico das funções g e f em um mesmo plano.

Figura 27: Gráfico das funções inversas



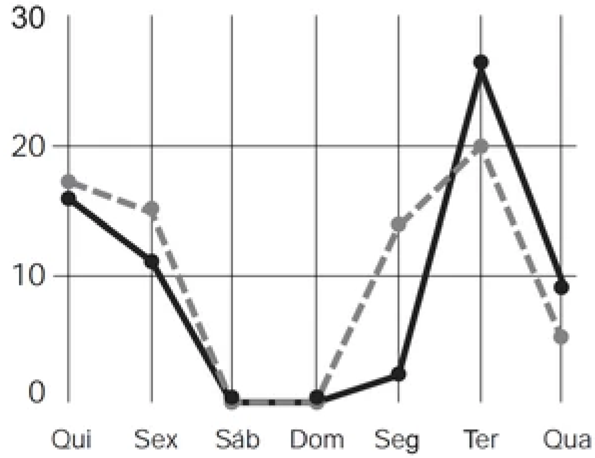
Fonte: Autor.

Perceba que os pontos $A = (1, -1)$, $B = (2, 1)$, $C = (4, 5)$ e $D = (5, 7)$ pertencem ao gráfico de f, enquanto que os pontos $A' = (-1, 1)$, $B' = (1, 2)$, $C' = (5, 4)$ e $D' = (7, 5)$ pertencem ao gráfico de g.

2.7 Questões do ENEM

Exercício 1. *(ENEM 2012)*

A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



Fonte: [17].

O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://blog.bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

a) Segunda e na terça-feira.

b) Terça e na quarta-feira.

c) Terça e na quinta-feira.

d) Quinta-feira, no sábado e no domingo.

e) Segunda, na quinta e na sexta-feira.

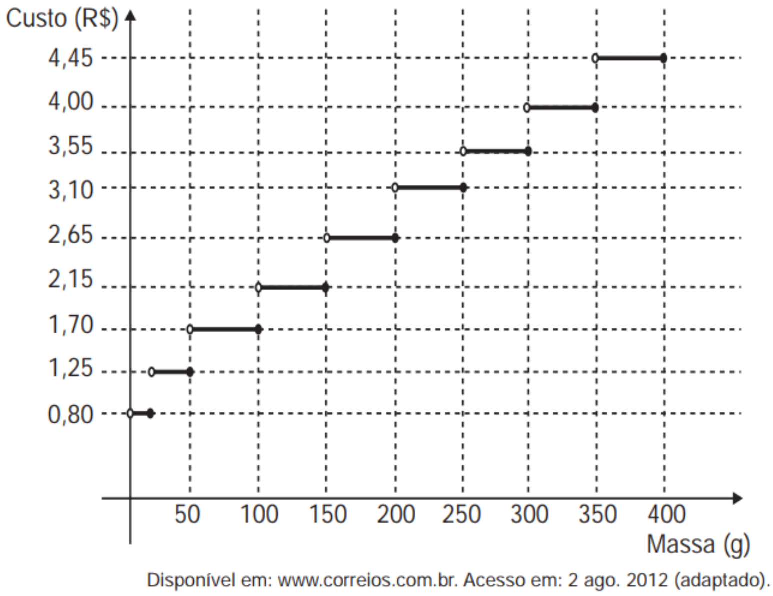
Solução:

A Figura expõe os dias da semana no eixo horizontal e o número de reclamações no eixo vertical. Note que os pontos da linha contínua (reclamações resolvidas) estão acima dos ponto da linha tracejada (reclamações recebidas) apenas na terça e na quarta-feira. Portanto o nível de eficiência foi bom apenas na terça e quarta-feira.

Resposta: Letra b. ◊

Exercício 2. *(ENEM 2013)*

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Fonte: [17].

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

a) 8,35.

b) 12,50.

c) 14,40.

d) 15,35.

e) 18,05.

Solução:

Inicialmente note que o eixo das abscissas representa a massa das cartas em gramas e o eixo das ordenadas representa o custo pago para o envio da carta em reais.

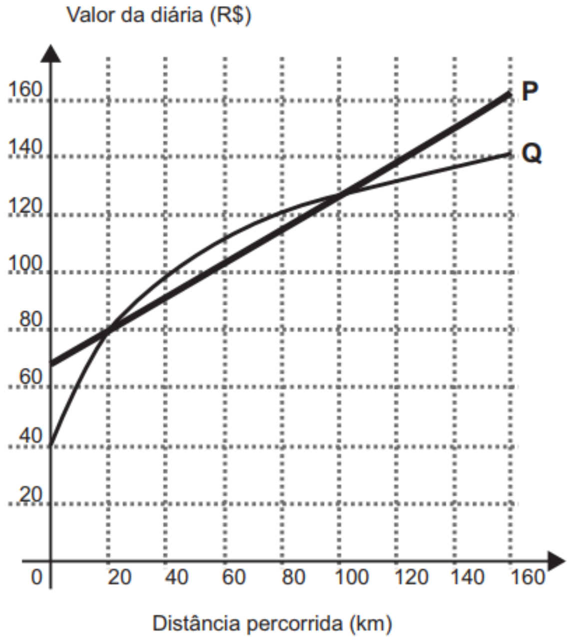
Perceba também que as retas perpendiculares ao eixo das abscissas que passam pelos pontos $(100, 0)$, $(200, 0)$ e $(350, 0)$ intersectam as retas perpendiculares ao eixo das ordenadas que passam pelos pontos $(0, 1.70)$, $(0, 2.65)$ e $(0, 4.00)$ respectivamente. Logo, o custo para enviar uma carta cuja massa é igual a: 100 gramas é R\$1,70; 200 gramas é R\$2,65; 350 gramas é R\$4,00. Como queremos enviar 2 cartas de 100g, 3 de 200g e uma de 350g, então o valor total gasto será igual a

$$2 \cdot 1,70 + 3 \cdot 2,65 + 1 \cdot 4 = 15,35.$$

Resposta: Letra d. $\Diamond$

Exercício 3. *(ENEM 2015)*

Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis. Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



Fonte: [17].

O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

a) De 20 a 100.

b) De 80 a 130.

c) De 100 a 160.

d) De 0 a 20 e de 100 a 160.

e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

Solução:

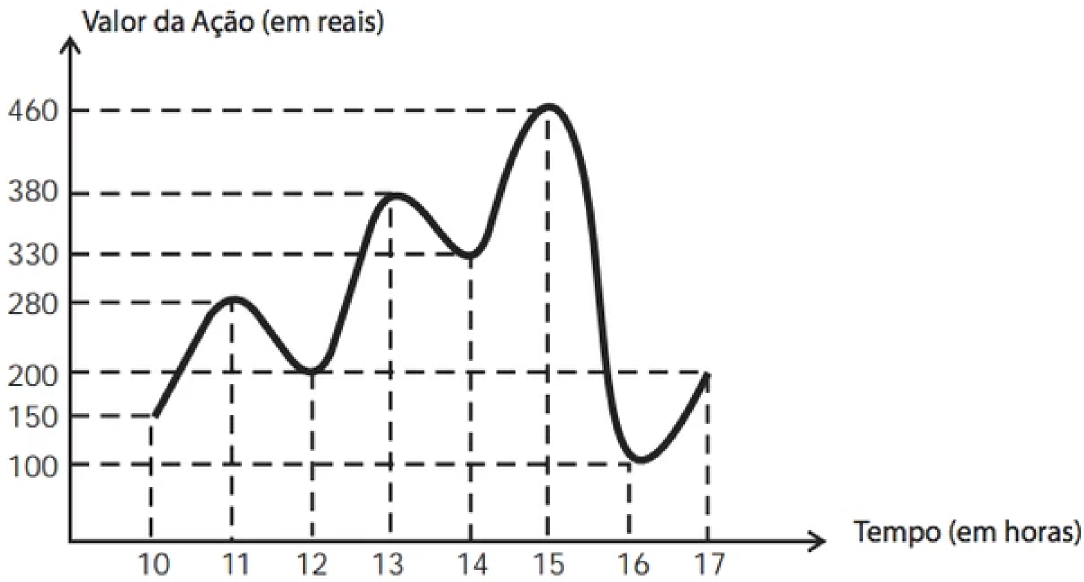
Note que o eixo das abscissas representa a distância percorrida pelo carro e o eixo das ordenadas representa o valor da diária cobrado pela locadora. Perceba que os pontos de Q cuja abscissa pertence ao intervalo $[0,20]$ têm ordenadas menores ou iguais aos pontos de P nesse mesmo intervalo. Isso acontece também com os pontos de Q cuja abscissa pertence ao intervalo

$[100,160]$. De modo contrário, os pontos de Q cuja abscissa pertence ao intervalo $[20,100]$ têm ordenadas maiores ou iguais aos pontos de P nesse mesmo intervalo. Assim, podemos concluir que o valor pago na locadora Q é menor ou igual ao valor pago na locadora P para distância de 0 a 20 e de 100 a 160.

Resposta: Letra d. $\Diamond$

Exercício 4. *(ENEM 2012)*

O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Fonte: [17].

Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Solução:

Inicialmente note que o eixo das abscissas representa o horário dos investimentos e o eixo das ordenadas representa o valor das ações.

Perceba também através da interseção das retas perpendiculares aos eixos que os pontos $(10,150)$, $(11,280)$, $(12,200)$, $(13,380)$, $(14,330)$, $(15,460)$, $(16,100)$ e $(17,200)$ pertencem ao gráfico. Tomando o ponto $(10,150)$ como exemplo, significa que as 10 horas, cada ação valia R\$150.

Queremos determinar qual investidor fez melhor negócio. Para isso, vamos considerar o ganho por ação de cada investidor calculando a diferença entre o valor da venda e o valor da compra das ações. Aquele que tiver o maior valor é o que fez melhor investimento, visto que cada um comprou o mesmo número de ações.

- O investidor 1 comprou suas ações às 10 horas a um custo de 150 reais e as vendeu as 15 horas a um valor de 460, ou seja, ele teve um saldo de $460-150=310$.
- O investidor 2 comprou suas ações às 10 horas a um custo de 150 reais e as vendeu as 17 horas a um valor de 200, ou seja, ele teve um saldo de $200-150=50$.
- O investidor 3 comprou suas ações às 13 horas a um custo de 380 reais e as vendeu as 15 horas a um valor de 460, ou seja, ele teve um saldo de $460-380=80$.
- O investidor 4 comprou suas ações às 15 horas a um custo de 460 reais e as vendeu as 16 horas a um valor de 460, ou seja, ele teve um saldo de $100-460=-360$.
- O investidor 5 comprou suas ações às 16 horas a um custo de 100 reais e as vendeu as 17 horas a um valor de 200, ou seja, ele teve um saldo de $200-100=100$.

Diante disso, concluímos que o investidor 1 foi o que fez melhor negócio.

Resposta: Letra a. $\Diamond$

3 FUNÇÃO AFIM

Para a festa de formatura do terceiro ano de uma escola em Juazeiro do Norte ficou combinado que aqueles que quisessem participar da festa, teriam de desembolsar o valor de R$1500,00 com direito a dez senhas, e que para cada senha extra o estudante teria de pagar mais R$50,00 por senha. Nessas condições podemos dizer que o custo C da formatura do estudante que quiser participar da festa será o valor fixo de 1500 reais, mais o valor variável da quantidade de senhas extras que o mesmo deseje. Observe a tabela:

Tabela 2: Custo da festa de formatura por senhas extras

Senhas extras	**Custos da festa**	**Total (R$)**
0	1500	1500
1	$1500+50$	1550
2	$1500+50\cdot 2$	1600
3	$1500+50\cdot 3$	1650
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	$1500+50\cdot 10$	2000
x	$1500+50x$	$1500+50x$

Fonte: Autor.

O custo C da formatura depende da quantidade x de senhas extras. A lei da função que expressa essa situação é $C(x) = 1500+50x$. Uma situação como essa é um modelo de função chamado função afim que definiremos a seguir. O texto que se segue foi baseado nas referências [9], [13], [14], [17], [19], [22], [23], [28], [30] e [36].

Definição 3.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax+b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow ax+b \end{aligned}$$

Note que $D_f = \mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. Além disso, supondo $a \neq 0$, então para todo elemento $y \in \mathbb{R}$, existe um elemento $x = \dfrac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Assim, o conjunto $Im(f) = \mathbb{R}$. Neste caso, como o contradomínio de f é igual a sua imagem, então f é sobrejetiva.

Por outro lado, sendo $a \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Leftrightarrow ax + b = ax' + b \\ &\Leftrightarrow x = x'. \end{aligned}$$

Logo, f é injetiva. Portanto, se $a \neq 0$, a função afim é bijetiva.

Algumas funções afins recebem nomes especiais devido as suas características. Vejamos.

- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamada de função constante.
- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamada de função linear.
- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada de função identidade.

Exemplo 3.2. *São funções afins:*

a) $f(x) = 2x - 3$, onde $a = 2$ e $b = -3$.

b) $f(x) = -2x$, onde $a = -2$ e $b = 0$.

c) $f(x) = 8$, onde $a = 0$ e $b = 8$.

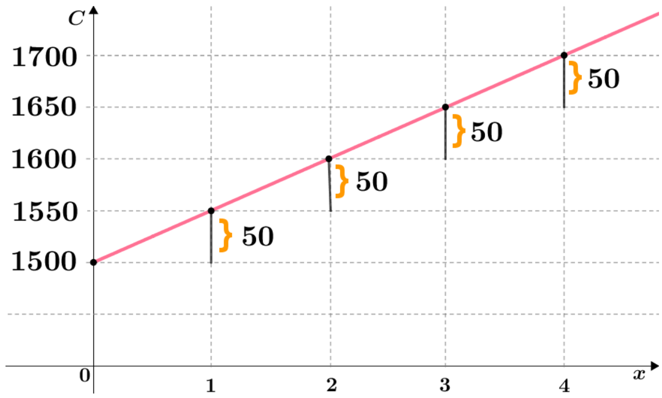
d) $f(x) = 10 - 3x$, onde $a = -3$ e $b = 10$.

3.1 Gráfico de uma função afim

É possível provar que o gráfico de uma função afim é uma reta, este resultado pode ser encontrado em [13], [22] e [23]. Da Geometria Plana sabemos que dois pontos determinam uma única reta, então para construirmos o gráfico de uma função $f(x) = ax + b$, precisamos apenas de dois pontos do mesmo.

Usando a situação do início deste capítulo como exemplo, vamos construir o gráfico da função $C(x) = 1500 + 50x$ que representa o custo da formatura em função do número de senhas extras. Observe que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ pode-se calcular $C(x)$. Para o exemplo em questão nos interessa $x \geq 0$. Assim, tomando alguns valores que a função assume e traçando a reta, o gráfico tem a seguinte forma:

Figura 28: Gráfico do custo da formatura



Fonte: Autor.

O gráfico da função nos dá informações importantes sobre o comportamento do fenômeno que foi modelado, nesse caso, é de grande valia compreender os papéis desempenhados pelos coeficientes a e b.

Na função $C(x) = 1500 + 50x$, temos $a = 50$, e em seu gráfico, exposto na Figura 28, observe que o acréscimo de uma unidade no valor de x, há um acréscimo igual a 50 no valor de $f(x)$. Ocorre que, o acréscimo de uma unidade à variável x, passando de x para $x+1$, corresponde a um acréscimo de $f(x+1) - f(x)$ no valor da função. Note que

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a(x+1) + b - (ax+b) \\ &= ax + a + b - ax - b \\ &= a. \end{aligned}$$

De uma forma geral, quando acrescentamos um valor h a variável x, temos em correspondência, um acréscimo no valor da função igual a:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= a(x+h) + b - (ax+b) \\ &= ax + ah + b - ax - b \\ &= ah. \end{aligned}$$

Além disso, podemos concluir que $a = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Definição 3.3. *Dados x e $x+h$ números reais, com $h \neq 0$, o número $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação média da função f no intervalo de extremos x, $x+h$.*

Assim, o coeficiente a representa a *taxa de variação* da função afim. Ele nos diz quanto o valor de $f(x)$ varia conforme aumentamos ou diminuímos o valor de x. Como a taxa de variação da função afim é constante, dizemos que f tem crescimento linear.

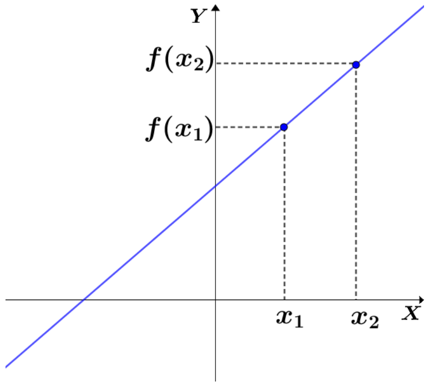
Geometricamente o número a é conhecido como inclinação ou coeficiente angular da reta que representa o gráfico da função afim em relação ao eixo OX.

Quando $a > 0$ a função afim é crescente, ou seja, para quaisquer $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Neste caso, o gráfico tem formato de uma reta ascendente (da esquerda para direita).

Figura 29: Função afim crescente



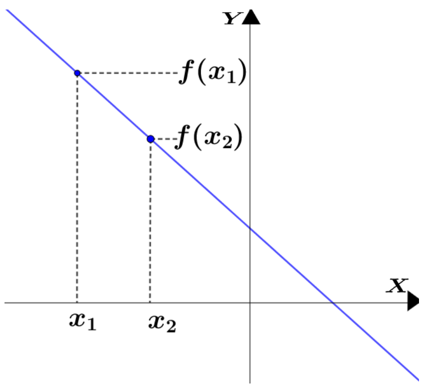
Fonte: Autor.

Quando $a < 0$ a função afim é decrescente, desta forma, para quaisquer $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Neste caso, o gráfico tem formato de uma reta descendente (da esquerda para a direita).

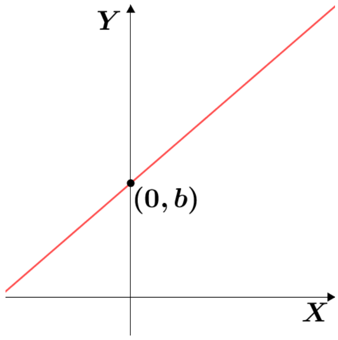
Figura 30: Função afim decrescente



Fonte: Autor.

Na função afim $f(x) = ax + b$, obtém-se b como o valor que a função assume quando $x = 0$. Note que $f(0) = a \cdot 0 + b$, logo $f(0) = b$. Isso significa que o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico de $f(x) = ax + b$. Do ponto de vista geométrico o número b, chamado de coeficiente linear da reta, é a ordenada do ponto onde o gráfico da função afim intersecta o eixo OY. Vejamos na Figura 31 o ponto $(0, b)$ do gráfico de $f(x) = ax + b$, onde $a > 0$.

Figura 31: Coeficiente b



Fonte: Autor.

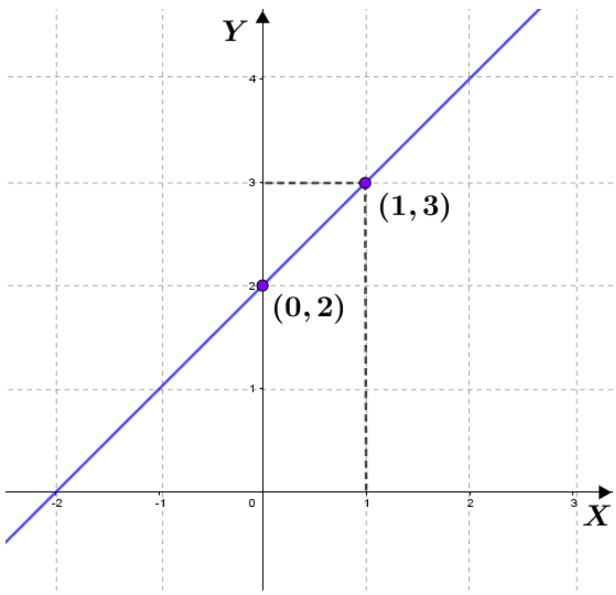
Exemplo 3.4. *Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$.*

Solução:

Como o gráfico de f é uma reta, precisamos de dois pontos de $G(f)$. Note que $b = 2$, pois $f(0) = 2$, então o gráfico corta o eixo OY no ponto $(0, 2)$. Para encontrarmos outro ponto de $G(f)$, basta calcular o valor que f assume em outro valor de x, por exemplo $x = 1$. Como $f(1) = 1 + 2 = 3$, logo o ponto $(1, 3)$ também pertence a $G(f)$. Os pontos encontrados determinam uma reta que é o gráfico de $f(x) = x + 2$.

Figura 32: Gráfico da função $f(x) = x + 2$

x	$f(x) = x + 2$
0	2
1	3



Fonte: Autor.

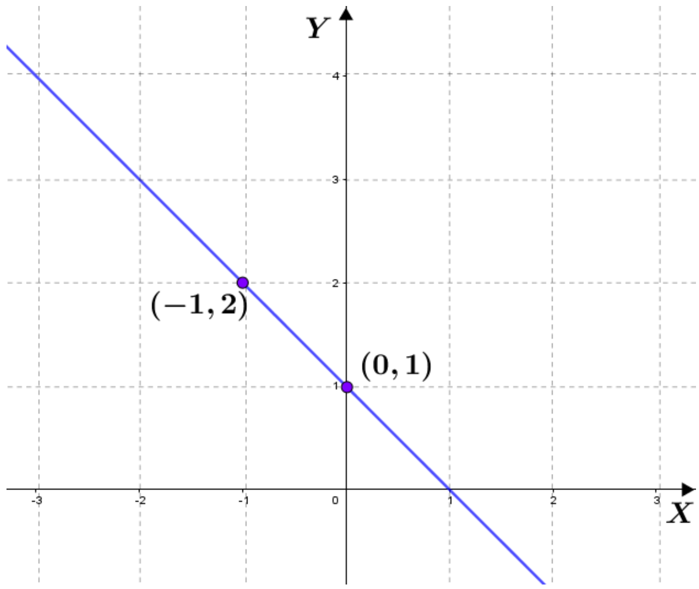
Exemplo 3.5. *Construa o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=-x+1$.*

Solução:

Precisamos de dois pontos de $G(f)$. Como $b=1$, pois $f(0)=1$, então o gráfico corta o eixo OY no ponto $(0,1)$. Para encontrarmos outro ponto de $G(f)$, podemos verificar o valor que f assume para $x=-1$. Veja que $f(-1)=-(-1)+1=2$, logo o ponto $(-1,2)$, também pertence a $G(f)$. Os pontos encontrados determinam uma reta que é o gráfico de $f(x)=-x+1$.

Figura 33: Gráfico da função $f(x)=-x+1$

x	$y=-x+1.$
0	1
-1	2



Fonte: Autor.

3.2 Determinação de uma função afim

Como visto, o gráfico da função afim é uma reta, e como uma reta fica inteiramente determinada conhecendo dois de seus pontos, podemos então determinar os coeficientes a e b de uma função afim, se conhecermos dois de seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, onde $x_1\neq x_2$.

Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função afim $f(x)=ax+b$ tal que $f(x_1)=y_1$ e $f(x_2)=y_2$, com $x_1\neq x_2$. Para obter os coeficientes a e b da função, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1+b=y_1\\ ax_2+b=y_2, \end{cases}$$

onde a e b são as incógnitas.

Fazendo a diferença entre a segunda equação e a primeira, temos

$$\begin{aligned} a(x_2-x_1) &= y_2-y_1\\ a &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de a na primeira equação ficamos com:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x_1+b &= y_1\\
b &= y_1-\frac{x_1(y_2-y_1)}{x_2-x_1}\\
&= \frac{(x_2-x_1)y_1-x_1(y_2-y_1)}{x_2-x_1}\\
&= \frac{x_2y_1-x_1y_1-x_1y_2+x_1y_1}{x_2-x_1}\\
&= \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $b=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$.

Exemplo 3.6. *Determine a função afim $f(x)=ax+b$ sabendo que $f(2)=5$ e $f(-1)=-1$.*

Solução 1:

Para determinar o valor de a fazemos

$$a=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{5-(-1)}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2.$$

O número b pode ser obtido, substituindo o valor de a já encontrado em um dos valores de f que já conhecemos, por exemplo, $f(2)=5$. Desta forma

$$a\cdot 2+b=5\Rightarrow 2\cdot 2+b=5\Rightarrow b=1.$$

Concluímos que $f(x)=2x+1$. ◊

Solução 2:

Como $f(2)=5$ e $f(-1)=-1$, então

$$a\cdot 2+b=5 \ \ e \ \ a\cdot(-1)+b=-1.$$

Assim, para determinar os valores de a e b basta resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2a+b=5\\ -a+b=-1.\end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2 ficamos com

$$\begin{cases} 2a+b=5\\ -2a+2b=-2.\end{cases}$$

Somando as equações obtemos

$$3b=3\Rightarrow b=1.$$

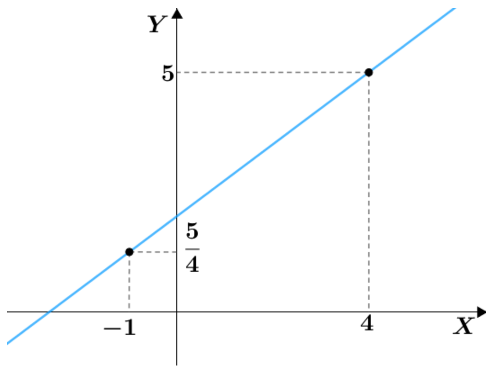
Para obter o valor de a, basta substituir o valor de b em uma das equações, por exemplo, substituindo o valor de b na equação $2a+b=5$ resulta que

$$2a+1=5 \Rightarrow a=2.$$

Portanto $f(x)=2x+1$. $\lozenge$

Exemplo 3.7. *Determine os valores de a e b da função afim $y=ax+b$ cujo gráfico é dado na Figura 34 a seguir:*

Figura 34: Gráfico da função



Fonte: Autor.

Solução:

Observando a Figura 34, os pontos $\left(-1,\dfrac{5}{4}\right)$ e $(4,5)$ pertencem ao gráfico da função. Isso significa que $f(-1)=\dfrac{5}{4}$ e $f(4)=5$, então

$$\begin{cases} (-1)a+b=\dfrac{5}{4} \\ 4a+b=5. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $a=\dfrac{3}{4}$ e $b=2$. $\lozenge$

3.3 Estudo do sinal da função afim

Estudar o sinal da função afim significa determinar onde a função assume valores positivos ($f(x)>0$), negativos ($f(x)<0$) ou nulos ($f(x)=0$). Para isso precisamos conhecer o zero da função e sua taxa de crescimento.

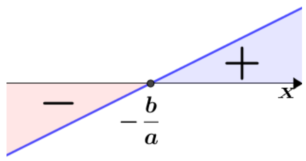
Supondo f não constante, o zero da função afim é o valor dado a variável x para que tenhamos $f(x)=0$. Podemos entendê-lo como o valor da raiz da equação $ax+b=0$. Supondo

$a \neq 0$, então $x = -\dfrac{b}{a}$, ou seja $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$. Do ponto de vista geométrico, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ nos diz que o gráfico da função afim intersecta o eixo OX no ponto $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$.

Se $a > 0$ a função $f(x) = ax + b$ é crescente:

- $f(x) = 0$ para $x = -\dfrac{b}{a}$;
- $f(x) > 0$ para $x > -\dfrac{b}{a}$;
- $f(x) < 0$ para $x < -\dfrac{b}{a}$.

Figura 35: Sinal da função afim quando $a > 0$

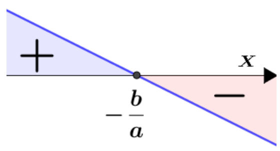


Fonte: Autor.

Se $a < 0$ a função $f(x) = ax + b$ é decrescente:

- $f(x) = 0$ para $x = -\dfrac{b}{a}$;
- $f(x) > 0$ para $x < -\dfrac{b}{a}$;
- $f(x) < 0$ para $x > -\dfrac{b}{a}$.

Figura 36: Sinal da função afim quando $a < 0$



Fonte: Autor.

Exemplo 3.8. *Júlia tem uma lojinha de roupas e costuma viajar pelo Ceará procurando fornecedores mais baratos. Em uma viagem à Fortaleza foi conhecer a Feira de Parangaba e lá fez compras de roupas variadas gastando R\$700,00 em mercadoria. Ela deseja vender as peças de roupa ao valor de R\$50,00 cada. A partir de quantas roupas vendidas Júlia terá lucro?*

Solução:

Júlia venderá cada peça de roupa ao valor de R\$ $50,00$. Sendo x o número de roupas vendidas, o valor arrecadado por ela com a venda de roupas é igual a $50x$.

Para determinar o saldo S da vendedora em função do número x de roupas vendidas, deve-se considerar o investimento de R\$700,00 em mercadoria feito inicialmente. O saldo S dela, é obtido fazendo a diferença entre o valor arrecadado e o valor investido. Logo, a função que expressa esse saldo é $S(x) = 50x - 700$.

Desta forma, para resolvermos o problema precisamos descobrir para quais valores de x temos $f(x) > 0$. Calculando a raiz da equação $50x - 700 = 0$, temos

$$x = \frac{-(-700)}{50} = 12.$$

Isso nos diz que quando $x = 12$ a receita será nula. Como $a = 50 > 0$ a função é crescente. Desta forma,

$$x > 12 \Rightarrow f(x) > 0 \quad e \quad x < 12 \Rightarrow f(x) < 0.$$

Portanto ela terá lucro quando vender mais que 12 peças de roupas. ◊

3.4 Questões do ENEM

Exercício 5. *(ENEM 2019)*

Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

a) $Y = 80X + 920$.

b) $Y = 80X + 1000$.

c) $Y = 80X + 1080$.

d) $Y = 160X + 840$.

e) $Y = 160X + 1000$.

Solução:

Sendo X o número total de funcionários da empresa, então a quantidade de diaristas mais o gerente é igual a X.

Já sabemos que o gerente ganha 1000 reais por semana, então excluindo-o da contagem dos funcionários, o número de diaristas é igual a $X-1$.

