Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Edmilson Corrêa de Oliveira

Teorema de Tales e Semelhança nos livros do PNLD de 2015 - Ensino Médio

Rio de Janeiro
2019

Edmilson Corrêa de Oliveira

Teorema de Tales e Semelhança nos livros do PNLD de 2015 - Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Dr. Fabio Luiz Borges Simas (orientador)

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Rio de Janeiro

2019

Oliveira, Edmilson

Teorema de Tales e Semelhança nos livros do PNLD de 2015 - Ensino Médio / Edmilson Oliveira - 2019

147.p

1.Matemática 2. Geometria Euclidiana 3. Ensino de Matemática. I.Título.

CDU 536.21

Edmilson Corrêa de Oliveira

Teorema de Tales e Semelhança nos livros do PNLD de 2015 - Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 06 de setembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Fabio Luiz Borges Simas

Dr. Fabio Luiz Borges Simas (orientador)

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Ms. Marcello Santos Amadeo

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Dr. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Humberto José Bortolossi

Dr. Humberto José Bortolossi

Universidade Federal Fluminense - UFF

Aos meus pais, que fazem parte da minha história, em especial a minha mãe Wanda C. de Oliveira que sempre se esforçou para que eu tivesse uma educação de excelência;

Resumo

Este trabalho, desenvolvido em conjunto com o Projeto Livro Aberto de Matemática,[1] analisa e compara as estratégicas de ensino e aprendizagem de Teorema de Tales e semelhança utilizadas nos seis livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio indicados no Programa Nacional de Livro Didático de 2015. Os Parâmetros Curriculares Nacionais são as principais referências desta obra complementando com outros artigos que estão diretamente relacionado ao tema tratado. A Base Nacional Comum Curricular[2] é também uma referência, pois é um currículo universal que possivelmente implicará em mudanças estruturais e pedagógicas dos futuros livros. Esta análise inicia com os aspectos físicos; como quantidade de páginas gastas, números de exercícios propostos e resolvidos com os respectivos percentuais de contextualizados. Discute a ordem de tratamento dos temas Teorema de Tales, semelhança e relações trigonométricas; as escolhas dos autores para introdução desses dois conteúdos; os diferentes enunciados do Teorema de Tales e definições de polígonos e triângulos semelhantes; demonstrações de Tales e dos casos de semelhança. Compara as figuras típicas utilizadas nos enunciados de Tales e como elas aparecem nos exercícios resolvidos e propostos. Apresenta uma discussão ilustrada por exercícios resolvidos e propostos selecionados pela contextualização apropriada e forçada, além de exercícios mal formulados e inseridos em seções que não tratam do assunto abordado. Destaca os projetos de aprendizagem como trabalhos dinâmicos e aplicações de semelhança em outros conteúdos da matemática. Contudo, este trabalho busca trazer algumas reflexões aos professores de matemática e aos alunos graduandos que lecionem os temas e auxilia autores de notas de aula ou de livros didáticos que incluam o Teorema de Tales ou semelhança.

Palavras-chaves: Semelhança, Teorema de Tales, Livro Didático, Ensino

[1] Uma iniciativa da OBMEP/IMPA, realizado pela Associação Livro Aberto, financiado pela Fundação Itaú Social.

[2] Segunda, terceira e quarta versão.

Abstract

This work, developed in conjunction with the Open Book of Mathematics Project, footnote An OBMEP / IMPA initiative, conducted by the Open Book Association, funded by the Itaú Social Foundation. Analyzes and compares the teaching and learning strategies of Tales Theorem and similarity used in the six textbooks of 1 *textsuperscript do* High School year indicated in the National Textbook Program 2015. The National Curriculum Parameters are the main references of this work complementing with other articles that are directly related to the theme. treated. The Common National Curriculum Base footnote Second, Third and Fourth Version. Is also a reference as it is a universal curriculum that will possibly imply structural and pedagogical changes in future books. This analysis begins with the physical aspects; as number of pages spent, number of exercises proposed and solved with the respective percentage of contextualized. Discusses the order of treatment of the themes Tales theorem, similarity and trigonometric relations; the authors' choices for introducing these two contents; the different statements of the Tales Theorem and definitions of similar polygons and triangles; Tales demonstrations and similarity cases. It compares the typical figures used in the Tales utterances and how they appear in the solved and proposed exercises. It presents a discussion illustrated by solved and proposed exercises selected by appropriate and forced contextualization, as well as poorly formulated exercises and inserted into sections that do not address the subject matter. It highlights learning projects as dynamic work and similarity applications in other math content. However, this paper seeks to bring some reflections to mathematics teachers and undergraduate students who teach the subjects and assists authors of class notes or textbooks that include the Tales Theorem or similarity.

Agradecimentos

À Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro pela oportunidade;

Ao orientador Prof. Dr. Fabio Simas, pelas orientações, sugestões, esclarecimentos e principalmente paciência, a qual contribuiu para que o trabalho chegasse ao fim;

Aos meus amigos de turma, Leandro Monforte e Ana Elisa Cordeiro, que compartilharam conhecimento sobre o tema e dividiram comigo as mesmas dificuldades que a jornada exigiu.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNIRIO, pelos ensinamentos que de algum modo contribuíram para o meu enriquecimento pessoal e profissional;

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa concedida;

À Universidade Castelo Branco, por permitir usar o espaço da biblioteca, climatizado e silencioso, que contribuíram para eu me concentrar nesses momentos de estudos;

Aos amigos Helano Andrade e Rodrigo Miranda, que auxiliaram na produção do texto e no uso do latex;

E a Deus, acima de tudo, por me dar força, saúde e sabedoria para chegar até o fim desse trabalho.

"Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo." (Paulo Freire)

Sumário

1 Introdução

Este capítulo se inicia com um breve resumo da estrutural desta obra, em seguida são apresentadas as motivações que levaram a realização desse trabalho, as obras que serão analisadas e, mais especificamente, os temas que nelas serão estudadas e o que deles se diz nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (2^a, 3^a e 4^a versões revisadas respectivamente em 2016, 2017 e 2018).

1.1 Estrutura da dissertação

Este relatório de pesquisa foi estruturado em dois capítulos. Neste primeiro são apresentadas as motivações que levaram a esse trabalho, os objetos de estudo que são os seis livros e as finalidades do Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) e os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as suas respectivas orientações quanto à abordagem da geometria plana e especificamente ao tratar Teorema de Tales e semelhança no Ensino Médio.

No segundo capítulo é realizada uma análise dos livros didáticos, respondendo as seguintes perguntas:

- Como os autores organizaram todos os conteúdos e mais especificamente a parte de geometria plana?
- A abordagem de Teorema de Tales e semelhança atendem às orientações propostas pelos PCN e pela BNCC?
- Como são introduzidos os capítulos que contêm os temas Teorema de Tales e semelhança? Os livros iniciam os conteúdos a partir de uma situação problema?
- Como são apresentados os enunciados do Teorema de Tales? E quais obras demonstram? E de que forma?
- Como são apresentados os enunciados de semelhança de polígonos e triângulos? Algum livro demonstra os casos de semelhança de triângulos? Quais? De que forma?

- Os problemas contidos estão relacionados ao cotidiano do aluno?
- Existem alguns exercícios que se destacam em contribuir para uma aprendizagem significativa? E quais?
- Existem exercícios mal formulados que não contribuem para uma aprendizagem significativa? E quais?
- Há atividade com projeto de aprendizagem em alguma obra?
- Quais livros aplicam semelhança em outros conteúdos? Como?

1.2 Motivação

O Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) realiza, a cada dois anos, uma avaliação do sistema educacional brasileiro nas disciplinas de português e matemática nas redes públicas e privadas de ensino. Diante do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) realizado em 2015, observa-se no gráfico 1.1, que avalia a proficiência média em matemática, um retrocesso no rendimento dos alunos do Ensino Médio, diferentemente do Ensino Fundamental, anos finais, que cresce vagarosamente e anos iniciais, um crescimento considerável. Nota-se que o desempenho dos alunos do Ensino Médio tem caído desde 1997, mesmo com pequeno crescimento entre 2001 e 2003, volta a cair entre 2003 e 2005. No período de 2005 a 2011 crescem muito pouco; mais adiante, entre 2011 e 2015, novamente o desempenho cai e a menor pontuação é atingida nesse último ano, chegando à menor pontuação nos últimos 20 anos. Entender as causas deste mau desempenho pode ser o primeiro passo para uma solução.

Evolução dos resultados do Brasil no Saeb (1995 a 2015).

Proficiências médias em Matemática.

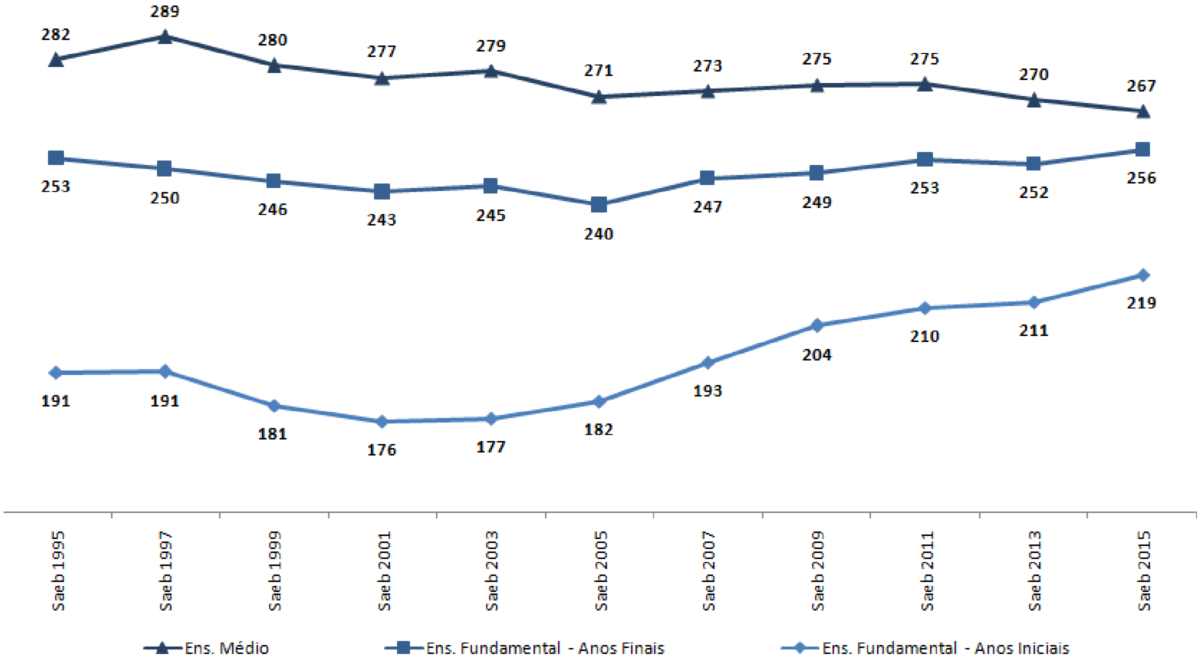


Figura 1.1: Fonte: Diretoria de Avaliação da Educação Básica-DAEB /INEP ([Brasil, 2016b]).

Existem diversos entraves para melhoria do ensino nas escolas de Educação Básica, dentre os quais destaca-se a qualidade dos livros didáticos. O PCN relata que "(...) o livro didático é um material de forte influência na prática do ensino brasileiro. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos" ([Brasil, 1997c], p.67). Portanto, esse foi um dos motivos de realizar uma análise nos livros didáticos do PNLD de 2015, o qual foi um programa que selecionou os livros para uso no Ensino Médio da educação pública do Brasil.

Segundo [Gomes, 2012], é amplamente reconhecida a importância do estudo da geometria pois contribui para o desenvolvimento da visualização, o pensamento crítico, a intuição, a resolução de problemas, a prova, entre outros.

> O estudo da geometria contribui para ajudar os alunos a desenvolver as capacidades de visualização, pensamento crítico, intuição, perspectiva, resolução de problemas, conjectura, raciocínio dedutivo, argumentação lógica e prova. As representações geométricas podem ser usadas para ajudar os alunos a dar sentido a outras áreas da matemática: frações e multiplicação em aritmética, relações entre os gráficos de funções (de

> duas e três variáveis) e representações gráficas de dados em estatística. ([Jones, 2002] apud [Gomes, 2012] p.235)

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que:

> (...) a geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que, possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever, e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. ([Brasil, 1998], p.122)

Os temas Teorema de Tales e semelhança foram selecionados por serem centrais na geometria. Tales tem um papel fundamental na justificativa dos casos de semelhança de triângulos e estes possibilitam as relações métricas de um triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e a trigonometria, a qual traz as definições de seno, cosseno e tangente, conteúdos usualmente trabalhados no 1^o ano do Ensino Médio. Mais adiante, alguns desses conceitos da geometria plana serão essenciais ao educando, pois precisarão de uma boa visualização espacial e possibilitarão cálculos de áreas, volumes e relações entres os elementos (faces, arestas, vértices, alturas, apótemas) dos sólidos estudados no 2^o ano do Ensino Médio.

Como é preconizado nos principais objetivos do Programa Nacional do Livro Didático se faz necessária a participação ativa e democrática do professor no processo de seleção dos livros didáticos. Essa situação exige do professor possuir determinados saberes, critérios, competências, etc. para poder realizar em conjunto com uma equipe de profissionais ou individualmente a escolha do livro. Esta obra tem como principal objetivo servir de apoio ao docente formado ou em formação para o ensino do Teorema de Tales e semelhança, embora também contenha reflexões que podem servir a elaboradores de materiais didáticos que abordem estes temas. Esta obra também teve como iniciativa, contribuir com um material de apoio ao projeto “Livro Aberto de Matemática” (`www.umlivroaberto.com`).

Diante dos objetivos apresentados, a meta dessa obra é contribuir para uma resposta à seguinte questão:
Quais as estratégias didáticas são usadas no ensino de Teorema de Tales e semelhança nos livros do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio de 2015?

Uma resposta para esta pergunta pode ajudar esclarecer as qualidades e deficiências dos estudantes neste assunto.

1.3 O objeto de estudo

No final do século XX, foi instituído, oficialmente, por meio do Decreto 91.542 de 19/08/85, o Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) que apresentou grandes modificações em relação ao programa de livros didáticos que vigorava antes, o Programa do Livro Didático/Ensino Fundamental (PLIDEF). Esse novo programa trazia princípios, até então inéditos, de aquisição, distribuição universal e gratuita de livros didáticos para os alunos da rede públicas. Nesse momento, é observado que a valorização do livro didático já contribuía positivamente no processo ensino-aprendizagem. Segundo o guia de livros didáticos do PNLD de 2008, um livro didático:

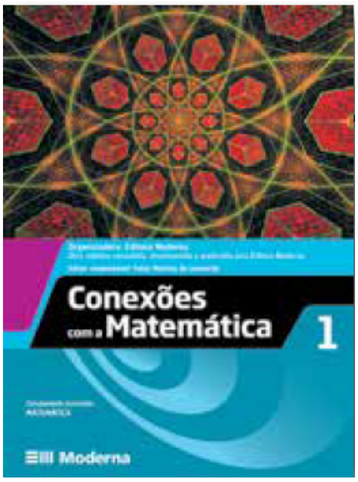
> (...) deve oferecer informações e explicações sobre o conhecimento matemático que interfere e sofre interferências da prática social do mundo contemporâneo e do passado. Também deve conter um proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno e que ofereça atividades que o incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem e a interagir com seus colegas. Além disso, o livro precisa assumir a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o docente. ([Brasil, 2008], p.9)

Segundo o caderno de estudos do curso Programas do Livro (PLi), a criação em 1985 do Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) "(...) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio de distribuição de coleções dos livros didáticos aos alunos da Educação Básica" ([Brasil, 2014a], p.18). Esse programa é executado num período de três anos, de modo que a cada ano é elaborado programa dos anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais e Ensino Médio. As coleções aprovadas nos programas são escolhidas pelas escolas devidamente adaptadas ao projeto-político-pedagógico e ao trabalho que os professores desenvolvem em seu cotidiano. Esses livros deverão ser usados com devidos cuidados pelos educandos, pois no fim do ano letivo serão entregues para serem utilizados nos dois anos consecutivos por outros alunos.

Neste trabalho, serão analisados os livros do 1º ano do Ensino Médio do PNLD de 2015, pois a maioria das coleções dividiram a abordagem da geometria plana, espacial e analítica, nas respectivas fases do Ensino Médio: primeiro, segundo e terceiro ano. Foram aprovados seis coleções de matemática no PNLD de 2015, as quais a referência de cada um, se dará pelo nome de um dos autores mais conhecidos, conforme resumido na tabela 1.1 abaixo;

Livros Didáticos	Autor mais conhecido
Conexões com a Matemática [Leonardo, 2013]	Leonardo
Matemática Contexto & Aplicações [Dante, 2014]	Dante
Matemática Paiva [Paiva, 2013]	Paiva
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi, 2013]	Iezzi
Matemática Ensino Médio [Smole, 2013]	Smole
Nosso Olhar Matemática [Sousa, 2013]	Souza

Tabela 1.1: Citações dos livros aprovados no PNLD DE 2015 .



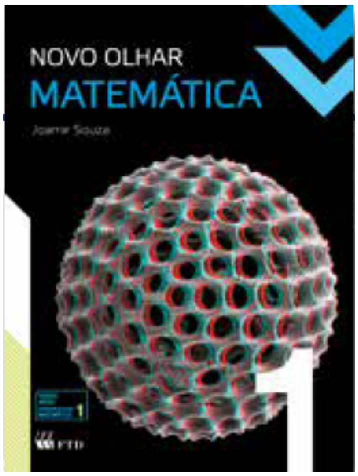
[Leonardo, 2013].

[Dante, 2014].

[Paiva, 2013]

[Iezzi, 2013].

[Smole, 2013].



[Sousa, 2013].

Figura 1.2: Capas dos livros didáticos.

Vale ressaltar que o ideal seria analisar o livro do professor, pois este contém as informações do livro do aluno e informações complementares, como sugestões de leituras para o professor, vídeos educacionais, sites, softwares de matemáticas, projetos de aprendizagem e outras. Geralmente, a obtenção de um livro do professor é mais difícil, pois as gráficas produzem um quantitativo menor, apenas para o público de docentes que atuam nas respectivas turmas de aplicação desse livro. Além disso, os professores que ganham esse material, muitas das vezes, não deixam nas bibliotecas das unidades escolares para possíveis consultas e raramente ocorre a transferência de materiais entre os profissionais. Devido à dificuldade na obtenção de todos os livros do professor, os livros que foram analisados estão resumidos na tabela 1.2;

Livros Didáticos	Livro do aluno	Livro do professor
Conexões com a M. [Leonardo]		X
M. Contexto & Aplicações [Dante]	X	
M. Paiva [Paiva]	X	
M. Ciências e Aplicações [Iezzi]		X
M. Ensino Médio [Smole]	X	
Nosso Olhar M. [Souza]		X

Tabela 1.2: Tipo de livros analisados (aluno ou professor)

1.4 Teorema de Tales e semelhança no currículo brasileiro

A primeira referência de currículo são os Parâmetros Curriculares Nacionais, os quais fazem alusão aos Ensino Fundamental e Médio de todo Brasil.

> O principal objetivo dos PCNs é garantir a todas crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir o conjunto do conhecimentos reconhecidos como necessário para o exercício da cidadania. Não possuem caráter de obrigatoriedade e , portanto, pressupõe-se que serão adaptados às peculiaridades locais. ([Educacional, 2017])

Também, esse portal informa que os PCN do Ensino Médio (PCNEM) têm por objetivo auxiliar os educadores na reflexão sobre a prática diária em sala de aula e servir de apoio ao planejamento de aulas e ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional ([Educacional, 2017]). Essa coleção divide-se em quatro partes:

I) Bases Legais;

II) Linguagem Códigos e suas tecnologias;

III) Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias;

IV) Ciências humanas e suas tecnologias.

O Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio apresenta em suas unidades temáticas os conteúdos e habilidades para o tema Geometria Plana;

Geometria Plana: Semelhança e Congruência; representações de figuras.

- Identificar dados e relações geométricas revelantes na resolução de situações-problemas;
- Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.;
- Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real;
- Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras;
- Fazer uso de escalas em representações planas. ([Brasil, 2002], p.125)

Nota-se que o PCN, ao expor a unidade temática Geometria Plana no Ensino Médio, restringiu aos conteúdos congruência e semelhança orientando o docente a explorar o assunto da melhor forma possível, inclusive quando ele for escolher um livro didático, como uma fonte auxiliadora de trabalho; o qual, seja uma obra que melhor se aproxime desse documento orientador. Por fim, essas orientações têm como objetivo aperfeiçoar sua prática pedagógica e atingir um ensino-aprendizagem mais significativo.

Considerando que os Parâmetros Curriculares Nacionais compõem o último documento curricular em âmbito nacional para o Ensino Médio, eles se tornaram referências para toda a produção voltada ao ensino das diferentes disciplinas escolares, inclusive foi um documento de referência para escolha dos livros do PNLD de 2015. Após 20 anos, sem dúvida, os PCN precisariam ser revistos ou até mesmo reelaborados. Após essas duas décadas de sua utilização em sala de aula, a comunidade de educadores teria sugestões a apresentar, visando ao aprimoramento ou a sua ampliação em virtude de novas demandas da sociedade. Nesse momento, a Base Nacional Comun Curricular (BNCC) foi elaborada à luz do que diz PCN e as DCN. No entanto, a Base é mais específica, determinando com mais clareza os objetos de aprendizagem de cada ano escolar. Ela é obrigatória nos currículos de todas as redes púbicas e particulares, ao contrário dos documentos anteriores, que devem continuar existindo, mas como documentos orientadores, mas não obrigatórios.

Ao final do processo de elaboração e aprovação da BNCC, todos os materiais didáticos deverão passar por revisões, para garantir que seus conteúdos contemplem o que pede a Base. Essa é uma etapa importante, a qual a BNCC, de fato, chegue as salas de aula.

A segunda versão da BNCC de maio de 2016 divide o Ensino Básico em três ciclos: Anos iniciais do Ensino Fundamental (do 1° ao 5° ano), Anos Finais do Ensino Fundamental (6° ao 9° ano) e Ensino Médio (do 1° ao 3° ano). O currículo do Ensino Médio estava dividido em 5 Unidades Curriculares e cada unidade dessas, divididas em 5 eixos de conhecimento: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções. Porém, nessa versão, a BNCC não deixa claro em que momento será explorado as cinco unidades curriculares nos três anos de Ensino Médio.

Na Unidade de conhecimento de Geometria, a BNCC indica as progressões a serem feitas durante o percurso de aprendizagens da etapa e algumas possibilidades de articulação dentro do componente e com componentes de outras áreas do conhecimento.

> No Ensino Médio o estudo da geometria deve retomar, ampliar e sistematizar os conhecimentos estudados anteriormente de modo a possibilitar aos estudantes a compreensão da estrutura lógica da geometria euclidiana. As primeiras demonstrações, iniciadas na etapa anterior, podem ser retomadas e, neste momento, ampliadas para que eles/elas sejam capazes de, por exemplo, compreender e generalizar algumas propriedades e demonstrar alguns teoremas, como a soma dos ângulos internos de polígonos, o teorema de Pitágoras, e os casos de semelhança e de congruência de triângulos.([Brasil, 2016a] p.563)

Embora no Ensino Fundamental não se fale do Teorema de Tales, os casos de semelhança de triângulos já são assuntos do nono ano, segundo a BNCC. Portanto, o estudante não poderá acompanhar as justificativas dos casos de semelhança, naquele momento ele deve apenas *reconhecer* as condições para semelhança de triângulos, etc.

> **Nono ano (EF09MT02)** - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos semelhantes e utilizar a semelhança de triângulos para obter as relações métricas no triângulo retângulo, incluindo o Teorema de Pitágoras, recorrendo ao uso de "softwares" de geometria dinâmica e demonstração simples. ([Brasil, 2016a], p.407)

No Ensino Médio chega a vez do Teorema de Tales, mas não fica claro se o objetivo é justificá-lo, o estudante deve *compreender* o teorema e usá-lo em aplicações. Por outro lado, sugere-se justificar os casos de semelhança e utilizá-los em situações diversas. Veja mais detalhes nas habilidades da BNCC:

Unidade Curricular II -

(EM12MT01) Compreender o **Teorema de Tales** e aplicá-lo em demonstrações e na resolução de problemas, incluindo a divisão de segmentos em partes proporcionais.

(EM12MT02) Resolver e elaborar problemas utilizando a **semelhança de triângulos** e o teorema de Pitágoras, incluindo aqueles que envolvem o cálculo das medidas de diagonais de prismas, de altura de pirâmides e aplicar esse conhecimento em situações relacionadas ao mundo do trabalho.

(EM12MT03) Utilizar a **noção de semelhança** para compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, suas relações em triângulos quaisquer e aplicá-las em situações como o cálculo de medidas inacessíveis, entre outras.

Unidade Curricular V

(EM15MT01) Compreender a estrutura lógica de geometria euclidiana e demonstrar alguns teoremas como soma dos ângulos internos de polígonos, teorema de Pitágoras, **casos de semelhança** e de congruência de triângulos. ([Brasil, 2016a], p. 264-265)

A terceira versão da BNCC[1] encaminhada pelo MEC ao Conselho Nacional de Educação (CNE) em Abril de 2017 e aprovado em dezembro, é o documento final da Base Nacional Comum Curricular da Educação Infantil e Fundamental; porém, adiando mais uma vez a BNCC referente ao Ensino Médio. Em relação aos conteúdos de geometria do nono ano, ela amplia os objetos de conhecimento em relação a segunda versão, traz teoremas de proporcionalidade em retas paralelas cortadas por transversais; os quais, é

[1]"A implantação de uma Base Nacional Comum Curricular está prevista na Constituição e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996). A primeira versão da BNCC foi divulgada pelo MEC em setembro de 2015 e recebeu 12 milhões de contribuições. Em maio de 2016, foi lançada uma segunda versão, incorporando o debate anterior"([Brasil, 2017a]).

notório que se trata do Teorema de Tales. Observe a tabela 1.3 que traz alguns objetos de conhecimento da geometria no nono ano da BNCC do Ensino Infantil e Fundamental.

Unidade temática	Objetos de conhecimento
Geometria	• Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma reta transversal; • Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; • **Semelhança** de triângulos; • Relações métricas no triângulo retângulo; • Teorema de Pitágora: verificações experimentais e demonstrações; • Retas paralelas cortadas por transversais: **teoremas de proporcionalidade** e verificações experimentais.

Tabela 1.3: Objetos de conhecimento de geometria no nono ano ([Brasil, 2017b], p.314-316).

Na sequência essa versão da BNCC traz também as habilidades que são esperadas dos alunos do nono ano ao final do ano letivo. Destaca-se que eles reconheçam casos de semelhança de triângulos, demonstrem as relações métricas do triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos e por fim os alunos tenham condição de resolver problemas usando Teorema de Tales.

> (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois **triângulos sejam semelhantes**.
> (EF09ma13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a **semelhança de triângulos**.
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das **relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes** ([Brasil, 2017b], p.315-317).

Em dezembro de 2018, o Conselho Nacional de Educação (CNE) aprovou a versão final da BNCC do Ensino Médio (4^a versão) com objetivo de formar jovens "(...) críticos, criativos, autônomos e responsáveis" ([Brasil, 2018b], p.2). Além disso, ela ratifica a finalidade do Ensino Médio apresentada pela Lei de Diretrizes e Bases (Lei 9694/86), art. 35 :

> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. ([Brasil, 2018b], p.2)

Em relação a área de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC do Ensino Médio traz de significativo a consolidação e o aprofundamento dos conteúdos visto no Ensino Fundamental de forma que amplie o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração; a interdisciplinariedade dos campos matemáticos e com outras disciplinas e uma matemática contextualizada.

Nesta versão, em vez de chamar a divisão dos conteúdos em Unidades Curriculares, conforme a segunda versão, o conselho optou por classificar em Competências Específicas, permanecendo no total de cinco. Além disso, elas não tem uma ordem pre estabelecidas e nem a seriação indicada. Dessa forma, permite flexibilizar a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola.

Semelhança é uma das habilidades apresentada na Competência Específica 3, de forma que seja um conteúdo facilitador para compreensão da aplicação das relações métricas. Veja esta habilidade com mais detalhes:

Competência Específica 3

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e **semelhança**, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. ([Brasil, 2018b], p.536)

Em relação ao Teorema de Tales, constava, na revisão desta última versão, a importância da validação das propriedades de figuras geométricas, justificando a possível necessidade da demonstração do Teorema de Tales para justificar semelhança de triângulos.Veja esta habilidade com mais detalhes:

Competência Específica 5

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, reconhecendo a necessidade de validá-las por meio de demostração, como os teoremas relativos aos quadriláteros e aos triângulos, ou de refutar suas conjecturas por meio de contraexemplos. ([Brasil, 2018a], p.66)

2 Análise dos Livros Didáticos

Neste capítulo é realizada uma análise dos conteúdos de semelhança e Teorema de Tales nos seis livros aprovados no PNLD de 2015. O capítulo está dividido em oito seções; na primeira é mostrado onde esses conteúdos estão inseridos nas estruturas físicas desses livros, quantidade de páginas dedicadas à geometria e ao Teorema de Tales e semelhança, ordem da abordagem desses dois conteúdos e a quantidade de exercícios resolvidos e propostos que os autores disponibilizam ao docente para usarem em seus planos de aulas, separando o percentual que são contextualizados.

Na próxima seção é apresentado como os autores introduzem esses conteúdos; em seguida, são apresentados os enunciados e as demonstrações do Teorema de Tales e enunciadas as definições de semelhanças de polígonos e triângulos e as demonstrações dos casos de semelhança. Na quinta seção, são comparadas as representações gráficas dos enunciados, exercícios resolvidos e propostos que exploram o Teorema de Tales. Na sexta seção, são expostos os principais exercícios que se destacam numa contextualização criativa ou forçada e deixam a desejar de alguma outra forma. Na sétima seção, são exibidos os projetos de aprendizagem contido em algumas obras; por fim, um seção que traz as aplicações de semelhança para introduzir outros conteúdos.

2.1 Características físicas dos livros didáticos

.

Nesta seção serão analisados os seguintes aspectos das características físicas dos livros: os conteúdos que cada autor traz em seus livros, quantidade de páginas gastas com Teorema de Tales e semelhança, ordem em que esses conteúdos e razões trigonométricas estão inseridos, as quantidades de exercícios resolvidos e propostos separados em contextualizados ou não. Sempre que possível os dados serão organizados em uma tabela.

Estrutura geral dos livros didáticos. A fim de colocar em contexto os temas Teorema de Tales e semelhança nas obras, serão apresentados os conteúdos que os livros analisados abordam. Embora em 2015 não houvesse um currículo mínimo nacional brasileiro anunciado, todos os livros trazem em comum os assuntos: conjuntos, funções, estatística, sequências numéricas e geometria plana; além desses, Paiva e Iezzi trazem matemática financeira.

Um resumo do currículo básico do Estado do Rio de Janeiro para a 1^a série do Ensino Médio está na tabela 2.1 para servir de referência.

Bimestre	Campo de conhecimento	Conteúdo
1°	Numérico aritmético	Conjuntos
	Algébrico simbólico	Estudo de Funções
2°	Algébrico simbólico	Função do 1° grau
	Geométrico	Razões trigonométricas
3°	Algébrico simbólico	Função do 2° grau
	Geométrico	Trigonometria na Circunferência
4°	Algébrico simbólico	Função Exponencial
	Geométrico	Trigonometria na circunferência

Tabela 2.1: Currículo mínimo da 1^a série do Ensino Médio da SEEDUC RJ ([RJ, 2012] p.15-16) .

Observa-se nessa tabela 2.1 que geometria é cobrado em paralelo com outros campos de conhecimento do segundo bimestre em diante. Além disso, trigonometria surge no segundo bimestre. Se o professor escolher relembrar semelhança de triângulos no primeiro bimestre para apresentar as razões trigonométricas no triângulo no segundo e poder argumentar que elas não dependem do triângulo escolhido, mas apenas do ângulo em questão, então a geometria estaria presente em todos os bimestres do ano letivo.

A tabela 2.2 estabelece a ordem dos conteúdos apresentados pelos autores, nos seis livros do PNLD de 2015.

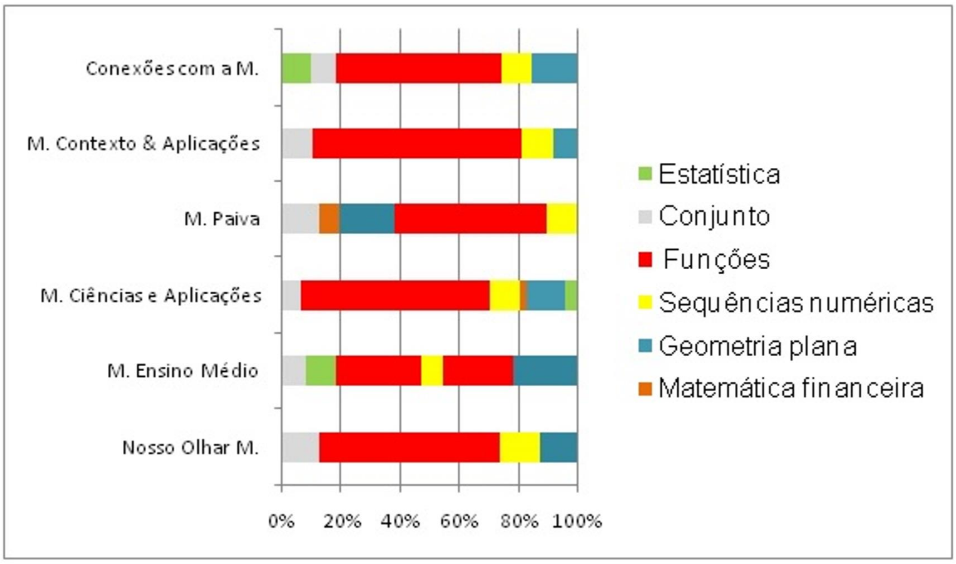


Tabela 2.2: Gráfico comparativo das sequências que os conteúdos estão inseridos nos livros.

Comparando a ordem escolhida pela SEEDUC RJ com a ordem de apresentação dos conteúdos da 1^a série do Ensino Médio nos seis livros do PNLD de 2015, restringindo-se ao conteúdo de geometria plana, observa-se, na tabela 2.2, que os livros não trazem a geometria em paralelo com outros campos de conhecimento. A obra do Paiva é a única que traz a geometria nos capítulos iniciais, os demais livros apresentam esse campo de conhecimento no final; dessa forma, se o professor seguir os livros do PNLD na sequência que são apresentados, a geometria será trabalhada durante 25% do ano letivo e se houver um atraso no conteúdo programático, poderá haver situação do professor não ter tempo de ministrá-la até o final do ano letivo, com exceção do livro do Paiva.

A seguir são resumidas algumas informações gerais dos livros em análise com ênfase na parte de geometria plana.

Conexões com a Matemática. Livro de autoria de Fabio Martins de **Leonardo** é composto de 295 páginas, organizado em 11 capítulos, O capítulo 1 aborda organização e apresentação de dados (estatística); cap. 2, conjuntos; cap. 3 ao 8 funções; cap. 9, sequências numéricas. Por fim, nos dois últimos capítulos visualiza-se a parte de geometria, sendo cap. 10, semelhança e os triângulos (semelhança, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras), e cap. 11, triângulos retângulos (trigonometria).

Matemática Contexto & ***Aplicações.*** Livro de autoria de Luis Roberto **Dante** é composto de 296 páginas, organizado em 8 capítulos. O cap. 1 aborda conjuntos; cap.

2 ao 6, funções; cap. 7, sequências numéricas e por fim no cap. 8, trigonometria no triângulo retângulo (semelhança, relações métricas e relações trigonométricas).

Matemática Paiva. Livro de autoria de Manoel **Paiva** é composto de 304 páginas totais, organizado em 12 capítulos. O cap. 1 aborda conjuntos; cap. 2, matemática financeira; cap. 3 e 4, geometria plana (cap. 3: triângulos e proporcionalidade e cap. 4: circunferência, círculo e cálculos de área); cap. 5 ao 11, funções e cap. 12, sequências numéricas. O cap. 3 está dividido em oito seções, sendo na seguinte sequência: As origens da geometria, polígonos, triângulos, propriedades dos triângulos, Teorema de Tales, semelhança de figuras planas, semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo.

Matemática Ciência e Aplicações. Livro de autoria de Gelson **Iezzi** e outros é composto de 320 páginas, organizado em 15 capítulos. Os cap. 1 e 2 abordam noções de conjuntos; cap. 3 ao 9, funções; cap. 10 e 11, progressões numéricas e matemática comercial; cap. 12 e 13, geometria plana (cap. 12: semelhança, triângulos retângulos e cap. 13: trigonometria no triângulo retângulo) e por fim, cap. 14 trata de estatística básica.

Matemática Ensino Médio. Livro de autoria de Katia Stocco **Smole** e Maria Ignez é composto de 304 páginas, sendo dividido em duas partes, parte 1 trata de números, estatística e funções e parte 2, trigonometria. Essa ultima parte divide-se em duas unidades, trigonometria do triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e Trigometria) e relações trigonométricas em um triângulo qualquer (Teorema dos senos, da área e dos cossenos).

Nosso olhar Matemática. Livro de autoria de Joamir Roberto de **Souza** é composto de 320 páginas, organizado em quatro unidades e cada uma delas subdividida em capítulos. Unidade 1 encontra-se conjuntos; unidade 2, funções; unidade 3 , progressões numéricas e unidade 4, trigonometria no triângulo (Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo e qualquer).

Número e fração de páginas dedicadas a Tales e semelhança. Neste momento são apresentados o número total de páginas de cada livro, o número de páginas dedicadas à geometria e o total de páginas dedicadas ao Teorema de Tales e semelhança juntos, incluindo as atividades propostas e resolvidas. Além disso, são apresentadas as porcentagens que os autores dedicaram à geometria em relação ao todo, da mesma forma com a parte de Teorema de Tales e semelhança.

Livros Didáticos	Total de páginas	Páginas dedicadas à geometria	Páginas dedicadas a Tales e à semelhança
Conexões com a M.	295	$42 \approx 14\%$	$11 \approx 4\%$
M. Contexto & Aplicações	296	$26 \approx 8\%$	$9 \approx 3\%$
M. Paiva	304	$50 \approx 16\%$	$6 \approx 2\%$
M. Ciências e Aplicações	320	$36 \approx 11\%$	$15 \approx 5\%$
M. Ensino Médio	304	$42 \approx 13\%$	$3 \approx 1\%$
Nosso Olhar M.	320	$38 \approx 11\%$	$6 \approx 2\%$

Tabela 2.3: Percentual do total das páginas que são dedicadas à geometria e ao tema em análise.

Na segunda versão da Base Nacional Comum Curricular ([Brasil, 2016a]) a Matemática foi dividida em 5 unidades temáticas, uma delas era geometria. Das 45 habilidades destinadas ao Ensino Médio, 12 eram de geometria, isto corresponde a aproximadamente 27% do total de habilidades. Também no Guia do PNLD de 2015 ([Brasil, 2014b]) a Matemática estava dividida em 6 campos. Dois deles eram Geometria e Geometria Analítica, o que corresponde a aproximadamente 33% dos campos.

É claro que algumas habilidades das unidades temáticas devem gastar mais páginas que outras e o mesmo pode acontecer entre os campos do Guia do PNLD, mas a discrepância entre o percentual de geometria dedicado nestes livros quando confrontados com os valores 27% e 33% sugerem a possibilidade de que a Geometria tem um menor destaque dentro da formação dos estudantes do Ensino Médio frente as demais áreas visto que os livros dedicam entre 8% e 16% do total de páginas com esta unidade temática.

Rede semântica de Teorema de Tales e semelhança. Segundo Haruna (2000), na semântica do Teorema de Tales estão semelhança, homotetia e razões trigonométricas:

> Visando a uma possível solução para questão *'Em que medida, e por quais meios, ao ensiná-lo, consegue-se organizar os três pontos de vista?'* e refletindo sobre uma possível rede semântica, notamos que os conceitos tais como: Homotetia (H); Semelhança (S); Razões trigonométricas (T) e o Teorema de Tales (TT), de uma certa forma, tratam da proporcionalidade entre segmentos e implícita ou explicitamente de paralelas. Sendo

> assim, podemos combinar esses conteúdos em diversas sequências de ensino formando uma rede sintagmática, na qual cada conceito pode ser formado a partir do conceito apreendido anteriormente. ([Haruna, 2000], p. 52)

Os livros analisados não trazem um padrão de sequência destes assuntos. Cinco deles abordam relações trigonométricas por último, os livros do Leonardo e Iezzi são as únicas obras que iniciam o capítulo com semelhança, os demais começam com o Teorema de Tales. Nenhum dos livros analisados abordam homotetia, o livro do Paiva não traz razões trigonométricas e os livros da Smole e Souza não tratam de semelhança.

A tabela 2.4 resume a presença ou não de cada um destes tópicos e a ordem em que são apresentados.

Livro Didático	1°	2°	3°	4°
Conexões com a Matemática [Leonardo]	S	TT	T	
Matemática: Contexto &s Aplicações [Dante]	TT	S	T	
Matemática Paiva [Paiva]	TT	S		
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi]	S	TT	S	T
Matemática Ensino Médio [Smole]	TT	T		
Nosso Olhar [Souza]	TT	T		

Tabela 2.4: Ordem dos conteúdos relacionados (S: semelhança, TT: Teorema de Tales e T: Razões trigonométricas).

