



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DIEGO PONCIANO DE OLIVEIRA LIMA

VARIETADES AFINS E APLICAÇÕES

FORTALEZA – CE

2013

DIEGO PONCIANO DE OLIVEIRA LIMA

VARIEDADES AFINS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA – CE

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

L697v Lima, Diego Ponciano de Oliveira
Variedades Afins e Aplicações / Diego Ponciano de Oliveira Lima. - 2013.
38 f. : il. color. , enc. ;31 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em
Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Equações Lineares. 2. Espaços Vetoriais. I. Título.

CDD 515.352

DIEGO PONCIANO DE OLIVEIRA LIMA

VARIEDADES AFINS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03/08/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade da Integração Internacional
da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a toda comunidade do
PROFMAT.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela sua existência, pela razão de todas as minhas conquistas.

Agradeço aos meus pais, Clotênio Ponciano Lima (In Memoriam) e Maria Aldair de Oliveira Ponciano Lima, pelo apoio e criação.

Agradeço ao meu professor e orientador Marcelo Ferreira de Melo, pelas aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, José Afonso de Oliveira, Marcos Ferreira de Melo, José Robério Rogério, José Othon Dantas Lopes, Cleon da Silva Barroso, José Fábio Bezerra Montenegro pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT que contribuíram nas disciplinas do mestrado.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos os responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este curso de Pós-Graduação fosse realizado e concluído.

“Só aqueles que se arriscam a ir mais longe,
descobrirão até onde podem chegar”

Oswaldo Tórtora

RESUMO

Neste trabalho, consideramos variedades afins no espaço vetorial para analisar e compreender o comportamento geométrico de conjuntos soluções de sistemas de equações lineares, de soluções de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem resultantes de modelagens matemáticas de sistemas, etc. Verificamos características das variedades afins em espaços vetoriais como um subespaço vetorial transladado de qualquer vetor pertencente à variedade afim e fazemos uma comparação das representações geométricas dos conjuntos soluções das situações-problema, citados acima, com tais características.

Palavras-chave: Variedade afim, espaço vetorial, subespaço vetorial, equações lineares e equações diferenciais.

ABSTRACT

In this paper, we consider affine varieties in vector space to analyze and understand the geometric behavior of sets solutions of systems of linear equations, solutions of linear ordinary differential equations of second order resulting from mathematical modeling of systems, etc. We observed characteristics of affine varieties in vector spaces as a subspaces vector transferred to any vector belonging to affine variety and do a comparison of geometric representations of the solution sets of problem situations, cited above, with such features.

Keywords: Affine variety, vector space, vector subspace, linear equations and differential equations.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	2
2	VARIEDADES AFINS	3
2.1	Definição de Variedade Afim	3
2.2	Variedade Afim Gerada	5
3	POSIÇÕES RELATIVAS	8
4	SISTEMAS LINEARES	11
5	RETA TANGENTE A UM GRÁFICO	15
6	EDO's LINEARES DE SEGUNDA ORDEM	18
7	CONCLUSÃO	28
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	29

Capítulo 1

Introdução

O estudo de equações lineares, comum no ensino fundamental e médio, é facilmente compreendido quando denotamos as noções geométricas. As soluções de sistemas de equações lineares, por exemplo, quando associadas à análise de posições entre elementos geométricos, tais como retas e planos, tornam-se mais compreensíveis. As equações lineares aparecem frequentemente na matemática aplicada à engenharia ao modelar certos fenômenos como circuitos elétricos, sistemas com molas, movimentos oscilatórios, etc. No intuito de compreender o comportamento das soluções de problemas de modelagem ou das simples soluções de sistemas lineares, analisamos os problemas usando ferramentas matemáticas simples como matrizes, vetores, espaços vetoriais, variedades afins, dentre outras.

O presente trabalho tem como objetivo analisar e compreender o comportamento das soluções de sistemas de equações lineares, do posicionamento relativo de elementos geométricos (retas, planos e hiperplanos), das soluções de equações lineares descritas através da modelagem de fenômenos e de outros problemas; caracterizando esses elementos de modo geral usando variedades afins.