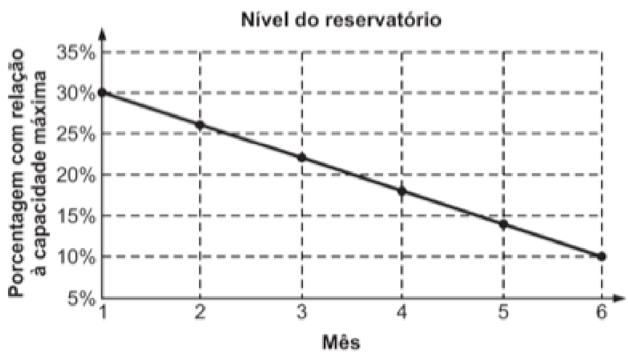
Os diaristas recebem $2 \cdot R\$80,00 = R\$160,00$ por semana, logo o gasto com diaristas é igual $160 \cdot (X-1)$. Portanto a quantia Y, em reais, gasto pela empresa semanalmente é:

$$\begin{aligned} Y &= 160(X-1)+1000 \\ Y &= 160X-160+1000 \\ Y &= 160X+840. \end{aligned}$$

Resposta: Letra d. ◊

Exercício 6. *(ENEM 2016)*

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Fonte: [17].

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio.

b) 3 meses e meio.

c) 1 mês e meio.

d) 4 meses.

e) 1 mês.

Solução:

Como o gráfico apresentado é um segmento de reta, então inicialmente vamos determinar a função afim $f(x) = ax + b$ que modela a situação. Para isso, veja que os pontos $(1, 30)$ e $(6, 10)$ pertencem ao gráfico da função, isso significa que $f(1) = 30$ e $f(6) = 10$, logo

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 30 \\ a \cdot 6 + b = 10. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: $a = -4$ e $b = 34$.

Assim, a expressão que representa a capacidade do reservatório em função do tempo é

$$f(x) = -4x + 34.$$

O reservatório atingirá o nível zero quando $f(x) = 0$. Devemos então obter o valor de x, tal que $f(x) = 0$, segue que

$$-4x + 34 = 0 \Rightarrow x = 8,5.$$

Portanto, o tempo mínimo que levará para que o reservatório atinja o nível 0 após os 6 meses será: $8,5 - 6,0 = 2,5$ meses.

Resposta: Letra a. ◊

Exercício 7. *(ENEM 2011)*

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou $R\$100.000,00$ por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de $R\$350.000,00$, enquanto a segunda cobrou $R\$120.000,00$ por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de $R\$150.000,00$. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$

b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350000) = 120(n + 150000)$

e) $350(n+100000) = 150(n+120000)$

Solução:

Em ambos os casos, os valores cobrados pelos serviços das empresas, consistem de um valor fixo mais um valor variável. A primeira empresa cobra 100.000 por km construído, assim, se a prefeitura construir n quilômetros, terá um gasto de $100.000 \cdot n$ mais o valor fixo de 350.000. A segunda empresa cobra 120.000 por km construído, logo, se a prefeitura quiser construir n quilômetros com a segunda empresa pagará $120.000 \cdot n$ mais o valor fixo de 150.000.

As expressões que dão os valores cobrados pela primeira e segunda empresa em função do total de quilômetros construídos são, respetivamente,

$$p = 100000 \cdot n + 350000 \ \ e \ \ q = 120000 \cdot n + 150000.$$

Se quisermos saber para qual valor de n as expressões tem o mesmo valor, devemos fazer

$$100000 \cdot n + 350000 = 120000 \cdot n + 150000$$

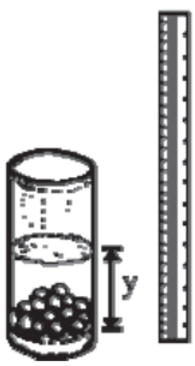
$$1000(100 \cdot n + 350) = 1000(120 \cdot n + 150)$$

$$100n + 350 = 120n + 150.$$

Resposta: Letra a. $\Diamond$

Exercício 8. *(ENEM 2009)*

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, conclui-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



Fonte: [17].

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35cm
10	6,70cm
15	7,05cm

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$.

b) $y = 25x + 20,2$.

c) $y = 1,27x$.

d) $y = 0,7x$

e) $y = 0,07x + 6$

Solução:

Inicialmente note que a cada acréscimo de 5 unidades de bolas, o nível da água cresce $0,35cm$ no nível da água, ou seja, a taxa de variação da função é constante. Isso significa que se trata de um modelo de função afim, logo a expressão que procuramos é do tipo $y = ax + b$.

Devemos então determinar os coeficientes a e b da função. Veja que

$$a = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{6,70 - 6,35}{10 - 5} = 0,07.$$

É possível concluir, diante das alternativas, que a resposta é a alternativa **e**, porém caso tivéssemos mais de uma alternativa com $a = 0,07$ poderíamos determinar o valor de b substituindo o valor de a em algum valor já conhecido de f, por exemplo $f(5)$. Como $f(5) = 6,35$, temos

$$\begin{aligned} 0,07 \cdot 5 + b &= 6,35 \\ 0,35 + b &= 6,35 \\ b &= 6. \end{aligned}$$

Portanto $y = 0,07x + 6$.

Resposta: Letra e. $\Diamond$

Exercício 9. *(ENEM 2012)*

As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:
$Q_O = -20 + 4P$
$Q_D = 46 - 2P$
em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5

b) 11

c) 13

d) 23

e) 33

Solução:

Para determinarmos o preço de equilíbrio devemos ter $Q_O = Q_D$, logo

$$-20 + 4P = 46 - 2P \Leftrightarrow P = 11.$$

Portanto o preço de equilíbrio é 11.

Resposta: Letra b. $\Diamond$

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Valmir é um agricultor do sul do Cariri que possui uma plantação de maracujá e agora está no tão esperado período da colheita. Valmir costuma vender 200 caixas de maracujá ao preço de R$ 40,00 cada. Entretanto notou que, para cada desconto de R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 20 caixas a mais. Observe a tabela a seguir.

Tabela 3: Receita do agricultor Valmir

Preço (R$)	**Número de caixas**	**Produto**	**Receita**
40	200	$200 \cdot 40$	8000
$40-1$	$200+20$	$220 \cdot 39$	8580
$40-2$	$200+20 \cdot 2$	$240 \cdot 38$	9120
$40-3$	$200+20 \cdot 3$	$260 \cdot 37$	9620
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$40-33$	$200+20 \cdot 33$	$860 \cdot 7$	6020
$40-34$	$200+20 \cdot 34$	$880 \cdot 6$	5280
$40-35$	$200+20 \cdot 35$	$900 \cdot 5$	4500
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$40-x$	$200+20x$	$(40-x)(200+20x)$	$-20x^2+600x+8000$

Fonte: Autor.

A receita R de Valmir depende do valor x em reais descontado no preço da caixa e pode ser expressa pela fórmula $R(x) = -20x^2 + 600x + 8000$, essa função é um modelo diferente da função afim, pois percebemos um expoente de grau 2 no termo $-20x^2$. Surge então a necessidade de estudarmos um outro tipo de função chamada de função quadrática.

Este capítulo teve como base as referências [9], [13], [14], [17], [22], [23], [26], [28], [30], [31] e [36].

Definição 4.1. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se quadrática quando existem* $a,b,c \in \mathbb{R}$, *com* $a \neq 0$, *tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Em símbolos:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & ax^2+bx+c \end{array}$$

Note que $D_f = \mathbb{R}$ e o contradomínio também é $\mathbb{R}$. Entretanto veremos mais adiante que diferente da função afim, $f(x) = ax + b$, para $a \neq 0$, a imagem da função quadrática não é $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.2. *São funções quadráticas:*

a) $f(x) = -3x^2 + 8x + 2$, onde $a = -3$, $b = 8$ e $c = 2$.

b) $f(x) = x^2 - 9$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$.

c) $f(x) = -8x^2 + 4x$, onde $a = -8$, $b = 4$ e $c = 0$.

d) $f(x) = 5x^2$, onde $a = 5$, $b = 0$ e $c = 0$.

e) $f(x) = 9 - 6x + x^2$, onde $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$.

4.1 Forma canônica da função quadrática

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Note que as duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Completando quadrado, ficamos com

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Logo,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

ou

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Esta é a forma canônica da função quadrática e dela surgem algumas consequências.

1. Fórmula geral de resolução da equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$, precisamos determinar os valores de x que satisfazem a equação. Estes valores são chamados *raízes da equação polinomial do segundo grau*. Por outro lado, chamamos *zeros da função quadrática* os valores de x onde f se anula, ou seja, os valores de x, tais que $f(x) = 0$. Note que tais valores de x são soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Portanto os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Definição 4.3. *Dizemos que um número real α é um zero da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se α é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$.*

Mostraremos então como obter uma fórmula geral de resolução da equação polinomial do segundo grau como consequência da forma canônica.

Como $a \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0 && (1)\\ &\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} && (2)\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. && (3)\end{aligned}$$

Uma observação importante é que como $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ a equação da linha (3) só tem sentido quando o *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$, é ≥ 0. Assim, se $\Delta < 0$ a equação em questão não possui solução real. Por outro lado, sendo $\Delta \geq 0$, é possível extrair a raiz quadrada nos dois lados da equação da linha (3). Logo

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} && (4)\\ &\Leftrightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (5)\\ &\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (6)\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. && (7)\end{aligned}$$

A igualdade da linha (7) é conhecida como *Fórmula de Bhaskara.*

Quando $\Delta > 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem duas raízes distintas

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\; e \;\; x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Quando $\Delta = 0$, temos $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Dizemos neste caso, que a equação possui uma única raiz chamada raiz dupla.

2. Soma e produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Sendo S a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então $S = x_1 + x_2$, logo

$$\begin{aligned} S &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= -\frac{2b}{2a}\\ &= -\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Portanto, a soma das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ é $-\dfrac{b}{a}$.

Por outro lado, sendo P o produto das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, isto é, $P = x_1 \cdot x_2$, então

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\right) \\ &= \left(\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\right) \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Logo, o produto entre as raízes é $\dfrac{c}{a}$.

3. Valor mínimo e valor máximo da função quadrática.

A forma canônica

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a},$$

é exibida como uma soma de duas parcelas. A parcela $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ depende de x, enquanto que a parcela $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ é constante.

Supondo $a>0$, note que a parcela $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, neste caso o menor valor da soma é atingido se

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

isto é, quando $x = -\dfrac{b}{2a}$. Neste ponto $f(x)$ também assume seu *valor mínimo*, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f(x) = ax^2+bx+c \geq \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Portanto, sendo $a>0$, o valor mínimo assumido por $f(x) = ax^2+bx+c$ é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Se $a<0$, o valor $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ é o *valor máximo* assumido por $f(x)$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f(x) = ax^2+bx+c \leq \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Além disso, podemos concluir que se $a > 0$, então $Im(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right]$ e se $a < 0$, então $Im(f) = \left[-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$. Como o contradomínio da função quadrática é $\mathbb{R}$, segue que f não é sobrejetiva.

4. Sendo x', $x'' \in \mathbb{R}$, com $x' \neq x''$, então $f(x') = f(x'')$ se, e somente se, $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Supondo $x' \neq x''$, a igualdade $f(x') = f(x'')$ é válida se, e somente se,

$$\begin{aligned} a\left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} &= a\left(x'' + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \\ \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(x'' + \frac{b}{2a}\right)^2. \end{aligned}$$

Como $x' \neq x''$, então

$$\begin{aligned} x' + \frac{b}{2a} &= -\left(x'' + \frac{b}{2a}\right) \\ \frac{x'+x''}{2} &= -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

Assim, dois valores distintos x' e x'' da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assumem a mesma imagem, se e somente se, $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$. Perceba que esse resultado nos diz também que a função quadrática não é injetiva.

Exemplo 4.4. *Determine, se existirem, os zeros da função quadrática* $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

Solução:

Usaremos a fórmula resolutiva para encontrar as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$. Identificando os coeficientes, temos $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$, logo

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \\ &= 49 - 40 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Sobre o valor do Δ, lembremos que:

- $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes distintas x_1 e x_2.

Desta forma, como $\Delta = 9 > 0$, temos:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7-3}{2} = 2.$$

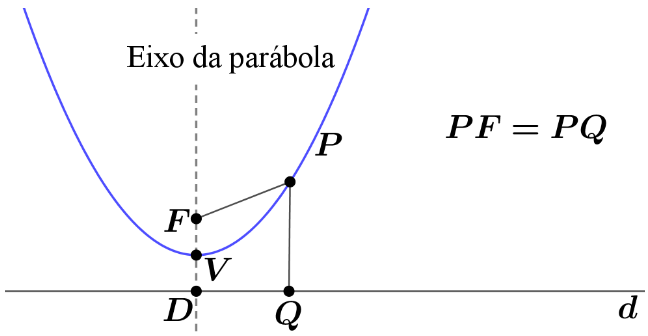
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7+3}{2} = 5.$$

Portanto, os zeros da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$ são 2 e 5. ♢

4.2 Gráfico da função quadrática

Dados um ponto F e uma reta d que não o contém. Chamamos parábola de foco F e diretriz d o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d. Vejamos a Figura 37 a seguir. A reta que contém o foco F e é perpendicular à diretriz d, chama-se eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice dessa parábola. O vértice V é o ponto médio do segmento de reta cujas extremidades são o foco F e o ponto D, que é a interseção do eixo da parábola com a diretriz d.

Figura 37: Parábola



Fonte: Autor, baseado em [9] e [22].

Pode-se mostrar que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola que tem o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right)$$

como foco e a reta horizontal

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$$

como diretriz. As demonstrações destes resultados podem ser encontrada em [22], [23] e [31].

Na seção 4.1, a consequência 4 da forma canônica nos diz que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores iguais $f(x') = f(x'')$ se, e somente se,

$$\frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Geometricamente significa dizer que pontos com abscissas distintas x' e x'' possuem a mesma ordenada se, e somente se, x' e x'' são equidistantes da abscissa $x = -\frac{b}{2a}$. Assim, podemos afirmar que a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ é um eixo de simetria do gráfico de f, ou seja, é o eixo da parábola. Além disso, podemos determinar as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola, usando o fato que o vértice é o ponto de interseção da reta $x = -\frac{b}{2a}$ com o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Neste caso, é imediato que a abscissa do vértice é

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Logo, a ordenada do vértice é

$$y_v = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

Concluímos então que o vértice da parábola é o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Usando a consequência 3 da forma canônica, podemos afirmar que a concavidade da parábola é voltada para cima quando $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

De fato, se $a > 0$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume seu valor mínimo quando $x = -\frac{b}{2a}$, assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

Neste caso, o vértice da parábola é o ponto do gráfico que tem a ordenada de menor valor. Portanto se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

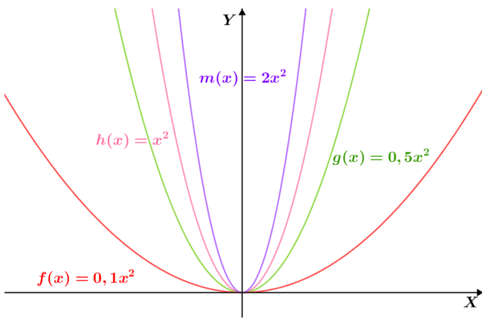
De modo contrário, se $a < 0$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume seu valor máximo quando $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

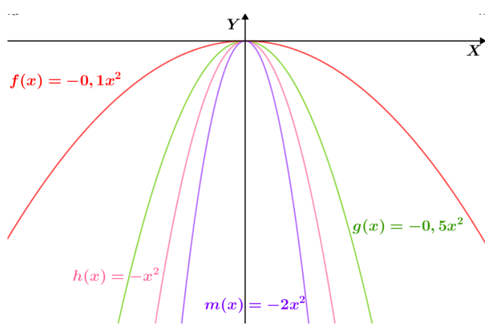
Logo, o vértice da parábola é o ponto do gráfico que tem a ordenada de maior valor. Assim, se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Pode-se mostrar ainda que quanto maior for o valor absoluto de a mais fechada será a parábola e quanto menor é o valor absoluto de a mais aberta se vê a parábola. O leitor interessado nessa demonstração poderá consultar [23].

Figura 38: Abertura da parábola variando conforme o valor de a



(a) $a > 0$



(b) $a < 0$

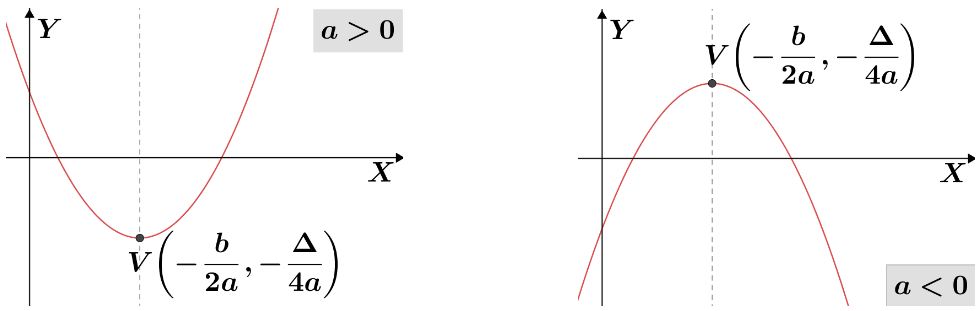
Fonte: Autor, baseado em [9].

Prova-se também que conhecendo três pontos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$ não colineares em $\mathbb{R}^2$, cujas abscissas são duas a duas distintas, existe uma única função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor as referências [22] e [31]. Assim, podemos determinar uma função quadrática conhecendo três pontos do seu gráfico.

4.2.1 Vértice da parábola

Como visto, uma parábola pode ter a concavidade voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). Se ocorre a primeira situação, a função admite um valor mínimo, na segunda, a função admite valor máximo. O vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola é o ponto em que a função quadrática assume valor mínimo ou máximo conforme o valor do coeficiente a, ele está presente entre os problemas mais comuns sobre funções quadráticas e por isso é uma peça fundamental nesse estudo.

Figura 39: Valor máximo e mínimo da função quadrática através da parábola



Fonte: Autor.

No início deste capítulo, vimos que a receita do agricultor Valmir é dada pela expressão $R(x) = -20x^2 + 600x + 8000$ e que nos descontos iniciais no preço da caixa a receita cresce, porém começa a decrescer em determinado momento. Isso é fácil de aceitar agora que sabemos que o gráfico da função que representa a receita de Valmir é uma parábola de concavidade voltada para baixo. As perguntas que se fazem presentes nesse contexto são: Qual a maior receita que o agricultor pode ter? E qual desconto deve ser dado no preço da caixa para que isso aconteça?

A interpretação gráfica do problema nos diz que a receita será máxima no vértice da parábola. Note que

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{600}{2(-20)} = 15$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1000000}{80} = 12500.$$

Logo $V = (15, 12500)$. Portanto, o desconto no deve ser de R$ 15,00 no preço da caixa para obter a receita máxima que é R$ 12.500,00.

Exemplo 4.5. *(ENEM PPL 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $f(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a*

a) 4.

b) 6.

c) 9.

d) 10.

e) 14.

Solução:

A função quadrática assume seu valor máximo quando $x = -\dfrac{b}{2a}$, então

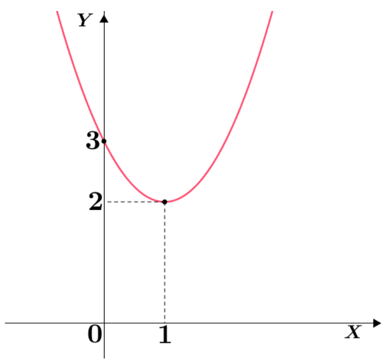
$$x = -\frac{12}{2 \cdot (-1)} = 6.$$

Portanto para obter lucro máximo os pacotes devem conter 6 bonés.

Resposta: Letra b. ◊

Exemplo 4.6. *Escreva na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ a lei da função que corresponde ao gráfico da Figura 40 a seguir:*

Figura 40: Parábola de vértice $V = (1, 2)$ intersectando o eixo Y no ponto $(0, 3)$.



Fonte: Autor, baseado [9].

Solução:

Podemos escrever a forma canônica da função quadrática usando as coordenadas do vértice da parábola. Note que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

é o mesmo que

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

Observe na Figura 40 que o vértice da parábola é o ponto $V = (1,2)$, logo $f(x) = a(x-1)^2 + 2$. Por outro lado, o ponto $(0,3)$ também pertence ao gráfico de f, assim, podemos descobrir o valor de a fazendo $f(0) = 3$. De fato, da equação $f(0) = 3$, segue que

$$a(0-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow a = 1.$$

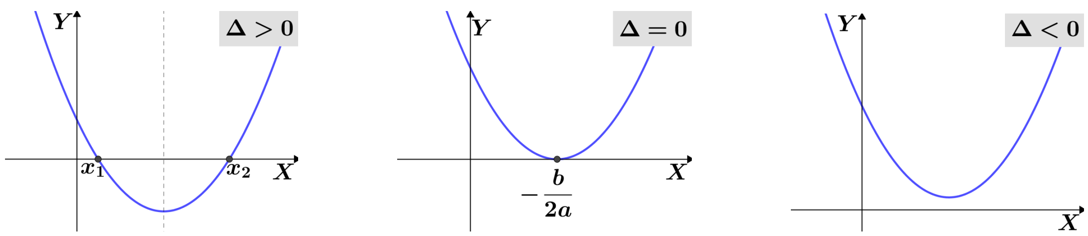
Portanto $f(x) = 1 \cdot (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$. ◊

4.2.2 Interseção da parábola com os eixos OX e OY

Vimos na seção 4.1 que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Do ponto de vista geométrico esses valores de x, (quando existem) são as abscissas dos pontos, onde o gráfico da função quadrática intersecta o eixo OX. Dessa forma, podemos concluir que:

- $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes distintas x_1 e x_2, neste caso, a parábola intersecta o eixo OX nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.
- $\Delta = 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem uma raiz (única) dupla e a parábola apenas tangencia o eixo OX no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.
- $\Delta < 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raiz real e portanto a parábola não intersecta o eixo OX.

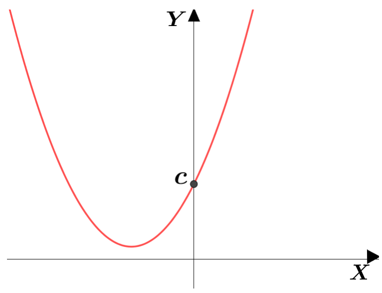
Figura 41: Interseção da parábola com o eixo OX conforme o discriminante Δ



Fonte: Autor.

Por outro lado, note que tomando $x = 0$ na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $f(0) = c$. Desta forma o coeficiente c é a ordenada onde a parábola intersecta o eixo OY, ou seja, o ponto $(0, c)$ pertence ao gráfico da função quadrática.

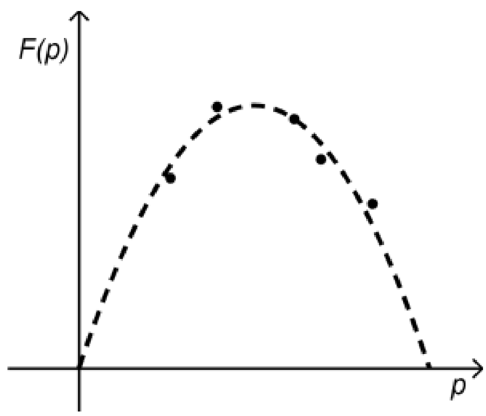
Figura 42: Parábola intersectando o eixo OY no ponto $(0, c)$



Fonte: Autor, baseado em [9].

Exemplo 4.7. *(UFPA/ADAPTADA) O faturamento de uma empresa na venda de certo produto pode ser modelado por uma fração quadrática do tipo $F(p) = ap^2 + bp + c$, sendo p o preço de venda praticado. A figura abaixo apresenta os faturamentos obtidos em função do preço e o gráfico da função quadrática que aproxima esse futuramento. Sobre a função quadrática $F(p) = ap^2 + bp + c$, é correto afirmar que:*

Figura 43: Gráfico do faturamento da empresa



Fonte: [13].

a) $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$ e $\Delta > 0$.

b) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ e $\Delta < 0$.

c) $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$ e $\Delta = 0$.

d) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ e $\Delta > 0$.

e) $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$ e $\Delta > 0$.

Solução:

Observando o gráfico da função $F(p) = ap^2 + bp + c$ nota-se que:

- A parábola tem concavidade para baixo, logo $a < 0$.
- O vértice da parábola está no primeiro quadrante, logo a abscissa do vértice é positiva, ou seja, $-\dfrac{b}{2a} > 0$. Como $a < 0$, segue que $b > 0$.
- A parábola intersecta o eixo OY na origem, ou seja, no ponto $(0,0)$, logo $c = 0$.
- A parábola intersecta o eixo OX em dois pontos, logo $\Delta > 0$.

Portanto temos $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$ e $\Delta > 0$.

Resposta: Letra e. $\Diamond$

4.3 Forma fatorada da função quadrática

Do estudo da forma canônica, quando $\Delta \geq 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, possui raízes reais x_1 e x_2. Lembremos que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Dessa forma, note que

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Logo,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2].$$

Desenvolvendo o segundo lado da igualdade temos

$$a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

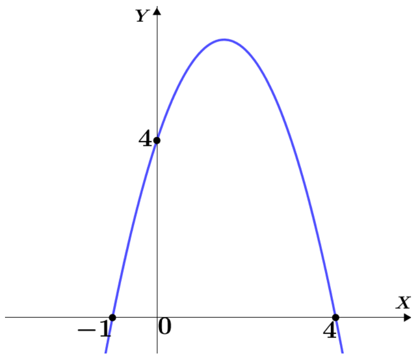
Portanto

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

A forma fatorada da função quadrática, além de muito útil para o cálculo dos zeros da função quando $b = 0$ ou $c = 0$, é também de grande importância na determinação dos coeficientes.

Exemplo 4.8. *Escreva na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ a lei da função quadrática que corresponde ao gráfico da Figura 44 a seguir:*

Figura 44: Parábola intersectando os eixos



Fonte: Autor, baseado [9].

Solução:

Note que o gráfico da função f intersecta o eixo das abscissas nos pontos $(-1,0)$ e $(4,0)$, isso significa que os zeros da função são -1 e 4, logo a função que procuramos pode ser escrita como $f(x) = a(x+1)(x-4)$. Por outro lado, o ponto $(0,4)$ também pertence ao gráfico de f, podemos então determinar o valor do coeficiente a usando o fato que $f(0) = 4$. De fato

$$a(0+1)(0-4) = 4 \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1.$$

Para determinarmos o valor de b e c, basta desenvolver

$$f(x) = -1(x+1)(x-4) = -x^2 + 3x + 4.$$

Portanto a lei da função que corresponde ao gráfico é $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. $\Diamond$

4.4 Estudo do sinal da função quadrática

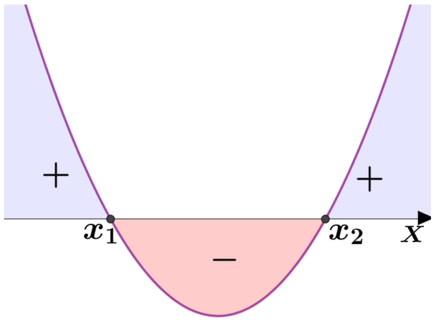
Estudar o sinal da função quadrática significa determinar onde a função assume valores positivos ($f(x) > 0$), negativos ($f(x) < 0$) ou nulos ($f(x) = 0$), se existirem. Para isso precisamos conhecer o coeficiente a, o discriminante Δ e os zeros da função caso existam.

Caso 1: $\Delta > 0$

i) Se $\Delta > 0$ e $a > 0$ então:

- $f(x) = 0$, quando $x = x_1$ ou $x = x_2$;
- $f(x) > 0$, quando $x < x_1$ ou $x > x_2$;
- $f(x) < 0$, quando $x_1 < x < x_2$.

Figura 45: Sinal da função quadrática quando $\Delta > 0$ e $a > 0$



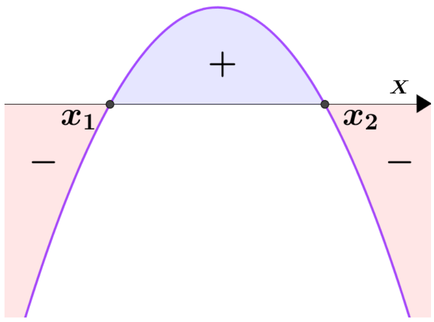
Fonte: Autor, baseado [9].

Note na Figura 45 que os pontos da parábola cujas abscissas estão entre as raízes da função quadrática, estão abaixo do eixo OX.

ii) Se $\Delta > 0$ e $a < 0$ então:

- $f(x) = 0$, quando $x = x_1$ ou $x = x_2$;
- $f(x) > 0$, quando $x_1 < x < x_2$;
- $f(x) < 0$, quando $x < x_1$ ou $x > x_2$.

Figura 46: Sinal da função quadrática quando $\Delta > 0$ e $a < 0$



Fonte: Autor, baseado [9].

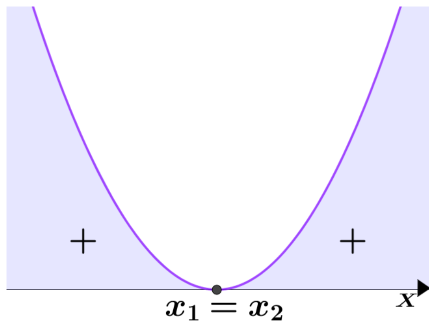
Veja na Figura 46 que os pontos da parábola cujas abscissas estão entre as raízes da função quadrática, situam-se acima do eixo OX.

Caso 2: $\Delta = 0$

i) Se $\Delta = 0$ e $a > 0$ então:

- $f(x) = 0$, quando $x = x_1 = x_2$
- $f(x) > 0$, para todo $x \neq x_1$

Figura 47: Sinal da função quadrática quando $\Delta = 0$ e $a > 0$



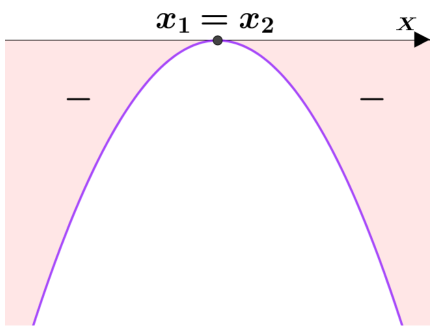
Fonte: Autor, baseado [9].