O conceito de semelhança não depende do Teorema de Tales para ser apresentado. Contudo, a justificativa dos casos de semelhança geralmente faz uso do Teorema de Tales, de modo que, se os casos de semelhança forem justificados, então o Teorema de Tales deverá ser apresentado antes. Deste modo, cabe comparar essa sequência com a tabela 2.4, que traz os livros do Dante, Paiva e Iezzi, os quais abordam os casos de semelhança de triângulos, porém somente este último demonstra os casos.

Vale ressaltar a metodologia que o Iezzi desenvolveu em seu livro, inicia o capítulo "Semelhança e triângulos retângulos" com mapas e escalas, define semelhança de triângulos; mais adiante, demonstra o Teorema de Tales e prova os casos de semelhança de triângulos. No capítulo seguinte, usa semelhança de triângulos para justificar que as razões trigonométricas estão bem definidas.

Exercícios resolvidos, propostos e contextualizados. Será analisada a quantidade de exercícios resolvidos e propostos nas seções sobre Teorema de Tales (tab. 2.5) e sobre semelhança (tab. 2.6) e contabilizados o porcentual de exercícios contextualizados que cada obra oferece. A maioria desses livros traz a teoria desses conteúdos numa seção específica e em seguida são disponibilizadas atividades resolvidas e posteriormente, propostas, com exceção do livro do Iezzi, que traz Teorema de Tales na seção sobre semelhança de triângulos para provar os casos de semelhança; porém, neste caso as atividades propostas que podiam ser resolvidas usando tales, foram resolvidas usando semelhança, então foram contabilizadas na tabela 2.6, que quantifica os exercícios da seção sobre semelhança.

Em relação à contextualização, no documento de Orientação Curricular para Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias do MEC, encontra-se a seguinte observação:

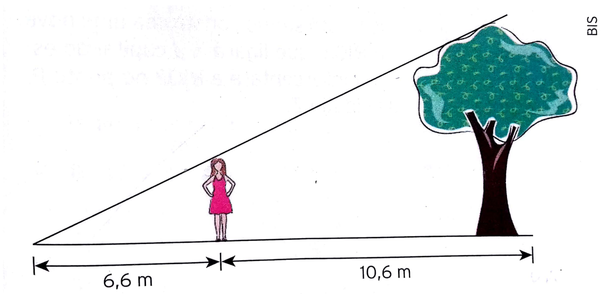
> É na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua [...]. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na Escola ([Brasil, 2006], p.83).

Segundo [Azambuja, 2013], contextualizar os conceitos matemáticos, para o ensino, significa articular vivências concretas e diversificadas, que podem oportunizar um aprendizado significativo. No caso da matemática, pode-se a partir das vivências, perceber e interpretar os conceitos matemáticos presentes na vida do estudante, para que futuramente ele saiba lidar com situações que os remetem ao que foi aprendido.

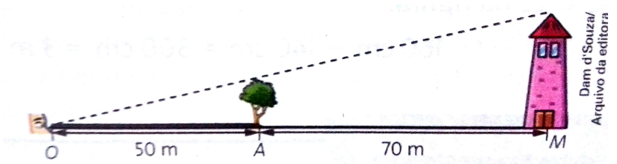
Ao explanar sobre contexto, os PCNEM afirmam ser aquele "que é mais próximo do aluno e mais facilmente explorável para dar significados aos conteúdos da aprendizagem é o da vida pessoal, cotidiana e convivência" ([Brasil, 1999], p.81). Valendo-se dessa valorização do contexto para o ensino "(...) acredita-se que a prática dos educadores pode explorar situações conhecidas pelos alunos, em prol da realização de atividades que envolvam o interesse dos mesmos e facilitem o entendimento de conceitos matemáticos" ([Azambuja, 2013] p.20).

Nas tabelas 2.5 e 2.6 a seguir foram consideradas contextualizadas, quaisquer atividades que envolvam alguma relação com mundo real, incluindo questões que fazem relações com contexto histórico e com outras disciplinas, pois acredita-se que foi dessa maneira que os autores consideraram contextualizadas. Abaixo estão três exemplos de atividades que foram contabilizadas como contextualizadas; embora, é notório que na primeira não exista realmente uma contextualização envolvida, mas apenas o uso de objetos do mundo real.

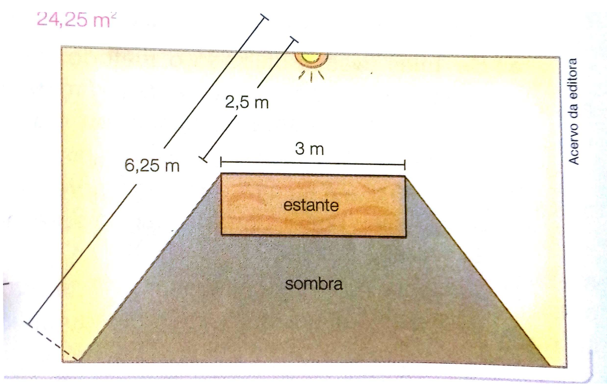
Exemplo 01)ER5 [1]. A altura de Milu é $1,65m$. Qual é a altura da árvore? ([Smole, 2013], p.241)



Exemplo 02) Na figura abaixo considere que a medida da altura da árvore é 10 m, a distância entre ela e o observador é 50 m e a distância da árvore ao ponto M é 70 m. Considerando o olho do observador, o topo sa árvore e o topo da torre estão alinhados, qual é, aproximadamente, a medida da altura da torre?([Dante, 2014], p.241)



Exemplo 03) A figura ilustra a vista superior de um cômodo, de área igual a 40 m^2, com uma luminária ligada e uma estante posicionada à sua frente, paralela às paredes do cômodo. A estante ocupa uma área de $3m^2$ e dista 2 m da parede sombreada. A partir dessas informações, e de acordo com as medidas indicadas no esquema, calcule a área do piso do cômodo que está sendo iluminada.



[1]Quinto exercício resolvido da seção: “Trigonometria do triângulo retângulo“ do livro da Smole.

Livros Didáticos	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Contextualizados resolv.+propostos
Conexões com a M. [Leonardo]	1	5	$1+2 \approx 50\%$
M. Contexto & Aplicações [Dante]	3	6	$1+2 \approx 33\%$
M. Paiva [Paiva]	1	2	$0+1 \approx 33\%$
M. Ciências e Aplicações [Iezzi]	0	0	$0+0 \approx 0\%$
M. Ensino Médio [Smole]	3	6	$1+3 \approx 45\%$
Nosso Olhar M. [Souza]	4	11	$0+5 \approx 33\%$

Tabela 2.5: Quantitativo de exercícios nas seções sobre o Teorema de Tales.

Da tabela 2.5 vale destacar que um dos livros não possui qualquer exercício sobre Teorema de Tales, dois possuem quase metade dos exercícios contextualizados e 3 possuem um terço dos exercícios tratando do mundo real. Nota-se, entretanto, que há poucos exercícios sobre o assunto, levando a crer que este assunto não seja prioridade para maioria dos autores. Souza dispõem a maior quantidade de tarefas em relação aos outros, porém, dessas 15 atividades, contextualiza somente 5 ($\approx 33\%$) propostas.

Livros Didáticos	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Contextualizados resolv.+propostos
Conexões com a M. [leonardo]	4	11	$0+4 \approx 27\%$
M. Contexto & Aplicações [Dante]	3	19	$1+4 \approx 23\%$
M. Paiva [Paiva]	2	6	$1+3 \approx 50\%$
M. Ciências e Aplicações [Iezzi]	2	21	$0+2 \approx 9\%$
M. Ensino Médio [Smole]	0	0	$0+0 \approx 0\%$
Nosso Olhar M. [Souza]	0	0	$0+0 \approx 0\%$

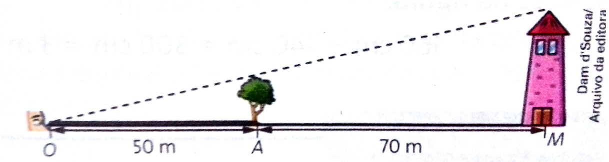
Tabela 2.6: Quantitativo de exercícios nas seções sobre semelhança.

Da tabela 2.6, sobre os exercícios de semelhança, destaca-se que os livros de Leonardo, Dante e Iezzi trazem um bom quantitativo de atividades (de 15 à 23) para o professor trabalhar em sala de aula. Porém, a média percentual de exercícios contextualizados desses três livros é aproximadamente 20%, o que nos parece pouco para o tema. O livro de Paiva traz somente oito atividades, sendo três contextualizadas. Entretanto, essa orientação pedagógica é necessária e segundo uma das recomendações dos PCN:

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de expectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da Transposição Didática, o conteúdo de ensino provoque aprendizagens significativas. ([Brasil, 1999], p.79)

Os dois últimos livros de autoria da Smole e Souza não possuem uma seção própria sobre semelhança, mas há exercícios de semelhança na seção sobre Teorema de Tales, os quais foram contabilizados na tabela de atividades sobre Teorema de Tales (tab.2.5). Na seção sobre Tales, Smole traz com poucas palavras semelhança de triângulos como consequência de Tales. Porém apresenta um exercício resolvido (ER5) sobre semelhança, dizendo que está usando Teorema de Tales e um outro (ER6) que diz usar a consequência de Tales, mas aplica semelhança de triângulos.

ER5.([Smole, 2013], p.241) Na figura abaixo considere que a medida da altura da árvore é 10 m, a distância entre ela e o observador é 50 m e a distância da árvore ao ponto M é 70 m. Considerando o olho do observador, o topo da árvore e o topo da torre estão alinhados, qual é, aproximadamente, a medida da altura da torre?



Resolução
Pelo Teorema de Tales para triângulos, chamando de h a altura da árvore, temos:

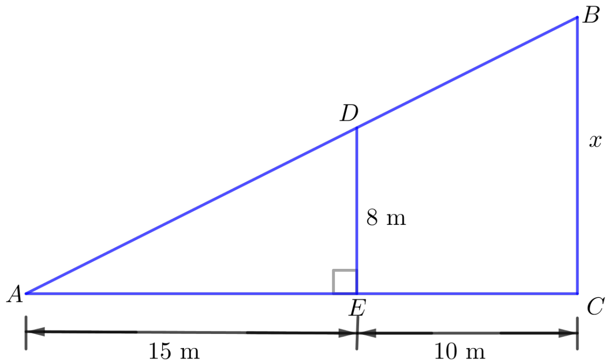
$$\frac{1,65}{h} = \frac{6,6}{6,6+10,6}$$

$$1,65\ .\ 17,2 = 6,6h$$

$$h = 4,3m$$

Logo, a altura da árvore é $4,3m$.

ER6.([Smole, 2013], p.241) Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Resolução
Em consequência do Teorema de Tales, podemos escrever:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{15+10} = \frac{8}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{25} = \frac{8}{x} \Rightarrow 15x = 8.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{200}{15} = \frac{40}{3} \Rightarrow x \cong 13,3$$

Logo, o valor procurado é $\frac{40}{3}$ m ou, aproximadamente, $13,3$ m.

No livro do Souza é esperado que se os exercícios estão na seção sobre Tales, então os mesmos exploram os conceitos dados anteriormente. Por esses motivos que se deu a decisão de contá-los na seção em que estão inseridos. O questionamento do mérito do conteúdo na resolução do exercício resolvido ou proposto será exposto, mais adiante, na seção sobre Principais exercícios (seção 2.6).

Vale destacar que Leonardo traz no final do capítulo, "Semelhança e os triângulos", vinte exercícios complementares e encerrando com nove exercícios de autoavaliação. Desse total de vinte e nove exercícios que não foram contabilizados nas tabelas anteriores, pois elas computam as atividades inseridas nas seções de Tales e semelhança, além de Teorema de Tales e semelhança, é explorado Teorema de Pitágoras e relações métricas do triângulo retângulo. O interessante é que Leonardo montou essa lista de forma gradativa de complexidade: Aplicação (APL) - Aprofundamento (APR) - Desafio (DES) - Autoavaliação (AUT). A outra ideia dele, foi misturar as atividades com suas respectivas aplicabilidades de um ou mais conceitos. Observe na tabela 2.7 a quantidade de exercícios que exigiam os conceitos trabalhados nesse capítulo do livro;

Tema/complexidade	APL	APR	DES	AUT
Teorema de Tales	3	0	0	2
Semelhança	5	3	1	5
Teorema de Pitágoras	2	4	1	1
Relações métricas	1	0	0	1

Tabela 2.7: Exercícios extras no livro de Leonardo.

Leonardo também traz no final desses exercícios uma tabela em que relaciona os noves exercícios da lista de Autoavaliação e faz uma relação com os objetivos do capítulo. Se o aluno não acertar a questão, essa tabela traz, na última linha, a página que ele precisa estudar novamente e em seguida retornar para refazer os exercícios correspondentes. Observe a tabela "Retomada de conceitos" (ver tabela 2.8).

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Identificar figuras planas semelhantes e a razão de semelhança entre elas.	X	X	X	X	X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.				X	X	X		X	X
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e demais relações métricas no triângulo retângulo.							X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	234 a 238	238 a 244	238 a 241	241 a 244	241 a 244	244 a 249	244 a 249	244 a 249	244 a 249

Tabela 2.8: Retomada de conceitos ([Leonardo, 2013], p.252).

2.2 Introdução aos capítulos de Teorema de Tales e semelhança

Nesta seção é apresentada uma análise comparativa das introduções dos capítulos que contém os conteúdos sobre Teorema de Tales e semelhança nos livros didáticos aprovados no PNLD de 2015. Paiva e Smole não iniciam os capítulos com semelhança ou Teorema de Tales. Nesse caso, é mostrado como eles iniciam as seções que contém esses conteúdos.

No livro do Paiva, o capítulo "Geometria: triângulos e proporcionalidade" é divido em seções. Antes de abordar Teorema de Tales, ele inicia com um texto histórico abordando as origens da geometria e na sequência revisa os conteúdos de polígonos, triângulos e propriedades dos triângulos. Smole também divide o capítulo "Trigonometria do triângulo retângulo" em seções, começando com triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras e em seguida apresenta o Teorema de Tales.

Os seis livros iniciam os capítulos ou as seções de uma das seguintes formas: comparação de mapas, ampliação e redução de figura planas e contexto histórico. Smole opta por apresentar o enunciado de semelhança diretamente sem qualquer motivação; Leonardo, Dante, Iezzi e Souza segue a mesma ideia para abordagem do Teorema de Tales.

Smole e Souza trazem somente uma seção sobre Tales, sendo que a primeira autora apresenta semelhança de triângulos nessa mesma seção; o segundo, não aborda semelhança. A tabela 2.9 resume estas escolhas.

Livros Didáticos	Semelhança	Teorema de Tales
Conexões com a M. [Leonardo]	comparação de mapas	enunciado
M. Contexto & Aplicações [Dante]	contexto histórico	enunciado
M. Paiva [Paiva]	ampliação e redução	contexto histórico
M. Ciências e Aplicações [Iezzi]	comparação de mapas	enunciado
M. Ensino Médio [Smole]	enunciado	enunciado
Nosso Olhar M. [Souza]	não aborda o tema	contexto histórico

Tabela 2.9: Formas de introduções aos conceitos matemáticos.

Cada uma das escolhas por introdução contextualizada será um pouco melhor detalhada nas subseções a seguir.

2.2.1 Comparação de mapas

Somente os livros de Leonardo e do Iezzi iniciam semelhança com mapas e comparações de escalas, como estratégia de motivação. O primeiro, apresenta um globo e dele extrai diferentes mapas de projeções cartográficas (cônica, cilíndrica e plana). Desse modo, verifica-se um trabalho interdisciplinar com a Geografia e transversal com uma questão da vida real. Segundo o PCN, a interdisciplinariedade:

> $(\cdots)$ questiona a segmentação entre os diferentes campos do conhecimento produzida por uma abordagem que não leva em conta a inter-relação e a influência entre eles, questiona a visão compartimentada (disciplinar) da realidade sobre a qual a escola, tal como é conhecida, historicamente se construiu. ([Brasil, 1997b], p.31).

A transversalidade diz respeito

> $(\cdots)$ à possibilidade de se estabelecer, na prática educativa uma relação entre aprender conhecimento teoricamente sistematizados (aprender sobre a realidade) e as questões da vida real e de sua transformação (aprender a realidade da realidade). ([Brasil, 1997b], p.31)

Segundo Leonardo (p. 234), diante da evolução humana e o conhecimento do planeta em forma arredondada, num certo momento, surgiu a necessidade de representar o mundo na forma plana. Contudo, é impossível representá-lo preservando as distâncias. Existem, no entanto, técnicas elaboradas para criar representações gráficas ou mapas de superfície terrestres, a essas representações dá-se o nome de projeções cartográficas terrestres. Observa-se na seguinte figura 2.1 os três tipos de projeções dadas pelo autor: projeção cônica, cilíndrica e plana; cada uma com um tipo de deformação e particularidades;

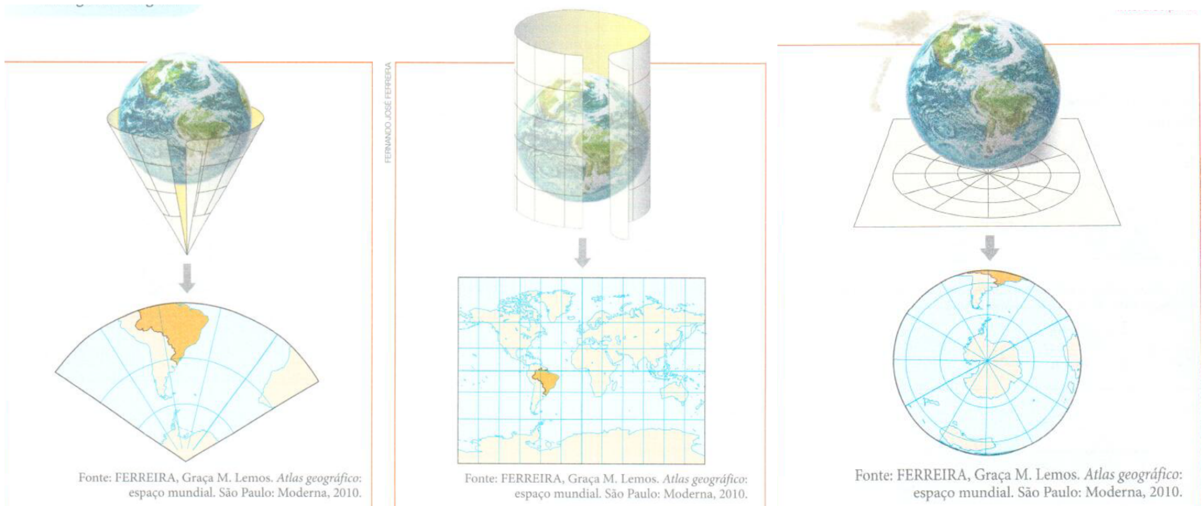


Figura 2.1: Mapa mundi (Projeções: cônica, cilíndrica e plana)([Leonardo, 2013], p.232).

- Na *projeção cônica*, a deformação fica mais evidente nas baixas latitudes (próximas ao Equador) e os hemisféricos não podem ser projetados simultaneamente;
- Na *projeção cilíndrica*, a deformação fica mais evidente nas médias e altas latitudes (próximas dos pólos).
- Na *projeção plana ou azimutal*, na qual o plano de projeção é tangente a um dos polos, possibilita menor grau de deformação nas representações de parte de um continente. ([Leonardo, 2013], p. 234 e 235)

Escolhida a projeção que possua o melhor formato e o mínimo de deformação, é confeccionado o mapa, que serve como uma aproximação do mundo real que seja mais adequada ao uso. A fim de relacionar a cartografia com semelhanças, o autor afirma que para fazer uso dele é necessário o uso de escala que estabelece razão entre a distância no mapa e no modelo de mundo real plano.

Em seguida, exemplificando, Leonardo apresenta dois mapas do Brasil, cada um com um quadrilátero com vértices nos pontos extremos do país, o primeiro de escala $1 : 100 \cdot 10^6$ e o segundo, $1 : 75 \cdot 10^6$, conforme a figura 2.2.

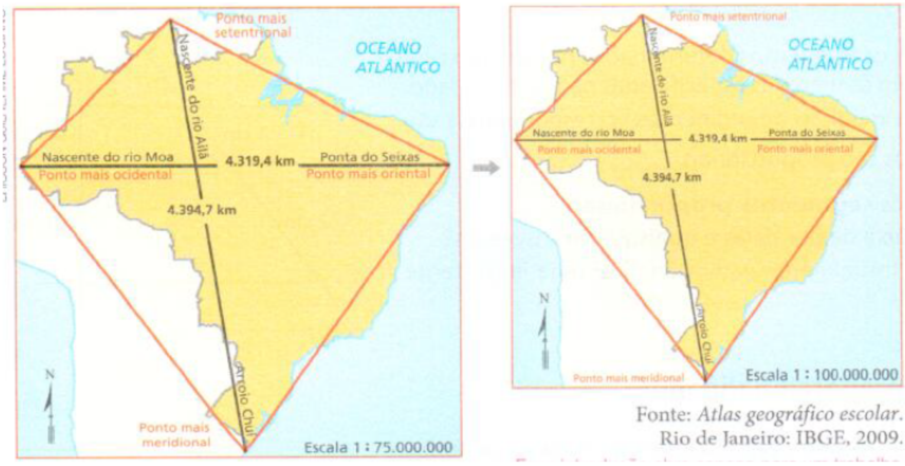


Figura 2.2: Mapas do Brasil [Leonardo, 2013] p.235.

O autor propõe aos alunos, numa reflexão ao lado da figura, medir os lados e diagonais desses quadriláteros e realizarem as seguintes tarefas: A primeira tarefa os alunos trabalham com um fator multiplicativo da escala para encontrar a distância no mundo real; na segunda, eles descobrem o valor da razão de semelhança, dividindo o comprimento de um lado pelo comprimento do outro lado e na terceira, eles verificarão se os ângulos correspondentes são iguais. Desse jeito, a finalidade dessas tarefas é fazer com que o aluno tenham uma ideia da importância de uma escala em um mapa e perceber que se os lados de dois polígonos são proporcionais e os ângulos congruentes, então estão diante de figuras semelhantes.

> 1º) Multiplicar por 100.000.000 as medições encontradas nas diagonais do mapa da direita e comparar com a distância indicada, ou seja, a intenção é mostrar ao aluno que quando ele multiplica por esse número, que é o valor da escala, encontra-se o *valor real* da distância entre as cidades dos extremos;
>
> 2º) Calcular a razão entre as medidas dos lados do quadrilátero da esquerda e a medida dos lados do quadrilátero da direita, ou seja, o aluno observará que a razões são aproximadamente iguais
>
> 3º) Medir os ângulos dos quadriláteros e observar que os ângulos correspondentes são iguais. ([Leonardo, 2013], p. 236)

Vale ressaltar em sala de aula que quando Leonardo e outros autores trazem estes mapas com escalas altas, consequentemente as deformações aumentam. Segundo [de Menezes and Neto, 1999]:

> " (...) quanto menor a escala cartográfica, maior será o grau de generalização aplicado, buscando-se a clareza e legibilidade da representação. Como a redução de escala é aplicada à qualquer representação cartográfica, pode-se inferir que os processos de generalização também serão aplicados à todas essas representações. Assim, quanto mais generalizada for uma representação, mais distante da realidade poderá estar"([de Menezes and Neto, 1999], p.3)

Quando o autor pede o *valor real* da distância entre as cidades; na verdade, devido a escala alta que gera distorções, implica numa distância que não é real.

Iezzi inicia também o tema semelhança comparando dois mapas do Brasil, em escalas diferentes e retas ligando as cidades (ver a fig. 2.3)

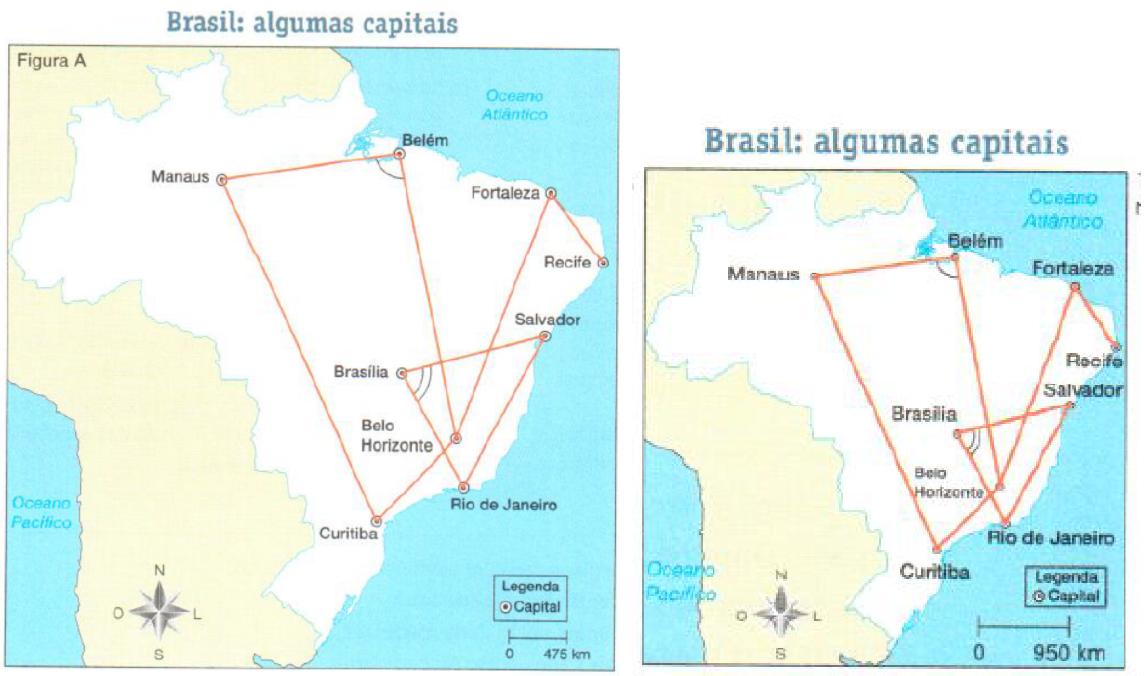


Figura 2.3: Figuras (mapa A e B) do mapa do Brasil [Iezzi, 2013], p.236.

No mesmo espírito de Leonardo, Iezzi propõe ao estudante fazer a medição da distância de duas cidades quaisquer no mapa A e B (fig. 2.3); em que será observado que uma é o dobro da outra e orienta medir os ângulos formados pelas restas, os quais são iguais. Em seguida, cita duas medições em cada mapa, para mostrar que as distâncias se tornam a metade do mapa maior para o menor, definindo razão de semelhança. Em relação aos ângulos, é dito que eles preservam o formato das figuras e são mantidos quando a figura é ampliada ou reduzida. Por fim, nota-se que os dois autores trouxeram ideias parecidas para mostrarem as duas condições (medidas proporcionais e medidas angulares congruentes) para que figuras poligonais sejam semelhantes. Da discussão de Leonardo sobre cartografia, pode-se inferir que, embora os mapas possam ser semelhantes entre si, quando se escolhe o mesmo tipo de projeção, nenhum deles é realmente semelhante à fronteira de uma região (mesmo que pequena) do globo terrestre. Iezzi sequer toca no assunto.

Vale destacar que Iezzi além de introduzir o conceito de semelhança comparando dois mapas, traz uma outra introdução, a parte, definindo triângulos semelhantes. Desenha dois triângulos de ângulos iguais e em seguida coloca um dentro do outro e diz o seguinte: "é possível colocar o triângulo menor (ABC) dentro do maior (DEF), de maneira que seus lados fiquem respectivamente paralelos."([Iezzi, 2013], p. 239). Uma observação curiosa é o motivo do autor posicionar os triângulos desta maneira (ver fig. 2.4), a qual não é perceptível verificar a vantagem nesta posição em relação à usualmente apresentada com dois lados do triângulo menor sobre os lados do maior; sendo assim, seria mais claro a visualização de bases paralelas e dos ângulos coincidentes em um dos vértices. Outro ponto interessante é que a definição de figuras semelhantes dada no início do capítulo não foi retomada aqui, tendo os triângulos como figuras particulares, o autor preferiu apresentar semelhança especificamente para triângulos de maneira independente.

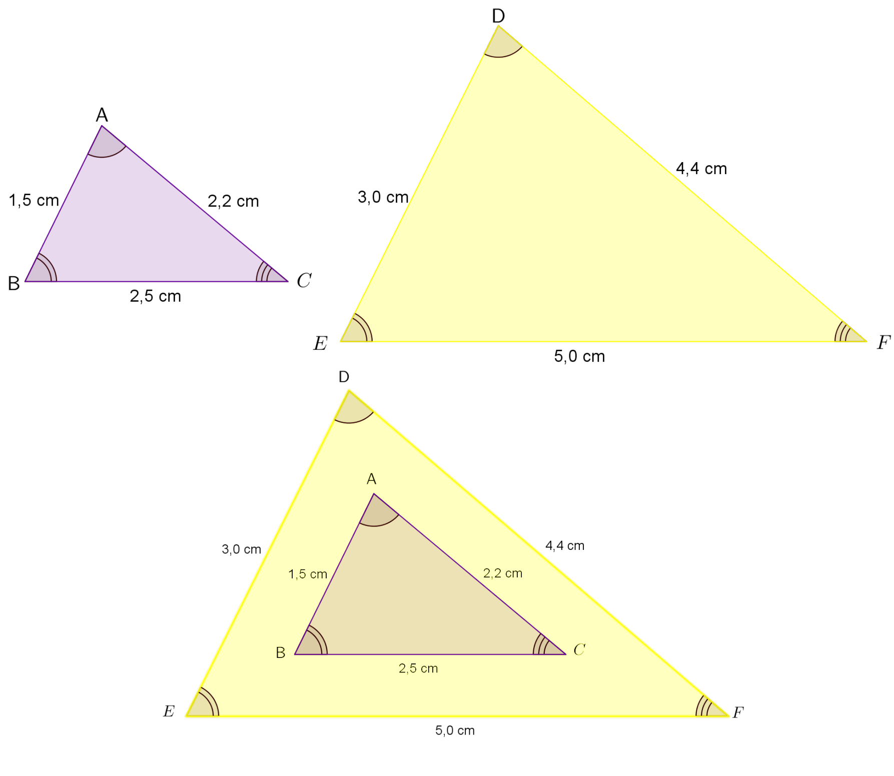


Figura 2.4: Triângulos encaixados.

2.2.2 Ampliação e redução de figuras planas

O livro do Paiva (2013 p.74) inicia a seção sobre semelhança de figuras planas, apresentando o exemplo de uma loja que vende televisores, nas vitrines dessas lojas, geralmente há dois ou mais televisores mostrando alguma imagem, sendo essas imagens de mesmo formato, mas os televisores sendo de tamanhos diferentes. Dessa maneira, ele define figuras semelhantes, sendo da mesma forma, independente se têm o mesmo tamanho. A figura 2.5 ilustrativa dessa introdução, aparentemente traz imagens de televisores de mesmo tamanho; com isso, a figura não está contribuindo para diferenciar formato e tamanho da imagem.

Figura 2.5: Loja com vários televisores ligados ([Paiva, 2013], p.74)

Por outro lado, após introduzir no capítulo "A semelhança e os triângulos" com mapas e em seguida enunciar o Teorema de Tales, Leonardo (2013, p. 238) trata semelhança com mais detalhes, trazendo uma ideia de semelhança no dia-a-dia. Ao comparar com a introdução do Paiva, Leonardo traz uma situação mais compreensível de ocorrência de ampliação ou redução numa foto; a qual, o objeto fotografado não se deforma. Diante da figura adiante, será avaliado pelo professor se os alunos percebem se as fotos preservam o formato da imagem (ver fig. 2.6).

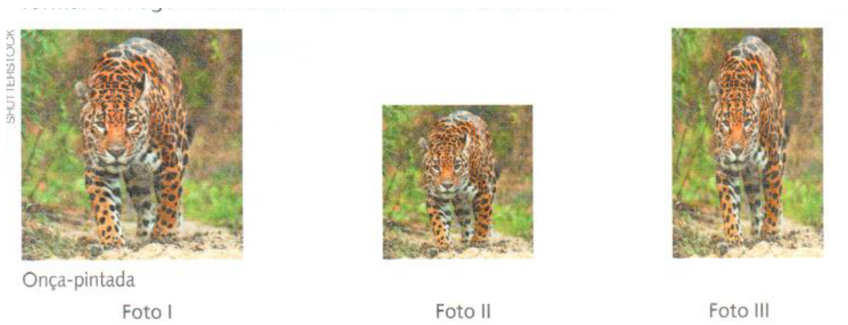


Figura 2.6: Foto de uma onça pintada ([Leonardo, 2013]., p.239)

2.2.3 Contexto histórico

No Brasil, uma das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) na forma de abordar os conteúdos de matemática, em sala de aula, é a utilização da História da Matemática. Segundo os PCN, este recurso permite que:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 34)

Quanto às habilidades e competências, no que se refere à contextualização sócio cultural, o PCN do Ensino Médio (PCNEM) estabelece que o aluno deva:

- Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio.
- Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolveram por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade. ([Brasil, 2000], p.13)

Dos seis livros analisados, quatro trazem contextos históricos. Dante apresenta o texto no início da seção sobre semelhança de triângulos e em seguida apresenta o conceito de Teorema de Tales; Paiva e Sousa introduzem o capítulo da mesma forma, porém antes do Teorema de Tales. Smole também traz um texto histórico similar aos anteriores; porém, a maneira como o texto aparece neste livro, não estimula o professor a utilizá-lo de forma a fazer parte do processo de ensino do conteúdo, ele surge no final da abordagem do Teorema de Tales, ganhando assim um caráter ilustrativo e informativo, mas pouco pedagógico. Abaixo segue uma tabela que resume a localização dos textos que trazem uma abordagem histórica de Tales de Mileto para introduzir o conceito de semelhança ou Teorema de Tales.

Livros	Localização do contexto histórico
Contexto & Aplicações [Dante]	No início da seção de semelhança de triângulos;
M. Paiva [Paiva]	No início da seção de Teorema de Tales;
M. Ensino Médio [Smole]	No fim da seção de Teorema de Tales;
Nosso Olhar M. [Souza]	No início da seção de Teorema de Tales.

Tabela 2.10: Contexto histórico.

Dante observa a utilidade destes conhecimentos ao longo da história da humanidade para cálculo de distâncias na Terra, para o estabelecimento das razões trigonométricas e conta a história de que Tales teria usado o teorema que hoje possui o seu nome para calcular a altura de uma pirâmide usando o comprimento de sua sombra e o de uma vareta fincada no chão. Observe que até aqui a História da Matemática está sendo utilizada para ressaltar onde se usam estes conhecimentos, mas não para ressaltar como eles foram utilizados.

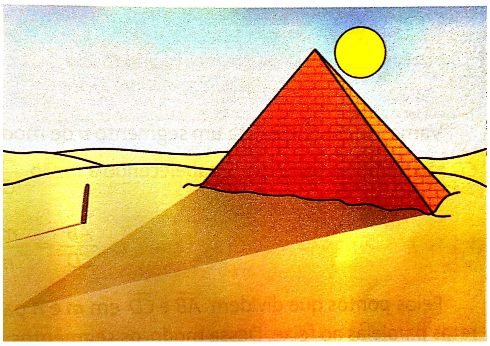


Figura 2.7: Sombra formado por uma pirâmide e uma vareta. ([Dante, 2014], p.235)

Paiva, por outro lado, sequer indica qualquer uso da matemática em sua contextualização histórica na sua introdução, antes afirma que:

> Tales de Mileto é considerado o primeiro filósofo grego e é também o primeiro homem da história a quem se atribuem descobertas matemáticas específicas-embora, antes dele, a humanidade já tivesse acumulado um conhecimento matemático. Um dos teoremas associados ao nome de Tales trata da proporção entre segmentos de reta, conforme enunciado a seguir. ([Paiva, 2013], p. 72)

Sousa traz em seu contexto histórico informações prescindíveis, informando a época , local que Tales viveu e a contribuição que ele deu a outras áreas de conhecimento. Concluindo seu texto, informa que Tales calculava altura de uma pirâmide usando semelhança de triângulos e que desse método resultou o Teorema de Tales. Mas não deixa claro *como* Tales teria utilizado semelhança de triângulos para efetuar tal cálculo.

Smole introduz o conceito de Teorema de Tales de forma bem tradicional, desenha um feixe de retas paralelas na horizontal cortadas por duas transversais e informa a relação de proporcionalidade. Além disso, faz um ligação desse teorema com o Teorema Fundamental da Semelhança (TFS). Por fim, apresenta um contexto histórico que não traz nenhuma conexão com o que estava sendo apresentado anteriormente. Nesse texto, traz também informação dispensáveis para o conhecimento do aluno, informa as profissões que Tales de Mileto exerceu, relata que ele conquistou a admiração do rei da época onde vivia, pela criatividade de medir as alturas das pirâmides a partir das sombras daqueles monumentos, ressalta o uso de semelhança de triângulos por Tales para calcular a distância de navios e praia e finaliza que ele se tornou célebre ao prever eclipse solar. A autora contudo não se preocupou em apresentar ao estudante *como* a matemática foi utilizada, mas se restringiu a explicar *onde* e por *quem* ela foi utilizada.

As informações obtidas em textos antigos sobre o modo como Tales mediu a altura são fornecidas por [Boyer, 1996], p.32: "Diógenes Laertius, seguido por Plínio e Plutarco, relata que ele mediu a altura das pirâmides do Egito observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical é igual à sua altura." Segundo [EVES, 1996]:

> Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos.([Boyer, 1996], p.115)

O livro do Dante se destaca positivamente no contexto histórico para introdução de semelhança de triângulos em relação às outras obras, pois traz a figura 2.7 de mera ilustração que traz a ideia de como Tales calculava a altura de uma pirâmide. A imagem não é explorada do ponto de vista matemático, mas oferece ao professor uma oportunidade de reviver momentos históricos e apresentar com clareza um uso concreto de semelhança de triângulos.

Aproveitando essa figura do Dante, é valido deixar uma sugestão didática ao professor, a qual o docente faria no quadro um esquema traçando os raios solares paralelos e as sombras formadas pela pirâmide e a vareta, conforme figura 2.8 à direita.

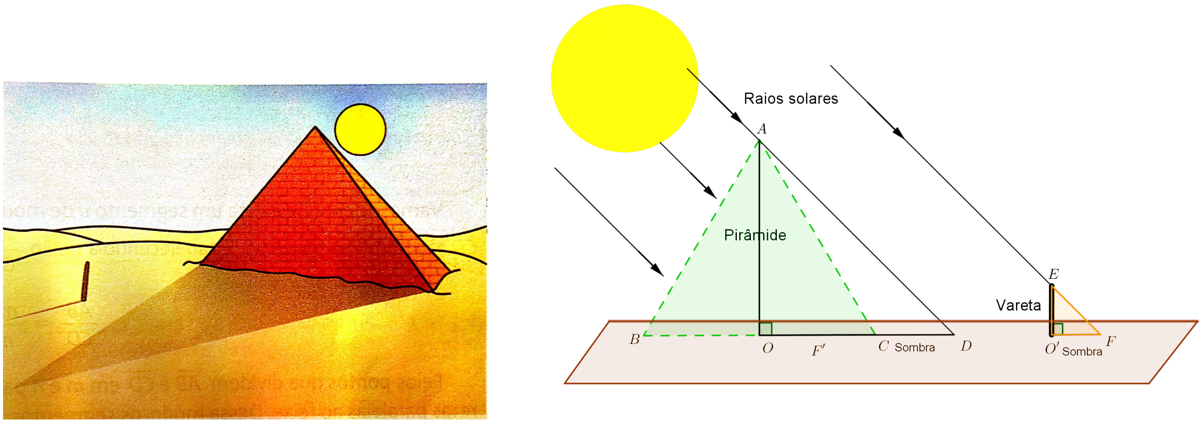


Figura 2.8: Sombra formada por uma pirâmide e uma vareta.

Contudo, se o professor decidir iniciar o capítulo explorando esse contexto histórico e em seguida conceituar semelhança de triângulos, pode ser uma boa sugestão de acrescentar essa história e a reconstrução da figura, como forma de motivação. Nesse caso, mostrará como pode ter surgido a ideia de semelhança de triângulos quando Tales de Mileto media a altura das pirâmides.

2.3 Enunciados e demonstrações do Teorema de Tales

O objetivo desta seção é comparar os enunciados de Teorema de Tales que cada autor apresenta, destacar os livros que trazem demonstrações do teorema e de que forma elas são apresentadas.

Enunciados do Teorema de Tales (Tales Theorem). Cada autor precisou escolher uma forma de enunciar o teorema que julgou ser mais apropriada ao contexto da obra e ao entendimento de seus estudantes. A clareza do enunciado de um teorema pode ser determinante para o aprendizado. [Haruna, 2000] listou diversas formas de enunciar este teorema; porém, aqui serão destacadas apenas duas que se assemelham aos enunciados apresentados pelos autores dos livros em análise.

Como é usual, o Teorema de Tales pode ser estruturado da forma *"se p então*

q", onde p e q são respectivamente a hipótese e a tese do teorema. As formas que aparecem nos textos em questão são:

Formato 1. p: duas retas são transversais a um feixe de paralelas;

q: a razão entre dois segmentos quaisquer[2] de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes das outras.

