

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Atividades sobre problemas inversos em pré-cálculo

Daiane Antônia de Menezes Lima

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Daiane Antônia de Menezes Lima

Atividades sobre problemas inversos em pré-cálculo

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
Julho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

L732a Lima, Daiane Antônia de Menezes
Atividades sobre problemas inversos em pré-
cálculo / Daiane Antônia de Menezes Lima;
orientador Vanessa Rolnik. -- São Carlos, 2020.
94 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Matemática. 2. Problemas inversos. 3.
Resolução de problemas. I. Rolnik, Vanessa, orient.
II. Título.

Daiane Antônia de Menezes Lima

Activities on inverse problems in pre-calculus

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
July 2020

*Este trabalho é dedicado a minha família,
Em especial, a minha filha Olívia, que já me fortalece, ainda em meu ventre.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem sempre recorri na minha vida, pela fé que me fortalece a cada dia.

A minha mãe Olímpia, que compreende tudo, mesmo quando nem eu mesma compreendo.

Ao meu marido Diogo, que se orgulha dos passos que damos juntos, por isso esse trabalho também é dele.

A minha irmã, uma inspiração que tenho na vida, e que mesmo estando longe sabemos que temos uma a outra para tudo.

Aos meus amigos do PROFMAT, Luiz Henrique, Liginha, Jair, Raimundo, José Eduardo, André e todos os demais que estiveram presentes em alguma aula.

A todos os professores do curso do PROFMAT.

E em especial meu agradecimento vai para minha eterna professora e orientadora Dra. Vanessa Rolnik Artioli, que quando aceitou me orientar se mostrou feliz. E ao longo de todas as reuniões sempre esteve empolgada, mesmo quando eu não me desenvolvia tanto, em nenhum momento escondeu seu brilho e competência em falar, escrever e se expressar, ou seja, em me orientar.

Muito obrigada a todos.

*“A parte que ignoramos,
é muito maior que tudo quanto sabemos.”
(Platão)*

RESUMO

LIMA, D. A. M. **Atividades sobre problemas inversos em pré-cálculo**. 2020. 94 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Este trabalho consiste de um estudo sobre problemas inversos voltados para alunos e professores do Ensino Médio. Discutimos definições, problemas reais da antiguidade que hoje em dia são classificados como inverso e problemas da atualidade que têm alavancado o desenvolvimento de técnicas de diagnóstico e previsões no campo da saúde, da indústria e da defesa, bem como em diversas outras áreas. Em particular, estudamos detalhadamente quatro casos: o problema inverso de determinar a altura do furo de um reservatório, o problema inverso de determinar o ângulo de inclinação no lançamento de um projétil, o problema inverso de determinar a massa e a localização de uma pepita de ouro no fundo do rio e problemas inversos nas “jogadas de tabela” em um jogo de sinuca. O projeto foi fundamentalmente baseado na referência GROETSCH, C. W., **Inverse problems: activities for undergraduates**, Whashington: the mathematical association of America, 1999. Para complementar, utilizamos livros de Matemática e Física básicas, artigos de jornais e pesquisa na internet. Para nos auxiliar nas interpretações dos casos e ilustrar o texto, utilizamos o software GeoGebra. Finalmente, analisamos os resultados de cada caso separadamente e em seguida ressaltamos as diferenças entre os casos dentro de um contexto geral.

Palavras-chave: problema inverso, técnicas de resolução de problemas, geometria analítica, trigonometria, semelhança de triângulos.

ABSTRACT

LIMA, D. A. M. **Activities on inverse problems in pre-calculus**. 2020. 94 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This work consists of a study on inverse problems aimed at high school students and teachers. We discuss definitions, real problems of antiquity that today are classified as inverse, and current problems that have leveraged the development of diagnostic and forecasting techniques in the field of health, industry and defense, as well as in several other areas. In particular, we study in detail four cases: the inverse problem of determining the height of a reservoir's hole, the inverse problem of determining the angle of inclination when launching a projectile, the inverse problem of determining the mass and location of a nugget of gold at the bottom of the river and inverse problems in "table plays" in a game of pool. The project was fundamentally based on the reference GROETSCH, C.W., **Inverse problems: activities for undergraduates**, Whashington: the mathematical association of America, 1999. In addition, we used basic mathematics and physics books, newspaper articles and internet research. To help us interpret the cases and illustrate the text, we use the GeoGebra software. Finally, we analyze the results of each case separately and then we highlight the differences between the cases within a general context.

Keywords: inverse problem, problem solving techniques, analytical geometry, trigonometry, similarity of triangles.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Reservatório com coluna d’água de altura D e altura do orifício h	34
Figura 2 – Trajetória do jato para $D = 12\text{m}$ e $h = 4,5\text{m}$	36
Figura 3 – Gráfico de $R(h)$ para $D = 12\text{m}$	39
Figura 4 – Decomposição da velocidade no lançamento de um projétil.	44
Figura 5 – Gráfico de V_y em função de V_x para um alcance de 1500 m.	47
Figura 6 – Lançamento de projétil com alvo localizado em um plano inclinado.	50
Figura 7 – Gráfico de V_y em função de V_x para um alcance de 300m em um plano com inclinação $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{rad}$	52
Figura 8 – Gráfico de V_y em função de V_x para um alcance de 300m em um plano com inclinação $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad}$	53
Figura 9 – Relação entre os ângulos de lançamento θ e de inclinação do terreno α	55
Figura 10 – Lançamento de um projétil, a uma altura h , de um topo de uma fortificação.	58
Figura 11 – Ilustração da pepita no fundo do rio, do equipamento de medição e da força de atração entre os corpos.	60
Figura 12 – Duas possíveis localizações para a pepita, dada uma massa efetiva M	62
Figura 13 – Gráficos de todas as possíveis fontes dada um medição (x, G) , (I): (1, 2), (II): (1, 4), (III): (2, 2) e (IV): (2, 4).	64
Figura 14 – Fonte no fundo do rio, localizada a partir de duas medições com mesma força gravitacional.	65
Figura 15 – Fonte única $(\sqrt{2}, 3)$, representada pelo único ponto de intersecção A dos gráficos $M_1(s_1) = (s_1)^2 + 1$ e $M_2(s_2) = 2(s_2)^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}s_2 + 3$	66
Figura 16 – Fonte indefinida, portanto não há ponto de intersecção dos gráficos $M_1(s_1) = (s_1)^2 + 1$ e $M_2(s_2) = 6(s_2)^2 - 24s_2 + 30$	67
Figura 17 – Duas possibilidades para fonte (1, 2) e (3, 10), portanto há dois pontos de intersecção A e B dos gráficos $M_1(s_1) = (s_1)^2 + 1$ e $M_2(s_2) = 2(s_2)^2 - 4s_2 + 4$	67
Figura 18 – Gráficos indicando as possíveis fontes para cada medição (1, 12; 2, 7) (linha contínua) e (3, 1; 4, 89) (linha tracejada).	68
Figura 19 – Intersecção das parábolas em dois pontos.	69
Figura 20 – Ausência de intersecção entre as três parábolas.	69
Figura 21 – Princípio da reflexão: trajetória incidente e refletiva formando ângulos congruentes com a reta normal.	76
Figura 22 – Mesa de bilhar com as bolas: branca B na posição (x_1, y_1) e alvo A na posição (x_2, y_2)	78

Figura 23 – Jogada em tabela em direção a uma curva refletora desconhecida.	78
Figura 24 – Quatro possíveis jogadas de tabela acertam a bola alvo, uma em cada lateral da mesa.	78
Figura 25 – Três possíveis jogadas em tabela a) quando $x_1 = x_2$ e b) quando $y_1 = y_2$. . .	79
Figura 26 – Pontos de impacto da bola branca nas laterais da mesa: P_1, P_2, P_3 e P_4 , considerando $B(0, 2; 0, 8)$ e $A(0, 7; 0, 6)$	80
Figura 27 – Pontos de impacto da bola branca nas laterais da mesa: P_1, P_2, P_3 e P_4 , considerando $B(x_1, y_1)$ e $A(x_2, y_2)$	82
Figura 28 – Tentativa de acertar a caçapa L e colisão com mesa no ponto D	84
Figura 29 – Possíveis posições para bola branca, ao longo do segmento $\overline{DP_2}$, para acertar a bola A na caçapa L	84
Figura 30 – Reconstrução da reta refletora h	85
Figura 31 – Jogada da Atividade 9).	87
Figura 32 – Reconstrução da círculo refletor.	88

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	INTRODUÇÃO AOS PROBLEMAS INVERSOS	23
2.1	Definição	23
2.2	Problemas inversos na antiguidade	25
2.2.1	<i>Mito da caverna</i>	25
2.2.2	<i>Esfericidade e circunferência da Terra</i>	26
2.2.3	<i>Banho de Arquimedes</i>	27
2.3	Problemas inversos na atualidade	28
2.3.1	<i>Tomografia computadorizada</i>	28
2.3.2	<i>Manuscritos do Mar Morto</i>	29
2.3.3	<i>Vazamento de óleo no Brasil</i>	29
2.4	Resolução de problema inverso	30
3	PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR UM FURO EM UM RESERVATÓRIO	33
3.1	Descrição	33
3.2	Atividades	35
3.3	Considerações	41
4	PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR O ÂNGULO DE IN- CLINAÇÃO NO LANÇAMENTO DE UM PROJÉTIL	43
4.1	Descrição	43
4.2	Atividades	46
4.3	Considerações	57
5	PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR A LOCALIZAÇÃO DE UMA PEPITA NO FUNDO DE UM RIO	59
5.1	Descrição	59
5.2	Atividades	62
5.3	Considerações	71
6	PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR AS “JOGADAS DE TABELA” EM UM JOGO DE SINUCA	75

6.1	Descrição	75
6.2	Atividades	78
6.3	Considerações	89
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
	REFERÊNCIAS	93

INTRODUÇÃO

“Problemas Inversos” constitui uma área de pesquisa em Matemática, interessada em formular modelos baseados em problemas reais; estabelecer uma sólida teoria principalmente quanto às condições que garantam que os modelos inversos sejam bem postos; e desenvolver técnicas de solução.

Os problemas inversos sempre estão associados a um direto. Resumidamente, nos problemas diretos, o objetivo é determinar a consequência (efeito), conhecendo-se a causa (dados de entrada) e o modelo (função, processo ou mecanismo que transforma a causa em consequência). Já um inverso associado pode ter como incógnita a causa ou o modelo ou parte da causa ou parte do modelo, conhecendo-se a consequência.

A abordagem convencional do ensino das ciências naturais enfatiza os problemas diretos. Fornecidas causas e modelos que descrevem sua evolução, o problema é encontrar os efeitos. O ponto de vista dominante é direto, voltado para o futuro e para o exterior. A maioria dos problemas envolve previsão ou determinação de características externas de uma causa interna conhecida. Em geral possuem informações suficientes para realizar um processo estável bem definido, que leva a uma solução única.

No entanto, grandes avanços na ciência e na tecnologia foram possíveis com a solução de problemas inversos. Tais problemas envolvem a determinação de leis físicas através da observação indireta, sensoriamento remoto, medição indireta, descoberta da natureza de uma região inacessível a partir de medições na fronteira, a reconstrução de eventos passados a partir da observação do estado atual e muitos outros. Em tais problemas, a atitude é indireta, dirigida ao passado ou introspectiva e os problemas geralmente envolvem pós-dicção, avaliação não invasiva ou teste não destrutivo (GROETSCH, 1999).

Atualmente, são tratados como problemas inversos a formação da imagem tomográficas, médicas ou industriais, por meio de raios-X, de ultrassonografia magnética, por impedância elétrica, exploração sísmica, detecção de reservatórios de minerais, prospecção de hidrocar-

bonetos, reconstrução de sinais truncados, testes não destrutivos, identificação de parâmetros, determinação da volatilidade e precificação nos modelos para os mercados financeiros, entre outros (ALIFANOV, 1994; CEZARO; CEZARO, 2010; CHIARELLA; CRADDOCK; EL-HASSAN, 2000). Identificar e tratar um problema como inverso pode ajudar a solucionar uma gama de problemas práticos importantes de diversas áreas do conhecimento, proporcionando desenvolvimento intelectual, científico e econômico e gerando benefícios para a sociedade.

Os problemas inversos que surgem das pesquisas estão relatados na literatura em artigos científicos e em livros de nível avançado. Em geral, são voltados a um público especializado. São de difícil resolução pois, em geral, são mal postos, podendo não ter solução única ou ser instável a pequenas variações nos dados. A técnica de solução mais utilizada consiste em realizar experimentos e simultaneamente simulações computacionais e confrontar os resultados. Algoritmos de busca predizem as soluções (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016).

No sentido contrário, o livro *Inverse Problems: activities for undergraduates*, de Charles W. Groetsch (GROETSCH, 1999), traz uma coletânea de atividades relacionadas a problemas inversos voltada para os dois primeiros anos de graduação, com objetivo de enriquecer e estimular o ensino de Matemática. O autor justifica que “se os alunos considerarem apenas o problema direto, eles não estarão olhando para o problema de todos os lados e deixarão de ver dois terços de todo o quadro” (GROETSCH, 1999, p. 2), e que “Nem todos os problemas inversos envolvem matemática avançada. Questões fascinantes, e às vezes desafiadoras, apresentam problemas inversos em modelos matemáticos simples de processos físicos básicos.” (GROETSCH, 1999, p. 21).

Esse livro inicialmente apresenta uma introdução aos problemas inversos com diversos exemplos de estudos tratados ao longo da História que podem ser classificados como problemas inversos. Em seguida, possui quatro capítulos que trazem estudos de caso que tratam de problemas inversos em pré-Cálculo, em Cálculo, em Equações Diferenciais e em Álgebra Linear, respectivamente. Cada caso é apresentado dentro de um contexto histórico e as atividades são separadas em “Perguntas”, “Exercícios”, “Cálculos”, “Problemas” e “Projetos” que conduzem o raciocínio para o entendimento e resolução. O capítulo do pré-cálculo é composto por seis estudos de caso, que necessitam de conhecimento basicamente de operações algébricas, geometria analítica e trigonometria, além de conceitos físicos como lei de Galileu dos corpos em queda, lei de Torricelli, lei de Newton da atração gravitacional, e a relação entre velocidade, distância e tempo. Não são dadas as resoluções, apenas respostas a alguns itens no anexo do livro.

Não é do nosso conhecimento que exista um material sobre problemas inversos, em português, que seja adequado a alunos do Ensino Médio. Diante dessa lacuna, realizamos um estudo para introduzir o conceito de problemas inversos em uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Médio, em especial do terceiro ano. Optamos por apresentar detalhadamente quatro dos seis problemas inversos em pré-Cálculo de (GROETSCH, 1999), relatando a resolução de cada atividade, o raciocínio empregado e conclusões.

Este estudo justifica-se pois no ensino, em todos os níveis, há carência em desenvolver estratégias para solucionar problemas, principalmente quando se desconhece as causas ou o modelo. Pretendemos que este texto sirva a professores de Matemática, e demais interessados, com o intuito de promover atividades extracurriculares possivelmente de forma transversal e interdisciplinar com os professores de Física e de Informática. As atividades visam a favorecer o desenvolvimento intelectual do aluno preparando-o para a solução de problemas, habilidade bastante requerida no mercado de trabalho e em meios acadêmicos, bem como no dia-a-dia.

Ainda é importante destacar que na matriz curricular de ensino da matemática fica evidente a necessidade de abordar a resolução de problemas, pois segundo o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)/2018, a resolução de problemas envolve formular um problema no contexto da matemática, empregar/mobilizar ferramentas para sua resolução e interpretar/avaliar o resultado obtido tendo em vista o contexto original do problema. Portanto, os problemas que podem ser diretos e inversos devem estar presentes nos conteúdos básicos nacionais.

Além da referência principal, utilizamos um livro de Física ([MARQUES, 2019](#)), material sobre Geometria Analítica ([WINTERLE, 2000](#); [SILVEIRA, 2017](#)), o software Geogebra para traçar gráficos, manual de utilização desse software ([GIRALDO; MATTOS, 2013](#)) bem como matérias de jornal e artigos para enriquecer o estudo.

Embora a matemática relacionada com as atividades desse trabalho seja de nível básico, algumas delas requerem o uso de uma calculadora gráfica ou até mesmo uma calculadora com um processador de álgebra simbólica, em que se utilizou o software Geogebra, que trata-se de um aplicativo de matemática dinâmica.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma. O Capítulo 2 traz uma introdução aos problemas inversos, como as possíveis definições, exemplos de problemas inversos na antiguidade e na atualidade e a dificuldade em resolvê-los. Nos Capítulos de 3 a 6, são apresentados estudos de caso. Por último, o Capítulo 7 traz as considerações finais.

INTRODUÇÃO AOS PROBLEMAS INVERSOS

Este capítulo discute definições de problemas inversos, introduz o conceito em forma de entrada-processo-saída ou causa-modelo-efeito e exemplifica com descobertas da antiguidade que hoje podem ser classificadas como casos de problemas inversos e pesquisas de problemas inversos na atualidade. Para finalizar, comenta as dificuldades de resolução desse tipo de problema e algumas técnicas de resolução utilizadas.

2.1 Definição

Vamos começar observando que os problemas possuem entrada (ou causa), processo (ou modelo) e saída (ou efeito). Podemos ilustrar por meio do seguinte esquema

$$\begin{array}{c} \text{entrada} \rightarrow \text{processo} \rightarrow \text{saída} \\ \text{ou} \\ \text{causa} \rightarrow \text{modelo} \rightarrow \text{efeito.} \end{array}$$

Ou ainda, simbolizando causa por x , modelo por \mathfrak{S} e efeito por y , o esquema fica

$$x \rightarrow \mathfrak{S} \rightarrow y .$$

Definimos o **problema direto** como sendo o de encontrar o efeito conhecendo-se causa e modelo. Esquemáticamente, temos

$$x \rightarrow \mathfrak{S} \rightarrow ? .$$

Dois **problemas inversos** são sugeridos. Um é o problema de causalidade, representado no esquema a seguir, em que dado um modelo \mathfrak{S} e um efeito y , desejamos encontrar a causa que produz o efeito por meio do modelo.

$$? \rightarrow \mathfrak{S} \rightarrow y .$$

O outro problema inverso é o de identificação do modelo, também conhecido como tomográfico, representado no esquema a seguir. Nele, dadas as informações de causa e efeito, o objetivo é identificar o modelo ou parâmetros do modelo.

$$x \rightarrow ? \rightarrow y .$$

É por isso que [Groetsch \(1999\)](#) diz que o problema direto é apenas um terço da visão do problema completo.

Não há um consenso entre os pesquisadores da área sobre a definição precisa de problemas inversos. Como eles estão associados a problemas diretos, a escolha de qual problema é chamado de direto e qual é chamado de inverso é, a princípio, arbitrária. Por exemplo, em um problema de causalidade $\mathfrak{S}(x) = y$ em que \mathfrak{S} é um operador invertível, o problema inverso pode ser representado por $\mathfrak{S}^{-1}(y) = x$. Se definirmos $\mathcal{G} = \mathfrak{S}^{-1}$ e então $\mathcal{G}(y) = x$ pode ser visto como o problema direto e $\mathcal{G}^{-1}(x) = \mathfrak{S}(x) = y$ como o inverso. No entanto, a condição de \mathfrak{S} ser invertível não se verifica na maioria dos problemas inversos oriundos de situações reais ([FUKUSHIMA, 2018](#)).

[Engl, Hanke e Neubauer \(1996\)](#) define problema inverso como “o problema de determinar causas baseado na observação de seus efeitos”, ou seja, o processo causa \rightarrow efeito refere-se ao problema direto enquanto que o processo efeito \rightarrow causa refere-se ao problema inverso. No entanto, esta definição não está completa.

Já [Campos Velho \(2001\)](#) diz que o problema direto é aquele em que o estudo antecedeu-se historicamente. Ou ainda, que os problemas diretos requerem um conhecimento completo e preciso das causas para determinação dos efeitos enquanto que os problemas inversos, em geral, estão baseados em observações imprecisas (dados contaminados com ruídos ou erros experimentais) e incompletas. Sendo assim, os problemas diretos, em geral, são bem postos (no sentido de que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados de entrada) e os inversos mal-postos (caso alguma condição para ser bem posto não for satisfeita).

Um exemplo bem simples de par problema direto/inverso é dados dois números inteiros, encontrar o produto entre eles e dado um produto, encontrar seus fatores. Em geral, o problema da multiplicação é considerado o direto e o problema da fatoração, o inverso. Essa classificação é baseada tanto por, historicamente, o problema da multiplicação ter precedido o da fatoração quanto pela natureza bem posta do processo de multiplicação e mal posta da fatoração, uma vez que a solução deste pode não existir ou não ser única.

Ser mal posto não é uma característica ruim, apenas exige um tratamento adequado e cuidadoso de resolução. Por outro lado, exhibe aplicações diversas do problema direto, como no caso da fatoração que alavancou o estudo dos números primos e é a ferramenta da criptografia,

responsável pela segurança da comunicação no meio digital (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016).

Na área acadêmica, talvez o mais famoso problema inverso seja: ‘*Can one hear the shape of a drum?*’ (KAC, 1966), isto é, “Você é capaz de predizer a forma de um tambor pelo som que ele emite?” O problema direto equivalente seria predizer o som emitido por um tambor de forma conhecida. A solução deste problema é conhecida há muito tempo. Já o problema inverso foi resolvido recentemente pela negativa: existem dois tambores de formas diferentes que emitem o mesmo som (GORDON; WEBB; WOLPERT, 1992).

Apesar da dificuldade em definir problemas inversos, não é difícil reconhecer quando nos deparamos com um. Segundo Groetsch (1999), esse reconhecimento vem da familiaridade com os padrões aceitos da comunidade científica para problemas diretos que foram desenvolvidos ao longo da história. Diz ainda que uma maneira de introduzir o assunto é por meio de contos históricos sobre problemas inversos, alguns dos quais mudaram os conceitos que tínhamos sobre o mundo. A seguir, comentamos alguns deles. É importante observar que entre os problemas da antiguidade e da atualidade existiram uma infinidade de estudos em diversas áreas de aplicação e também que a matemática não aparece explicitamente mas está presente em todos os contos. O objetivo é diferenciar os problemas diretos e inversos e considerar a utilidade e a técnica de resolução de cada um.

2.2 Problemas inversos na antiguidade

Seguem três exemplos resumidos, retirados de (GROETSCH, 1999).

2.2.1 Mito da caverna

No livro VII de A República, Platão (428/427 a.C. - 348/347 a.C.) discute uma situação que ilustra perfeitamente algumas das questões levantadas pelos problemas inversos. Platão define a cena fictícia composta por seres humanos vivendo em uma caverna desde a infância, com pernas e pescoços acorrentados, de modo que não podem mover a cabeça e só podem ver a parede interna da caverna à frente deles. A certa distância, há uma fogueira. Os prisioneiros reconstróem o mundo real fora da caverna com base em informações limitadas, observando as sombras projetadas no fundo da caverna.

O mito da caverna é uma metáfora à condição limitada do conhecimento humano, que, restritos à observar apenas uma parede na qual são projetadas as sombras, acabam por ter uma visão incompleta e distorcida da realidade. No entanto, podemos imaginar que os prisioneiros buscavam as causas (objetos reais) dos efeitos (sombras projetadas) provocados por um modelo (aluz emitida pelo fogo) (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016).