Perceba na Figura 47 que a parábola tangencia o eixo OX em seu vértice e que todos os outros pontos do gráfico estão acima do eixo das abscissas.

ii) Se $\Delta = 0$ e $a < 0$ então:

- $f(x) = 0$, quando $x = x_1 = x_2$
- $f(x) < 0$, para todo $x \neq x_1$

Figura 48: Sinal da função quadrática quando $\Delta > 0$ e $a < 0$



Fonte: Autor, baseado [9].

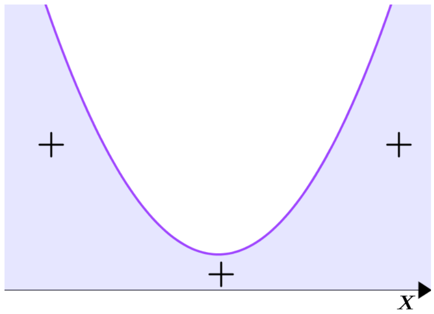
Note na Figura 48 que a parábola tangencia o eixo OX em seu vértice e que todos os outros pontos do gráfico estão abaixo do eixo das abscissas.

Caso 3: $\Delta < 0$

i) Se $\Delta < 0$ e $a > 0$ então:

- $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 49: Sinal da função quadrática quando $\Delta < 0$ e $a > 0$



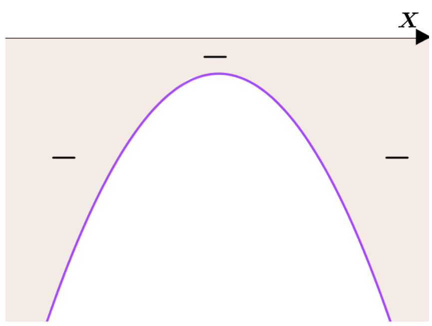
Fonte: Autor, baseado [9].

Observe na Figura 49 que todos os pontos da parábola estão acima do eixo das abscissas.

ii) Se $\Delta < 0$ e $a < 0$ então:

- $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 50: Sinal da função quadrática quando $\Delta < 0$ e $a < 0$



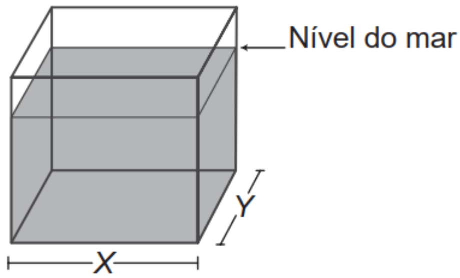
Fonte: Autor, baseado [9].

Note na Figura 50 que todos os pontos da parábola estão abaixo do eixo das abscissas.

4.5 Questões do ENEM

Exercício 10. *(ENEM 2017)*

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Fonte: [17].

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metros, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49

b) 1 e 99

c) 10 e 10

d) 25 e 25

e) 50 e 50

Solução:

Sabendo que 100 metros lineares dessa tela são usados nas laterais do viveiro, podemos concluir que o perímetro do retângulo de lados X e Y é 100. Logo

$$2X + 2Y = 100 \Leftrightarrow X + Y = 50 \Leftrightarrow Y = 50 - X.$$

Por outro lado, a área da base do viveiro é $A = X \cdot Y$.
Substituindo o valor de Y na expressão da área ficamos com

$$A = X \cdot (50 - X) = -X^2 + 50X.$$

Assim, $-X^2 + 50X$ é a área do viveiro expressa por uma função quadrática cujo valor máximo é atingido quando $X = -\frac{b}{2a}$. Portanto devemos ter

$$X = -\frac{50}{2 \cdot (-1)} = 25 \;\; e \;\; Y = 50 - 25 = 25.$$

Resposta: Letra d. ◊

Exercício 11. *(ENEM 2009)*

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$

b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.

c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.

d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.

e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

Solução:

O valor arrecadado é calculado fazendo o produto entre o valor do litro em reais e a quantidade de litros vendidos.

Cada litro de álcool custa $(1,50 - 0,01x)$ e a quantidade de litros vendidos é $(10000 + 100x)$, desta forma, o valor V é expresso por:

$$\begin{aligned} V &= (1,50 - 0,01x)(10000 + 100x) \\ &= 15.000 + 50x - x^2. \end{aligned}$$

Resposta: Letra d. ◊

Exercício 12. *(ENEM 2013)*

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19.

b) 19,8.

c) 20.

d) 38,0.

e) 39,0.

Solução:

Queremos saber em que minuto t, a temperatura T será igual a 39°, isto é $T(t) = 39$. Para encontrar tal valor de t, basta calcular a expressão

$$-\frac{t^2}{4} + 400 = 39,$$

cuja solução é $t_1 = -38$ e $t_2 = 38$. Como $t > 0$ segue que o tempo mínimo de espera é de 38 minutos.

Resposta: Letra d. ♢

Exercício 13. *(ENEM 2016)*

Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

a) 19º dia.

b) 20º dia.

c) 29º dia.

d) 30º dia.

e) 60º dia.

Solução:

Precisamos encontrar o valor de t para que tenhamos $f(t) = 1600$. Note que

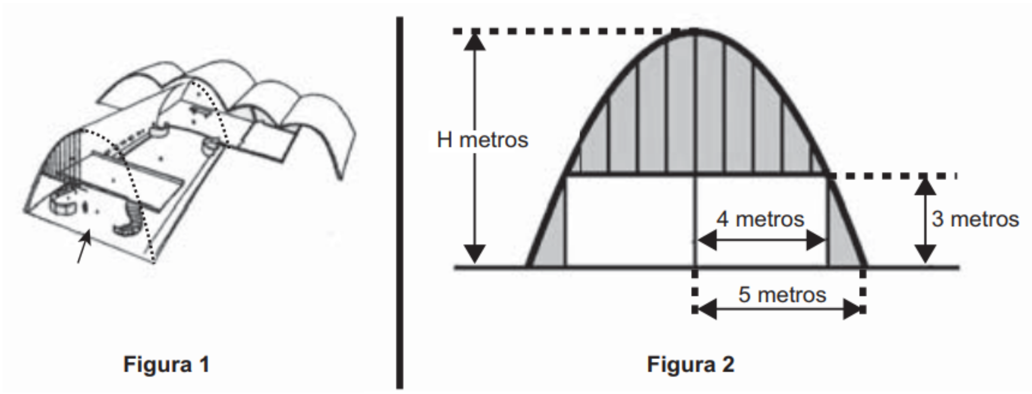
$$-2t^2 + 120t = 1600 \Leftrightarrow -2t^2 + 120t + 1600 = 0.$$

Logo, os valores que procuramos são as raízes da equação $-2t^2 + 120t + 1600 = 0$. Usando a fórmula resolutiva temos $t_1 = 20$ e $t_2 = 40$. Como o vigésimo dia vem primeiro, então a dedetização deverá ser feita nele.

Resposta: Letra b. $\Diamond$

Exercício 14. *(ENEM 2017)*

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóboda, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.



Fonte: [17].

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) $\frac{16}{3}$

b) $\frac{31}{5}$

c) $\frac{25}{4}$

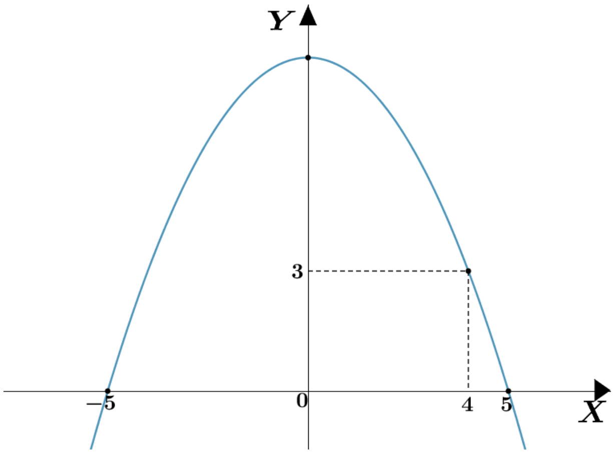
d) $\frac{25}{3}$

e) $\frac{75}{2}$

Solução:

Vamos representar a frente da igreja com uma parábola no plano cartesiano conforme a Figura 51.

Figura 51: Frente da igreja representada por uma parábola



Fonte: Autor.

A parábola intersecta o eixo das abscissas nos pontos $(-5,0)$ e $(5,0)$, logo as raízes da função quadrática são -5 e 5. Podemos escrever a lei da função que representa essa parábola usando a forma fatorada, logo $f(x) = a(x+5)(x-5)$. Por outro lado o ponto $(4,3)$ pertence a parábola. Podemos então determinar o valor de a fazendo $f(4) = 3$. Vejamos

$$a(4+5)(4-5) = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

Desta forma, a lei da função é $f(x) = -\frac{1}{3}(x+5)(x-5) = -\frac{1}{3}(x^2-25)$.

Para determinar a altura da igreja basta então encontrar o valor da função quando $x = 0$, assim:

$$f(0) = -\frac{1}{3}(0^2-25) = \frac{25}{3}.$$

Resposta: Letra d. $\Diamond$

Exercício 15. *(ENEM2014)*

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- a nota zero permanece zero.
- a nota 10 permanece 10.

- a nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

Solução:

A questão nos dá três valores assumidos por f :

$$f(0) = 0,\ f(5) = 6\ \ e\ \ f(10) = 10.$$

Ela também nos diz que f é uma função de grau menor que 3, logo ela pode ser uma função afim ou uma função quadrática. Observe que somando 5 unidades a variável x, passando de 0 para 5, há uma variação de 6 unidades no valor de f, enquanto que, somando 5 unidades a variável x, passando de 5 para 10, há apenas um acréscimo de 4 unidades no valor de f, ou seja, a função não tem uma taxa de variação constante, então não se trata de uma função afim. Neste caso, f é uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$. Como temos três valores assumidos por f, podemos obter a expressão utilizada pelo professor. Note que $f(0) = 0$, logo $c = 0$. Por outro lado $f(10) = 10$ e $f(5) = 6$, isto é

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 10\ \ e\ \ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 6.$$

Substituindo o valor de c nas equações, ficamos com o sistema

$$\begin{cases} 100a + 10b = 10 \\ 25a + 5b = 6. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $a = -\frac{1}{25}$ e $b = -\frac{7}{5}$. Portanto $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$.

Resposta: Letra a. $\Diamond$

5 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Iniciaremos esse capítulo com uma breve revisão sobre potências o qual será útil na compreensão das funções exponenciais e logarítmicas. O texto que se segue tem como base as referências [7], [8], [9], [13], [14], [15], [17], [20], [22], [23], [24], [25], [30] e [32].

5.1 Potenciação

Definição 5.1. *Seja a um número real positivo. Dado um inteiro $n > 0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a. Ou seja:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(n\ fatores)}$$

Em particular, como não há produto de um só fator, define-se $a^1 = a$.

Exemplo 5.2. *Potências com expoentes naturais:*

a) $5^1 = 5$.

b) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

c) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$.

Propriedade 5.3. *Dados $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $m, n \in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:*

1. Propriedade fundamental:

   $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. Divisão de potências de mesma base:

   $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m \geq n$

3. Potência de potência:

   $(a^m)^n = a^{mn}$

4. Potência de um produto:

   $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

5. Potência de um quociente:

   $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Vamos definir a^0 de modo que a propriedade fundamental continue válida. Para isso, devemos ter $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$. Convencionamos então que $a^0 = 1$.

Potência com expoente inteiro

Procurando preservar a propriedade fundamental, definiremos também a potência a^n, com $n \in \mathbb{Z}$. Queremos que

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Portanto devemos ter $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Definição 5.4. *Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$, e um $n \in \mathbb{N}^*$, define-se a potência a^{-n} por:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplo 5.5. *Potências com expoentes inteiros negativos:*

a) $7^{-1} = \dfrac{1}{7}$.

b) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$.

c) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$.

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{\left(\frac{8}{27}\right)} = \dfrac{27}{8}$.

Potência com expoente racional

Definição 5.6. *Dados um número real $a > 0$ e um inteiro $q > 0$, o símbolo $\sqrt[q]{a}$ representa o número real positivo b cuja q-ésima potência é igual a a, ou seja, $b^q = a$.*

A definição do número real $\sqrt[q]{a}$, chamado raiz q-ésima do número a, é estabelecida a partir das afirmações $\sqrt[q]{a} > 0$ e $(\sqrt[q]{a})^q = a$.

Exemplo 5.7. *Raiz q-ésima:*

a) $\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 81$.

b) $\sqrt[6]{64} = 2$, pois $2^6 = 64$.

c) $\sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 49$.

d) $\sqrt[7]{1} = 1$, pois $1^7 = 1$.

Vamos então estender a definição de potência, incluindo expoentes racionais $r = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*)$, assegurando no entanto a validade das propriedades vistas anteriormente. Desta forma, para definirmos $a^{\frac{p}{q}}$ devemos ter

$$(a^{(\frac{p}{q})})^q = (a^{(\frac{p}{q})\cdot q}) = a^p.$$

Assim, definimos $a^{\frac{p}{q}}$ como o número real positivo cuja q-ésima potência é igual a a^p. Pela definição de raiz podemos concluir que

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Em particular, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

Definição 5.8. *Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e um racional $\dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$), define-se potência de base a e expoente $\dfrac{p}{q}$ pela relação:*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Exemplo 5.9. *Potências com expoentes racionais:*

a) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

b) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

c) $6^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^{-2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{36}}$.

d) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{5}{3}\right)}$.

Potência com expoente irracional

Para o cálculo das potências com expoentes irracionais, vamos considerar valores aproximados do expoente por falta ou por excesso. Vejamos como calcular o valor de $2^{\sqrt{2}}$ por exemplo. Sejam m e n valores aproximados de $\sqrt{2}$ por falta e por excesso respectivamente.

Tabela 4: Valores aproximados de $\sqrt{2}$.

Casas decimais	Valores de m	Valores de n
Uma	$1,4$	$1,5$
Duas	$1,41$	$1,42$
Três	$1,414$	$1,415$
Quatro	$1,4142$	$1,4143$
...	...	...

Fonte: Autor, baseado em [30].

Veja na Tabela 5 que, conforme os valores de m e de n ficam mais próximos de $\sqrt{2}$, os números 2^m e 2^n se aproximam de um mesmo valor.

Tabela 5: Valores aproximados de $2^{\sqrt{2}}$.

Valores de 2^m	Valores de 2^n
$2^{1,4} = 2,63901582$	$2^{1,5} = 2,82842712$
$2^{1,41} = 2,65737162$	$2^{1,42} = 2,67585510$
$2^{1,414} = 2,66474965$	$2^{1,415} = 2,66659735$
$2^{1,4142} = 2,66511908$	$2^{1,4143} = 2,66530382$
...	...

Fonte: Autor, baseado em [30].

Esse valor é definido como $2^{\sqrt{2}}$. Até onde calculamos, pudemos concluir que

$$2,66511908 < 2^{\sqrt{2}} < 2,66530382.$$

Da mesma forma, é possível definir qualquer potência de base a, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente irracional.

5.2 Função exponencial

Os antibióticos são medicamentos que servem para eliminação de bactérias. Um dos antibióticos mais populares é o amoxicilina 500mg, que serve para tratar infecções respiratórias, urinárias, de ouvido entre outras. A meia-vida de uma substância é o tempo que ela leva para sua massa se reduzir a metade. A meia-vida de eliminação da amoxicilina é de aproximadamente 1 hora. Suponhamos que uma pessoa tenha tomado 500mg de amoxicilina às 8h da manhã, a Tabela 6 a seguir apresenta a quantidade de substância no organismo ao longo do dia:

Tabela 6: Quantidade de amoxicilina no organismo ao longo do dia

horário	**Massa da substância no organismo**
$7h$	$500mg$
$8h$	$250mg$
$9h$	$125mg$
$10h$	$62,5mg$
...	...

Fonte: Autor.

A quantidade de substância no organismo depende do tempo que ela foi ingerida, nesse contexto, podemos expressar a massa M da substância em função da quantidade de horas h que se passou após sua ingestão. Note que a cada hora que se passa a quantidade de substância no organismo é dividida por 2, isso é o mesmo que multiplicar por $\left(\frac{1}{2}\right)$, desta forma, quando se passam duas horas, a substância inicial é multiplicada por dois fatores iguais a $\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja, é multiplicada por $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, quando se passarem 3 horas será multiplicada $\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Logo, quando se passarem h horas, a quantidade inicial da massa da substância será multiplicada por $\left(\frac{1}{2}\right)^h$. Portanto podemos concluir que $M(h) = 500\left(\frac{1}{2}\right)^h$.

Tabela 7: Quantidade de massa no organismo com o passar das horas

horas após ingestão	**Massa da substância**	**Total**
0	500	500
1	$500(\frac{1}{2})$	250
2	$500(\frac{1}{2})^2$	125
3	$500(\frac{1}{2})^3$	$62,5$
...	...	...
h	$500(\frac{1}{2})^h$	$500(\frac{1}{2})^h$

Fonte: Autor.

Aqui temos um modelo de função onde a variável aparece no expoente. Esse modelo é conhecido como função do tipo exponencial.

Definição 5.10. *Dado um número real $a > 0$, com $a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a e expoente x, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\to a^x \end{aligned}$$

Note que $D_f = \mathbb{R}$ e definimos o contradomínio igual a imagem, o conjunto $\mathbb{R}_+^*$, logo f é sobrejetiva. Neste caso é possível definir dessa forma, pois a imagem não depende da escolha do a, diferentemente da função quadrática que depende do valor a ser positivo ou negativo. Na seção 5.3 retomaremos a discussão sobre a injetividade, sobrejetividade e bijetividade de f.

Exemplo 5.11. *São funções exponenciais:*

a) $f(x) = 2^x$.

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

c) $f(x) = (0,7)^x$.

d) $f(x) = (\sqrt{3})^x$.

Exemplo 5.12. *(UFPB) O valor de um certo imóvel, em reais, daqui a t anos é dado pela função* $V(t) = 1000 \cdot 0,8^t$*. Daqui a dois anos, esse imóvel sofrerá, em relação ao valor atual, uma desvalorização de:*

a) R$800,00

b) R$640,00

c) R$512,00

d) R$360,00

e) R$200,00

Solução:

Observe que $V(0) = 1000$. Calculando o valor de $V(2)$, temos $1000 \cdot (0,8)^2 = 640$. Dessa forma o imóvel terá uma desvalorização igual a $1000 - 640 = 360$.

Resposta: Letra d. $\Diamond$

5.2.1 A pandemia da Covid-19 e o crescimento exponencial

Esta seção teve como base o conteúdo exposto por Laís Modelli e Lara Pinheiro na referência [25].

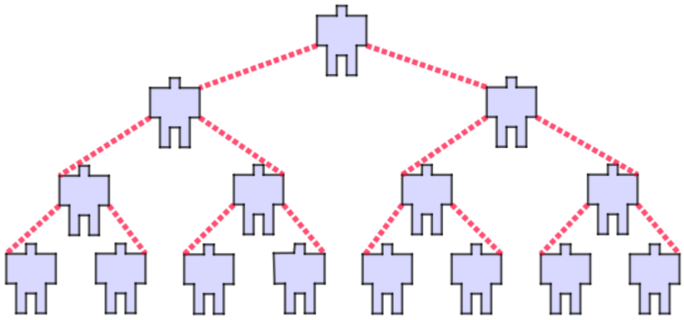
O ano 2020 será marcado na história da humanidade, pela pandemia da Covid-19 causada pelo novo coronavírus que já matou centenas de milhares de pessoas em todo o mundo. Desde o início da pandemia, ouviu-se muito dos especialistas em todos os meios de comunicação, que as pandemias tem um ciclo formado por três fases. Segundo os físicos Silas Poloni e Vitor Sudbrack, ambos da Universidade Estadual Paulista (Unesp), estas fases são as seguintes:

Fase 1: Há um crescimento muito rápido no número de pessoas infectadas nessa fase e esse comportamento é semelhante ao de uma função exponencial.

Para melhor compreensão, usaremos um exemplo baseado na aula do professor Roberto Ribeiro da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e na explicação sobre crescimento exponencial do professor Ricardo Suzuki apresentados em [25].

Imaginemos uma situação hipotética em que cada pessoa contaminada pelo vírus, fique infectada durante um período de 15 dias, e que nesse tempo consiga infectar outras duas pessoas. Vejamos a situação apresentada na Figura 52.

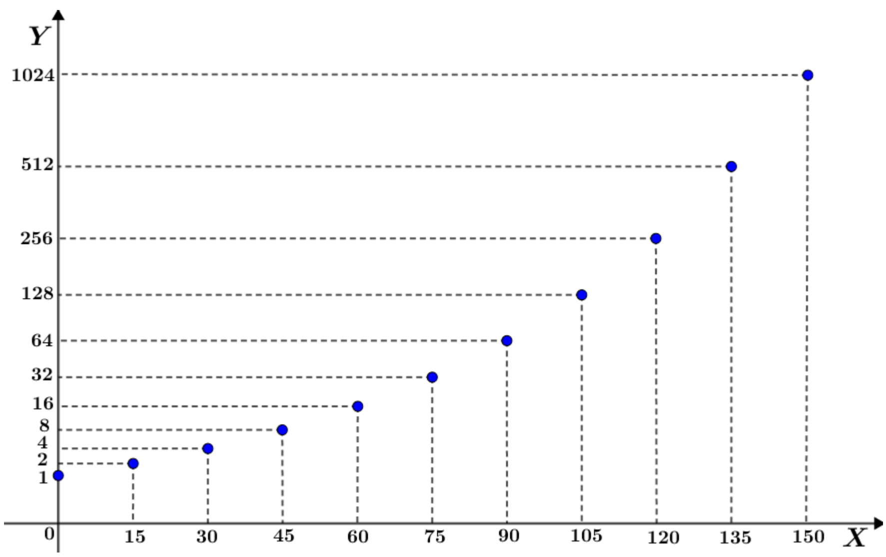
Figura 52: Transmissão do vírus



Fonte: Autor.

O primeiro indivíduo infectado transmite o vírus para duas pessoas nos primeiros 15 dias. Cada uma dessas novas pessoas infectadas, transmitem o vírus para outras duas pessoas, logo quando se passam 30 dias, após o primeiro caso, tem-se 4 pessoas infectadas. Cada uma dessas 4 pessoas infectadas, transmitem o vírus para outras duas pessoas e assim por diante. Ocorre que, a cada 15 dias, o número de pessoas infectadas é multiplicado por 2. Assim, 150 dias após a contaminação da primeira pessoa, o número de infectados chega a 1024. A Figura 53 exibe a evolução do número de pessoas infectadas pelo vírus a cada 15 dias.

Figura 53: Pessoas infectadas após o primeiro caso



Fonte: Autor.

Nessa situação hipotética, a expressão que nos dá a quantidade Y de pessoas infectadas em função do número X de dias é $Y = 2^{\frac{X}{15}}$. Veja que esta expressão é um modelo de função exponencial, por isso, a primeira fase da pandemia é marcada pelo crescimento exponencial de novos casos de pessoas infectadas.

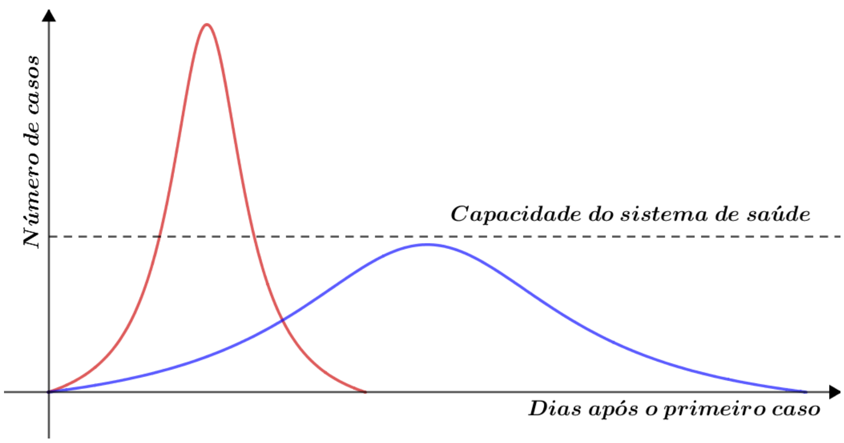
Fase 2: A pandemia tem o seu pico no número de pessoas infectadas.

Fase 3: Há um decaimento exponencial no número de infectados. Nessa fase a quantidade de pessoas que se recuperam da doença supera a de infectadas.

Estas três fases juntas representadas em um gráfico, formam uma curva chamada onda da epidemia.

Com base nisso, as medidas de proteção adotadas pelos governos em todo o mundo, determinaram que o melhor a se fazer seria evitar aglomerações e ficar em casa. Dessa forma, escolas, igrejas, estádios de futebol ou qualquer lugar com características de aglomerações de pessoas deveriam ser evitados, pois caso contrário, o número de infectados ficaria totalmente fora de controle e causaria um colapso gigantesco nos sistemas de saúde, fazendo com que o um número de mortes fosse extremamente maior. A campanha do "Fique em casa" usou muito o modelo exponencial para mostrar as pessoas, a necessidade do "achatamento" da curva da pandemia. Veja, na Figura 54, uma comparação da curva da pandemia com e sem medidas de proteção.

Figura 54: Curva da pandemia de Covid-19

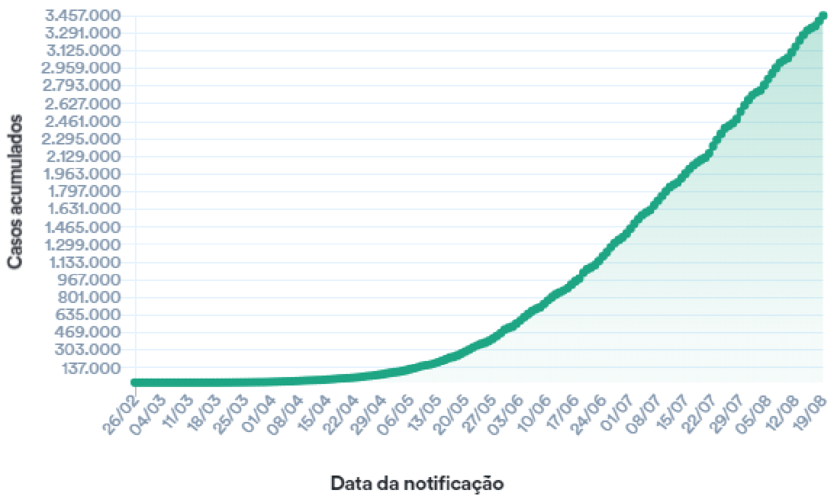


Fonte: Autor, baseado em [25].

Na Figura 54, o gráfico em vermelho representa o crescimento do número de casos sem medidas de proteção. Note que ele cresce de maneira acelerada fazendo com que a quantidade de pessoas infectadas seja muito maior que a capacidade do sistema de saúde representado pela linha tracejada. Por outro lado, o gráfico em azul representa o número de infectados com medidas de proteção. Neste caso, o número de infectados cresce mais lento, não sobrecarregando o sistema de saúde.

No Brasil, o primeiro caso confirmado de pessoa infectada foi em 26 de fevereiro de 2020 e um mês após a confirmação, o país já contabilizava 2.555 pessoas infectadas pelo vírus. Em menos de quatro meses esse número superou a marca de 1 milhão de pessoas segundo o Ministério da Saúde. A Figura 55 mostra essa evolução no gráfico.

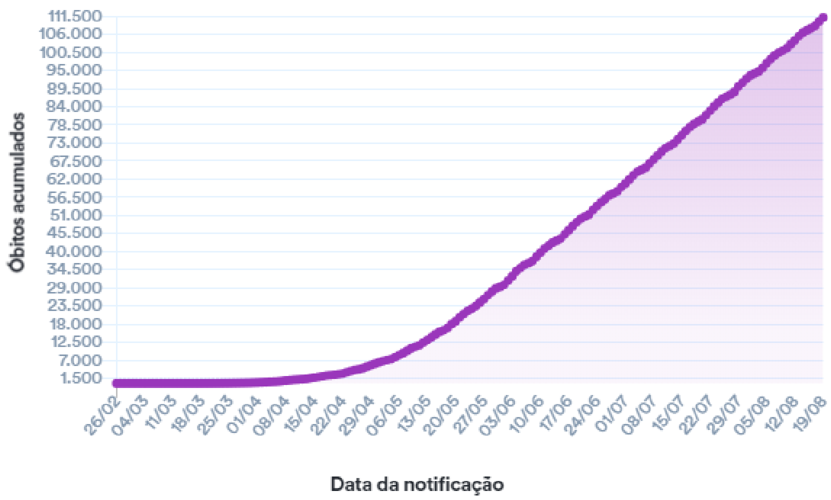
Figura 55: Evolução do Covid-19 no Brasil



Fonte: [8].

Em 17 de março registrou-se a primeira morte pela covid-19 no país. O número de mortes no Brasil, também cresceu exponencialmente. Conforme apresentamos na Figura 56.

Figura 56: Óbitos por Covid-19 por data de modificação



Fonte: [8].

A função exponencial é muito usada em aplicações práticas como a exposta acima por ter um crescimento muito acelerado e por isso é tão importante o seu estudo. Veremos adiante algumas características da função exponencial que são essenciais para a construção do gráfico dessa função.

5.3 Gráfico da função exponencial

Considere a função exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x)=a^x$ onde $a>0$ e $a\neq 1$. Supondo que $a>1$, para todo $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, tem-se

$$x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2},$$

ou seja, se $a>1$ a função exponencial é crescente em todo seu domínio. Se $0<a<1$ então para todo $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, temos

$$x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2},$$

isto é, se $0<a<1$ a função exponencial é decrescente em todo seu domínio. Consequentemente, em qualquer caso, a função exponencial é injetiva. Assim, para todo $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$,

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

A imagem da função exponencial é $\mathbb{R}_+^*$, isto é, para todo $x\in\mathbb{R}$ tem-se $f(x)>0$. Além disso, a função exponencial esta definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, neste caso, a imagem de f é igual ao seu contradomínio, logo f é sobrejetiva. Portanto se a função exponencial é injetiva e sobrejetiva, então ela é bijetiva. Para mais detalhes sobre os resultados anteriores, sugerimos ao leitor as referências [22] e [32].

Assim, sobre o gráfico da função exponencial, podemos fazer as seguintes afirmações:

i) O gráfico não toca o eixo OX, ou seja, não existe x tal que $f(x)=0$.

ii) O gráfico intersecta o eixo OY no ponto $(0,1)$. Isso decorre do fato que $a^0=1$ para todo a positivo.