Teorema: Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Formato 2. p: um feixe de retas paralelas produzem sobre duas transversais quaisquer, segmentos homólogos;

q: as medidas desses segmentos são proporcionais;

Teorema: Se um feixe de retas paralelas produzem, sobre duas retas transversais quaisquer, segmentos homólogos, então as medidas desses segmentos são proporcionais. ([Haruna, 2000], p.40)

Diante dessas duas formas de enunciar o Teorema de Tales, será mostrado na tabela 2.11 como cada livro traz seu formato de estruturação do enunciado sobre Tales comparado as duas formas de enunciar citado pela [Haruna, 2000].

Livro Didático / Autor principal	Formato 1	Formato 2
Conexões com a Matemática [Leonardo (2013)]		X
Matemática: Contexto & Aplicações [Dante (2014)]	X	X
Matemática Paiva [Paiva (2013)]		X
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi (2013)]	X	
Matemática Ensino Médio [Smole (2013)]	X	
Nosso Olhar [Souza (2013)]		X

Tabela 2.11: Estrutura do enunciado

As duas formas de enunciar o Teorema de Tales há termos em comum: "feixe de retas paralelas" e "retas transversais" que Leonardo e Dante definem da seguinte forma antes da apresentação do enunciado:

- **Feixe de retas paralelas**: é um conjunto de retas distintas de um plano, paralelas entre si.

[2]Os segmentos quaisquer desta reta são determinados pelas paralelas.

- **Reta transversal**: é uma reta do plano que intersecta todas as retas do feixe.

Quanto à representação gráfica do enunciado do teorema; Paiva, Dante, Iezzi e Souza trazem exemplos de "segmentos correspondentes" formados pelo feixe de retas paralelas na horizontal sobre duas transversais. De forma diferente, Leonardo apresenta, no início do capítulo, esta representação gráfica diferente, o feixe de retas paralelas são desenhadas inclinadas (ver fig.2.9), de modo que mostra aos alunos uma forma diferente de desenhar esse feixe. Porém, logo em seguida esse mesmo autor transcreve a relação de proporcionalidade referente a um feixe na horizontal, conforme a figura 2.10 e igual aos demais autores. Observe como ele desenha na figura 2.9 e a relação de correspondência:

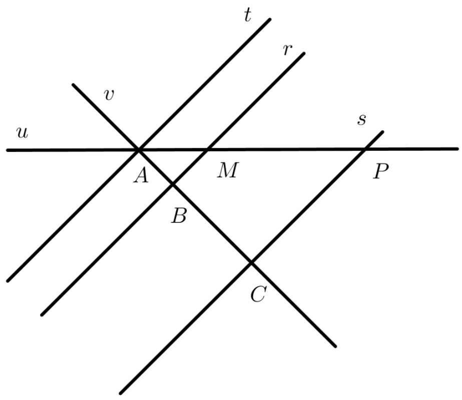


Figura 2.9: Representação gráfica feita por [Leonardo, 2013], p.236.

"Os pares de segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AM}$, $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AP}$ são conhecidos como segmentos correspondentes (segmentos das transversais cujos os extremos pertencem às mesmas retas paralelas)". ([Leonardo, 2013] p.236)

Leonardo é o único autor que traz um exemplo de relação de proporcionalidade, que é conceito do Ensino Fundamental. Segue o exemplo na figura 2.10 com a relação de proporcionalidade;

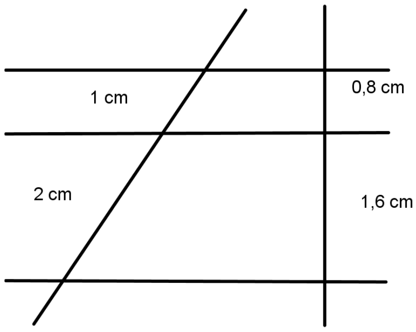
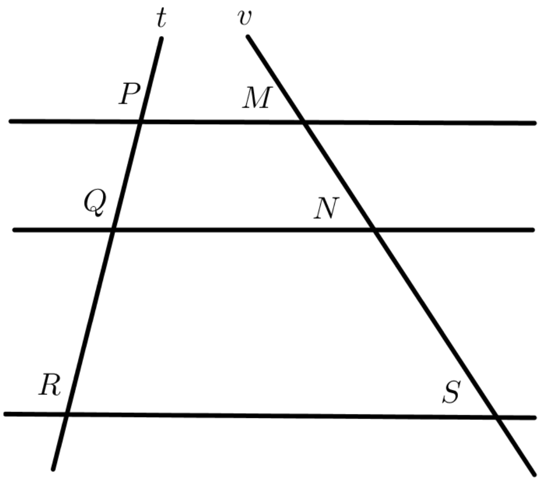


Figura 2.10: Representação gráfica feita por [Leonardo, 2013], p.236.

“É possível notar que as razões das medidas de segmentos correspondentes são iguais a $\frac{1}{0{,}8} = \frac{2}{1{,}6}$, isto é, as medidas são proporcionais”. ([Leonardo, 2013] p.236)

Nos enunciados os livros didáticos em análise trazem no feixe três ou quatro retas paralelas, pois facilita a visualização da aplicação do Teorema de Tales. Porém, as proporções formadas são montadas pelos autores de quantidades variadas. Vale ressaltar que basta somente uma proporção para definição do Teorema, pois as outras proporções apresentadas pelos autores podem ser obtidas da primeira por meio de cálculos bastante simples, em decorrência das propriedades das proporções. Leonardo é o autor que traz o maior quantitativo de proporções, das quatro que ele traz, somente uma é justificada aplicando uma das propriedades da proporção. No entanto, é interessante mostrar as quatro proporções que ele trouxe em seu livro e as respectivas propriedades possíveis de serem aplicadas.



$$(i) \quad \frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS}$$

$$(ii) \quad \frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$$

$$(iii) \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS}$$

$$(iv) \quad \frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$$

Figura 2.11: Representação gráfica feita por [Leonardo, 2013], p.236.

Supondo a primeira proporção (i) verdadeira pelo teorema de Tales, será usado algumas propriedades da proporção para achar as outras três proporções:

(ii) Troca dos *extremos* (QR e MN);

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS} \Leftrightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$$

(iii) Troca dos *antecedentes* (PQ e MN) e *consequentes* (MN e NS) e soma 1 às duas razões da proporção apresentadas pelo autor;

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS} \Leftrightarrow \frac{QR}{PQ} = \frac{NS}{MN} \Leftrightarrow \frac{QR}{PQ} + 1 = \frac{NS}{MN} + 1 \Leftrightarrow \frac{PQ + QR}{PQ} = \frac{MN + NS}{MN} \Leftrightarrow$$

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{MS}{MN} \Leftrightarrow \frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS}$$

(iv) Soma 1 às duas razões da proporção gera outa proporção equivalente;

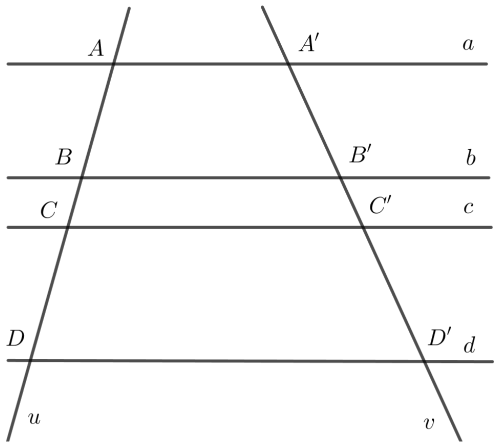
$$\frac{PQ}{QR} + 1 = \frac{MN}{NS} + 1 \Leftrightarrow \frac{PQ + QR}{QR} = \frac{MN + NS}{NS} \Leftrightarrow \frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$$

Também foi observado que a maioria dos autores que apresentam múltiplas proporções, que poderiam ser obtidas umas das outras apenas utilizando as propriedades acima, não justificam todas elas, somente Leonardo esclarece a última das três proporções dadas a mais. A tabela 2.12 resume a quantidade de retas paralelas que são desenhadas no feixe e a quantidade de proporções que cada autor apresenta.

Livro Didático / Autor principal	Retas no feixe	Proporções
Conexões com a Matemática [Leonardo (2013)]	3	4
Matemática: Contexto & Aplicações [Dante (2014)]	4	3
Matemática Paiva [Paiva (2013)]	3	3
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi (2013)]	4	1
Matemática Ensino Médio [Smole (2013)]	3	2
Nosso Olhar [Souza (2013)]	3	3

Tabela 2.12: Quantidade de retas no feixe e de proporções.

Nota-se na tabela acima que a maioria dos autores optaram por desenhar o feixe com três retas paralelas e apenas o Iezzi apresenta a versão mais simples com uma única proporção. Os autores que optaram por quatro retas, provavelmente queriam enfatizar que os segmentos da mesma reta transversal não precisam ser consecutivos. Observe o exemplo dessa situação na figura 2.12 ;



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Figura 2.12: Aplicação do Teorema de Tales para um feixe de quatro retas paralelas.

Será apresentado agora, com mais detalhes, como os autores descrevem seus respectivos enunciados, lembrando-se que Dante apresentou dois formatos (verificado na tabela 2.11), e como eles desenham os feixes de retas paralelas e justificam as proporções.

"Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de retas paralelas distintas sobre duas retas transversais são proporcionais". ([Leonardo, 2013], p.237)

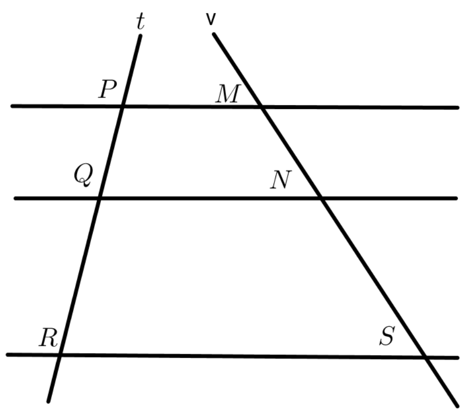


Figura 2.13: Representação gráfica feita por [Leonardo, 2013], p.237.

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS} \qquad \frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS} \qquad \frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS} \qquad \frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$$

"Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra". ([Dante, 2014], p.236)

"Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais". ([Dante, 2014], p.236)

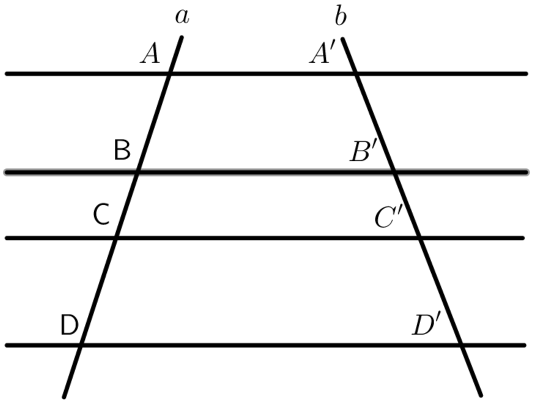


Figura 2.14: Representação gráfica feita por [Dante, 2014], p.235.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

"Se três ou mais retas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal". ([Paiva, 2013], p.72)

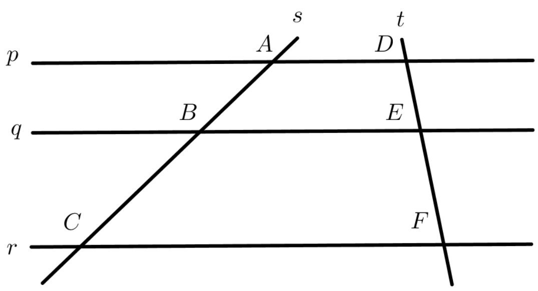


Figura 2.15: Representação gráfica feita por [Paiva, 2013], p.72.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \qquad \frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$$

"Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra". ([Iezzi, 2013], p.241)

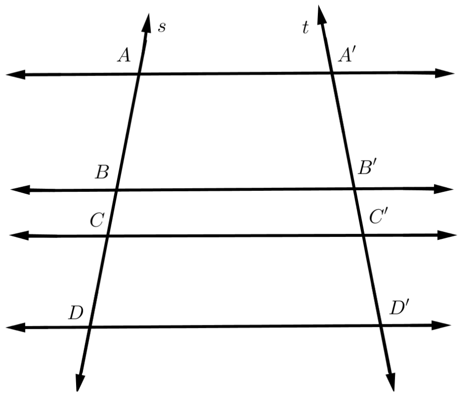


Figura 2.16: Representação gráfica feita por [Iezzi, 2013], p.240.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

"Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais r e s, então as medidas dos segmentos de r determinados pelo feixe são diretamente proporcionais aos comprimentos dos segmentos correspondentes de s". ([Smole, 2013], p.240)

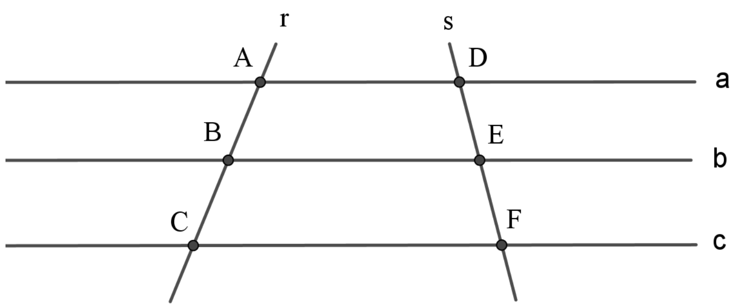


Figura 2.17: Representação gráfica feita por [Smole, 2013], p.240

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

" Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal". ([Sousa, 2013], p.258)

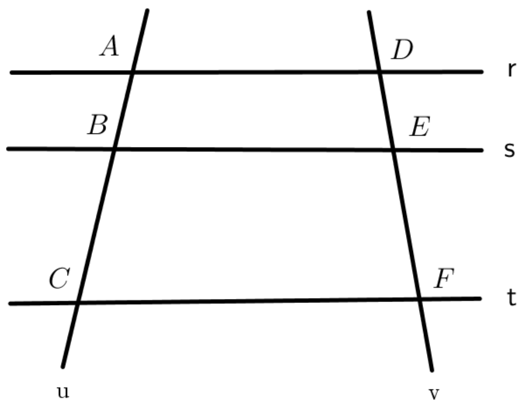
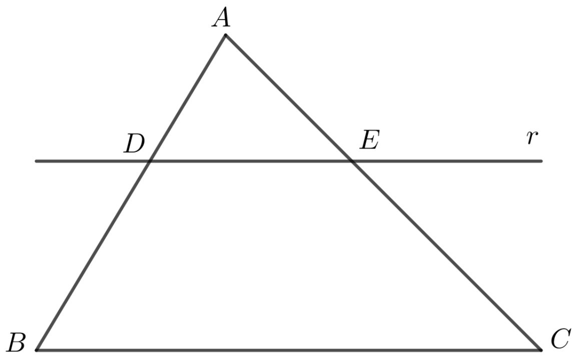


Figura 2.18: Representação gráfica feita por [Sousa, 2013], p.258.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

É notório que todos os livros aprovados no PNLD de 2015 trazem suas respectivas representações gráficas do enunciado do Teorema de Tales bem parecidas, o feixe de retas paralelas são desenhadas na horizontal, diferenciando que umas possuem três e outras quatro retas e as retas transversais são afastadas e não se cruzam. Também vale ressaltar que é válido desenhar o feixe com duas retas cortadas por duas transversais se cruzando. Diante dessa configuração, [Haruna, 2000] traz um terceiro formato de estruturação do teorema: "Se r é paralela a um dos lados do triângulo qualquer, então r divide os outros lados em partes proporcionais". ([Haruna, 2000], p.47)



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Figura 2.19: Feixe com duas retas paralelas ($BC \parallel DE$).

Sabendo-se que nenhum autor optou por esse formato de enunciar o Teorema de Tales, porém ele trás uma vantagem, reduz as etapas da demonstração desse teorema por área, a qual é visto na subseção 2.3.2 . Na subseção de exercícios de Teorema de

Tales (subseção 2.6.1) é comparada essa representação gráfica comum, chamada de figura prototípica, com as representações gráficas dos exercícios propostos confeccionadas pelos autores.

Em relação a estruturação do enunciado do teorema, observa-se que os autores que optaram estruturá-lo conforme o formato 2 da [Haruna, 2000] (tabela 2.11), entenderam que o termo "segmentos homólogos" era desnecessário.

Demonstrações do Teorema de Tales. Segundo o guia do PNLD de 2015, na transição da fase do Ensino Fundamental para o Médio, o conhecimento muitas vezes se torna acumulado e organizado. No entanto, nessa última fase é indispensável que o aluno estabeleça gradualmente a diferença de descoberta, invenção e validação. Além disso, é interessante que o aluno:

> "...compreenda a distinção entre uma prova lógica-dedutiva e uma verificação empírica, seja essa baseada na verificação de desenhos, na construção de modelos materiais ou medição de grandezas. Dessa forma o ensino médio cumpre seu papel de ampliação, aprofundamento e organização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental, fase esta em que predominam, na abordagem matemática, os procedimentos indutivos, informais e não rigorosos". ([Brasil, 2014b], p.12)

Neste momento, é visto se as obras trazem essa verificação do Teorema de Tales e de que forma.

Quatro dos seis livros aprovados no PNLD 2015 trazem demonstração do Teorema de Tales. Neles são encontradas duas formas de demonstração que serão chamadas de demonstração pela *comensurabilidade de segmentos* e demonstração por *áreas*. Nas seções 2.3.1 e 2.3.2 são apresentadas estas demonstrações. Os autores que optaram pela primeira, não realizam uma demonstração completa, demonstram somente para medidas em que as retas paralelas determinam segmentos comensuráveis nas transversais (ver pág. 52). Na tabela 2.13 estão resumidas essas informações.

Livro Didático / Autor principal	Comensuráveis	Área
Conexões com a Matemática [Leonardo (2013)]		X
Matemática: Contexto & Aplicações [Dante (2014)]	X	
Matemática Paiva [Paiva (2013)]	sem demonstração	
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi (2013)]	X	
Matemática Ensino Médio [Smole (2013)]	sem demonstração	
Nosso Olhar [Souza (2013)]	X	

Tabela 2.13: Tipo de demonstração do Teorema de Tales

O livro de autoria de Leonardo é a única obra que realiza a demonstração do Teorema de Tales por congruência de áreas, uma prova completa, embora seja considerada mais elaborada por alguns autores (opnião dos professores Eduardo Vagner e Marcos Paulo de Araújo).

2.3.1 Demonstração do Teorema de Tales pela comensurabilidade

Os livros de Dante, Iezzi e Souza realizam a demonstração (incompleta) do Teorema de Tales de maneira muito similar uns aos outros. Nesta parte, será apresentada esta prova, justificando a parte que eles deixaram faltando e tecidos alguns comentários.

Teorema de Tales. *Num plano, as retas r, s e t são cortadas por transversais u e v. A primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C e a segunda em A', B' e C' conforme fig. 2.20. Se r, s e t são paralelas, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

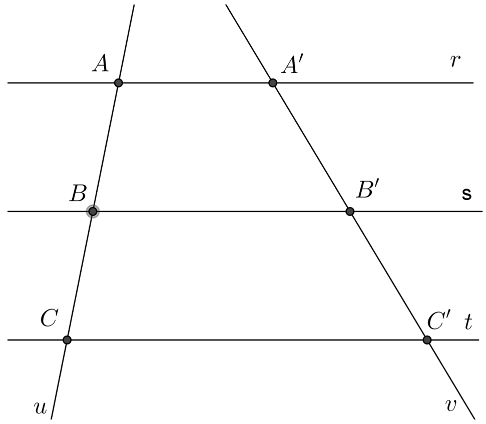


Figura 2.20: Feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais.

Demonstração do Teorema de Tales para segmentos comensuráveis.

1º caso) Suponha que $AB = BC$, sendo os pontos A, B e C pertencentes à reta u, transversal ao feixe de retas paralelas ($r \parallel s \parallel t$). Trace retas u' e u'' paralelas a u, sendo a primeira intersectando a reta r no ponto A' e a segunda, a reta s no ponto B'. Seja B'', interseção de u' com s e C'', a interseção de u'' com t (ver fig. 2.21).

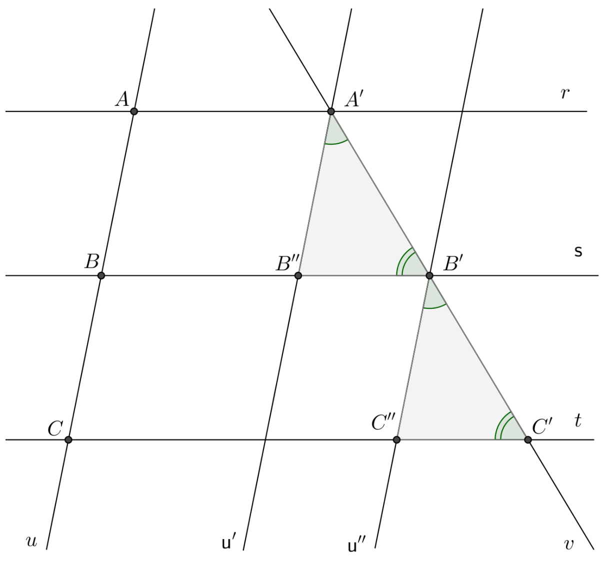


Figura 2.21: Retas transversais u, u' e u'' paralelas entre si.

Os triângulos $\triangle A'B'B''$ e $\triangle B'C'C''$ são congruentes pelo caso LAAo de congruência de triângulos. De fato, os ângulos $\widehat{A'B'B''}$ e $\widehat{B'C'C''}$ são iguais pois são ângulos correspondentes e as retas s e t são paralelas cortadas pela transversal v. Analogamente, como u' e u'' são paralelas cortadas pela transversal v, temos $\widehat{B''A'B'} = \widehat{C''B'C'}$ (o caso u e v paralelas é imediato). Também temos $A'B'' = B'C''$ pois $ABB''A'$ e $BCC''B'$ são paralelogramos, logo, em cada um deles os pares e lados opostos são iguais. Portanto, $A'B' = B'C'$ porque são lados correspondentes na congruência.

2º caso) Suponha agora que $\frac{AB}{BC}$ seja um número racional e igual a $\frac{m}{n}$, dividindo os segmentos AB e BC respectivamente em m e n partes iguais, sendo AB composto por m partes de medida x ($AB = mx$) e BC por n partes de medida x ($BC = nx$). Segue um exemplo na fig. 2.22, onde $m = 4$ e $n = 6$;

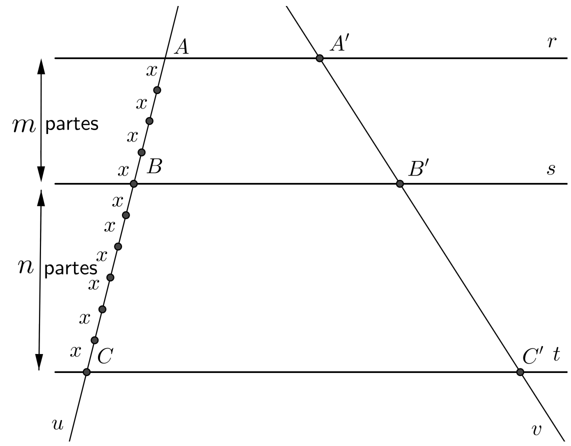


Figura 2.22: $r \parallel s \parallel s$

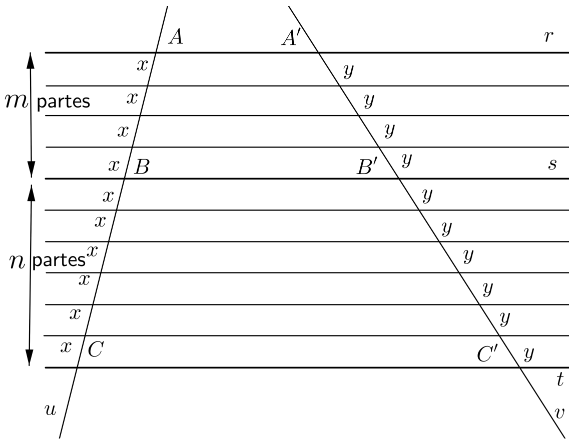


Figura 2.23: $r \parallel s \parallel t$.

Pelos pontos que dividem AB e BC são traçadas retas paralelas ao feixe r, s e t (fig. 2.23). De acordo com o 1º caso, as retas paralelas determinam sobre $A'B'$ e $B'C'$, respectivamente m e n segmentos congruentes, de medidas, digamos y na figura 2.23.

Sendo assim, há duas proporções: $\frac{AB}{BC} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$ e $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{ym}{yn} = \frac{m}{n}$. Portanto:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Vale ressaltar que o livro do Dante traz a seguinte informação sobre os segmentos incomensuráveis: "**Fique atento!** O teorema de Tales também é válido para casos em que os segmentos envolvidos são incomensuráveis" ([Dante, 2014], p. 236). E o livro do Souza traz a seguinte orientação ao professor:

> "Explique aos alunos que a demonstração do Teorema de Tales foi realizada para os casos em que o feixe de retas paralelas divide as transversais em segmentos comensuráveis, ou seja, que podem ter as medidas expressas por uma quantidade inteira de certa unidade. Contudo, diga que

> este teorema também é válido para o caso de os segmentos obtidos nas transversais serem incomensuráveis". ([Sousa, 2013] p. 259)

deixando o material incompleto para o estudante, o livro do Iezzi também prova o Teorema de Tales somente para paralelas com distâncias comensuráveis entre si, não tece qualquer comentário sobre a validade do caso geral, embora seu enunciado contemple também o outro caso.

Demonstrações do Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis. A prova aqui apresentada é aquela presente na obra de [Neto, 2013], p.139.

Teorema de Tales. *Num plano, as retas r, s e t são cortadas por transversais u e v. A primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C_n e a segunda em A', B' e C'_n conforme fig. 2.24. Se r, s e t são paralelas, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Dados $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a < x + \frac{1}{n}$. Suponha que $\frac{AB}{BC} = x$, com x irracional. Escolha uma sequência $\{(a_n)\}_n$ de números racionais positivos com $a_n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, (fig. 2.24) marque o ponto $C_n \in u$ tal que

$$\frac{AB}{B'C'_n} = a_n$$

Seja t_n a reta paralela às retas r, s e t traçadas por C_n e C'_n o ponto onde t_n intersecta v. Como $a_n \in \mathbb{Q}$, um argumento análogo ao anterior garante que

$$\frac{A'B'}{B'C'_n} = a_n$$

De outra forma, obtém-se:

$$x < \frac{AB}{BC_n} < x + \frac{1}{n} \Longrightarrow x < \frac{A'B'}{B'C'_n} < x + \frac{1}{n}.$$

ou, ainda,

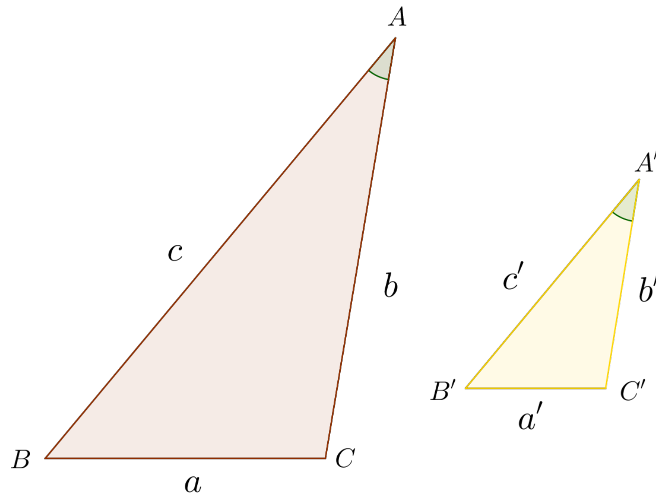


Figura 2.24: Razão $\frac{AB}{BC}$ irracional ($r \parallel s \parallel t \parallel t_n$).

$$\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{BC_n} < \frac{AB}{BC} + \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C'_n} < \frac{AB}{BC} + \frac{1}{n}.$$

Observe, agora, que as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, à medida em que n aumenta, os pontos C_n aproximam-se mais e mais do ponto C. Mas, como $t_n \parallel t$, segue então que os pontos C'_n aproximam-se mais e mais do ponto C'', de maneira que a razão $\frac{A'B'}{B'C'_n}$ aproxima-se mais e mais da razão $\frac{A'B'}{B'C'}$. Abreviando isso, escreve-se:

$$\frac{A'B'}{B'C'_n} \longrightarrow \frac{A'B'}{B'C'} \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Por outro lado, utilizando notação análoga à alinha acima, pode claramente inferir, a partir das desigualdades do segundo membro de que:

$$\frac{A'B'}{B'C'_n} \longrightarrow \frac{AB}{BC} \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

(Lê-se $\frac{A'B'}{B'C'_n}$ tende a $+\infty$) Utilizando , agora, o fato de que uma sequência de reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois reais distintos quando $n \longrightarrow +\infty$, será forçado a concluir que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

É notório que a demonstração da segunda parte do Teorema de Tales, demonstração dos segmentos incomensuráveis, não é tão simples para um aluno do 1º ano do Ensino Médio compreender, por esse motivo que os autores citados acima não abordam essa parte.

2.3.2 Demonstração do Teorema de Tales por área.

O livro de Leonardo opta por demonstrar o Teorema de Tales usando equivalência de áreas de triângulos, conteúdos conhecidos pelos alunos no Ensino Fundamental. Essa prova requer maior percepção do aluno para enxergar algumas manipulações para obter congruências de áreas. No entanto, foi a forma de demonstração escolhida por somente um autor, do total de quatro que realizaram demonstração do Teorema de Tales. Esta demostração é realizada a seguir.

Teorema de Tales. *Num plano, as retas r, s e t são cortadas por transversais u e v. A primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C e a segunda em A', B' e C' conforme fig. 2.25. Se r, s e t são paralelas, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

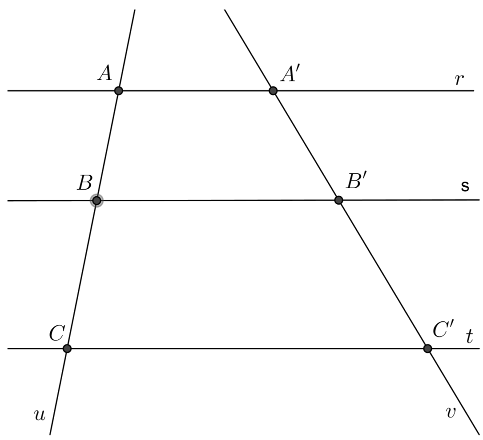


Figura 2.25: Feixe de retas paralelos.($r \parallel s \parallel t$)

Traçando uma reta v' paralela a v e intersectando a reta r no ponto A (interseção da reta r e u) e as retas s e t nos pontos B'' e C''. Formam um triângulo $\triangle ACC''$, sendo $BB'' \parallel CC''$

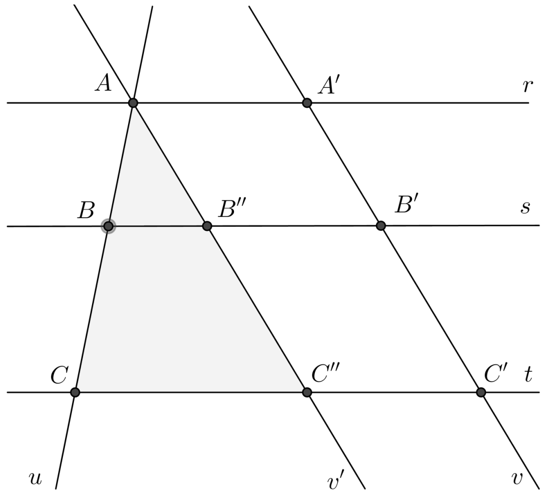


Figura 2.26: Feixe de retas (r, s e t) $v' \parallel v$

$AB'' = A'B'$, pois o polígono $AA'B'B''$ é um paralelogramo;

Na figura seguinte (fig 2.27), traça a semi-reta CB'', a altura HB'' do triângulo $\triangle AB''C$ e calcula as áreas dos triângulos $\triangle ABB''$ e $\triangle BB''C$.

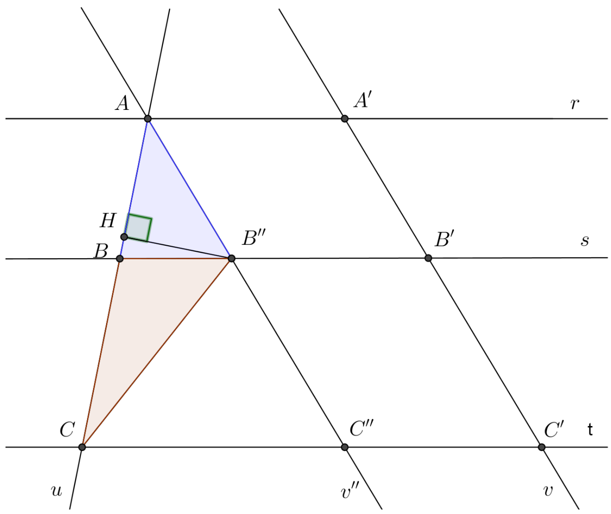


Figura 2.27: HB"é altura do $\triangle ABB''$ e $\triangle AB''B$.

$$S_{ABB''} = \frac{AB \cdot HB''}{2} \qquad S_{BB''C} = \frac{BC \cdot HB''}{2}$$

$$\frac{S_{ABB''}}{S_{BB''C}} = \frac{\frac{AB \cdot HB''}{2}}{\frac{BC \cdot HB''}{2}} = \frac{AB \cdot HB''}{BC \cdot HB''} = \frac{AB}{BC} \quad (i)$$

Dividindo a área de um triângulo pela área do outro, elimina a altura HB'' comum aos dois triângulos.

Usando as mesmas retas paralelas r,s e t e as retas transversais u e v'. traça o segmento BC'' e a altura BH' comum aos triângulos $\triangle ABB''$ e $\triangle BB''C''$, em seguida calcula as áreas desses triângulos (fig. 2.28);

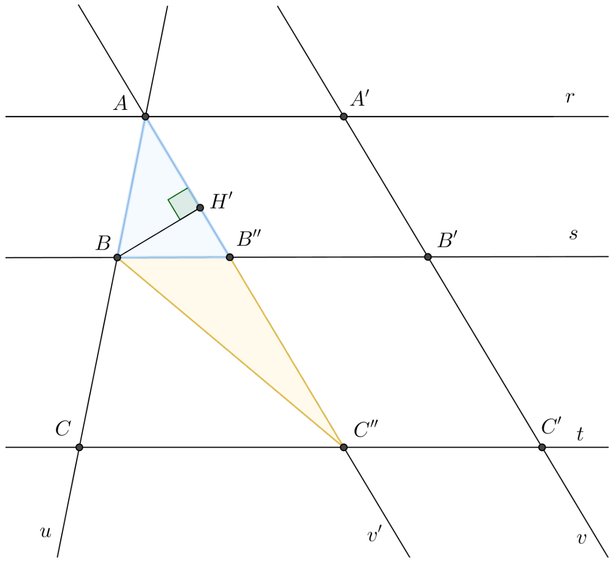


Figura 2.28: AH' é altura do $\triangle ABB''$ e $\triangle BB''C''$.

$$S_{ABB''} = \frac{AB'' \cdot BH'}{2} \qquad S_{BB''C''} = \frac{B''C'' \cdot BH'}{2}$$

$$\frac{S_{ABB''}}{S_{BB''C''}} = \frac{\frac{AB'' \cdot BH'}{2}}{\frac{B''C'' \cdot BH'}{2}} = \frac{AB'' \cdot BH'}{B''C'' \cdot BH'} = \frac{AB''}{B''C''} : \quad (ii)$$

Se dois triângulos possuem a mesma base e altura comum, então as áreas desses triângulos são iguais ($S_{BCB''} = S_{BB''C''}$), observe a fig.2.29 ;

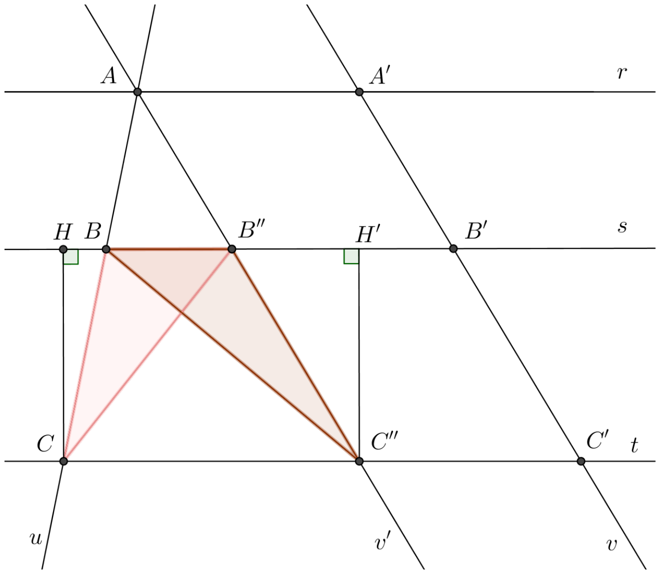


Figura 2.29: $r \parallel s \parallel t$ e $v' \parallel v$

CH é a altura do triângulo $\triangle BB''C$ de base BB''

$C''H'$ é a altura do triângulo $\triangle BB''C''$ de base BB''

$CH = C''H'$, pois são paralelas e estão a entre duas retas paralelas;

Então os triângulos $\triangle BB''C$ e $\triangle BB''C''$ possuem as mesmas áreas, pois as respectivas alturas são iguais e as bases comuns.

$$S_{BB''C} = S_{BB''C''} \qquad \frac{S_{ABB''}}{S_{BB''C}} = \frac{AB}{BC}(i) \qquad \frac{S_{ABB''}}{S_{BB''C''}} = \frac{AB''}{B''C''}(ii)$$

$$\frac{S_{ABB''}}{S_{BB''C}} = \frac{S_{ABB''}}{S_{BB''C''}} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C''}$$

Os polígonos $AB''A'B'$ e $B''C''B'C'$ são paralelogramos, pois $AB'' \parallel A'B'$, $AA' \parallel B''B'$ e $B''C'' \parallel B'C'$, $B''B' \parallel C''C'$; então:

$$AB'' = A'B' \quad \text{e} \quad B''C'' = B'C'$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

2.4 Enunciados e demonstrações dos casos de semelhança.

O propósito desta seção é mostrar e comparar os enunciados de semelhança e apresentar os autores que apresentam e demonstram os casos de semelhança de triângulos.

Enunciados de semelhança de triângulos. A versão final BNCC para o Ensino Fundamental traz semelhança de triângulos como um dos objetos de conhecimento do 9º ano do Ensino Fundamental, na habilidade: "Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes". ([Brasil, 2017b], p.315). Aproveitando esse currículo e uma das habilidades da BNCC do Ensino Médio, a qual recorda a necessidade das noções de congruência e semelhança para aplicação das relações métricas ([Brasil, 2018b], p.61), é interessante analisar se todos autores desses livros em análises definem semelhança de triângulos e de que forma.

Todos os autores, com exceção do Souza, trazem as definições de semelhança de triângulos. Somente Leonardo e Dante definem semelhança de polígonos em geral, porém Dante curiosamente apresenta a mesma após ter definido semelhança de triângulos. Veja a sequência apresentada por esses autores:

Leonardo: *Definição de semelhança de polígonos* → *Definição de semelhança de triângulos.*

Dante: *Definição de semelhança de triângulos* → *Definição de semelhança de polígonos.*

As definições de triângulos semelhantes apresentados nos livros se resumem em dois argumentos: lados homólogos ou correspondentes são proporcionais e ângulos internos correspondentes são congruentes. Segue a lista desses enunciados de semelhança de polígonos e de triângulos nos livros em análise:

"Dois polígonos são semelhantes quando tem os ângulos internos de mesma medidas e os lados correspondentes proporcionais". ([Leonardo, 2013] , p.239)

"Por serem polígonos, dois triângulos são semelhantes quando satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, têm os lados correspondentes proporcionais e os ângulos internos correspondentes congruentes". ([Leonardo, 2013], p.241)

"Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais".([Dante, 2014], p. 238)

"Quando dois polígonos têm todos os lados correspondentes proporcionais e todos os ângulos correspondentes congruentes, eles são chamados polígonos semelhantes". ([Dante, 2014], p.243)

"Dois triângulos são semelhantes se, somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro de modo que: I. ângulos com vértices correspondentes são congruentes; II. lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais". ([Paiva, 2013], p.74)

"Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e lados homólogos são proporcionais". ([Iezzi, 2013], p.240)

"(...) dois triângulos são semelhantes quando os lados de um são proporcionais aos lados do outro e os ângulos correspondentes são congruentes,(...)" ([Smole, 2013], p.240)

Observando o termo *"se, e somente se"* empregado por Dante e Paiva, vale destacar as palavras pronunciadas pelo professor Malaspina em uma análise de dois volumes de um livro do Ensino Médio, as quais dizem que "(...) embora, estritamente falando, não seja errado usar "se e somente se" numa definição, trata-se de um costume didaticamente inadequado, pois dá impressão de um teorema, além de ocultar o fato de que se trata simplesmente de dar um nome a um conceito" ([Lima et al., 2002], p.51), ou seja, esta linguagem de teorema em definições leva a confusões.

Nota-se também que os autores escolheram expressões diversas para identificar os ângulos e lados correspondentes na semelhança. Para Leonardo os lados são *correspondentes*; Dante e Iezzi, *homólogos*. Em relação aos ângulos, para Leonardo, Iezzi e Smole são *correspondentes* e Dante traz uma novidade com a expressão *ordenadamente congruentes* que não é uma expressão de sentido parecido com a anterior.