Neste caso, o problema direto é determinar a sombra conhecendo o processo pelo qual a

luz projeta a sombra de um objeto e o problema inverso é determinar um objeto a partir de sua sombra. Para o primeiro, conseguimos especificar exata e unicamente a sombra do objeto, já o segundo, não possui solução única. Por exemplo, uma imagem quadrada projetada na parede da caverna pode corresponder a um cubo ou a um cilindro circular com altura e diâmetro iguais ou, ainda, outros objetos tridimensionais. Além disso, sombras quase iguais podem corresponder a objetos tridimensionais cuja diferença é arbitrariamente grande, ou seja, o problema inverso é, em certo sentido, instável, a solução não depende continuamente dos dados de entrada.

No mito da caverna, o modelo, isto é, a projeção da sombra, destrói informações, pois uma dimensão espacial é perdida. Em termos matemáticos, diríamos que o operador possui um espaço nulo não trivial. Consequentemente, os dados do problema inverso, isto é, as sombras, não possuem informações suficientes para reconstruir o objeto. Esta é uma característica comum a muitos problemas inversos.

2.2.2 Esfericidade e circunferência da Terra

A esfericidade da Terra foi aceita desde os tempos antigos. Pitágoras (570 - 495 a.C.) assegurou que a Terra era esférica motivado pelo fato de que a esfera era considerada a figura mais perfeita. Mas Aristóteles (348-322 a.C.), discípulo de Platão, argumentou melhor por meio da teoria inversa questionando

“De que outra forma os eclipses lunares mostrariam os contornos na forma como os vemos? As formas que a Lua mostra todos os meses são de vários tipos mas nos eclipses o contorno sobre a Lua é sempre curvo e, como é a interposição da Terra que faz o eclipse, a forma dessa linha é causada pela forma da superfície da Terra, que é portanto esférica.”

Assim, a forma da Terra foi obtida por raciocínio indireto a partir de observações da sombra da Terra na superfície da Lua. A diferença deste problema para o mito da caverna de Platão é que a sombra da Terra foi observada por diversas vezes sob condições distintas, compensando de certa forma as informações perdidas na projeção.

Sobre a medição da circunferência da Terra, Platão dizia que acreditava que a Terra é muito grande e que os seres vivem em uma pequena parte ao redor do mar. E assim tentou explicar a sensação de que temos de que a Terra é plana, sendo na verdade localmente plana por causa da circunferência da esfera ser muito grande. Já Arquimedes registou que de acordo com os antecedentes dele, a circunferência da terra mede cerca de 34000 milhas, porém ele não menciona como essa estimativa foi obtida.

É impossível medir a circunferência da Terra diretamente. Mas sabe-se que, se um arco sobre a circunferência da Terra pode ser diretamente medido, então o ângulo formado pelo arco pode ser obtido por simples proporção - um problema direto. Foi Erastótenes (284 - 202 a.C.) quem desenvolveu o método indireto para medir o ângulo e resolver o problema inverso de determinar a circunferência da Terra a partir da medida do ângulo e do comprimento do arco

formado pelo ângulo.

Para isso, ele usou as informações disponíveis de que Alexandria e Siena estão no mesmo meridiano, a 500 milhas de distância uma da outra e Siena está localizada sob o Trópico de Câncer. Pela última informação, ao meio dia no solstício de verão, os raios solares incidem diretamente sobre a cidade de Siena. Ao mesmo tempo e data, uma haste vertical colocada no chão de Alexandria produz uma sombra em um ângulo, que traça um arco igual a um cinquenta avos de um círculo todo. O que levou Erastótenes a concluir que a circunferência da Terra mede cinquenta vezes a distância de Alexandria para Siena, ou 25.000 milhas. Embora alguns pressupostos de Erastótenes não sejam exatamente verdadeiros, e a teoria que ele tomou para a distância de Alexandria para Siena seja controversa, seu argumento é um clássico exemplo do raciocínio inverso aplicado para estimar medidas inacessíveis.

2.2.3 Banho de Arquimedes

O último exemplo de problema inverso antigo é a famosa história do banho de Arquimedes (287 a.C - 212 a.C.). Hierão III, rei de Siracusa, tinha encomendado uma nova coroa de ouro e suspeitava que o ourives o tivesse enganado, adulterando a coroa e entregando-lhe uma com prata e ouro, e não ouro puro.

Uma solução direta para esse problema seria derreter a coroa para determinar seu volume e comparar seu peso com um volume igual de ouro puro. Mas seria um desperdício destruir a bela coroa. Então Hierão pediu que Arquimedes planejasse um método indireto para testar o conteúdo de ouro da coroa, hoje chamado de técnica de avaliação não destrutiva.

Um dia, enquanto tomava banho, Arquimedes teve a ideia. Plutarco diz que:

“Segundo a história, enquanto Arquimedes estava se lavando, pensou em uma maneira de calcular a proporção de ouro na coroa do Rei Hierão observando quanta água escorria de sua banheira. Ele pulou como um possesso, gritando: Eureka! (“Eu encontrei”). Depois repetindo isto várias vezes, ele seguiu o seu caminho.”

O esquema de Arquimedes é tão simples quanto engenhoso. Ele pegou duas massas uma de ouro e outra de prata, ambas com o mesmo peso da coroa, e um vasilhame de água, cheio até a borda. Mergulhou e retirou a massa de prata, completando em seguida o volume, medindo a quantidade de água necessária para encher o vasilhame. Em seguida, fez o mesmo com o ouro, observando que precisava de menos água para encher desta vez. Por fim, inseriu a coroa na água. Esta derramou mais água do que o ouro e menos do que a prata. Arquimedes pôde então calcular quanta prata havia sido misturada ao ouro na coroa, e pôde desvendar o mistério da coroa e desmascarar o vilão.

Como a densidade do ouro é maior do que a da prata, o pedaço de ouro ocupa um volume menor que o pedaço de prata de mesmo peso. Se o pedaço de ouro possui menor volume, então este deslocou um volume menor de água do que o pedaço de prata. A coroa, sendo feita de uma

mistura de ouro e prata, possuía uma densidade média entre os dois materiais.

2.3 Problemas inversos na atualidade

Seguem três histórias resumidas. Os dois primeiros retirados de (GROETSCH, 1999), complementados com outras referências, e o último de reportagens de jornais.

2.3.1 Tomografia computadorizada

Há um século, as opções de diagnóstico médico eram muito limitadas. Diante de uma suspeita de tumor, por exemplo, o paciente era submetido a uma cirurgia exploratória. Tudo mudou com a invenção da tomografia computadorizada, um procedimento não invasivo de diagnóstico médico por imagens amplamente utilizado nos dias de hoje.

Começamos falando do matemático austríaco Johann Radon (1887-1956), que criou uma fórmula para reconstruir uma função, dada sua integral de linha sobre todas as linhas no plano. A publicação de Radon, em 1917¹, da solução desse problema inverso puramente matemático foi pouco notada e sua fórmula de inversão foi redescoberta várias vezes nos anos posteriores.

No campo da física, Wilhelm Roentgen (1845-1923) desenvolveu a tecnologia de raios X, princípio utilizado nas radiografias convencionais. Neste exame, os raios emergem de uma fonte fixa, passam pelo corpo e atingem um filme fotográfico. A imagem sobre o filme mostra o contraste entre os diferentes graus de absorção e transmissão que os diferentes tecidos oferecem aos raios X. Em outras palavras, uma imagem radiográfica pode ser vista com a “sombra” das partes mais atenuadoras de raios X (ossos) do interior do corpo projetadas na chapa (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016). No entanto, na imagem resultante, muitos detalhes estão ocultos; as imagens de ossos, órgãos, tumores etc. são projetadas em um plano bidimensional e se sobrepõem, situação análoga à discutida por Platão há quase 2500 anos.

Por volta de 1955, o físico Allan Comarck observou que os gráficos de isodose para radioterapia eram construídos por métodos de tentativa e erro, assumindo que o corpo era homogêneo. Mas o corpo é tudo menos homogêneo e, como Comarck disse:

“ Ocorreu-me que, para melhorar o planejamento do tratamento, era necessário conhecer a distribuição do que precisava ser encontrado por medidas externas ao corpo ... ”

Comarck percebeu que

“ ... essas informações também seriam úteis para fins de diagnóstico ... ”

As imagens por raios X juntamente com a fórmula de inversão de Radon acabaram levando à criação da tomografia computadorizada e dando um Prêmio Nobel de Medicina a

¹ Radon, Johann. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. [S.l.: s.n.], p. 262-277, 1917.; Translation: Radon, J.. On the determination of functions from their integral values along certain manifolds. [S.l.: s.n.], v.5, p. 170-176, 1986.

Allan Comarck e G. N. Hounsfield, em 1979.

A atenuação total de um feixe em uma determinada direção pode ser medida e relacionada à integral de linha da função do coeficiente de atenuação ao longo do caminho do feixe. Para construir a distribuição do meio, ou seja, a tomografia computadorizada, é necessário recuperar a função de atenuação do conhecimento de sua integral de linha em todas as linhas. A diferença entre a tomografia computadorizada e a metodologia convencional de raios X é que, na primeira, em vez de obter uma imagem de uma única vista, as projeções são feitas de muitos ângulos diferentes e os resultados são matematicamente projetados para reconstruir o objeto.

2.3.2 Manuscritos do Mar Morto

A história de problema inverso que ganhou destaque na mídia em 1991 começou na primavera de 1947 quando Muhammad adh-Dhib, um pastor beduíno, enquanto procurava por uma de suas cabras que estava perdida, encontrou alguns jarros de barro contendo antigos manuscritos em uma caverna em Qumran, um deserto perto do Mar Morto.

Em um conto digno de Indiana Jones, houve uma “corrida” pelos manuscritos em que vários museus e repartições competiam entre si para coletar o máximo possível de material. A maior parte dos manuscritos ficou sob o controle de um comitê internacional criado pelo Rockefeller Museum, pela Ecole Biblique et Archeologique e pelo Departamento de Antiguidades da Jordânia. O seletivo grupo de estudiosos que tinha acesso ao material resolveu que não o divulgaria a mais ninguém, mas para que não ficasse com fama de egoísta, publicava de tempos em tempos suas descobertas por meio de resumos.

A produção de resumos pode ser visto como um problema direto: a entrada é o próprio manuscrito, o processo é a produção do resumo e a saída é o resumo. Quatro décadas após o início da produção de resumos, Ben-Zion Wacholer e Martin Ebegg, do Hebrew Union College de Cincinnati, escreveram um programa de computador para reconstruir os manuscritos por meio dos resumos. O texto obtido pela reconstrução foi próximo o suficiente do texto original que o seletivo grupo foi forçado a publicar o material original. A primeira página da edição de 22 de setembro de 1991 do The New York Times anunciou que "O monopólio dos Manuscritos do Mar Morto terminou".

2.3.3 Vazamento de óleo no Brasil

No segundo semestre de 2019, enquanto essa dissertação estava sendo escrita, manchas de óleo atingiram praias do Nordeste do Brasil. Foi um derrame de petróleo que atingiu mais de 2 mil quilômetros do litoral das regiões Nordeste e Sudeste do Brasil, provocando amplo impacto ambiental na cadeia alimentar, nos mangues, nos corais e na vida marinha como um todo, o que levará décadas para ser mitigado (UOL, 2019a).

Um estudo feito por pesquisadores do Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação

e Pesquisa em Engenharia (COPPE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro considerou “modelagem inversa” para estimar a trajetória para trás das manchas que atingiram as praias; Pela análise, o vazamento foi em alto mar, na altura de Sergipe e Alagoas, conforme noticiou o Estadão em 17/10/2019 (UOL, 2019b). A reportagem diz

“O cálculo usou como ponto de partida o mapa atualizado diariamente pelo órgão ambiental que mostra os dias e locais em que as manchas estão chegando às praias do Nordeste. Considerando as condições oceânicas, como correntes marítimas, temperatura da superfície da água e os ventos, os pesquisadores desenharam o caminho para trás.”

Como resultado da pesquisa o jornal noticia

“Ao cruzar todas essas trajetórias, eles chegaram a uma região onde provavelmente o vazamento ocorreu. A análise permite estimar também o dia em que houve o acidente: por volta de 14 de junho.”

2.4 Resolução de problema inverso

Voltando à discussão sobre a definição de problema inverso, se o processo \mathfrak{S} for um operador então, para qualquer entrada em seu domínio, uma saída única é determinada. Ou seja, o problema direto tem uma solução única. Por outro lado, não há garantia de que os problemas inversos de causalidade e tomográfico tenham soluções únicas. (FUKUSHIMA, 2018).

A estratégia de efetuar mais medidas do que o necessário do mesmo problema é chamada de estratégia de medidas redundantes e é amplamente utilizada. Por exemplo, no exame de Tomografia Computadorizada, do ponto de vista matemático, tal exame nada mais é do que a reconstrução do operador (seção do corpo humano) que atenua os raios X emitidos (causas) que são medidos nos receptores (efeito). Os raios X são emitidos ao redor de toda a seção que se deseja conhecer o interior, efetuando uma quantidade de medidas suficientes para possibilitar a reconstrução e amenizar os efeitos dos ruídos nas medidas (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016).

No entanto, como os problemas inversos são conhecidos por serem problemas intrinsecamente mal postos, não se tem a garantia de unicidade ou estabilidade da solução na presença de erros experimentais. A questão da existência de solução está resolvida pois o problema real apresenta solução e então procuramos por uma solução aproximada. Quanto à unicidade, se não for satisfeita, deve-se procurar outras restrições adicionais que garantam a unicidade. A questão mais complicada é a dependência contínua dos dados de entrada, e o efeito desse mau condicionamento é amenizado por técnicas de regularização, sendo uma delas a estratégia de medidas redundantes.

Para problemas mais complexos, associada à estratégia de medidas redundantes, utiliza-se a abordagem funcional, que consiste em tomar medidas experimentais e simultaneamente realizar

simulações computacionais e confrontar os efeitos obtidos pelas duas técnicas em um funcional de erro. São geradas tantas medições e simulações quanto forem necessárias. O argumento que fornece o menor valor do funcional de erro corresponde à solução procurada. Esta abordagem não é necessária nos casos estudados neste trabalho mas é nessa busca pela solução ótima do funcional de erro que se concentra grande parte das pesquisas em problemas inversos. Alguns exemplos razoavelmente simples podem ser encontrados em (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016).

Sobre a sistemática dos estudos de casos dos capítulos seguintes, seguimos o roteiro da referência principal (GROETSCH, 1999) que consiste de uma breve introdução e uma coleção de atividades. Todos os casos são precedidos da descrição do nível do curso, os conhecimentos de matemática e ciências necessários e a tecnologia necessária para executar algumas atividades. As atividades são de cinco tipos. As “Perguntas” são exatamente isso e devem ser respondidas em um estilo natural. “Exercícios” são problemas de rotina, enquanto “Problemas” apresentam um desafio um pouco maior. Um “Cálculo” requer o uso de calculadora gráfica-simbólica. Alguns casos apresentam algum projeto que é uma atividade aberta que permite espaço para o esforço e a imaginação dos leitores. E, cada caso se finalizou com uma consideração em que se analisa os objetivos das atividades.

PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR UM FURO EM UM RESERVATÓRIO

Este caso é baseado no problema *A Little Squirt* de [Groetsch \(1999\)](#) e possui as seguintes orientações.

Nível: pré-cálculo (álgebra);

Objetivos: explorar existência e unicidade de soluções;

Base matemática: equações parametrizadas, equações quadráticas;

Base científica: leis de corpos em queda, lei de Torricelli;

Tecnologia: calculadora gráfica.

3.1 Descrição

Considere um reservatório com água, situado em um solo plano e horizontal. O reservatório possui um furo em sua lateral, a água atravessa o furo e respinga a certa distância do reservatório que determina o alcance horizontal do jato.

Adotamos um sistema cartesiano bidimensional com a origem no solo, encostada na base do reservatório e na mesma seção vertical do furo, conforme mostra a [Figura 1](#). O eixo horizontal representa a distância em relação ao reservatório, x , e o eixo vertical representa a altura em relação ao solo, y . Denotamos por D a coluna de água no reservatório, h a altura do furo, v a velocidade horizontal com que a água atravessa o furo e R o alcance horizontal do jato.

A intuição nos diz que a distância alcançada pelo jato é determinada pela altura do furo e pela velocidade com que a água atravessa o furo. A velocidade é determinada pela pressão no nível do furo que, por sua vez, depende da coluna d'água acima do furo.

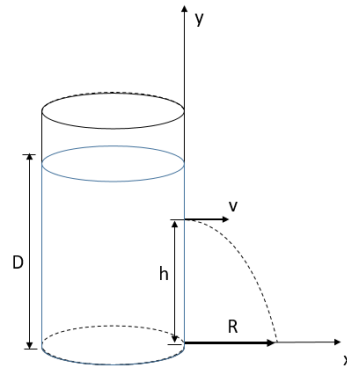


Figura 1 – Reservatório com coluna d’água de altura D e altura do orifício h .

Desprezando o efeito da resistência do ar e assumindo que a única força que atua na água que emerge do furo é a força constante da gravidade, um jato que emerge com velocidade horizontal v manterá sempre essa velocidade na direção x , $V_x = v$ e, portanto, no tempo t sua posição horizontal é

$$x = vt. \quad (3.1)$$

Quanto ao deslocamento vertical, o jato cai continuamente sob a influência da gravidade, de aceleração considerada constante g , e sua posição vertical é dada pela lei de Galileu para corpos em queda livre no vácuo,

$$y = h - \frac{g}{2}t^2. \quad (3.2)$$

Quando o furo é destampado, o nível da água desce em pequena quantidade, diminuindo o volume de água no reservatório. Se a massa desse volume de água é m e sua velocidade é v , então sua energia cinética é $\frac{mv^2}{2}$. Se as forças de atrito são desprezadas, então a energia total é conservada e, portanto, essa energia cinética deve corresponder à energia potencial perdida pela água no reservatório. Essa energia potencial é $mg(D - h)$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(D - h). \quad (3.3)$$

Da Eq. (3.3) segue a Lei de Torricelli, modela a velocidade horizontal com que a água deixa o furo

$$v = \sqrt{2g(D - h)}. \quad (3.4)$$

Para mais detalhes sobre a Lei de Torricelli e as leis de queda livre, consulte, por exemplo, (MARQUES, 2019).

Assim, o alcance R (efeito) do jato pode ser determinado pelas leis da física de corpos em queda (modelo), fornecidas tanto a altura da coluna d’água D quanto a altura do furo h (causas). Este é o problema direto e o esquema que o representa é o seguinte

causa		modelo		efeito
conhecendo a altura da coluna d'água D e a altura do furo h	→	Leis de Torricelli e de queda livre	→	determinar o alcance do jato R ?

O problema inverso que queremos resolver consiste em determinar a altura h do furo, dados D , R e o modelo matemático (leis da física de corpos em queda), ou seja,

causa		modelo		efeito
conhecendo a altura da coluna d'água D , determinar a altura do furo no reservatório h ?	→	Lei de Torricelli e de queda livre	→	conhecendo o alcance do jato R

3.2 Atividades

Para investigar a existência e unicidade de solução do problema inverso considerado, seguem dez atividades.

- 1) (**Pergunta**) A curva que o jato faz pode ser expressa parametricamente em termos do tempo. Qual é a forma dessa curva?

Resolução: Pela equação do movimento uniformemente variado, tem-se

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

No caso estudado, $s_0 = h$, $v_0 = 0$ e $a = -g$ e todos esses termos são conhecidos. Então, y , o caminho do jato, é expresso pela curva

$$y = h - \frac{g}{2} t^2, \quad (3.5)$$

já vista na Eq. (3.2), cujo gráfico tem a forma de uma parábola com concavidade voltada para baixo.

- 2) (**Exercício**) Encontre o tempo que leva para a primeira extremidade do jato atingir o solo.

Resolução: Vamos denominar t_f o tempo que leva para a primeira gota atingir o solo. Nesta situação, a posição vertical da gota é $y = 0$ e, pela Eq. (3.5),

$$h - \frac{g}{2} t_f^2 = 0$$

e, portanto,

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Note que o tempo de descida é independente de D

Assim, o tempo que leva para a primeira gota atingir o solo só depende da altura e da aceleração da gravidade. A variável D não influencia no tempo, mas no alcance horizontal do jato. Como a resistência do ar foi desprezada, a única força que faz a queda da gota ocorrer é a gravidade.

- 3) **(Cálculo)** Suponha que a profundidade D da água no tanque seja de 12m e a altura h do furo seja 4,5m. Traçar a trajetória do jato.¹

Resolução: Das Eqs. (3.1) e (3.4), segue que

$$x = \sqrt{2g(D-h)}t.$$

Logo,

$$t = \frac{x}{\sqrt{2g(D-h)}}.$$

Substituindo na Eq. (3.2), obtém-se

$$y = h - \left(\frac{g}{2}\right) \left(\frac{x^2}{2g(D-h)}\right) = h - \frac{x^2}{4(D-h)},$$

cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Substituindo $D = 12\text{m}$ e $h = 4,5\text{m}$, a equação que descreve a trajetória do jato é

$$y = 4,5 - \frac{x^2}{30},$$

sendo que o gráfico, restrito a $x, y \geq 0$, pode ser visto na Figura 2.

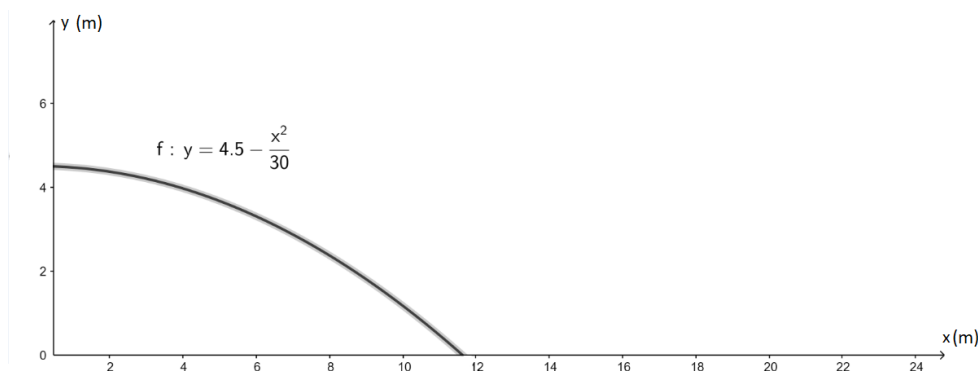


Figura 2 – Trajetória do jato para $D = 12\text{m}$ e $h = 4,5\text{m}$.

- 4) **(Problema)** Encontre o alcance R , isto é, onde a trajetória intercepta o eixo x , em termos de D e h .

¹ O livro original utiliza pés como unidade de medida, trocamos para metros, por ser o padrão brasileiro.

Resolução: Pela Eq. (3.1), $R = vt_f$, sendo t_f como denotado na Atividade 2. Segue que

$$R = \sqrt{2g(D-h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(D-h)}. \quad (3.6)$$

Para $D = 12\text{m}$ e $h = 4,5\text{m}$, $R = 2\sqrt{4,5(12-4,5)} \simeq 11,62\text{m}$, resultado condizente com a Figura 2.

- 5) **(Pergunta)** Dada uma profundidade D e uma altura do furo h , o jato resultante atingiria (desprezando a resistência do ar) um alcance maior na Terra ou na Lua?