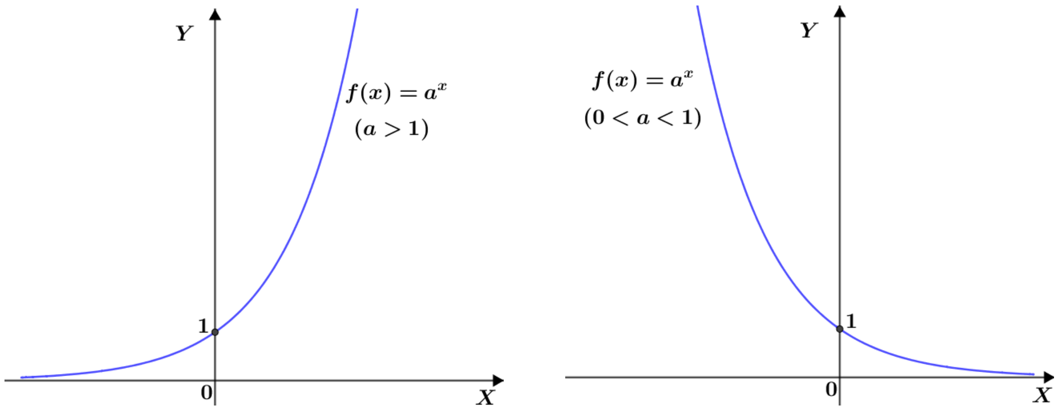
iii) O gráfico de $f(x)=a^x$ não tem pontos no terceiro e quarto quadrantes.

iv) Se $a>1$ e x varia da esquerda para direita, a curva exponencial $y=a^x$ apresenta um crescimento lento enquanto x é negativo. Quando $x>0$ e os valores de x aumentam, o crescimento de y torna-se cada vez mais acelerado.

v) Quando $0<a<1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y=a^x$ apresenta um decrescimento acelerado enquanto x é negativo. Quando $x>0$ e os valores de x aumentam, o decrescimento de y torna-se cada vez mais lento.

A Figura 57 exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$.

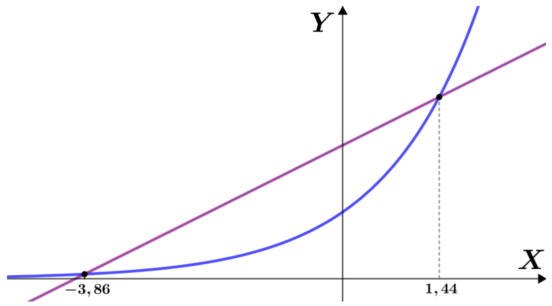
Figura 57: Gráfico da função $f(x) = a^x$



Fonte: Autor.

É possível mostrar para x suficientemente grande que o crescimento exponencial supera qualquer crescimento polinomial. A Figura 58 apresenta uma comparação do crescimento exponencial do gráfico de $y = 2^x$ com o crescimento linear do gráfico de $y = \frac{x}{2} + 2$.

Figura 58: Comparação entre o crescimento exponencial e o crescimento linear



Fonte: Autor.

Veja que, para $x < -3,86$ temos $2^x > \frac{x}{2} + 2$. Para $-3,86 < x < 1,44$ tem-se $\frac{x}{2} + 2 > 2^x$ e, para todo $x > 1,44$ tem-se sempre $2^x > \frac{x}{2} + 2$.

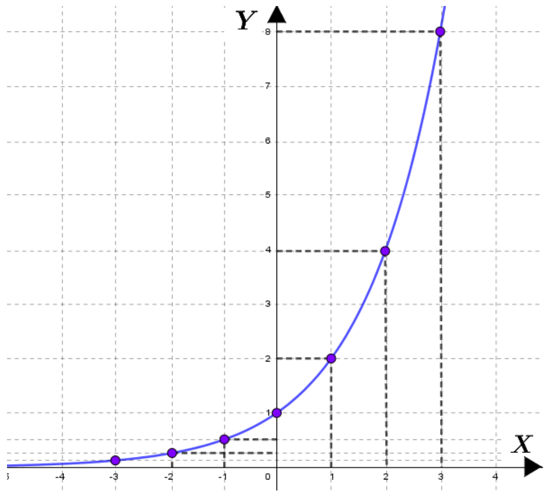
Exemplo 5.13. *Construa o gráfico da função definida por $f(x) = 2^x$.*

Solução:

Inicialmente, note que a base da função é 2. Como $2 > 1$, então a função é crescente. Assim, a curva exponencial $y = 2^x$ tem um crescimento lento quando x varia da esquerda para direita se $x < 0$ e acelerado quando $x > 0$. Para que isso fique evidente na construção do gráfico, determinemos alguns pontos no primeiro e no segundo quadrante. Façamos então uma tabela com x em abscissas e $f(x) = 2^x$ em ordenadas.

Figura 59: Gráfico da função $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	2
2	4
3	8



Fonte: Autor.

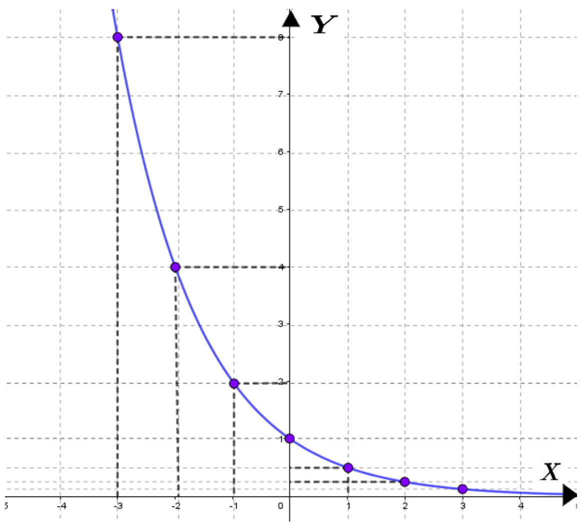
Exemplo 5.14. *Construa o gráfico da função definida por* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solução:

Inicialmente, note que a base da função é $\frac{1}{2}$. Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, então a função é decrescente. Logo, a curva exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tem um decrescimento acelerado quando x varia da esquerda para direita para valores $x < 0$ e se aproxima de zero quando $x > 0$. Vamos evidenciar isso no gráfico determinando pontos no primeiro e segundo quadrante. Façamos então uma tabela com x em abscissas e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ em ordenadas.

Figura 60: Gráfico da função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = (\frac{1}{2})^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Fonte: Autor.

5.4 Equações exponenciais

Equação exponencial é toda equação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas e diferentes de 1.

Exemplo 5.15. *São equações exponenciais:*

a) $2^x = 16$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$.

c) $5^{2x+1} = 125$.

d) $7^{2x} - 10 \cdot 7^x = 12$.

Método para resolução de equações exponenciais

Algumas equações exponenciais podem ser transformadas em potências de mesma base. Assim, podemos resolvê-las usando o fato de que a função exponencial é injetiva, isto é,

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo 5.16. *Resolva a equação* $81^x = 243$.

Solução:

Para resolver a equação, vamos transformá-la numa igualdade de potências de mesma base. Veja que $81 = 3^4$ e $243 = 3^5$, logo

$$(3^4)^x = 3^5 \Rightarrow 3^{4x} = 3^5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Portanto o conjunto solução é $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$. ◊

Exemplo 5.17. *Resolva a equação* $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Solução:

Podemos escrever 4 e 8 como potências de base 2, assim

$$(2^2)^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $2^x = k$, ficamos com $k^2 - 9k + 8 = 0$. Resolvendo a equação temos

$$k = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 7}{2}.$$

Logo $k_1 = 8$ e $k_2 = 1$.

Para determinar o valor de x devemos fazer $2^x = 8$ o que acarreta $x = 3$ e $2^x = 1$ o que acarreta $x = 0$. Portanto $S = \{0, 3\}$. ◊

Exemplo 5.18. *(PUC-MG) Sendo x e y reais, o valor de $x+y$ no sistema*

$$\begin{cases} 2^x = 4^y \\ 25^x = 25 \cdot 5^y \end{cases}$$

é:

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) 1

e) 2

Solução:

Veja que, na primeira equação temos

$$2^x = 4^y$$

$$2^x = 2^{2y}.$$

Logo, $x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0$. Por outro lado, na segunda equação temos

$$25^x = 25 \cdot 5^y$$

$$5^{2x} = 5^{2+y}.$$

Logo, $2x = 2 + y \Rightarrow 2x - y = 2$. Dessa forma, os valores de x e y podem ser obtidos resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Temos então $x = \frac{4}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$. Portanto $x + y = 2$.

Resposta: Letra e. ◊

Exemplo 5.19. *(UF-PB) Em uma comunidade de bactérias há inicialmente 10^6 indivíduos. Sabe-se que após t horas (ou fração de horas) haverá $q(t) = 10^6 \cdot 3^{2t}$ indivíduos. Neste caso, para que a população seja o triplo da inicial, o tempo , em minutos será:*

a) 10

b) 20

c) 30

d) 40

e) 50

Solução:

Para determinar o tempo em que a quantidade de bactérias seja o triplo da inicial, devemos determinar o valor t tal que $q(t) = 3 \cdot 10^6$. Resolvendo a equação

$$\begin{aligned} 10^6 \cdot 3^{2t} &= 3 \cdot 10^6 \\ 3^{2t} &= 3. \end{aligned}$$

Note que $3^{2t} = 3 \Rightarrow 2t = 1$, então $t = \dfrac{1}{2}$. Como t é dado em horas, então o tempo necessário é de 30 minutos.

Resposta: Letra c. $\diamondsuit$

5.5 Inequações exponencias

Inequação exponencial é toda inequação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas e diferentes de 1.

Exemplo 5.20. *Algumas inequações exponenciais:*

a) $5^x > 125$.

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 32$.

c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x}$.

d) $3^{2x} + 3^{2x+1} < 12$.

Método para resolução de inequações exponenciais

A resolução das inequações exponenciais é similar ao das equações. Entretanto, é preciso ter cuidado com o sinal da desigualdade. As resoluções das inequações se baseiam no fato que:

i) Quando $a > 1$ a função é crescente, portanto $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$;

ii) Quando $0 < a < 1$, a função é decrescente, portanto $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

Exemplo 5.21. *Resolva a inequação* $25^{4x} \geq 625^{x+4}$.

Solução:

Podemos reduzir cada lado da inequação a uma mesma base, logo:

$$(5^2)^{4x} \geq (5^4)^{x+4} \Rightarrow 5^{8x} \geq 5^{4x+16}.$$

Como $a > 1$ temos $8x \geq 4x + 16 \Rightarrow x \geq 4$. Portanto o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 4\}$.

Exemplo 5.22. *Resolva a inequação* $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{2x-1} < \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+3}$.

Solução:

Reduzindo a uma mesma base os lados da inequação, temos:

$$\left(\frac{1}{3^3}\right)^{2x-1} < \left(\frac{1}{3^2}\right)^{x+3} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{2x-1} < \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{x+3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{6x-3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+6}.$$

Como $a = \dfrac{1}{3}$ então $f(x)$ é decrescente. Logo devemos ter

$$6x - 3 > 2x + 6 \Rightarrow x > \frac{9}{4}.$$

Portanto o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R};\ x > \dfrac{9}{4}\right\}$. ♢

Exemplo 5.23. *(Unifesp-SP / ADAPTADA) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se K é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função* $f(t) = K\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ *para estimar a sua eliminação depois de um tempo t, em horas. Neste caso, o tempo necessário para que uma pessoa conserve menos de 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, deve ser maior que:*

a) 12 horas e meia.

b) 12 horas.

c) 10 horas e meia

d) 8 horas.

e) 6 horas.

Solução:

Sendo $K = 128mg$, queremos determinar para qual tempo t a quantidade de antibiótico é menor que 2mg, ou seja, queremos $f(t) < 2$. Como $f(t) = K\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$, então

$$128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} < 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} < \frac{1}{64} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Como $0 < a < 1$ temos $\frac{t}{2} > 6 \Rightarrow t > 12$. Portanto é necessário que se passem mais de 12 horas para que se tenha menos de 2mg do antibiótico no organismo.

Reposta: Letra b. $\Diamond$

5.6 Função Logarítmica

Vimos na seção 5.3 que para todo número real positivo $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$ é bijetiva. Noutras palavras, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único número real $y \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a^x = y$. Por outro lado, dado um número $y > 0$, existe um único real x tal que $a^x = y$. O número x é chamado logaritmo de y na base a e representado por $\log_a y$. Segue então que

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Assim, a função exponencial admite uma função inversa. Vejamos a definição a seguir.

Definição 5.24. *A inversa da função exponencial de base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) é a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

Em símbolos:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \log_a x \end{aligned}$$

Observação 5.25. *Diante da definição, é importante enfatizar a condição de existência do logaritmo. Note que o número $\log_a x$ existe se, e somente se:*

- $x > 0$;
- $a > 0$ *e* $a \neq 1$.

Em $\log_a x = y$, chamamos o número a de base, x de logaritmando e y de logaritmo.

Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ e seja $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $g(y) = \log_a y$ a inversa da função f, então $f(g(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja:

$$a^{\log_a y} = y.$$

Exemplo 5.26. *São funções logarítmicas:*

a) $f(x) = \log_3 x$.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

c) $f(x) = \log_{0,1} x$.

d) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$.

Exemplo 5.27. *Cálculo de alguns logaritmos:*

a) $\log_2 64 = 6$, pois $2^6 = 64$.

b) $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$.

c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, pois $\frac{1}{3}^{-3} = 27$.

d) $\log_{\frac{1}{2}} 128 = -7$, pois $\frac{1}{2}^{-7} = 128$.

Consequências da definição de logaritmo

Sendo a, x e y reais positivos, com $a \neq 1$, decorre que:

1. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$.
2. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$.
3. $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$, para todo $n \in \mathbb{R}$.
4. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$.

Logaritmos decimais

Os logaritmos cuja base é o número 10, são chamados de logaritmos decimais. Por ser uma base muito utilizada costuma-se omitir a escrita do número 10. Dessa forma, o logaritmo de um número x na base 10 pode ser representado por $\log_{10} x$ ou simplesmente $\log x$.

5.7 Propriedades dos logaritmos

Sejam a, c, x e y números reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$. Nestas condições valem as seguintes propriedades:

1. Propriedade Fundamental: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
2. Logaritmo do quociente: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
3. Logaritmo da potência: $\log_a x^c = c \cdot \log_a x$.
4. Mudança de base: $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$.

Exemplo 5.28. *Vejamos algumas aplicações das propriedades anteriores em alguns logaritmos.*

a) $\log_3(5.7) = \log_3 5 + \log_3 7$.

b) $\log 200 = \log(2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 = \log 2 + 2$.

c) $\log_3 \left(\dfrac{8}{7}\right) = \log_3 8 - \log_3 7$.

d) $\log_5 \left(\dfrac{5}{2}\right) = \log_5 5 - \log_5 2 = 1 - \log_5 2$.

e) $\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5$.

f) $\log_2 8^5 = 5 \cdot \log_2 8 = 5 \cdot 3 = 15$.

g) $\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$. (na base 2)

h) $\log_8 9 = \dfrac{\log 9}{\log 8}$. (na base 10)

Exemplo 5.29. *Mostre que* $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$.

Solução:

Usando a propriedade de mudança de base, passaremos $\log_a x$ para uma base x, então:

$$\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}.$$

◊

Exemplo 5.30. *Se* $\log 2 = a$ *e* $\log 3 = b$, *calcule* $\log 144$ *em função de a e b.*

Solução:

Note que $144 = 2^4 \cdot 3^2$, assim

$$\begin{aligned} \log 144 &= \log(2^4 \cdot 3^2) \\ &= \log 2^4 + \log 3^2 \\ &= 4\log 2 + 2\log 3. \end{aligned}$$

Substituindo os valores $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ na equação resulta que: $\log 144 = 4a + 2b$. ◊

Exemplo 5.31. *Seja* $\log 6 = 0,7$ *calcule* $\log 3 + \log 4 + \log 5$.

Solução:

Sabemos que $\log 3 + \log 4 + \log 5 = \log(3 \cdot 4 \cdot 5) = \log 60$. Por outro lado

$$\log 60 = \log(6 \cdot 10) = \log 6 + \log 10.$$

Como $\log 6 = 0,7$ e $\log 10 = 1$, então $\log 60 = 0,7 + 1 = 1,7$. ◊

Exemplo 5.32. *(Fuvest-SP/ADAPTADA) Calcule o valor de* $\log_2 100$ *em função de* q, *sabendo que* $5^q = 2$.

Solução:

Se $5^q = 2$, então $\log_5 2 = q$. Por outro lado

$$\log_2 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 2}.$$

Como $100 = 2^2 \cdot 5^2$, segue que

$$\begin{aligned} \log_2 100 &= \frac{\log_5(2^2 \cdot 5^2)}{\log_5 2} \\ &= \frac{\log_5 2^2 + \log_5 5^2}{\log_5 2} \\ &= \frac{2\log_5 2 + 2\log_5 5}{\log_5 2}. \end{aligned}$$

Substituindo $\log_5 2 = q$ na equação, então $\log_2 100 = \dfrac{2q+2}{q}$. ◊

5.8 Gráfico da função logarítmica

A função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

- Se $a > 1$, então $\log_a x$ tem valor negativo quando x está compreendido entre 0 e 1 e valor positivo quando x é maior que 1.
- Se $0 < a < 1$, então $\log_a x$ tem valor positivo quando $0 < x < 1$ e valor negativo quando $x > 1$.

Sobre o gráfico da função logarítmica, podemos afirmar que:

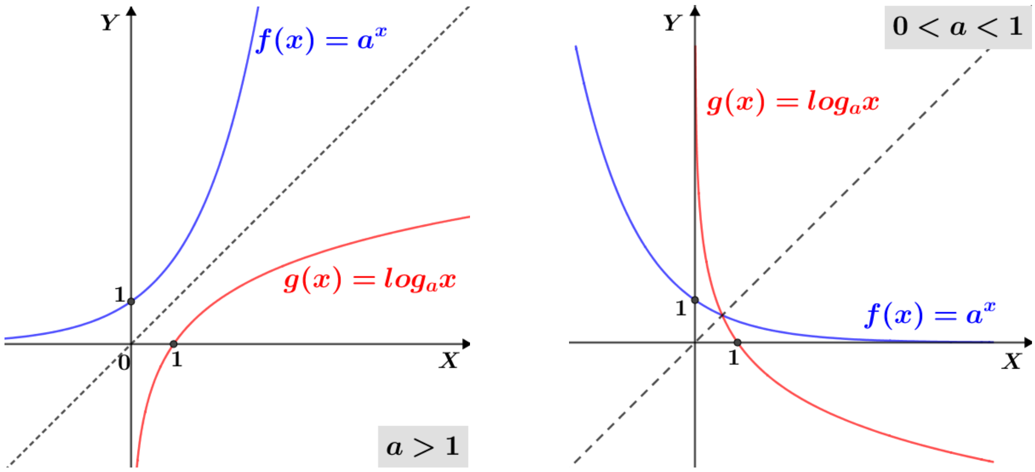
i) O gráfico intersecta o eixo OX no ponto $(1,0)$, pois $\log_a 1 = 0$ para todo a positivo e $a \neq 1$ visto que $a^0 = 1$.

ii) O gráfico não intersecta o eixo OY, isto deve-se ao fato de que $x > 0$ na definição de $\log_a x$.

iii) O gráfico de $g(x) = \log_a x$ não tem pontos no segundo e terceiro quadrantes.

iv) O gráfico de $g(x) = \log_a x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = a^x$ em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares, pois g é a inversa de f.

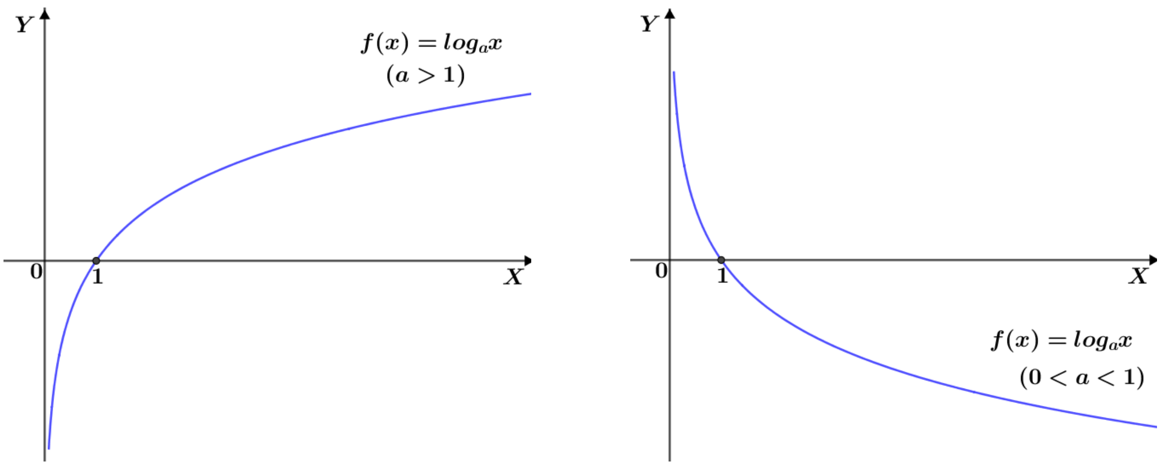
Figura 61: Gráfico das funções f e g



Fonte: Autor.

A Figura 62 exibe o gráfico de $f(x) = \log_a x$ nos casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Figura 62: Gráfico da função $g(x) = \log_a x$



Fonte: Autor.

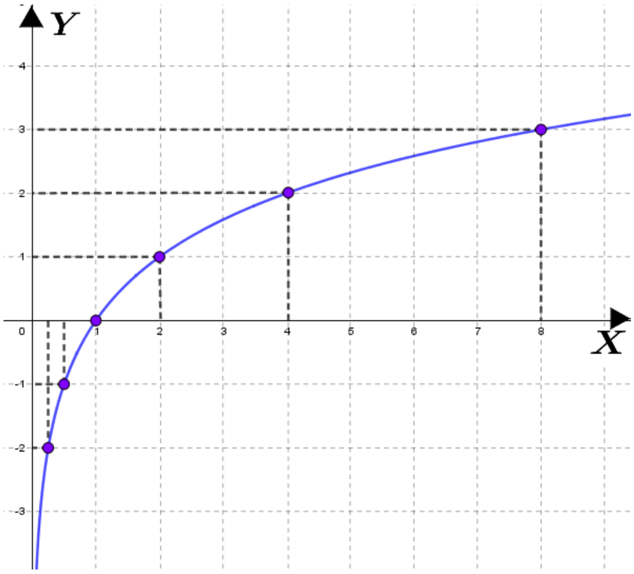
Exemplo 5.33. *Construa o gráfico da função definida por* $g(x) = \log_2 x$.

Solução:

Como a base é 2 e $2 > 1$, então a função é crescente. Como visto na Figura 62, o gráfico da função $g(x) = \log_2 x$ é uma curva ascendente da esquerda para direita. Para construir o gráfico façamos uma tabela com x em abscissas e $g(x) = \log_2 x$ em ordenadas.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
0	0
2	1
4	2
8	3

Figura 63: Gráfico da função $g(x) = \log_2 x$



Fonte: Autor.

◊

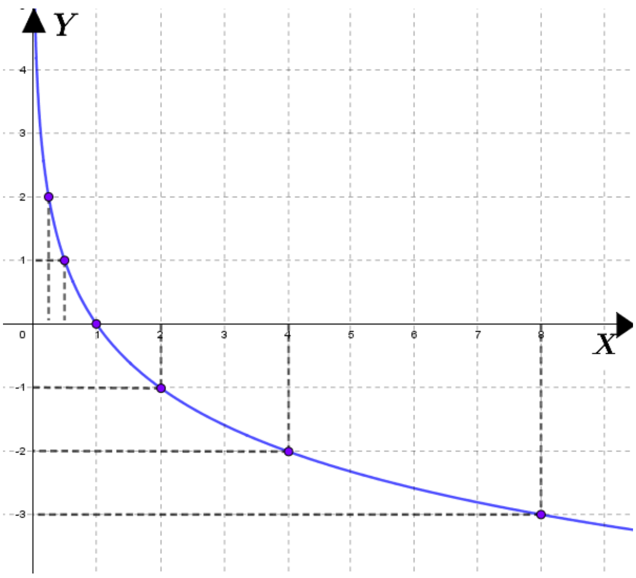
Exemplo 5.34. *Construa o gráfico da função definida por* $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Solução:

Como a base da função é $\dfrac{1}{2}$ e $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, então a função é decrescente. Assim, com base na Figura 62, o gráfico da função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma curva descendente da esquerda para direita. Para construir o gráfico façamos uma tabela com x em abscissas e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ em ordenadas.

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
0	0
2	-1
4	-2
8	-3

Figura 64: Gráfico da função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



Fonte: Autor.

◊

5.9 Equações logarítmicas

Equação logarítmica é aquela cuja incógnita se apresenta no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplo 5.35. *São equações logarítmicas:*

a) $\log_3 x = 7$.

b) $\log_{x-1} 2 = 5$.

c) $\log_2(x+3) + \log_2(2x-1) = \log_2 x$.

d) $(\log_3 x)^2 - 6 \cdot (\log_3 x) = -9$.

Método para resolução de equações logarítmicas

A resolução de uma equação logarítmica se baseia no fato de que a função logarítmica é injetiva, isto é,

$$\begin{aligned} \log_a x = \log_a y \quad &\Leftrightarrow \quad a^{\log_a x} = a^{\log_a y} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Exemplo 5.36. *Resolva a equação* $\log_2(3x+2) = 7$.

Solução:

Inicialmente note que o número $\log_2(3x+2)$ existe se, e somente se, $3x+2 > 0$. Por outro lado,

$$3x+2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}.$$

Vamos então transformar os dois lados da equação $\log_2(3x+2) = 7$ em logaritmos de mesma base. Perceba que o número 7 pode ser escrito como $7 = 7\log_2 2 = \log_2 2^7 = \log_2 128$. Assim, ficamos com

$$\log_2(3x+2) = 7 = \log_2 128 \Leftrightarrow 3x+2 = 128.$$

Logo $x = 42$.

Veja que a condição de existência é satisfeita pois $42 > -\frac{2}{3}$. Assim $S = \{42\}$. $\Diamond$

Exemplo 5.37. *Resolva a equação* $(\log_2 x)^2 - 6 \cdot (\log_2 x) + 8 = 0$.

Solução:

A condição de existência do logaritmo nos diz que devemos ter $x > 0$.

Fazendo a mudança de variável $\log_2 x = k$, ficamos com a equação $k^2 - 6k + 8 = 0$, cuja solução é $k_1 = 2$ ou $k_2 = 4$.

Substituindo esses valores na equação $\log_2 x = k$, tem-se para $k = 2$ que $\log_2 x = 2$, que acarreta $x = 4$ e para $k = 4$ temos $\log_2 x = 4$ que acarreta $x = 16$.

Note que os dois valores de x satisfazem a condição de existência. Assim, o conjunto solução é $S = \{4, 16\}$. $\diamondsuit$

5.10 Inequações logarítmicas

Inequação logarítmica é aquela cuja incógnita se apresenta no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplo 5.38. *Algumas inequações logarítmicas:*

a) $\log_3(4x+1) > \log_3 5$.

b) $\log_x 8 > 3$.

c) $\log_2(x-1) + \log_2(x+5) \geq 4$.

d) $(\log_5 x)^2 - 3 \cdot (\log_5 x) + 2 > 0$.

Método para resolução de inequações logarítmicas

A resolução de uma inequação logarítmica se baseia no fato que:

i) Quando $a > 1$ a função é crescente, portanto $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$.

ii) Quando $0 < a < 1$, a função é decrescente, portanto $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$.

Exemplo 5.39. *Resolva a inequação* $\log_3(5x-4) < 4$.

Solução:

Impondo a condição de existência do logaritmo:

$$5x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{5}.$$

Vamos então transformar os dois lados da inequação $\log_3(5x-4) < 4$ em logaritmos de mesma base. O número 4 pode ser escrito como $4 = 4\log_3 3 = \log_3 3^4 = \log_3 81$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \log_3(5x-4) &< 4 \\ \log_3(5x-4) &< \log_3 81 \Leftrightarrow 5x - 4 < 81. \end{aligned}$$

Logo $x < 17$. Note que $17 > \frac{4}{5}$. Portanto $S = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{4}{5} < x < 17\right\}$. $\diamondsuit$

Exemplo 5.40. *Resolva a inequação* $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) > 2$.

Solução:

Para que exista o logaritmo devemos ter $4x-3>0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{4}$.

Vamos então transformar os dois lados da inequação em logaritmos de mesma base. O número 2 pode ser escrito como $2 = 2\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{9}\right)$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(4x-3) &> 2 \\ \log_{\frac{1}{3}}(4x-3) &> \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow 4x-3 < \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Logo $x < \dfrac{7}{9}$. Note que $\dfrac{7}{9} > \dfrac{3}{4}$. Portanto $S = \left\{x \in \mathbb{R}; \dfrac{3}{4} < x < \dfrac{7}{9}\right\}$. ◊

5.11 O número *e*

Bons investimentos financeiros são bastante atraentes para todo aquele que tem um certo capital e quer ganhar mais dinheiro. Um capital C, empregado a uma taxa de i por cento ao ano, rende ao longo de um ano juros equivalentes a $C \cdot \dfrac{i}{100}$. Desta forma, ao final de um ano o capital do investidor passa a ser $C + C \cdot \dfrac{i}{100}$, chamando o novo capital de C_1, ou seja, $C_1 = C\left(1+\dfrac{i}{100}\right)$. Se o investimento se mantiver, no fim do segundo ano temos um capital C_2, que é o capital C_1 aplicado na mesma taxa de juros, ou seja, $C_2 = C_1\left(1+\dfrac{i}{100}\right) = C\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2$. Assim, se o investimento se mantém por t anos tem-se um capital C_t tal que $C_t = C\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^t$.

O valor de C_t é o valor acumulado do investimento, chamado montante da aplicação.