Com uma formalidade mais rebuscada, Paiva traz o termo *"correspondência biunívoca"* que nada mais é que uma bijeção; a qual, é uma relação direta entre vértices correspondentes dos triângulos envolvidos. Neste caso, vale realçar que didaticamente trabalhar com esse termo na educação básica pode prejudicar o processo ensino-aprendizagem, pois é um termo pouco conhecido pelos estudantes. Por outro lado, na educação superior é comum definir semelhança de figuras do plano ou do espaço com esse termo. Observe um exemplo do [De Sousa, 2013] :

> Definição 1: Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo.
> Diz-se que F e F' são semelhantes, com a razão r, quando existe uma correspondência biunívoca $g : F \to F'$ entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade: Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = g(x)$ e $Y' = g(Y)$ são seus correspondentes em F' então $X'Y' = r \cdot XY$.
> A correspondência biunívoca $g : F \to F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F, F'. Com isso, teremos as seguintes definições:
>
> a) Se $X' = g(X)$, diz-se que os pontos X e X' são homólogos.
>
> b) S e $X' = g(X)$ e $Y' = g(X)$, diz se que os segmentos XY e $X'Y'$ são homólogos. ([De Sousa, 2013], p.34)

Segundo os professores Eduardo Vagner e Marcos Paulo, em uma oficina para professores de matemática, realizada em março de de 2018 no Colégio pedro II, há uma maneira mais fácil de identificar triângulos semelhantes, eles definem como Teorema Central da Semelhança de Triângulos. Eis o enunciado:

"Dois triângulos que possuem os mesmos ângulos internos são semelhantes". ([Wagner, 2018], p.24)

Esses docentes ainda afirmam que o enunciado quer dizer que, se dois triângulos possuem dois ângulos internos respectivamente iguais, então seus lados são proporcionais. A prova desse teorema é equivalente à demonstração apresentada no caso de semelhança ângulo - ângulo (subseção 2.4).

Demonstração dos casos de semelhança. De acordo com a segunda versão da BNCC de abril de 2016: "No Ensino Médio o estudo da geometria deve retomar, ampliar e sistematizar os conhecimentos estudados anteriormente de modo a possibilitar aos estudantes a compreensão da estrutura lógica da geometria euclidiana ([Brasil, 2016a], p.562). Na sequência ela traz o seguinte descritor da unidade curricular V:

> "Compreender a estrutura lógica da geometria euclidiana e demonstrar alguns teoremas como soma dos ângulos internos de polígonos, teorema de Pitágoras, casos de semelhança e de congruência de triângulos". ([Brasil, 2016a], p.565)

Na versão final do Ensino Médio, a BNCC reitera a importância da demonstração, de maneira que a “(...) validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas propriedades” ([Brasil, 2018b], p.65).

Diante do exposto, nota-se que somente a obra do Iezzi segue as orientações da segunda versão da BNCC. É apresentada nesta subseção a demonstração dos casos de semelhança, realizada por esse autor. Os livros do Dante e Paiva também trazem os casos, porém não demonstrados e os livros do Leonardo, Smole e Souza sequer enunciam os casos de semelhança. Na tabela 2.14 resume essas informações.

Livro Didático	Casos de semelhança de triângulos
Conexões com a Matemática [Leonardo]	não apresenta
Matemática Contexto & Aplicações [Dante]	só enuncia
Matemática Paiva [Paiva]	só enuncia
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi]	demonstra
Matemática Ensino Médio [Smole]	não apresenta
Nosso Olhar [Souza]	não apresenta

Tabela 2.14: Livros que só enunciam, demonstram e não apresentam os casos de semelhança.

Primeiramente deduz-se um corolário do Teorema de Tales, chamado de Teorema Fundamental da Semelhança (TFS).

Leonardo é o único autor que após demonstrar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (TFP), pelo mesmo método adotado na demonstração de Tales por área, apresenta o Teorema de Tales. Nesse caso, o Teorema de Tales é um corolário do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Segue o enunciado do TFP segundo Leonardo:

“Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais”. ([Leonardo, 2013], p.236)

Por outro lado, Iezzi optou por demonstrar o Teorema de Tales pela comensurabilidade e em seguida manipular essa proposição e deduzir o Teorema Fundamental da

Semelhança (TFS). Dessa forma o TFS surge como um corolário do Teorema de Tales. Segue o enunciado do TFS segundo Iezzi:

"Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro". ([Iezzi, 2013] ,p.242)

Observa-se que os enunciados das proposições TFP e TFS têm as mesmas hipóteses ("Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos (...)"). A diferença é nas teses, onde a primeira diz "(...) determina sobre esses lados segmentos proporcionais" e a outra, "(...) determina um novo triângulo semelhante ao primeiro". Pode-se dizer que a segunda proposição complementa a primeira dizendo que o terceiro lado dos triângulos formados são também proporcionais.

Dante e Iezzi divergem na profundidade e na ordem neste momento. Iezzi parece ver o Teorema de Tales como um lema para o TFS culminando na demonstração dos casos de semelhança. Na sequência de Dante não fica clara a relação entre o Teorema de Tales e os casos de semelhança ou mesmo com o TFS. Veja a sequência a seguir:

Iezzi: *Definição de triângulos semelhantes* $\rightarrow$ *Demonstração do Teorema de Tales* $\rightarrow$ *Dedução do TFS* $\rightarrow$ *Demonstração dos casos de semelhança.*

Dante: *Demonstração do Teorema de Tales* $\rightarrow$ *Definição de semelhança de triângulos* $\rightarrow$ *Apresentação dos casos de semelhança* $\rightarrow$ *Apresentação do TFS.*

Dante mostra a validade do TFS, usando um dos casos de semelhança, conforme exibido na figura 2.30;

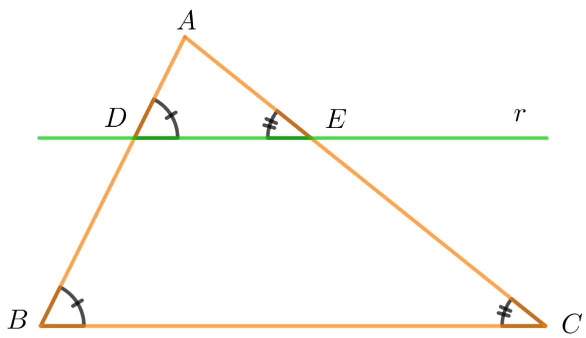


Figura 2.30: Reta r paralela ao lado BC do triângulo $\triangle ABC$, [Dante, 2014], p.240.

$$r \parallel \overline{BC} \qquad r \cap \overline{AB} = D \qquad r \cap \overline{AC} = E$$

Assim, $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ *e* $\widehat{C} \cong \widehat{E}$. *Logo,* $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Seguindo a metodologia usada por Iezzi, para provar os três casos de semelhança de triângulos, será necessário deduzir o TFS usando o Teorema de Tales, demonstrado na subseção 2.3.1 .

Dedução do Teorema Fundamental da Semelhança (TFS). Iezzi demonstra o Teorema Fundamental da Semelhança da seguinte forma:

TFS. *Sejam um triângulo* $\triangle ABC$*, o ponto* D *pertencente ao lado* AB *e o ponto* E*, em* AC. *Se o segmento* DE *é paralelo a* BC *do triângulo, então os triângulos* $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

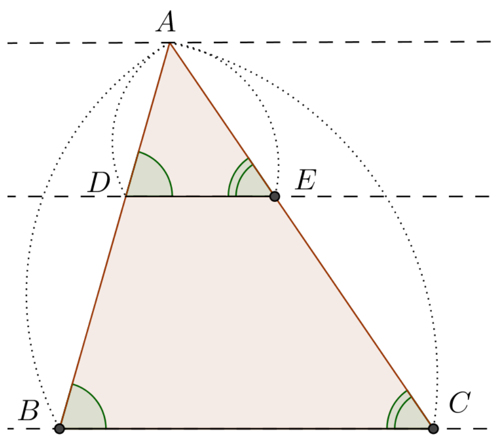


Figura 2.31: Triângulo $\triangle ABC$ e $DE \parallel BC$.

Suponha três retas paralelas r, s e t, cortadas por duas retas transversais u e v. A primeira intersectando as retas paralelas em A, D e B e a segunda, em A , E e C (fig. 2.32).

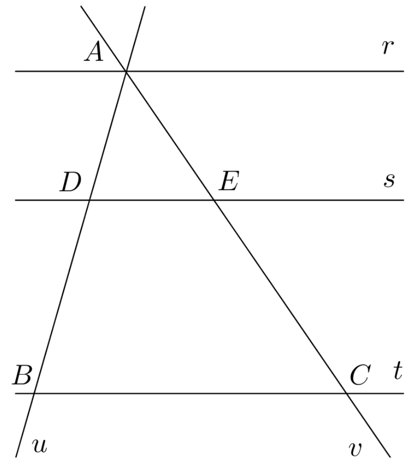


Figura 2.32: Retas paralelas cortadas por transversais ($r \parallel s \parallel t$).

Nota-se que o feixe de retas paralelas e as retas u e v, formam um triângulo $\triangle ABC$ e um segmento de reta DE paralelo ao lado BC do triângulo;

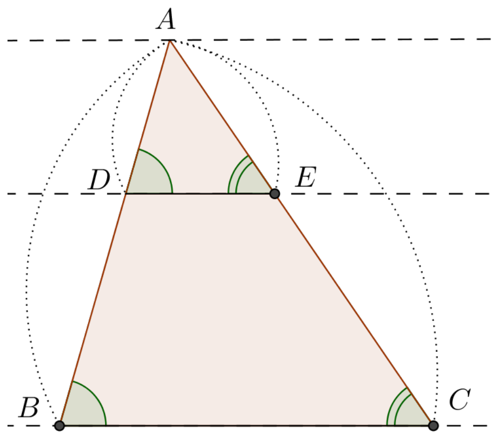


Figura 2.33: Triângulo $\triangle ABC$ e $DE \parallel BC$.

Se $DE \parallel BC$, então os ângulos $\widehat{D} = \widehat{B}$ e $\widehat{E} = \widehat{C}$, pois são ângulos correspondente. Além disso, os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ têm os ângulos ordenadamente congruentes ($\widehat{A}$ é comum aos dois triângulos)(i). Usando o Teorema de Tales, terá a seguinte proporção;

(ii)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Pelo ponto E , traça-se EF, paralela a AB;

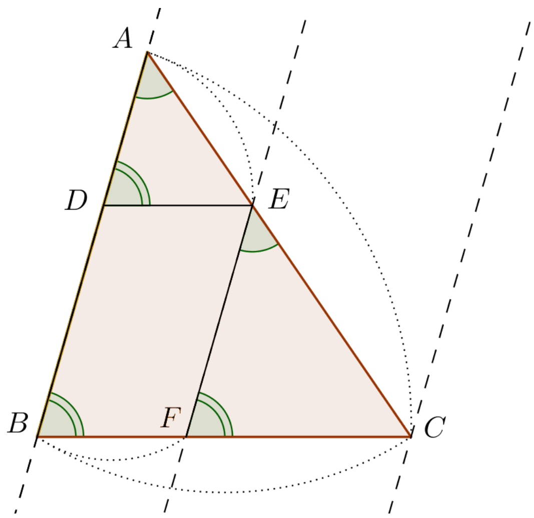


Figura 2.34: Triângulo $\triangle ABC$, sendo $EF \parallel AB$ e $DE \parallel AB$.

Se $EF \parallel AB$, então os ângulos Â=Ê e B̂=F̂, pois são ângulos correspondentes. Além disso, os triângulos $\triangle CEF$ e $\triangle ABC$ têm os ângulos ordenadamente congruentes (Ĉ é comum aos dois triângulos). Usando novamente o Teorema de Tales, obtém-se a seguinte proporção;

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Mas $BF = DE$, pois $BDEF$ é um paralelogramo; substituindo BF por DE na igualdade anterior, obtém-se:

$$(iii)\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Comparando (ii) e (iii), resulta:

$$(iv) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Iezzi(2013, p.242) conclui que se os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ têm ângulos congruentes (ver (i)) e lados proporcionais (ver (iv)). Logo eles são semelhantes;

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Após deduzir esse corolário que é extraído das propriedades do Teorema de

Tales, Iezzi usa a validade dessa propriedade para provar os três critérios (A.A, L.A.L e L.L.L) que dois ou mais triângulos necessitam para serem semelhantes;

1º) Ângulo - Ângulo (A.A). *"Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes".* ([Iezzi, 2013] p.244)

Sejam dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tais que os ângulos $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ (ver fig. 2.35).

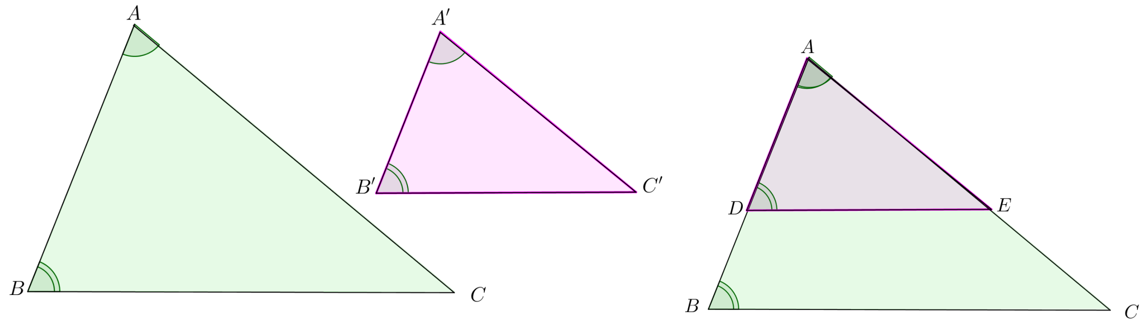


Figura 2.35: Triângulos sobrepostos.

Se $AB \equiv A'B'$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ pelo caso ALA de congruência de triângulos. Suponha que os triângulos não sejam congruentes e que $AB > A'B'$. Tome D em AB, de modo que $AD \equiv A'B'$, e por D trace $DE \parallel BC$; dessa forma, $\widehat{D} = \widehat{B}$ pois são ângulos correspondentes. Pelo caso de congruência ALA ($\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AD = A'B'$ e $\widehat{D} = \widehat{B'}$), os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

Se $DE \parallel BC$, pelo TFS os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são semelhantes ($\triangle ADE \sim \triangle ABC$). Então, os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$ também são semelhantes ($\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$).

2º) Lado - Ângulo - Lado (L.A.L). *Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes* (ver fig.2.36).([Iezzi, 2013] p.244)

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \text{ e } \hat{A} \equiv \hat{A'} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

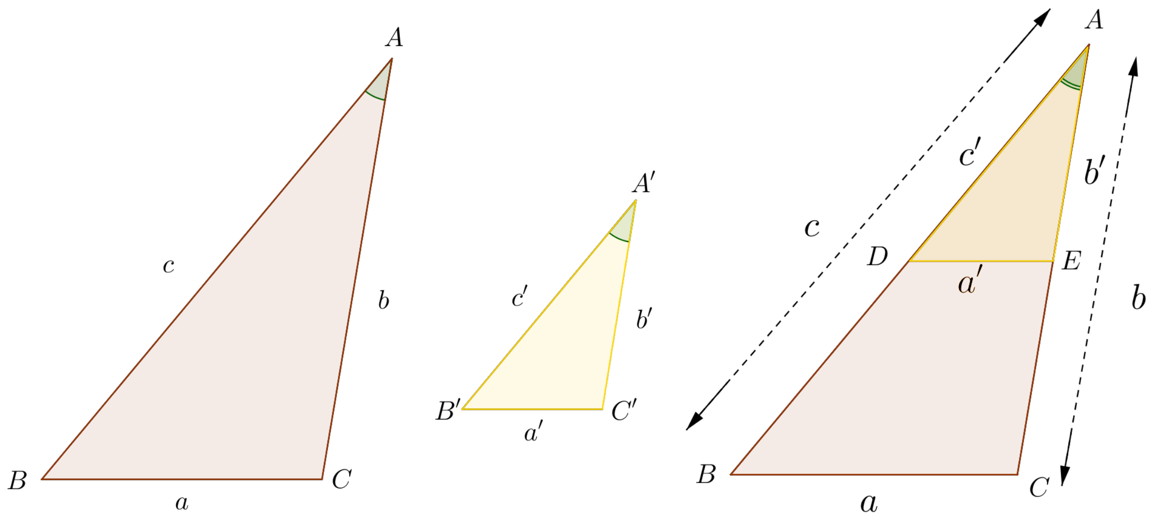


Figura 2.36: Triângulos sobrepostos

Iezzi traz os seguintes argumentos para provar esse caso LAL:

> Note que:
> Pelo caso de congruência LAL:
> $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$
> Pelo teorema fundamental:
> $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ Então, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. ([Iezzi, 2013], p. 244)

Para usar o TFS é necessário provar que $DE \parallel BC$. Observe a prova com mais detalhes a seguir:

Se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv AC'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ pelo caso LAL de congruência de triângulos. Suponha que os triângulos não sejam congruentes e que $AB > A'B'$. Tome D em AB, de modo que $AD \equiv A'B' \equiv c'$, e E em AC, de modo que $AE \equiv A'C' \equiv b'$. Pelo caso de congruência LAL ($AD = A'B' = c'$, $\widehat{a} = \widehat{A'}$ e $AE = A'C' = b'$), os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

Sabendo-se que $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$ ou $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, usando a reciprocidade do Teorema de Tales, $DE \parallel BC$.

Se $DE \parallel BC$, pelo TFS os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são semelhantes: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Então, os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$ também são semelhantes: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

3º) Lado - Lado - Lado (L.L.L). *Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes* (ver fig.2.37). ([Iezzi, 2013] p.245)

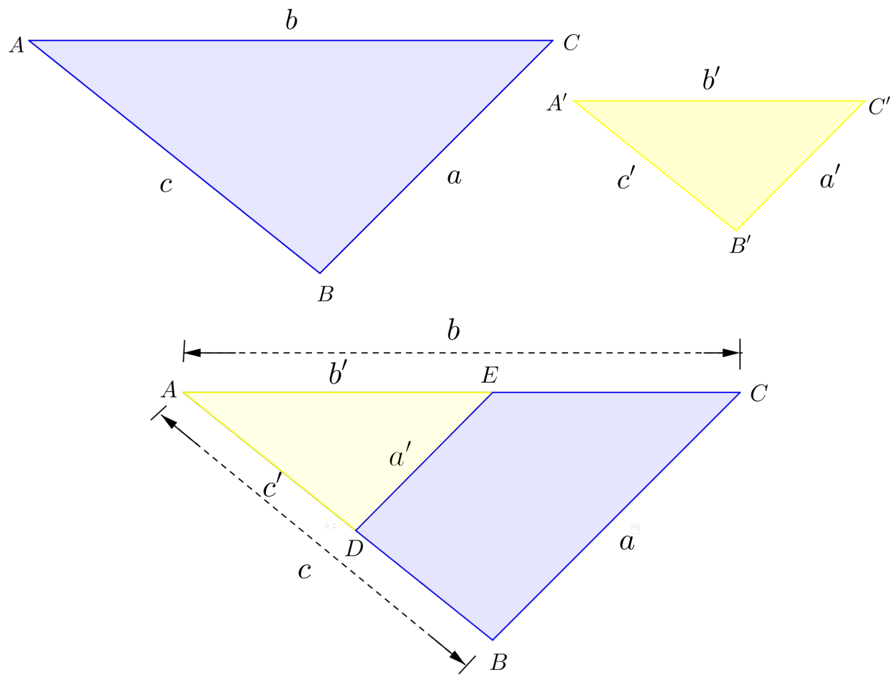


Figura 2.37: Triângulos sobrepostos .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Iezzi traz os seguintes argumentos para demonstrar esse caso de semelhança (LLL) :

> Note que:
> Pelo caso de congruência L.L.L:
> $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$
> Pelo Teorema Fundamental:
> $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
> Então, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. ([Iezzi, 2013], p.245)

Da mesma forma que a demonstração do caso LAL; nesse caso, para usar o TFS é necessário provar que $DE \parallel BC$. Observe a prova com mais detalhes a seguir:

Considere que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ possuem a seguinte relação:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

.

Sejam D e E pontos em AB e AC, respectivamente, tais que $AD = A'B'$ e $AE = A'C'$. Uma vez que:

$\frac{AB}{AG} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE}$ e $D\widehat{A}E = B\widehat{A}C$, o caso LAL de semelhança garante que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Assim, $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ de sorte que:

$$DE = BC \cdot \frac{A'B'}{AB} = B'C'.$$

Portanto, o critério LLL de congruência de triângulos garante que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$. Sendo $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ uma reciprocidade do Teorema de Tales, então $DE \parallel BC$.

Se $DE \parallel BC$, pelo TFS, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

2.5 Figuras em exercícios de Teorema de Tales.

Segundo [Pais, 1996], a função das figuras, como representação dos conceitos geométricos:

> "(...) é um dos recursos didáticos mais fortemente consolidados no ensino e na aprendizagem da geometria. Quer seja na representação de figuras planas ou espaciais o desenho tem sido, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica. Sua presença se destaca tanto nas aulas de geometria, como nos livros didáticos ou mesmo simplesmente para ilustrar os enunciados de exercícios, definições ou teoremas. Essa sua presença significativa leva à necessidade de uma reflexão epistemológica e didática sobre o seu verdadeiro estatuto na aprendizagem geométrica. De início, pode-se destacar que, da mesma forma que o objeto, o desenho é também de natureza essencialmente concreta e particular, portanto oposta às características gerais e abstratas do conceito. Esta correlação entre o particular e o geral, entre o concreto e o abstrato, que envolve a representação conceitual, revela, por si mesma, o desafio posto à atividade didática que é, como no caso dos objetos, a necessidade de transpor o próprio desenho." ([Pais, 1996])

Observado a importância das figuras na aprendizagem da geometria, o objetivo neste momento é mostrar e comparar as figuras que os autores apresentam nos enunciados das proposições e nos exercícios resolvidos e propostos da seção de Teorema de Tales. Essas figuras contextualizadas ou não aparecem da seguinte forma: é desenhado um feixe de retas paralelas na diagonal, vertical ou horizontal cortadas por duas retas transversais e pede-se para calcular, em uma das retas transversais, uma distância entre duas retas paralelas. Também há exercícios que pedem para calcular, sobre uma das retas paralelas, a distância entre as transversais; nesse caso, a resolução é por semelhança de triângulos, então eles foram desconsiderados nesse momento e analisados na seção 2.6 .

Todos os livros analisados trazem juntamente aos seus respectivos enunciados representações gráficas parecidas, conforme foi visto na seção 2.3 , eles desenham as retas paralelas na horizontal, cortadas por duas retas transversais que se intersectam fora do feixe de retas apresentado. A representação gráfica mostrada abaixo será chamada de "imagem prototípica" dos enunciados do Teorema de Tales (fig.2.38).

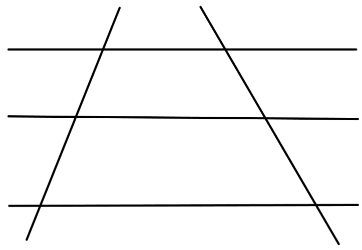


Figura 2.38: Representações gráficas prototípica dos enunciados.

Nos exercícios, os livros trazem diversas representações gráficas; as quais, vale ressaltar o comentário da [Haruna, 2000] sobre uma pesquisa de Brousseau que :

> "...a escolha das variáveis que diferenciam os diversos exercícios e os comentários dos autores de livros e manuais mostraram que eles consideram o reconhecimento das figuras como um fator decisivo e dentre as condições de utilização do teorema, a disposição e a complexidade das figuras surge como principal fonte de erros. E, além disso, os alunos cometem menos erro de aplicação do teorema nas figuras consideradas típicas".([Haruna, 2000] p.36)

Diante dessa ponderação, percebe-se que há dificuldades dos estudantes ao resolverem exercícios de Teorema de Tales que possuem figuras diferentes daquela prototípica, por esse motivo é válido analisar e comparar as diferentes representações gráficas que cada autor traz em seu livro de modo a contribuir para uma aprendizagem efetiva.

[Haruna, 2000], p.41, divide as representações gráficas do Teorema de Tales em dois blocos. No primeiro bloco (B_1), o feixe de retas paralelas é desenhado nas posições horizontal, vertical ou inclinada; as transversais também podem ser desenhadas nessas posições, como também podem ser representadas se intersectando ou não dentro da figura e quando representá-las se intersectando, o ponto de intersecção poderá estar acima das paralelas, entre as paralelas ou abaixo das paralelas. Veja os exemplos a seguir (fig.2.39);

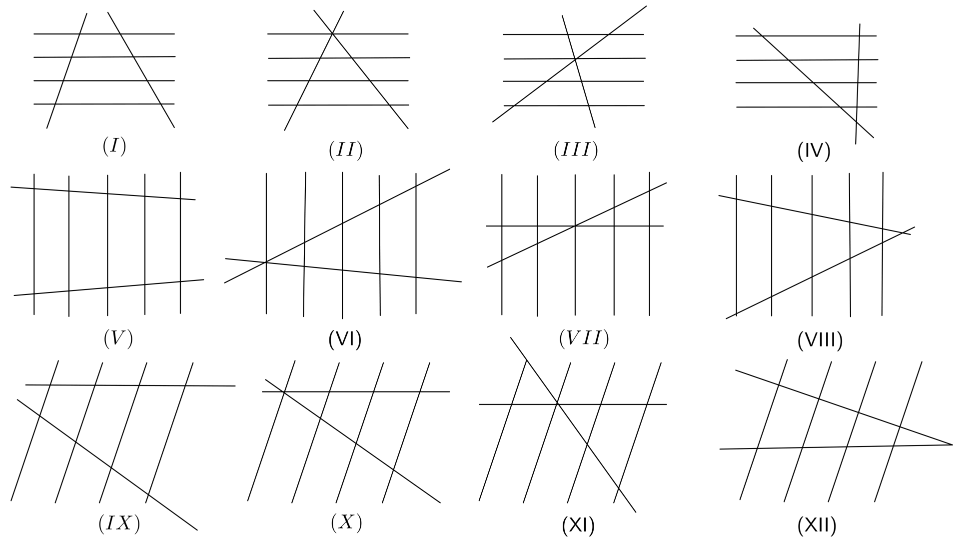


Figura 2.39: Bloco 1 ([Haruna, 2000], p.41)

[Haruna, 2000], p.41, traz no segundo bloco (B_2) as retas paralelas limitadas pelas retas transversais. Com isso, segundo ela, visivelmente na primeira olhada, formam, em alguns momentos, figuras sobrepostas (triângulo e trapézio). Veja os exemplos na figura 2.40 ;

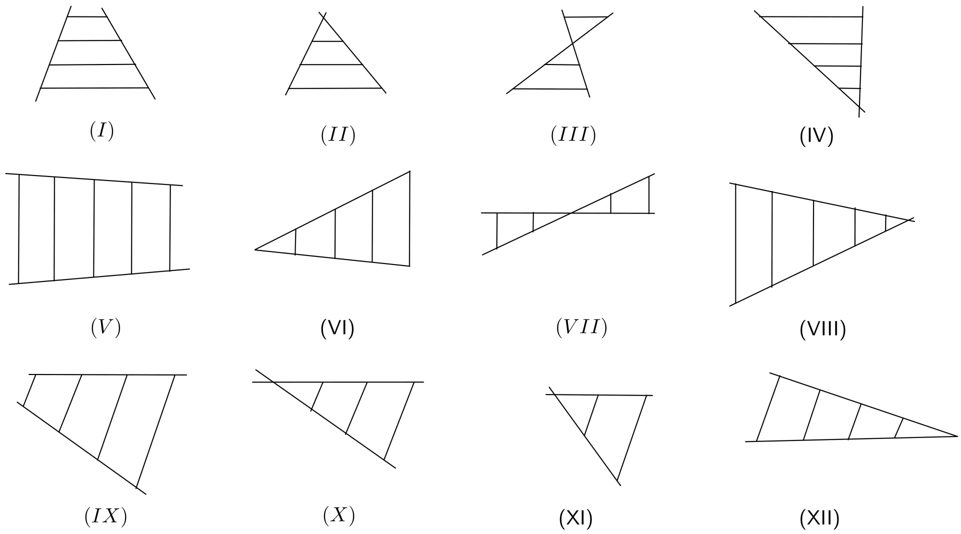


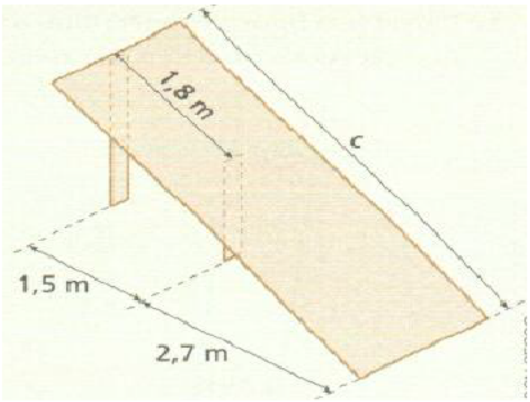
Figura 2.40: Bloco 2 ([Haruna, 2000], p.41)

Esses dois blocos (B_1 e B_2) serão usados na comparação com as representações gráficas desenhadas nos exercícios dos seis livros didáticos analisados. As tabelas 2.15 e 2.16 mostram respectivamente as formas de representações gráficas dos exercícios resolvidos e propostos que se assemelham a aquelas mostradas pela [Haruna, 2000], p.41. O “X” representa o modelo e quantidade dessas representações que cada autor optou expor em sua obra.

Autores	Blocos	**Representações Gráficas dos exercícios resolvidos.**											
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
[Leonardo, 2013]	B_1												
	B_2								X				
[Dante, 2014]	B_1	X								X			
	B_2					X							
[Paiva, 2013]	B_1	X											
	B_2												
[Iezzi, 2013]	B_1	não traz exercício de Teorema de Tales.											
	B_2												
[Smole, 2013]	B_1	X											
	B_2												
[Sousa, 2013]	B_1	X						X				X	
	B_2		X										

Tabela 2.15: Exercícios resolvidos que possuem figuras parecidas com as representações gráficas dos blocos B_1 e B_2 (X: é um exercício).

Leonardo expõe um exercício resolvido contextualizado bastante criativo, que traz dois pilares paralelos que sustentam uma rampa. O propósito dessa atividade é calcular o comprimento da rampa, dado algumas distâncias conforme a imagem I da figura 2.41 . A imagem II, do tipo B_2VIII, é uma reconstrução no plano da imagem I, que traz uma nova representação gráfica para mostrar ao educando a aplicação de Tales em figuras diferentes da prototípica.



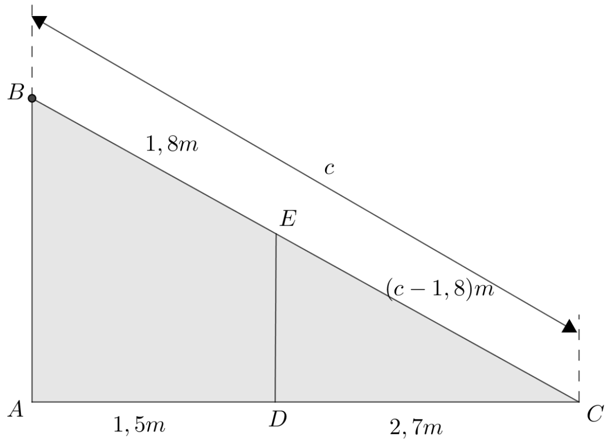


Imagem I: Rampa sustentada por dois pilares. Imagem II: Triângulos retângulos sobrepostos.

Figura 2.41: Exercício resolvido do [Leonardo, 2013], p.237.

Observa-se na tabela 2.15 que Dante, Paiva, Smole e Souza apresentam na seção de Teorema de Tales, exercícios resolvidos com representações gráficas parecidas com a imagem prototípica. Além dessas, Dante e Souza criaram, respectivamente, mais um e três exercícios de representações gráficas diferentes da prototípica, coincidindo com a metodologia de ensino de Leonardo, a qual aproveita os exercícios resolvidos para aplicar o Teorema de Tales em representações gráficas diferentes da qual apresentou no enunciado. O segundo exercício resolvido do Souza é um exemplo, que traz um triângulo $\triangle ABC$, sendo DE paralelo ao lado BC (ver fig. 2.42). Na resolução, o autor prolonga os segmentos BC e DE e traça uma reta r passando por A e paralelas as retas BC e DE , aproximando-se da imagem prototípica.

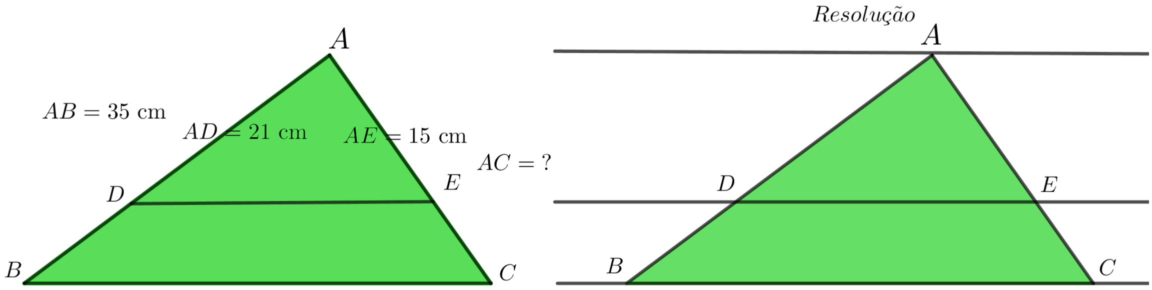


Figura 2.42: Representações gráficas do exercício resolvido $R2$ do [Sousa, 2013] p.260.

Souza também expõe mais dois exercícios resolvidos parecidos com as representações gráficas B_1X e B_1VII, conforme a figura 2.43 . Nessas atividades ele explora as posições dos feixes de retas paralelas, sendo uma inclinada e outra na vertical e as retas transversais se cruzando no interior do feixe, modelos gráficos que amplia a visualização dos segmentos correspondentes.

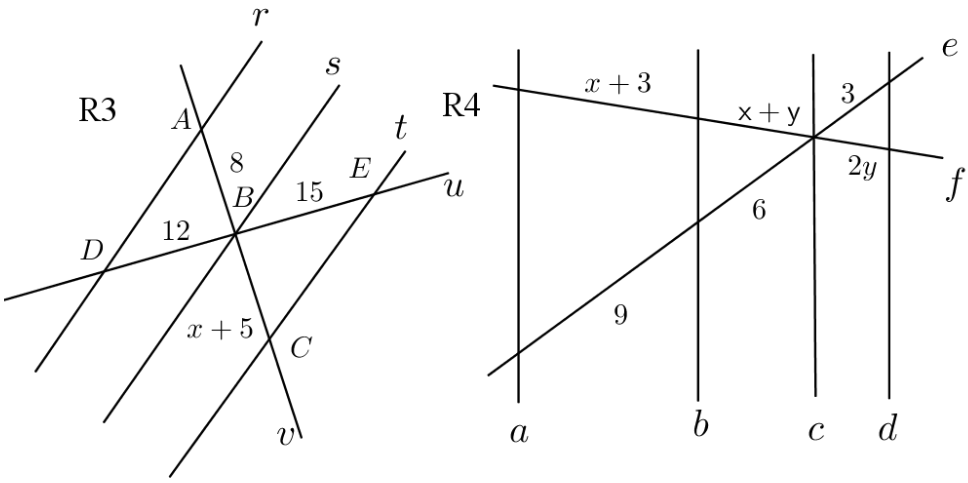


Figura 2.43: Representação gráfica do exercício resolvido do [Sousa, 2013], p. 260.

Dante traz a planta de um terreno dividido em lotes. Além de ser uma atividade contextualizada, o autor apresenta a posição do feixe de retas na vertical e limitadas pelas diagonais, diferentemente mostrada na figura prototípica. (ver fig. 2.44). Nesse momento, esse autor teve a mesma ideia que a [Haruna, 2000], criou uma figura semelhante ao modelo B_2V da figura 2.40 da [Haruna, 2000] p.41.

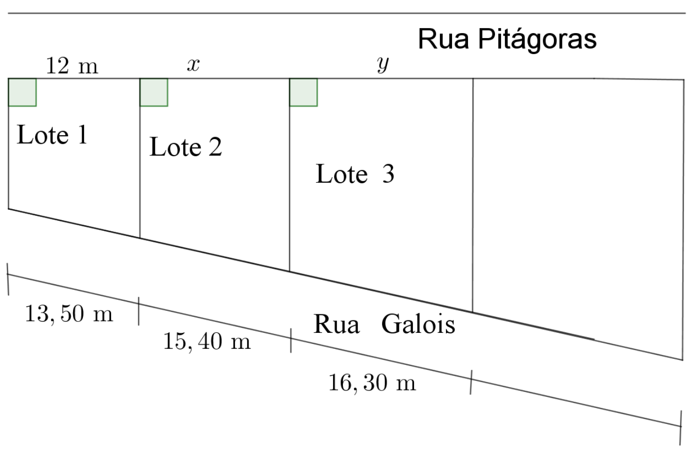
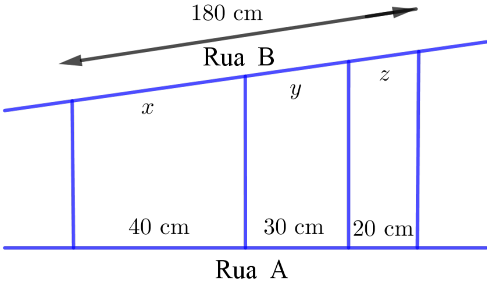
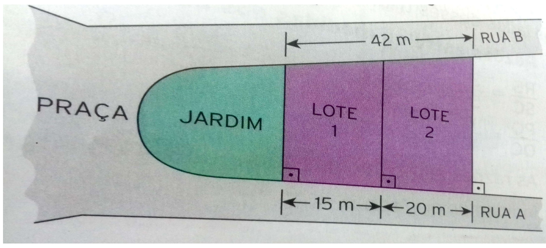


Figura 2.44: Representação gráfica do exercício resolvido do [Dante, 2014], p. 237.

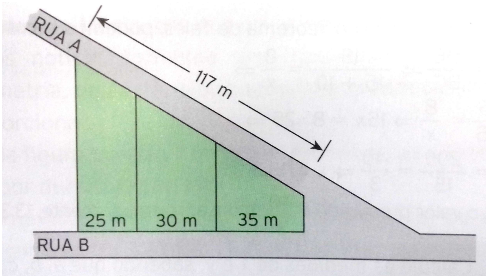
Este modelo de representação gráfica (B_2V) e de contextualização envolvendo divisão de terreno é o mais frequente nos exercícios propostos de Teorema de Tales nos livros em análise. Observe na figura 2.45 os formatos das imagens que outros autores trazem em suas obras.



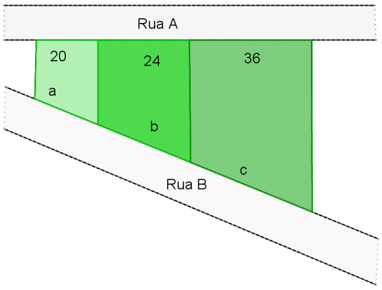
[Dante, 2014], p.237.



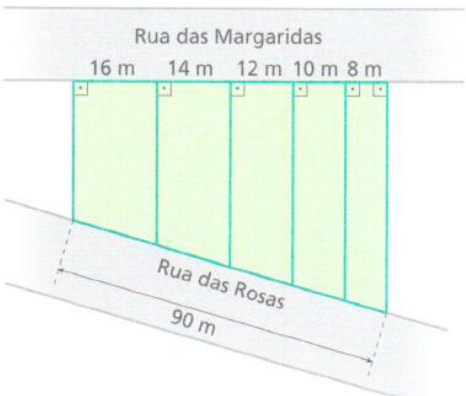
[Smole, 2013], p.242.



[Smole, 2013], p.242.



[Sousa, 2013], p.261.



[Leonardo, 2013], p.250.

Figura 2.45: Divisões de terrenos.

Dante criou um exercício resolvido com dois itens de representações gráficas estilo B_1IX e B_1I, mostrado na figura 2.46 . Possivelmente, a ideia do autor seria diferenciar a aplicação do teorema em representações gráficas diferentes, porém aparentemente pela pouca inclinação do feixe de retas da primeira figura, mostra que as figuras não são tão diferentes de modo que possibilitariam ampliar a aplicabilidade de Tales em diferentes modelos gráficos. Por outro lado, percebe-se que foi explorado mais a parte algébrica na resolução de um para o outro.

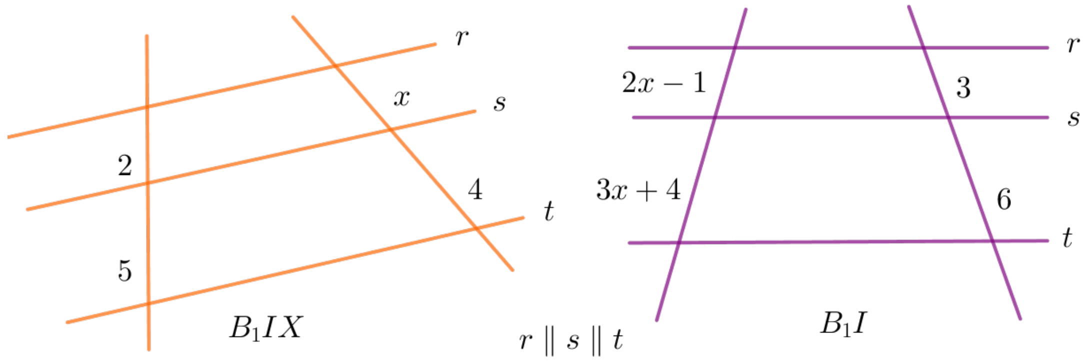


Figura 2.46: Representação gráfica do exercício resolvido 01 (itens "a" e "'b") do [Dante, 2014], p. 237.