Resolução: Matematicamente, observamos que a Eq. (3.6) não depende da gravidade. Logo o alcance R é igual na Terra e na Lua.

Podemos pensar que, como a posição horizontal é calculada pelo produto da velocidade pelo tempo, Eq. (3.1), e como na Terra a gravidade é maior do que na Lua, a velocidade na Terra, v_T , é maior porque depende proporcionalmente de \sqrt{g} . Porém, o tempo na Terra, t_T , é menor, pois é inversamente proporcional à $\sqrt{\frac{2}{g}}$. Já na Lua ocorre o contrário, a velocidade na Lua, v_L , é menor enquanto que o tempo, t_L , é maior. Portanto, velocidade e tempo se compensam e por isso a distância é a mesma, tanto na Lua quanto na Terra. Esquematicamente,

$$R_T = v_T \uparrow t_T \downarrow \quad \text{e} \quad R_L = v_L \downarrow t_L \uparrow \quad \Rightarrow \quad R_T = R_L.$$

- 6) **(Problema)** Se a coluna d'água no reservatório for D , encontre o maior intervalo entre todos os possíveis para o alcance que pode ser obtido para furos em várias alturas.

Resolução: Pela fórmula do alcance, Eq. (3.6), o menor valor que R pode atingir é $R = 0$ o que ocorre quando $h = 0$ ou quando $h = D$, ou seja, quando o furo está posicionado na base do reservatório ou na mesma altura da coluna d'água. Para maximizar a função $R(h) = 2\sqrt{h(D-h)}$, vamos derivar R em termos de h (pois D é fixo) e igualar a zero. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dh} &= 2 \frac{1}{2} [h(D-h)]^{-\frac{1}{2}} (D-2h) = 0 \\ &\frac{(D-2h)}{\sqrt{h(D-h)}} = 0 \\ &D-2h = 0. \end{aligned}$$

Logo, $h = \frac{D}{2}$ e $R\left(\frac{D}{2}\right) = D$. Por meio de observações sobre a função $R(h)$, comprovamos que o ponto $\left(\frac{D}{2}, D\right)$ é de fato um ponto de máximo. Portanto, o maior intervalo para R é $[0, D]$.

7) (**Cálculo**) Suponha $D = 12\text{m}$. Plote o alcance R como uma função de h para $0 \leq h \leq D$. Descreva a forma deste gráfico e seja específico.

Resolução: Se $D = 12\text{m}$, $R(h) = 2\sqrt{h(12-h)}$, $0 \leq R \leq D$. Elevando os dois lados ao quadrado,

$$R^2 = 48h - 4h^2,$$

de onde segue a relação alcance R e altura h ,

$$R^2 + 4h^2 - 48h = 0. \quad (3.7)$$

Comparando esta expressão com a forma geral de uma cônica,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

os valores que os parâmetros assumem são $A = 1$, $B = 0$, $C = 4$, $D = 0$, $E = -48$ e $F = 0$.

Para classificar a cônica, calculamos

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(1)(4) = -16 < 0,$$

o que nos leva a concluir que se trata de uma cônica do tipo elíptico, podendo ser uma circunferência ou uma elipse. Para detalhes sobre classificação de cônicas consulte ([SILVEIRA, 2017](#)).

Prosseguimos fazendo uma translação para eliminar o termo de primeiro grau, utilizando a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} R = \alpha + u \\ h = \beta + v \end{cases}.$$

Substituindo na Eq. (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} (\alpha + u)^2 + 4(\beta + v)^2 - 48(\beta + v) &= 0 \\ \alpha^2 + u^2 + 2\alpha u + 4\beta^2 + 4v^2 + 8\beta v - 48\beta - 48v &= 0 \\ u^2 + 4v^2 + (2\alpha)u + (8\beta - 48)v + \alpha^2 + 4\beta^2 - 48\beta &= 0 \end{aligned}$$

e impondo que $2\alpha = 0$ e $8\beta - 48 = 0$, segue que $\alpha = 0$ e $\beta = 6$. Assim,

$$\begin{aligned} u^2 + 4v^2 + 144 - 288 &= 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 144 \\ \Rightarrow \frac{u^2}{12^2} + \frac{4v^2}{12^2} &= 1 \Rightarrow \frac{u^2}{12^2} + \frac{v^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12^2} + \frac{(y-6)^2}{6^2} = 1. \end{aligned}$$

Voltando para as variáveis R e h , a relação entre elas é

$$\frac{(h-6)^2}{6^2} + \frac{R^2}{12^2} = 1, \quad (3.8)$$

que é a equação de uma elipse. Como as variáveis devem ser ambas não negativas, a relação define implicitamente a função $R(h)$ com gráfico sendo uma semi elipse, conforme mostra a Figura 3.

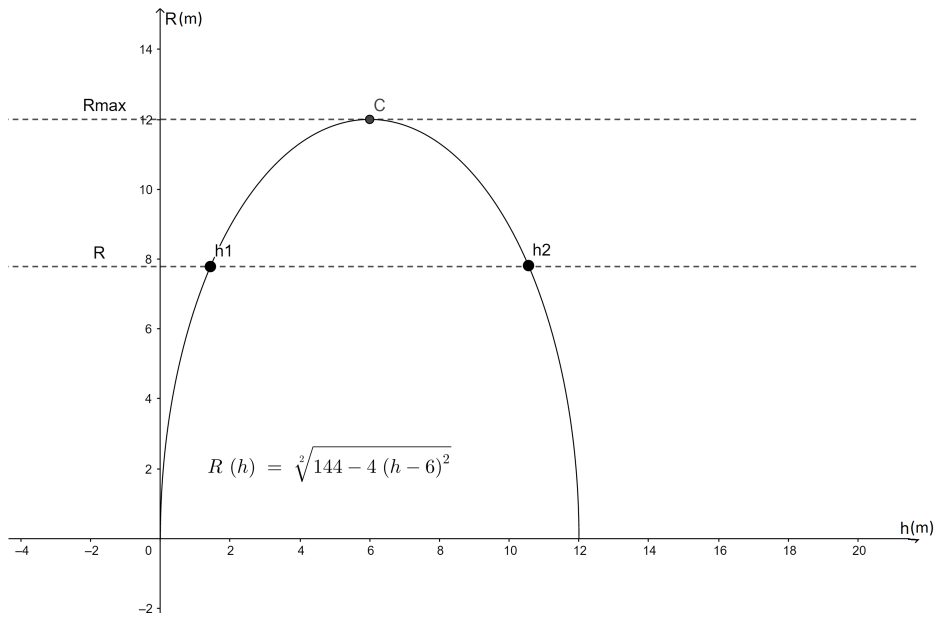


Figura 3 – Gráfico de $R(h)$ para $D = 12\text{m}$.

- 8) **(Problema)** Dado R , $0 \leq R \leq D$, mostre que há geralmente duas alturas de furo h que produzem o alcance R . Dê uma explicação física para isso.

Resolução: Rescrevendo a Eq. (3.6) como $R^2 = 4h(D - h)$, ou ainda,

$$h^2 - hD + \frac{R^2}{4} = 0, \quad (3.9)$$

e resolvendo-a obtendo

$$\Delta = (-D)^2 - 4(1)\left(\frac{R^2}{4}\right) = D^2 - R^2$$

e, então,

$$h = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - R^2}}{2}. \quad (3.10)$$

Assim, para um dado D , existem, em geral, dois valores para h .

Por exemplo, para $D = 12$, observamos a relação entre R e h , dada pela Eq. (3.7) e gráfico na Figura 3. Esta figura mostra que para $0 \leq R < 12$, a reta horizontal corta o gráfico em dois pontos distintos (de abscissas h_1 e h_2), para $R = D$ em um ponto (ponto C) e para $R > D$ não há intersecção. Resolvendo a Eq. (3.7) em h , ou seja, $4h^2 - 48h + R^2 = 0$, $\Delta = (-48)^2 - 4(4)(R^2) = 48^2 - 16R^2$ e $h = 48(\pm\sqrt{48^2 - 16R^2})/8$.

Logo,

$$h_1 = 6 - \frac{\sqrt{48^2 - 16R^2}}{8} \quad \text{e} \quad h_2 = 6 + \frac{\sqrt{48^2 - 16R^2}}{8}.$$

Tomando $R = 7,9$, por exemplo, $h_1 \approx 1,48$ e $h_2 \approx 10,52$, resultados compatíveis com a Figura 3. A explicação física para os possíveis resultados é que $h = D/2$ é a altura que gera o maior alcance R . Quando $h > D/2$, a coluna de água acima do furo sofre menos

pressão, o que faz com que o jato caia com menos velocidade, fazendo com que o alcance R seja pequeno. Com a diminuição de h , a coluna de água acima do furo aumenta, o que faz com que a pressão aumente e, conseqüentemente, o alcance R aumente. Já quando $h < D/2$, a pressão no furo é grande, a velocidade do jato é maior, no entanto, por estar próximo ao solo, mais rapidamente o jato atinge o solo, não permitindo que a alta pressão mande esse jato para longe do reservatório.

O alcance R depende tanto da altura do furo, h , quanto da coluna d'água acima do furo, $D - h$. Assim, um mesmo valor de R pode ser determinado quando h é grande e $D - h$ é pequeno ou quando h é pequeno e $D - h$ é grande. Um dos casos acontece quando $h > D/2$ e o outro quando $h < D/2$.

- 9) **(Pergunta)** Em que condições o problema inverso discutido na Atividade 8 tem uma solução única para h ?

Resolução: Voltando a Eq. (3.10), um único valor h é obtido quando $\sqrt{D^2 - R^2} = 0$, ou seja, quando $R = D$, e, neste caso, $h = D/2$.

Para $D = 12\text{m}$, é justamente o ponto C da Figura 3, que possui abscissa $h = 12/2 = 6$.

- 10) **(Problema)** Suponha que o tanque tenha um único furo na altura h e para duas profundidades de água diferentes $D_1 > h$ e $D_2 > h$ os alcances correspondentes R_1 e R_2 sejam medidos. Mostre que D_1 , D_2 , R_1 e R_2 determinam exclusivamente h .

Resolução: Sabe-se que $R(h) = 2\sqrt{h(D-h)}$ e assim

$$\begin{cases} R_1(h) = 2\sqrt{h(D_1 - h)}, \\ R_2(h) = 2\sqrt{h(D_2 - h)}. \end{cases}$$

Elevando ao quadrado os dois lados das duas equações obtém-se

$$\begin{cases} R_1^2 = 4h(D_1 - h), \\ R_2^2 = 4h(D_2 - h). \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira,

$$R_1^2 - R_2^2 = 4h(D_1 - h - D_2 + h)$$

e assim,

$$h = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4(D_1 - D_2)},$$

sendo, portanto, determinado unicamente por R_1 , R_2 , D_1 , D_2 .

3.3 Considerações

A determinação da altura do furo em um reservatório de acordo com o alcance que se deseja obter pode ser um trabalho interessante para alunos do ensino médio, nesse caso a determinação desse alcance se obteve através de 10 atividades, conforme mostradas anteriormente, e todas com uma intenção. Essas atividades devem ser adaptadas de acordo com o nível desses alunos.

As Atividades de 1) a 3) tratam da dedução do modelo do problema direto de determinar o alcance do jato R , dados D e h . Na Atividade 4) surge o modelo de fato, ou seja,

$$R = 2\sqrt{h(D-h)}.$$

Nele, dados valores para D e h , $h < D$, calculamos um único R . Observamos também que o jato atinge o solo, no máximo, a D metros de distância do reservatório.

A Atividade 5), apesar de falar em Terra e em Lua, possui como objetivo enfatizar que o alcance, pelo modelo, depende apenas de D e R , mas não da gravidade.

Até esta atividade os alunos podem não sentir grandes dificuldades, pois são mais familiarizados com problemas diretos. Além do estudo da física já fazer parte da grade curricular do ensino médio, inclusive de escolas públicas.

As Atividades 6) a 8) introduzem o problema inverso de determinar a altura do furo h , dado D , ou seja

$$h = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - R^2}}{2}.$$

A Atividade 6), ao pedir para encontrar o alcance máximo, apesar de termos usado a derivada, poderíamos ter encontrado o resultado intuitivamente, que faz com que seja viável a aplicação desse problema no ensino médio.

Nas Atividades 8) e 9) concluímos que existe uma relação entre D e h que determina a quantidade de solução no problema. Se $h > D$ não existe solução (o furo está acima do nível da água no reservatório), se $h = D/2$ existe uma única solução (situação bem particular em que o furo está bem na metade da coluna d'água) se $h < D$ e $h \neq D/2$, existem duas soluções.

É importante observar aqui que o furo é único, portanto a solução do problema real é única. Porém, matematicamente, o problema tem duas soluções. A Atividade 10) mostra como podemos particularizar a solução. A técnica consiste em tomar medidas extras de causa-efeito (h, R) e, neste caso, apenas duas medidas são necessárias.

PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR O ÂNGULO DE INCLINAÇÃO NO LANÇAMENTO DE UM PROJÉTIL

Este caso é baseado no problema *A Cheap Shot* de [Groetsch \(1999\)](#) e possui as seguintes orientações.

Nível: pré-cálculo (álgebra, geometria euclidiana);

Objetivos: desenvolver um modelo simplificado de movimento de projéteis, estudar o problema do ângulo de elevação para se obter um alcance horizontal e investigar a existência e a unicidade das soluções;

Base matemática: parábolas, hipérbolas, equações quadráticas, relações trigonométricas em um triângulo retângulo;

Base científica: lei da inércia, lei de queda livre, princípio da independência dos movimentos simultâneos;

Tecnologia: calculadora gráfica.

4.1 Descrição

No início do século XVI, problemas de artilharia eram preocupações técnicas do primeiro escalão de governantes da Renascença. O novo canhão provou sua eficácia nas muitas guerras da época. Além disso, o canhão foi considerado a arma que proporcionaria uma das defesas mais seguras contra a ameaça mais terrível extra-europeia: o Império Otomano. Estudos iniciais de artilharia realizados na Itália renascentista levou à teoria da dinâmica moderna e, portanto, pode ser vista como a origem da física matemática.

O primeiro livro ocidental sobre artilharia foi publicado em Veneza em 1537 por Nicolo Tartaglia (Nicolo Fontana, 1502-1557). Tartaglia alegou ser o inventor de um dispositivo para medir o ângulo de inclinação de uma arma em relação ao plano horizontal. O dispositivo permitiu que Tartaglia estudasse o problema direto de artilharia: dado o ângulo de inclinação, encontrar o alcance horizontal (para o lançamento de uma determinada carga); também sugeriu o estudo do problema inverso correspondente: encontrar o ângulo de inclinação que levará a um determinado alcance.

A análise de Tartaglia sobre o movimento do projétil foi falha, mas um século depois Galileu forneceu uma análise correta sobre o movimento de um projétil no vácuo. Galileu fundamentou em três pilares científicos: a lei da inércia, a lei da queda livre e o princípio da independência dos movimentos simultâneos.

Segundo Marques (2019), Galileu em sua obra “Discurso sobre duas novas ciências” estudou os movimentos dos projéteis. Entre os pontos altos do seu estudo, é importante ressaltar quatro aspectos percebidos por ele:

- 1) O movimento ocorre em um plano vertical;
- 2) O movimento pode ser decomposto em um movimento uniforme, ao longo de um eixo horizontal;
- 3) O movimento pode ser decomposto em um movimento uniformemente variado ao longo de um eixo vertical;
- 4) A trajetória é um segmento de parábola;

O segundo e o terceiro aspectos são válidos desde que não levemos em conta a resistência do ar.

Suponha que um projétil pontual de massa unitária seja lançado da origem de um plano cartesiano sob um ângulo θ em relação ao eixo x positivo com velocidade inicial V . A ideia de Galileu era que o movimento com velocidade V e com direção determinada pelo ângulo θ poderia ser decomposto em dois vetores independentes nas direções x e y com velocidades V_x e V_y , respectivamente, conforme a Figura 4.

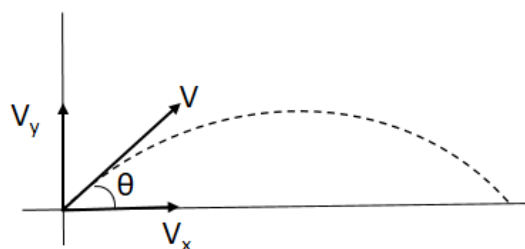


Figura 4 – Decomposição da velocidade no lançamento de um projétil.

A relação entre V e seus componentes vem das relações trigonométricas em um triângulo retângulo, ou seja,

$$V_x = V \cos \theta, \quad (4.1)$$

$$V_y = V \sin \theta. \quad (4.2)$$

Considere agora o movimento apenas na direção horizontal. Como nenhuma força age nessa direção (desprezando a resistência do ar e observando que a gravidade age somente na direção vertical), a lei da inércia de Galileu sustenta que a velocidade na direção horizontal é constante, ou seja, V_x . Assim, após t unidades de tempo, o projétil foi movido para uma posição cuja coordenada x é

$$x = V_x t. \quad (4.3)$$

Na direção vertical duas leis dominam: a lei da inércia que sozinha levaria o projétil a uma altura $V_y t$, em t unidades de tempo; e a lei de queda livre de Galileu, que faria o projétil cair $\frac{gt^2}{2}$ unidades de distância, onde g é a aceleração devido à gravidade considerada constante. Combinando estes efeitos, obtemos que após t unidades de tempo, a coordenada y do projétil é

$$y = -\frac{gt^2}{2} + V_y t. \quad (4.4)$$

O conjunto de Eqs. (4.1)-(4.4) modela o problema direto tratado aqui. As causas são descritas pelo ângulo de inclinação θ e a velocidade de lançamento do projétil V . Em posse dessas informações, é possível determinar o alcance horizontal do projétil, R , valor final de x na Eq. (4.3). Segue o esquema do problema direto.

causa	modelo	efeito
conhecendo a velocidade V e a inclinação θ do lançamento	→ lei da inércia, lei da queda livre e princípio da independência dos movimentos simultâneos	→ determinar o alcance horizontal do projétil R ?

Um problema inverso associado é o de determinar o ângulo de inclinação θ , dado o alcance horizontal atingido pelo projétil R , lançado a uma dada velocidade V , conforme esquema

causa	modelo	efeito
dada a velocidade de lançamento V , determinar o ângulo de inclinação θ ?	→ lei da inércia, a lei da queda livre e princípio da independência dos movimentos simultâneos	→ conhecendo o alcance horizontal do projétil R

4.2 Atividades

Para investigar os objetivos deste caso, apresentamos quinze atividades.

- 1) **(Exercício)** Encontre o tempo de voo, t_f , do projétil em termos de V_y e g . (O tempo de voo é tempo que demora para o projétil tocar o solo após o lançamento. Em outras palavras, é o valor positivo de t para o qual $y = 0$; ou, geometricamente, é o valor do parâmetro de tempo correspondente à interseção positiva da trajetória com o eixo x).

Resolução: Considerando $y = 0$ na Eq. (4.4),

$$-\frac{g}{2}t_f^2 + V_y t_f = 0,$$

obtemos que $t_f = 0$ ou $t_f = (2V_y)/g$, sendo que a primeira resposta ocorre no início do movimento. Logo, o tempo de voo em termos de V_y e g é

$$t_f = \frac{2V_y}{g}. \quad (4.5)$$

- 2) **(Exercício)** O alcance R do projétil é o intercepto- x positivo da trajetória. Mostre que o intervalo satisfaz $V_x V_y = (gR)/2$.

Resolução: A posição horizontal do projétil é dada pela Eq. (4.3), para a qual o alcance $x = R$ ocorrerá quando $t = t_f$. Assim,

$$R = V_x t_f = V_x \left(\frac{2V_y}{g} \right),$$

de onde concluímos que

$$V_x V_y = \frac{gR}{2}. \quad (4.6)$$

- 3) **(Problema)** Mostre que, a princípio, qualquer alcance não-negativo pode ser atingido por infinitas combinações das componentes x e y da velocidade inicial, V_x e V_y .

Resolução: Para obtermos um $R > 0$ arbitrário, é preciso lançar o projétil a uma velocidade V . A princípio, V pode ser qualquer uma que tenha componentes V_x e V_y , ambas positivas, que satisfaçam a Eq. (4.6).

Em outras palavras, se tomarmos $V_x > 0$ qualquer e $V_y = \frac{Rg}{2V_x}$, o alcance $R > 0$ pode ser alcançado. A fórmula para R em função das componentes de \vec{V} é

$$R = \frac{2V_x V_y}{g}. \quad (4.7)$$

- 4) **(Cálculo)** Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e suponha que o alcance R seja 1500 m. Plote o conjunto de pontos (V_x, V_y) para o qual o alcance é atingido. Qual é a forma dessa curva? Encontre a componente horizontal da velocidade inicial V_x , dada $V_y = 120 \text{ m/s}$, e encontre a componente vertical da velocidade inicial V_y , dada $V_x = 90 \text{ m/s}$, para o qual o alcance $R = 1500$

m é atingido. Use o recurso de rastreamento na sua calculadora para estimar o ponto na curva do alcance $R = 1500$ m que está mais próxima da origem (certifique-se de que seu monitor seja quadrado). Este é o ponto na curva para o qual o alcance desejado é atingido e a energia cinética inicial $\frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2)$ é mínima. Este objetivo específico permite obter o alcance desejado com o menor gasto de energia. Estime o ângulo de inclinação θ que corresponde a esse gasto mínimo de energia.

Resolução: Substituindo $R = 1500$ m e $g = 10$ m/s² na Eq. (4.6), obtemos

$$V_x V_y = 7500. \quad (4.8)$$

Para $V_y = 120$ m/s, $V_x = 62,5$ m/s e, para $V_x = 90$ m/s, $V_y = 83,33$ m/s, ou seja, são pontos do conjunto $(62,5; 120)$ e $(90; 83,33)$.

A curva descrita por todos os pontos (V_x, V_y) que satisfazem (4.8) é do tipo hiperbólica, compreendendo apenas o trecho positivo, conforme pode ser vista na Figura 5. Ela mostra as infinitas combinações de V_x e V_y que levam ao alcance de 1500m.

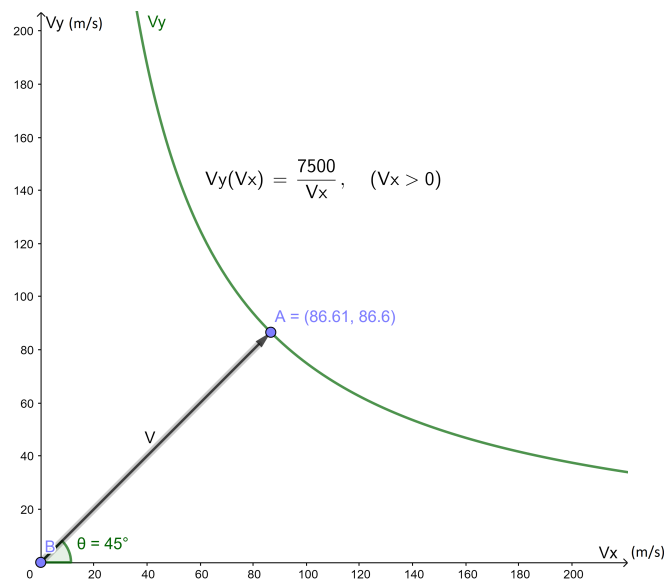


Figura 5 – Gráfico de V_y em função de V_x para um alcance de 1500 m.