Tabela 8: Montante acumulado por um capital investido após t anos

Capital	**rendimento anual do capital**	**Montante ao final de um ano**
C	$C \cdot \frac{i}{100}$	$C_1 = C\left(1+\frac{i}{100}\right)$
C_1	$C_1 \cdot \frac{i}{100}$	$C_2 = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$
...	...	...
C_{t-1}	$C_{t-1} \cdot \frac{i}{100}$	$C_t = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$

Fonte: Autor.

No ramo dos investimentos, o banco PARAÍSO se tornou uma unanimidade entre os investidores. O banco paga juros de 100% ao ano, desta forma, para cada real aplicado tem-se um montante de $1(1+1)=2$ reais ao fim de um ano. Vamos supor que nesse banco, os juros fossem capitalizados semestralmente, nesse caso o rendimento de cada real ao se passar meio ano seria de $1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=1,5$, logo, o rendimento em um ano seria de $1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=2,25$.

Imaginemos então que no mesmo banco os juros fossem capitalizados a cada trimestre, nesse caso o rendimento de cada real, ao se passarem três meses, seria de $1\left(1+\dfrac{1}{4}\right)=1,25$, e ao longo de um ano cada real iria render $1\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4=2,4414$ aproximadamente. Começamos a imaginar que quanto menor for o intervalo em que os juros forem capitalizados, mais vantajosa é a aplicação. Vejamos o que acontece se os juros forem capitalizados em intervalos de tempo cada vez menores:

Tabela 9: Rendimentos por real investido dependendo do tempo

Intervalos que os juros são capitalizados	**Rendimento anual por real investido**
ao ano	$1(1+1)=2$
ao semestre	$1(1+\frac{1}{2})^2=2,25$
ao trimestre	$1(1+\frac{1}{4})^4=2,44140625$
ao bimestre	$1(1+\frac{1}{6})^6=2,52162637$
ao mês	$1(1+\frac{1}{12})^{12}=2,613035290$
ao dia	$1(1+\frac{1}{365})^{365}=2,71456748$
a hora	$1(1+\frac{1}{8760})^{8760}=2,71811266$
ao minuto	$1(1+\frac{1}{525600})^{525600}=2,71827924$

Fonte: Autor, baseado em [7] e [9].

A ideia de capitalizar em intervalos menores ser mais vantajosa é de fato verdadeira, no entanto, a diferença entre capitalizar ao dia, a hora ou ao minuto no período de um ano é quase o mesmo valor. Diante disso, nos vem a pergunta: Se ao invés de capitalizarmos em intervalos, pudéssemos capitalizar a cada instante, ou seja, de forma contínua, quanto que cada real renderia ao final de um ano? Responder essa pergunta, significa dizer qual é o valor da expressão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito.

O Matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) mostrou que esse valor é o número irracional

$$e=2,718281828459045235360287471352...$$

O número e costuma aparecer naturalmente como base da função exponencial, o que o torna muito importante nas aplicações dessa função.

Logaritmos naturais

Os logaritmos cuja a base é o número irracional e, são chamados de logaritmos naturais. Representamos o logaritmo natural de um número x por $\ln x$. O símbolo $\ln x$ é equivalente a $\log_e x$. A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$ tem como inversa a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $g(y) = \ln y$. Assim

$$\ln y = x \Leftrightarrow e^x = y.$$

Exemplo 5.41. *Sendo* $\ln 2 = 0,6931$*, calcule o valor de* $\ln\left(\frac{64}{e^2}\right)$.

Solução:

Usando as propriedades 2 e 3 dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{64}{e^2}\right) &= \ln 64 - \ln e^2 \\ &= \ln 2^6 - \ln e^2 \\ &= 6\ln 2 - 2\ln e. \end{aligned}$$

Como $\ln 2 = 0,6931$ e $\ln e = 1$, então

$$\ln\left(\frac{64}{e^2}\right) = 6 \cdot 0,6931 - 2 \cdot 1 = 3,586.$$

$\Diamond$

Exemplo 5.42. *Dados* $\ln 2 = p$ *e* $\ln 3 = q$*, calcule o valor de* $\ln 72$ *em função de* p *e* q.

Solução:

Note que $72 = 2^3 \cdot 3^2$, então $\ln 72 = \ln(2^3 \cdot 3^2)$. Usando a propriedade fundamental e depois a logaritmo da potência no lado direito da igualdade temos

$$\ln(2^3 \cdot 3^2) = \ln 2^3 + \ln 3^2 = 3\ln 2 + 2\ln 3.$$

Substituindo os valores $\ln 2 = p$ e $\ln 3 = q$, resulta que: $\ln 72 = 3p + 2q$. $\Diamond$

Para leitores interessados em aprofundar-se num estudo mais detalhado sobre os logaritmos naturais e suas aplicações, sugerimos a referência [20].

5.12 Questões do ENEM

Exercício 16. *(ENEM 2ª aplicação 2016)*

O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.

b) reduzida a metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

Solução:

Como t é dado em horas e 20 minutos correspondem $\frac{1}{3}$ de hora, devemos então calcular o valor de $f\left(\frac{1}{3}\right)$. Segue que

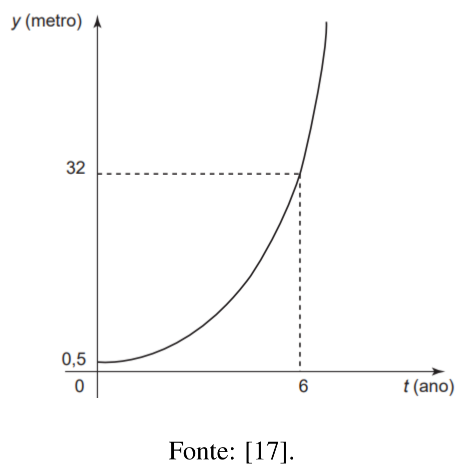
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 40 \cdot 2^1 = 80.$$

Como a população inicial de bactérias era de 40 mil unidades, então após 20 minutos a população será duplicada.

Resposta: Letra d. ◊

Exercício 17. *(ENEM 2ª aplicação 2016)*

Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Fonte: [17].

Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3.

b) 4.

c) 6.

d) $\log_2 7$.

e) $\log_2 15$.

Solução:

Note inicialmente que $f(0) = 0,5$, ou seja, para que a planta cresça 7,5m ela deve chegar a 8m de altura. Queremos então saber, para qual valor de t temos $y(t) = 8$.

Como $f(0) = 0,5$, então

$$a^{0-1} = 0,5 \Leftrightarrow a^{-1} = 2^{-1} \Leftrightarrow a = 2.$$

Logo a função que representa o crescimento da planta com o passar dos anos é $y(t) = 2^{t-1}$. Fazendo então $y(t) = 8$, temos

$$2^{t-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{t-1} = 2^3 \Leftrightarrow t-1 = 3 \Leftrightarrow t = 4.$$

Portanto o tempo entre a plantação e o corte é de 4 anos.

Resposta: Letra b. ♢

Exercício 18. *(ENEM 2018)*

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, concede-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais de R\$ $820,00$ a uma taxa de juros de $1,32\%$ ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize $0,2877$ como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e $0,0131$ como aproximação para ln (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

a) 56ª

b) 55ª

c) 52ª

d) 51ª

e) 45ª

Solução:

Inicialmente note que o valor presente da parcela é

$$P = \frac{V}{(1+i)^n} = \frac{820}{(1+0,0132)^n}.$$

Queremos adiantar uma parcela com desconto maior que 25%, ou seja, o valor da parcela presente deve ser menor que $820 - 820 \cdot \dfrac{25}{100}$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{820}{(1+0,0132)^n} &< 820 - 820 \cdot \frac{25}{100}\\
\frac{820}{(1,0132)^n} &< 820\left(1 - \frac{25}{100}\right)\\
\frac{1}{(1,0132)^n} &< \frac{75}{100}\\
\frac{1}{(1,0132)^n} &< \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Invertendo a desigualdade ficamos com

$$(1,0132)^n > \frac{4}{3}.$$

Sabemos que quando $a > 1$ a função logarítmica é crescente, ou seja, $x > y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$, então

$$(1,0132)^n > \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln(1,0132)^n > \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Logo

$$n > \frac{0,2877}{0,0131} = 21,96.$$

O primeiro valor inteiro n que queremos é $n = 22$. Como estamos contando n a partir da parcela de número 30, temos $30 + 22 = 52$. Portanto a primeira das parcelas que poderá ser antecipada é a 52ª.

Resposta: Letra c. ◊

Exercício 19. *(ENEM 2019)*

A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a Hydrangea cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a Hydrangea cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.

b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.

c) valores maiores que 7 e menores que 8.

d) valores maiores que 70 e menores que 80.

e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Solução:

Queremos uma flor cor-de-rosa, logo devemos ter $pH > 7$, ou seja:

$$-\log_{10} x > 7 \Leftrightarrow \log_{10} x < -7 \Leftrightarrow x < 10^{-7}.$$

Por outro lado, devemos ter $pH < 8$, logo

$$-\log_{10} x < 8 \Leftrightarrow \log_{10} x > -8 \Leftrightarrow x > 10^{-8}.$$

Portanto $10^{-8} < x < 10^{-7}$.

Resposta: Letra e. ♢

Exercício 20. *(ENEM 2019)*

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leq M_s \leq 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leq M_s \leq 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leq M_s \leq 9{,}9$
Extremo	$M_s \geq 10{,}0$

Fonte: [17].

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $Ms = 3,30 + log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2000 μm e frequência de $0,2$ Hz.

Utilize $0,3$ como aproximação para $\log 2$.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

a) Pequeno.

b) Ligeiro.

c) Moderado.

d) Grande.

e) Extremo.

Solução:

A amplitude do terremoto foi $A = 2.000$ e a frequência $f = 0,2$. A magnitude é calculada pela fórmula $Ms = 3,30 + \log(A \cdot f)$. Segue então que

$$\begin{aligned} Ms &= 3,30 + \log(2000 \cdot 0,2) \\ &= 3,30 + \log(400) \\ &= 3,30 + \log 4 + \log 100 \\ &= 3,30 + 2\log 2 + \log 100. \end{aligned}$$

Como $\log 2 = 0,3$ e $\log 100 = 2$, então

$$Ms = 3,30 + 2 \cdot 0,3 + 2 = 5,9.$$

Considerando os valores da tabela, o terremoto teve magnitude moderada.

Resposta: Letra c. ◊

Exercício 21. *(ENEM 2018)*

Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100.000 transistores distribuindo em $0,25cm^2$ de área. Desde então o número de transistores por metro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Considere $0,30$ como aproximação para $\log_{10} 2$.
Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

a) 1999

b) 2002

c) 2022

d) 2026

e) 2146

Solução:

A densidade é o número de transistores por cm^2. Sabemos que em 1986 um processador de $0,25cm^2$ tinha 100.000 transistores, ou seja, em $1cm^2$ tinha 400.000 transistores. Como a densidade dobra a cada dois anos, então ela é multiplicada pelo fator 2 nesse intervalo, conforme dados apresentados na Tabela 10 a seguir.

Tabela 10: Quantidade de transistores a cada dois anos

intervalos de dois anos	**transistores**
1	$400000 \cdot 2$
2	$400000 \cdot 2^2$
3	$400000 \cdot 2^3$
t	$400000 \cdot 2^t$

Fonte: Autor.

A expressão que relaciona o número de transistores T com o passar do tempo t, onde cada unidade t representa um intervalo de 2 anos é $T(t) = 400000 \cdot 2^t$. Queremos que T chegue a marca de 100 bilhões de transistores, logo

$$\begin{aligned}
400000 \cdot 2^t &= 10^{11} \\
2^2 \cdot 10^5 \cdot 2^t &= 10^{11} \\
2^{t+2} &= \frac{10^{11}}{10^5} \\
2^{t+2} &= 10^6.
\end{aligned}$$

Usando o fato que a função logarítmica é injetiva temos

$$\begin{aligned}
\log 2^{t+2} &= \log 10^6 \\
(t+2)\log 2 &= 6.
\end{aligned}$$

Como $\log_{10} 2 = 0,30$ então

$$\begin{aligned}
t+2 &= \frac{6}{0,3} \\
t &= 18.
\end{aligned}$$

Como cada unidade t representa dois anos, precisará de $18 \cdot 2 = 36$ anos para alcançar a densidade desejada. Portanto isso irá acontecer no ano $1986 + 36 = 2022$.

Resposta: Letra c. ◊

Exercício 22. *(ENEM 2017)*

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1,013^n \times 0,013}{(1,013^n - 1)}.$$

Se necessário, utilize $0,005$ como aproximação para $\log 1,013$; $2,602$ como aproximação para $\log 400$; $2,525$ como aproximação para $\log 335$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12

b) 14

c) 15

d) 16

e) 17

Solução:

Queremos que o valor da parcela seja menor ou igual a 400, ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{5000\cdot 1,013^n\cdot 0,013}{(1,013^n-1)} &\leq 400\\
65\cdot 1,013^n &\leq 400(1,013^n-1)\\
65\cdot 1,013^n &\leq 400\cdot 1,013^n-400\\
65\cdot 1,013^n-400\cdot 1,013^n &\leq -400\\
(65-400)1,013^n &\leq -400\\
(-335)\cdot 1,013^n &\leq -400.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da inequação por (-1) ficamos com

$$\begin{aligned}
335\cdot 1,013^n &\geq 400.\\
1,013^n &\geq \frac{400}{335}.
\end{aligned}$$

Se $a>1$ a função logarítmica é crescente, então $x\geq y \Leftrightarrow \log_a x\geq \log_a y$, temos

$$\begin{aligned}
\log 1,013^n &\geq \log\left(\frac{400}{335}\right)\\
n\log 1,013 &\geq \log 400-\log 335\\
n &\geq \frac{\log 400-\log 335}{\log 1,013}.
\end{aligned}$$

Sendo $\log 1,013=0,005$, $\log 400=2,602$ e $\log 335=2,525$, então

$$n\geq \frac{2,602-2,525}{0,005}=15,4.$$

Como o número de parcelas é inteiro devemos ter $n=16$.

Resposta: Letra d. $\Diamond$

6 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

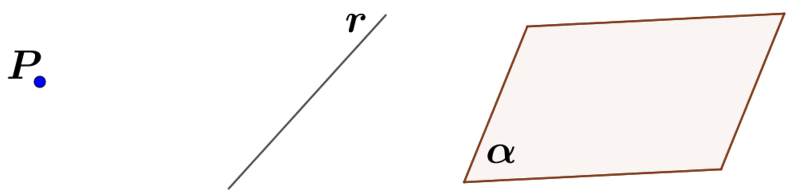
Existem eventos naturais que costumam se repetir quase que nos mesmos intervalos de tempo: o dia, a noite, as estações do ano, as fases da lua, o movimento das marés, entre outros. Estes acontecimentos são ditos cíclicos ou periódicos e influenciam diretamente na vida humana, pois ajudam na contagem do tempo, fazendo com que o homem se projete para algo que provavelmente vai acontecer, ou seja, nosso calendário e nossa rotina é de natureza cíclica. Os agricultores cearenses por exemplo, esperam que ocorram chuvas entre os meses de janeiro e julho. Esperam também que em determinado mês haja uma boa colheita de milho, feijão, tomate ou pimentão. Por outro lado, os períodos de férias, assim como o Carnaval são muito aguardados pelas pessoas que trabalham em parques aquáticos, praias e hotéis das regiões metropolitanas do Ceará, pois é nesse período que a economia é impulsionada pela vinda de turistas do mundo inteiro.

O estudo das funções trigonométricas é fundamental, pois elas surgem em muitas situações como modelo matemático mais adequado para expressar fenômenos dessa natureza. Neste capítulo serão abordados assuntos que possibilitarão a compreensão de tais funções, assim como a modelagem de alguns comportamentos cíclicos. O texto a seguir tem como base as referências [5], [3], [6], [7], [9], [10], [11], [14], [16], [17], [21], [22], [27], [29], [30] e [35].

6.1 Alguns conceitos de Geometria Plana

Todas as pessoas através de suas experiências cotidianas têm ideia do que vem a ser um *ponto*, *reta* ou um *plano*. Essas noções são conceitos primitivos que não precisam de definições formais.

Figura 65: Ponto, reta e plano



Fonte: Autor.

- Os pontos são indicados com letras latinas maiúsculas: $A, B, C...$
- As retas são indicadas por letras latinas minúsculas: $r, s, t..$
- Os planos são indicados por letras gregas minúsculas: $\alpha, \beta, \gamma...$

Definição 6.1. *Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, o segmento AB é a porção da reta r situada de A a B.*

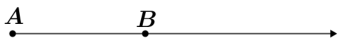
Figura 66: Segmento AB

Fonte: Autor.

Escrevemos $\overline{AB}$ para denotar o comprimento do segmento AB. Se dois segmentos tiverem a mesma medida, diremos que eles são congruentes.

Definição 6.2. *Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C, tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, e é representado por $\overrightarrow{AB}$. O ponto A é denominado origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$.*

Figura 67: Semirreta AB

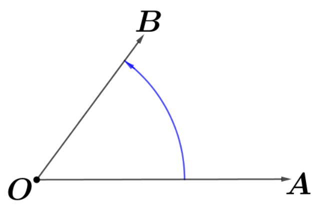


Fonte: Autor.

Definição 6.3. *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

O ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ será indicado por $\angle AOB$ ou $\angle BOA$.

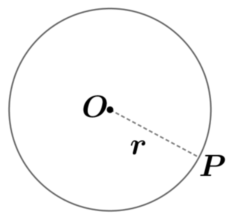
Figura 68: Ângulo $\angle AOB$



Fonte: Autor.

Definição 6.4. *Dados um ponto O e um número real $r > 0$. O círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano, tais que $\overline{OP} = r$.*

Figura 69: Círculo

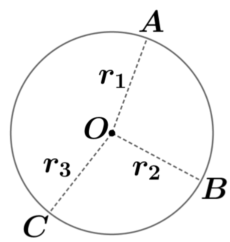


Fonte: Autor, baseado em [27].

Os círculos são representados por letras gregas maiúsculas: Γ, Σ, Λ...

Seja Γ um círculo de centro O e raio r. Se P pertence a Γ, o segmento OP de medida r também é chamado de raio do círculo. Mais precisamente, qualquer segmento que une o centro O a um ponto do círculo Γ, tem a mesma medida r.

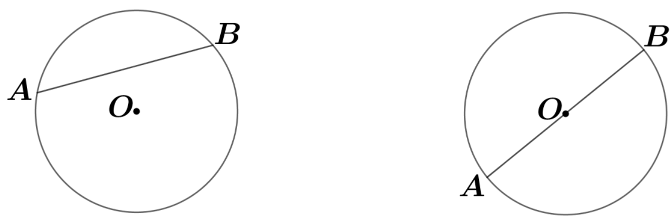
Figura 70: Raios OA, OB e OC



Fonte: Autor.

Além do centro e do raio, temos outros elementos no círculo como corda e o diâmetro. Uma corda de Γ é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo. Um *diâmetro* de Γ é uma corda que passa pelo centro e divide o círculo em duas partes iguais chamadas *semicírculos*.

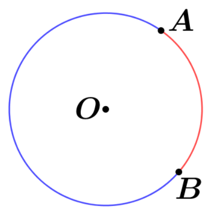
Figura 71: Cordas AB



Fonte: Autor.

Tomando dois pontos A e B em Γ, tais pontos delimitam duas porções do círculo, cada porção determina um *arco de círculo*. Para que fique claro sobre qual arco estamos nos referindo, chamaremos de *arco maior* ou *arco menor* $\widehat{AB}$. Na Figura 72, por exemplo, diremos que a porção do círculo em vermelho é o arco menor $\widehat{AB}$ e que a porção em azul é o arco maior $\widehat{AB}$.

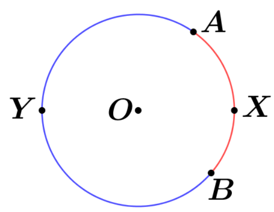
Figura 72: Arco $\widehat{AB}$



Fonte: Autor, baseado em [10].

Outra maneira de diferenciar os arcos $\widehat{AB}$, é tomando um ponto em cada arco, por exemplo, os pontos X e Y. Dessa forma, na Figura 73, o arco $\widehat{AB}$ que tem o ponto X é indicado por $\widehat{AXB}$ e o que tem o ponto Y, por $\widehat{AYB}$.

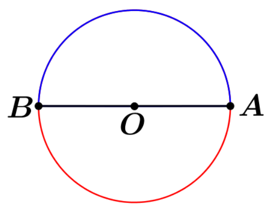
Figura 73: Arcos $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$



Fonte: Autor, baseado em [16].

Se A e B são extremidades de um diâmetro, cada porção delimitada por A e B corresponde a um *arco de meia volta*.

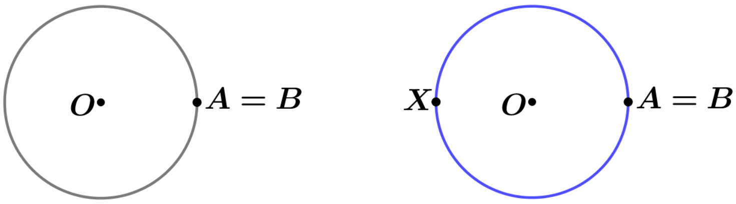
Figura 74: Arcos de meia volta



Fonte: Autor.

Se os pontos A e B coincidirem, teremos um *arco nulo* e um *arco de uma volta.*

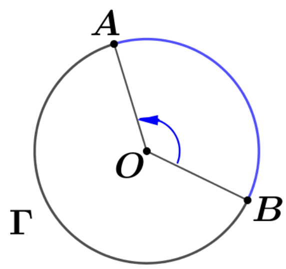
Figura 75: Arco nulo e arco de uma volta



Fonte: Autor, baseado em [10] e [16].

Definição 6.5. *Dado no plano, um círculo* Γ *de centro* O, *chamamos ângulo central AOB e representamos por* $\angle AOB$, *o ângulo de vértice* O, *cujos lados são os raios OA e OB*.

Figura 76: Ângulo central



Fonte: Autor.

Neste texto, assumiremos que o comprimento C de um círculo de raio R vale $C = 2\pi R$. O valor aproximado de π, é:

$$\pi = 3,141593,$$

o que nos dá um perímetro de aproximadamente $6,283186 \cdot R$.

Para o leitor interessados em mais detalhes, sugerimos as referências [3] e [27].

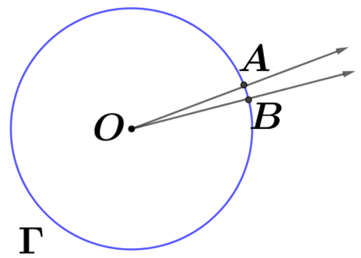
6.1.1 Medida de ângulo

Nesse texto usaremos duas medidas para ângulo: o grau e o radiano. A seguir falaremos um pouco sobre essas medidas.

Definição 6.6. *Dividindo um círculo* Γ *de centro* O *em* 360 *arcos iguais e tomando dois pontos A e B, extremos de um desses arcos, dizemos que a medida do ângulo* $\angle AOB$ *é de 1 grau.*

Escreve-se: $A\hat{O}B = 1^\circ$.

Figura 77: Medida de 1 grau



Fonte: Autor, baseado em [27].

A definição de grau dada, independe do raio do círculo, isto é, se tomarmos outro círculo Σ de centro O e raio distinto do raio de Γ e o dividirmos em 360 partes iguais, ainda obteremos um ângulo de medida 1 grau. Para mais detalhes sobre o assunto, o leitor poderá consultar as referências [6] e [27].

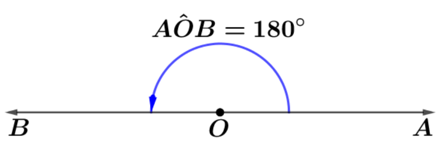
Na definição de grau, dividimos o círculo em 360 partes iguais as quais correspondem a 1°. Assim o círculo completo corresponde a 360°.

Para simplificar a notação, usaremos também letras gregas minúsculas para representar medidas de ângulos. Assim, quando escrevermos $A\hat{O}B = \alpha$ por exemplo, significa que a medida do ângulo $\angle AOB$ é α graus.

Quando $A\hat{B}C = F\hat{G}H$, diremos que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle FGH$ são congruentes.

Definição 6.7. *Se $\angle AOB$ é um ângulo tal que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas, então* $A\hat{O}B = 180^\circ$.

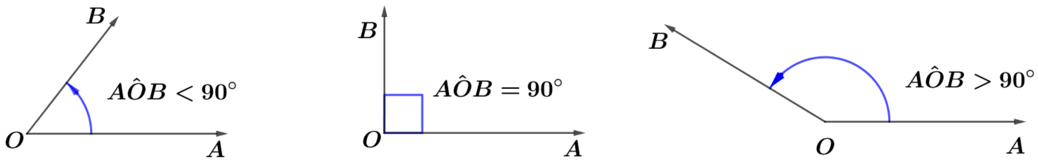
Figura 78: Ângulo de 180°



Fonte: Autor, baseado em [27].

Definição 6.8. *Um ângulo $\angle AOB$ é agudo quando* $0^\circ < A\hat{O}B < 90^\circ$, *reto quando* $A\hat{O}B = 90^\circ$ *e obtuso quando* $90^\circ < A\hat{O}B < 180^\circ$.

Figura 79: Ângulos agudo, reto e obtuso.

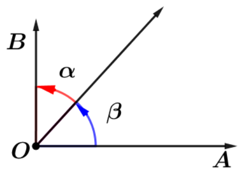


Fonte: Autor, baseado em [27].

Definição 6.9. *Dois ângulos são ditos complementares se a soma de suas medidas é* $90°$.

Sendo α e β medidas de ângulos complementares, então $\alpha+\beta=90°$. Neste caso dizemos que α é o complemento de β e que β é o complemento de α.

Figura 80: Ângulos complementares



Fonte: Autor.

Definição 6.10. *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.*

Inicialmente definimos o comprimento do círculo por $C=2\pi R$. Logo o comprimento do semicírculo vale πR. Conforme a definição 6.5, o semicírculo corresponde ao arco que subtende um ângulo central de medida $180°$. Assim

$$180° = \frac{\pi R}{R} = \pi \ radianos.$$

Logo, 1 radiano $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq 57°$.

Sendo β a medida em graus e α a medida em radianos de um mesmo arco, então:

$$\frac{\beta}{360} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Exemplo 6.11. *Determine, em radianos, a medida equivalente a 135°.*

Solução:

Basta resolver a regra de três:

Graus	Radiano
360	2π
135	x

$$360x = 270\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$

$\Diamond$

Exemplo 6.12. *Determine, em graus, a medida equivalente a* $\frac{\pi}{6}$ *rad.*

Solução:

Basta resolver a regra de três:

Graus	Radiano
360	2π
x	$\frac{\pi}{6}$

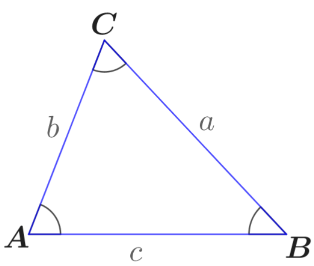
$$2\pi x = 60\pi \Rightarrow x = 30.$$

$\Diamond$

6.1.2 Triângulos

Três pontos A, B e C não colineares, determinam três segmentos de reta: BC, AC e AB. A reunião dos segmentos BC, AC e AB é chamada *triângulo ABC*.

Figura 81: Triângulo ABC



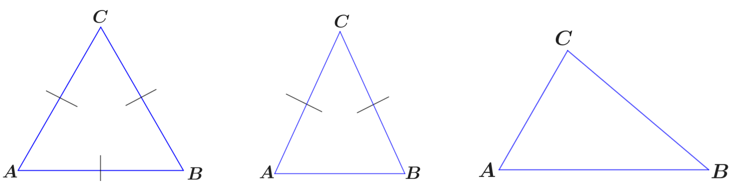
Fonte: Autor.

- Os segmentos BC, AC e AB são chamados de lados do triângulos.
- Escrevemos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ para indicar o comprimento dos lados do triângulo ABC.
- Denotaremos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$ para indicar a medida dos *ângulos internos* do triângulo.

Definição 6.13. *Um triângulo ABC é denominado:*

- *Equilátero, se* $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.
- *Isósceles, se ao menos duas dentre as medidas* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ *forem iguais.*
- *Escaleno, se* $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$.

Figura 82: Triângulos equilátero, isósceles e escaleno.

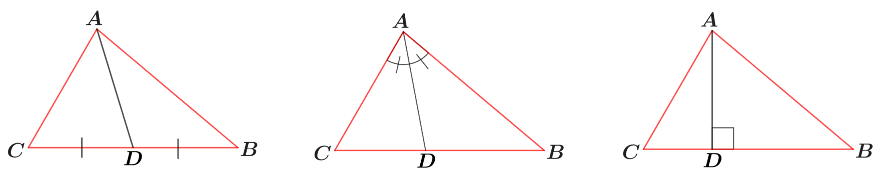


Fonte: Autor, baseado em [27].

Definição 6.14. *Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C. Então:*

- *o segmento AD chama-se mediana do triângulo relativamente a BC, se D for ponto médio de BC;*
- *o segmento AD chama-se bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}C$ se a semi-reta $\overrightarrow{AD}$ divide o ângulo $\angle BAC$ em dois ângulos congruentes, isto é, se $C\hat{A}D = D\hat{A}B$;*
- *o segmento AD chama-se altura do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular a reta que contém B e C.*

Figura 83: Mediana AD, bissetrizAD, alturaAD.



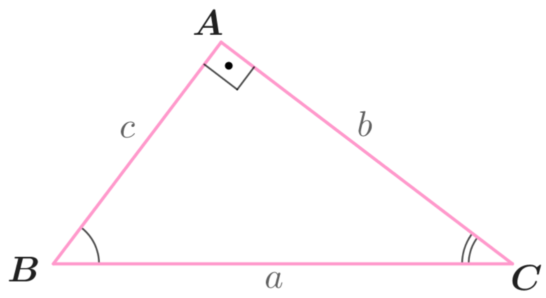
Fonte: Autor.

Proposição 6.15. *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.*

A demonstração pode ser encontrada em [3], [11] e [27].

Definição 6.16. *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo.*

Figura 84: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autor.

Diremos que o triângulo ABC é retângulo em A para indicar que o ângulo reto se encontra no vértice A. O lado BC de medida a, oposto ao ângulo reto, é a hipotenusa e os lados AC e AB de medidas b e c respectivamente são os catetos do triângulo ABC. Faremos a identificação da hipotenusa e dos catetos com suas respectivas medidas.