Na tabela 2.16 são apresentadas as representações gráficas dos exercícios propostos nos livros em análise que se assemelham as diversas imagens dos blocos B_1 e B_2.

Autores	Blocos	**Representações gráficas dos exercícios propostos.**											
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
[Leonardo, 2013]	B_1				X			X	X				X
	B_2	X	X			X	X		X				
[Dante, 2014]	B_1			X						X			
	B_2		X			X					X		
[Paiva, 2013]	B_1	XX		X	X					X			
	B_2												
[Iezzi, 2013]	B_1	não traz exercícios de Teorema de Tales.											
	B_2												
[Smole, 2013]	B_1					X							
	B_2					XX							
[Sousa, 2013]	B_1	X			X			X	X	XX			
	B_2					X							

Tabela 2.16: Exercícios propostos que possuem figuras parecidas com as representações gráficas dos blocos B_1 e B_2 (X: é um exercício e XX, dois).

Leonardo traz a imagem prototípica para enunciar o Teorema de Tales; porém, logo no início traz um exemplo de segmentos correspondentes com figuras tipo B_1X (fig. 2.47) que traz os feixes inclinados e as retas se cruzando em uma das retas da extremidade do feixe (reta t). Ver fig. 2.47.

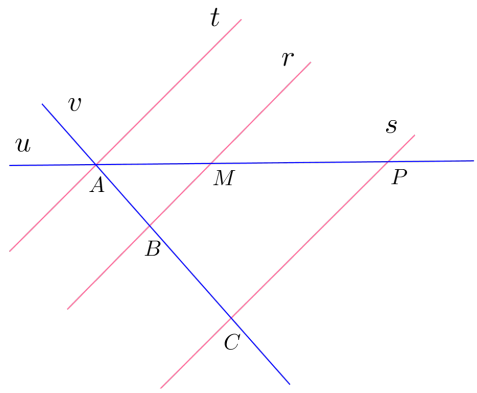


Figura 2.47: Representação gráfica do exemplo de segmentos correspondentes [Leonardo, 2013] p.236.

Este modelo de representação gráfica possibilita um avanço do assunto tratado, pois além das mudanças das posições do feixe e das retas transversais, se excluir a reta t do feixe, visualizará a aplicação de Tales num feixe com duas retas paralelas e as retas transversais se cruzando fora desse feixe. Deste modo, amplia o conhecimento do educando na aplicação do Teorema de Tales para feixe com duas retas paralelas.

Explorando várias representações gráficas, Leonardo disponibiliza um exercício resolvido, mostrado anteriormente (fig. 2.41), com a forma gráfica parecida com B_2VIII , a qual o feixe também contém duas retas, porém na vertical. Diante desse formato, a novidade é a limitação das retas do feixe pelas retas transversais.

Perante essas duas representações gráficas, vale destacar um dos enunciados do Teorema de Tales ostentado pela Haruna:

> "Se r é paralela a um dos lados do triângulo qualquer, então r divide os outros lados em partes proporcionais." ([Haruna, 2000], p. 41)

Nesse enunciado, há apenas duas retas paralelas e duas retas transversais se cruzando para aplicação do Teorema de Tales, uma terceira reta pode ser traçado pelo ponto de encontro das transversais, como na figura 2.47.

Observado a metodologia de ensino de Leonardo, que traz um exemplo, com a figura 2.47 (tipo B_1X), de segmentos correspondentes e a figura 2.41 (tipo B_2VIII) de um exercício resolvido, facilitam o educando achar os segmentos correspondentes nos quatros exercícios propostos (fig. 2.48), os quais trazem um feixe com duas retas paralelas inclinadas ou na vertical e limitadas ou não pelas retas transversais e estas se cruzando fora do feixe.

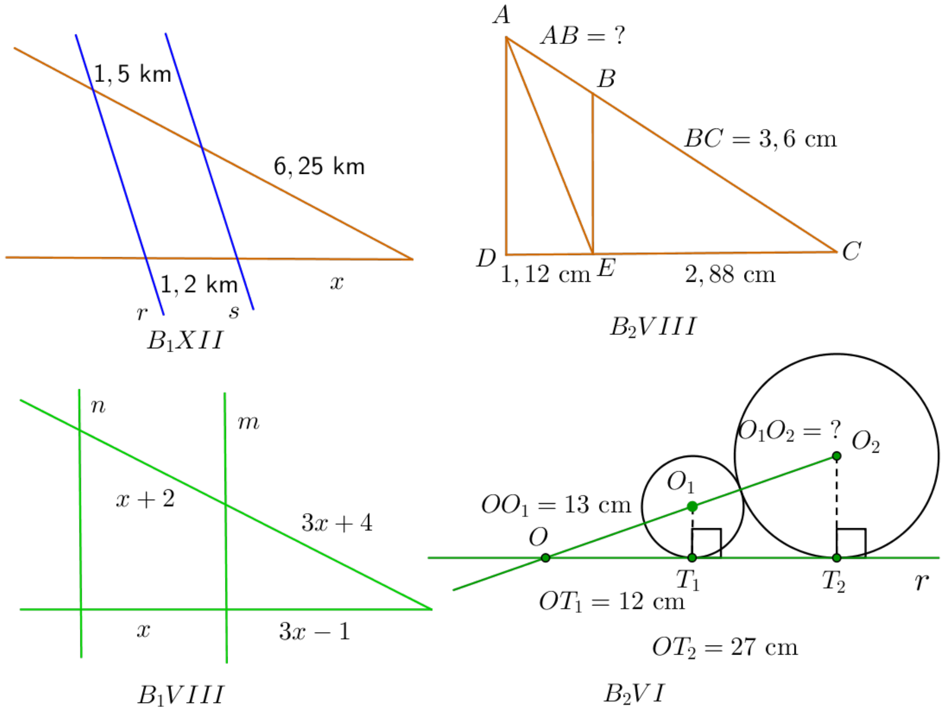
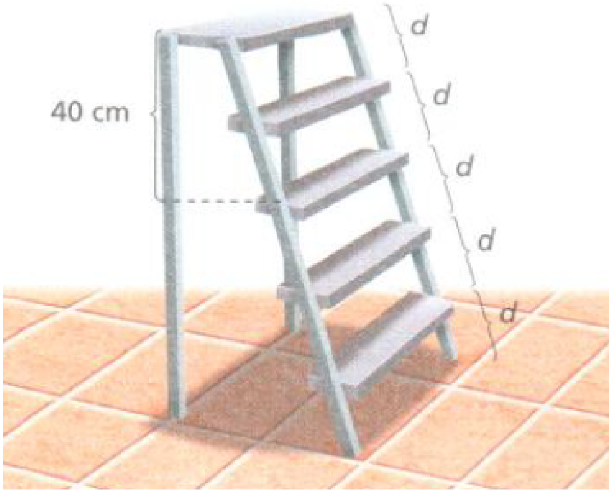
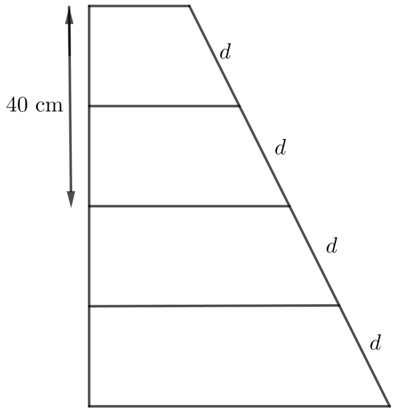


Figura 2.48: Representações gráficas dos exercícios de Tales [Leonardo, 2013], p.238.

Na seção de exercícios complementares, Leonardo disponibiliza mais quatro exercícios, sendo o primeiro uma contextualização diferenciada envolvendo uma escada; a qual, as distâncias dos degraus são iguais e pede para calcular a altura da mesma. Nota-se que essa figura com três dimensões não se assemelha à nenhuma imagem dos blocos, pois está no campo da geometria espacial, porém relembra a reconstrução da rampa sustentada por pilares no plano (ver fig. 2.41), exibido pelo autor no exercício resolvido. O estudante precisará obter uma figura plana como a figura 2.49 da direita e recairá numa figura de representação gráfica B_2V.



Escada no espaço ([Leonardo, 2013], p.250).



Reconstrução da escada no plano (educando).

Figura 2.49: Representações gráficas da escada no plano.

Nos outros três exercícios, Leonardo explora, em dois deles, feixes com duas retas na horizontal, porém um limitado pelas diagonais (B_2II) e a outro não (B_IV). No terceiro, é desenhado o feixe com três retas inclinadas e as duas retas transversais se cruzando fora do feixe (ver fig. 2.50).

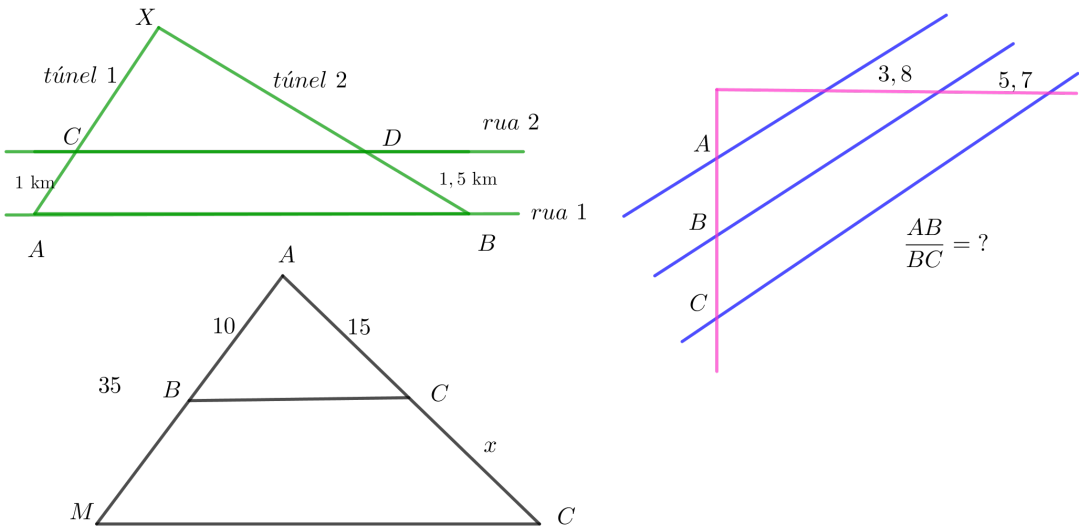


Figura 2.50: Representações gráficas dos exercícios proposto do [Leonardo, 2013], p.250.

Dante apresenta três exercícios propostos que podem ser complexos para o educando na descoberta dos segmentos correspondentes, pois as representações gráficas de cada um são diferentes da prototípica e dos exercícios resolvidos. No primeiro, o feixe na horizontal e as retas transversais se cruzando entre duas retas paralelas (B_1III); no segundo, o feixe contendo duas retas paralelas e estão limitadas pelas transversais (B_2II) e no terceiro, o feixe de retas estão inclinadas (B_2X), ver fig.2.51 .

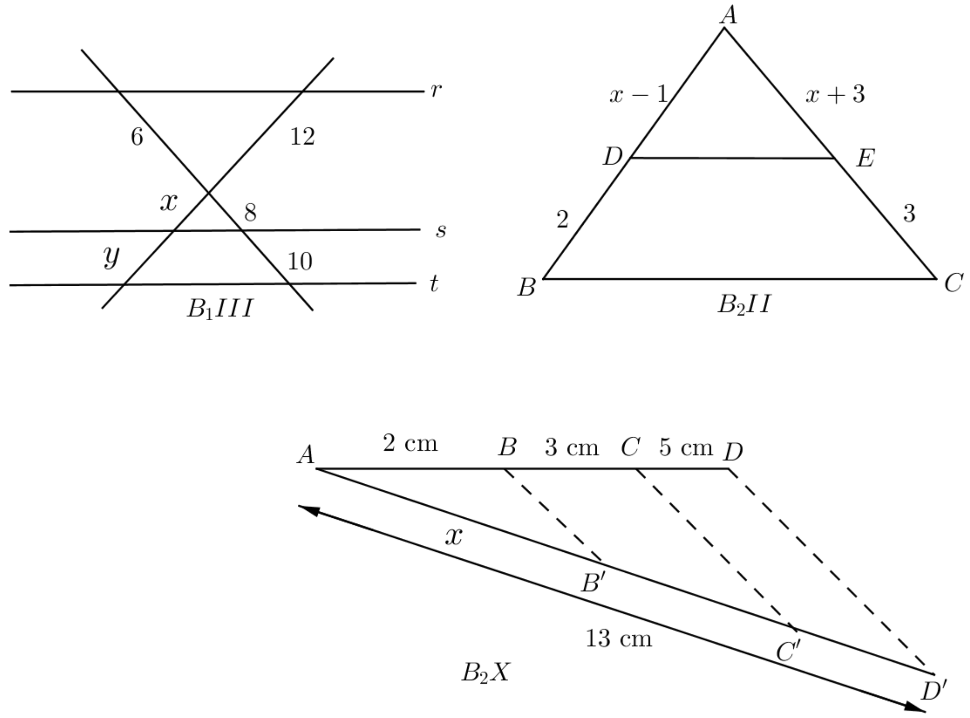


Figura 2.51: Representações gráficas dos exercícios clássicos de [Dante, 2014]p.237.

Os exercícios de representações gráficas B_1III e B_2II são atividades que mais se aproximam da figura prototípica, pois os feixes de retas estão na horizontal. Na primeira, quando as retas transversais se cruzam, para melhor compreensão, desloca uma dessas retas no sentido da extremidade, de modo que elas se afastam, e traça uma outra reta (w) paralela as demais retas do feixe. Com isso, retornará à representação gráfica prototípica e facilitará a aplicação de Tales. Observe a simulação na figura 2.52.

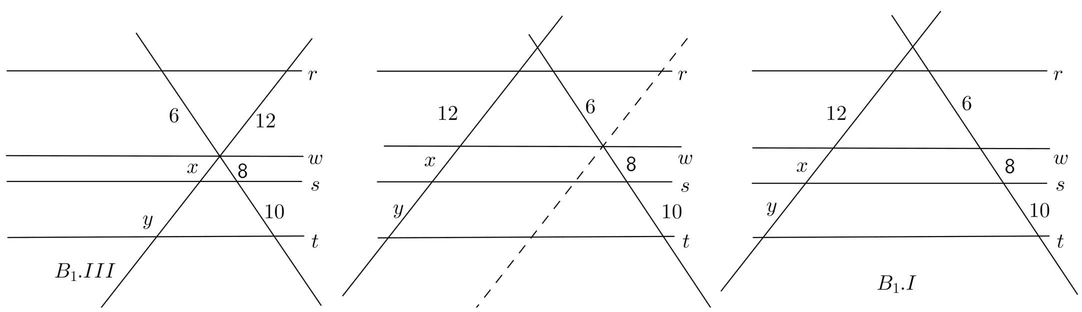


Figura 2.52: Uma reta transversal deslocada.

No exercício de representação gráfica B_2II visualiza-se um triângulo $\triangle ABC$, onde DE paralelo à BC e elas formam um feixe. Já que em nenhum momento foi apresentado esse modelo gráfico pelo autor em sua obra, poderá dificultar o educando imaginar como se aplicará o Teorema de Tales. Nesse caso, para facilitar a visualização pelo estudante, tome uma reta paralela a DE por A e afaste umas das retas transversais, conforme foi feito na figura 2.52; desse modo, voltará à figura prototípica. O terceiro exercício, que traz os segmentos BB', CC' e DD' paralelos, mesmo sendo uma representação gráfica diferente da prototípica, deve ter sido criado com objetivo para o educando identificar o feixe de retas paralelas que estão inclinadas e os segmentos correspondentes.

Paiva criou, além dos dois exercícios propostos de figura estilo a prototípica, mais três de representações gráficas diferentes, parecidas com as imagens B_1XII, B_1III e B_1II (ver fig.2.53). Dessa maneira, o autor, seguindo a mesma estratégica de ensino dos demais autores anteriores, criou questões mais complexas; porém, de forma que poderá recair numa dificuldade do educando achar os segmentos correspondentes; Por outro lado, são atividades desafiadoras ao aluno e avaliam se o conteúdo foi realmente aprendido.

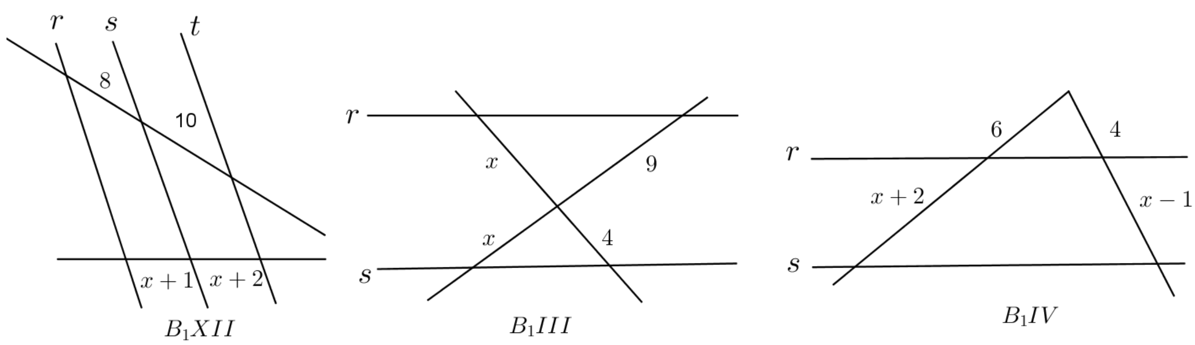


Figura 2.53: Representações gráficas dos exercícios clássicos de [Paiva, 2013] p.73 ($r \parallel s \parallel t$).

O primeiro exercício (B_1XII) traz de diferente o feixe inclinado; o segundo (B_1III) e terceiro (B_1IV), os feixes são desenhados com duas retas, parecido com os exercícios de Leonardo (ver fig. 2.48). Nessas duas ultimas atividades podem serem complexas na aplicação do Teorema de Tales pela quantidade de retas desenhadas nos feixes. Além disso, aquela com representação gráfica do modelo B_1III tem uma complexidade maior, pois as retas transversais se cruzam entre as paralelas. Portanto, para melhor visualização do aluno, é sugerido realizar a mesma dinâmica realizada na figura 2.52, a qual, deslocou uma das retas transversais e incluiu mais uma reta no feixe, voltando à representação prototípica.

Smole expõe três exercícios de representação gráfica diferente da prototípica. A primeira, do estilo B_1V, espera-se do educando visualizar o feixe de retas paralelas na vertical e a relação de segmentos correspondentes nas outras duas retas transversais, conforme mostrado na figura 2.54 . Os outros dois exercícios são contextualizados, os quais foram mostrados nos exercícios que trazem imagens de uma planta com divisão de terrenos (ver fig. 2.45).

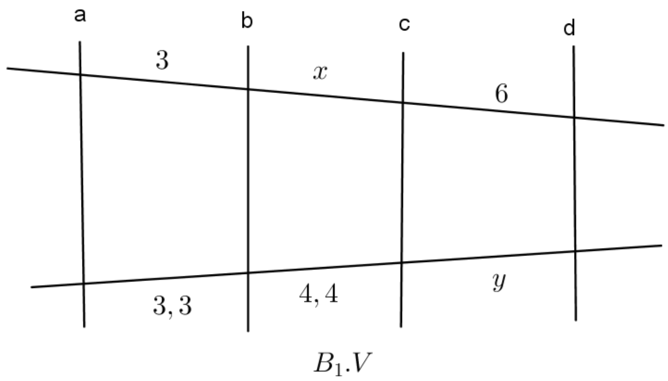
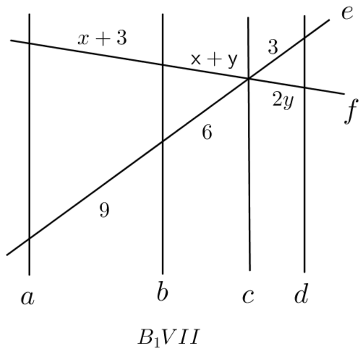
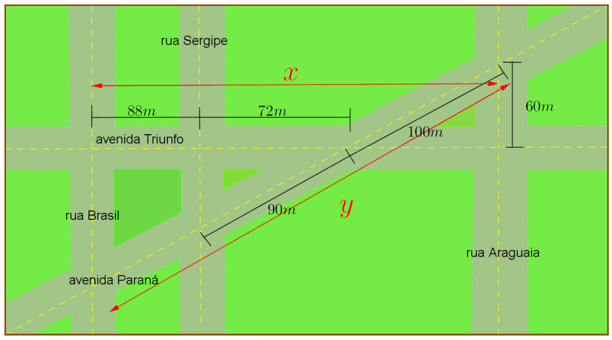


Figura 2.54: Representação gráfica do exercício da [Smole, 2013] p.241 ($a \parallel b \parallel c \parallel d$).

Souza inicia a lista de atividades com um exercício de representação gráfica estilo a prototípica. Mais adiante, traz uma metodologia de aprendizagem vantajosa, a qual formula um exercício proposto de representação gráfica contextualizada (B_1VII) que se assemelha a um exercício resolvido (B_1VII). São exercícios que possuem um feixe de retas na vertical e são cortados por duas transversais que se cruzam internamente no feixe. Sendo assim, os métodos de resolução são bem parecido nessas duas atividades (ver fig. 2.55).





Exercício resolvido ([Sousa, 2013], p.260). Exercício proposto ([Sousa, 2013], p.261).

Figura 2.55: Representações gráficas dos exercícios resolvido e proposto.

Souza também criou um exercício com duas atividades de modelo B_1IX, as quais aparentemente não trazem dificuldades ao aluno na aplicação de Tales, só diferenciam da imagem prototípica, pois os feixes de retas paralelas estão inclinadas. Além desse, o autor propõe mais dois exercícios de modelo B_1VIII e B_1II, sendo que no primeiro ele afirma que os ângulos externos alternos de um feixe são diferente; nesse caso o autor quer mostrar que a reta do meio (s) não é paralela as demais, impossibilitando o uso de Tales.E o outro exercício, Souza explora o uso de Tales em uma representação gráfica com duas retas no feixe; nesse momento se torna uma novidade de ao educando perante todos exercícios .

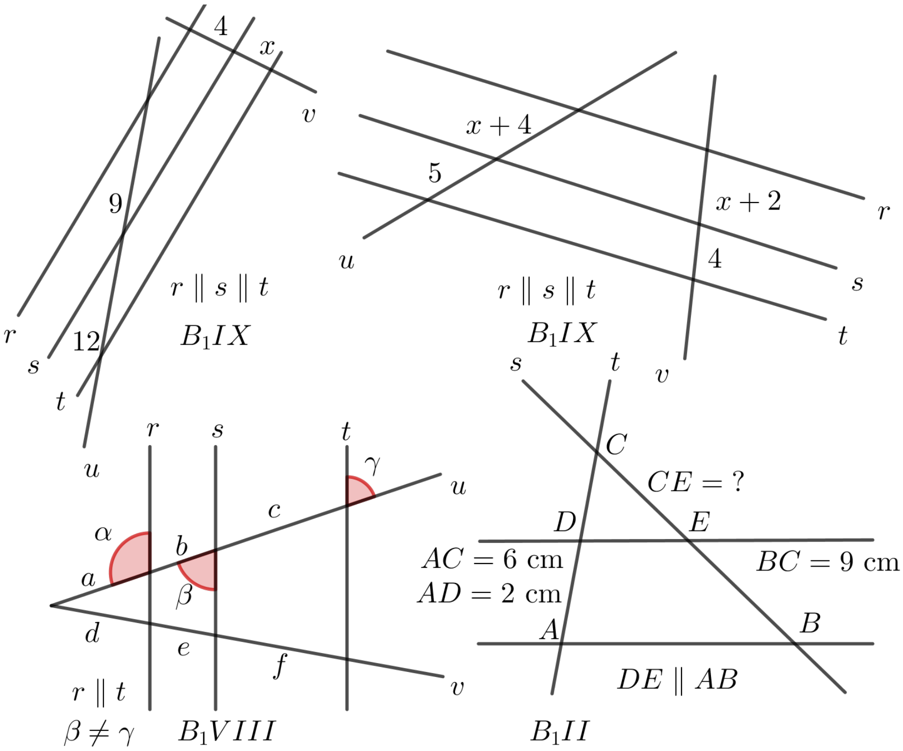


Figura 2.56: Outros exercícios de diversas representações gráficas do [Sousa, 2013], p.261-263).

2.6 Principais exercícios

Os exercícios podem ser um recurso didático como forma de fixação dos conteúdos para os alunos, auxílio ao professor para avaliar o aprendizado dos estudantes, estabelecer conexão entre conteúdos distintos, apresentar usos e aplicações dos objetos de estudo, entre outros. Além disso, os exercícios proporcionam ao aluno uma forma de aperfeiçoamento do conhecimento adquirido, conforme Onuchic (1999);

> A resolução de problemas consiste em permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Dessa forma, os alunos adquirem a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e conhecer as aplicações da matemática. ([Leles, 2013], p.30 apud [Onuchic, 1999] p.7)

Para [Onuchic and Allevato, 2011] p.80-81, pode-se dizer que ensinar, aprender e avaliar eram considerado três processos distintos. Com o passar do tempo e com as reformas no Ensino da Matemática, vários estudos referente ao tema resolução de problemas, algumas metodologias de trabalho na sala de aula juntam os três elementos simultaneamente, formando a palavra composta : ensino-aprendizagem-avaliação.

> "(...) enquanto o professor ensina, o aluno, como participante ativo, aprende, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para o problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário." ([Onuchic and Allevato, 2011], p.81)

Além disso, a implementação da resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação em matemática, exige do professor e do aluno que sejam personagens com posturas e atitudes renovadas em sala de aula. Atualmente, é importantíssimo que o docente prepare e escolha problemas apropriados ao conteúdo, em seguida passa para o aluno a responsabilidade pela aprendizagem que pretende atingir. Os alunos, por sua vez, devem acolher essa responsabilidade. Sabendo-se que não é fácil essa mudança de comportamento, [Onuchic and Allevato, 2011] propõem boas razões para fazer esse esforço:

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido;
> - Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos;
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam;
> - Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática;
> - Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios;
> - A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.
>
> ([Onuchic and Allevato, 2011] p.82)

Esses livros em análise são recursos didáticos que ligam, em alguns momentos, a teoria à avaliação. Além disso, os exercícios, contidos neles, são ferramentas para aumentar a compreensão dos conteúdos; no entanto, é preciso investigar se esses livros favorecem este ganho de autonomia pelos estudantes.

Os exercícios resolvidos são exemplos que contribuem para solidificação dos conteúdos estudados; em seguida, a maioria dos autores disponibiliza exercícios propostos parecidos e em outros momentos, estes exercícios são confeccionados com grau de complexidade maior, de maneira que ocorre uma avaliação do ensino-aprendizagem.

Relembrando que já foi verificado nas tabelas 2.5 e 2.6, na subseção 2.1 que trata do quantitativo que cada livro traz de exercícios, que a maior parte das listas de atividades são questões não contextualizadas, as quais serão chamadas de tradicionais. Essa denominação segue a mesma linha de raciocínio quando os PCNs apontam algumas considerações com relação ao ensino da matemática caracterizado como tradicional que predominou no período anterior à Matemática Moderna:

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais com a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, *desprovidos de significados* para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologia compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama. ([Brasil, 1997a], p.15)

Percebe-se que os PCN relatam problemas com o ensino tradicional: procedimentos mecânicos e falta de significado, a valorização da memorização sem compreensão. Dentro desse molde de ensino, tem-se a transmissão de informação, o aluno aprende a reproduzir através de memorização e essa reprodução é garantida do que aprendeu. Consequentemente, estes métodos de ensino levam a aversão à matemática.

Segundo o guia do PNLD de 2015, contextualização pode ser uma ligação dos conteúdos matemáticos às práticas sociais de hoje, uma conexão com outros campos do saber e um contexto feito com base na história da matemática. Contudo, objetivando o estudo mais significativo.

Os exercícios resolvidos e propostos que foram selecionados, se destacaram pelos seguintes motivos:

- Informações supérfluas nos enunciados dos exercícios;
- Contextualizações apropriadas, as quais relacionam às práticas sociais, conexões com outras disciplinas e contexto históricos, bem com contextualizações forçadas;
- Exercícios inseridos em seção que não contém este o conteúdo explorado,

- Soluções com muito algebrismo, que nos pareceu exagerado.

A análise desses exercícios será dividida entre as seções do Teorema de Tales e semelhança; pois, será comparado ao conteúdo ensinado nestas seções. Além disso, no momento da seleção de um ou mais exercícios em conjunto, serão realizados alguns comentários referentes aos motivos deles serem apresentados nesta obra.

2.6.1 Exercícios de Teorema de Tales

Esta subseção serão realizadas dois tipos de análises: exercícios resolvidos e propostos da seção que aborda Teorema de Tales nos livros didáticos em análise.

Exercícios resolvidos da seção de Teorema de Tales. Diante da tabela 2.5 da seção 2.1, características físicas dos livros, que traz a quantidade de exercícios de Tales nos livros, foram selecionados dois exercícios resolvidos que estão numa seção específica de Tales, porém tratam de semelhança de triângulos e um deles propõe uma contextualização forçada.

Exercício Resolvido 1. (ver [Smole, 2013] p.241) A altura de Milu é 1,65 m. Qual a altura da árvore?

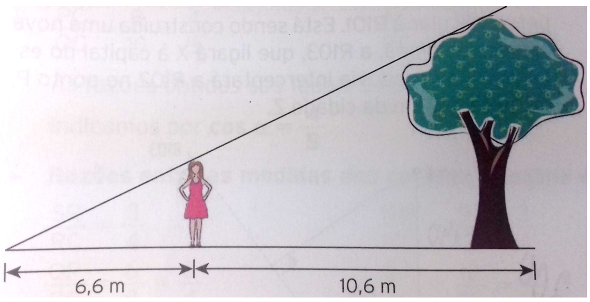


Figura 2.57: Uma árvore e uma menina formando triângulos retângulos. [Smole, 2013] p.241.

Resolução. *Pelo Teorema de Tales para triângulos, chamando de h a altura da árvore, temos:*

$$\frac{1{,}65}{h} = \frac{6{,}6}{6{,}6+10{,}6}$$

$$1,65.17,2 = 6,6h$$

$h = 4,3m$

Logo, a altura da árvore é 4,3m.

Comentários. A primeira observação dessa atividade é que a mesma foi mal contextualizada, pois na vida real a reta que tangencia essa árvore e a pessoa é desenhada sem contexto e impossível de simular essa situação no cotidiano. A segunda, é na resolução, a autora informa que é resolvida por Teorema de Tales, porém foi aplicado semelhança de dois triângulos formados.

Revendo a teoria apresentada pelo livro na seção de Teorema de Tales, Smole conceitua, em breves palavras, semelhança de triângulos como uma consequência de Tales, de modo que junta dois conceitos em uma seção específica de Tales. Após enunciar o teorema ela continua da seguinte forma:

> Uma consequência do Teorema de Tales aparece em uma propriedade geométrica relacionada à semelhança de triângulos. Lembrando que dois triângulos são semelhantes quando os lados de um são proporcionais aos lados do outro e os ângulos correspondentes são congruentes, considere um triângulo qualquer cortado por uma reta paralela a um dos lados. Se $DE \parallel AC$, então $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{CB} = \frac{DE}{AC}$ e os ângulos correspondentes dos $\triangle BDE$ e $\triangle BCA$ são congruentes.

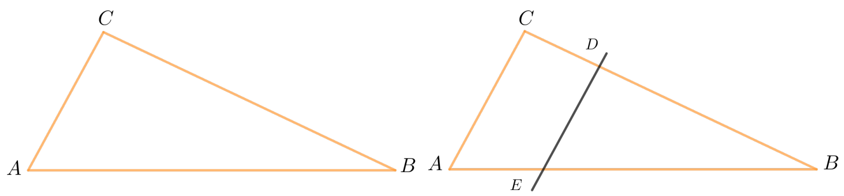


Figura 2.58: Triângulo $\triangle ABC$, $AC \parallel DE$.

> Pode-se então dizer que dividindo um triângulo com uma reta paralela a qualquer um dos seus lados, os triângulos resultantes são semelhantes. No exemplo dado, é representado essa relação de semelhança assim: $\triangle BDE \sim \triangle BCA$. ([Smole, 2013], p.240)

Diante dessa conceituação de semelhança resumida e especificamente somente para triângulos, percebe-se que a autora entende que esse conteúdo já foi ministrado em alguma fase do Ensino Fundamental. Diante disso, junta dois conteúdos de forma resumida em uma seção específica de Tales. Além desse exercício resolvido, ela criou mais um, que será mostrado em seguida.

Exercício Resolvido 2. (ver [Smole, 2013] p.241) Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

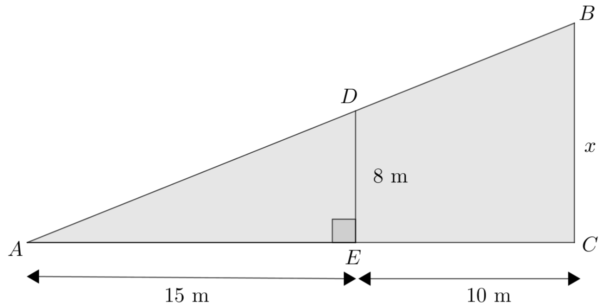


Figura 2.59: Triângulo retângulo ABC, DE || BC ([Smole, 2013] p.241)

Resolução. *Em consequência do Teorema de Tales, podemos escrever:*

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{15+10} = \frac{8}{x} \Rightarrow \frac{15}{25} = \frac{8}{x} \Rightarrow 15x = 8.15 \Rightarrow x = \frac{200}{15} = \frac{40}{3} \Rightarrow x \cong 13,3$$

Comentários. Na resolução, Smole aplica semelhança de triângulos para calcular um dos lados semelhantes. Porém, em nenhum momento da resolução é dito que será resolvido por semelhança de triângulos. Na lista de exercícios propostos, a autora disponibiliza três exercícios de aplicação de semelhança de triângulos, sendo dois parecido com esse exercício resolvido (fig.2.60) e um que será mostrado com mais detalhes em seguida, na parte dos exercícios propostos de Teorema de Tales, pois se encontra na seção de Teorema de Tales deste livro.

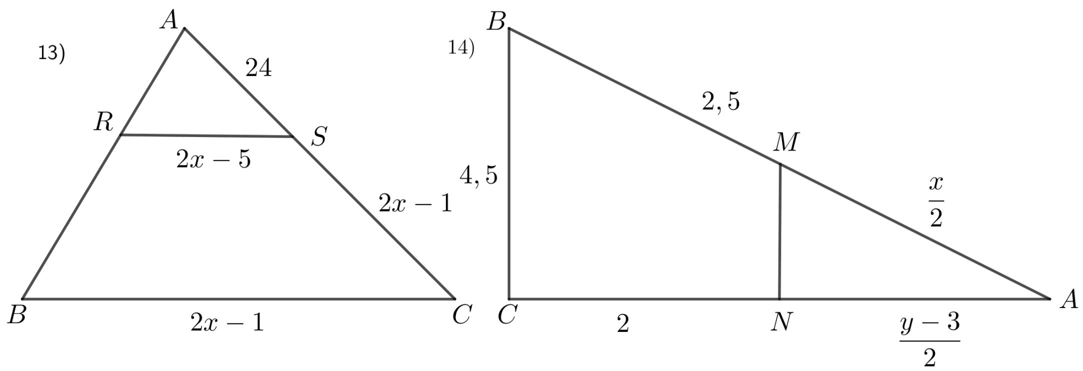


Figura 2.60: Exercícios propostos de nº 13 e 14 da [Smole, 2013] p.241.

Exercícios propostos na seção de Teorema de Tales Serão apresentados oito exercícios propostos com contextualização, com história ou relacionado com outras disciplinas que por algum motivo pareceram interessantes para o autor. Além desses, será apresentado um exercício que possui perguntas sem nexo com o tema dado, um outro de alta complexidade na resolução comparado com a teoria dada pelo autor e alguns exercícios que exploram semelhança na seção de Teorema de Tales.

Exercício Proposto 1. (ver [Leonardo, 2013] p.238 - Vunesp) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura de 5 m mede 3 m.

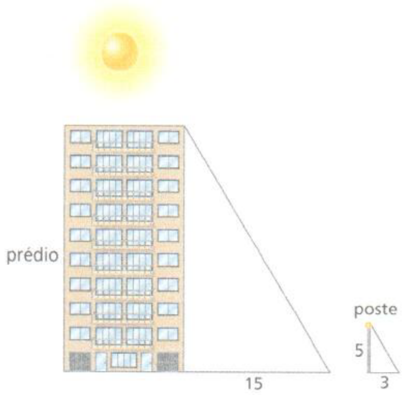


Figura 2.61: Sombra do prédio e do poste. ([Leonardo, 2013], p.238)

A altura do prédio, em metros, mede;

(a) 25 (b) 29 (c) 30 (d) 45 (e) 75

Comentários. Esse exercício clássico é considerado contextualizado, pois explora o contexto histórico. Essa atividade relembra a história de Tales de Mileto, quando ele calculou a altura da pirâmide de Queóps usando o Teorema de Tales. Além disso, ela se destaca pois pode gerar uma dúvida ao educando de como usar o Teorema de Tales ou como visualizar o feixe de retas cortados por transversais. Diante da figura 2.61, observa-se dois triângulos retângulos separados, distanciando-se de uma representação gráfica que possibilite a aplicação de tales. Se encaixar um triângulo dentro do outro, formando duas retas paralelas (hipotenusas) limitadas por duas transversais, formará a uma representação gráfica, mostrada na figura 2.62, que facilitará o uso do Teorema de Tales.

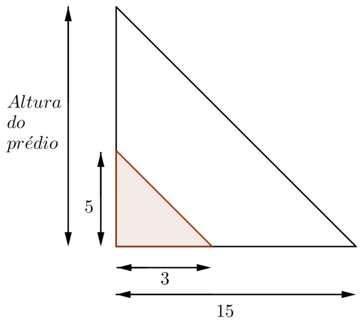


Figura 2.62: Triângulos sobrepostos.

Exercício Proposto 2. (ver [Paiva, 2013] p.73) Uma escala termométrica é uma sequência de valores numéricos em que para cada valor é associada uma temperatura. A escala Celsius adota, sob pressão normal, ao nível do mar, o valor de 0 para temperatura de congelamento da água e 100 para a temperatura sob a qual a água entra em ebulição. Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 e 212 a essas temperaturas, respectivamente. No esquema a seguir, as três retas representadas pelos tracejados são paralelas e concorrem as escalas de Celsius e Fahrenheit.

Aplicando o Teorema de Tales, determine a temperatura em graus Fahrenheit ($°F$) correspondente a 75 graus Celsius ($°C$).

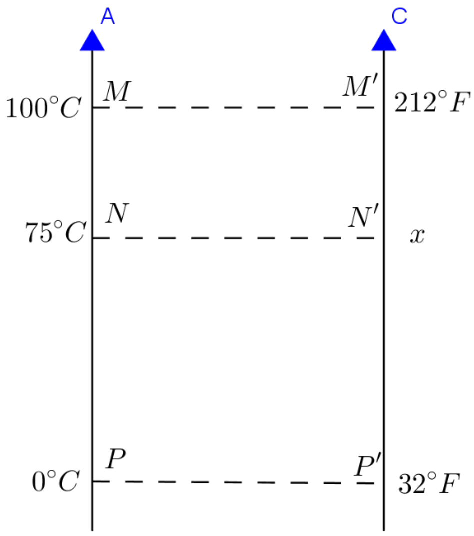


Figura 2.63: Retas numéricas de Celsius e Fahrenheit são paralelas ([Paiva, 2013], p.73)

Comentários. Provavelmente, Paiva criou esse exercício com objetivo de contextualiza-lo fazendo conexões com outra disciplina, o qual trabalha a interdisciplinariedade entre a

Física e a Matemática. Porém, é um exercício que não trabalha adequadamente com o uso do Teorema de Tales, o uso de escalas diferentes, diferentemente do uso de comprimentos de segmentos, fazem uma relação se adequando ao uso da função afim; desse modo, faz com que os segmentos correspondentes sejam proporcionais. Por outro lado, se as escalas fossem colocadas de modo que o mesmo comprimento em centímetros correspondesse a uma unidade em graus Celsius e em Fahrenheit, os segmentos horizontais não seriam paralelos. No problema, o autor reescalou uma delas para que quando $0°C$ corresponda a $32°F$ e tenha-se o $100°C$ correspondendo a $212°F$. Então as retas MM', NN' e PP' ficam paralelas e o Teorema de Tales pode ser utilizado. Mas so ficam paralelas porque as escalas se relacionam por um função afim. Se as escalas se relacionam de qualquer outro modo (uma função exponencial, por exemplo) o estudante faria o mesmo argumento e chegaria a um resultado absurdo.

Exercício Proposto 3. (ver [Smole, 2013] p.242) Nesta planta, temos terrenos com formas de trapézio. As medidas de uma das frentes de cada terreno são conhecidas.