A distância entre a origem $O(0,0)$ e qualquer ponto da hipérbole, ou seja, $H\left(V_x, \frac{Rg}{2V_x}\right)$,

$V_x > 0$, é dada por $d_{HO} = \sqrt{(V_x - 0)^2 + \left(\frac{Rg}{2V_x} - 0\right)^2}$. Fazendo simplificações e observando que a distância está em função de V_x , podemos escrever

$$f(V_x) = \left(\frac{4(V_x)^4 + R^2 g^2}{4(V_x)^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

Para encontrar a distância mínima entre a origem e o gráfico, derivamos $f(V_x)$ e igualamos a zero,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dV_x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4(V_x)^4 + R^2 g^2}{4(V_x)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{16(V_x)^3 4(V_x)^2 - [4(V_x)^4 + R^2 g^2](8V_x)}{16(V_x)^4} \right) \\ &= \frac{32(V_x)^5 - 8R^2 g^2 V_x}{2 \left(\frac{4(V_x)^4 + R^2 g^2}{4(V_x)^2} \right)^{\frac{1}{2}} 16(V_x)^4} = 0 \end{aligned}$$

Logo, $8V_x[4(V_x)^4 - R^2 g^2] = 0$, de onde calculamos $V_x = 0$ ou $2(V_x)^2 + Rg = 0 \Rightarrow V_x = \sqrt{-\frac{Rg}{2}}$ ou ainda,

$$2(V_x)^2 - Rg = 0.$$

Apenas a última solução é aceita. Logo,

$$V_x = \sqrt{\frac{Rg}{2}}. \quad (4.10)$$

Se $R = 1500\text{m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$ então $V_x \simeq 86,6\text{m}$ e substituindo na Eq. (4.8) obtemos $V_y \simeq 86,6\text{m/s}$. O ponto $(86,6; 86,6)$ mostra que o ponto A da Figura 5 obtido pelo software Geogebra foi bastante preciso.

No caso em que $V_x = V_y$, o ângulo de inclinação do projétil em relação à horizontal é de 45° ou $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$. Com esse ângulo há um disparo que atinge o alcance de 1500m , com o menor gasto de energia possível. Neste caso, a energia gasta no lançamento é

$$E_c = m \frac{(V_x^2 + V_y^2)}{2} = \frac{(86,6^2 + 86,6^2)}{2} \simeq 7500 \text{ joules},$$

e para qualquer outro ângulo de lançamento, para atingir o mesmo alcance, a energia gasta seria maior.

- 5) **(Problema)** Mostre que, para uma determinada velocidade inicial de lançamento V , o alcance R é dado por $R(\theta) = \frac{V^2}{g} \sin(2\theta)$.

Resolução: Das Eqs. (4.1), (4.2) e (4.6), obtemos que

$$R(\theta) = \frac{2V_x V_y}{g} = \frac{2V \cos(\theta) V \sin(\theta)}{g}.$$

Simplificamos o numerador recorrendo à fórmula de arco duplo do seno, isto é, $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$. Logo,

$$R(\theta) = \frac{V^2 \sin(2\theta)}{g}. \quad (4.11)$$

- 6) **(Pergunta)** Para uma determinada velocidade inicial de lançamento, qual ângulo de inclinação produz o alcance máximo? Qual é o alcance máximo?

Resolução: O alcance em função do ângulo de inclinação é expresso por (4.11). Logo, o maior alcance possível será quando $\sin(2\theta)$ for o maior possível, ou seja, igual a 1. Para um ângulo α , $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $\sin \alpha = 1$ quando $\alpha = \pi/2$. Observando que $\alpha = 2\theta$, o ângulo procurado é $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Neste caso, o alcance máximo será

$$R_{max} = R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{V^2 \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)}{g} = \frac{V^2}{g}.$$

- 7) **(Problema)** Suponha que a velocidade V seja fixa. Use a técnica de completar quadrado para encontrar a altura máxima que o projétil atinge em termos de ângulo de inclinação θ e velocidade V .

Resolução: A posição vertical do projétil é dada pela Eq. (4.4). Segue daí que a altura máxima, y_{max} é atingida na metade do tempo de voo, ou seja, quando

$$t_{y_{max}} = \frac{V_y}{g} = \frac{V \sin \theta}{g}.$$

Podemos verificar, derivando a função $y = -\frac{gt^2}{2} + V_y t$ e igualando a zero,

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_y = 0 \Rightarrow t = \frac{V_y}{g}$$

Então,

$$y_{max} = -\frac{g}{2} \left(\frac{V \sin \theta}{g}\right)^2 + V \sin \theta \left(\frac{V \sin \theta}{g}\right).$$

Logo, a altura máxima atingida pelo projétil lançado a uma velocidade V com ângulo de inclinação θ é

$$y_{max} = \frac{V^2 \sin^2 \theta}{2g}. \quad (4.12)$$

- 8) **(Problema)** Suponha que o alcance $R > 0$ seja conhecido. Que ângulo de inclinação levará a essa distância por um mínimo valor da velocidade V ? Qual é a velocidade mínima, em função de R ? (Compare com a Atividade 4).

Resolução: Da Atividade 5, isolando V na Eq. (4.11) temos,

$$V = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta)}}.$$

O mínimo de V , em função de R , ocorre quando o denominador $\sin(2\theta)$ for o maior possível, ou seja, $\sin(2\theta) = 1$. Logo,

$$V_{min} = \sqrt{Rg}, \quad (4.13)$$

e, neste caso, $2\theta = \frac{\pi}{2}$, portanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Comparando com a Atividade 4, concluímos que ao lançarmos o projétil com ângulo de inclinação $\pi/4$, ou seja, a 45° em relação ao plano horizontal, necessitamos aplicar uma velocidade de lançamento mínima e isso implica num gasto de energia mínimo.

- 9) **(Problema)** Suponha que a velocidade V seja fixa. Mostre que cada alcance menor que o alcance máximo é atingível com exatamente dois ângulos distintos de inclinação. Como esses ângulos estão relacionados?

Resolução: Das relações trigonométricas, observamos que $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$, quando $0 \leq \varphi < \pi/2$. Assim, da Eq. (4.11), podemos concluir que

$$R(\theta) = \frac{V^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{V^2 \sin(\pi - 2\theta)}{g}.$$

Segue então que os dois possíveis ângulos de lançamento são

$$\sin(2\theta_1) = \frac{Rg}{V^2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{Rg}{V^2}\right), \quad (4.14)$$

$$\sin(\pi - 2\theta_2) = \frac{Rg}{V^2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{Rg}{V^2}\right). \quad (4.15)$$

Portanto, ambos os ângulos de inclinação θ_1 e $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$, levam ao alcance R , $0 < R < R_{max}$.

Para complementar o estudo, vamos considerar agora um alvo mais difícil, localizado em um plano inclinado (chamado de campo de batalha) formando um ângulo α em relação ao plano horizontal. O projétil continua sendo disparado com inclinação θ em relação ao plano horizontal e velocidade V . É natural a condição de que $\alpha < \theta$. A situação está ilustrada na Figura 6.

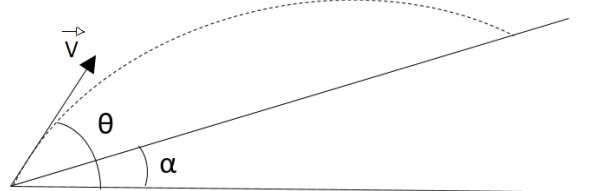


Figura 6 – Lançamento de projétil com alvo localizado em um plano inclinado.

- 10) **(Problema)** Para uma dada velocidade de lançamento V e um dado ângulo de inclinação θ , encontre o tempo de voo até o alvo no plano inclinado. Compare com a Atividade 1).

Resolução: Retomando as Eqs. (4.1) - (4.4) e acrescentando que o plano inclinado tem equação

$$y = \operatorname{tg}(\alpha)x, \quad (4.16)$$

sendo x e y a posição horizontal e vertical, respectivamente, do plano inclinado em um plano cartesiano que tem como origem o local de lançamento do projétil.

O tempo de voo, t_f , corresponde ao tempo que leva para o projétil atingir o plano inclinado. Considerando $y = \operatorname{tg}(\alpha)x = \operatorname{tg}(\alpha)V_x t = \operatorname{tg}(\alpha)V \cos(\theta)t$, o tempo de voo ocorre quando a Eq. (4.4) é satisfeita da seguinte forma

$$-\frac{gt_f^2}{2} + V \operatorname{sen}(\theta)t_f = \operatorname{tg}(\alpha)V \cos(\theta)t_f. \quad (4.17)$$

Segue que o tempo de voo (observando que a outra solução, $t_f = 0$, é desconsiderada pois é o tempo inicial) é

$$t_f = \frac{2V(\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{tg}(\alpha) \cos(\theta))}{g}. \quad (4.18)$$

Comparando com a Atividade 1), onde $\alpha = 0$ e, portanto, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, $t_f = (2V \operatorname{sen} \theta)/g = (2V_y)/g$, que é a Eq. (4.5).

- 11) **(Problema)** Para uma determinada velocidade de lançamento V e ângulo de campo de batalha α , encontre o alcance R (isto é, a coordenada x positiva da intersecção da trajetória do projétil com o plano inclinado) como função do ângulo de lançamento. Compare com a Atividade 2).

Resolução: Substituindo a Eq. (4.18) em (4.3), encontramos o alcance,

$$R(\theta) = V_x \left[\frac{2V(\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{tg}(\alpha) \cos(\theta))}{g} \right],$$

ou ainda,

$$R(\theta) = \frac{2(V_x V_y - V_x^2 \operatorname{tg} \alpha)}{g}. \quad (4.19)$$

Comparando com a Atividade 2), $R(\theta) = (2(V_x V_y - V_x^2 \operatorname{tg} 0))/g = (2V_x V_y)/g$, que leva à Eq. (4.11).

- 12) **(Cálculo)** Sejam $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad. Plote a curva de velocidade de todos pares de componentes (V_x, V_y) que levam a um alcance $R = 300\text{m}$. Estime o ponto nessa curva que está mais próximo da origem, isto é, que corresponde ao disparo de menor gasto de energia para alcançar uma distância definida. A que ângulo de inclinação θ de disparo esta energia mínima corresponde? Repita todos os itens acima para um ângulo de campo de batalha $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Você observa uma relação entre o ângulo de inclinação de gasto mínimo de energia e o ângulo do campo de batalha, α ?

Resolução: Da Eq. (4.19), escrevemos V_y em função de V_x , obtendo

$$V_y = \frac{Rg}{2V_x} + V_x \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.20)$$

Substituindo os valores dados, $R = 300\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{rad}$, encontramos

$$V_y = \frac{1500}{V_x} + V_x\sqrt{3}, \quad (4.21)$$

e, para $R = 300\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad}$, encontramos

$$V_y = \frac{1500}{V_x} + V_x\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (4.22)$$

Plotando os gráficos no Geogebra, obtemos as Figuras 7 e 8, onde verificamos que para $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{rad}$, $\theta \approx \frac{5\pi}{12}\text{rad}$ (75° na Figura 7), e para $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad}$, $\theta \approx \frac{62,38\pi}{180}\text{rad}$ ($62,38^\circ$ na Figura 8).

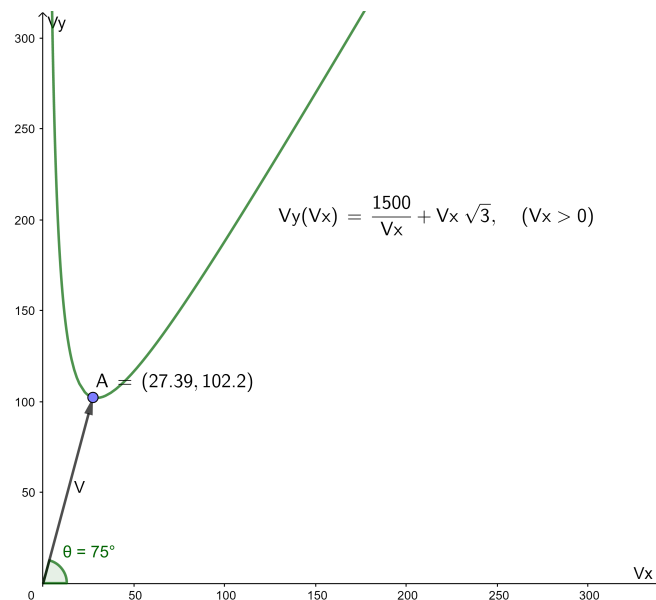


Figura 7 – Gráfico de V_y em função de V_x para um alcance de 300m em um plano com inclinação $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{rad}$.

Quanto ao formato dos gráficos, observamos que a função V_y dada por (4.20) é a soma de duas funções cujos gráficos são uma hipérbole e uma reta, e que é bem visível a contribuição de cada parcela. Além disso, observamos que para o ângulo α menor, $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad}$, a curva é mais aberta e cresce mais lentamente conforme V_x aumenta e também quando se aproxima de zero. Já para o ângulo maior, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, a curva é mais fechada e cresce mais rapidamente conforme V_x aumenta e também quando se aproxima de zero.

Ainda nas Figuras 7 e 8, vemos os pontos que possuem a menor distância até a origem obtidos pelo Geogebra com a ferramenta de percorrer o gráfico e calcular as distâncias. Para encontrar esses pontos analiticamente, devemos calcular a distância entre o ponto $O(0,0)$ e um ponto arbitrário da curva $G\left(V_x, \frac{Rg}{2V_x} + V_x\text{tg}\alpha\right)$.

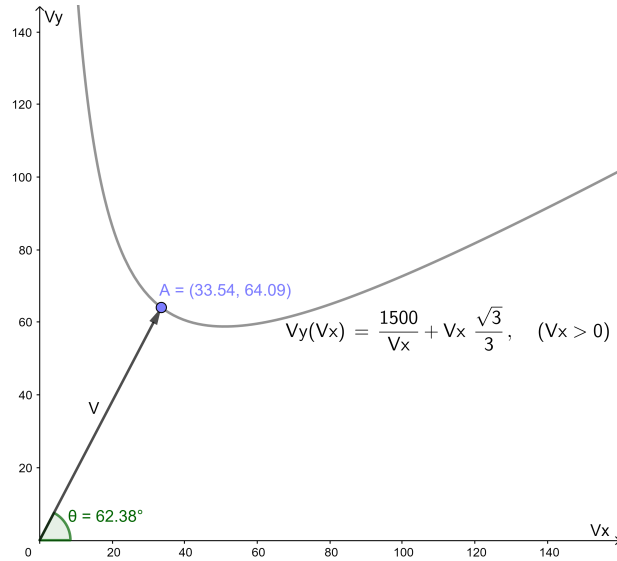


Figura 8 – Gráfico de V_y em função de V_x para um alcance de 300m em um plano com inclinação $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad.

$$d(O, G) = \sqrt{(V_x)^2 + \left(\frac{Rg}{2V_x} + V_x \operatorname{tg} \alpha\right)^2} = \left[(V_x)^2 + \left(\frac{Rg}{2V_x} + V_x \operatorname{tg} \alpha\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Derivando a expressão em relação à V_x e igualando a zero, obtemos

$$\frac{1}{2} \left[(V_x)^2 + \left(\frac{Rg}{2V_x} + V_x \operatorname{tg} \alpha\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[2V_x + 2 \left(\frac{Rg}{2V_x} + V_x \operatorname{tg} \alpha\right) \left(-\frac{Rg}{2(V_x)^2} + \operatorname{tg} \alpha\right) \right] = 0.$$

Como os dois primeiros fatores do membro esquerdo são positivos, o terceiro fator deve ser igual a zero. Assim,

$$4(V_x)^4 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - R^2 g^2 = 0,$$

$$\left(2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} (V_x)^2 - Rg\right) \left(2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} (V_x)^2 + Rg\right) = 0,$$

o que resulta em

$$(V_x)^2 = -\frac{Rg}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \text{ou} \quad (V_x)^2 = \frac{Rg}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

A primeira solução é claramente falsa. Da segunda solução, temos V_x da seguinte forma

$$V_x = \frac{Rg}{2V_x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad (4.23)$$

e substituimos na Eq. (4.20), obtendo

$$V_y = V_x \left(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right). \quad (4.24)$$

Para a primeira situação em que $R = 300\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{rad}$, as Eqs. (4.23) e (4.24) fornecem o resultado $V_x \approx 27,39\text{m/s}$ e $V_y \approx 102,21\text{m/s}$. Já para a segunda situação em que $R = 300\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad}$, as Eqs. (4.23) e (4.24) fornecem o resultado $V_x \approx 33,54\text{m/s}$ e $V_y \approx 64,09\text{m/s}$. Mesmos resultados que foram obtidos com auxílio do Geogebra.

Para obter a medida do ângulo de inclinação θ , utilizamos a razão trigonométrica tangente. Para a primeira situação,

$$\text{tg } \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{102,21}{27,39} \approx 3,73.$$

Logo, $\theta = \text{arctg } 3,73$, e $\theta \approx 75^\circ = \frac{5\pi}{12}$. Já para a segunda situação,

$$\text{tg } \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{64,09}{33,54} \approx 1,91.$$

Logo, $\theta = \text{arctg } 1,91$ e $\theta \approx 62,37^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Sobre a relação entre o ângulo de inclinação de gasto mínimo de energia e o ângulo do campo de batalha, observamos que

$$2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (4.25)$$

E, de fato, para a primeira situação, $2\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ e para a segunda situação $2\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Notamos que se não houvesse o plano inclinado, ou seja, $\alpha = 0$, a Eq. (4.24) ficaria $V_y = V_x (\text{tg } \theta + \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta})$ e, portanto, $V_y = V_x$, e o ângulo de lançamento para energia mínima seria $\theta = \frac{\pi}{4}$, o que foi concluído na Atividade 4). Neste caso, a relação (4.25) também se verifica.

- 13) **(Problema)** Expresse a distância R como uma função da velocidade V dada e do ângulo do campo de batalha α dado. Compare com a Atividade 5).

Resolução: Substituindo (4.1) e (4.2) em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} R(\theta) &= 2 \frac{(V \cos(\theta) V \sin(\theta) - V^2 \cos^2(\theta) \text{tg}(\alpha))}{g} \\ &= 2V^2 \cos \theta \frac{(\sin \theta - \cos \theta \text{tg} \alpha)}{g}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Comparando com a Atividade 5), para $\alpha = 0$, $\text{tg } 0 = 0$ e, portanto $R(\theta) = 2V^2 \cos \theta \frac{\sin \theta}{g} = \frac{V^2 \sin(2\theta)}{g}$, que é a Eq. (4.11).

- 14) **(Problema)** Para uma dada velocidade de lançamento V e ângulo de campo de batalha α , encontre o ângulo de inclinação θ que leva a um alcance horizontal máximo R . Dê uma interpretação geométrica do seu resultado. Compare com a Atividade 6).

Resolução: Manipulando convenientemente a Eq. (4.26), usando relações trigonométricas como a relação fundamental $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e $\sin 2\theta \cos \alpha - \cos(2\theta) \sin \alpha = \sin(2\theta - \alpha)$, fazemos

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \frac{V^2}{g} (2\sin \theta \cos \theta - 2\cos^2 \theta \operatorname{tg} \alpha) \\ &= \frac{V^2}{g} (\sin 2\theta - \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta)) \\ &= \frac{V^2}{g} (\sin 2\theta - \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \theta + 1 - \sin^2 \theta)) \\ &= \frac{V^2}{g} (\sin 2\theta - \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \operatorname{tg} \alpha) \\ &= \frac{V^2}{g} (\sin 2\theta - \cos(2\theta) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}) \\ &= \frac{V^2}{g} \left(\frac{\sin(2\theta) \cos \theta - \cos(2\theta) \sin \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

Com isso, chegamos a seguinte fórmula para determinar o alcance máximo

$$R_{max} = \frac{V^2}{g} \left[\frac{\sin(2\theta - \alpha) - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right], \quad (4.27)$$

com θ sendo determinado pela inclinação do terreno α .

A partir de (4.27), observamos que o alcance máximo ocorre quando $(2\theta - \alpha) = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\theta - \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$. A Figura 9 ilustra a relação entre α e θ .

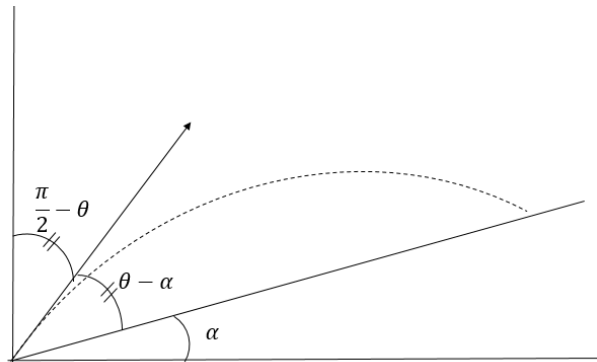


Figura 9 – Relação entre os ângulos de lançamento θ e de inclinação do terreno α .

Comparando com a Atividade 6), verificamos que se $\alpha = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{4}$ e o alcance seria, pela Eq. (4.27),

$$R_{max} = \frac{V^2}{g} \left[\frac{\sin\left(2\frac{\pi}{4} - 0\right) - 0}{1} \right] = \frac{V^2}{g},$$

que é a Eq. (4.11).

15) **(Problema)** Mostre que cada alcance diferente do máximo é atingido por exatamente dois ângulos distintos de inclinação. Como esses ângulos estão relacionados? Compare com a Atividade 9).

Resolução: Da Eq. (4.27), temos que $\frac{\text{sen}(2\theta - \alpha) - \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{Rg}{V^2}$, de onde segue que

$$\text{sen}(2\theta - \alpha) = \frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha,$$

e

$$2\theta - \alpha = \arcsen\left(\frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha\right).$$

Com isso, concluímos que existem dois ângulos de inclinação que lançam o projétil no alcance R , $0 < R < R_{max}$.

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha\right) + \frac{\alpha}{2}.$$

Como $\text{sen}(2\theta - \alpha) = \text{sen}[\pi - (2\theta - \alpha)]$ para $0 < 2\theta - \alpha < \pi$, $\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\pi + \alpha}{2}$, o outro ângulo é determinado por

$$\text{sen}[\pi - (2\theta - \alpha)] = \frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha,$$

$$\pi - 2\theta + \alpha = \arcsen\left(\frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha\right).$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha\right) + \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{Rg \cos \alpha}{V^2} + \text{sen } \alpha\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta_1 + \alpha \end{aligned}$$

Comparando com a Atividade 9), ao igualar α a zero, obtemos

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{Rg \cos 0}{V^2} + \text{sen } 0\right) + \frac{0}{2} = \frac{1}{2} \arcsen \frac{Rg}{V^2} \quad (4.28)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1. \quad (4.29)$$

Observamos nesse problema que os ângulos θ_1 e θ_2 são simétricos em relação ao ângulo de lançamento θ para o alcance máximo.

4.3 Considerações

As Atividades 1) a 4) conduzem o raciocínio para a formulação do problema direto, que é então apresentado na Atividade 5). Em tal problema, dados ângulo de inclinação θ e velocidade de lançamento V , determinar o alcance do projétil R , por meio da fórmula

$$R(\theta) = \frac{V^2 \text{sen}(2\theta)}{g}.$$

Para cada par de dados V e θ , a solução existe e é única.