Teorema 6.17. ***(Pitágoras)*** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Em símbolos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Para o leitor interessado na demonstração desse teorema, sugerimos [3], [9], [11] e [27].

Definição 6.18. *Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes forem iguais e se os seus lados homólogos forem proporcionais.*

Dessa forma, sendo ABC e DEF dois triângulos semelhantes, onde A corresponde a D, B a E e C a F, então, valem as seguinte relações:

- $\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{C} = \hat{F}$;
- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$

O número k é chamado razão de proporcionalidade entre os triângulos ABC e DEF.

Escrevemos $ABC \sim DEF$ para indicar que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, onde o vértice A corresponde a E, B a F e C a G,

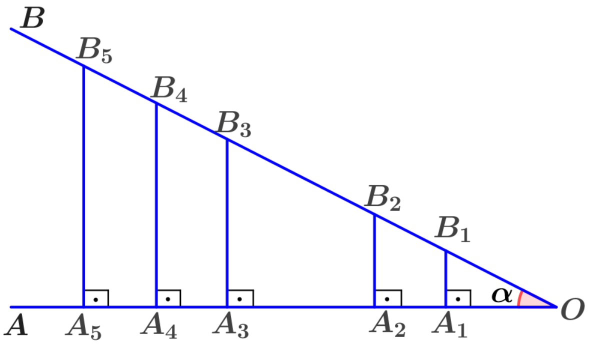
Teorema 6.19. *Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então, os triângulos são semelhantes.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrar em [3], [11], [27].

6.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Consideremos um ângulo agudo $A\hat{O}B = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$. Vamos marcar os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ e traçar, a partir deles, as perpendiculares $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}, \ldots$, onde $B_1, B_2, B_3, \ldots$ são pontos da semirreta $\overrightarrow{OB}$.

Figura 85: Triângulos retângulos com o mesmo vértice O



Fonte: Autor, baseado em [6], [9], [16] e [30].

Pelo Teorema 6.20, os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, etc. são semelhantes entre si. Dessa forma, podemos escrever:

i) $\dfrac{A_1B_1}{OB_1} = \dfrac{A_2B_2}{OB_2} = \dfrac{A_3B_3}{OB_3} = \ldots = k_1$;

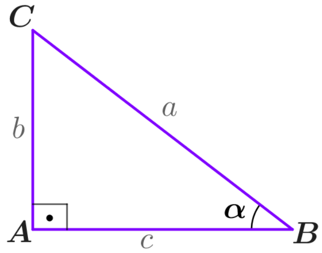
ii) $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{OA_3}{OB_3} = \ldots = k_2$;

iii) $\dfrac{A_1B_1}{OA_1} = \dfrac{A_2B_2}{OA_2} = \dfrac{A_3B_3}{OA_3} = \ldots = k_3$.

Note que as constantes k_1, k_2 e k_3 dependem apenas do ângulo agudo α e não do tamanho dos triângulos retângulos envolvidos. Diante disso, temos a seguinte definição.

Definição 6.20. *Dado um triângulo ABC, retângulo em A e fixando um ângulo agudo α conforme a Figura 86, temos:*

Figura 86: Triângulo retângulo



Fonte: Autor.

- *Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.*

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}.$$

- *Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.*

$$\cos\alpha = \frac{c}{a}.$$

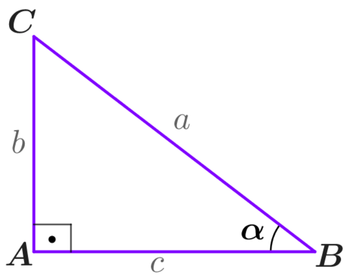
- *Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}.$$

6.2.1 Alguns teoremas importantes

Para os teoremas que se seguem, considere o triângulo retângulo conforme a Figura 87.

Figura 87: Triângulo retângulo



Fonte: Autor.

Teorema 6.21. *Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Prova:

Com efeito, efetuando o quociente $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Portanto, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. ■

Teorema 6.22. *Se α é a medida de um ângulo agudo e β é a medida do seu complemento, então:*

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \ \text{ e } \ \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha.$$

Prova:

Veja que
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \;\; e \;\; \cos\beta = \frac{b}{a}.$$
Por outro lado
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \;\; e \;\; \cos\alpha = \frac{c}{a}.$$
Portanto, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \;\; e \;\; \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$. ■

Teorema 6.23. *Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se* $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Prova:

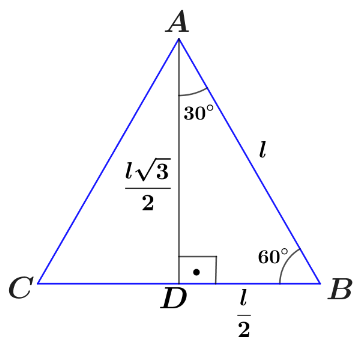
De fato, note que
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \;\; e \;\; \cos\alpha = \frac{c}{a}.$$
Logo,
$$a\cdot\operatorname{sen}\alpha = b \;\; e \;\; a\cdot\cos\alpha = c.$$
Pelo teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Assim
$$\begin{aligned}(a\cdot\operatorname{sen}\alpha)^2 + (a\cdot\cos\alpha)^2 &= a^2\\ a^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha + a^2\cdot\cos^2\alpha &= a^2\\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1.\end{aligned}$$
■

6.2.2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Ângulo de 30° e 60°

Dado um triângulo ABC equilátero de lado l conforme a Figura 88 a seguir.

Figura 88: Triângulo equilátero ABC



Fonte: Autor, baseado em [6], [9] e [16].

Note que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$. Sendo AD a mediana relativa ao lado BC. Como o triângulo é equilátero, então AD é também altura e bissetriz. Assim:

- $B\hat{A}D = 30^\circ$, pois AD é bissetriz;
- $\overline{BD} = \dfrac{l}{2}$, pois AD é mediana.

Considerando o triângulo ABD, temos pelo Teorema de Pitágoras $\overline{AD} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$. Como $B\hat{A}D = 30^\circ$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}.\\
\cos 30^\circ &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\\
\operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Ainda no triângulo ABD, perceba que $A\hat{B}D = 60^\circ$ é o complemento de $B\hat{A}D = 30^\circ$, então pelo Teorema 6.23 temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.\\
\cos 30^\circ &= \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

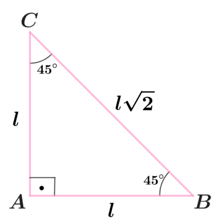
Usando o Teorema 6.22, obtemos a $\operatorname{tg} 60^\circ$. Segue que

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Ângulo de 45°

Consideremos um triângulo ABC retângulo em A, isósceles, com catetos de medida l, conforme a Figura 89 abaixo.

Figura 89: Triângulo isósceles



Fonte: Autor, baseado em [6].

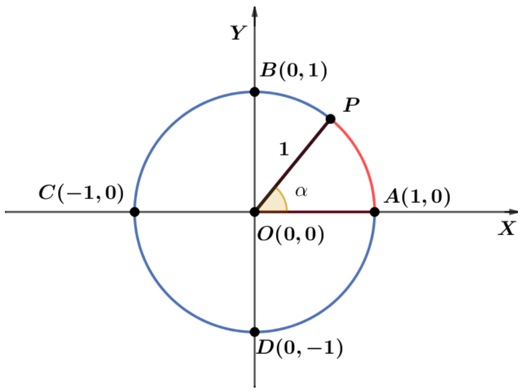
Pelo teorema de Pitágoras temos $\overline{BC} = l\sqrt{2}$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \text{sen}\,45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \cos 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \text{tg}\,45^\circ &= \frac{l}{l} = 1. \end{aligned}$$

6.3 O ciclo trigonométrico

Considere um círculo Γ de raio 1 e centro na origem O de um sistema ortogonal cartesiano XOY. Sejam $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ e $D(0,-1)$, os pontos de interseção de Γ com os eixos OX e OY.

Figura 90: Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor.

i) Chamamos $A(1,0)$ de ponto de partida para medir todos os arcos do círculo.

ii) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, e um arco $\widehat{AP}$ de Γ de comprimento $|\alpha|$, dizemos que $\widehat{AP}$ mede α radianos.

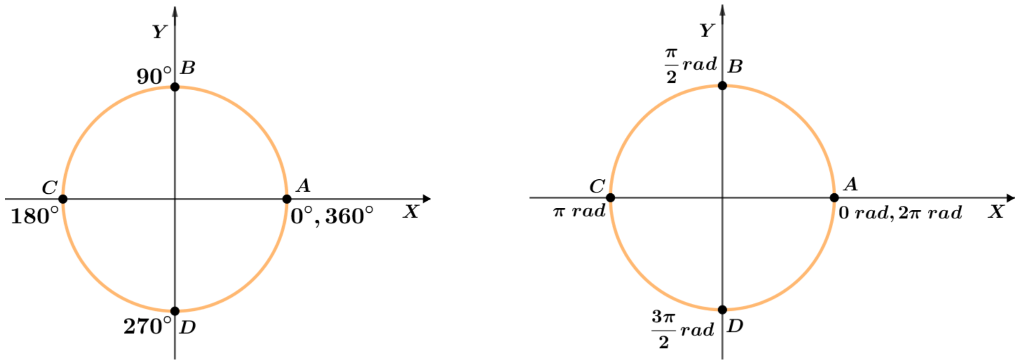
iii) Medimos o arco $\widehat{AP}$ de comprimento $|\alpha|$ no sentido horário se $\alpha < 0$.

iv) Medimos o arco $\widehat{AP}$ de comprimento $|\alpha|$ no sentido anti-horário se $\alpha > 0$.

v) Tomando um ponto P sobre Γ, P determina um único arco $\widehat{AP}$ de medida α, ou seja, a cada α está associado a um único P no círculo. Dizemos que P é a imagem de α no ciclo.

Na Figura 91 por exemplo, partindo de A e dando uma volta completa no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, C e D :

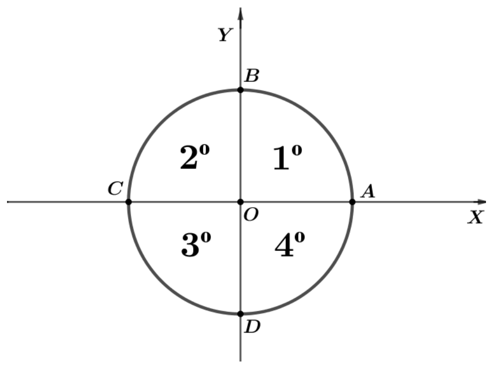
Figura 91: Medidas associadas aos extremos de cada quadrante



Fonte: Autor, baseado em [30].

vi) Os eixos ortogonais OX e OY dividem o círculo em quatro regiões chamadas de quadrantes que são contados no sentido anti-horário partindo do ponto A.

Figura 92: Quadrantes do ciclo trigonométrico



Fonte: Autor.

Definição 6.24. *Dois arcos trigonométricos $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = \beta$ são côngruos quando as extremidades P e Q coincidem.*

Para determinar todos os arcos $\widehat{AQ}$ côngruos a $\widehat{AP}$, note que a extremidade de um arco de comprimento $k \cdot 2\pi$ radianos, com $k \in \mathbb{Z}$, coincide com o ponto A de Γ. De modo geral, dado um arco $\widehat{AP} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\widehat{AQ} = \alpha + k \cdot 2\pi$, então P coincide com Q. Logo, a expressão que nos dá todos os arcos côngruos a $\widehat{AP} = \alpha$ é:

$$\alpha + k \cdot 2\pi; \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Observação 6.25. *Quando tratarmos de um arco trigonométrico medido em radianos daqui para frente, omitiremos o símbolo rad. Assim, quando falarmos do arco de medida* $\frac{3\pi}{2}$ *por exemplo, deve se entender que ele mede* $\frac{3\pi}{2}$ *radianos.*

Exemplo 6.26. *Determine as medidas x, em radianos, dos arcos côngruos ao arco* $\widehat{AP} = \frac{\pi}{2}$ *nas quatro primeiras voltas positivas.*

Solução:

Os arcos côngruos a $\widehat{AP}$ na segunda, terceira e quarta volta, medem respectivamente:

- $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$;
- $\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$;
- $\frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2}$.

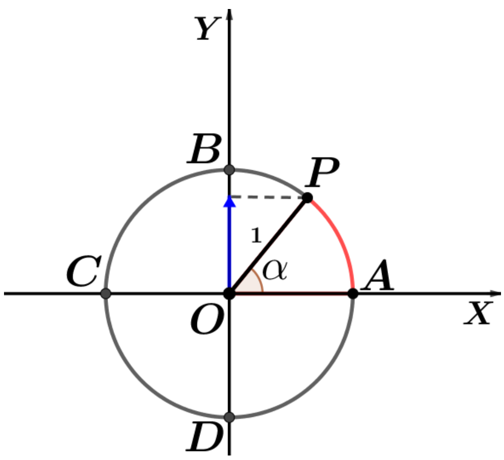
Portanto, as medidas procuradas são: $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ e $\frac{13\pi}{2}$. ♢

6.4 Razões trigonométricas no ciclo

Na seção 6.2, definimos seno, cosseno e tangente para ângulos agudos. Com auxílio do ciclo trigonométrico definido na seção 6.3, vamos estender esses conceitos para ângulos de medidas α radianos, tal que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 6.27. *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *seja P sua imagem no ciclo. Chamamos seno de* α *e indicamos por* $\operatorname{sen}\alpha$ *a ordenada do ponto P.*

Figura 93: Definição de seno



Fonte: Autor, baseado em [16].

Da definição de seno, decorrem as seguintes propriedades:

1) O $\operatorname{sen}\alpha$ é positivo quando α é do 1º ou 2º quadrante.

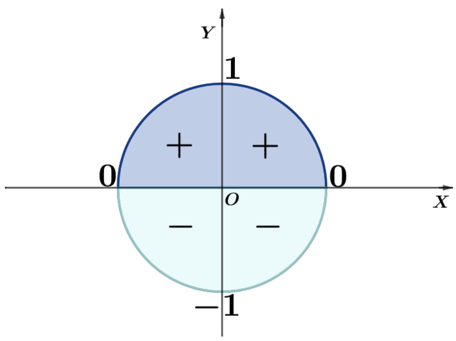
2) O $\operatorname{sen}\alpha$ é negativo quando α é do 3º ou 4º quadrante.

3) O $\operatorname{sen}\alpha$ é crescente quando α percorre o 1º ou 4º quadrante.

4) O $\operatorname{sen}\alpha$ é decrescente quando α percorre o 2º ou 3º quadrante.

5) Para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$.

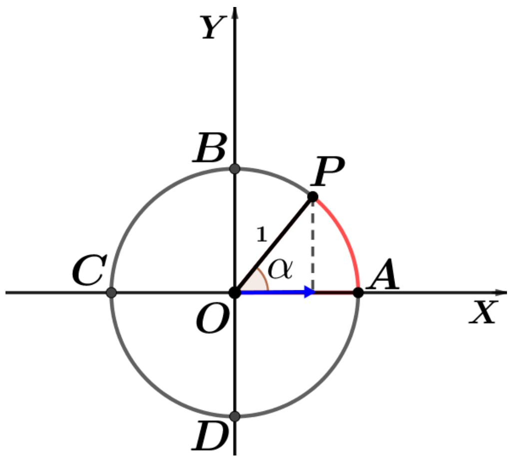
Figura 94: Sinais dos valores que o seno assume em cada quadrante do ciclo



Fonte: Autor.

Definição 6.28. *Dado um real $\alpha \in \mathbb{R}$, seja P sua imagem no ciclo. Chamamos cosseno de α e indicamos por $\cos\alpha$ a abscissa do ponto P.*

Figura 95: Definição de cosseno



Fonte: Autor, baseado em [16].

Da definição de cosseno, decorrem as seguintes propriedades:

1) O $\cos\alpha$ é positivo quando α é do 1º ou 4º quadrante.

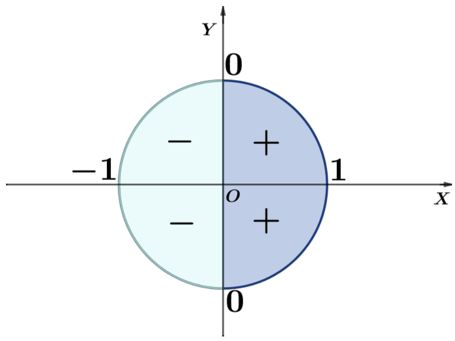
2) O $\cos\alpha$ é negativo quando α é do 2º ou 3º quadrante.

3) O $\cos\alpha$ é crescente quando α percorre 3º ou 4º quadrante.

4) O $\cos\alpha$ é decrescente quando α percorre 1º ou 2º quadrante.

5) Para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

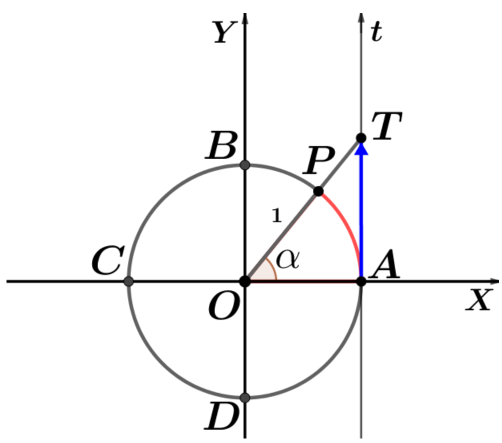
Figura 96: Sinais dos valores que o cosseno assume em cada quadrante do ciclo



Fonte: Autor.

Definição 6.29. *Dado um ciclo trigonométrico de centro O e uma reta t tangente ao ciclo no ponto A, isto é, uma reta que toca o círculo em um único ponto. Seja P a extremidade do arco $\widehat{AP}$ de medida $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Se T é o ponto de intersecção da reta OP e da reta t. Chamamos tangente de α e indicamos por $\operatorname{tg}\alpha$ a ordenada do ponto T.*

Figura 97: Definição de tangente



Fonte: Autor, basedo em [16].

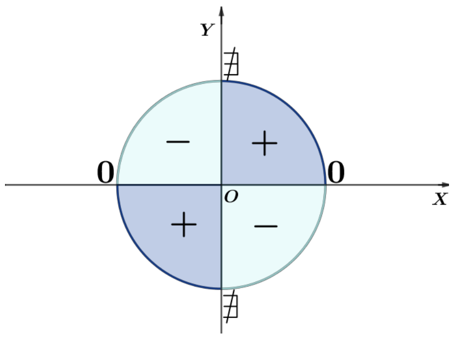
Da definição de tangente, decorrem as propriedades:

1) A $\operatorname{tg}\alpha$ é positiva quando α é do 1º ou 3º quadrante.

2) A $\operatorname{tg}\alpha$ é negativa quando α é do 2º ou 4º quadrante.

3) A $\operatorname{tg}\alpha$ é crescente quando α percorre qualquer um dos quadrantes.

Figura 98: Sinais dos valores que a tangente assume em cada quadrante do ciclo



Fonte: Autor.

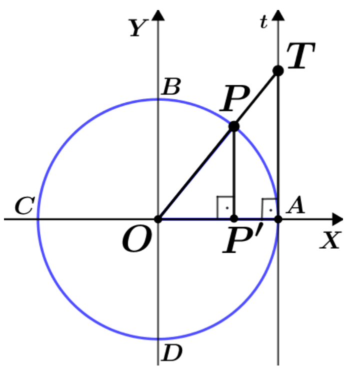
6.5 Relações fundamentais no ciclo trigonométrico

Teorema 6.30. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *vale a relação:* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Prova:

Na Figura 99 a seguir, se a extremidade final de um ângulo de medida α coincide com A ou C o resultado é imediato.

Figura 99: Relação entre seno, cosseno e tangente



Fonte: Autor, baseado em [16].

Por outro lado, dado um ponto P no ciclo diferente de A e C, P determina o arco $\widehat{AP}$ de medida α. Se P' é a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abcissas, então $A\hat{O}T = P'\hat{O}P$ e $O\hat{A}T = O\hat{P}'P$, isto é, os triângulos OAT e $OP'P$ são semelhantes. Segue que

$$\triangle OAT \sim \triangle OP'P \Rightarrow \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}}.$$

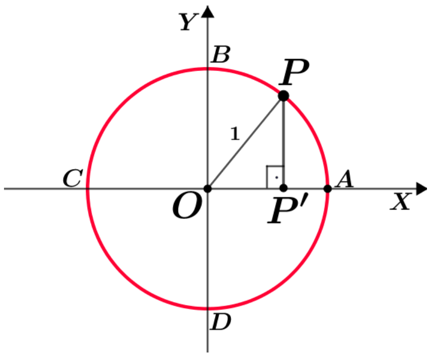
Logo, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. ■

Teorema 6.31. *Dado um arco trigonométrico de medida α, têm-se:* $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Prova:

Considere o ciclo trigonométrico conforme a Figura 100 a seguir:

Figura 100: Relação fundamental da trigonometria



Fonte: Autor, baseado em [16].

Se α é um arco com extremidade em um dos pontos A, B, C ou D temos:

- $0^2 + 1^2 = 1$ no ponto A.
- $1^2 + 0^2 = 1$ no ponto B.
- $0^2 + (-1)^2 = 1$ no ponto C.
- $(-1)^2 + 0^2 = 1$ no ponto D.

Por outro lado, dado um ponto P diferente de A, B, C e D, no ciclo, P determina um arco $\widehat{AP}$ de medida α. Seja P' a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas. Pelo teorema de Pitágoras

$$(\overline{PP'})^2 + (\overline{OP'})^2 = (\overline{OP})^2.$$

Isso significa que

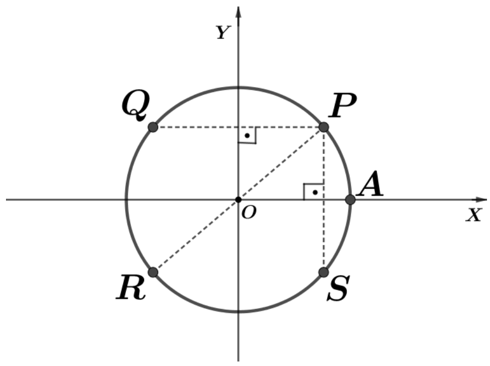
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

■

6.6 Simetria no ciclo trigonométrico e redução ao primeiro quadrante

É de muita utilidade para o cálculo dos senos, cossenos e tangentes, saber relacionar a medida de um arco no primeiro quadrante a seus simétricos nos outros quadrantes do ciclo. Consideremos então no ciclo trigonométrico um ponto P, extremidade final de um arco $\widehat{AP} = \alpha$, tal que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Conforme a Figura 101 a seguir.

Figura 101: Pontos simétricos no ciclo trigonométrico



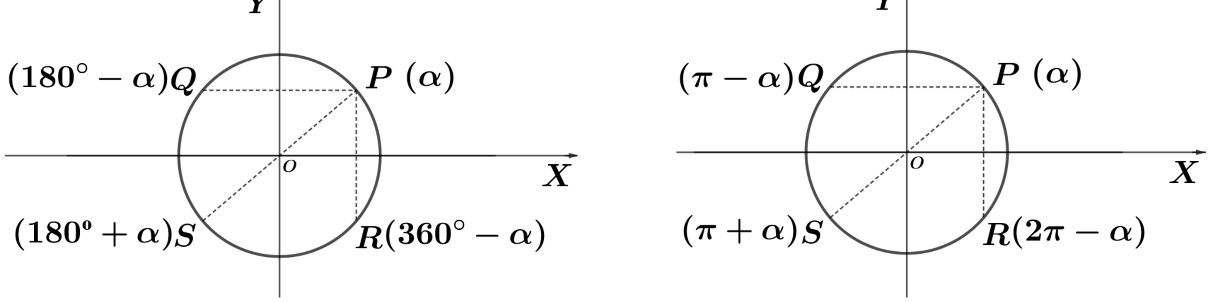
Fonte: Autor, baseado em [30].

Na Figura 101 acima, os pontos Q, R e S são ditos *simétricos* do ponto P em relação ao eixo OY, origem e eixo OX respectivamente.

Pode-se provar que $\widehat{AQ} = \pi - \alpha$, $\widehat{AR} = \pi + \alpha$ e $\widehat{AS} = 2\pi - \alpha$. Para o leitor interessado nessa demonstração sugerimos [30].

Assim, sendo α a medida de um arco no 1º quadrante, são simétricos a α no 2º, 3º e 4º quadrante respectivamente, os arcos de medida: $180^\circ - \alpha$ ou $\pi - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ou $\pi + \alpha$ e $360^\circ - \alpha$ ou $2\pi - \alpha$.

Figura 102: Arcos com medidas simétricas



Fonte: Autor, baseado em [30].

Redução do 2º ao 1º quadrante

Dados dois arcos $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = \pi - \alpha$, onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Note que P e Q são simétricos em relação ao eixo OY. Logo, P e Q tem ordenadas iguais e abcissas opostas. Como $P(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q(\cos(\pi-\alpha),\ sen(\pi-\alpha))$, então $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$ e $\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$. Por outro lado, pelo Teorema 6.30 a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, logo, $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$. Portanto:

- $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ ou $\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ ou $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$;
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ ou $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Redução do 3º ao 1º quadrante

Dados dois arcos $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = \pi + \alpha$, onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Note que P e Q são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, P e Q tem abscissas e ordenadas opostas. Como $P(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q(\cos(\pi+\alpha),\ \operatorname{sen}(\pi+\alpha))$, então $\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$ e $\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$. Pelo Teorema 6.30 a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, logo, $\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha)$. Portanto:

- $\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ ou $sen(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$;
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$ ou $cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$;
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ ou $\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Redução do 4º ao 1º quadrante

Dados dois arcos $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = 2\pi - \alpha$, onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Note que P e Q são simétricos em relação ao eixo OX. Logo, P e Q tem abscissas iguais e ordenadas opostas. Como $P(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q(\cos(2\pi-\alpha),\ \operatorname{sen}(2\pi-\alpha))$, então $\cos(2\pi-\alpha) = \cos(\alpha)$ e $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$. Pelo Teorema 6.30 a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, logo $\operatorname{tg}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$. Portanto:

- $\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ ou $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$;
- $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ ou $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$;
- $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ ou $\operatorname{tg}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Exemplo 6.32. *Calcule o valor de* $\operatorname{sen}150^\circ$.

Solução:

Note que a extremidade final do arco que mede $150°$, pertence ao segundo quadrante, isso significa que o arco simétrico a ele no primeiro quadrante mede $180 - 150 = 30°$. Portanto $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$. ◊

Exemplo 6.33. *Calcule o valor de* $\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Solução:

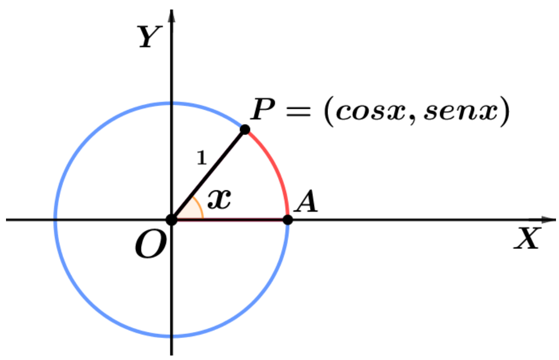
A extremidade final do arco de medida $\dfrac{7\pi}{4}$ pertence ao quarto quadrante, isso significa que o arco simétrico a ele no primeiro quadrante mede $2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$. Portanto $\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$. ◊

6.7 Funções Periódicas

Definição 6.34. *Uma função $f : A \to B$ é periódica se existir um número real $p > 0$ satisfazendo a condição $f(x+p) = f(x), \forall x \in A$. O menor valor de p que satisfaz esta condição é chamado período de f.*

Vimos na seção 6.3 que dado um número $x \in \mathbb{R}$, existe um único ponto P no ciclo trigonométrico tal que $\widehat{AP} = x$, ou seja, cada número real está associado a medida de um único arco do ciclo. Vimos também na seção 6.4 que dado um número $x \in \mathbb{R}$, se P é a imagem de x no ciclo, então a ordenada de P é indicada por $\operatorname{sen} x$ e a abscissa por $\cos x$. Dessa forma, podemos associar cada $x \in \mathbb{R}$ ao seno ou cosseno do ângulo cuja medida é x.

Figura 103: Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor.

Além disso, pelo Teorema 6.31 dado $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, vale a relação: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Portanto, podemos definir as funções a seguir.

Definição 6.35. *Chamamos função seno a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $f(x) = \operatorname{sen} x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Em símbolos:

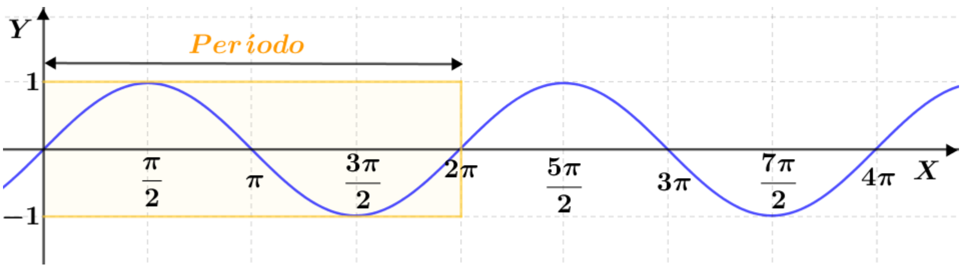
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

A função seno é periódica e seu período é 2π. Então, para todo $x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi)$. Assim, é imediato que f não é injetiva, pois elementos distintos x e $x + k \cdot 2\pi$ possuem a mesma imagem.

Por outro lado, como $Im(f) = [-1, 1]$, e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$, então a função seno não é sobrejetiva. Consequentemente podemos concluir que f não é bijetiva.

A Figura 104 a seguir exibe o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Figura 104: Gráfico da função seno



Fonte: Autor.