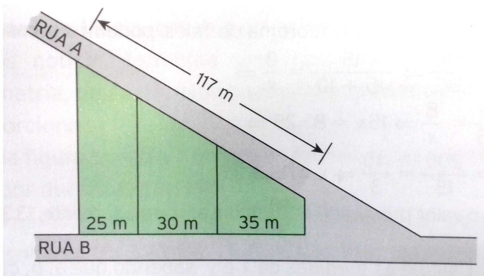


Figura 2.64: Planta com três terrenos ([Smole, 2013], p.242)

a) Calcule as medidas das frentes que dão para a rua A.

b) A seguir, há uma resolução incorreta deste problema. Qual foi o erro cometido?

Resolução. $\frac{35}{x} = \frac{30}{y} = \frac{25}{z}$ *ou* $\frac{7}{x} = \frac{6}{y} = \frac{5}{z}$ *(I)*

$x + y + z = 117(II)$

De (I) *temos:*

$7y = 6x$

$7z = 5x$

Multiplicando (II) por 7, obtemos:

$7x + 7y + 7z = 819$

$7x + 6x + 5x = 819$

$17x = 819$

$x = 48,2$

Comentários. Essa atividade já foi citada anteriormente para mostrar grande quantidade de atividades envolvendo divisão de terrenos. De modo geral, ela é uma questão que na demarcação da divisão dos terrenos, forma um feixe de retas na vertical limitado por duas retas transversais. O interessante nessa questão é a falta de criatividade nas perguntas oferecidas ao educando. No item "a" é uma aplicação direta do Teorema de Tales, no item "b" pergunta onde se encontra o erro da resolução. Nesse último item, além de ser uma atividade de análise algébrica, o educando certamente iria priorizar analisar a aplicação correta do Teorema de Tales. Porém, o erro não tem relação com o assunto tratado, ou seja, um erro de adição de termos algébricos que nada contribuirá para o aprendizado da aplicação do teorema ensinado.

Exercício Proposto 4. (ver [Smole, 2013] p.242 Insper-SP) Duas cidades X e Y são interligadas pela Rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z , por onde passa a rodovia R102, também retilínea perpendicular à R101. Está sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. A nova rodovia interceptará [3] a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

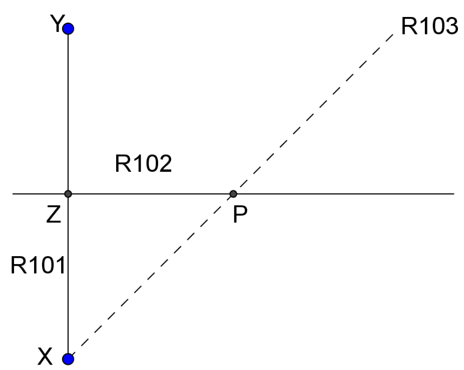


Figura 2.65: Cruzamentos de rodovias ([Smole, 2013], p.242).

[3] A palavra foi mal utilizada pelo autor, "intersectará" seria uma palavra mais adequada que traz os seguintes significados: "cruzar, cortar...".

O governo está planejando, após a conclusão da obra, construir uma estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta ligação poderá ter é:

(a) 250 (b) 240 (c) 225 (d) 200 (e) 180

Comentários. Essa questão é uma atividade contextualizada relacionada às práticas sociais tirada de um concurso (Insper-SP), que descreve distâncias de rodovias que ligam cidades e cruzam entre si. Após visualizar o desenho dos cruzamentos da rodovias (fig.2.65) e demarcar as distâncias da cidade X à Y, X à Z e Z ao ponto P, pertencentes às rodovias R102 e R103, pergunta-se a menor distância da cidade Y à rodovia R103. Nesse instante, é necessário que o educando saiba que a menor distância de um ponto a reta, é um segmento saindo desse ponto e perpendicular a outra reta, representado na figura seguinte (fig.2.66).

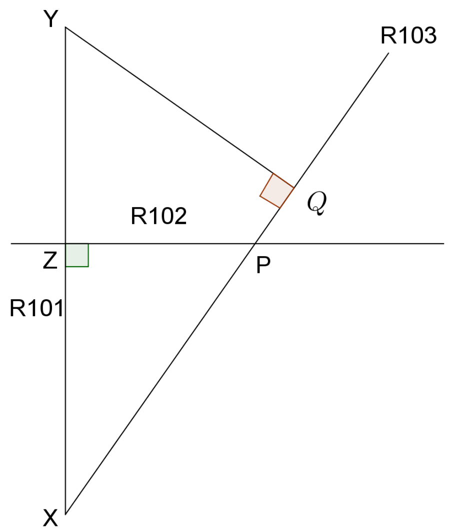


Figura 2.66: Acrescentado a menor distância YQ da cidade Y à rodovia R103

Diante do desenho dado e acrescentado essa menor distância de Y à rodovia R103 (YQ), observa-se que o Teorema de Tales não seria útil na resolução; no entanto, é um exercício que explora o uso semelhança triângulos. Porém, no caso do aluno que está estudando sozinho com esse livro didático, pode ser difícil ele "enxergar" esses dois triângulos semelhantes, sabendo-se que na teoria o autor relembrou a definição de semelhança de triângulos na seção que trata, especificamente, do Teorema de Tales da seguinte forma:

> "Lembrando que dois triângulos são semelhantes quando os lados de um são proporcionais aos lados do outro e os ângulos correspondentes são congruentes..." ([Smole, 2013] p. 240).

A abordagem do conceito de semelhança de triângulos foi precária, faltando abordar os casos de semelhanças; os quais, ajudariam a encontrar os triângulos semelhantes. ($\triangle XQY \sim \triangle XZP$)

Exercício Proposto 5. (ver [Sousa, 2013] p.261 FAAP-SP) O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura a seguir.

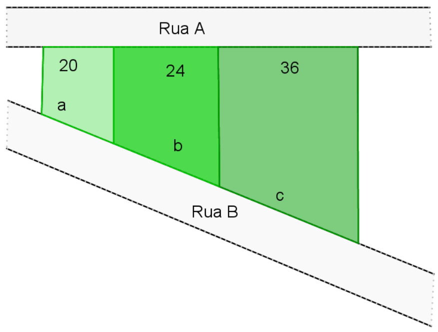


Figura 2.67: Planta com 03 lotes ([Sousa, 2013], p.261).

Sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 120$ m, os valores de a, b, c, em metros, são respectivamente:

(a) 40, 40 e 40 (b) 30, 30 e 60 (c) 36, 64 e 20 (d) 30, 36 e 54 (e) 30, 46 e 44

Comentários. Essa questão volta a ser analisada pois a mesma explora mais o campo algébrica do que geométrica. Nesse caso, se a ideia era reforçar a aplicabilidade do Teorema de tales, isso ocorrerá, porém o maior trabalho será manipular as incógnitas a, b e c num sistema algébrico. Dessa forma, essa questão foi criada com pouca ênfase no conteúdo principal estudado.

Exercício Proposto 6. (ver [Sousa, 2013], p.261) Calcule o perímetro de $\triangle ADE$, sabendo que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.

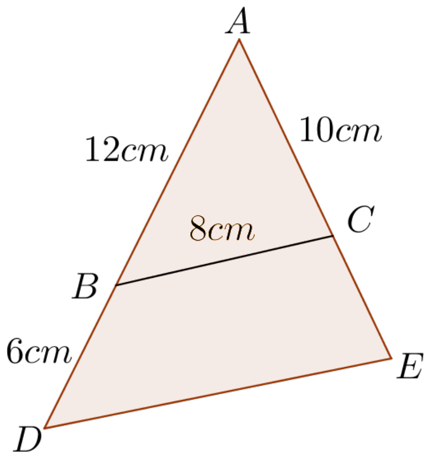


Figura 2.68: Triângulo $\triangle ADE$, $BC \parallel DE$.

Exercício Proposto 7. (ver [Sousa, 2013] p.261 DESAFIO) A figura ilustra a vista superior de um cômodo, de área igual a 40 m^2, com uma luminária ligada e uma estante posicionada à sua frente, paralela às paredes do cômodo. A estante ocupa uma área de 3 m^2 e dista 2 m da parede sombreada. A partir dessas informações, e de acordo com as medidas indicadas no esquema, calcule a área do piso do cômodo que está sendo iluminada (ver fig. 2.69).

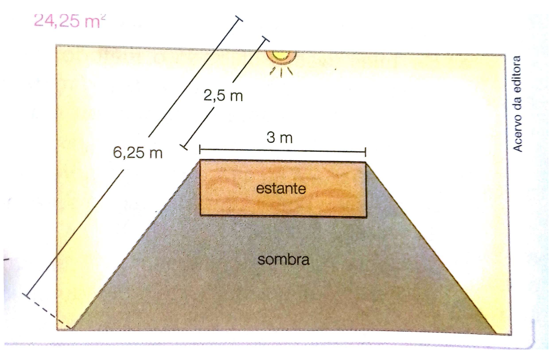


Figura 2.69: vista superior de um cômodo.

Exercício Proposto 8. (ver [Sousa, 2013] p.263) Uma empresa de telefonia instalou duas torres idênticas (P1 e P2), uma em cada lado de uma lagoa, conforme o esquema abaixo, para passar por elas um cabo telefônico.(ver fig. 2.70)

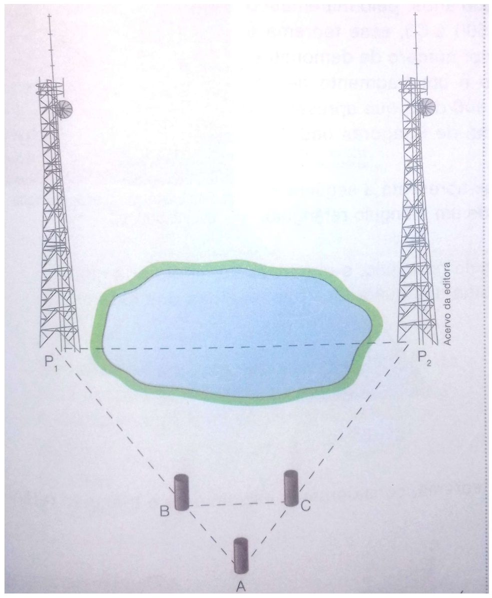


Figura 2.70: Duas torres entre um lago.

Para calcular o comprimento mínimo necessário de cabo (P_1P_2), foram fincadas estacas nos pontos A,B e C, de modo que $\overline{BC} \parallel \overline{P_1P_2}$, e medidas as distâncias $AP_2 = 40m$, $AC = 12m$ e $BC = 15m$.

Quantos metros de cabo, no mínimo, foram utilizados entre P_1 e P_2?

Comentários. Souza propõe esses três exercícios inseridos na seção de Teorema de Tales; porém, um meio de resolução apresentado, pelo próprio autor, é o uso do caso de semelhança de triângulos (ângulo, ângulo). Na seção das orientações para o professor, Souza traz o seguinte comentário sobre o exercício proposto 8 que é a atividade 8 e o exercício 6, atividade 4 do livro:

> Na atividade 8, verifique se os alunos percebem que, considerando os pontos P_1 e P_2 na base das torres, os triângulos ABC e AP_1P_2 possuem ângulos correspondentes congruentes. Logo, pelo caso de semelhança AA (ângulo, ângulo) esses triângulos são semelhantes. Como $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{BC}$, podemos utilizar o Teorema de Tales, obtendo a igualdade $\frac{AB}{AP_1} = \frac{AC}{AP_2}$. Como os triângulos são semelhantes, seus lados correspondentes são proporcionais, portanto temos que $\frac{AB}{AP_1} = \frac{AC}{AP_2} = \frac{BC}{P_1P_2}$. o mesmo ocorre na atividade 4 da página 261.([Sousa, 2013], p. 87-88)

Diante desse comentário do autor, observa-se que ele sugere usar um dos casos semelhança de triângulos (ângulo-ângulo) para calcular os lados DE e P_1P_2, nos respectivos exercícios 6 e 8 e o exercício proposto 7, o autor apresenta a seguinte resolução no final do livro:

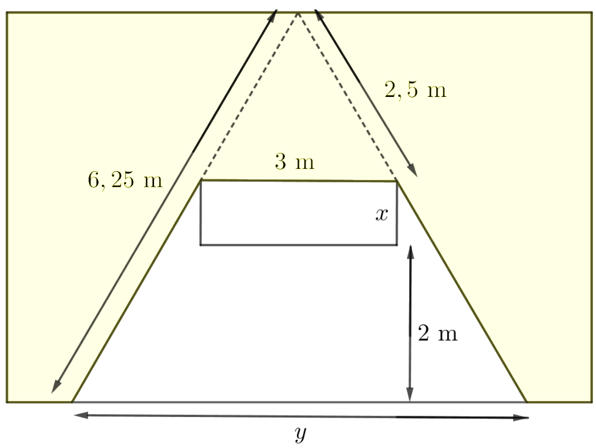


Figura 2.71: Vista superior de um cômodo ([Sousa, 2013], p. 166).

> - $x \cdot 3 = 3 \Rightarrow x = 1$
> - $\frac{3}{2{,}5} = \frac{y}{6{,}25} \Rightarrow y = 7{,}5$
> - Para calcular a área da região iluminada, basta subtrair a área do trapézio da área do retângulo:
> $40 - \frac{y+3}{2} \cdot (2 + x) = 40 - \frac{7{,}5+3}{2} \cdot (2 + 1) = 24{,}25 \to 24{,}25m^2$
>   ([Sousa, 2013], p. 166-167)

Da mesma forma, para calcular o lado y, Souza usa semelhança de triângulos, mostrado anteriormente no uso da proporção $\frac{3}{2{,}5} = \frac{y}{6{,}25}$. Porém, são exercícios inseridos numa seção específica de Teorema de Tales. Portanto, didaticamente, conclui-se que eles não deveriam estar nessa seção.

Exercício Proposto 9. (ver [Sousa, 2013] p.261) Observe parte do mapa de uma cidade.

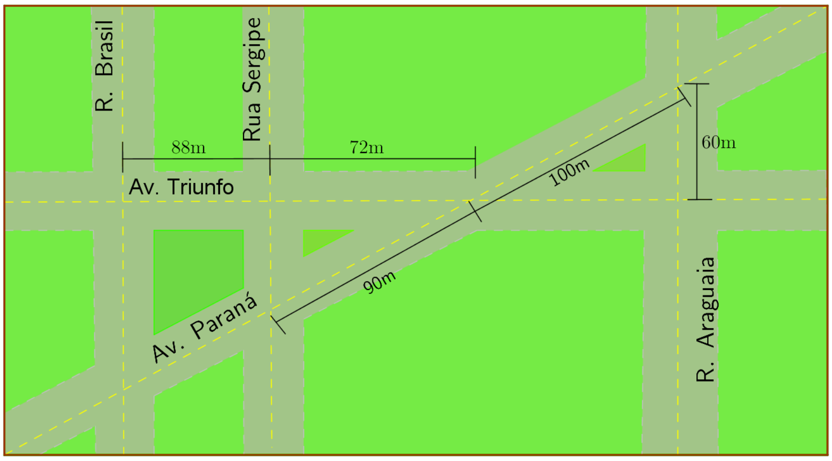


Figura 2.72: Mapa de uma cidade ([Sousa, 2013], p.261).

As ruas Brasil, Sergipe e Araguaia são paralelas e interceptadas pelas avenidas Triunfo e Paraná. De acordo com as medidas indicadas, determine quantos metros um pedestre irá percorrer se caminhar em linha reta da esquina da rua:

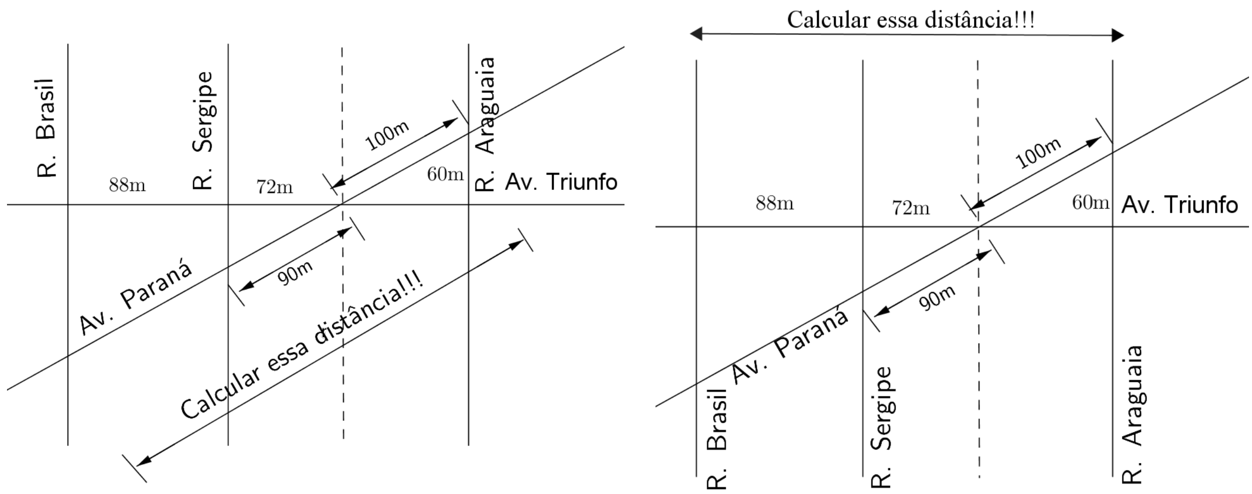
a) Araguaia com avenida Paraná à esquina da rua Brasil com a avenida Paraná.

b) Brasil com a avenida Triunfo à esquina da rua Araguaia com a avenida Triunfo.

c) Brasil com a avenida Paraná à esquina da avenida Triunfo com rua Brasil.

Comentários. Na seção 2.5, esse exercício foi analisado sua representação gráfica comparada a do enunciado e do exercício resolvido. Nesse momento, ele volta a ser analisado pelos conteúdos explorados nos três itens.

Nos itens “a” e “b” são aplicações do Teorema de Tales para calcular uma parte das distâncias que se pede. Vale salientar, para melhor visualização da aplicação do Teorema, foi recomendável, na seção anterior, deslocar as retas transversais e traçar mais uma reta no feixe, conforme realizado na figura 2.73.



Resolução do item "a". Resolução do item "b".

Figura 2.73: Mapas de uma cidade

No item "b" exite uma segunda alternativa para resolve-lo, usando Teorema de Pitágoras para encontrar uma parte da distância que se pede. No item "c", com auxílio dos resultados encontrados nos itens anteriores, há duas alternativas de resolução: o uso de semelhança de triângulos que não é tratado pelo autor em sua obra ou aplicação do Teorema de Pitágoras, o qual é um assunto tratado na seção seguinte desse livro ([Sousa, 2013], p.264). Nesse caso, será um item que faltará conceitos para o educando resolvê-lo. (ver fig. 2.74)

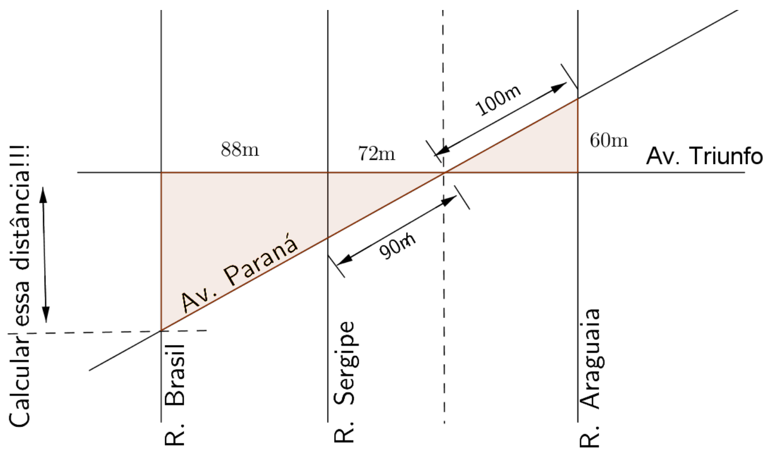


Figura 2.74: Mapa de uma cidade.

2.6.2 Exercícios de semelhança

Nesta subseção será realizada uma análise dos exercícios mais interessantes dos livros em questão que trazem o conceito de semelhança de figuras planas e propõem uma lista de atividades referente a esse assunto. Esta análise será dividida em exercícios resolvidos e propostos da seção semelhança.

Exercícios resolvidos da seção de Semelhança. Os livros do Leonardo, Dante, Paiva e Iezzi formalizam exercícios resolvidos de semelhança não contextualizados, somente Dante e Paiva trazem, cada um, uma atividade contextualizada relacionada as praticas sociais e muito bem criativas, que serão apresentadas com mais detalhes individualmente adiante. Nesse momento, será apresentado como aqueles quatros autores trazem seus respectivos exercícios resolvidos de Semelhança.

Leonardo apresenta quatro exercícios resolvidos de semelhança, mostrados na figura 2.75. O primeiro ($R2$[4]) mostra que dois quadrados quaisquer são sempre semelhantes; o segundo ($R3$) traz um retângulo áureo, o qual a razão de sua largura e do seu comprimento é igual $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; o terceiro ($R4$) e quarto ($R5$) são aplicações dos casos de semelhança, o terceiro ($R4$) é o caso A.A, o qual calcula o lado XY e o quarto ($R5$) é o caso L.A.L, o qual ele mostra, sobrepondo um dentro do outro, que os dois triângulos ($\triangle ABC$ e $\triangle MNP$) são semelhantes. Dessa forma, nota-se que o autor optou por apresentar os casos de semelhanças no momento da apresentação dos exercícios resolvidos, porém faltou mostrar o caso L.L.L. Ver as imagens da fig.2.75.

[4] Rn é a numeração do exercício resolvido apresentado no capítulo de cada livro que contém Teorema de Tales e semelhança

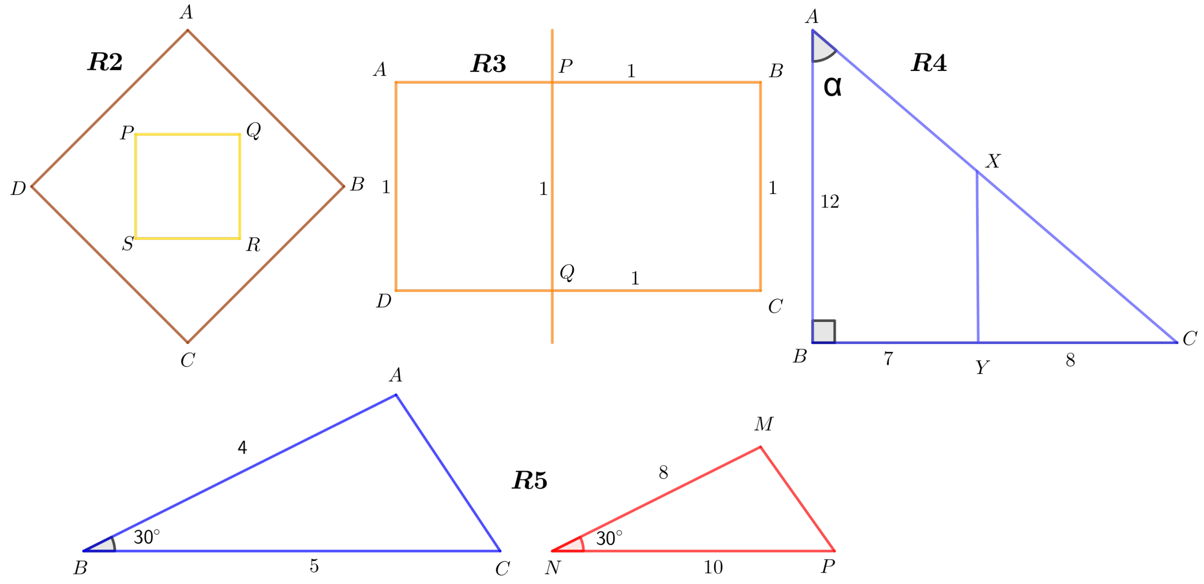


Figura 2.75: Exercícios resolvidos $R2$, $R3$, $R4$ e $R5$ de [Leonardo, 2013], p.240 e 243.

Dante apresenta dois exercícios resolvidos ($R3$ e $R4$), mostrado na figura 2.76, que trazem um triângulo escaleno e retângulo e neles são desenhados inscritivelmente um quadrado. As perguntas são bem parecidas, medidas do lado x do quadrado. Na resolução, o autor usa semelhança de triângulos para calcular essas distâncias desconhecidas ($\triangle ABC \sim \triangle APQ$ no primeiro e $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ no segundo), porém não cita qual o caso de semelhança é usado, sabendo-se que traz os três casos na parte conceitual. Mais adiante, o autor traz uma atividade contextualizada com a resolução, a qual medi distâncias inacessíveis usando semelhança. Essa atividade será mostrada mais à frente e individualmente com mais detalhes.

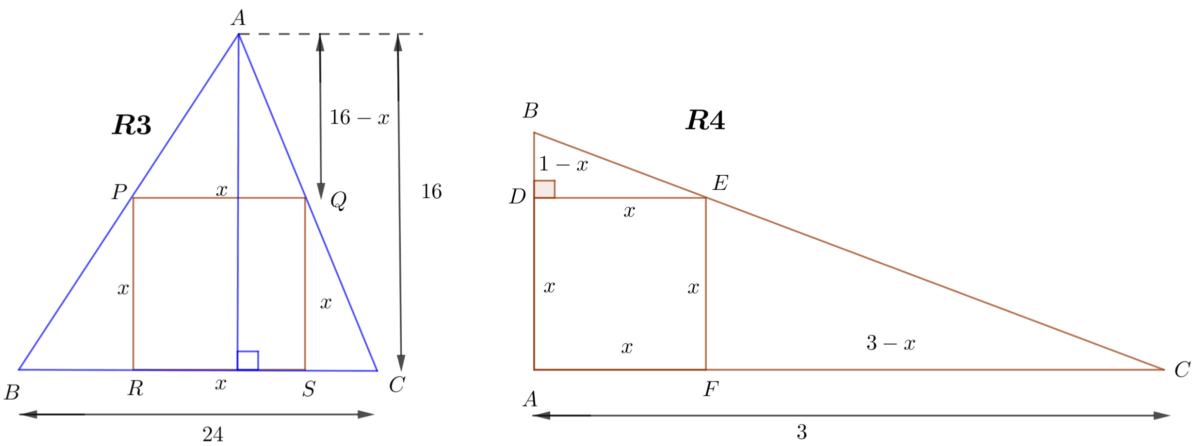


Figura 2.76: Exercícios resolvidos $R3$ e $R4$ de [Dante, 2014], p.240.

Paiva expõe dois exercícios resolvidos; o primeiro ($R5$), faz uma simulação de um projetor de slide que aumenta ou diminui a imagem na mesma proporção da distância dele à tela; esse exercício será apresentado com mais detalhes adiante, por ser bastante criativo na contextualização. O segundo ($R6$), mostrado na figura 2.77 , o autor criou de maneira que exemplifica a aplicação de um dos casos de semelhança, os quais são conteúdos dados na parte conceitual. Dado dois ângulos congruentes, $B\widehat{A}C = D\widehat{B}C$ e um ângulo comum aos dois triângulos ($B\widehat{C}A = B\widehat{C}D$), pelo caso A.A, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BDC$ são semelhantes.

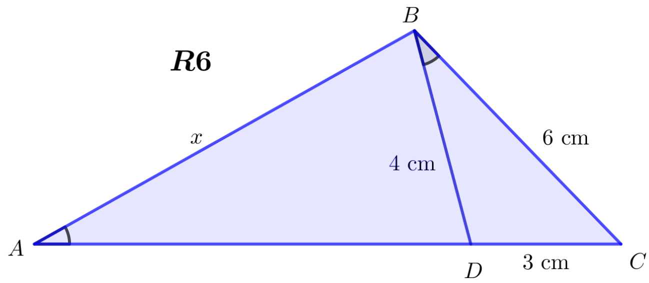


Figura 2.77: Exercício resolvido $R6$ do [Paiva, 2013], p.76.

Iezzi traz dois exercícios resolvidos, exibido na figura 2.78. No primeiro ($R1$) o autor também exemplifica a aplicação do caso de semelhança A.A para calcular os lados x e y, sabendo-se que ele trouxe os três casos na parte teórica do livro. No outro ($R2$), utiliza a razão de semelhança de dois triângulos para calcular o lado x do triângulo $\triangle PRS$ e aproveita para explorar a relação de proporcionalidade das áreas dos triângulos sobrepostos ($\triangle PRS$ e $\triangle PTC$).

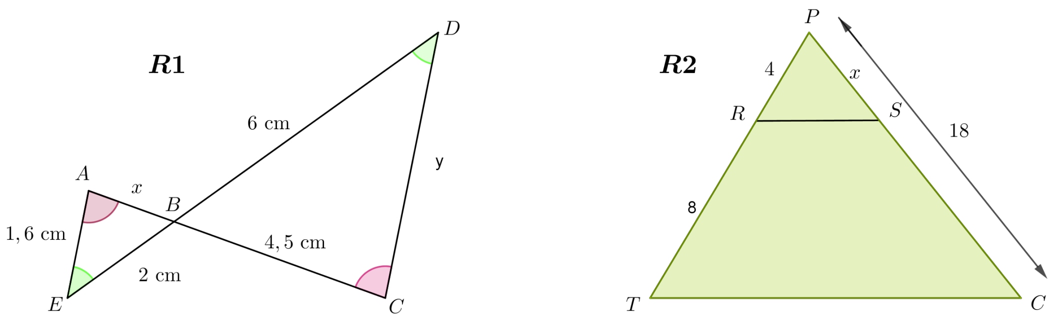


Figura 2.78: Exercícios resolvidos $R1$ e $R2$ do [Iezzi, 2013], p.245 e 248, ($AE \parallel CD$ e $RS \parallel TC$).

Será mostrado, na sequência, três exercícios resolvidos. Sendo o primeiro, um exercício que define retângulo áureo, de autoria de Leonardo; o qual, traz informações irrelevantes para o educando. Os outros dois, de autoria do Paiva e Dante, são atividades contextualizadas que possibilitam uma dinâmica em sala de aula.

Exercicio Resolvido 1. (ver [Leonardo, 2013] p.240) Veja o retângulo ABCD da figura abaixo, em que AD = BC = 1. Uma reta r intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ desse retângulo determinando o quadrado PBCQ de lado 1. Sabendo que os retângulos ABCD e APQD são semelhantes, quanto mede o lado $\overline{AB}$?

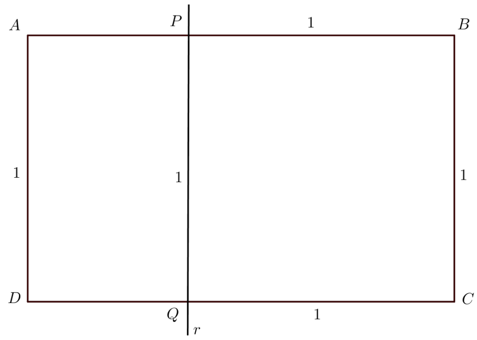


Figura 2.79: Retângulo ABCD cortado pela reta r([Leonardo, 2013], p.240).

Resolução. *Vamos representar por x, $x > 0$ a medida do lado $\overline{AB}$. Se os retângulos ABCD e APQD são semelhantes, temos:*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ e } x > 1 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Logo o lado $\overline{AB}$ mede aproximadamente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como número ouro e o retângulo ABCD é um retângulo áureo.

Comentários. Esse exercício trabalha semelhança de dois retângulos e provavelmente a intenção do autor é apresentar um retângulo áureo, que é aquele o qual a razão entre sua largura e seu comprimento é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, essa razão é uma constante chamada de número ouro, um número irracional representada pela letra grega ϕ. Porém, a importância desse conteúdo não há utilidades no decorrer da aprendizagem do assunto proposto no capítulo do livro; então pode ser considerado uma atividade mera ilustrativa com informações irrelevantes.

Exercicio Resolvido 2. (ver [Paiva, 2013] p.76) Um projetor de slide, colocado a 9 m de distância de uma tela, projeta um retângulo de altura 6 m. A que distância da tela deve ser colocado o projetor para que o retângulo projetado tenha 2 m de altura?

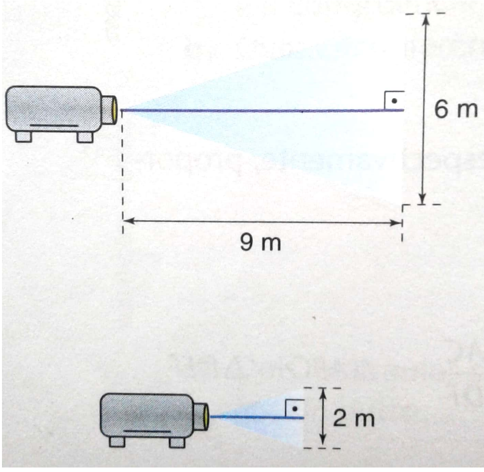


Figura 2.80: Projetor emitindo imagem na tela.

Resolução. *Sendo d a distância procurada, esquematizamos.*

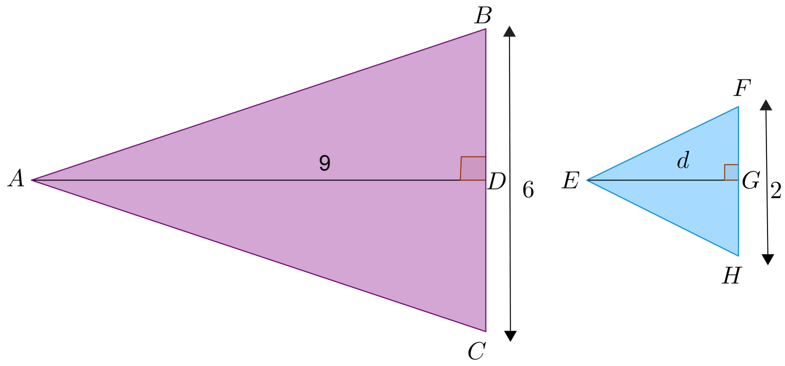


Figura 2.81: Triângulos formados quando o projetor emite uma imagem.

Observamos que $\triangle ABC \sim \triangle EFH$ e que a razão de semelhança é a razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer. Assim, temos;

$$\frac{BC}{FH} = \frac{AD}{EG} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{9}{d}$$

$$6d = 18 \Rightarrow d = 3$$

Logo, a distância entre o projetor e a tela deve ser $3m$.

Comentários. Esse exercício resolvido é uma atividade bem criativa que possibilita uma dinâmica em sala de aula. Porém, uma observação na resolução, Paiva informa que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFH$ são semelhantes sem dizer em qual caso de semelhança é enquadrado. Além disso, essa atividade explora uma nota feita pelo autor na parte dos conceitos: “A razão entre dois lados correspondentes é chamada de semelhança. A semelhança também pode ser obtida pela razão entre dois segmentos correspondentes quaisquer: alturas, medianas, bissetrizes, etc...” ([Paiva, 2013], p.75). Diante desse enunciado, o autor usou a razão de semelhança equivalente a razão das alturas dos triângulos envolvidos.

Exercicio Resolvido 3. (ver [Dante, 2014] p.242) Um homem deseja saber a altura de uma cesta de basquete. Como calcular essa altura com o auxílio de um triângulo de papel DFG?

Vamos medir a altura aproximada de uma cesta de basquete. Para isso, usaremos a metade de uma folha de papel quadrada, como mostrado abaixo. Observe que $DC = FG$.

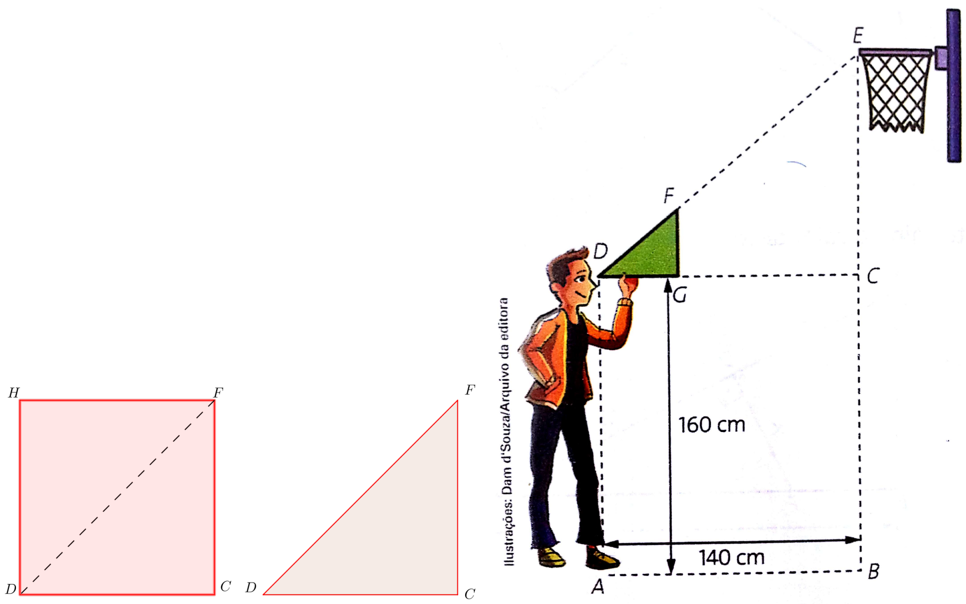


Figura 2.82: rapaz olhando para cesta de basquete ([Dante, 2014], p.242).

Resolução. *Siga estes procedimentos:*

1. *Mire o topo da cesta conservando a aparte inferior da folha ($\overline{DG}$) paralela ao chão. Talvez você precise afastar-se ou aproximar-se da cesta para que isso ocorra.*

2. *Meça a distância entre você e a perpendicular ao chão que passa pela cesta: $AB = 140cm$ na figura ao lado. Observe que $AB = DC$. Logo , $DC = 140$ cm.*

3. Meça agora a distância do chão aos seus olhos na figura:

$$AD = 160$$

cm

Veja que $AD = BC$. *Logo,,* $BC = 160\ cm$

$\triangle DCE \sim \ \triangle DGF$ *(dois ângulos correspondentes congruentes)*

Da semelhança dos triângulos DCE *e* DGF, *concluímos que:*

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{FG} = \frac{EC}{FG}$$

Observando a última igualdade $\frac{DC}{FG} = \frac{EC}{FG}$ *e sabendo que* $DG = FG$, *concluímos que* $DC = EC$.

Assim, a altura da cesta de basquete é dada por BC + BE na figura:

160 cm + 140 cm = 300 cm = 3 cm. $\triangle DCE \sim \triangle DGF$ *(dois ângulos correspondentes congruentes).*

Da semelhança dos triângulos DCE e DGF, concluímos que:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$$

Observando a última igualdade $\frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$ *e sabendo que* $DC = FG$, *concluímos que* $DC = EC$.

Assim, a altura da cesta de basquete é dada por: $BC + CE$ *na figura:*

160 cm + 140 cm = 300 cm = 3 m

Comentários. Segundo Dante é possível calcular a altura de um prédio, de uma árvore e de um poste usando semelhança de triângulos. Do mesmo modo, ele calcula a altura de uma cesta de basquete usando uma folha de papel quadrada. O interessante desse exercício é a aplicação de um dinâmica que se transforma numa semelhança de dois triângulos. Após descrever os procedimentos para o cálculo dessa altura, é proposto dois exercícios; um pedindo para calcular a altura da bandeira em um mastro (ver fig. 2.83) e outro, sendo atividade em equipe, propõe aos educandos calcularem alturas de casa, edifício, poste , árvore usando o mesmo método de semelhança de triângulos descrito acima (ver fig. 2.84);

Exercício 18) Use o método da folha de papel quadrada e determine a altura do mastro da bandeira do desenho a seguir:

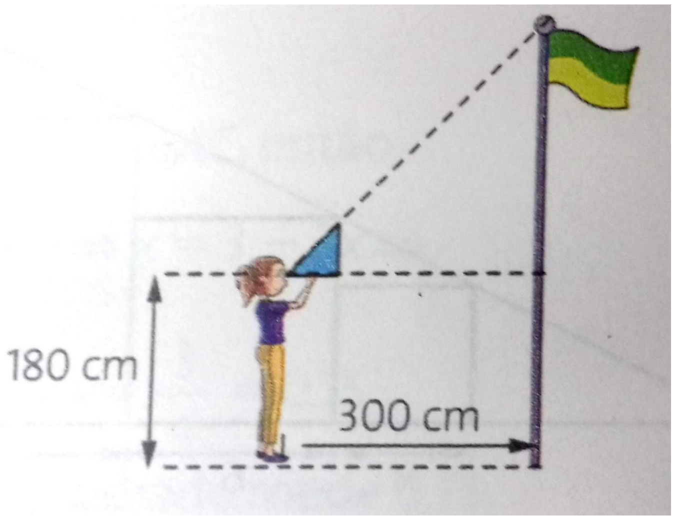


Figura 2.83: Menina olhando para o topo do mastro ([Dante, 2014], p. 242).

Exercício 19)(Atividade em Equipe) Usem o método do exercício anterior e determinem as medidas de algumas alturas (casa, edifício, poste, árvore, etc.). Em seguida, copiem a tabela a seguir no caderno e completem-na. ([Dante, 2014], p.242)

Objeto	Distância até o objeto	Distância do chão aos olhos	Altura do objeto

Figura 2.84: Tabela de colheta de dados [Dante, 2014], p.242).

Exercícios propostos da seção de semelhança Nesse momento, serão apresentados quatorze exercícios de autoria do Leonardo, Dante, Paiva e Iezzi, foram selecionados aqueles exercícios parecidos de obras distintas, contextualizações bem criativas e forçadas, exercícios que visualiza uma homotetia e exercícios com perguntas sem nexo com o tema tratado. As obras restantes não possuem tal exercícios, pois não possuem uma seção específica de semelhança.