Em particular, na Atividade 3) vemos que a princípio qualquer alcance pode ser atingido com qualquer velocidade de lançamento não nula, bastando para isso lançar o projétil numa direção apropriada, cujas componentes da velocidade respeitem a relação (4.6). No entanto, pela Atividade 4), vemos que também devemos levar em conta a energia gasta no lançamento. Para um gasto mínimo de energia, o ângulo de lançamento indicado é de $\theta = \pi/4$. Este ângulo de inclinação, de acordo com a Atividade 6) também é importante porque leva o projétil ao alcance máximo.

Na Atividade 7, foi encontrado a altura máxima em função do ângulo de inclinação do lançamento θ . O objetivo aqui, ainda no que se refere ao problema direto, é verificar a que altura máxima o projétil atinge quando ele é lançado com um determinado ângulo, assim como na atividade 5) encontramos o seu alcance máximo. Consequentemente, um problema inverso sugerido é determinar o ângulo de lançamento para atingir uma determinada altura máxima, mas optamos em não sugerir pois já estamos verificando, a partir da atividade 10 a situação de determinar o ângulo de lançamento a partir de um plano inclinado.

A Atividade 8) introduz a formulação do problema inverso. Nele o alcance é conhecido. E pelas atividades anteriores, podemos encontrar infinitos pares velocidade-ângulo que leve o projétil a esse alcance. Mas, a questão propõe que o gasto de energia seja mínimo. Neste caso, a velocidade de lançamento deve ser $V_{\min} = \sqrt{Rg}$ e o ângulo de inclinação $\theta = \pi/4$. Assim, a solução é única.

Finalmente, a Atividade 9) mostra que para um alcance menor que o máximo, para cada intensidade de velocidade existem dois ângulos de lançamento. Ambos necessitam da mesma velocidade de lançamento e portanto, dependem o mesmo gasto de energia. Com isso, concluímos que a solução do problema inverso proposto existe mas não é única, a não ser em um caso particular em que o ângulo de lançamento é $\pi/4$.

A Atividade 9) foi considerada por Tartaglia uma de suas maiores descobertas. Em uma carta ele relatou que sabia que o canhão poderia atingir o mesmo lugar com duas miras diferentes e que ele havia encontrado uma maneira de fazer isso, algo que até então nunca tinha sido pensado por ninguém.

A descoberta do ângulo de inclinação de lançamento de um projétil para se obter um

alcance desejado é um problema inverso que desperta curiosidade e pode ficar mais interessante quando o terreno (ou campo de batalha) for inclinado, conforme estudado nas Atividades 10) - 15). As conclusões se repetem mas as fórmulas se tornam bem mais gerais. A diferença fica por conta da relação entre os ângulos, o de inclinação do terreno e o de lançamento do projétil.

O problema pode se complicar ainda mais, se considerarmos, por exemplo, que o projétil será lançado do topo de uma torre e que irá cair em um terreno inclinado, conforme propõe a Atividade 16).

- 16) **(Projeto)** Suponha que projéteis sejam disparados de uma fortificação de altura h , que fica no topo de um campo de batalha inclinado, como na Figura 10. Realize o máximo possível do desenvolvimento das atividades desse caso para essa situação.

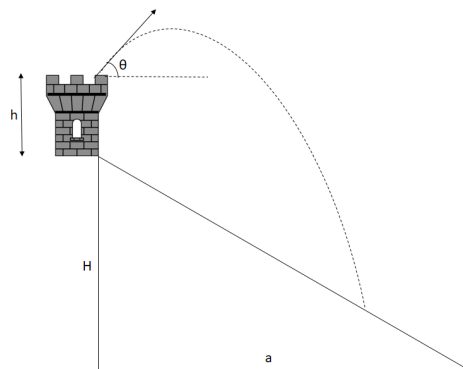


Figura 10 – Lançamento de um projétil, a uma altura h , de um topo de uma fortificação.

PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR A LOCALIZAÇÃO DE UMA PEPITA NO FUNDO DE UM RIO

Este caso é baseado no problema *das Rheingold* de [Groetsch \(1999\)](#) e possui as seguintes orientações.

Nível: pré-cálculo (álgebra, geometria euclidiana);

Objetivos: O objetivo deste estudo é integrar raciocínio físico e gráfico, investigar a existência e a unicidade das soluções e empregar calculadora gráfica para analisar um problema físico;

Base matemática: equações quadráticas, inequações, parábolas;

Base científica: lei da gravitação universal de Newton;

Tecnologia: calculadora gráfica.

5.1 Descrição

Este caso é inspirado no antigo mito germânico dos Nibelungos, uma raça de malfeitores anões, que diz a lenda, esconderam seu tesouro de ouro no fundo do rio Reno. Não se sabe se o “ouro dos nibelungos” existiu de fato mas até hoje, caçadores de tesouros sonham em encontrar seu esconderijo ([TODESKINO, 2013](#)).

Tratamos do problema de localizar o tesouro sem entrar na água e sem mergulhar qualquer equipamento. Consideramos que o tesouro seja uma única fonte pontual de massa m , uma pepita de ouro por exemplo, encostada no fundo do rio; que o rio seja calmo e tenha uma unidade de profundidade; e que a fonte esteja gravitacionalmente isolada, isto é, todas as outras

fontes gravitacionais são homogêneas, de modo que a força gravitacional gerada pela fonte seja o único efeito gravitacional.

A lei da gravitação universal de Newton sustenta que a força gravitacional F exercida por um corpo de massa m_1 sobre um corpo de massa m_2 , separados por uma distância d , é igual a uma constante conhecida γ (a constante gravitacional) vezes o produto das massas, dividido pelo quadrado da distância que separa as massas.

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{d^2}. \quad (5.1)$$

Especificamente para o caso aqui estudado, a pepita no fundo do rio exerce uma força gravitacional sobre um dispositivo localizado na superfície. Este dispositivo, digamos, um medidor de forças como um dinamômetro, tem massa unitária e está localizado a uma distância x de um ponto de referência na superfície, por exemplo, a margem do rio. As medidas tomadas, μ , correspondem à componente vertical da força gravitacional F gerada pela pepita, situada no fundo do rio a uma distância horizontal s do ponto de referência. A situação é ilustrada na Figura 11.

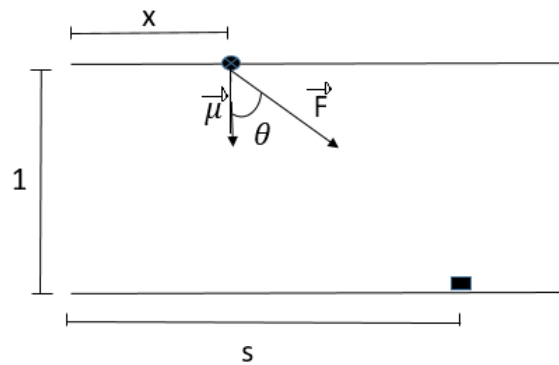


Figura 11 – Ilustração da pepita no fundo do rio, do equipamento de medição e da força de atração entre os corpos.

O quadrado da distância entre a pepita e o dispositivo de medição é dado pelo teorema de Pitágoras, $d^2 = 1 + (s - x)^2$. O dispositivo tem massa unitária e a pepita massa m . Logo, a Eq. (5.1) fica

$$F = \gamma \frac{m}{1 + (s - x)^2}. \quad (5.2)$$

A componente vertical μ de F é dada por $\mu = F \cos \theta$, em que θ é o ângulo entre as forças, conforme mostrado na Figura 11. Portanto,

$$\mu = \gamma \frac{m}{1 + (s - x)^2} \cos \theta. \quad (5.3)$$

Por outro lado, das relações trigonométricas no triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo é a medida do cateto adjacente dividido pela medida da hipotenusa. Pela Figura 11,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (s - x)^2}}. \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) em (5.3), obtemos

$$\mu = \gamma m [1 + (s - x)^2]^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.5)$$

O problema direto neste estudo de caso é determinar a força μ , dados a posição x do dispositivo e a massa m e a localização s da pepita. Este problema direto claramente tem uma solução única dada pela Eq. (5.5). Esquemáticamente, o problema direto é assim representado

causa	modelo	efeito
conhecendo a posição do dispositivo x , a localização s e a massa m da pepita	→ Lei da Gravitação Universal de Newton	→ determinar a força vertical μ ?

Um problema inverso consiste em determinar a massa m e a localização s da pepita no fundo do rio, conhecendo a força vertical μ e a localização x do dispositivo na superfície do rio. Esquemáticamente, esse problema inverso é assim representado

causa	modelo	efeito
conhecendo a posição do dispositivo x , determinar a localização s e a massa m da pepita ?	→ Lei da Gravitação Universal de Newton	→ conhecendo a força vertical μ

Antes de iniciarmos as atividades, vamos simplificar a Eq. (5.5) fazendo uma mudança de variáveis. As novas variáveis são

$$M = m^{\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad G = \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}},$$

as quais chamamos de massa efetiva e força vertical efetiva, respectivamente.

Elevando os dois membros da Eq. (5.5) a $2/3$ e fazendo a mudança de variáveis, essa equação se torna

$$G = \frac{M}{1 + (s - x)^2},$$

de onde segue a relação entre posição e massa efetiva da pepita e posição e força vertical efetiva do dispositivo

$$M - G = G(s - x)^2. \quad (5.6)$$

O problema inverso agora equivale ao de determinar s e M , de onde m é unicamente determinada, a partir do conhecimento de x e G . Como G depende de x , vamos reformular o problema inverso em termos de fonte, o par (s, M) , e medição, o par (x, G) , isto é, queremos determinar a fonte (s, M) a partir de medições (x, G) .

Esquemáticamente, agora temos o seguinte problema inverso

fonte	modelo	medição
determinar a fonte	→ Lei da	→ observando
(s, M)	Gravitação Universal de Newton	(x, G)
?		

5.2 Atividades

Para investigar os objetivos deste caso, apresentamos quatorze atividades.

- 1) **(Pergunta)** Uma única medição (x, G) determina exclusivamente a fonte (s, M) ?

Resolução: Da Eq. (5.6), para uma massa efetiva fixa M , temos

$$s - x = \pm \sqrt{\frac{M}{G} - 1},$$

de onde obtemos dois valores para s

$$s_1 = x - \sqrt{\frac{M - G}{G}} \quad \text{e} \quad s_2 = x + \sqrt{\frac{M - G}{G}}. \quad (5.7)$$

Assim, temos duas possibilidades para a fonte (s_1, M) e (s_2, M) . As duas possibilidades são simétricas em relação ao local de medição, como pode ser visto na Figura 12. No entanto, como a massa efetiva também é desconhecida, temos infinitas possibilidades de localização da fonte.

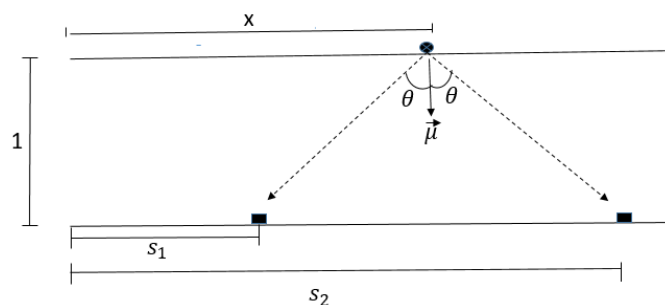


Figura 12 – Duas possíveis localizações para a pepita, dada uma massa efetiva M .

- 2) **(Pergunta)** Suponha que os pontos (s, M) sejam plotados em um plano cartesiano. Qual é a forma da curva das possíveis fontes associadas a uma dada medição (x, G) ?

Resolução: A partir da Eq. (5.6), deixamos M em função de s ,

$$M(s) = Gs^2 - 2xGs + G + Gx^2. \quad (5.8)$$

O gráfico de $M(s)$ é uma parábola com coordenadas do vértice

$$s_v = \frac{2xG}{2G} = x \quad \text{e} \quad M_v = G,$$

ou seja, o vértice tem coordenadas (x, G) , o que corresponde à própria medição.

Quanto ao foco, da equação geral da parábola $(s - s_v)^2 = 2p(M - M_v)$ com p sendo a distância entre o foco e a diretriz da parábola, obtemos

$$p = \frac{(s - x)^2}{2(M - G)}.$$

Da Eq. (5.6), tiramos a relação $(x - s)^2 = \frac{M - G}{G}$. Logo, $p = \frac{1}{2G}$. Como a distância entre o vértice e o foco é a metade desse parâmetro, isto é, $\frac{p}{2} = \frac{1}{4G}$, o foco da parábola é $\left(x, G + \frac{1}{4G}\right)$.

- 3) **(Pergunta)** Como a forma e a posição da curva da fonte mudam com as mudanças na medição (x, G) ?

Resolução: Pela Atividade 2) vemos que os elementos que determinam a parábola dependem tanto de x quanto de G . Mudanças em (x, G) reposicionam o vértice e deixam a parábola mais estreita ou mais aberta. Conforme G aumenta, o vértice se desloca para cima e a parábola se torna mais estreita, assim como, conforme x aumenta, verifica-se um deslocamento da curva para a direita.

Para exemplificar, tomamos alguns valores para x e G e traçamos gráficos utilizando o software GeoGebra. Para as medições (I) $(x, G) = (1, 2)$, (II) $(x, G) = (1, 4)$, (III) $(x, G) = (2, 2)$ e (IV) $(x, G) = (2, 4)$, a Eq. (5.8) nos dá os gráficos mostrados na Figura 13.

- 4) **(Problema)** Suponha que uma medição (x, G) seja feita.
- Mostre que para cada número $M > G$ existem duas possíveis localizações para a fonte com massa efetiva M que podem explicar a medição.
 - Mostre que existe uma única fonte de massa efetiva $M = G$ que pode explicar a medição (x, G) . Qual é a localização dessa fonte?
 - Mostre que se $M < G$, então nenhuma fonte de massa efetiva M pode explicar a medição dada.

Resolução: Na Atividade 1) vimos que para cada massa efetiva M dada, duas possibilidades para as fontes geram a medição (x, G) , conforme Figura (12) e Eq. (5.7), repetidas aqui

$$s_1 = x - \sqrt{\frac{M - G}{G}} \quad \text{e} \quad s_2 = x + \sqrt{\frac{M - G}{G}}.$$

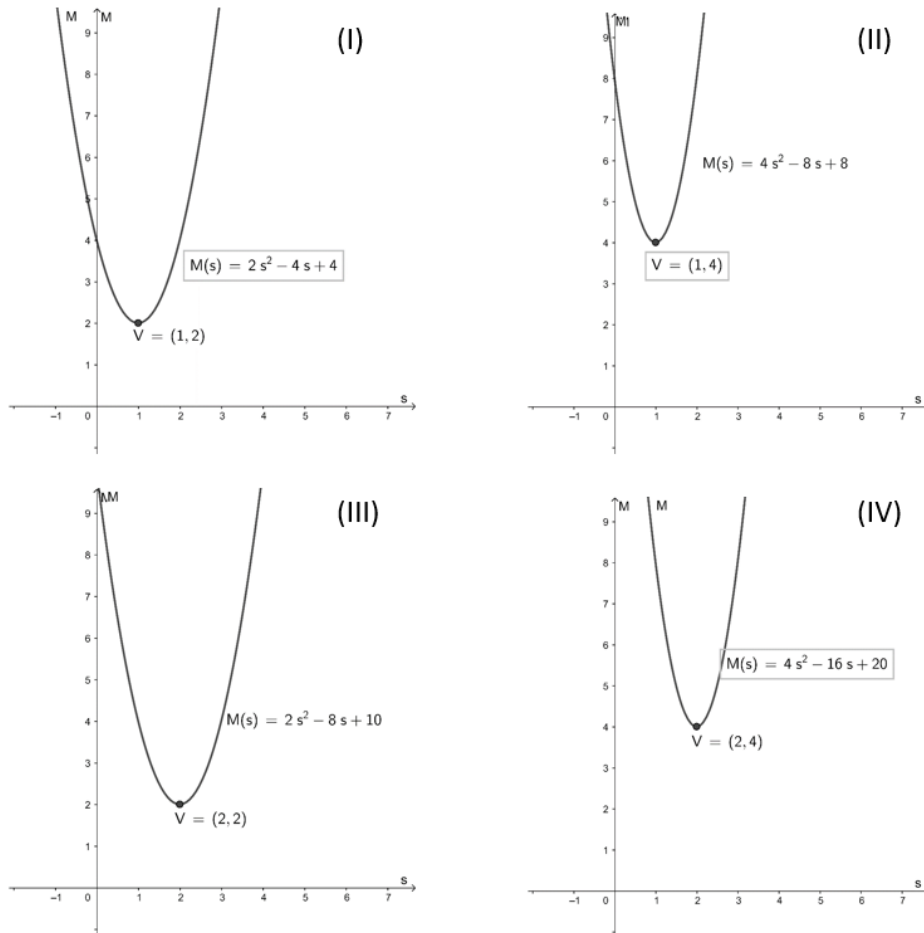


Figura 13 – Gráficos de todas as possíveis fontes dada um medição (x, G) , (I): $(1, 2)$, (II): $(1, 4)$, (III): $(2, 2)$ e (IV): $(2, 4)$.

Das soluções s_1 e s_2 , vemos que o termo $\frac{M-G}{G} > 0$ quando $M > G$. Neste caso, s_1 e s_2 são números reais distintos e simétricos em relação a x , o que nos leva a concluir que duas possíveis localização para a fonte explicam a medição.

Se $M = G$, então a força vertical é a força resultante. Podemos notar que neste caso, o termo $\frac{M-G}{G} = 0$ e $s_1 = s_2 = x$. Portanto, a fonte é unicamente determinada e fica exatamente abaixo do local de medição.

Para $M < G$, o termo $\frac{M-G}{G} < 0$ e não existem s_1 e s_2 reais. Logo, nenhuma fonte de massa efetiva M pode explicar a medição dada.

A explicação também pode ser geométrica, quando $M > G$, a reta $y = M$ cruza a parábola em dois pontos, simétricos em relação ao vértice x ; quando $M = G$, a reta $y = M$ cruza a parábola apenas no vértice, indicando que a solução é única e que $s = x$; e, quando $M < G$, a reta $y = M$ não cruza a parábola, não havendo solução.

- 5) **(Pergunta)** Suponha que em dois locais distintos, $x_1 \neq x_2$, seja medida a mesma força gravitacional, isto é, as medições são (x_1, G) e (x_2, G) . Qual é a localização da fonte?

Resolução: Da Eq. (5.8), substituímos as medições

$$\begin{cases} M(s) = Gs^2 - 2x_1Gs + G + G(x_1)^2, \\ M(s) = Gs^2 - 2x_2Gs + G + G(x_2)^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$-2x_1Gs + G(x_1)^2 + 2x_2Gs - G(x_2)^2 = 0$$

$$(x_2G - x_1G)2s = G(x_2)^2 - G(x_1)^2$$

$$2s = \frac{G[(x_2)^2 - (x_1)^2]}{G(x_2 - x_1)}$$

$$2s = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$s = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Portanto, a fonte se encontra exatamente no meio, entre os locais das medições. A Figura 14 ilustra essa conclusão.

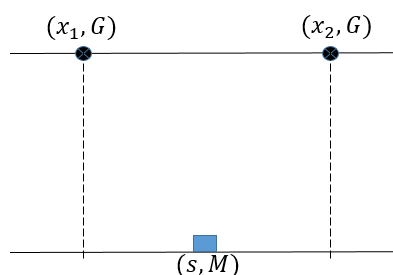


Figura 14 – Fonte no fundo do rio, localizada a partir de duas medições com mesma força gravitacional.

- 6) **(Exercício)** Encontre todas as fontes (s, M) que podem explicar ambas as medições $(0, 1)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$.

Resolução: Neste exercício, nota-se que as forças verticais efetivas são diferentes em cada observação, portanto para encontrar as fontes (s, M) vamos resolver o sistema,

$$\begin{cases} M(s) = 1s^2 - 2(0)(1)s + 1 + 1(0^2) = s^2 + 1, \\ M(s) = 2s^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(2)s + 2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2s^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}s + 3. \end{cases}$$

A solução obtida é $s = \sqrt{2}$ e $M = 3$. Portanto a fonte $(\sqrt{2}, 3)$ é única, como representado no gráfico da Figura 15.

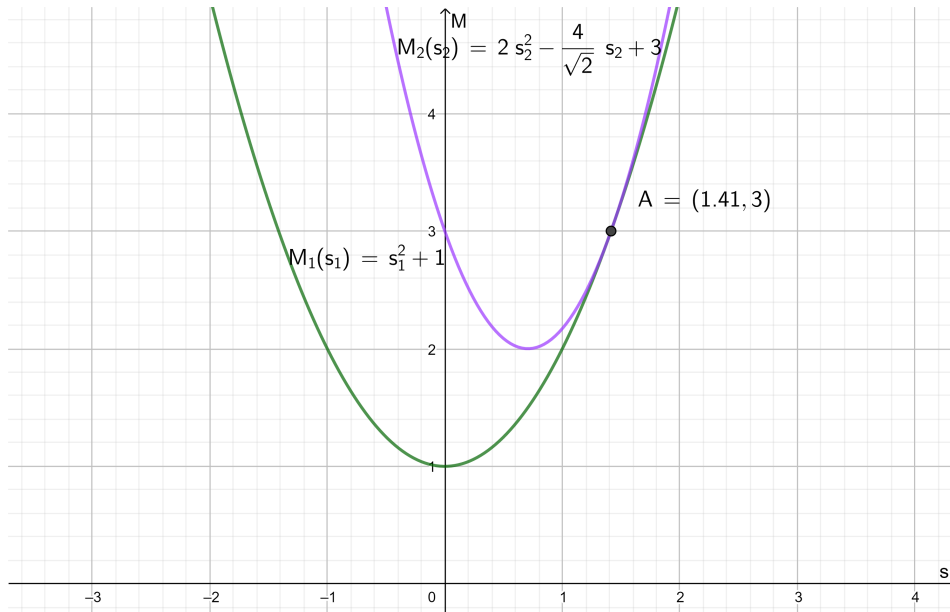


Figura 15 – Fonte única $(\sqrt{2}, 3)$, representada pelo único ponto de intersecção A dos gráficos $M_1(s_1) = (s_1)^2 + 1$ e $M_2(s_2) = 2(s_2)^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}s_2 + 3$.

- 7) **(Pergunta)** É $\{(0, 1), (2, 6)\}$ um possível par de medições? Em outras palavras, existe uma única fonte (s, M) que pode gerar ambas medições $(0, 1)$ e $(2, 6)$?

Resolução: Procedendo como na Atividade 6), resolvemos o sistema de equações formado pela Eq. (5.8) com os valores dados em cada medição. Assim,

$$\begin{cases} M(s) = 1s^2 - 2(0)(1)s + 1 + 1(0^2) = s^2 + 1, \\ M(s) = 6s^2 - 2(2)(6)s + 6 + 6(2^2) = 6s^2 - 24s + 30. \end{cases}$$

Igualando as equações, obtemos a equação do segundo grau $5s^2 - 24s + 29 = 0$, que possui $\Delta = -4$. Como $\Delta < 0$, concluímos que com esse par de medições não é possível encontrar a fonte (s, M) , como representado no gráfico da Figura 16.

- 8) **(Exercício)** Encontre todas as fontes que podem explicar o par de medições $\{(0, 1), (1, 2)\}$.