Definição 6.36. *Chamamos função cosseno a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $f(x) = \cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Em símbolos:

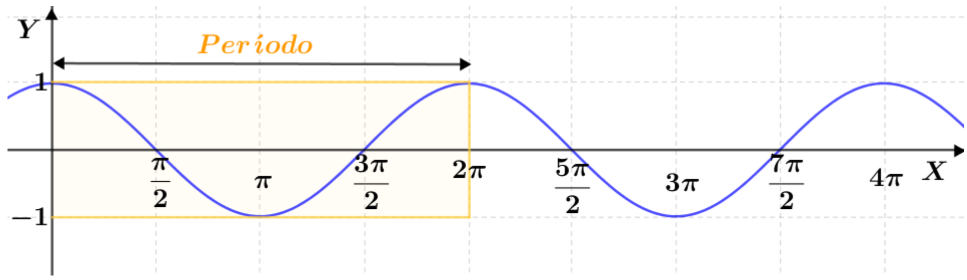
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \cos x \end{aligned}$$

A função cosseno é periódica e seu período é 2π. Então, para todo $x \in \mathbb{R} : \cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$. Assim, é imediato que f não é injetiva, pois elementos distintos x e $x + k \cdot 2\pi$ possuem a mesma imagem.

Por outro lado, como $Im(f) = [-1, 1]$, e o contradomínio é $\mathbb{R}$, então a função cosseno não é sobrejetiva. Consequentemente podemos afirmar que f não é bijetiva.

A Figura 105 exibe o gráfico da função $f(x) = \cos x$.

Figura 105: Gráfico da função cosseno



Fonte: Autor.

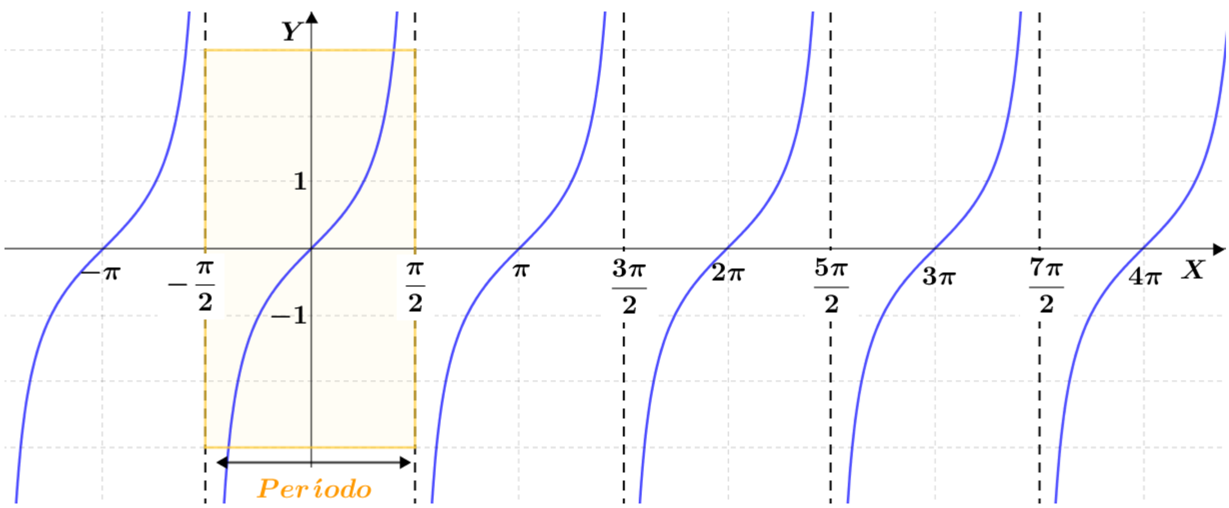
Definição 6.37. *Chamamos função tangente a função* $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$*, tal que* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*,* $x \neq \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Em símbolos:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \operatorname{tg} x \end{array}$$

É importante enfatizar que $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, pois as tangentes dos arcos de medida $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ não estão definidas. Por outro lado, $Im(f) = \mathbb{R}$, logo a função tangente é sobrejetiva. Entretanto, f é periódica e seu período é π. Então, para todo $x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi : \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + k\pi)$. Assim, f não é injetiva e consequentemente não é bijetiva. A Figura 106 exibe o gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Figura 106: Gráfico da função tangente



Fonte: Autor.

6.8 Gráfico das funções seno e cosseno

Os gráficos das funções seno e cosseno são chamados de senóides e cossenóides respectivamente. Para entender os fenômenos associados a estas funções, é fundamental compreender como eles se comportam. Nesta seção veremos quais as influências dos parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ nos gráficos das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(c \cdot x + d) \quad e \quad g(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d).$$

Mostraremos no entanto, o caso da função seno e a função cosseno pode ser tratada de forma análoga. Para isso, iniciaremos com o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ apresentado na seção 6.7 e através de comparações com outros gráficos, vamos evidenciar o efeito de cada parâmetro. Esta seção teve como base as referências [5], [6], [7], [30] e [35].

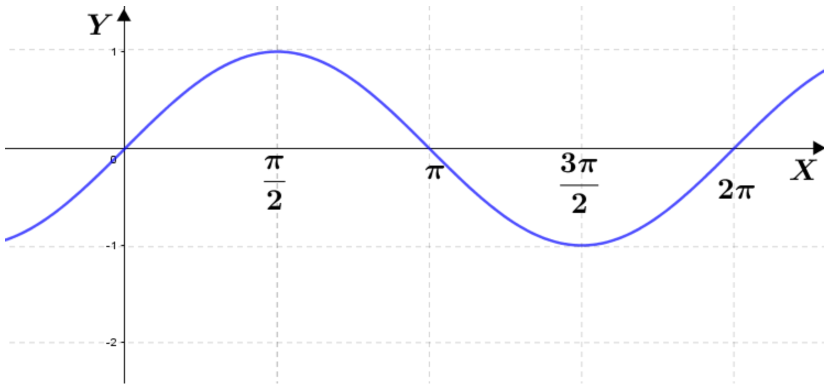
Exemplo 6.38. *Esboce o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.*

Solução:

Os ponto de $G(f)$ tem coordenadas dadas por $(x, \operatorname{sen} x)$. Assim, façamos uma tabela com x em abcissas e $y = \operatorname{sen} x$ em ordenadas para obtermos alguns pontos do gráfico.

x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Figura 107: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

$\diamondsuit$

A linha horizontal que passa no ponto médio entre o valor máximo e o valor mínimo da senóide é chamada de *linha média*, ela será usada para indicar a *posição do gráfico*. No caso da função $y = \operatorname{sen} x$, a sua linha média coincide com o eixo OX.

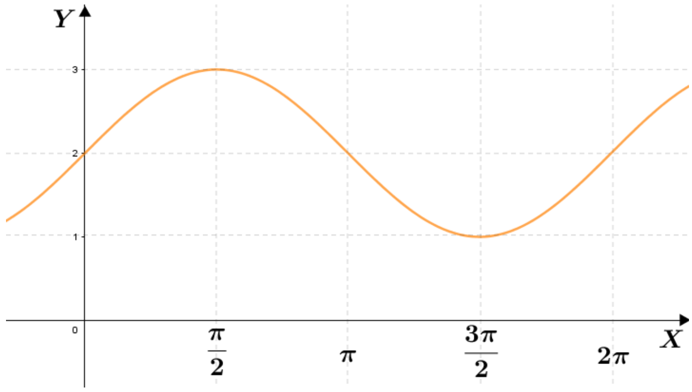
Exemplo 6.39. *Esboce os gráficos das funções $g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ e $h(x) = -1 + \operatorname{sen} x$. Compare cada um deles com o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.*

Solução:

Façamos tabelas com alguns valores que as funções $g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ e $h(x) = -1 + \operatorname{sen} x$ assumem, de modo a obter alguns pontos de $G(g)$ e $G(h)$.

x	$y = 2 + \operatorname{sen} x$
0	2
$\frac{\pi}{2}$	3
π	2
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	2

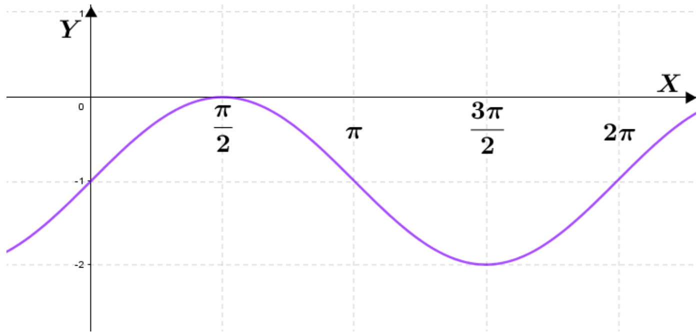
Figura 108: Gráfico da função $g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

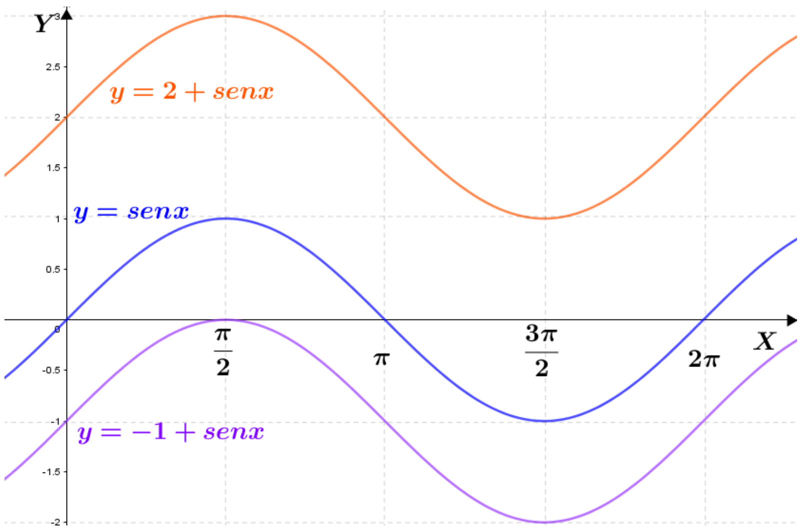
x	$y = -1 + \operatorname{sen} x$
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	-1

Figura 109: Gráfico da função $h(x) = -1 + \operatorname{sen} x$



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Figura 110: Comparação na posição das senóides



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Comparando o gráfico de $y = 2 + \operatorname{sen} x$ com o de $y = \operatorname{sen} x$ percebe-se que o desenho é o mesmo, porém a posição da senóide é transladada (deslocada) verticalmente em duas unidades para cima. Por outro lado, na comparação do gráfico de $y = -1 \operatorname{sen} x$ com o de $y = \operatorname{sen} x$ nota-se que a posição da senóide é transladada verticalmente em uma unidade para baixo. $\lozenge$

De modo geral, o parâmetro a translada o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ completamente a uma distância $|a|$ para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$, isto significa que a linha média do gráfico da função $y = a + \operatorname{sen} x$ intersecta o eixo OY no ponto $(0, a)$.

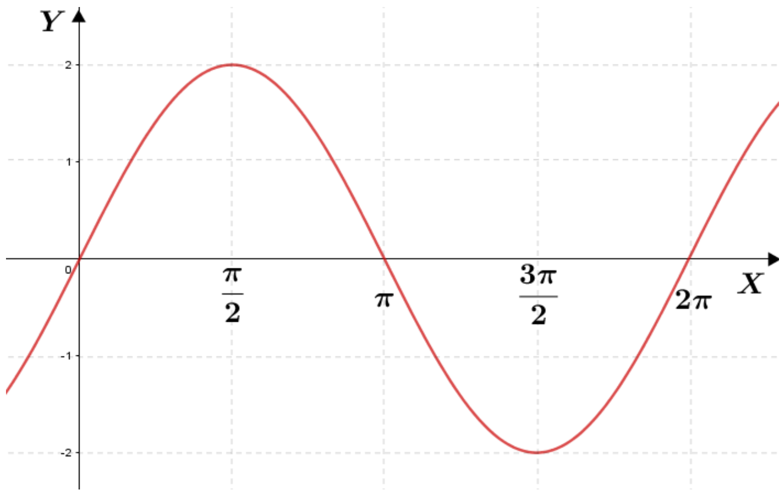
A diferença entre o valor máximo que a função assume e o valor de a é a mesma diferença entre o valor de a e o valor mínimo da função. Dessa forma, conhecendo-se o valor máximo e mínimo que a função $y = a + \operatorname{sen} x$ assume, o parâmetro a poderá ser obtido efetuando a média aritmética entre esses valores.

Exemplo 6.40. *Esboce os gráficos das funções* $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} x$ *e* $j(x) = -2 \operatorname{sen} x$. *Compare-os com o gráfico da função* $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solução:

Figura 111: Gráfico da função $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

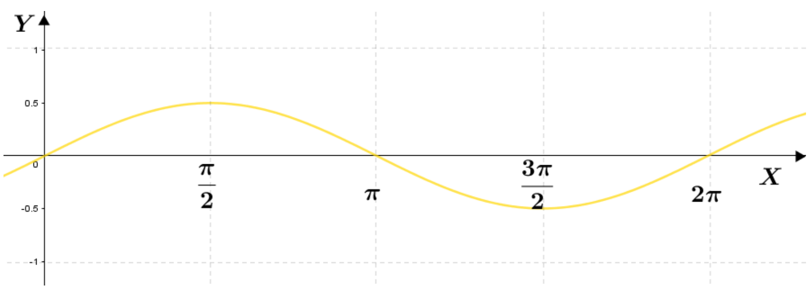
x	$y = 2 \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

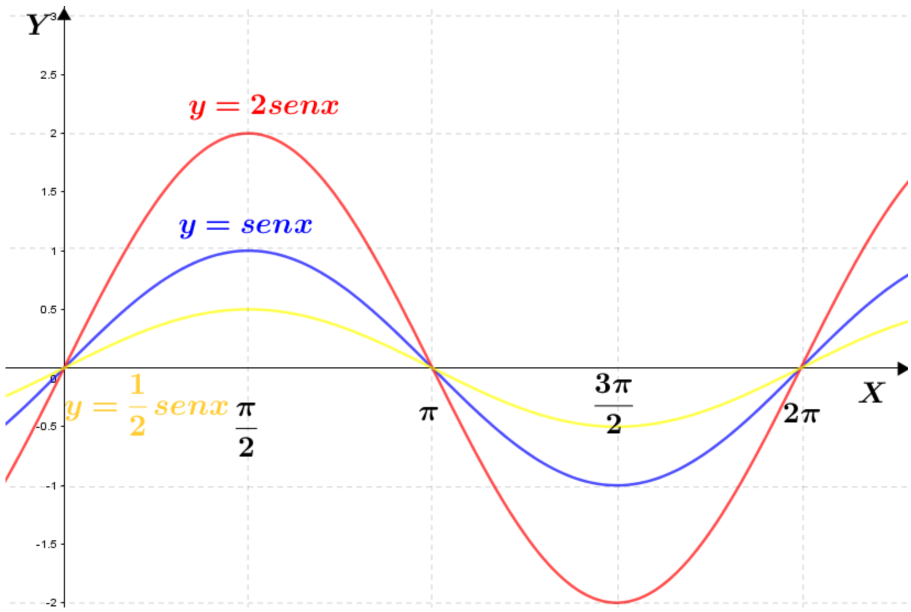
Figura 112: Gráfico da função $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} x$

x	$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Figura 113: Comparação nas amplitudes das senóides

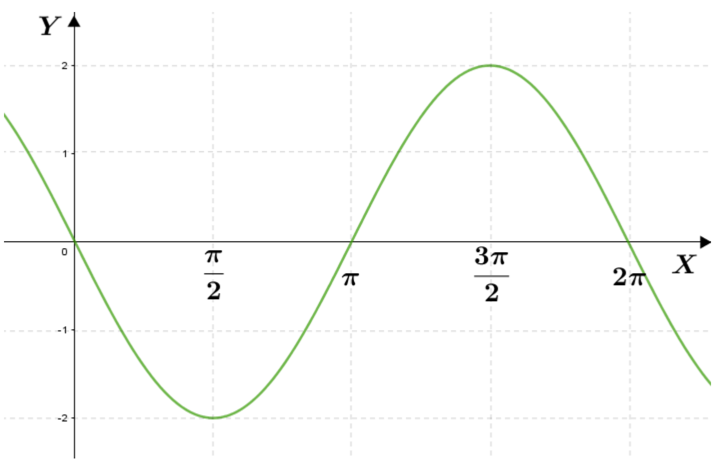


Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Comparando o gráfico de $y = 2\,\text{sen}\,x$ com o de $y = \text{sen}\,x$, nota-se que ambos estão na mesma posição, porém a extensão vertical do gráfico de $y = 2\,\text{sen}\,x$ é o dobro da extensão vertical do gráfico de $y = \text{sen}\,x$, isso é causado pelo fator 2, ele faz com que a obtenção do gráfico de $y = 2\,\text{sen}\,x$ se dê através de uma dilatação vertical do gráfico de $y = \text{sen}\,x$. Por outro lado, o gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}\,x$, tem sua extensão vertical equivalente a metade do gráfico de $y = \text{sen}\,x$. Neste caso o fator $\frac{1}{2}$ faz com que o gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}\,x$ se dê através de uma contração vertical do gráfico de $y = \text{sen}\,x$.

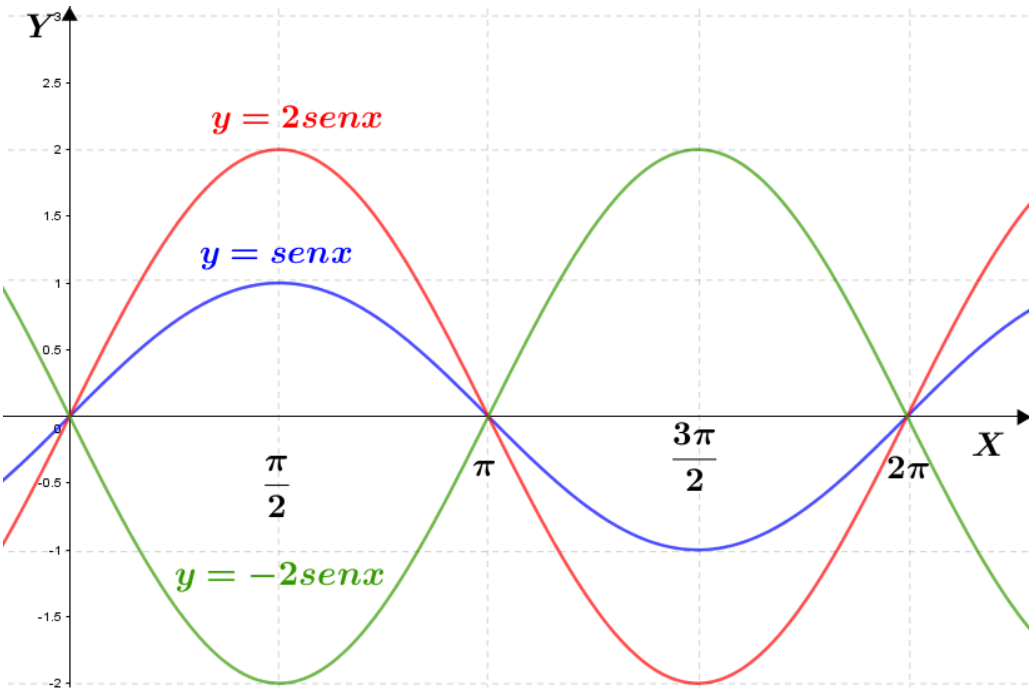
Figura 114: Gráfico da função $j(x) = -2\,\text{sen}\,x$

x	$y = -2\,\text{sen}\,x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	0



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Figura 115: Comparação nas amplitudes das senóides



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Ao comparar o gráfico de $y = -2\,\text{sen}\,x$ com o de $y = \text{sen}\,x$, nota-se que a extensão vertical do gráfico de $y = -2\,\text{sen}\,x$, assim como no caso de $y = 2\,\text{sen}\,x$ é o dobro da extensão vertical do gráfico de $y = \text{sen}\,x$, porém as curvas das senóides estão em sentidos contrários. Assim, o gráfico $y = -2\,\text{sen}\,x$ pode ser obtido por uma reflexão relativa ao eixo OX do gráfico de $y = 2\,\text{sen}\,x$. $\diamondsuit$

A extensão vertical do gráfico representa a amplitude da função, porém, para determiná-la, basta considerar a distância entre a linha média e um dos extremos do gráfico. Outra maneira de determinar a amplitude, seria calcular a distância entre o valor máximo e mínimo que a função assume e dividir por 2.

Nos exemplos acima as amplitude de $y = 1 \cdot \text{sen}\,x$, $y = 2 \cdot \text{sen}\,x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}\,x$ e $y = -2 \cdot \text{sen}\,x$ são respectivamente 1, 2, $\frac{1}{2}$ e $|-2| = 2$.

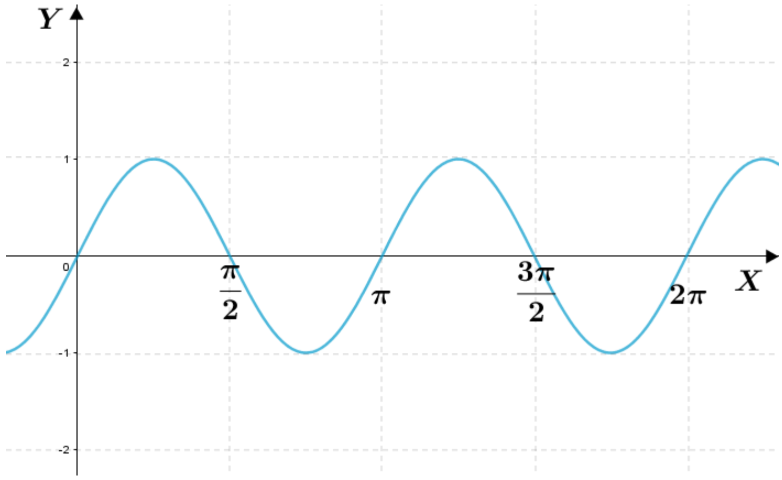
De uma forma geral, o parâmetro b dilata $(b > 1)$ ou contrai $(0 < b < 1)$ verticalmente o gráfico, ou reflete-o em relação ao eixo OX quando $b < 0$. Em todo caso, a amplitude da função é igual ao valor absoluto de b.

Exemplo 6.41. *Esboce os gráficos das funções* $g(x) = \text{sen}(2x)$ *e* $h(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ *e compare-os com o gráfico de* $f(x) = \text{sen}\,x$.

Solução:

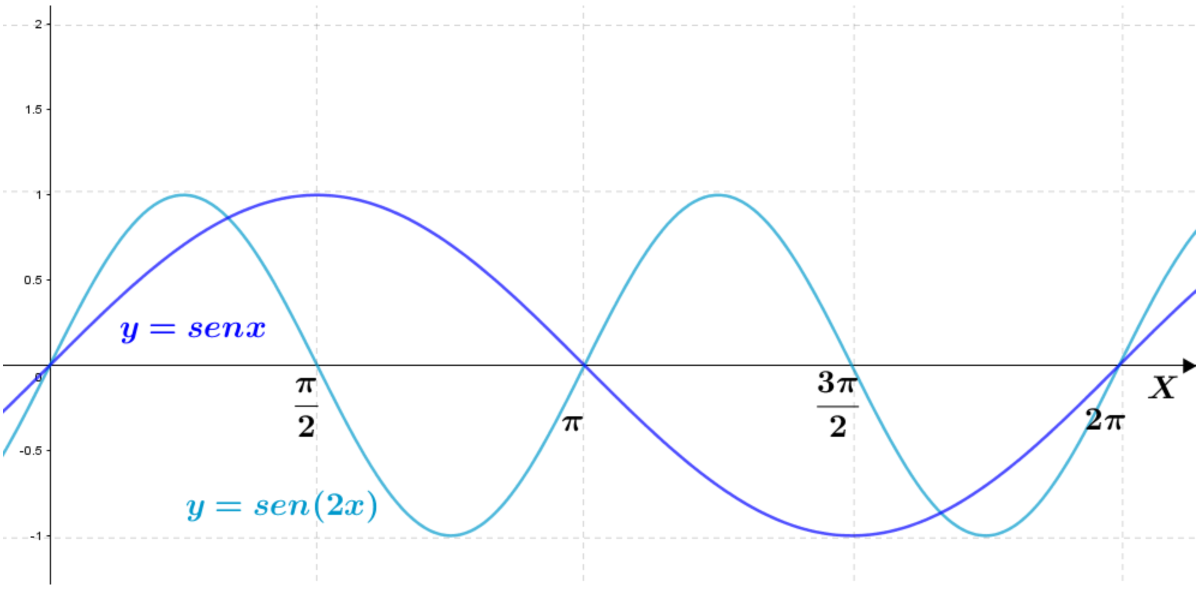
x	$y = sen(\frac{x}{2})$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	0
$\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3π	-1
$\frac{7\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4π	0

Figura 116: Gráfico da função $g(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Figura 117: Comparação entre os períodos das senóides

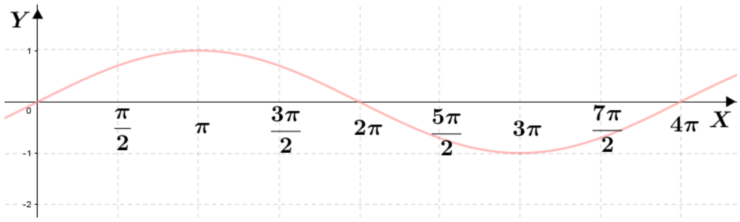


Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Comparando o gráfico da função $y = \text{sen}(2x)$ com o de $y = \text{sen}\,x$, nota-se que não há diferença nas posições dos gráficos nem em suas amplitudes, porém seus períodos diferem. A função $y = \text{sen}\,x$ tem período $p = 2\pi$, enquanto que $y = \text{sen}(2x)$ tem período $p = \pi$. Isso acontece porque o fator 2 causa uma contração horizontal no gráfico de $y = \text{sen}(2x)$ que torna seu período duas vezes menor que o de $y = \text{sen}\,x$.

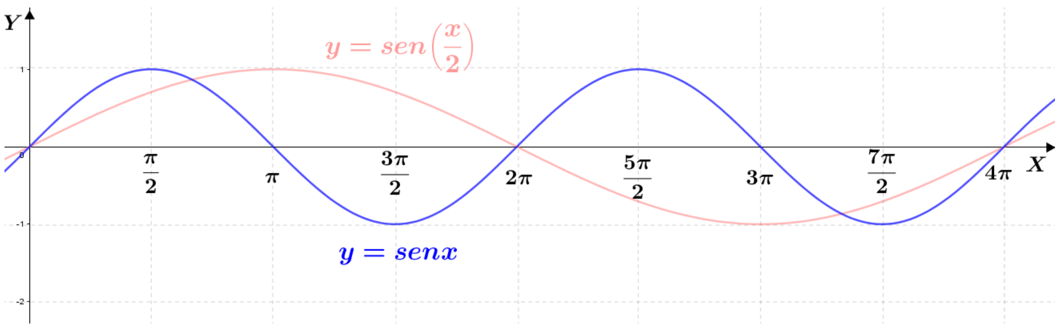
x	$y = sen(\frac{x}{2})$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	0
$\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3π	-1
$\frac{7\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4π	0

Figura 118: Gráfico da função $h(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Figura 119: Comparação entre os períodos das senóides



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Na comparação entre $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ com o de $y = \text{sen}\,x$, percebe-se novamente apenas uma diferença entre seus períodos. A função $y = \text{sen}\,x$ tem período $p = 2\pi$, enquanto que a função $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ tem período $p = 4\pi$. Neste cenário, o fator $\frac{1}{2}$ faz com que haja uma dilatação horizontal no gráfico de $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ que torna seu período duas vezes maior que o de $y = \text{sen}\,x$. $\lozenge$

De uma forma geral, o parâmetro c condiciona a forma horizontal do gráfico, contraindo-o $(c > 1)$ ou dilatando-o $(0 < c < 1)$, fazendo com que ele tenha seu ciclo em um intervalo maior ou menor, isto significa que o valor de c influencia no período da função.

Pode-se provar que o período de uma função do tipo $y = a + b\,\text{sen}(c \cdot x + d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, é

$$p = \frac{2\pi}{|c|}.$$

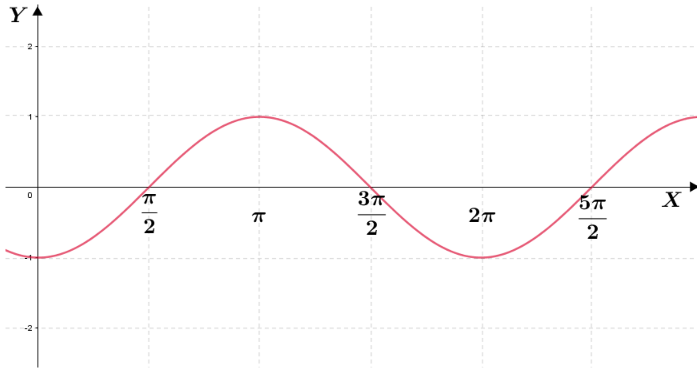
Para leitores interessados em mais detalhes sugerimos [30] e [35].

Exemplo 6.42. *Esboce o gráfico das funções* $g(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ *e* $h(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *e compare-os com a da função* $f(x) = \text{sen}\,x$.