Exercício Proposto 1. (ver [Leonardo, 2013], p.241 [Dante, 2014] p. 243, [Iezzi, 2013] p.238,) Relacione quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

Afirmação: “Dois (...) quaisquer são sempre semelhantes”.	[Leonardo, 2013]	[Dante, 2014]	[Iezzi, 2013]
(quadrados)		X	
(retângulos)		X	X
(círculos)			X
(triângulos retângulos)	X		X
(triângulos equiláteros)	X		X
(trapézios retângulos)			X
(losangos)			X

Tabela 2.17: Livros que exploram semelhança de polígonos e círculos.

Comentários. A tabela 2.17, mostrada acima, traz um exercício comum aos livros do Leonardo, Dante e Iezzi. Após apresentarem o conceito de semelhança de figuras planas e semelhança de polígonos, questionam ao educando se dois quaisquer polígonos ou círculos são sempre semelhantes. Essas atividades reforçam a compreensão das duas condições para duas figuras serem semelhantes: medidas lineares proporcionais e medidas angulares congruentes.

Iezzi traz na teoria, em formato de exemplos, semelhanças de dois quadrados, círculos, retângulos e blocos retangulares (paralelepípedos). Em relação a esse último, esse autor é um dos poucos que trabalha semelhança de figuras sólidas. Ele propõe, em um outro exercício, calcular, na razão de semelhança de $\frac{1}{3}$, as dimensões do paralelogramo da figura 2.85 para um novo bloco retangular.

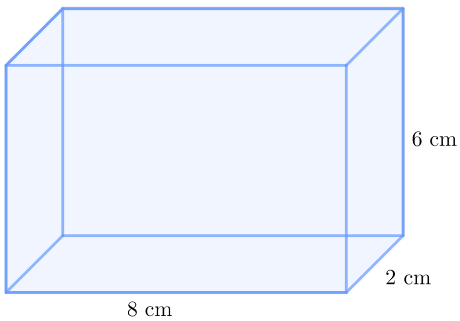


Figura 2.85: Paralelepípedo retangular [Iezzi, 2013], p.239.

Exercício Proposto 2. (ver [Leonardo, 2013] p.241) Um guardanapo retangular de medidas 3 dm por $3\sqrt{3}$ dm é dobrado em três partes iguais, conforme mostra a figura. Os retângulos correspondentes ao guardanapo aberto e a ele dobrado são semelhantes? Se forem. qual é a razão de semelhança?

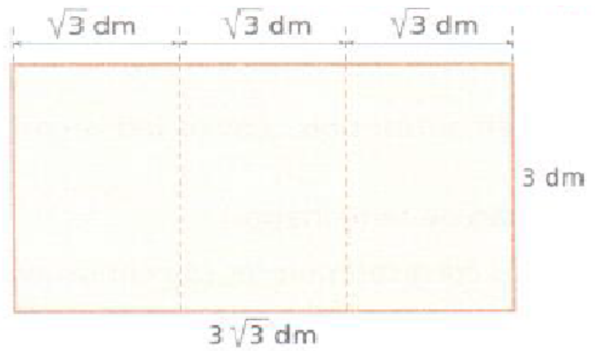


Figura 2.86: Guardanapo retangular do exercício 07 de [Leonardo, 2013], p.241.

Comentários. Leonardo traz, antes de conceituar semelhança de polígonos, um reflexão perguntando se dois retângulos são sempre semelhantes. Novamente, este conceito retorna neste exercício, porém em uma atividade contextualizada que utiliza um objeto de fácil obtenção. Nessa situação, mostra que o guardanapo aberto e dobrado parecem ser figuras semelhantes; porém, calculando a razão dos lados correspondentes, verifica que não são figuras semelhantes.

Exercício Proposto 3. (ver [Leonardo, 2013] p.241) Sobre uma circunferência de centro C e raio 5 cm. foi definido um arco $\widehat{AB}$, de comprimento 15 cm, correspondente ao ângulo central $A\widehat{C}B$. considerando uma circunferência de raio 8 cm, concêntrica e coplanar com a circunferência dada, determine qual é o comprimento do arco $\widehat{A'B'}$ correspondente ao mesmo ângulo central.

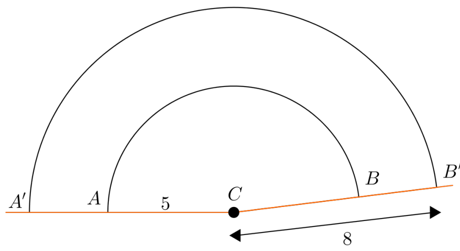


Figura 2.87: Arcos concêntricos do exercício nº 8 de [Leonardo, 2013], p.241.

Exercício Proposto 4. (ver [Dante, 2014] p.243) Examine esta figura e responda: todos os pentágonos regulares são semelhantes?

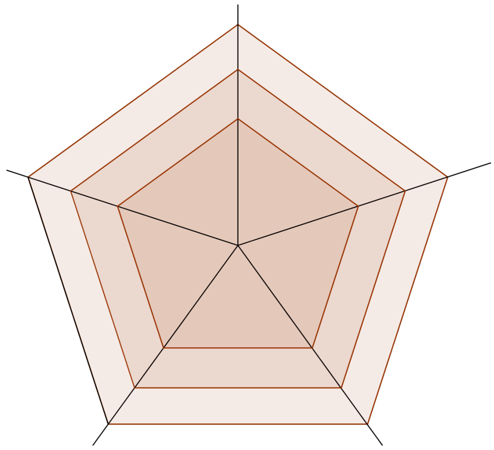


Figura 2.88: Pentágonos regulares do exercício nº 21 do [Dante, 2014], p.243.

Comentários. Observa-se duas questões de obras diferentes, porém trazem em comum figuras concêntricas, a primeira são arcos e a segunda, pentágonos. A homotetia é conceito que pode ajudar na visualização da semelhança dessas figuras; a qual, é uma transformação geométrica que amplia ou reduz a distancia a partir de um ponto fixo, mantendo as características principais. Porém, nenhum autor desses livros trazem esse conceito.

Na teoria de semelhança, Leonardo faz uma reflexão: "Duas circunferências quaisquer são sempre semelhantes?" ([Leonardo, 2013], p.238) e responde, no livro do professor, que: (...) são semelhantes, pois a forma é mantida, apenas os raios são modificados" ([Leonardo, 2013], p.238). Adiante, na lista de exercícios, o mesmo autor traz esses arcos concêntricos (ver fig. 2.87). Uma das melhores visualização de ver a semelhança, seria por homotetia, assunto não comentado. De outra forma, pode-se visualizar que duas circunferências são semelhantes pela razão dos comprimentos dos arcos ($C = 2\pi r$) serem sempre contante e iguais a razão dos respectivos raios, proporção que resume a resolução do exercício.

O outro exercício criado pelo Dante é colocado numa lista de exercícios de uma seção de polígonos semelhantes. Esta seção inicia-se com a seguinte definição: "Quando dois polígonos têm todos os lados correspondentes proporcionais e todos os ângulo correspondentes congruentes, eles são chamados polígonos semelhantes" ([Dante, 2014], p.243). Baseando-se neste enunciado, quando esse exercício aborda pentágonos regulares, basta saber que todos polígonos regulares possuem os lados iguais e ângulos internos congruentes, dessa forma responde a semelhança de todos pentágonos regulares. Por outro lado, Observando a figura 2.88 é mais fácil visualizar a semelhança por homotetia, pois os pentágonos são desenhados de forma concêntricas e as distâncias dos vértices de cada polígono ao centro são constantes.

Exercício Proposto 5. (ver [Leonardo, 2013] p.241) Caio quer mudar o tamanho de cada uma das fotografias que aparecem abaixo. Qual será o comprimento e qual será a medida da altura de cada foto se ele usar no processo a escala 100 : 1? E se usar a escala 1 : 7?

Figura 2.89: Duas fotografias retangulares do exercício n^o 09 de [Leonardo, 2013], p.241.

comentários Na introdução Leonardo, p.235, apresenta dois mapas de escalas diferentes. Deduzindo que escala é uma razão; a qual, o numerador representa o valor da distancia plano figurado e o denominador o valor real da área representada.

Em relação a esse exercício, o interessante é a contextualização mostrando duas fotos e a retomada do conceito de escala, diferenciando em que momento a foto irá aumentar ou diminuir comparado com a escala dada. Primeiro, o exercício pergunta se usar uma escala 100:1; a qual, significa a cada 100 cm da foto nova representa 1 cm da foto original, o que acontecerá? As fotos serão ampliadas, multiplicando os comprimentos e alturas por 100. Depois, pergunta se usar a escala 1:7; a qual, significa que a cada 1 cm da nova foto representa 7 cm da original, o que acontecerá? As fotos serão reduzidas, dividindo os comprimentos e alturas por 7. Contudo, conclui-se que essa atividade mostra muito bem exemplos de escalas que aumentam e diminuem uma imagem primitiva.

Exercício Proposto 6. (ver [Leonardo, 2013] p.241) Em um terreno retangular de $1.440m^2$ de área foi construída uma oficina com planta retangular semelhante à do terreno. Sabendo que a razão entre as larguras da oficina e o terreno é $\frac{2}{5}$, responda:

a) Qual é a razão entre a área da oficina e a área total do terreno? Escreve essa razão na forma de porcentagem.

b) Qual é a área da oficina?

Comentários. Nota-se que é um exercício contextualizado que compara a área de um terreno (1.440 m^2) e a área de uma oficina que está construída dentro desse terreno e nele é informado que essas duas áreas retangulares são semelhantes. Na partes dos conceitos, é feito a seguinte reflexão: “Dois retângulos são sempre semelhantes?” ([Leonardo, 2013], p.239). Diante da resposta desta reflexão, é compreendido pelo educando o motivo do enunciado afirmar que são terrenos semelhantes e ter dado a razão das larguras desses dois polígonos.

A primeira pergunta quer saber a razão entre as duas áreas. Nesse caso, é necessário que o aluno saiba que a razão das áreas de duas figuras equivalentes é o quadrado da razão de semelhança; porém, esse conceito não se encontra nesse livro. Entretanto, seria uma informação a parte que o professor precisará compartilhar com os alunos. Além disso, pede ao educando transformar essa razão em porcentagem; entretanto, não existe uma ligação lógica desses conteúdos, transformar uma razão de semelhança em porcentagem. Na segunda pergunta, quer saber a área dessa oficina, sabendo-se a área do terreno e o quadrado da razão de semelhança, aplica-se uma proporção para achar essa área específica.

Exercício Proposto 7. (ver [Leonardo, 2013] p.243) A mão de um garoto que segura uma pipa está a 1,50 m do solo. O cordão utilizado para empinar essa pipa tem 6 nós igualmente espaçados, sendo o primeiro deles para apoio da mão do garoto e o último para amarrar a pipa. Sabendo que a pipa se encontra com o cordão de 75 m esticado e a uma altura de 46,5 m do solo, a que altura do solo está o terceiro nó desse cordão?

Comentários. Percebe-se que esse exercício é uma das atividades que mais se aproxima da diversão dos meninos e não deixa de ser interessante para as meninas. Ele faz uma simulação de um garoto soltando pipa, de maneira que sai de uma imaginação para montagem de um desenho, conforme a figura 2.90. A imagem I e II são imagens de mesmo contexto, que traz um desenho contextualizado para uma representação gráfica com triângulos e retângulos. Explorando a imagem II, deve-se achar as figuras semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$) e por fim, calcular a distância BC da (imagem II), usando semelhança de triângulos. Enfim, Este exercício sem a exposição da figura, faz com que explore a interpretação e a imaginação do aluno para descrever o problema; por isso, torna-se um exercício diferente dos demais.

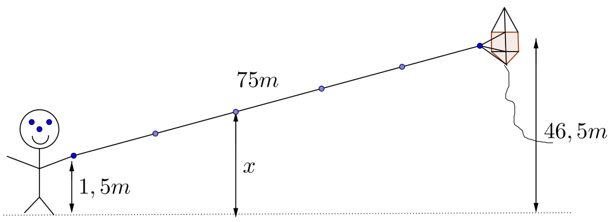


Imagem I.

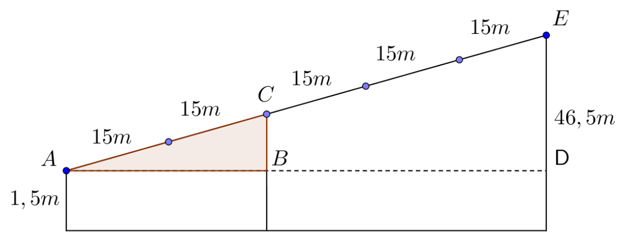


Imagem II.

Figura 2.90: Simulação de um menino soltando pipa.

Exercício Proposto 8. (ver [Dante, 2014] p.241) Na figura abaixo considere que a medida da altura da árvore é 10 m, a distância entre ela e o observador é de 50 m e a distância da árvore ao ponto M é de 70 m. Considerando que o olho do observador, o topo da árvore e o topo da torre estão alinhados, qual é , aproximadamente, a medida da altura da torre?

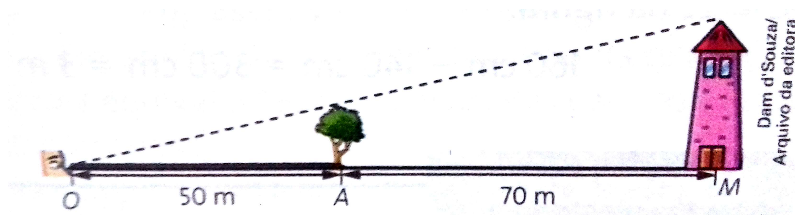


Figura 2.91: Exercício nº 16 do [Dante, 2014], p.241

Comentários. Neste exercício, observa-se uma atividade mal contextualizada, quando o autor considera que o olho do observador está nivelado com o chão, isso seria uma simulação impraticável, tornando-se uma atividade de mera imaginação; portanto, seria mais proveitoso ele desenhar o corpo todo da pessoa de forma que tornasse a situação parecida com a imagem II da figura 2.90 do exercício anterior.

Exercício Proposto 9. (ver [Dante, 2014] p.243) Verifique se há duas figuras semelhantes abaixo. Em caso positivo, justifique sua escolha.

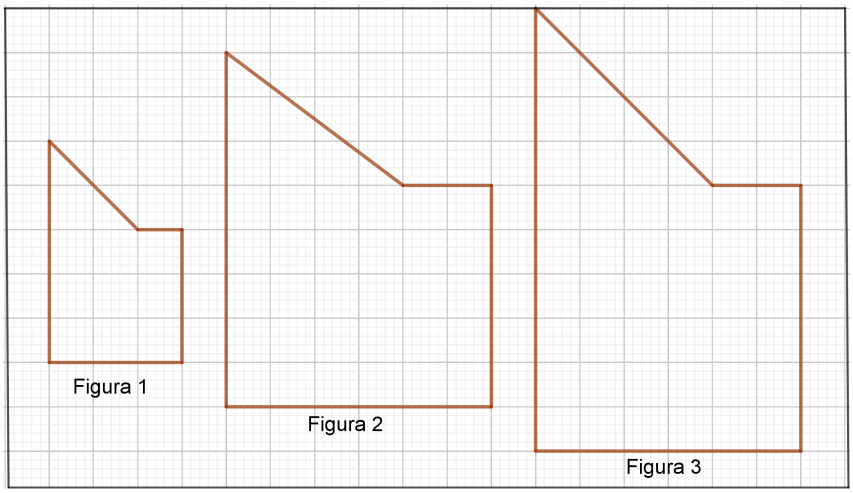


Figura 2.92: Três polígonos numa malha quadriculada do exercício do [Dante, 2014], p.243.

Comentários. O interessante deste exercício, ele usa a malha quadriculada para facilitar encontrar figuras semelhantes. Nesta malha, Dante desenha três polígonos, cada um com cinco ângulos, sendo três retos e o outros dois, 45° e 135° das figuras 1 e 3. Esses dois ângulos correspondentes na figura 2 não é tão simples calcula-los, mas nota-se que é maior que 45° e o outro menor que 135°. Diante disso, percebe-se que há somente duas figuras (1 e 3) com ângulos internos correspondentes congruentes. Agora, basta verificar se os lados correspondentes dessas figuras (1 e 3), que são compostos por unidades de medidas de um lado de um quadrado, são proporcionais.

Uma outra forma de verificar se as figuras são semelhantes, é propor ao educando desenha-las sobrepostas e verificar se os lados dos polígonos permanecem paralelos, conforme na figura **??**.

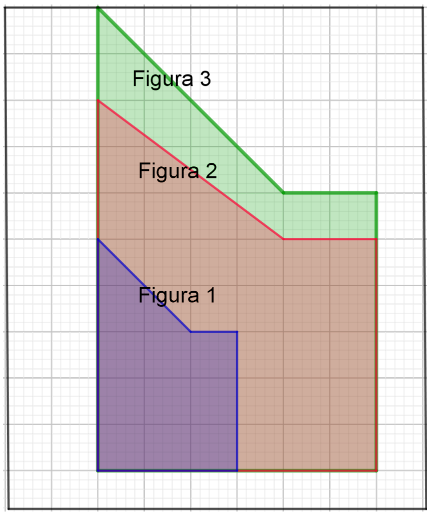


Figura 2.93: Figuras sobrepostas.

Exercício Proposto 10. [5] (ver [Dante, 2014] p.243) Dois formatos predominam como padrão em telas e monitores de TV. O "4:3" e o "16:9" (widescreen). Esses valores se referem à proporção das dimensões da largura e da altura de tela (ou, de forma equivalente, à proporção das colunas e linhas das imagens).

As imagens (tanto fotos como vídeos) costumam seguir um desses dois padrões, sendo que quanto maior a resolução da imagem, mais linhas e colunas serão exibidas e, portanto, maior o nível de detalhe exibido. Por exemplo, 460×480 (VGA), 800×600 (SVGA), 1024×768 (XGA) e 1280×920 são alguns dos formatos mais comuns do padrão 4:3.

a) Todos os formatos do padrão 4:3 representam retângulos semelhantes? Justifiquem.

b) Uma imagem no formato UXGA tem dimensões 1600×1200. Essa imagem é padrão $4:3$ ou $16:9$? Justifiquem

Comentários. Esse outro exercício do Dante traz informações interessantes e contextualizadas com as características das diversas televisões; informa que existe dois padrões de telas e monitores de TV, "$4:3$" e "$16:9$", os quais representam o formato primitivo da largura e altura das telas. Neste momento, é válido mostrar aos educandos que os modelos de televisões atuais $(16:9)$ as larguras são maiores que as antigas $(4:3)$, de

[5] Exercício proposto como desfio em equipe.

maneira que os formatos antigos (4 : 3) não parecem ser retângulos tão quanto os atuais, conforme a fig.2.94 ;

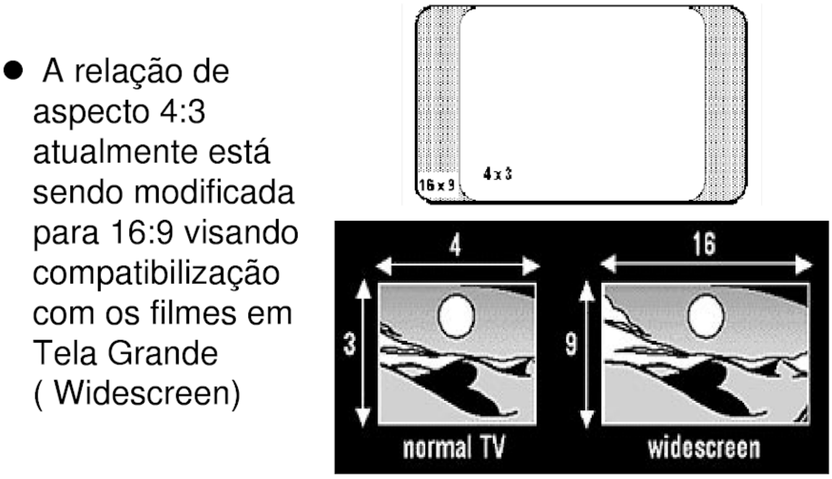


Figura 2.94: Relação de aspecto entre os dois padrões ([Ross, 2007], p.6).

A partir desses dois padrões de telas, ampliando os lados de forma proporcional, configurá em outras resoluções de imagens, conforme o exemplo na figura 2.95. Deste modo é um exemplo para calcular e justificar quais são as resoluções, citadas no enunciado, que são do padrão 4 : 3, questionado no ítem a. No item seguinte, é cobrado o inverso, de maneira que encontre o maior fator que divide a dimensão 1600×1200 para chegar em uma das duas imagens padrões.

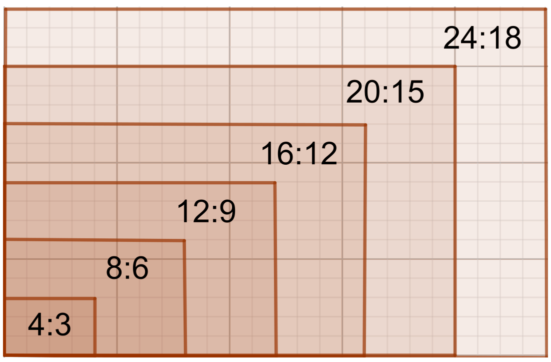


Figura 2.95: Imagens ampliadas pelo fator multiplicativo.

Exercício Proposto 11. (ver [Paiva, 2013] p.77) O esquema abaixo, representa uma pessoa em frente a uma máquina fotográfica cuja base é paralela ao piso plano e horizontal.

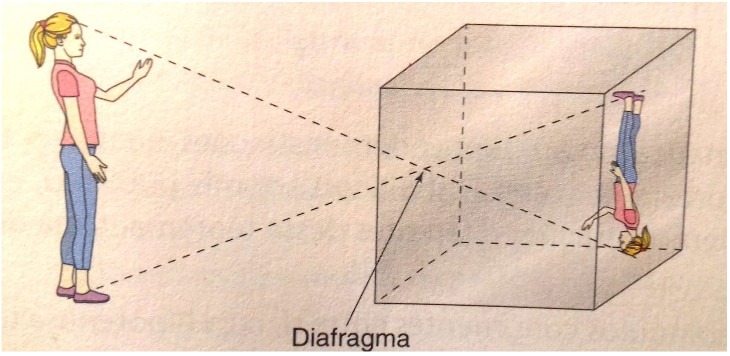


Figura 2.96: Máquina fotográfica do exercício de nº 16 do [Paiva, 2013], p.77.

Se a distância entre a pessoa e o diafragma da máquina é 3 m, a distância entre o diafragma e o filme é 6 cm e a altura da pessoa é 1,75 m, calcule a altura, em centímetro, da imagem da pessoa projetada no filme.

Comentários. Paiva traz os princípios de funcionamento das máquinas fotográficas analógicas, relacionando objeto e imagem numa câmera escura. A interdisciplinariedade entre a física na óptica e a matemática com a semelhança torna-se essa questão mais objetiva e contextualizada. O propósito do exercício é explorar o uso da semelhança de triângulos e especificamente aplicar a igualdade entre a razão de semelhança e a razão entre as alturas dos triângulos formados.

Exercício Proposto 12. (ver [Paiva, 2013]p.77) Em uma noite de Lua cheia, Paulo e Renata realizaram a seguinte experiência: Paulo fechou um dos olhos e Renata segurou uma moeda de 2,5 cm de diâmetro entre Lua e o olho aberto de Paulo, de modo que o jovem visse a moeda coincidindo com a imagem do disco lunar; depois, mediram a distância entre a moeda e o olho aberto de Paulo, obtendo 290 cm. Sabendo que a distância da Terra à Lua é aproximadamente 4.10^5 km, os jovens estimaram a medida do diâmetro da Lua. Com esses dados, que medida, em quilômetro, se obtém para diâmetro da Lua?

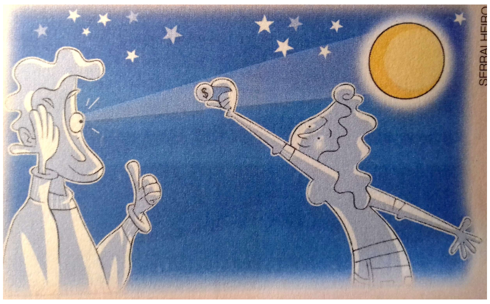


Figura 2.97: Experimento para calcular o diâmetro da Lua, exercício nº 17 do [Paiva, 2013], p.77.

Comentários. Este exercício trabalha simultaneamente com geometria espacial e a plana; entretanto, a geometria espacial é um conteúdo que se encontra nos livros do 2^o ano do Ensino Médio, então provavelmente o educando terá dificuldade de trabalhar com esse campo de conhecimento e consequentemente não conseguirá resolvê-lo. Mas o contexto dessa atividade é muito interessante, pois é uma simulação imaginária, que calcula a distância aproximada do diâmetro da Lua usando uma moeda, sabendo-se a distância da Terra à Lua. Além disso, a ideia do problema é formar dois cones no espaço (imagem I da fig.2.98), dentro deles extrair dois triângulos isósceles sobrepostos (imagem II da fig. 2.98). Nesta ultima etapa, o educando aplica uma semelhança entre os triângulos ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$) e calcula o valor aproximado do diâmetro da Lua (BC). Observe as imagens da figura[6] 2.98 abaixo.

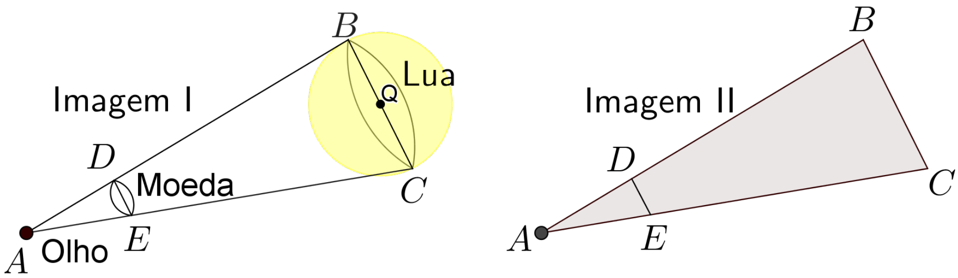


Figura 2.98: Simulação do exercício na geometria espacial para plana.

Exercício Proposto 13. (ver [Paiva, 2013] p.77) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros

[6] Imagem I representa dois cone no espaço e a imagem II , dois triângulos sobrepostos

pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, $OA = 25$ m, $BC = 40$ m e $OB = 30$ m, conforme mostra a figura.

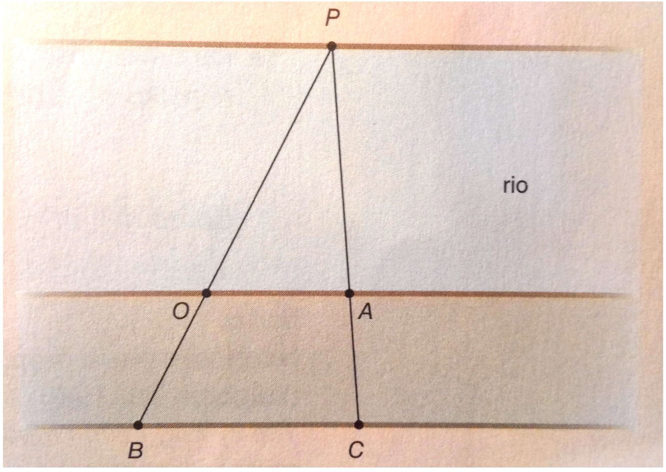


Figura 2.99: Um rio com margem, exercício de nº18 do [Paiva, 2013], p.77.

A distância, em metros, do observador em O até o ponto P é:

(a) 30 (b) 35 (c) 40 (d) 45 (e) 50

Comentários. Percebe-se nesse exercício que há um observador de um lado da margem de um rio e um ponto P do outro lado. O questionamento é a distância dessa pessoa à esse ponto P. Nessa situação, já que a ideia do autor deve ser uma aplicação de semelhança de forma contextualizada, seria mais interessante dizer que havia algo no local ou o segmento OP poderia está ortogonalmente com as margens para saber a largura do rio.

A estratégia que o observador tem para calcular a distância OP, foi bastante inteligente, fixa duas estacas no terreno de maneira que uma se alinha com os pontos O e P e a outra, com os pontos A e P. Porém, o exercício não informa como ele alinhou esses três pontos B, O, P e C, A, P ; que pode gerar dúvida ao educando. Por fim, após "enterrar" as estacas, formaram dois triângulos semelhantes ($\triangle PAB \sim \triangle PBC$), de modo que ajuda a calcular a distância OP.

Exercício Proposto 14. (ver [Iezzi, 2013] p.246) Determine a altura de um prédio cuja sombra tem 15 m no mesmo instante em que uma vara de 6 m, fincada em posição vertical, tem uma sombra de 2 m.

Comentários. Esse exercício é a única atividade contextualizada que Iezzi traz em sua obra, porém não criativa; portanto, ele deu preferência na elaboração de questões mais diretas, ou seja, tradicionais. Esse modelo de atividade também foram exploradas nos livros do Leonardo e Dante na seção de Teorema de Tales, o qual relembra fatos históricos e traz a mesma ideia de Tales de Mileto, quando ele calculava a altura de uma pirâmide. Vale destacar que é uma atividade que pode se resolvida usando Teorema de Tales ou semelhança de dois triângulos. De forma geral, a montagem do desenho e a descoberta dos triângulos semelhantes tornam-se uma tarefa desafiadora ao educando.

2.7 Projeto de aprendizagem

Nesta seção, o propósito é analisar os Projetos de aprendizagem disponíveis nesses livros em análise. De antemão, consideramos esses projetos sendo trabalhos dinâmicos criados pelos autores, executados pelos alunos com orientações dos professores, que além dar autonomia aos educandos, trabalham com materiais concretos, desenvolvem a interdisciplinariedade e formam grupos de alunos para gerarem diálogos que é uma ferramenta importante para se chegar ao conhecimento. E o que é diálogo?

Segundo Paulo Freire (2006), o diálogo:

> “(...) é uma relação horizontal de A com B. Nasce de uma matriz crítica e gera criticidade (Jaspers). Nutre-se do amor, da humildade, da esperança, da fé, da confiança. Por isso, só o diálogo comunica. E quando os dois pólos do diálogo se ligam assim, com amor, com esperança, com fé um no outro, se fazem críticos na busca de algo. Instala-se, então, uma relação de simpatia entre ambos. Só aí há comunicação”. ([Freire, 2006], p.115)

Para [Bremm, 2010], estes diálogos:

> (...) podem ser observados nas relações de alunos no grupo e entre grupos com o professor. Quando o diálogo é instaurado e faz-se presente, as coisas acontecem, a realidade é debatida e de várias maneiras confrontadas e esta movimentação de ideias e opiniões eleva o nível de conhecimento dos alunos ([Bremm, 2010], p.13).

Segundo [Carvalho, 2010] o uso de projetos, por sua vez, é um recurso didático que pode ser aplicado na abordagem de diferentes conteúdos escolares, em situações naturais. Com o desenvolvimento de projetos incentiva-se o trabalho em grupo. Partindo-se de uma problemática de interesse dos alunos é possível abordar conteúdos de diferentes áreas, o que favorece a interdisciplinaridade. Pode ser muito frutífero, por exemplo, a realização de um projeto, em conjunto com o professor de Artes, no qual seja trabalhada a representação de sólidos geométricos em perspectiva ou utilizando vistas.

Nos próprios Parâmetros Curriculares Nacionais existe uma ênfase ao ensino voltado para realidade do aluno, ao estabelecer que:

> O ensino de qualidade que a sociedade demanda atualmente expressa-se aqui como a possibilidade de o sistema educacional vir a propor uma prática educativa adequada às necessidades sociais, políticas, econômicas e culturais da realidade brasileira, que considere os interesses e as motivações dos alunos e garanta as aprendizagens essenciais para formação de cidadãos autônomos, críticos e participativos, capazes de atuar com competência, dignidade e responsabilidade na sociedade em que vivem ([Brasil, 1997c], p.27)

Além disso, segundo os PCN, aprender conceitos permite atribuir significados aos conteúdos aprendidos e relacioná-los a outros.

> "Tal aprendizado está relacionado a segunda categoria de conteúdos: a procedimental. Os procedimentos expressam o saber fazer, que envolve tomar decisões e realizar uma série de ações, de forma ordenada e não aleatória, para atingir uma meta. Assim os conteúdos procedimentais sempre então presentes nos projetos de ensino, pois uma pesquisa, um experimento,um resumo, uma maquete, são proposições de ações presentes nas salas de aulas". ([Brasil, 1997c], p.52)

Em relação ao conteúdo procedimental, observa-se nos seis livros do PNLD de 2015, que somente Leonardo e Paiva disponibilizam no livro do aluno um Projeto de aprendizagem ao conteúdo de semelhança. Além deles, Iezzi traz na parte do manual do professor um projeto, como sugestão de atividade complementar. Diante desta análise, a afirmação de Carvalho(2010), é confirmada também para esses livros do Ensino Médio, em que ele comenta que os projetos "(...) ainda pouco presentes nos livros didáticos, os projetos geralmente são oferecidos como atividades complementares ou que finalizam unidades". ([Carvalho, 2010], p.41)

Esses projetos do livro do aluno trazem em comum a relação entre de escalas e figuras semelhantes. Leonardo propõe ao aluno construir uma maquete, com materiais recicláveis, que represente um espaço escolar ou residencial; Paiva propõe a construção da planta baixa da escola e Iezzi explora de dois conteúdos num único projeto: estatística básica e semelhança de triângulos; o qual, mostrará a melhor divulgação de resultados de faturamento das vendas dos triângulos de segurança veicular por uma empresa. Após apresentação dos respectivos projetos mostrados nos livros, são feitos alguns cometários gerais na formalização dos mesmos.

Projeto de aprendizagem 1. (ver [Leonardo, 2013] p.253) Com base nos conceitos de semelhança de triângulos e proporcionalidade, construa uma maquete utilizando materiais recicláveis, atentando para o uso de uma escala conveniente.

A construção de maquetes é uma atividade que requer conhecimentos de semelhança de triângulos e de proporcionalidade. Além da necessidade dos cálculos matemáticos para definição da escala e das medidas que serão utilizadas na representação, a maquete possibilita uma intervenção criativa, aproveitando materiais recicláveis na sua construção.

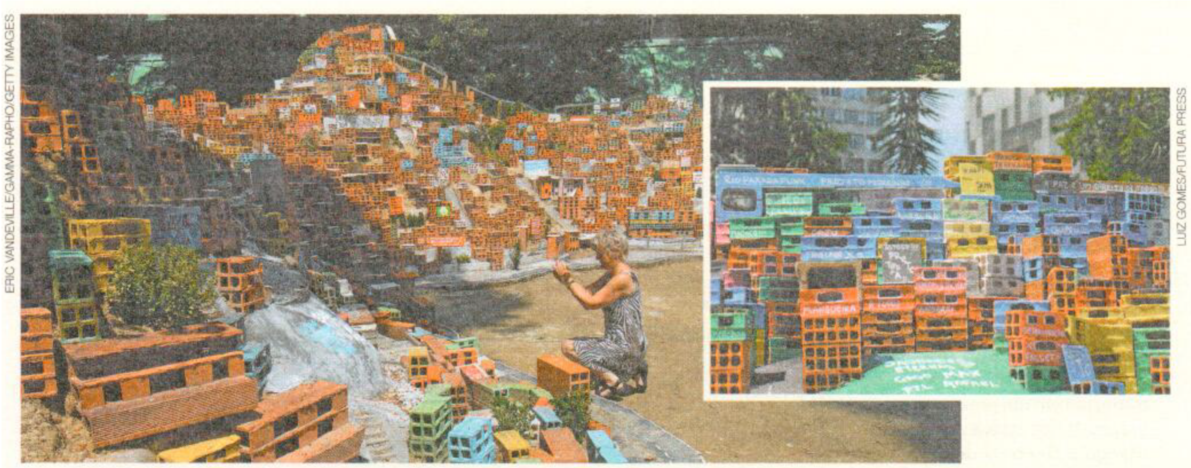


Figura 2.100: Os moradores da favela Pereira da Silva, em laranjeiras, na Zona Sul do Rio de Janeiro, em 1997, com a intenção de desafiarem a percepção das favelas brasileiras, criaram o Projeto Marinho, uma ação social e cultural. A principal iniciativa do projeto foi criar uma maquete da Favela. Na maquete, que ocupa uma área 320 m^2, tijolos imitam casas, materiais recicláveis pavimentam ruas e compõem a paisagem. (Foto maior de 2007 e foto menor de 2011)

Este projeto pede aos estudantes que se reúnam em grupos e escolham um ambiente da escolar; como a sala de aula, biblioteca ou até mesmo um ambiente da residência; para construção deste espaço em forma de maquete; em seguida, façam a medição do comprimento, largura e altura, da mesma forma para todo mobiliário dentro; escolham uma escala e separam os materiais recicláveis para montagem. Por fim, escolham um espaço de circulação da escola para construção e exposição do trabalho.

Comentários. Verifica-se que esse projeto de aprendizagem trabalha o conceito de proporcionalidade e semelhança de figuras planas. A proposta de Leonardo é uma construção de uma maquete representando um cômodo escolar ou residencial, usando materiais recicláveis. Inicialmente, é um oportunidade do docente comentar sobre o que seria reciclar e qual sua importância para o meio ambiente?

> "Reciclar significa transformar objetos materiais usados em novos produtos para o consumo. Esta necessidade foi despertada pelos seres humanos, a partir do momento em que se verificaram os benefícios que este procedimento trás para o planeta Terra. No processo de reciclagem, que além de preservar o meio ambiente também gera riquezas, os materiais mais reciclados são o vidro, o alumínio, o papel e o plástico. Esta reciclagem contribui para a diminuição significativa da poluição do solo, da água e do ar..." ([Pesquisa.com, 2017])

Esse projeto possibilita a interdisciplinaridade das disciplinas: Arte, Matemática e Ciências, conforme um dos objetivos do Projeto de aprendizagem. Vale ressaltar que Leonardo traz na figura 2.100 um projeto de exemplificação e motivação, que foi realizado por moradores de uma favela na Zona Sul do Rio de Janeiro, que serve de inspiração para os alunos realizarem as tarefas desta atividade.

Projeto de aprendizagem 2. (ver [Paiva, 2013] p.112) Você já viu que escalas são importantes na elaboração de figuras semelhantes, reduzidas ou ampliadas, como: mapas, plantas baixas de imóveis, maquetes, representação esquemática de microrganismos, células, entre outros.

Agora, você e seu grupo aplicarão esse conceito construindo a planta baixa de sua escola.

Figura 2.101: Vista da Escola Estadual Laurindo Battaiola, Barra Bonita, SP, Foto de 2012

A elaboração da planta baixa de uma grande construção, além de proporcionar um aprendizado significativo da matemática, ajuda a compreender melhor o espaço e suas múltiplas relações com o cotidiano.

Questões para pensar em grupo:

1. O que é importante aparecer em uma planta baixa?
2. Quais e quantos são os ambientes da escola a serem representados na planta?
3. Qual é a localização exata de cada ambiente?
4. As dimensões dos ambientes serão medidas ou estimadas?
5. Convém fazer rascunhos antes do desenho final?
6. Que materiais serão usados na confecção e na apresentação da planta?
7. Qual é a escala mais conveniente para elaboração dessa planta?

Organização do trabalho: Escreva as etapas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho e as distribuam criteriosamente entre os elementos do grupo e faça um cronograma para a realização do trabalho que contemple o prazo estabelecido.

Comentários. Nota-se que esse projeto utiliza os conceitos de escalas, proporcionalidade e semelhança de figuras, sendo o objetivo principal "fazer uso de escalas no estudo e na representação do espaço físico" ([Paiva, 2013], p.112). O interessante que Paiva justifica a importância de trabalhar esse projeto em sala de aula, pois a construção de uma planta baixa direciona a um aprendizado significativo, ajudando a compreender os espaços físicos do cotidiano; porém, não define o que seria uma planta baixa. Nesse caso, é necessário que o professor explique o que seria uma planta baixa, o qual "(...) é uma representação gráfica de uma construção onde cada ambiente é visto de cima, sem o telhado" ([Pinhal, 2017]). Com "visto de cima" Pinhal, 2017 quer dizer vista em projeção ortogonal (ver [Bortolossi, 2018], p.55).

Projeto de aprendizagem 3. (ver[Iezzi, 2013] Manual do professor p.371) Divida a turma em grupos de até três estudantes. Cada grupo deverá receber o seguinte texto, que deverá ser lido coletivamente.

O gráfico de barras seguinte mostra a evolução do faturamento anual de uma empresa que fabrica triângulos de segurança para veículos de passeio, usados por condutores para sinalizar, a distância segura, alguma situação de emergência envolvendo o veículo.

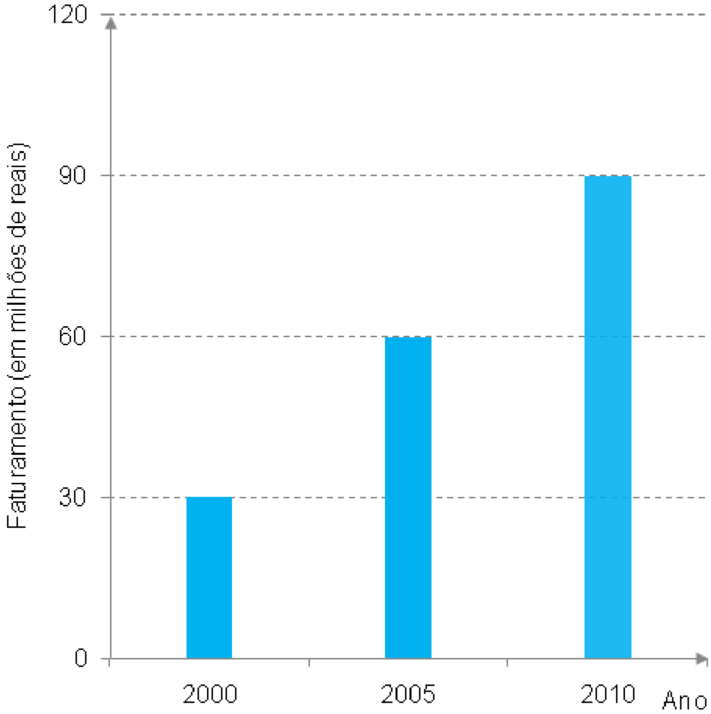


Tabela 2.18: Faturamento anual de uma empresa ([Iezzi, 2013], Manual do professor p.371).