Resolução: Procedendo como nas Atividades 6) e 7), construímos uma equação para cada medição, obtendo o sistema

$$\begin{cases} M(s) = 1s^2 - 2(0)(1)s + 1 + 1(0^2) = s^2 + 1, \\ M(s) = 2s^2 - 2(1)(2)s + 2 + 2(1^2) = 2s^2 - 4s + 4. \end{cases}$$

Igualando as equações, obtemos a equação do segundo grau $s^2 - 4s + 3 = 0$, de onde obtemos duas soluções, $s_1 = 1$ e $s_2 = 3$, com respectivos valores para a massa efetiva $M_1 = 2$ e $M_2 = 10$. Portanto, existem duas possibilidades para a fonte, $(1, 2)$ e $(3, 10)$, como representado no gráfico da Figura 17.

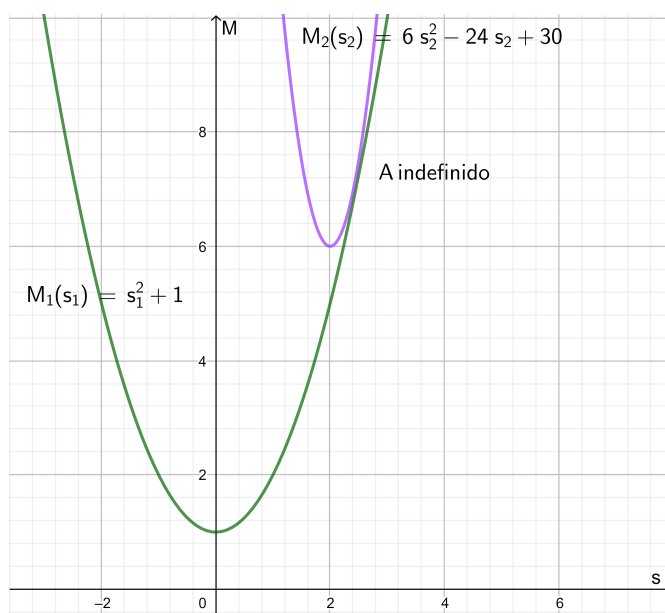


Figura 16 – Fonte indefinida, portanto não há ponto de intersecção dos gráficos $M_1(s_1) = (s_1)^2 + 1$ e $M_2(s_2) = 6(s_2)^2 - 24s_2 + 30$.

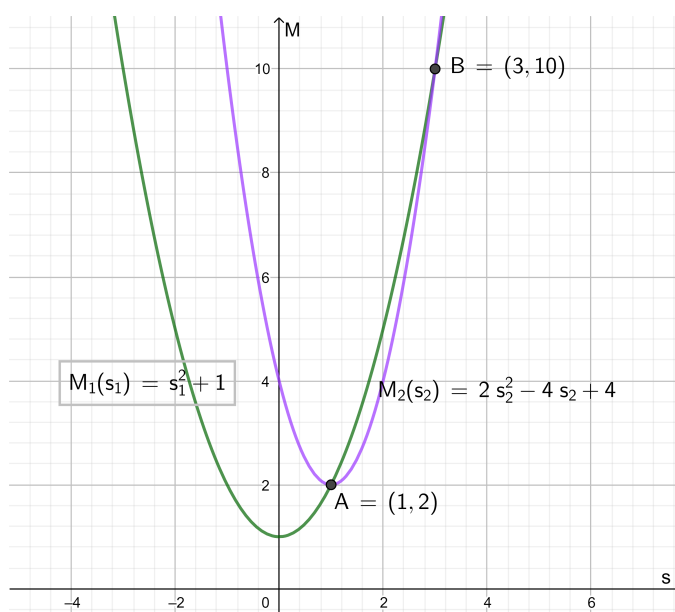


Figura 17 – Duas possibilidades para fonte (1, 2) e (3, 10), portanto há dois pontos de intersecção A e B dos gráficos $M_1(s_1) = (s_1)^2 + 1$ e $M_2(s_2) = 2(s_2)^2 - 4s_2 + 4$.

- 9) **(Cálculo)** Construa o gráfico da curva fonte, $M(s)$, de medição (1, 12; 2, 7). Nos mesmos eixos, plote a curva fonte de medição (3, 1; 4, 89). Estime as fontes (posição e massa efetiva) que dão origem a essas medições.

Resolução: A Figura 18 mostra, em linha contínua, o gráfico de $M_1(s)$ que corresponde à medição (1, 12; 2, 7) e, em linha tracejada, o gráfico de $M_2(s)$ que corresponde à medição (3, 1; 4, 89).

No gráfico, observamos dois pontos de intersecção, A e B . Eles indicam que existem duas

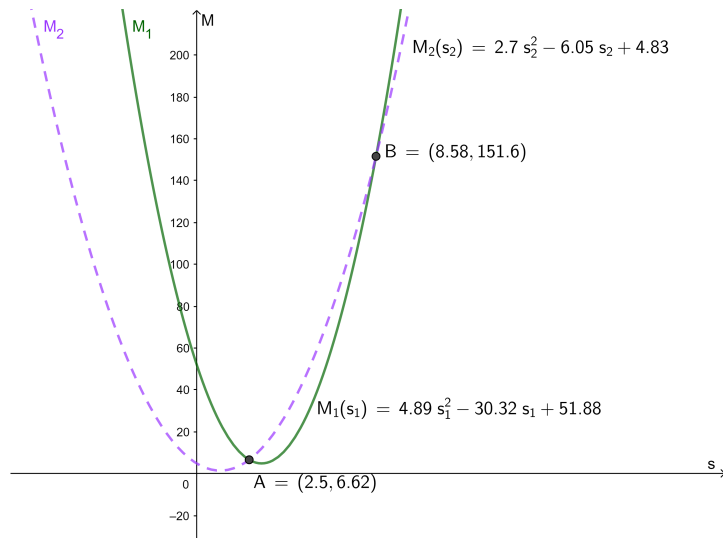


Figura 18 – Gráficos indicando as possíveis fontes para cada medição $(1, 12; 2, 7)$ (linha contínua) e $(3, 1; 4, 89)$ (linha tracejada).

possibilidades para a fonte.

- 10) **(Cálculo)** Estimar todas as fontes que podem gerar as medições $(-1, 1; 2, 2)$ e $(0, 9; 8, 9)$.

Resolução: Substituindo cada medição na Eq. 5.8, obtemos o sistema,

$$\begin{cases} M_1(s) = 2,2(s_1)^2 + 4,84s_1 + 4,862 \\ M_2(s) = 8,9(s_2)^2 - 16,02s_2 + 16,109. \end{cases}$$

Com o auxílio do software GeoGebra, foram construídos os gráficos de $M_1(s)$ e $M_2(s)$, originados das medições $(-1, 1; 2, 2)$ e $(0, 9; 8, 9)$, respectivamente, conforme mostra a Figura 19. Os pontos A e B são os pontos de intersecção que indicam duas possibilidades para a fonte, $(0, 69; 9, 28)$ e $(2, 42; 29, 45)$, ou seja, ou a fonte está em $s = 0, 69$ e possui massa efetiva $M = 9, 28$ ou está em $s = 2, 42$ e possui $M = 29, 45$.

- 11) **(Cálculo)** As medições $(1, 2; 3, 4)$, $(-2, 1; 1, 1)$ e $(3, 07; 2, 7)$ são consistentes? Em outras palavras, existe uma fonte (s, M) que gera essas medições?

Resolução: Formando as três equações, $M_1(s)$, $M_2(s)$ e $M_3(s)$ geradas pelas medições $(1, 2; 3, 4)$, $(-2, 1; 1, 1)$ e $(3, 07; 2, 7)$, respectivamente, temos,

$$\begin{cases} M_1(s) = 3,4(s_1)^2 - 8,16s_1 + 8,296 \\ M_2(s) = 1,1(s_2)^2 + 4,62s_2 + 5,951 \\ M_3(s) = 2,7(s_3)^2 - 16,578s_3 + 28,14723 \end{cases}$$

Ao construir os três gráficos no GeoGebra, verificou-se que não há nenhum ponto em que as três parábolas se interseptam simultaneamente, conforme mostra a Figura 20. Foram destacados os pontos de intersecção a cada duas parábolas, como os pontos A = $(0, 19; 6, 87)$ e B $(5, 37; 62, 42)$ que correspondem as intersecções de M_1 e M_2 , os pontos

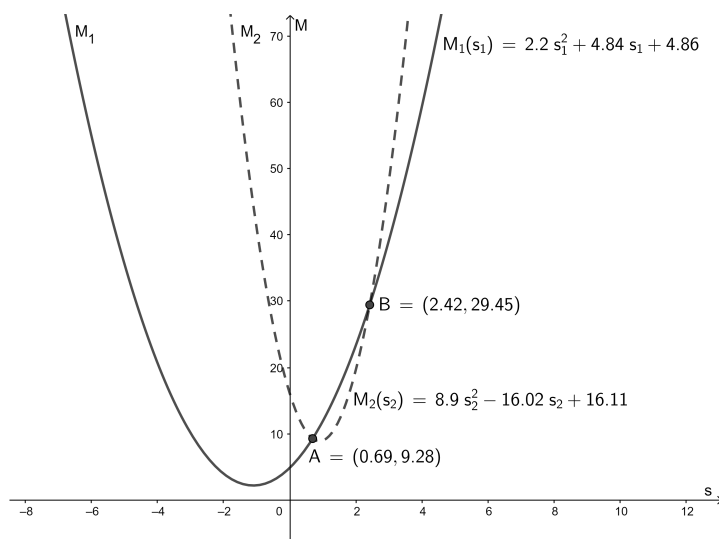


Figura 19 – Intersecção das parábolas em dois pontos.

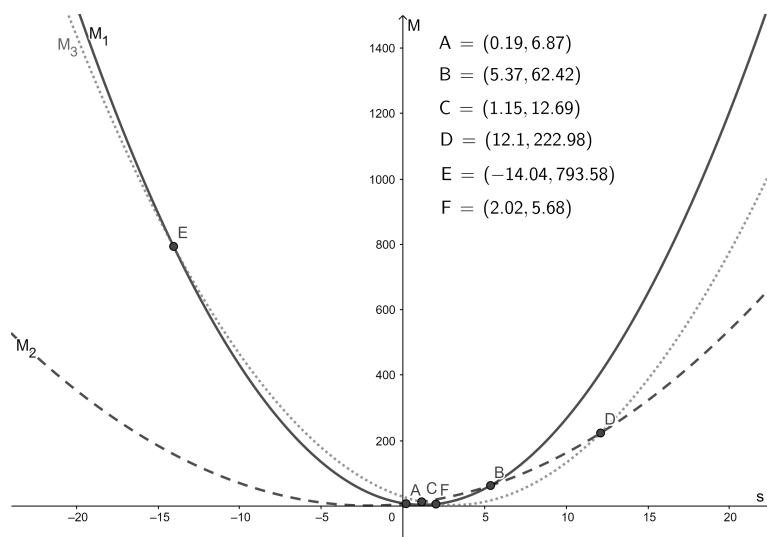


Figura 20 – Ausência de intersecção entre as três parábolas.

$C = (1, 15; 12, 69)$ e $D = (12, 1; 222, 98)$ às intersecções de M_2 e M_3 , assim como os pontos $E = (-14, 04; 793, 58)$ e $F = (2, 02; 5, 68)$ às intersecções de M_1 e M_3 .

Podemos pensar aqui que o conjunto de medição é inconsistente porque não veio de uma mesma fonte ou porque estão contaminados com ruídos ou erros experimentais. Um conjunto de medições consistente é, por exemplo, $\{(1, 2; 3, 4), (-2, 1; 1, 1), (3, 07; 0, 74)\}$, que determina unicamente a fonte $(0, 19; 6, 87)$.

- 12) **(Pergunta)** Qual é o maior número de possibilidade de fontes que pode explicar um conjunto de duas ou mais medições em locais distintos?

Resolução: Cada medição gera infinitas possibilidades para determinar a fonte (s, M) . O conjunto de todas as possibilidades tem como gráfico uma parábola. Assim, com uma única informação, são infinitas possibilidades de fonte.

Já duas medições distintas têm como gráficos duas parábolas distintas. Qualquer par dessas parábolas pode se cruzar no máximo em dois pontos. Assim, são no máximo duas possibilidades de fonte.

Para três medições ou mais, se o conjunto de medições for consistente, temos apenas uma possibilidade. E, neste caso conseguimos determinar a fonte.

13) **(Problema)** Encontre condições em medições distintas (x_1, G_1) e (x_2, G_2) , para as quais:

- As medições são inconsistentes,
- As medições determinam uma fonte única, ou
- As medições podem ser explicadas por duas fontes distintas.

Resolução: As medições (x_1, G_1) e (x_2, G_2) geram o sistema

$$\begin{cases} M(s) = G_1 s^2 - 2x_1 G_1 s + G_1 + G_1 (x_1)^2, \\ M(s) = G_2 s^2 - 2x_2 G_2 s + G_2 + G_2 (x_2)^2. \end{cases} \quad (5.9)$$

Subtraindo as equações, obtemos

$$(G_2 - G_1)s^2 - 2(x_2 G_2 - x_1 G_1)s + G_2 - G_1 + G_2(x_2)^2 - G_1(x_1)^2 = 0, \quad (5.10)$$

de onde podemos calcular

$$\begin{aligned} \Delta &= [-2(x_2 G_2 - x_1 G_1)]^2 - 4(G_2 - G_1)(G_2 - G_1 + G_2(x_2)^2 - G_1(x_1)^2), \\ &= 4[G_1 G_2 (x_1 - x_2)^2 - (G_1 - G_2)^2]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim, para $\bar{\Delta} = G_1 G_2 (x_1 - x_2)^2 - (G_1 - G_2)^2$,

- se $\bar{\Delta} < 0$, então as medições são inconsistentes;
 - se $\bar{\Delta} = 0$, então as medições determinam unicamente a fonte; e
 - se $\bar{\Delta} > 0$, então as medições mostram duas possibilidades para a fonte.
- 14) **(Problema)** Suponha que duas medições com $G_1 \neq G_2$ determinem unicamente uma fonte (s, M) . Mostre o seguinte
- A distância entre os locais de observação é

$$|x_1 - x_2| = \frac{|G_1 - G_2|}{\sqrt{G_1 G_2}}.$$

Resolução: Da Eq. (5.11), com $\Delta = 0$, para determinar unicamente uma fonte (s, M) , consideramos

$$\begin{aligned} G_1 G_2 (x_1 - x_2)^2 &= (G_1 - G_2)^2, \\ (x_1 - x_2)^2 &= \frac{(G_1 - G_2)^2}{G_1 G_2}, \\ |x_1 - x_2| &= \frac{|G_1 - G_2|}{\sqrt{G_1 G_2}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

b) A fonte está localizada em

$$s = \frac{G_1 x_1 - G_2 x_2}{G_1 - G_2}. \quad (5.13)$$

Resolução: Voltando à Eq. (5.10), o valor de s , considerando $\Delta = 0$, é

$$s = \frac{x_2 G_2 - x_1 G_1}{G_2 - G_1}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por -1 encontramos a forma que se pede.

c) A massa efetiva é

$$M = G_1 + G_2. \quad (5.14)$$

Resolução: Substituindo a Eq. (5.13) em uma das equações do sistema (5.9), por exemplo na primeira equação, obtemos

$$M = G_1 \left(\frac{x_1 G_1 - x_2 G_2}{G_1 - G_2} \right)^2 - 2x_1 G_1 \left(\frac{x_1 G_1 - x_2 G_2}{G_1 - G_2} \right) + G_1 + G_1 (x_1)^2.$$

Desenvolvendo a equação e reduzindo a um mesmo denominador, obtemos

$$M = \frac{G_1 (G_2)^2 (x_1 - x_2)^2 + G_1 (G_1 - G_2)^2}{(G_1 - G_2)^2}. \quad (5.15)$$

No item a) desta atividade, demonstramos a Eq. (5.12), que ao substituir em (5.15) e simplificar, chegamos ao que foi pedido.

Para exemplificar, voltamos às Atividades 6) - 8). Em 7), as medições são $(0, 1)$ e $(2, 6)$, que de acordo com a condição da Atividade 13), $\bar{\Delta} = 1(6)(0 - 2)^2 - (1 - 6)^2 = -1 < 0$. De onde concluímos que as medições são inconsistentes.

Em 8), as medições utilizadas são $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Logo, $\bar{\Delta} = 1(2)(0 - 1)^2 - (1 - 2)^2 = 1 > 0$ e as medições fornecem duas soluções.

Já em 6) as medições utilizadas são $(0, 1)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$, para as quais, $\bar{\Delta} = 1(2)\left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1 - 2)^2 = 0$ e, portanto, determinam unicamente a fonte. Neste caso, usando (5.13) e (5.14),

$$s = \frac{1(0) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 - 2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad M = 1 + 2 = 3.$$

5.3 Considerações

Localizar uma pepita no fundo de um rio, sem se molhar é o objetivo principal desse caso. A pepita de ouro, denominada fonte, repousa no fundo de um rio, tem massa m e está localizada a uma distância horizontal s de um ponto de referência. Um dispositivo de medição que está localizado na superfície do rio a uma distância horizontal x do mesmo referencial, mede

a força gravitacional μ exercida pela fonte. Assim, o problema direto consiste em dados s , m e x , calcular μ por meio da fórmula

$$\mu = \gamma m [1 + (s - x)^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

Em termos de massa M e força efetiva G , a equação acima se torna

$$G = \frac{M}{1 + (s - x)^2}.$$

O problema inverso estudado consiste em determinar simultaneamente duas incógnitas s e M , isto é, a localização e a massa efetiva da fonte. Com isso, conseguimos alcançar o objetivo de localizar a pepita no fundo do rio sem se molhar. Em termos de formulação,

$$s = x \pm \sqrt{\frac{M - G}{G}} \quad \text{e} \quad M(s) = Gs^2 - 2xGs + G + Gx^2.$$

Essa formulação já é apresentada nas Atividades 1) e 2), onde também fica clara a dificuldade em termos de existência e unicidade de solução.

A Atividade 3) introduz um raciocínio gráfico de que o gráfico da função $M(s)$ é uma parábola com vértice e foco que dependem da medição (x, G) . É importante observar que tomando uma única medição, existem infinitas combinações de s e M para a fonte. Na Atividade 4), observamos que se a massa efetiva M for conhecida, as possibilidades se restringem e que há unicidade de solução se conseguirmos encontrar o local em que $G = M$. Neste caso, a fonte está localizada exatamente abaixo do dispositivo de medição.

Na Atividade 5), verificou-se que se encontrarmos dois lugares distintos em que o dispositivo detecta a mesma força gravitacional, a pepita está localizada no ponto médio entre os dois lugares.

Nas Atividades 6) - 8), são tomadas duas medições. Na primeira atividade, as duas medições conseguem determinar unicamente a fonte. Na segunda, as duas medições não retornam resultado. Na terceira, retornam duas possibilidades para a fonte, sem conseguir dizer qual é a verdadeira.

Avançando para as Atividades 13) - 14), estudamos as condições impostas sobre duas medições para que se tenha uma, duas ou nenhuma solução. Aplicando esses conceitos nas Atividades 6) - 8), conseguimos uma explicação matemática para as respostas obtidas. Em particular, sob as condições que determinam unicamente a fonte, Eq. (5.12), existem fórmulas para calcular a posição e a força efetiva dela, Eqs. (5.13) e (5.14).

Com as Atividades 9) - 12), que envolveram construção gráfica e cálculos utilizando o software GeoGebra os objetivos de integrar o raciocínio físico e gráfico e empregar calculadora gráfica foram alcançados.

Da Atividade 11) podemos observar que se tivermos duas medições consistentes que fornecem duas soluções, podemos realizar uma terceira medição para determinarmos qual das duas soluções é de fato a fonte procurada.

Para fins de aplicações práticas, na presença de ruídos ou erros nas medidas experimentais, as medições são sempre inconsistentes. O que se faz nesse caso é efetuar diversas medições do mesmo problema (medidas redundantes) e utilizar uma técnica de otimização para encontrar uma solução aproximada para a fonte. Diante das considerações, concluímos que o problema inverso proposto nesse caso foi solucionado.

PROBLEMA INVERSO DE DETERMINAR AS “JOGADAS DE TABELA” EM UM JOGO DE SINUCA

Este caso é baseado no problema *Snookered* de [Groetsch \(1999\)](#) e possui as seguintes orientações.

Nível: pré-cálculo (álgebra, geometria euclidiana);

Objetivos: Explorar alguns problemas de dispersão inversa;

Base matemática: geometria euclidiana, retas;

Base científica: princípio da reflexão;

Tecnologia: calculadora gráfica.

6.1 Descrição

Os jogos de bilhar, jogos com bolas e tacos sobre uma mesa, são populares ao redor do mundo e possui variações como o *snooker*, o bilhar inglês e a sinuca brasileira. Cada um possui suas regras e campeonatos. Há ainda os jogos de bares, salões e clubes como o mata-mata e o bola 8.

O bilhar foi um jogo popular entre os oficiais do Exército Britânico colocados na Índia, na segunda metade do século XIX. Neste período, foram criadas regras e as variantes mais tradicionais dos jogos de bilhar. O termo sinuca é um abasileiramento do termo inglês *snooker*, modalidade do jogo introduzida no Brasil a partir de 1889 ([Portal São Francisco, 2020](#)).

Na maioria dos jogos, as partidas são disputadas por dois ou mais jogadores que se alternam nas jogadas. As jogadas consistem em bater com o taco na bola branca em direção a uma das bolas coloridas, chamada “bola da vez” ou “bola alvo”. O objetivo do jogo é encaçapar as bolas alvos em uma determinada sequência. No entanto, os pontos não provêm só das bolas encaçapadas, mas também da perda de pontos do adversário quando este não consegue acertar a bola branca na bola alvo.

Um jogador é *snookered* (verbo derivado de *snooker*) quando o adversário habilmente faz uma jogada que leva uma bola colorida qualquer entre a branca e a alvo, forçando-o a fazer uma “jogada de tabela”. Nesta jogada, a bola branca é conduzida para a lateral da mesa de tal forma que a bola alvo seja atingida no rebote.

Neste estudo, tratamos de alguns problemas de dispersão inversa elementares sugeridos pela jogada de tabela dos jogos de bilhar. O princípio físico que fundamenta esta situação é o da reflexão: o ângulo que o trajeto incidente faz com a reta normal à curva refletora é congruente (tem mesma medida) ao ângulo que o trajeto refletido faz com a normal, conforme (ALMEIDA, 2020). A Figura 21 ilustra o princípio da reflexão.

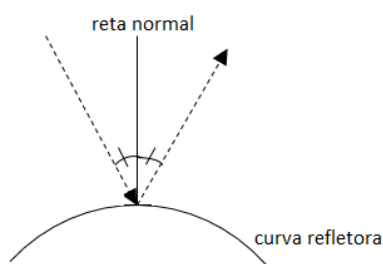


Figura 21 – Princípio da reflexão: trajetória incidente e refletiva formando ângulos congruentes com a reta normal.

O princípio de reflexão, neste estudo de caso, é baseado em uma versão idealizada da realidade na qual assumimos que a velocidade da bola é constante ao longo de seu trajeto e esse trajeto, tanto o emitido quanto o refletido, é retilíneo. Assumimos ainda que a bola rola sem deslizar, que as colisões entre as bolas ocorrem no centro das duas (não há “jogada com efeito”) e que não há atrito, resistência do ar e imperfeições da mesa. Não consideramos a força da tacada e a velocidade constante da bola é indiferente. Muitos outros estudos podem surgir se algumas dessas restrições fossem retiradas.