Solução:

Figura 120: Gráfico da função $g(x) = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

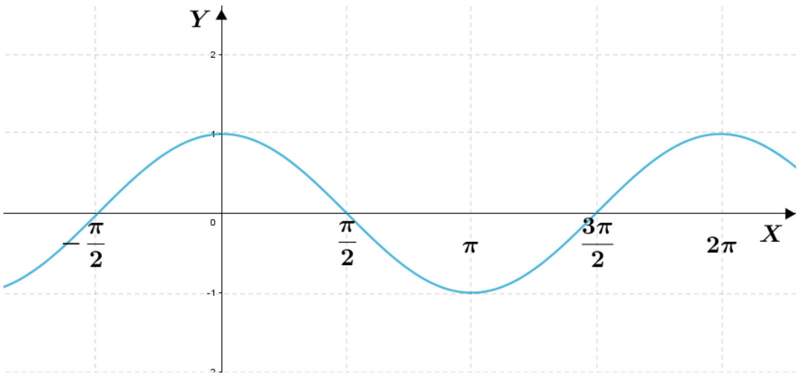
x	$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	-1



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

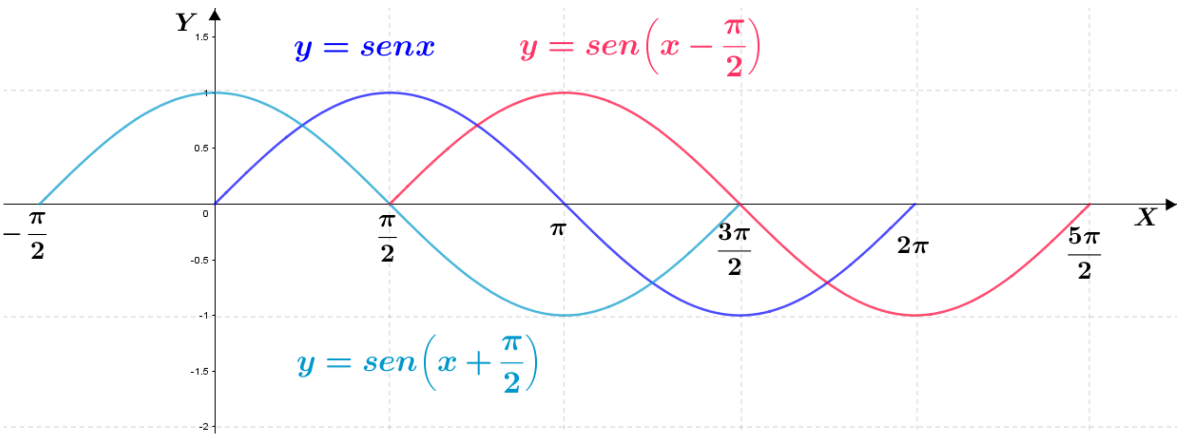
Figura 121: Gráfico da função $h(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

x	$y = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Figura 122: Deslocamento horizontal da senóide



Fonte: Autor, baseado em [7], [30] e [35].

Comparando o gráfico de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ com o de $y = \operatorname{sen} x$, nota-se que não há diferenças em suas posições, amplitudes ou períodos, porém, a parcela $-\frac{\pi}{2}$ faz parecer que a obtenção do gráfico de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ se deu através de um deslocamento horizontal para a direita de tamanho $\frac{\pi}{2}$ do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$. Por outro lado, a parcela $\frac{\pi}{2}$ faz parecer que a obtenção do gráfico de $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ se deu através de um deslocamento horizontal para a esquerda do gráfico de $y = senx$, cujo tamanho do deslocamento é igual a $\frac{\pi}{2}$. ♢

De modo geral o parâmetro d translada horizontalmente o gráfico a uma distância $|d|$ para a esquerda quando $d > 0$ ou para direita se $d < 0$.

Observação 6.43. *Sobre o estudo dos parâmetros feito acima, é importante enfatizar que:*

i) *o parâmetro a translada o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ completamente a uma distância $|a|$ para cima quando $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$. Além disso, a linha média do gráfico da função $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(c \cdot x + d)$ intersecta o eixo OY no ponto $(0, a)$;*

ii) *o parâmetro b dilata ou contrai verticalmente o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$, ou reflete-o em relação ao eixo OX quando b é negativo. Se $b > 1$ temos uma dilatação vertical no gráfico. De modo contrário, quando $0 < b < 1$ temos uma contração vertical no gráfico. A amplitude da função é igual ao valor absoluto de b;*

iii) *o parâmetro c dilata ou contrai a forma horizontal do gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$. Se $c > 1$ temos uma contração horizontal no gráfico. De modo contrário, quando $0 < c < 1$ temos uma dilatação horizontal no gráfico. Conhecendo o valor de c, pode-se obter o período da função $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(c \cdot x + d)$ pela fórmula*

$$p = \frac{2\pi}{|c|}.$$

iv) *o parâmetro d translada o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ completamente a uma distância $|d|$ para esquerda quando $d > 0$ ou para direita se $d < 0$.*

Tendo em vista os conceitos de deslocamento, amplitude e período, associados aos parâmetros da função $f(x) = a + b\operatorname{sen}(cx + d)$, podemos então utilizar esses conceitos para modelar situações de casos reais, basta para isso termos informações do fenômeno periódico em questão que se deseja modelar. Veremos a seguir uma aplicação prática destes conceitos.

Exemplo 6.44. *Roda gigante.*

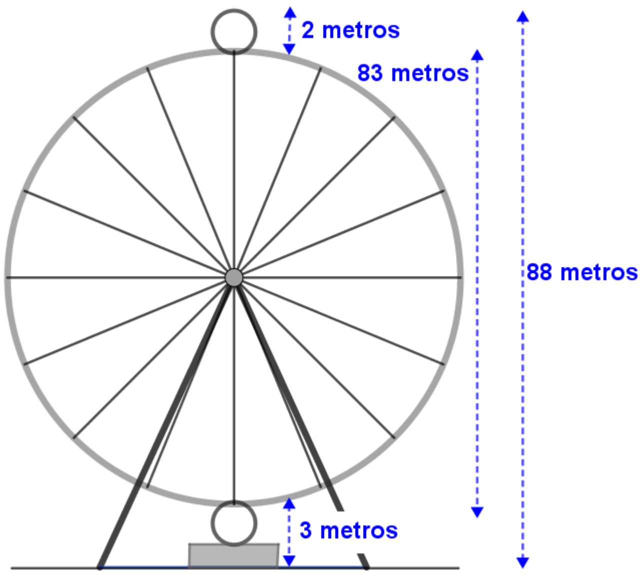
Este exemplo foi baseado nas referências [7], [29] e [35].

Em Dezembro de 2019, foi inaugurada no Rio de Janeiro a roda gigante Rio Star, com 88 metros de altura e 54 cabines com capacidade para 8 pessoas cada. O passeio no novo ponto turístico da "cidade maravilhosa" dura aproximadamente 18 minutos com velocidade constante. A Rio Star tem o posto da maior roda gigante da América Latina e oferece vista privilegiada de pontos turísticos como o Cristo Redentor, Pão de Açúcar e a Baía de Guanabara.

Um jovem aluno carioca ficou impressionado com a Rio Star depois de dar um passeio na mesma, e resolveu expressar matematicamente a altura H de uma das cabines em que o passageiro se encontra em relação ao solo, em função do tempo t em que o passeio na roda gigante foi iniciado. Veja o raciocínio utilizado pelo jovem:

Inicialmente, ele percebeu que o melhor modelo a ser adotado seria de uma função trigonométrica, pois se tratava de um fenômeno periódico, visto que a altura da cabine da roda gigante se repete a cada 18 minutos, então resolveu modelar o comportamento da roda gigante com uma função do tipo $H(t) = a + b\,\text{sen}(c \cdot t + d)$. Como a altura da Rio Star é 88 metros, ele estimou que a altura das cabines eram de 2 metros e que a plataforma usada para ter acesso a elas tinha 1 metro de altura. Assim, o círculo referente a roda gigante tinha 83 metros de diâmetro. A Figura 123 é um esboço da Rio Star feita pelo jovem.

Figura 123: Esboço da roda gigante Rio Star



Fonte: Autor, baseado em [7] e [35].

Usando os dados e o esboço, o jovem pôde fazer as seguintes afirmações:

- A altura mínima da cabine em relação ao solo é 1 metro, ou seja, o valor mínimo que a função assume é 1.

- A altura máxima da cabine em relação ao solo é 88 metros, ou seja, o maior valor assumido pela função é 88.

Logo, conseguiu determinar que:

- A linha média da função passa no ponto de ordenada $a = \dfrac{88+1}{2} = 44,5$.
- A amplitude da função é $b = \dfrac{88-1}{2} = 43,5$.

Por outro lado, como o tempo necessário para que a cabine percorra todo seu trajeto é 18 minutos, concluiu que o período da função desejada é $p = 18$. Assim, obteve o valor do parâmetro c fazendo:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2\pi}{|c|} \\ 18 &= \frac{2\pi}{|c|} \\ 18|c| &= 2\pi \\ c &= \frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Para determinar o parâmetro d, como já conhecia a, b e c, bastou usar o fato que $f(0) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 44,5 + 43,5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\cdot 0 + d\right) &= 1 \\ 43,5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\cdot 0 + d\right) &= 1 - 44,5 \\ \text{sen}(d) &= -1. \end{aligned}$$

Logo $d = \dfrac{3\pi}{2}$.

Por fim, concluiu que a função desejada para expressar a altura H da cabine em função do tempo t em que o passeio na roda gigante foi iniciado era

$$H(t) = 44,5 + 43,5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Exemplo 6.45. *(ENEM PPL 2014) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por* $y = a \cdot \text{sen}[b(x+c)]$*, em que os parâmetros* a, b, c *são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)*

a) a.

b) b.

c) c.

d) a e b.

e) b e c.

Solução:

Com base na observação 5.44, o único parâmetro que necessita ser alterado é o parâmetro c.

Resposta: Letra c. $\Diamond$

Exemplo 6.46. *(UF-RS) o período da função definida por* $\operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ *é:*

a) $\dfrac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{2\pi}{3}$

c) $\dfrac{5\pi}{6}$

d) π

e) 2π

Solução:

Pela observação 5.44, conhecendo-se o parâmetro c podemos calcular o período p da função. Para isso basta fazer $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$. Segue que:

$$p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}.$$

Resposta: Letra b. $\Diamond$

Exemplo 6.47. *(PUC-RS) Os fenômenos gerados por movimentos oscilatórios são estudados nos cursos da Faculdade de Engenharia. Sob certas condições, a função* $y = 10\cos(4t)$ *descreve o movimento de uma mola, onde y (medido em cm) representa o deslocamento da massa a partir da posição de equilíbrio no instante t (em segundos). Assim, o período e a amplitude desse movimento valem, respectivamente,*

a) $\dfrac{\pi}{2}$s e 10cm.

b) 2πs e 20cm

c) $\dfrac{\pi}{4}$s e 10cm.

d) $\dfrac{\pi}{4}$s e 20cm

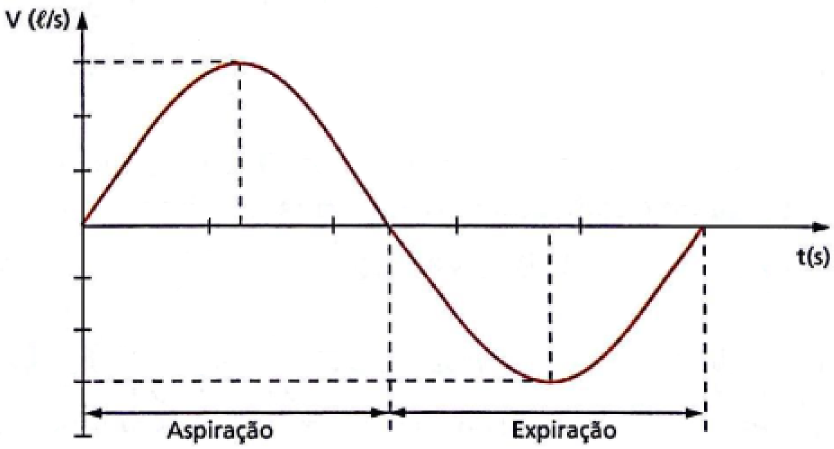
e) $\dfrac{\pi}{2}$s e 20cm

Solução:

Na função $y = a + b\cos(cx+d)$ o parâmetro b indica a amplitude, como $b = 10$, então a amplitude do movimento é igual a 10. Por outro lado, o período da função é dado pela expressão $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$. Como $c = 4$, então $p = \dfrac{2\pi}{|4|} = \dfrac{\pi}{2}$.

Resposta: Letra a. ◊

Exemplo 6.48. *(Unesp-SP)Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.*



Fonte: [16].

Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 l/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

a) $V(t) = \dfrac{2\pi}{5}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{5}t\right)$

b) $V(t) = \dfrac{3\pi}{5}\operatorname{sen}\left(\dfrac{5}{2\pi}t\right)$

c) $V(t) = 0,6\cos\left(\dfrac{2}{5}t\right)$

d) $V(t) = 0,6\operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{5}t\right)$

e) $V(t) = \dfrac{5}{2\pi}\cos(0,6t)$

Solução:

Diante das alternativas, precisamos apenas determinar a amplitude e o período da função, segue que:

. A função assume um valor nulo quando $x = 0$ e nesse mesmo ponto ela inicia seu ciclo, logo trata-se da função seno.

. O volume máximo de inalação e exalação é 0,6 l/s, isso nos diz que a amplitude da função é igual 0,6.

. "Um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos", isto significa que o período da função é 5. O período da função seno é dado por $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$, logo

$$5 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{5}.$$

Portanto temos $V(t) = 0,6\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{2}{5}t\right)$.

Resposta: Letra d. ◊

6.9 Equações trigonométricas

Toda equação que apresenta a incógnita em um arco de uma razão trigonométrica (seno, cosseno ou tangente) é denominada equação trigonométrica.

Exemplo 6.49. *Algumas equações trigonométricas:*

a) $\mathrm{sen}\,x = 1$

b) $2\cos(\pi - x) = \sqrt{2}$

c) $\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,x - 1 = 0$

d) $\mathrm{tg}(2x) = \sqrt{3}$

Método para resolução de equações trigonométricas

Para resolver uma equação trigonométrica do tipo $f(x) = g(x)$, devemos determinar o conjunto solução S de todos os números α que satisfazem a equação $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exemplo 6.50. *Determine os valores de x, onde $0 \leq x < 2\pi$ que satisfazem a equação* $\cos x = 0$.

Solução:

Considerando o ciclo trigonométrico, sabemos que os pontos cujas abscissas são iguais a 0 estão associado aos arcos de medida $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Assim $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$. Portanto $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

$\Diamond$

Exemplo 6.51. *Determine* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Solução:

Os pontos que possuem ordenadas iguais a $\frac{1}{2}$ estão associados aos arcos de medida $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$. Por outro lado, as expressões que nos dão todos os arcos côngruos a estes são:

$$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \ e \ \ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \ k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, temos $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$.

Portanto $S = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \ ou \ \ x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \ k \in \mathbb{Z}\}$. $\Diamond$

Exemplo 6.52. *(FGV-SP) Uma empresa exporta certo produto. Estima-se que a quantidade exportada* Q*, expressa em toneladas, para cada mês do ano 2011, seja dada pela função* $Q(x) = 40 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$*, em que* $x = 1$ *representa janeiro de 2011,* $x = 2$ *representa fevereiro de 2011 e assim por diante. Em que meses a exportação será de 38 toneladas?*

a) abril e agosto.

b) maio e setembro.

c) junho e outubro.

d) julho e novembro.

e) agosto e dezembro.

Solução:

Queremos que a exportação seja de 38 toneladas, ou seja, queremos $Q(x) = 38$, logo:

$$\begin{aligned} 40 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) &= 38 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ devemos ter $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{11\pi}{6}$. Substituindo α por $\frac{\pi x}{6}$, temos:

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = 7 \ \ ou \ \ \frac{\pi x}{6} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = 11.$$

Portanto os meses em que a exportação será de 38 toneladas são Julho e Novembro.

Resposta: Letra d. $\Diamond$

Exemplo 6.53. *(UF-RN) Marés são movimentos periódicos de rebaixamento e elevação de grandes massas de água formadas pelos oceanos, mares e lagos. Em determinada cidade litorânea , a altura da maré é dada pela função* $h(t) = 3 + 0,2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$*, onde t é medido em horas a partir da meia noite.*

Um turista contratou um passeio de carro pela orla dessa cidade e, para tanto, precisa conhecer o movimento das marés. Desse modo,

a) qual a altura máxima atingida pela maré?

b) em quais horários isto ocorre no período de um dia?

Solução do item a:

Como $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, então a altura da maré será máxima quando $\cos\alpha = 1$, ou seja, $3 + 0,2\cdot 1 = 3,2$. Logo a altura máxima é 3,2 metros.

Solução do item b:

Para que tenhamos $\cos\alpha = 1$, devemos ter $\alpha = 0 + k\cdot 2\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$. Substituindo α por $\frac{\pi}{6}\cdot t$ temos:

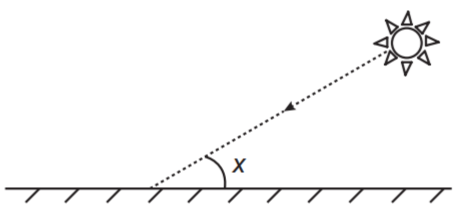
$\frac{\pi}{6}\cdot t = k\cdot 2\pi \Rightarrow t = 12k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Portanto os horários que a maré atinge sua altura máxima são: 0h e 12h. $\Diamond$

6.10 Questões do ENEM

Exercício 23. *(ENEM 2017)*

Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.



Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $l(x) = k\cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo que x está entre 0° e 90°.

Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%

b) 50%

c) 57%

d) 70%

e) 86%

Solução:

Inicialmente note que a intensidade será máxima quado $\operatorname{sen} x = 1$, ou seja, quando $x = 90^\circ$. Assim

$$l(90^\circ) = k \cdot \operatorname{sen} 90^\circ = k \cdot 1 = k.$$

Como $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, quando $x = 30^\circ$, temos:

$$l(30^\circ) = k \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = k \cdot \frac{1}{2}$$

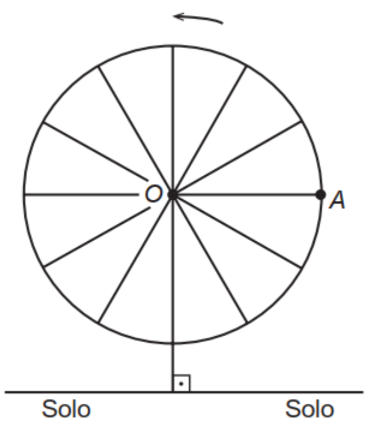
$$l(30^\circ) = \frac{k}{2}.$$

Assim, quando $x = 30^\circ$, a intensidade luminosa é reduzida a metade da sua intensidade máxima, isso significa que ela se reduz a 50% de seu valor máximo.

Resposta: Letra b. ♢

Exercício 24. *(ENEM 2018)*

Em 2014 foi inaugurado a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura mostra um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

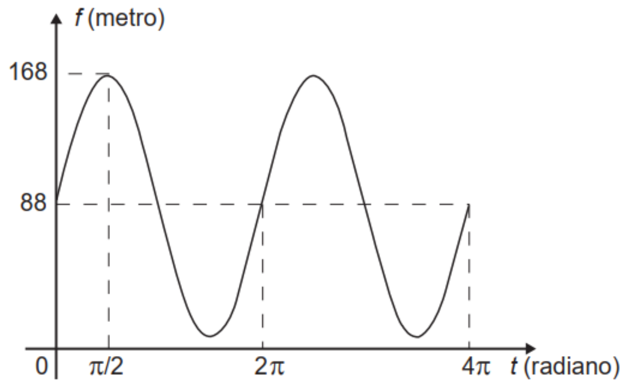


Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

Fonte: [17].

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo formado pelo segmento OA em relação a sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



Fonte: [17].

A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80sen(t) + 88$

b) $f(t) = 80cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)$

e) $f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)$

Solução:

O gráfico mostra que o valor máximo que a função assume é 168 e isso acontece quando t é igual $\frac{\pi}{2}$, logo se trata de uma função do tipo $a + b\,\text{sen}(c \cdot t + d)$, com $b, c \neq 0$. Por outro lado, a linha média do gráfico intersecta o eixo OY no ponto $(0, 88)$, isso significa que $a = 88$. Podemos então determinar a amplitude da função calculando $168 - 88 = 80$, logo $b = 80$. Diante das alternativas, podemos concluir que $f(t) = 80sen(t) + 88$.

Resposta: Letra a. ◊

Exercício 25. *(ENEM 2017)*

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

Solução:

Note que $78 \leq A + B\cos(kt) \leq 120$, ou seja, $A + B = 120$ e $A - B = 78$, logo

$$\begin{cases} A + B = 120 \\ A - B = 78 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A = 99$ e $B = 21$.

Para determinar o valor de k, note que "um batimento representa um intervalo de tempo entre duas pressões máximas", ou seja, nesse intervalo, a função percorre todo seu ciclo. Como temos 90 batimentos por minuto, cada batimento ocorre a cada $\frac{2}{3}$ de segundo, logo o período da função é $\frac{2}{3}$.

Calculamos o período usando $p = \frac{2\pi}{|k|}$, segue que

$$\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{|k|}$$

$$|k| = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}}$$

$$|k| = 3\pi.$$

Como k é positivo, então $k = 3\pi$.

Portanto, $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

Resposta: Letra a. ◊

Exercício 26. *(ENEM 2015)*

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função:

$$P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right).$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br.Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro.

b) abril.

c) junho.

d) julho.

e) outubro.

Solução:

De acordo com o texto, quanto maior a produção menor é o preço do alimento, ou seja, a produção será máxima quando o preço for mínimo. O valor de P é mínimo quando

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1.$$

Sabemos que

$$\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

logo

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\pi \cdot \left(\frac{x-1}{6}\right) = \pi(1 + 2k)$$

$$x = 7 + 12k$$

Portanto a produção máxima ocorre no mês de julho.

Resposta: Letra c. ◊

Exercício 27. *(ENEM 2010)*

Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1+0,15\cdot\cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

a) 12765 km.

b) 12000km.

c) 11730km.

d) 10965km.

e) 5865km.

Solução:

O valor S representa a soma do valor máximo e do valor mínimo de r. Assim, perceba que o valor de r será máximo quando $\cos(0,06t) = -1$ e será mínimo quando $\cos(0,06t) = 1$, então:

$$r_{MAX} = \frac{5865}{1+0,15\cdot(-1)} = \frac{5865}{0,85} = 6900$$

e

$$r_{min} = \frac{5865}{1+0,15\cdot 1} = \frac{5865}{1,15} = 5100.$$

Logo $S = 6900+5100 = 12000$.

Resposta: Letra b. ◊

Exercício 28. *(ENEM 2014)*

A quantidade de certa espécie de crustáceos, medida em toneladas, presente num trecho de mangue, foi modelada pela equação

$$Q(t) = \frac{600}{6+4\,\mathrm{sen}(wt)}$$

onde t representa o número de meses transcorridos após o início de estudo e w é uma constante. O máximo e o mínimo de toneladas observados durante este estudo são, respectivamente,

a) 600 e 100.

b) 600 e 150.

c) 300 e 100.

d) 300 e 60.

e) 100 e 60.

Solução:

O quociente $\dfrac{600}{6+4\,\text{sen}(wt)}$ assume seu valor máximo quando temos $\text{sen}(wt) = -1$, logo

$$\frac{600}{6-4} = 300.$$

Por outro lado, assume seu valor mínimo quando temos $\text{sen}(wt) = 1$, assim

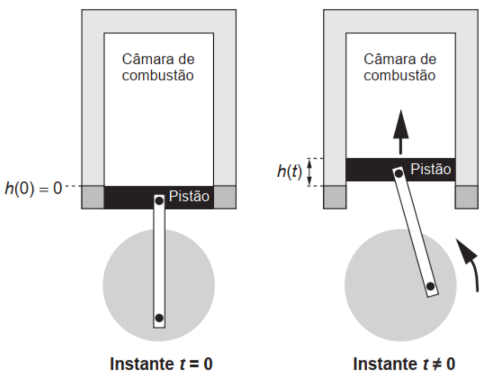
$$\frac{600}{6+4} = 60.$$

Portanto o máximo e o mínimo de toneladas observados durante este estudo foram respectivamente 300 e 60.

Resposta: Letra d. ◊

Exercício 29. *(ENEM 2019)*

Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



Fonte: [17].

A função $h(t) = 4 + 4sen\left(\dfrac{\beta t}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a) 1.

b) 2.

c) 4.

d) 5.

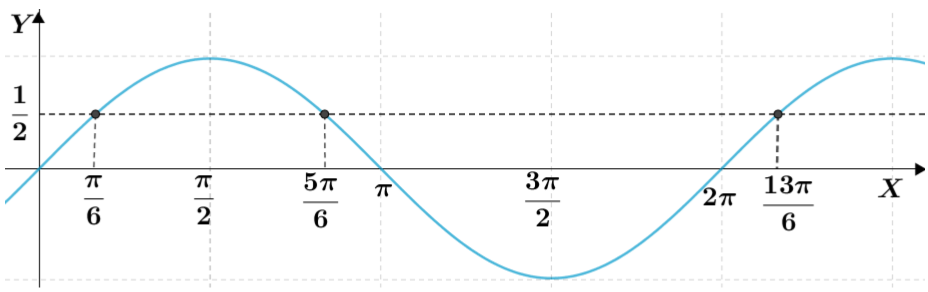
e) 8.

Solução:

Queremos que h alcance a altura de 6cm por 3 vezes, ou seja queremos $h(t) = 6$. Note que

$$4 + 4sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Considerando o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$, note que a função alcança 3 vezes o valor $\frac{1}{2}$ quando $x = \frac{13\pi}{6}$.



Fonte: Autor.

Figura 124: Gráfico de $y = \operatorname{sen} x$

Dessa forma, devemos ter

$$sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right),$$

ou seja,

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6}.$$

Considerando $\pi = 3$, temos

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{3}{2} = \frac{13 \cdot 3}{6}$$
$$\beta t = 16$$
$$t = \frac{16}{\beta}.$$

Como $t < 4$, então $\frac{16}{\beta} < 4 \Leftrightarrow \beta > 4$.

Portanto o menor valor de β para que o motor tenha boa potência é 5.

Resposta: Letra d. $\Diamond$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ter uma boa educação escolar é com certeza o primeiro passo para que haja diminuição nas desigualdades de um país. É fato, que o ENEM tornou o acesso ao ensino superior no Brasil mais democrático. Hoje, jovens de todas as classes sociais e de todas as regiões do país, podem ter acesso ao meio acadêmico.

Por conta da grande importância das questões de matemática no exame, elaboramos este trabalho com objetivo de expor os conteúdos sobre Conhecimentos Algébricos do ENEM e apresentar o perfil das questões abordadas neste exame, que envolvem esses conteúdos, através de resoluções comentadas das questões mais recorrentes de cada tipo de função, de forma que possa ser utilizado por alunos e professores de escolas públicas que lidam com a preparação para o ENEM.

É importante ressaltar que a área de Conhecimentos Algébricos do ENEM é muito ampla e que não abordamos todos os assuntos relacionados a ela. Deixamos como sugestão para trabalhos futuros, a exposição de forma detalhada do estudo de equações e inequações, bem como o estudo das funções racionais e polinomiais.

Por fim, o leitor interessado em aprofundar-se nos assuntos tratados neste trabalho, poderá consultar os livros e materiais que serviram de base para a elaboração do mesmo, disponíveis nas referências deste trabalho.

Referências

[1] ALCANTARA, E. F. **A matemática básica em provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2020.

[2] ALVES, M. T. G.; SOARES, J. F.; XAVIER, F. P. **Desigualdades educacionais no ensino fundamental de 2005 a 2013: hiato entre grupos sociais**. Revista Brasileira de Sociologia. vol 4, no. 7. 2016.

[3] BARBOSA, J.L.M. **Geometria euclidiana plana**. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do professor de matemática)

[4] BRASIL. Ministério da Educação. **Perguntas e respostas explicam notas do exame em cada área**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/14960-perguntas-e-respostas-explicam-as-notas-do-exame-em-cada-area> Acesso em: 02 de julho de 2020.

[5] CAPUTI, A.; MIRANDA, D. **Bases matemáticas**. Versão 13. Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

[6] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria números complexos**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[7] CONNALLY, E. et al. **Functions modeling change**: a preparation for calculus. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 2006.

[8] CORONAVIRUS BRASIL. Disponível em: <https://covid.saude.gov.br/> Acesso em: 21 de junho de 2020.

[9] DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. vol 1. 3 ed. São Paulo: Ática, 2016.

[10] DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. vol 2. 3 ed. São Paulo: Ática, 2016.

[11] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria plana. Vol 9. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

[12] FILGUEIRAS, C. W. S. **A importância dos conteúdos de matemática pouco cobrados no ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2019.

[13] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos, funções. vol 1. 9 ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[14] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar**: limites, derivadas, noções de integral. vol 8. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

[15] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: logaritmos vol 2. 10 ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[16] IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**: trigonometria. vol 3. 9 ed. São Paulo: Atual Editora, 2013

[17] INEP. Ministério da Educação. **ENEM**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/enem> Acesso em: 02 de julho de 2020.

[18] INEP. Ministério da Educação. **Matrizes de referência**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia> Acesso em: 10 de julho de 2020.

[19] LIMA, E. L. **Curso de análise**. vol 1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Projeto Euclides)

[20] LIMA, E. L. **Logaritmos**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[21] LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[22] LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017. (Coleção PROFMAT).

[23] LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção do professor de matemática)

[24] LOBO, S. N. B. **Funções logarítmicas e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

[25] MODELLI, L.; PINHEIRO, L. **Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus**. Disponível em: <https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/31/crescimento-exponencial-e-curva-epidemica-entenda-os-principais-conceitos-matematicos-que-explicam-a-pandemia-de-coronavirus.ghtml> Acesso em: 17 de junho de 2020.

[26] MOUTINHO, D. **A matemática do enem na bandeja**. Olinda: Livro Rápido, 2017.

[27] NETO, A. C. M. **Geometria**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

[28] NETO, A. C. M. **Fundamentos de cálculo**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT)

[29] OLIVEIRA, J. **Rio Star, a roda gigante do Rio de Janeiro, inaugura hoje**. Disponível em: <https://casavogue.globo.com/LazerCultura/Viagem/noticia/2019/12/rio-star-roda-gigante-do-rio-de-janeiro-inaugura-hoje.html> Acesso em: 02 de julho de 2020.

[30] PAIVA, M. R. **Matemática**. vol 1. 1 ed. São Paulo: Moderna, 1995.

[31] PEDROZO, L. R. S. **A matemática e as antenas parabólicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2018.

[32] PEREIRA, H. E. **A função exponencial natural e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2015.

[33] ROCHA, M. S. P. M. L.; PEROSA, G. S. **Notas etnográficas sobre a desigualdade educacional brasileira**. Educ. Soc., Campinas, vol 29, n. 103, p. 425-449, maio/ago 2008.

[34] RODRIGUES, H. M. S. S. **Uma análise da abordagem do tema funções nos principais vestibulares de instituições públicas do estado de São Paulo e no ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2015.

[35] SANTOS, G. V. H.; EFFGEN, L. F. **Fenômenos cíclicos - modelagem com funções trigonométricas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

[36] SILVEIRA, E. **Matemática compreensão e prática**: 9º ano. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2015.

[37] SIQUEIRA, V. F. **Tópicos de geometria plana em provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2020.