O departamento de marketing pretende mostrar o resultado da empresa num anúncio em uma revista especializada. Para isso, imaginou-se, no lugar das barras do gráfico anterior, construir um pictograma com ícones usando triângulos de segurança de dimensões distintas para representar o aumento nas vendas. Foi sugerida a construção de três triângulos com a mesma medida para base e alturas de medidas proporcionais às vendas. Desse modo, a área da figura 2 seria o dobro da área da figura 1 e a área da figura 3 seria o triplo da área da figura 1, como se observa a seguir:

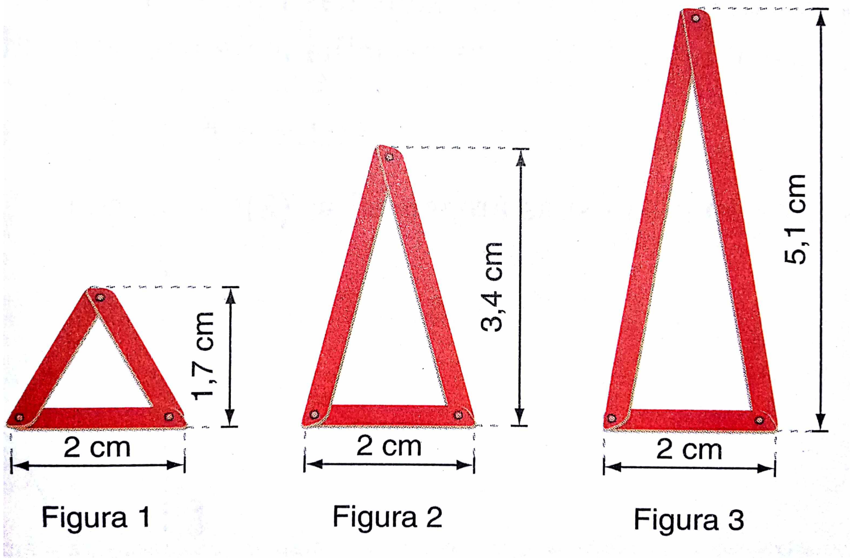


Figura 2.102: Triângulos de segurança ([Iezzi, 2013], Manual do professor p.371).

Analise, do ponto de vista matemático, a ideia sugerida para divulgação dos resultados. Se necessário, construa um novo pictograma.

Resposta do projeto de Aprendizagem 03 ([Iezzi, 2013], p.371-372). O professor deve dar tempo para os grupos apresentarem o que foi discutido e decidido. A socialização das ideias deve incluir alguns pontos importantes, destacados a seguir:

A razão entre os faturamentos da empresa nos anos 2005 e 2000 é dada por:

$$K_1 = \frac{60000000}{30000000} = 2$$

A razão entre os faturamentos nos anos 2010 e 2000 é:

$$K_2 = \frac{90000000}{30000000} = 3$$

Do ponto de vista matemático, o ideal seria construir **triângulos semelhantes**, possibilitando ao leitor maior clareza na interpretação dos resultados, além de evitar eventuais distorções no formato original do triângulo de segurança. Desse modo, seria necessário dobrar também a medida da base do triângulo na figura 2, comparando-se com a medida da base do triângulo da figura 1.

Analogamente, deve-se triplicar, em relação à medida da base do triângulo na figura 1, a medida da base do triângulo representado na figura 3. Veja, a seguir, esse novo pictograma, que preserva o formato original do triângulo de segurança:

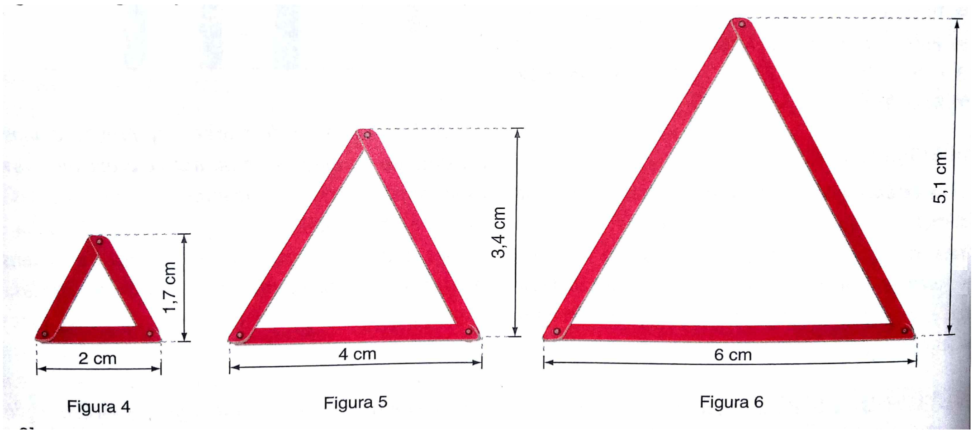


Figura 2.103: Triângulos de segurança ([Iezzi, 2013], Manual do professor p.372).

Observe, nesse caso, que:

Os triângulos representados nas figuras 4 e 5 são semelhantes e a razão de semelhança entre as medidas da base é igual à razão de semelhança entre as medidas da altura, ou seja:

$$k = \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{3,4 \text{ cm}}{1,7 \text{ cm}} \Rightarrow k = 2$$

- A razão entre suas áreas é $k^2 = (2)^2 = 4$, como é mostrado na figura seguinte:

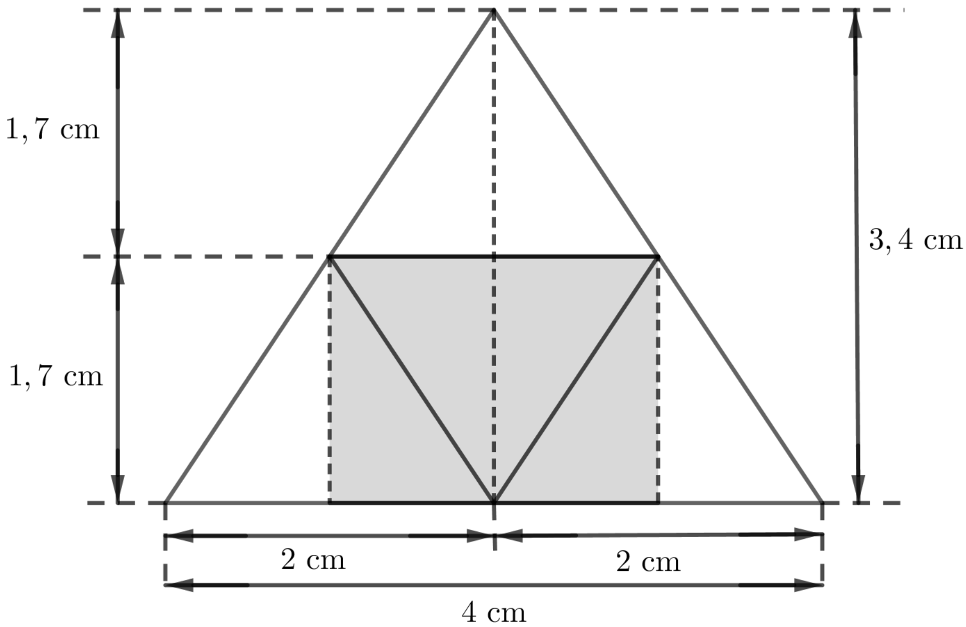


Figura 2.104: Triângulo dividido em quatro partes iguais ([Iezzi, 2013], Manual do professor p.372).

- Solicite aos alunos que comparem o triângulo da figura 6 com o triângulo obtido da figura 4, verificando que são necessários 9 triângulos congruentes ao da figura 4 para cobrir a superfície do triângulo da figura 6, ou seja, $k^2 = 9$.

Comentários A ideia inicial desse projeto é trabalhar dois conteúdos dados nos dois últimos capítulos do livro , dados estatísticos com gráfico de barras verticais e semelhança de triângulos. Segundo Iezzi, em seu manual do professor, os objetivos desse projeto são:

> - Construir e interpretar gráficos estatísticos a partir da análise de conjunto de dados.
> - Aplicar, em situação-problema cotidiana, a relação existente entre razão de semelhança de elementos lineares de triângulos e razão entre as suas respectivas áreas.
> - Ressaltar a importância do cuidado que se deve ter na análise de gráficos nos meios de comunicação ([Iezzi, 2013], p. 371 Manual do professor, p. 371).

No primeiro momento, esse projeto mostra ao educando a ampliação de figuras quando aumenta somete uma dimensão, na figura 2.102 foram as alturas, e o resultado é no aumento da área proporcionalmente àquele fator multiplicador da altura; porém, não formam figuras semelhantes. No entanto, um dos propósitos desta atividade seria transformar essas figuras anteriores em semelhantes; fazendo com que o educando perceba que será necessário aumentar todas as dimensões, conforme a figura 2.103 , para formarem figuras semelhantes e por fim observar a razão entre a área da figura ampliada e primitiva e desenhar as imagens primitivas dentro da ampliada (ver fig.2.104).

O uso de dois conteúdos dados ao longo da obra, torna esse projeto bastante criativo e cumpre todos os objetivos propostos pelo autor. Porém, fica como uma sugestão, poderia ser um trabalho desenvolvido no último capítulo desse livro (Estatística Básica); desse modo, estaria inserido no momento de explanação desse conteúdo e iria retornar a teoria de semelhança visto na sequência proposta pelo autor. Além disso, esse projeto estaria incluído no livro dos alunos, parecido com a metodologia de ensino-aprendizagem realizado por Leonardo e Paiva. Com isso, evitará fatores negativos como falta de tempo do professor na apresentação do mesmo no quadro negro, ausência de recursos como fotocopiadora na escola, carência de livro do professor que acarretará no desconhecimento desse projeto pelo aluno, entre outros.

2.8 Aplicações de semelhança

Semelhança de triângulos é pré requisito para abordar alguns conteúdos na geometria plana. Dessa maneira, os livros usam semelhança de triângulos para provarem as relações métricas do triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas.

Diante da segunda versão da Base Nacional Comum Curricular, na Unidade Curricular II, são estes os descritores relacionado a semelhança de triângulos:

- "Resolver e elaborar problemas utilizando a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras..."(EM12MTO2);
- Utilizar a noção de semelhança para compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, suas relações em triângulos quaisquer e aplicá-loas em situações como o cálculo de medidas inacessíveis, entre outras."(EM12MT3) ([Brasil, 2016a] p.564).

E a versão final do Ensino Médio também traz em umas das competências, a aplicação das relações métricas utilizando semelhança de triângulos. Segue a Habilidade:

- Aplicar relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos." (EM13MAT308) ([Brasil, 2018b], p.70)

Diante dessas orientações curriculares, os futuros livros aprovados pelo PNLD do Ensino Médio, se possível, deverão interligar esses conteúdos: semelhança com Teorema de Pitágoras (S-TP) e semelhança com razões trigonométricas (S-RT). Nesse momento, será analisado numa tabela 2.19 abaixo os livros de volume 1 do PNLD de 2015 que fazem essas interligações, ou seja, usa semelhança de triângulos para provar Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas;

Livro Didático	S-TP	S-RT
Conexões com a Matemática [Leonardo]	X	X
Matemática: Contexto & Aplicações [Dante]	X	X
Matemática Paiva [Paiva]	X	
Matemática Ciências e Aplicações [Iezzi]	X	*
Matemática Ensino Médio [Smole]		**
Nosso Olhar Matemática [Souza]		X

Tabela 2.19: semelhança - Teorema de Pitágoras (S-TP) e semelhança - razões trigonométricas (S-RT)

(*) Iezzi mostra a invariância das razões dos catetos dos triângulos retângulos, usando semelhança de triângulos, definindo tangente; porém, para Seno e Cosseno, ele conceitua sem a demonstração.

(**) Smole apresenta as relações trigonométricas utilizando Teorema de Tales, ignorando a relação de semelhança de triângulos apresentado pela maioria dos outros livros.

Os livros de autoria de Leonardo, Dante, Paiva e Iezzi aplicam semelhança de triângulos para encontrar as relações métricas no triângulo retângulo. Em seguida, manipula essas relações e demonstram o Teorema de Pitágoras. Por outro lado, Smole traz o conceito do Teorema de Pitágoras sem demonstração e Souza prova o mesmo por área.

As razões trigonométricas são demonstradas de forma completa por semelhança de triângulos nos livros de autoria de Leonardo, Dante e Sousa. A obra do Paiva é a única que não disponibiliza o conteúdo de trigonometria em seu volume 1, o autor optou em abordar o assunto no primeiro capítulo do volume 2, sem citar semelhança para demonstrar essas relações.

2.8.1 Semelhança e Teorema de Pitágoras

Será apresentado uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras usando Semelhança de triângulos apresentado pelos livros de autoria de Leonardo, Dante, Paiva e Iezzi.

Teorema de Pitágoras. *Seja um triângulo retângulo $\triangle ABC$, sendo o ângulo $\hat{A}$ reto e AH altura de base BC; (fig. 2.105);*

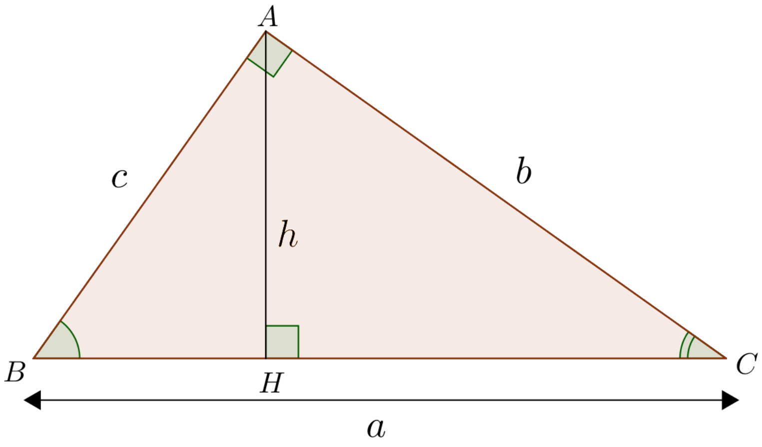


Figura 2.105: Triângulo retângulo $\triangle ABC$

- *um triângulo retângulo com catetos de medidas b e c e hipotenusa a;*
- *a altura relativa a hipotenusa desse triângulo de medida a;*
- *os segmentos CH e BH de medidas m e n, respectivamente.*

Provar que é valido o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle HAC$, $\triangle HBA$ são semelhantes pelo caso AA (Ângulo Ângulo) mostrado na seção 2.4, a qual demonstra os casos de semelhança de triângulos.

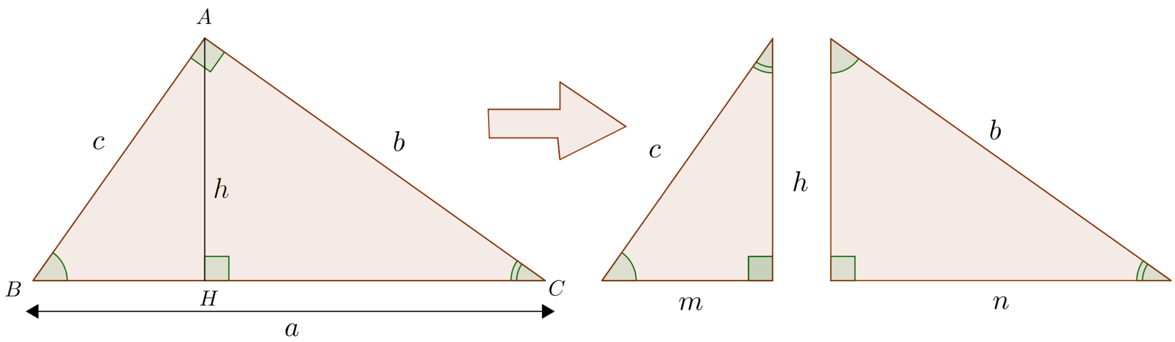


Figura 2.106: Triângulos $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$ são afastados .

Com base na semelhança desses triângulos, demonstra-se as relações métricas do triângulo retângulo $\triangle ABC$.

- $\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow bc = ah$ e $b^2 = am$
- $\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = an$
- $\triangle HAC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BA} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{b}{c} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn$

Somando as relações $b^2 = am$ e $c^2 = an$, membro a membro, demonstra-se o **Teorema de Pitágoras**.

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n)$$

$$m + n = a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

.

2.8.2 Semelhança e Relações trigonométricas

Os autores Leonardo, Souza e Dante demonstram as Relações trigonométricas usando semelhança de triângulos. Leonardo e Souza partem de um triângulo retângulo e traça segmentos internos paralelos a um dos lados desse polígono e Dante inicia com uma construção de ângulo menor que 90° e traça semirretas paralelas entre si e perpendiculares a uma semirreta do ângulo. Vale frisar que esse último método de começar a demonstração, torna-se a mesma mais completa. Será apresentada essa prova a seguir.

Relações trigonométricas. *Suponha um triângulo retângulo $\triangle ABC$, o ângulo $\hat{B}$ reto, lados AB e BC chamados respectivamente de Cateto adjacente e Cateto oposto ao ângulo α, e lado AC, Hipotenusa (fig.2.107).*

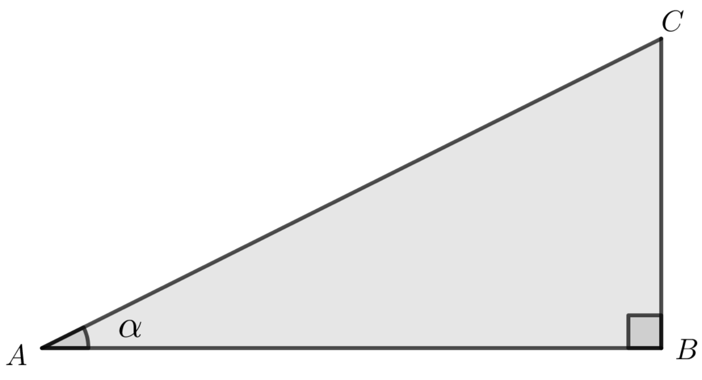


Figura 2.107: Triângulos retângulos $\triangle ABC$.

Provar que:

$$Sen\ \alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa} = \frac{BC}{AC}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa} = \frac{AB}{AC}$$

$$Tg\ \alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} = \frac{BC}{AB}$$

Considera-se um ângulo $A\hat{O}C = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$ e trace, a partir dos pontos C, E, G, etc. da semirreta OA, as perpendiculares CD, EF, GH, etc., à semirreta OA.

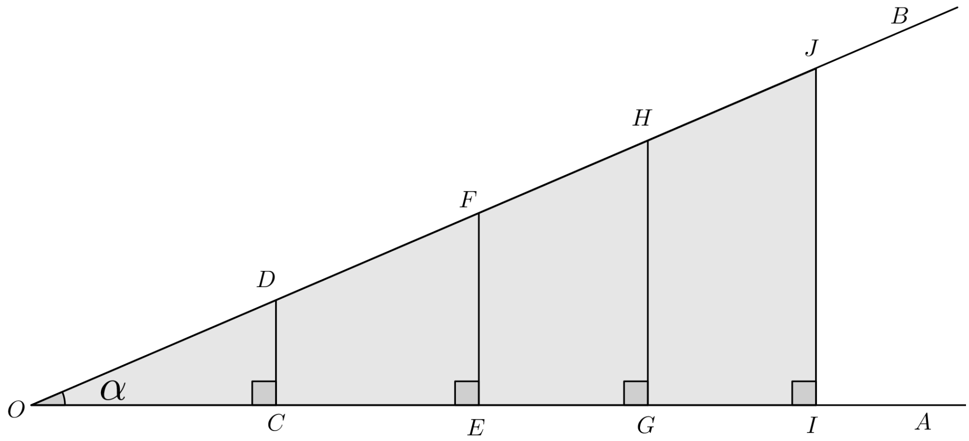


Figura 2.108: Triângulos retângulos sobrepostos.

Separando os triângulos $\triangle OCD$, $\triangle OEF$, $\triangle OGH$ e $\triangle OIJ$ (fig.2.109), nota-se que são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), pois possuem os ângulos correspondentes iguais, os ângulos $\hat{C}$, $\hat{E}$, $\hat{G}$ e $\hat{I}$ são retos e o ângulo $\hat{O} = \alpha$ é comum a todos eles.

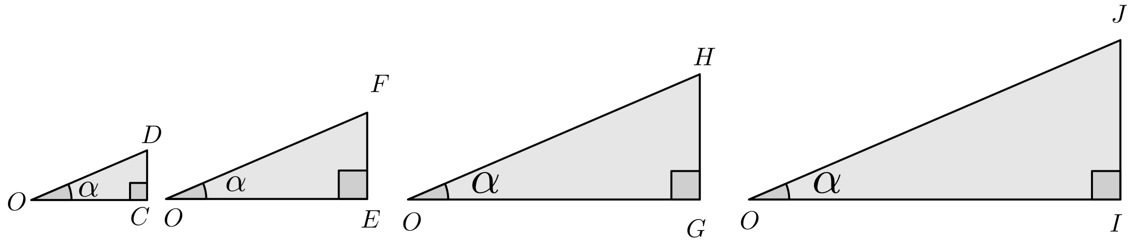


Figura 2.109: Triângulos sobrepostos separados.

a) Razão do cateto oposto ao ângulo α pela hipotenusa dos triângulos é uma constante chamada de **Seno do ângulo** α;

$$Sen\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \frac{IJ}{OI} = ...(\text{constante})$$

b) Razão do cateto adjacente ao ângulo α pela hipotenusa dos triângulos é uma constante chamada de **Cosseno do ângulo** α;

$$Cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OH} = \frac{OI}{OJ} = ...(\text{constante}).$$

c) Razão do cateto oposto ao ângulo α pelo cateto adjacente é uma constante chamada de **Tangente do ângulo** α;

$$Tg\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \frac{IJ}{OI} = ...(\text{constante}).$$

De forma parecida, Iezzi inicia o conceito de razões trigonométricas, conceituando declividade: "(...) é a razão entre a variação vertical e a variação horizontal de uma rampa"([Iezzi, 2013], p. 257).

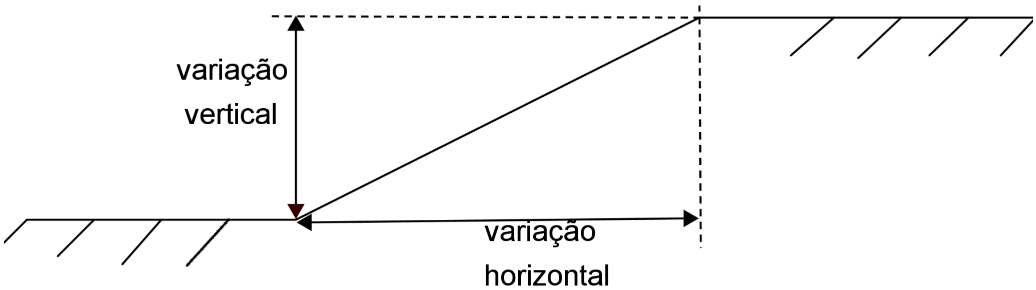


Figura 2.110: Declividade.

$$\text{Declividade} = \frac{\text{variação vertical}}{\text{variação horizontal}}$$

Comparando essa rampa a um triângulo retângulo, Iezzi define tangente como sendo essa declividade, ou seja, tangente de um ângulo agudo é a razão da medida do cateto oposto pelo cateto adjacente. Em seguida, ele usa semelhança de triângulos, igualmente usado pelos outros autores, para mostrar que a relação de tangente é uma contante.

Usando a figura 2.111, ele mostra com um exemplo que cada deslocamento horizontal (à direta) de 5u.c (unidade de comprimento), corresponde a um deslocamento vertical de 3 u.c (para cima).

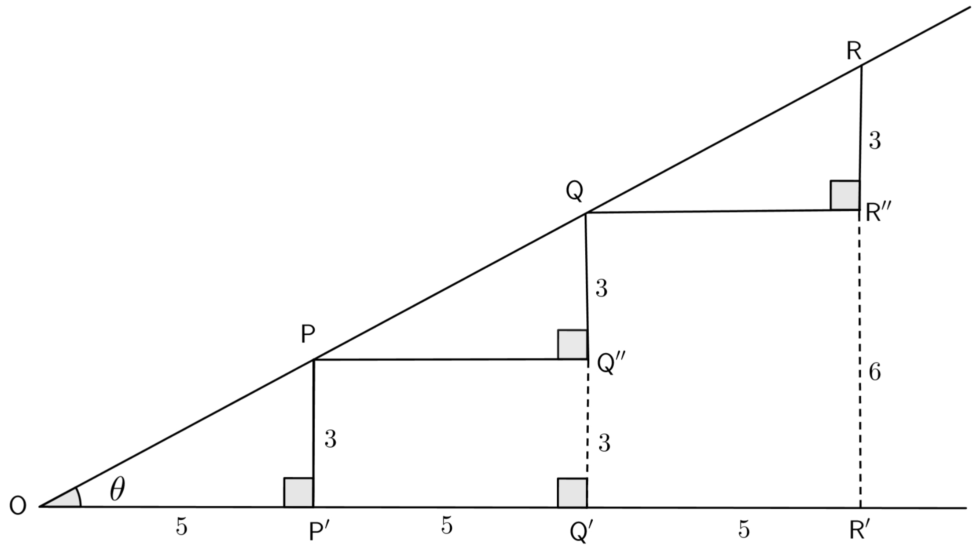


Figura 2.111: Deslocamento em uma rampa ([Iezzi, 2013], p.258).

Os triângulos $\triangle OPP', \triangle OQQ', \triangle ORR'...$ são semelhantes pelo caso A.A (Ângulo - Ângulo). Diante disso, ele mostra a invariância da tangente do ângulo θ com valores numéricos. Por fim, define Seno e Cosseno também sem demonstrações.

- $\triangle OPP'$: tg $\theta = \frac{3}{5}$
- $\triangle OQQ'$: tg $\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
- $\triangle ORR'$: tg $\theta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$;

Segundo Smole, as três razões trigonométricas podem ser estabelecidas usando o Teorema de Tales conforme apresentação dada abaixo:

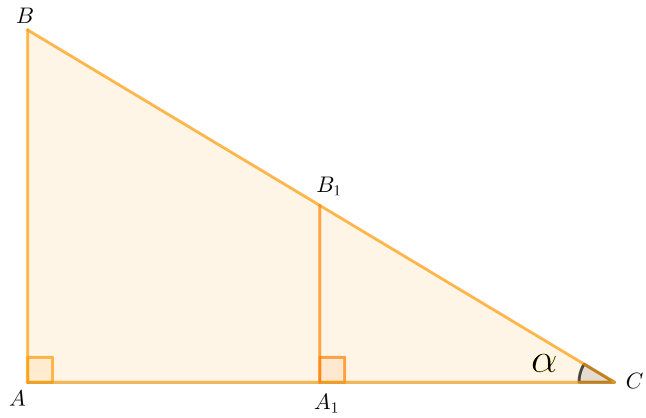


Figura 2.112: Triãngulos retângulos encaixados ($AB \parallel A_1B_2$) ([Smole, 2013], p.243).

- Sen$\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida de hipotenusa}} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{BC}$
- Cos $\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida de hipotenusa}} = \dfrac{A_1C}{B_1C} = \dfrac{AC}{BC}$
- Tg$\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida de hipotenusa}} = \dfrac{B_1A_1}{A_1C} = \dfrac{BA}{AC}$

Quando Smole informa que as três relações (Seno, Cosseno e Tangente) são consequências do Teorema de Tales, existe um questionamento, pois o Teorema de Tales é uma proporção que relaciona os segmentos das retas transversais ao feixe de paralelas. Portanto, a demonstração usando esse teorema somente é válido para a relação Cosseno e as outras seriam demonstradas por semelhança de triângulos.

3 Considerações finais

Os livros didáticos apresentam-se com destaque no cenário educacional, ou seja, desempenham um papel significativo no desenvolvimento das atividades da sala de aula, realizada pelos professores e alunos. Portanto, trata-se de um importante instrumento utilizado pelos professores para o desenvolvimento das atividades docentes. Entretanto, as deficiências no ensino e aprendizagem nos materiais didáticos é uma dos obstáculos que devem ser investigados com o objetivo dos futuros materiais didáticos confeccionados sejam de boa qualidade, com intuito no avanço do rendimento dos alunos da Educação Básica.

Devido a esse fato, é de suma importância as pesquisas nesses livros didáticos que estão disponíveis nas redes públicas de ensino e que são materiais de apoio ao professor no planejamento de aula.

A partir da análise desses seis livros didáticos, foi possível verificar a importância do cuidado ao escolher um livro didático, sugerir quais destes livros a serem utilizados nos planos de aulas e citar alguns pontos que podem ser melhorados. Desta forma, consequentemente vão agregar valores nos planejamentos de aula e também para confecções de novos livros didáticos.

Em relação as características físicas dos livros, a abordagem da geometria no final do livro foi notado que é algo mais frequentes nos livros analisados. De modo que é um detalhe a ser revisto pelos autores dos novos livros a serem elaborados; desta forma, ajudará o docente a ministrar os conteúdos de geometria no ano letivo em conformidade com as orientações dos currículos mínimos dos Estados, Municípios e Iniciativa privadas. Caso o docente desejar abordar os conteúdos de geometria antes dos conteúdos de funções, o livro do Paiva é o único que traz nesta ordem. Em relação a ordem de abordagem dos conteúdos Teorema de Tales, semelhança e relações trigonométricas; Iezzi é o autor que traz uma sequência mais encadeada; o qual, traz comparação de mapas, definindo semelhança de figuras planas e de forma motivadora; em seguida, o Teorema de Tales para provar os casos de semelhança, depois conceitua semelhança de triângulos e por último utiliza esta ultima demonstração para validar as relações trigonométricas.

Em relação aos exercícios propostos e resolvidos foi notado que todos autores trazem poucas atividades contextualizadas e a maioria sendo uma contextualização forçada. Leonardo se destaca entre os seis, por ter uma média de exercícios contextualizados acima dos demais e traz no final do capítulo exercícios contendo temas de Teorema de Tales, semelhança, Teorema de Pitágoras e relações métricas de forma gradativa de complexidade e misturando a aplicabilidade de todos esses conceitos. Em relação à contextualização, Dante e Paiva trazem alguns exercícios resolvidos e propostos criativos. Já a Smole peca em formalizar exercícios resolvidos envolvendo semelhança de triângulos, porém formaliza a resolução dizendo que foi usado Teorema de Tales, nos exercícios propostos ela traz uma série de atividades envolvendo semelhança, porém traz esse conceito bem sucinto na parte teórica da seção de Teorema de Tales.

Para uma boa introdução de semelhança, é valido o uso dos livros do Leonardo e Iezzi, pois trazem comparações de mapas e aplicação de escala. Em especial, somente Iezzi demonstra os casos de semelhança, o qual é uma ferramenta útil para provar as relações trigonométricas. E em relação a demonstração do Teorema de Tales é sugerido o uso da obra de Leonardo, pois traz uma demonstração mais completa.

Nas representações gráficas nos enunciados do Teorema de Tales, foi notado que todos autores, trazem um modelo padronizado; as retas paralelas na horizontal cortadas por duas retas transversais que se intersectam internamente ao feixe. De forma bem estratégica e com objetivo de diversificar os modelos de representações gráficas; Leonardo, Dante e Sousa trazem como exemplos nos exercícios resolvidos diversidades de representações e disponibiliza várias atividades com variedade de representações gráficas; diferentemente do Paiva e Smole que repetem o modelo de representação do enunciado e criaram uma diversidade de representações nos exercícios propostos.

Em relação aos Projetos de aprendizagem, Leonardo e Paiva disponibilizam projetos no livro do aluno e Iezzi, somente no livro do professor. Não foi observado se os outros três livros também trazem algum projeto especificamente no manual do professor, conforme Iezzi confeccionou em seu material, porque houve uma dificuldade em obtê-los. Ao deparar com esse óbice, é de suma importância que os autores dos futuros livros incluam os Projetos de aprendizagem no exemplar do docente e principalmente do discente, de modo que facilite o professor no seu plano de aula. Os Projetos de aprendizagem oferecidos por Leonardo e Paiva são simples e objetivos, eles se parecem pois exploram escalas e figuras semelhantes; sendo o primeiro no espaço e o segundo no plano. O projeto de aprendizagem do Iezzi é aconselhado incluir num plano de aula quando o professor optar por explorar o conteúdo de semelhança paralelamente com estatística.

As aplicações de semelhança em outros conteúdos é a última parte da análise dos livros didáticos. Semelhança de triângulos foi usado para provar o Teorema de Pitágoras e as Razões trigonométricas. Vale salientar que Leonardo, Dante, Paiva e Iezzi trazem demonstrações de Teorema de Tales parecidas, de tal maneira que quaisquer destes livros atendem a um bom planejamento de uma aula. Em relação as Relações trigonométrica, somente Paiva que não aborda esse conteúdo e os demais usam semelhança de triângulos para provarem as relações, porém Iezzi não realiza uma demonstração completa e Smole não traz uma demonstração coerente, aplicando Teorema de Tales em vez de semelhança de triângulos.

Essa análise deve servir para utilização adequada do livro didático em sala de aula, de forma a ser usado como ferramenta de ensino, e não para simples reprodução. Por meio dessa análise , foi possível verificar que um livro apenas não contempla a necessidade de aprendizagem dos alunos, pois para que os processos de ensino e aprendizagem ocorram de maneira eficaz, é relevante a reunião de diversas fontes de pesquisas, as quais devem trabalhar com diferentes abordagens a fim de facilitar a aprendizagem dos alunos, além de considerar as diferentes realidades e formas de aprendizagem.

Espera-se também que esse trabalho de pesquisa seja uma referência de estudos para possíveis trabalhos científicos que façam análises em outros Programas Nacionais de Livros didáticos do Ensino Fundamental ou Médio que virão. Deste modo, dará muita recompensa um trabalho de pesquisa que contribua para elevar a qualidade do ensino brasileiro.

Referências Bibliográficas

[Azambuja, 2013] Azambuja, M. T. (2013). O uso do cotidiano para o ensino de matemática em um escola de caçapava do sul. *Jornal*.

[Bortolossi, 2018] Bortolossi, Humberto e Crissaff, L. (2018). Projeções ortogonais e representações em perspectivas. https://www.umlivroaberto.com/wp/?page-id=97. Acessado em 20-10-2018.

[Boyer, 1996] Boyer, C. B. (1996). *História da matemática. Tradução de Hygino H. Dominguesl. 2. ed.* Edgard Blucher Ltda.

[Brasil, 1997a] Brasil (1997a). Parâmetro curricular nacional. matemática. vol.3, 1 a 4 série. *Brasília, DF:MEC/SEC, 1997*.

[Brasil, 1997b] Brasil (1997b). Parâmetros curriculares nacionais - apresentação dos temas transversais: Ética. *Brasília, DF:MEC/SEC, 1997*.

[Brasil, 1997c] Brasil (1997c). Parâmetros curriculares nacionais: Documento introdutório, 1 a 4 série. *Brasília, DF:MEC/SEC, 1997*.

[Brasil, 1998] Brasil (1998). Introdução aos parâmetros curriculares,terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. *Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental*.

[Brasil, 1999] Brasil (1999). Parâmetro curricular nacional do ensino médio - bases legais. *Brasília, DF:MEC/SEC, 1999*.

[Brasil, 2000] Brasil (2000). Parâmetro curricular naciona do ensno médio. parte iii: Ciências da natureza, matemática. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2000*.

[Brasil, 2002] Brasil (2002). Pcn+ ensino médio: Orientacções educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2002*.

[Brasil, 2006] Brasil (2006). Orientação curriculares para o ensino médio, . ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. vol.2. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2006*.

[Brasil, 2008] Brasil (2008). Guia de livro didático - pnld 2008 - anos finais do ensino fundamental. *Brasília, DF: MEC/SEB, 2008.*

[Brasil, 2014a] Brasil (2014a). Caderno de estudos do curso programas do livro pli/ fundo nacional de desenvolvimento da educação. 5.ed. *Atual-Brasília:MEC, FNDE,2014.*

[Brasil, 2014b] Brasil (2014b). Guia de livro didático - pnld 2015 - ensino médio. *Brasília, DF: MEC/SEB, 2014.*

[Brasil, 2016a] Brasil (2016a). Base nacional comum curricular, 2 versão. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2016.*

[Brasil, 2017a] Brasil (2017a). Base nacional comum curricular é aprovada no cne e segue para homologação do ministro da educação. http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/58541-base-nacional-comum-curricular-e-aprovada-no-cne-e-segue-para-homologacao-do-ministro-da-educacao. Acessado em 15-12- 2017.

[Brasil, 2017b] Brasil (2017b). Base nacional comum curricular, versão final do ensino fundamental. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2017.*

[Brasil, 2018a] Brasil (2018a). Base nacional comum curricular, revisão da versão final do ensino médio. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2018.*

[Brasil, 2018b] Brasil (2018b). Base nacional comum curricular, versão final do ensino médio. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2018.*

[Brasil, 2016b] Brasil, I. (2016b). Sistema de avaliação da educação básica. ed. 2015. *Brasília, DF:MEC/ Inep, 2016.*

[Bremm, 2010] Bremm, M. (2010). Projeto de aprendizagem, uma metodologia que visa a autonomia. *UFRS.*

[Carvalho, 2010] Carvalho, J. B. P. F. d. (2010). Coleção explorando o ensino, vol.17 , ensino fundamental. *Brasília, DF:MEC/SEC, 2010.*

[Dante, 2014] Dante, L. R. (2014). *Matemática: contexto & aplicações*, volume 1. Ática.

[de Menezes and Neto, 1999] de Menezes, P. M. L. and Neto, A. L. C. (1999). Escala: estudo de conceitos e aplicações.

[De Sousa, 2013] De Sousa, Diogo Dantas e Sá, L. d. S. (2013). Propostas para o ensino da semelhança. *IMPA-PROFMAT, 2013*.

[Educacional, 2017] Educacional (2017). Legislação educacional. http://www.educacional.com.br/legislacao/leg.vi.asp. acessado em 10-08-2017.

[EVES, 1996] EVES, H. (1996). *Geometria: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Hygino H. Domingues.* Atual.

[Freire, 2006] Freire, P. (2006). *Extensção e Comunicação? 13. ed.* Paz e Terra.

[Gomes, 2012] Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pages 233–243.

[Haruna, 2000] Haruna, M. d. D. (2000). Teorema de thales: Uma abordagem do processo ensino aprendizagem. Master's thesis, USP.

[Iezzi, 2013] Iezzi, G. (2013). *Matemática ciência e aplicações*, volume 1. Saraiva.

[Jones, 2002] Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. in linda haggarty(ed.). *Asperts of Teaching Secondry Mathematics: perspectives on practice*, pages 121–139.

[Leles, 2013] Leles, T. C. F. (2013). As estratégias didáticas abordadas para o ensino de semelhança de triângulo em alguns livros didáticos do programa nacional do livro didático do ensino fundamental.

[Leonardo, 2013] Leonardo, F. M. (2013). *Conexões com a Matemática*, volume 1. Moderna.

[Lima et al., 2002] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. (2002). A matemática do ensino médio.

[Neto, 2013] Neto, Antonio Caminha Muniz e Caminha, A. (2013). Geometria (coleção profmat).

[Onuchic, 1999] Onuchic, L. d. l. R. (1999). Resolução de problemas no brasil e no mundo. *II Seminaário em resolução de problemas*, pages 1–8.

[Onuchic and Allevato, 2011] Onuchic, L. d. l. R. and Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática, vol. 25, núm. 41, p. 73-98*, pages 73–98.

[Pais, 1996] Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria. https://www.recantodasletras.com.br/artigos/5520508. acessado em 20-09-2018.

[Paiva, 2013] Paiva, M. (2013). *Matemática Paiva*, volume 1. Moderna.

[Pesquisa.com, 2017] Pesquisa.com, S. (2017). Portal de pesquisa temáticas e educacionais. http://www.suapesquisa.com/reciclagem/. Acessado em 10-09- 2017.

[Pinhal, 2017] Pinhal, P. (2017). Tecnologias arquitetônicas. http://www.colegiodearquitetos.com.br/dicionario/2009/02/o-que-e-planta-baixa/. acessado em 20-09- 2017.

[RJ, 2012] RJ, R. d. J. (2012). Currículo mínimo de matemática-2012. *Rio de Janeiro, RJ: SEEDUC ,2012*.

[Ross, 2007] Ross, j. (2007). Televisão analógica e digital. https://books.google.com.br/books. Acessado em 20-09-2018.

[Smole, 2013] Smole, K. S. (2013). *Matemática Ensino Médio*, volume 1. Saraiva.

[Sousa, 2013] Sousa, J. R. d. (2013). *Novo olhar matemática. 1*, volume 1. FTD.

[Wagner, 2018] Wagner, Eduardo e Araújo, M. p. (2018). Oficina tales e semelhança. *IMPA RJ,2018*.