O problema direto estudado é o de determinar o trajeto refletido a partir do conhecimento das posições das bolas branca e alvo e da curva refletora. Com essas informações, podemos calcular o ângulo de incidência, o ponto de impacto e o trajeto refletido. Esquemáticamente temos,

causa		modelo		efeito
conhecendo as posições das bolas branca e alvo e a curva refletora	→	Princípio da reflexão	→	determinar o ponto de impacto e o trajeto refletido ?

Dois problemas inversos são considerados. O primeiro é o de determinar as possíveis posições da bola branca para que em uma jogada de tabela, ela atinja a bola alvo, a partir do conhecimento da posição da bola alvo, da curva refletora e do trajeto refletido, conforme o esquema

causa		modelo		efeito
conhecendo a curva refletora e a posição da bola alvo, determinar as possíveis posições para a bola branca	→	Princípio da reflexão	→	conhecendo o trajeto refletido ?

No segundo, supomos que a lateral da mesa não possa ser vista (o livro faz o seguinte comentário: “os locais de jogos são bastante escuros com a fumaça do tabaco!”). Assim, o problema inverso é enunciado como o de determinar a curva dispersora e o ponto de impacto, a partir da observação da posição inicial e do ângulo de saída do trajeto incidente de uma única bola (bola branca), assim como da sua posição final e do ângulo de chegada ao alvo, conforme o esquema

causa		modelo		efeito
conhecendo a posição e o ângulo, de lançamento da bola branca, determinar a curva dispersora e o ponto de impacto	→	Princípio da reflexão	→	conhecendo a posição e o ângulo de chegada da bola branca ?

Para estudar o primeiro problema inverso, consideramos uma mesa de bilhar quadrada de lado unitário. Situamos a mesa em um sistema cartesiano com o canto esquerdo inferior na origem. As curvas refletoras são as quatro laterais da mesa, ou seja, as retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

As posições das bolas são representadas por pontos do conjunto $\{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$. De forma geral, a bola branca é indicada por $B(x_1, y_1)$ e a bola alvo, por $A(x_2, y_2)$, sendo $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. A Figura 22 ilustra a situação.

Para estudar o segundo problema inverso, consideramos que a bola branca é lançada da origem do sistema cartesiano em direção ao primeiro quadrante em um ângulo θ para o eixo x positivo. A bola segue uma direção e pode ou não retornar, caso retorne, ela intercepta o eixo x na posição $r(\theta)$. A curva dispersora não é necessariamente uma reta. A Figura 23 ilustra a situação.

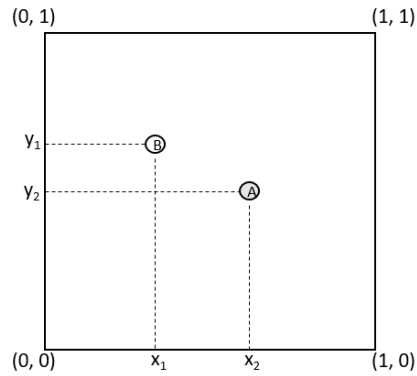


Figura 22 – Mesa de bilhar com as bolas: branca B na posição (x_1, y_1) e alvo A na posição (x_2, y_2) .

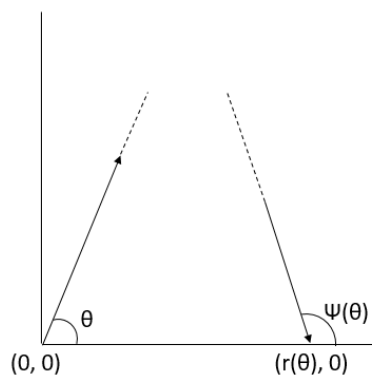


Figura 23 – Jogada em tabela em direção a uma curva refletora desconhecida.

6.2 Atividades

Este estudo de caso está dividido em dez atividades.

- 1) (**Pergunta**) Sejam as bolas branca $B(x_1, y_1)$ e alvo $A(x_2, y_2)$ com $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, quantas jogadas de tabela distintas atingirão a bola alvo?

Resolução: Para o caso em que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, há quatro jogadas de tabela possíveis que acertam a bola alvo, cada jogada em direção a uma das laterais da mesa de bilhar. Veja a ilustração das jogadas na Figura 24.

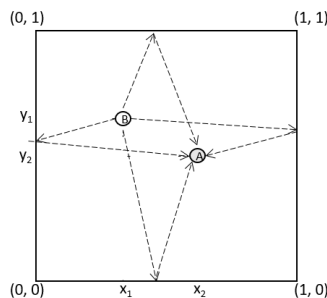


Figura 24 – Quatro possíveis jogadas de tabela acertam a bola alvo, uma em cada lateral da mesa.

- 2) **(Pergunta)** Se $x_1 = x_2$, quantas jogadas na lateral da mesa resultam em um acerto na bola alvo? E se $y_1 = y_2$?

Resolução: Das quatro possibilidades vistas na Atividade 1), uma é excluída pois uma das laterais da mesa está impedida pela própria bola alvo, conforme Figura 25. Portanto temos um total de três jogadas na lateral da mesa que resultam em acerto na bola alvo.

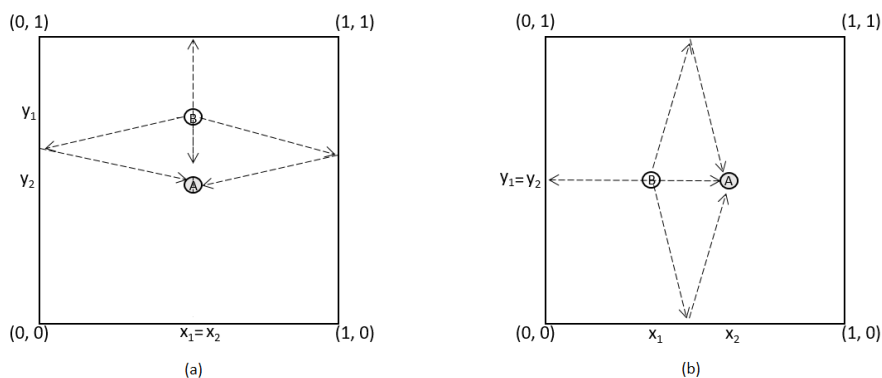


Figura 25 – Três possíveis jogadas em tabela a) quando $x_1 = x_2$ e b) quando $y_1 = y_2$.

- 3) **(Exercício)** Se a bola branca estiver em $B(0, 2, 0, 8)$ e a bola alvo estiver em $A(0, 7, 0, 6)$, encontre os pontos de impacto nas laterais da mesa para os quais as jogadas em tabela correspondentes atingem a bola alvo.

Resolução: Pelo princípio da reflexão, para encontrar os pontos de impacto nas laterais da mesa, primeiramente construímos os pontos simétricos da bola branca em relação a cada lado do quadrado e traçamos uma reta deste ponto a bola alvo. Os pontos de intersecção das retas com o respectivo lado são os pontos de impacto que procuramos.

Na Figura 26, observamos primeiramente a mesa na região em cinza formada pelo quadrado $OLMN$ e as bolas branca $B(0, 2, 0, 8)$ e alvo $A(0, 7, 0, 6)$. O objetivo é encontrar as coordenadas dos pontos de impacto $P_1(p_1, 0)$, $P_2(p_2, 1)$, $P_3(1, p_3)$ e $P_4(0, p_4)$. Para isso, vamos usar conceitos geométricos como simetria, comprimento de segmento de reta e semelhança de triângulos.

Prosseguimos da seguinte forma. Para a lateral inferior, marcamos o ponto $H(0, 2, 0)$ e traçamos a reta BH . O ponto simétrico é aquele que parte de H para o exterior da mesa e cujo comprimento $\overline{HB'} = \overline{BH} = 0,8$, assim obtemos $B'(0, 2, -0,8)$. Em seguida, traçamos a reta $\overline{B'A}$ e marcamos a intersecção dela com a reta OL , que corresponde ao ponto de impacto procurado $P_1(p_1, 0)$, destacamos ainda o ponto $C(0, 2, 0, 6)$, pois possui a mesma abscissa de B e a mesma ordenada de A .

Como $\triangle ACB' \sim \triangle P_1HB'$, pelo critério em que se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes conforme (DOLCE; POMPEU, 1997), ou seja, $B'\hat{C}A \cong B'\hat{H}P_1$ que são ângulos retos e $A\hat{B}'C \cong P_1\hat{B}'H$, pois são ângulos comuns, então seus lados correspondentes são proporcionais, ou seja,

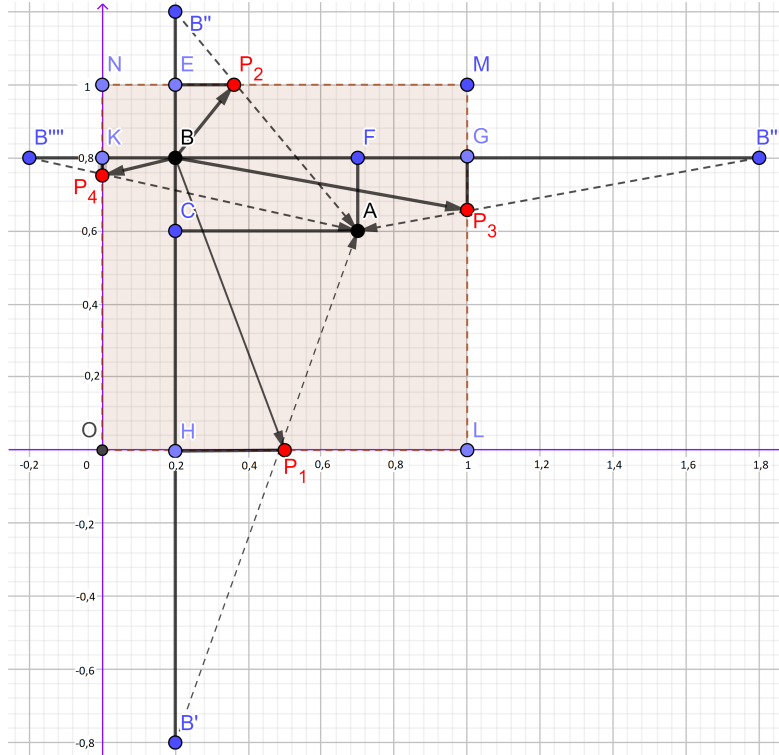


Figura 26 – Pontos de impacto da bola branca nas laterais da mesa: P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , considerando $B(0,2;0,8)$ e $A(0,7;0,6)$

$$\frac{\overline{AC}}{p_1 - 0,2} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'H}},$$

$$\frac{0,5}{p_1 - 0,2} = \frac{1,4}{0,8} \Rightarrow p_1 = \frac{17}{35}.$$

Para a lateral superior, marcamos o ponto $E(0,2,1)$ e utilizando o mesmo raciocínio para obter o valor de p_1 , obtemos o ponto simétrico a B em relação ao ponto E , ou seja, o ponto $B''(0,2,1,2)$, que ao traçarmos o segmento de reta $\overline{B''A}$, obtemos o ponto de impacto $P_2(p_2, 1)$ pela intersecção desse segmento com a lateral superior da mesa. Como $B''\hat{E}P_2 \cong B''\hat{C}A$ e $EB''P_2 \cong CB''A$ então $\triangle B''EP_2 \sim \triangle B''CA$, o que podemos concluir que,

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{EP_2}} = \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''E}},$$

$$\frac{0,5}{p_2 - 0,2} = \frac{0,6}{0,2} \Rightarrow p_2 = \frac{11}{30}.$$

Na lateral direita, destacamos o ponto $G(1,0,8)$ e o ponto simétrico de B em relação a G , ou seja o ponto $B'''(1,8,0,8)$, traçamos esse ponto ao ponto A e obtemos o ponto de impacto $P_3(1, p_3)$ pela intersecção do segmento de reta $\overline{B'''A}$ com a lateral direita da mesa. Destacamos ainda o ponto $F(0,7,0,8)$, por possuir a mesma abscissa de A e mesma

ordenada de B . Por semelhança de triângulos temos $\triangle AFB''' \sim \triangle P_3GB'''$ pelo mesmo critério já estudado, ou seja, $A\hat{F}B''' \cong P_3\hat{G}B'''$ e $FB'''A \cong GB'''P_3$, o que podemos concluir que,

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{GP_3}} = \frac{\overline{FB'''}{\overline{GB'''}}$$

$$\frac{0,2}{0,8 - p_3} = \frac{1,1}{0,8} \Rightarrow p_3 = \frac{36}{55}.$$

Para finalizar, na lateral esquerda, destacamos o ponto $K(0, 0, 8)$ e o ponto simétrico de B em relação a K , ou seja o ponto $B''''(-0, 2, 0, 8)$, traçamos esse ponto ao ponto A e obtemos o ponto de impacto $P_4(0, p_4)$ pela intersecção do segmento de reta $\overline{B''''A}$ com a lateral esquerda da mesa. Por semelhança de triângulos temos $\triangle AFB'''' \sim \triangle P_4KB''''$, pois $A\hat{F}B'''' \cong P_4\hat{K}B''''$ e $FB''''A \cong KB''''P_4$, então,

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{P_4K}} = \frac{\overline{FB''''}}{\overline{KB''''}}$$

$$\frac{0,2}{0,8 - p_4} = \frac{0,9}{0,2} \Rightarrow p_4 = \frac{34}{45}.$$

Portanto os pontos de impacto nas laterais da mesa são: $P_1\left(\frac{17}{35}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{11}{30}, 1\right)$, $P_3\left(1, \frac{36}{55}\right)$ e $P_4\left(0, \frac{34}{45}\right)$.

- 4) **(Problema)** Encontre todos os pontos de impacto na lateral da mesa que correspondem às jogadas de tabela que atingem a bola alvo na Atividade 1).

Resolução: Utilizando do mesmo raciocínio da Atividade 3), ou seja, de conceitos geométricos como simetria, comprimento de segmento de reta e semelhança de triângulos, bem como do conceito físico que envolve as leis de reflexão, com a diferença de que as coordenadas das bolas branca e alvo são gerais, isto é, $B(x_1, y_1)$ e $A(x_2, y_2)$. Vamos resolver de forma algébrica, considerando a Figura 27.

Considerando as coordenadas dos pontos de impacto nas laterais da mesa sendo: $P_1(p_1, 0)$ na lateral inferior, $P_2(p_2, 1)$ na lateral superior, $P_3(1, p_3)$ na lateral direita e $P_4(0, p_4)$ na lateral esquerda, obtemos

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'H}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{P_1H}},$$

$$\frac{y_1 + y_2}{y_1} = \frac{x_2 - x_1}{p_1 - x_1} \Rightarrow p_1 = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2}; \quad (6.1)$$

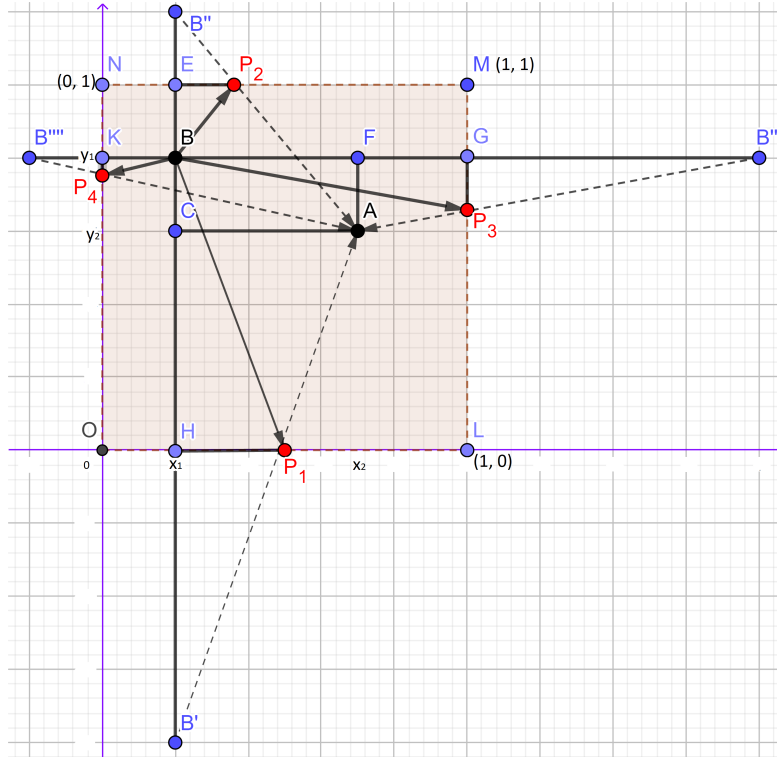


Figura 27 – Pontos de impacto da bola branca nas laterais da mesa: P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , considerando $B(x_1, y_1)$ e $A(x_2, y_2)$.

$$\frac{\overline{B''C}}{\overline{B''E}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{P_2E}},$$

$$\frac{1 - y_1 + 1 - y_2}{1 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{p_2 - x_1} \Rightarrow p_2 = \frac{x_1(1 - y_2) + x_2(1 - y_1)}{2 - (y_1 + y_2)}; \quad (6.2)$$

$$\frac{\overline{B'''F}}{\overline{B'''G}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{GP_3}},$$

$$\frac{1 - x_1 + 1 - x_2}{1 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - p_3} \Rightarrow p_3 = \frac{y_1(1 - x_2) + y_2(1 - x_1)}{2 - (x_1 + x_2)}; \quad (6.3)$$

$$\frac{\overline{B''''F}}{\overline{B''''K}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{KP_4}},$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - p_4} \Rightarrow p_4 = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2}. \quad (6.4)$$

Portanto os pontos de impacto nas laterais são dados por

$$P_1 \left(\frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2}, 0 \right), P_2 \left(\frac{x_1(1 - y_2) + x_2(1 - y_1)}{2 - (y_1 + y_2)}, 1 \right), P_3 \left(1, \frac{y_1(1 - x_2) + y_2(1 - x_1)}{2 - (x_1 + x_2)} \right) \text{ e}$$

$$P_4 \left(0, \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} \right).$$

Observe que se $x_1 = x_2 = x$, os pontos de impactos em cada lateral são,

$P_2(x, 1)$, pois, conforme Eq. (6.2), temos $p_2 = \frac{x[2 - (y_1 + y_2)]}{2 - (y_1 + y_2)} \Rightarrow p_2 = x$,

$P_3\left(1, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, pois, conforme Eq. (6.3), temos $p_3 = \frac{(1-x)(y_1 + y_2)}{2(1-x)} \Rightarrow p_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$,

$P_4\left(0, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, pois, conforme Eq. (6.4), temos $p_4 = \frac{x(y_1 + y_2)}{2x} \Rightarrow p_4 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

E se $y_1 = y_2 = y$, os pontos de impactos em cada lateral são,

$P_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$, pois, conforme Eq. (6.1), temos $p_1 = \frac{y(x_1 + x_2)}{2y} \Rightarrow p_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

$P_2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 1\right)$, pois, conforme Eq. (6.2), temos $p_2 = \frac{(1-y)(x_1 + x_2)}{2(1-y)} \Rightarrow p_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

$P_3(1, y)$, pois, conforme Eq. (6.3), temos $p_3 = \frac{y[2 - (x_1 + x_2)]}{2 - (x_1 + x_2)} \Rightarrow p_3 = y$,

- 5) **(Problema)** Suponha que a bola alvo esteja em $(0, 8, 0, 5)$ e que alguém deseje afundá-la na caçapa do canto $(1, 0)$ fazendo uma única tabela. Isso pode ser feito se a bola branca estiver na posição $(0, 2, 0, 3)$?

Resolução: Para a bola branca $B(0, 2, 0, 3)$ acertar a bola alvo $A(0, 8, 0, 5)$ em uma jogada de tabela, de forma que a bola alvo se desloque na direção do canto $L(1, 0)$, a única lateral da mesa possível é a superior, onde o ponto de impacto é denominado $P_2(p_2, 1)$. A ideia é verificar se os três pontos P_2 , A e L estão alinhados.

Utilizando a Eq. (6.2), calculamos

$$p_2 = \frac{0,2(1 - 0,5) + 0,8(1 - 0,3)}{2 - (0,3 + 0,5)} \Rightarrow p_2 = 0,55,$$

ou seja, o ponto de impacto é $P_2(0,55, 1)$.

Para verificarmos o alinhamento dos três pontos, calculamos o determinante, conforme (RIGONATTO, 2020), ou seja, se o resultado do determinante, dadas suas coordenadas, se igualar a zero conclui-se que os três pontos são colineares, o que não ocorreria se fosse diferente de zero, pois nesse caso teríamos a presença de um triângulo em um plano e não de uma reta.

$$\begin{vmatrix} 0,55 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0,025 \neq 0$$

Portanto, os pontos não estão alinhados e não é possível acertar a caçapa. Para ilustrar a situação, a Figura 28 mostra que a bola alvo colide no ponto D na lateral direita da mesa.

- 6) **(Problema)** Encontre todas as posições possíveis para a bola branca que resultem, após uma única jogada de tabela, em colocar da bola alvo da Atividade 5) na caçapa de canto $(1, 0)$.

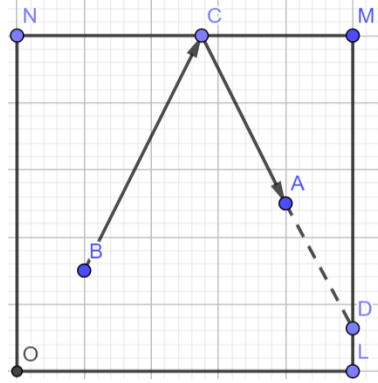


Figura 28 – Tentativa de acertar a caçapa L e colisão com mesa no ponto D .

Resolução: Para que ocorra essa situação, ilustrada na Figura 29, precisamos descobrir o ponto de impacto $P_2(p_2, 1)$. Neste caso, a bola branca poderá ocupar qualquer posição do segmento de reta $\overline{DP_2}$.

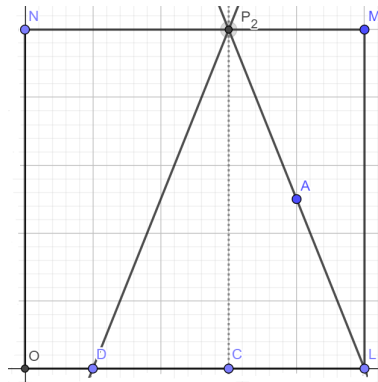


Figura 29 – Possíveis posições para bola branca, ao longo do segmento $\overline{DP_2}$, para acertar a bola A na caçapa L .

Em outras palavras, queremos encontrar p_2 de tal forma que P_2 , A e L estejam alinhados. Dessa forma calculamos o valor de p_2 pelo determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,5 & 1 \\ p_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p_2 = 0,6.$$

Agora, precisamos da equação que descreve os pontos do segmento de reta $\overline{DP_2}$. Pela congruência dos ângulos dos trajetos incidente e refletido em relação à reta normal à curva refletora, calculamos o ponto simétrico de $L(1,0)$ em relação ao ponto $C(0,6,0)$, ou seja, $D(0,2,0)$. Considerando as coordenadas gerais da bola branca $B(x_1, y_1)$, calculamos a relação entre y_1 e x_1 considerando que os três pontos B , C e D devem estar alinhados. Assim,

$$\begin{vmatrix} 0,6 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 0,2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de onde concluímos que o segmento de reta tem equação $y_1 = 2,5x_1 - 0,5$, para $0,2 \leq x_1 < 0,6$. Portanto, a bola branca deve ter coordenadas do tipo $B(x_1, 2,5x_1 - 0,5)$ para $0,2 \leq x_1 < 0,6$.

Vamos tratar agora do segundo problema inverso.

- 7) (**Pergunta**) Uma bola branca é lançada da origem para o primeiro quadrante em um ângulo θ em relação ao eixo x positivo. A bola segue uma direção e retorna para interceptar o eixo x na posição $r(\theta) > 0$, com a trajetória de retorno feita com o ângulo $\psi(\theta)$ com o eixo x , conforme a Figura 23. Sabendo que a curva refletora é uma reta, como ela pode ser identificada?

Resolução: Nota-se que o enunciado informa que se trata de uma reta refletora, vamos chamá-la h .

A Figura 30 nos auxilia na compreensão. Construimos o segmento BC' que representa a trajetória incidente e $C'A$ a trajetória refletida pela reta dispersora. Em seguida rotacionamos a trajetória refletida sobre a incidente, para obtermos o ponto A' simétrico de A em relação a reta normal, que foi construída a partir da reta perpendicular a que passa por $A'A$, denominada na Figura 30 por reta g . Portanto a reta g é paralela a reta h , consequentemente possuem a mesma inclinação α .

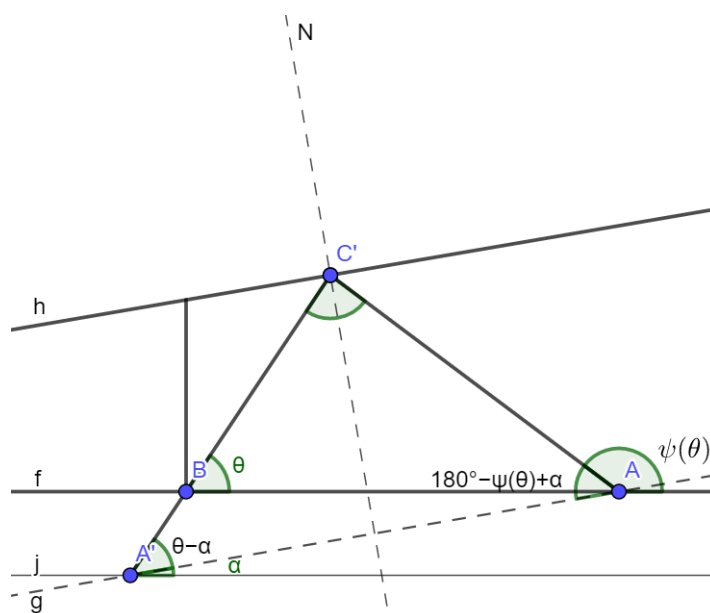


Figura 30 – Reconstrução da reta refletora h .

Como $\overline{C'A'} \cong \overline{C'A}$, o triângulo $A'C'A$ é isósceles, então os ângulos da base são congruentes, portanto $C'\hat{A}'A = \theta - \alpha$ possui a mesma medida que $C'\hat{A}A' = 180 - \psi(\theta) + \alpha$, ou seja,

$$\theta - \alpha = \pi - \psi(\theta) + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\psi(\theta)}{2} - \frac{\pi}{2}. \quad (6.5)$$

O ponto de impacto na reta refletida é obtido por meio da resolução do sistema dado pelas equações de cada trajetória, a primeira para a trajetória incidente e a segunda para a trajetória refletida, ou seja,

$$\begin{cases} y_i = \operatorname{tg}(\theta)x_i, \\ y_r - 0 = \operatorname{tg} \psi(\theta)(x_r - r(\theta)). \end{cases} \quad (6.6)$$

O ponto de impacto pertence tanto à trajetória incidente quanto à refletida. Logo $y_i = y_r = y$ e $x_i = x_r = x$, que substituídos no sistema nos dá

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \theta x, \\ y = \operatorname{tg} \psi(\theta)x - \operatorname{tg} \psi(\theta)r(\theta), \end{cases}$$

de onde obtemos

$$x = -\frac{\operatorname{tg} \psi(\theta)r(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg} \psi(\theta)} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi(\theta)r(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg} \psi(\theta)}. \quad (6.7)$$

Portanto a reta refletora passa pelo ponto $\left(-\frac{\operatorname{tg} \psi(\theta)r(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg} \psi(\theta)}, -\frac{\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi(\theta)r(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg} \psi(\theta)}\right)$ e possui inclinação $\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\psi(\theta)}{2} - \frac{\pi}{2}$.

- 8) (**Pergunta**) Suponha que θ e $\psi(\theta)$ sejam conhecidos na Atividade 7), mas $r(\theta)$ seja desconhecido. A reta refletora pode ser determinada? Alguma característica importante dessa reta pode ser determinada?

Resolução: A reta refletora não poderá ser determinada nesse caso, mas sua inclinação pode, como visto na Atividade 7), Figura 30 e Eq. (6.5), a inclinação não depende de $r(\theta)$,

$$\alpha = \frac{\theta + \psi(\theta)}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

O que fica comprometido é encontrar um ponto que pertença a essa reta, já que não se conhece $r(\theta)$ e conseqüentemente a reta não é identificada.

- 9) (**Exercício**) Identifique a reta refletora da Atividade 7) se $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianos, $r(\theta) = 10$ e $\psi(\theta) = \frac{3\pi}{4}$.

Resolução: Substituindo os valores na Eq.(6.7), obtemos

$$\left(-\frac{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}(10)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}, -\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}(10)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} \right) = \left(-\frac{-1(10)}{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}, -\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(-1)(10)}{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1} \right).$$

Logo, um ponto da reta refletora é $(15 - 5\sqrt{3}, 5\sqrt{3} - 5)$. Substituindo os valores na fórmula da inclinação α , obtemos

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Logo, $\alpha = -\frac{\pi}{24}$.

Utilizando a equação reduzida da reta, obtemos

$$y - (5\sqrt{3} - 5) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{24}\right) \left[x - (15 - 5\sqrt{3})\right]$$

$$y - 5\sqrt{3} + 5 = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}x + 15\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} - 5\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$$

$$y = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}x + 15\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} + 5\sqrt{3}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{24}\right) - 5.$$

Construindo a reta no software Geogebra, obtemos a Figura 31, que representa essa jogada.

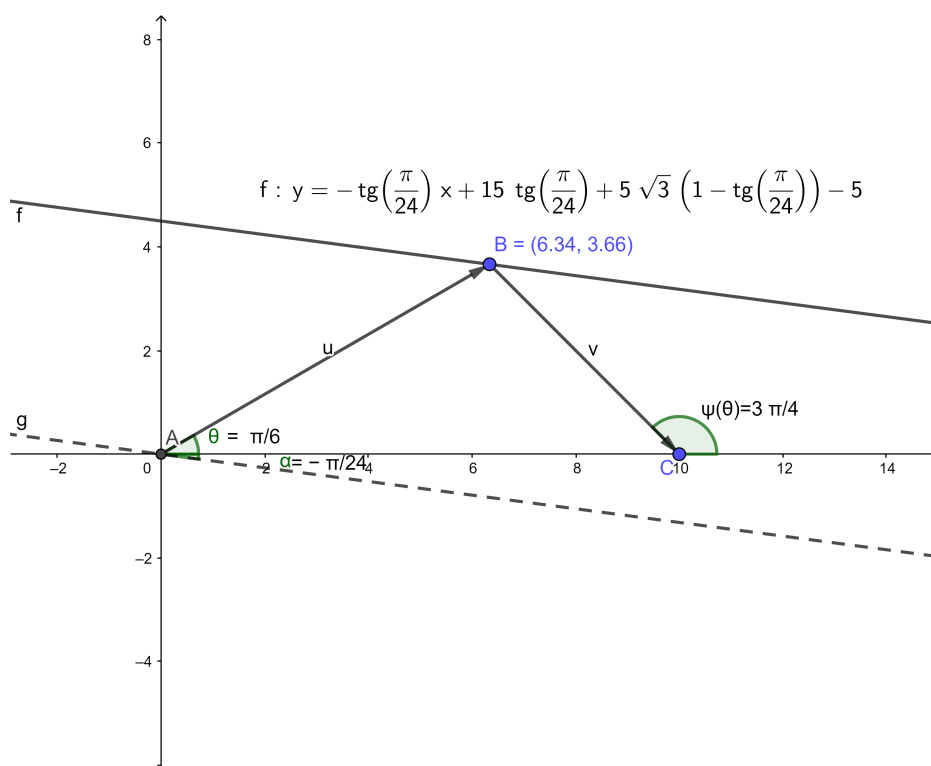


Figura 31 – Jogada da Atividade 9).

- 10) (**Problema**) Suponha que a curva dispersora seja um círculo fixo imóvel situado no primeiro quadrante. Mostre que duas observações distintas do tipo descrito na Atividade 7) são suficientes para identificar a curva.

Resolução: Conforme a Atividade 7), os dois ângulos de lançamento da bola branca, partindo da origem, são conhecidos, θ_1 e θ_2 . Considerando um círculo como refletor, para identificá-lo é necessário que dois lançamentos (linha reta) tangenciem esse círculo, conforme Figura 32.

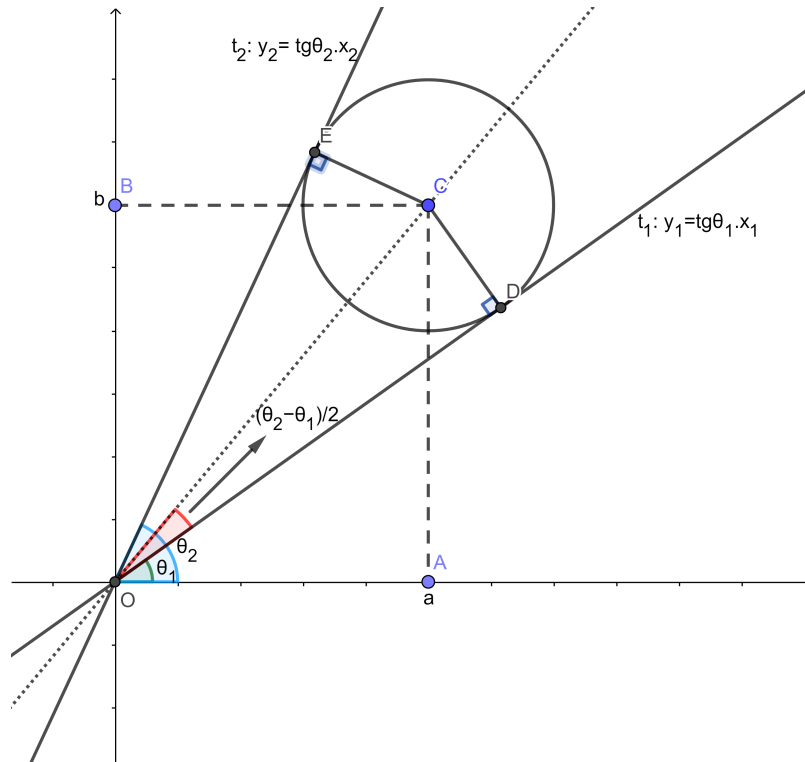


Figura 32 – Reconstrução da círculo refletor.

As retas tangentes são determinadas pelas suas inclinações θ_1 e θ_2 e pela origem $(0,0)$, que é o ponto de lançamento da jogada.

$$t_1 : y_1 = \operatorname{tg} \theta_1 x_1 \quad (6.8)$$

$$t_2 : y_2 = \operatorname{tg} \theta_2 x_2. \quad (6.9)$$

O eixo de simetria das retas t_1 e t_2 é formado pela reta que possui inclinação $\theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$, e passa pelo centro do círculo $C(a, b)$. Conforme Figura 32 o triângulo ODC é retângulo, portanto

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) = \frac{r}{d_{OC}}, \quad (6.10)$$

sendo r o raio do círculo e d_{OC} a distância da origem ao centro $C(a, b)$, ou seja

$$d_{OC} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (6.11)$$

O raio pode ser calculado pela distância entre o centro $C(a, b)$ e a reta t_1 de Eq (6.8),

$$r = \frac{|\operatorname{tg} \theta_1 a - b|}{\sqrt{(\operatorname{tg} \theta_1)^2 + (-1)^2}}. \quad (6.12)$$

Substituindo as Eqs (6.11) e (6.12) na Eq. (6.10), obtemos

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) = \frac{|\operatorname{tg} \theta_1 a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (6.13)$$

Do triângulo AOC , temos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right) = \frac{b}{a}. \quad (6.14)$$

Juntando as Eqs (6.13) e (6.14), calculamos o centro $C(a, b)$ e conseqüentemente calculamos o valor do raio r , substituindo os valores das coordenadas do centro (a, b) na Eq. (6.12).

Portanto duas retas tangentes ao círculo determinam o círculo refletor.

6.3 Considerações

O problema inverso de determinar possíveis "jogadas de tabela" em um jogo de sinuca sabendo o trajeto que a bola lançada faz depois que ela é refletida por um obstáculo, pode ser um bom exercício para jovens do ensino médio.

Para desenvolver esse caso, foi considerado inicialmente um quadrado de lado unitário representando uma mesa de bilhar e coordenadas cartesianas para representar as bolas.

Na Atividade 1) vimos que se as bolas branca e alvo estiverem em posições aleatórias na mesa, com exceção dos casos alinhados, há quatro jogadas de tabela possíveis, uma em cada lateral da mesa. Na Atividade 2), se as bolas tiverem alinhadas em relação a uma das laterais da mesa, no máximo, três jogadas de tabela são possíveis, uma é excluída pois a bola branca colidiria na bola alvo sem realizar uma tabela com uma das laterais. As duas primeiras atividades são intuitivas, não exigem cálculos.

Na Atividade 3) as bolas branca e alvo possuem coordenadas específicas e não alinhadas em relação às laterais. Assim, usando conceitos geométricos e semelhança de triângulos, é possível determinar as coordenadas dos quatro pontos de impacto descritos na Atividade 1). A Atividade 4) é semelhante à 3) mas com coordenadas gerais para as bolas. As Atividades de 1) a 4) exploram o problema direto.

As Atividades 5) e 6) tratam do primeiro problema inverso explorado nesse caso, ou seja, dada a posição da bola alvo e da caçapa onde se quer acertar a bola alvo, determinar quais as possíveis localizações para a bola branca. Na 5) as coordenadas dadas não permitem acertar a caçapa enquanto que na 6) determinamos todas as possíveis posições em que a bola branca pode estar para que a bola alvo seja colocada na caçapa desejada.

Nas Atividades 7)-10) tratamos do segundo problema inverso, o de reconstruir a curva refletora. Na 7), a partir do conhecimento da posição e do ângulo de lançamento e da posição e ângulo de chegada, vemos que é possível determinar de forma única a reta que causou a reflexão. Na 8), a identificação da reta refletora fica comprometida pela falta de um dado, ou seja, desconhecendo a posição $r(\theta)$, não é possível encontrar o ponto de impacto, apenas a inclinação da reta. Na 9), encontra-se uma aplicação da Atividade 7).

Para finalizar, na Atividade 10), o obstáculo que causa o retorno da bola branca é um círculo fixo, e para sua identificação, ou seja, seu centro e o comprimento do raio, é necessário que se conheça os ângulos de lançamento e a posição da bola branca, que no caso partiu da origem, de duas jogadas tangentes (linhas retas) a esse círculo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Identificar um problema como sendo inverso auxilia na resolução dele, pois a partir daí podemos usar as técnicas disponíveis e conseguir obter a solução ou uma boa aproximação para a solução, além de compreender parte que seria desconhecida, pois a cada problema direto, podemos associar pelo menos um problema inverso, que foi feito nesse trabalho.

Problemas importantes nas mais diversas áreas de pesquisa são tratados como inverso e isso tem alavancado o desenvolvimento de novas técnicas de diagnósticos tanto médico como industriais, de defesa, de desenvolvimento em geral, etc.

Estudamos quatro casos de problemas inversos em nível de ensino médio, com foco para docentes que atuam nesse nível. Os quatro casos possuem diferenças significativas e cada um pode ser considerado um caso simplificado de um problema real bem mais complexo. Por exemplo, o caso da detecção da pepita no fundo do rio pode ser expandido para a detecção de petróleo no fundo do mar, o caso da detecção da curva refletora no jogo de sinuca pode ser expandido para a reconstrução de parte interna do corpo humano por meio de ultrassonografia. O caso da detecção da altura de um furo de um reservatório poderia ser associado a projetos na área de engenharia, para descobrir a localização de vazamentos em geral. E o problema em determinar a inclinação de lançamento de um projétil para acertar um local específico com gasto mínimo de energia poderia ser associado a lançamentos de qualquer natureza, como em esportes ou em locais que não temos acesso.

Quanto às diferenças entre os casos, no caso do jato d'água, existe apenas um furo no reservatório, porém, quando da inversão, o problema matemático não possui unicidade de solução. A técnica que particulariza a solução é tomar medidas redundantes de causa-efeito. Com isso, obtemos a altura do furo.

No caso do lançamento de um projétil, queremos atingir um certo alvo utilizando uma dada velocidade de lançamento. Pela formulação matemática do problema inverso, obtemos dois possíveis ângulos de lançamento. Neste caso, ambas soluções são aceitáveis.

No caso da pepita, o problema inverso é composto por duas incógnitas: massa e posição da pepita e a formulação matemática inversa leva à infinitas possibilidades de solução, sendo que apenas uma é a procurada. Duas medidas nem sempre conseguem particularizar a solução. Já três medidas conseguem particularizar se em condições ideais. Para um problema real, com ruídos e erros nas medidas experimentais, seriam necessárias mais medidas ao ponto de conseguirmos minimizar esses ruídos e erros.

No problema da sinuca, um dos problemas inversos é detectar quais as possíveis posições para a bola branca atingir a bola alvo e levar esta para a caçapa desejada. Como as trajetórias são lineares, as respostas são obtidas com o uso de conceitos geométricos e semelhança de triângulos. Como não levamos em conta velocidade da bola, atrito, força de lançamento, qualquer solução naquele trajeto é aceitável. No problema de reconstruir a curva refletora, quando sabemos de antemão que se trata de uma reta, dependendo dos dados fornecidos conseguimos determiná-la e ao desconhecer, por exemplo, a posição final, determinamos apenas a inclinação da reta. Quando o obstáculo é um círculo, precisamos de duas jogadas tangentes a ele para conseguir determiná-lo. Se a curva tiver formato desconhecido, o problema se torna ainda mais complexo.

Sobre a experiência no desenvolvimento deste projeto, o livro introduz cada caso de forma bem mais resumida do que foi apresentado neste texto e apenas propõe as questões, sendo que algumas possui resposta breve no apêndice do livro. Os problemas são extensos e requerem atenção e dedicação. O maior desafio foi compreender o significado de cada atividade para a condução do raciocínio que leva à solução do problema inverso.

Por fim, existem outros casos no livro que podem ser explorados para dar continuidade a este trabalho.

REFERÊNCIAS

ALIFANOV, O. M. Inverse heat transfer problems. **International series in heat and mass transfer**, Springer-Verlag, 1994. Citado na página 20.

ALMEIDA, F. B. de. **Reflexão da luz em espelhos planos**. 2020. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/fisica/reflexao-luz-espelhos-planos.htm>>. Acesso em: 31/03/2020. Citado na página 76.

Campos Velho, H. F. Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações—minicurso. **IV Encontro de Modelagem Computacional. Nova Friburgo, RJ: IPRJ–UERJ**, p. 1–17, 2001. Citado na página 24.

CEZARO, A. D.; CEZARO, F. T. D. Problemas inversos e a matemática da tomografia computadorizada. In: V BIENAL DA SBM, UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, 20. Paraíba, 2010. Citado na página 20.

CHIARELLA, C.; CRADDOCK, M.; EL-HASSAN, N. The calibration of stock option pricing models using inverse problem methodology. **Quantitative Finance Research Centre, University of Technology**, I, n. 39, 2000. Citado na página 20.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos da matemática elementar, 9: geometria plana**. Rua José Antônio Coelho, 785 São Paulo SP: Atual editora Ltda, 1997. Citado na página 79.

ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. **Regularization of inverse problems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996. v. 375. Citado na página 24.

FUKUSHIMA, P. K. **Problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - FFCLRP, Ribeirão Preto, 2018. Citado nas páginas 24 e 30.

GIRALDO, P. A. S. C. V.; MATTOS, F. R. P. **Recursos cComputacionais no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 21.

GORDON, C.; WEBB, D. L.; WOLPERT, S. One cannot hear the shape of a drum. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 27, n. 1, p. 134–138, 1992. Citado na página 25.

GROETSCH, C. W. **Inverse Problems: activities for undergraduates**. Washington: The Mathematical Association of America, 1999. Citado nas páginas 19, 20, 24, 25, 28, 31, 33, 43, 59 e 75.

KAC, M. Can one hear the shape of a drum? **Am. Math. Monthly**, v. 73, n. 4, 1966. Citado na página 25.

MARQUES, G. da C. Movimento dos projéteis. In: _____. **Dinâmica do movimento dos corpos**. São Paulo - SP: Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada (CEPA) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (USP), 2019. cap. 10, p. 223–248. Citado nas páginas 21, 34 e 44.

MENIN, O. H.; MARTINEZ, A. S.; ROLNIK, V. **Tomografia de impedância elétrica: métodos computacionais**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2016. Citado nas páginas 20, 25, 28, 30 e 31.

Portal São Francisco. **Sinuca**. 2020. Disponível em: <<https://www.portalsaofrancisco.com.br/esportes/sinuca>>. Acesso em: 04/04/2020. Citado na página 75.

RIGONATTO, M. **Condição de alinhamento de três pontos do plano**. 2020. Disponível em: <<https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/condicao-alinhamento-tres-pontos-plano.htm>>. Acesso em: 31/03/2020. Citado na página 83.

SILVEIRA, L. **Classificação de cônicas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2017. Citado nas páginas 21 e 38.

TODESKINO, M. **Tesouro dos nibelungos: lenda e parte da história da Alemanha**. 2013. Disponível em: <<https://www.dw.com/pt-br/tesouro-dos-nibelungos-lenda-e-parte-da-história-da-alemanha/a-17036988>>. Acesso em: 25/10/2019. Citado na página 59.

UOL. **O que se sabe e quais as dúvidas sobre as manchas negras que poluem o NE**. 2019. Disponível em: <<https://noticias.uol.com.br/meio-ambiente/ultimas-noticias/redacao/2019/10/07/o-que-se-sabe-e-quais-as-duvidas-sobre-as-manchas-negras-que-poluem-o-ne.htm>>. Acesso em: 25/10/2019. Citado na página 29.

_____. **Vazamento de óleo que atinge o nordeste ocorreu a pelo menos 600 km da costa, diz UFRJ**. 2019. Disponível em: <<https://jconline.ne10.uol.com.br/canal/mundo/brasil/noticia/2019/10/17/vazamento-de-oleo-que-atinge-nordeste-ocorreu-a-pelo-menos-600-km-da-costa-diz-ufrj-390803.php>>. Acesso em: 25/10/2019. Citado na página 30.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. Citado na página 21.