No segundo capítulo, apresentamos a definição de variedades afins e de maneira simples e exemplificada mostramos como caracteriza-la usando subespaços vetoriais transladados. Nos capítulos seguintes, mostramos uma análise de problemas e situações matemáticas, como o conjunto solução de sistemas de equações lineares e as soluções de equações diferenciais ordinárias lineares, caracterizadas usando variedades afins.

Capítulo 2

Variedades Afins

A noção de subespaço vetorial abrange as retas, planos e seus análogos multidimensionais apenas nos casos em que esses conjuntos contêm a origem. Para incluir retas, planos, etc. que não passam pela origem, tem-se a noção de variedade afim.

Seja E um espaço vetorial. Se $x, y \in E$ e $x \neq y$, a reta que une os pontos x, y é, por definição o conjunto

$$r = \{(1 - t)x + ty; t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

Pondo $v = y - x$, podemos ver que $r = \{x + tv; t \in \mathbb{R}\}$.

2.1 Definição de Variedade Afim

Um subconjunto $V \subset E$ chama-se uma *variedade afim* quando a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V . Assim, $V \subset E$ é uma variedade afim se, e somente se, cumpre a seguinte condição:

$$x, y \in V, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - t)x + ty \in V. \quad (2.2)$$

Exemplo 2.1.1 Um exemplo óbvio de variedade afim é um subespaço vetorial.

Exemplo 2.1.2 Outro exemplo de variedade afim é o conjunto com um único ponto, pois se A é um ponto de um espaço vetorial qualquer e $V = \{A\}$, teremos que $A = (1 - t)A + tA$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3 Se $V_1, \dots, V_n \subset E$ são variedades afins, então a interseção $V = V_1 \cap \dots \cap V_n$ é ainda uma variedade afim.

Exemplo 2.1.4 Sejam $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. O conjunto H dos pontos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ é uma variedade afim que não contém a origem quando $b \neq 0$. Mais geralmente, o conjunto das soluções de um sistema linear de m equações com n incógnitas é uma variedade afim.

Teorema 2.1.1 Seja V uma variedade afim não vazia no espaço vetorial E . Existe um único subespaço vetorial $F \subset E$ tal que, para todo $x \in V$ tem-se $V = x + F = \{x + v; v \in F\}$. Em outras palavras, toda variedade afim $V \subset E$ é um subespaço vetorial de E transladado por um dos vetores de V .

Demonstração: Dado $x \in V$, seja F o conjunto de todos os vetores $v = y - x$, em que $y \in V$. Mostremos que F é um subespaço vetorial. É evidente que $0 \in F$, basta tomar $x = y$. Além disso, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in F$, então $\alpha v = \alpha(y - x) = [(1 - \alpha)x + \alpha y] - x = z - x$, com $z = (1 - \alpha)x + \alpha y \in V$. Portanto, $\alpha v \in F$. Finalmente, se $v = y - x$ e $v' = y' - x$ pertencem a F , então

$$z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y' \in V. \quad (2.3)$$

Portanto $z - x \in F$. Segue de (2.3) que a soma $v + v' = y + y' - 2x = 2(z - x)$ pertence a F . Em seguida, mostremos que $V = x + F$. Veja que se $y \in V$, então $y = x + (y - x)$, com $y - x \in F$. Logo $y \in x + F$. Assim, $V \subset x + F$. Por outro lado, um elemento qualquer de $x + F$ tem a forma $x + (y - x)$, com $y \in V$, logo é igual a y e daí $x + F \subset V$. Finalmente, se F e F' são subespaços vetoriais de E , tais que $x + F = x + F'$ para algum $x \in E$, provemos que se tem $F = F'$. De fato, $v \in F \Rightarrow x + v \in x + F \Rightarrow x + v \in x + F' \Rightarrow x + v = x + v'$ (pois $v' \in F'$) $\Rightarrow v = v' \Rightarrow v \in F'$. Portanto $F \subset F'$. Analogamente, vê-se que $F' \subset F$, o que conclui a demonstração. ■

Exemplo 2.1.5 A equação do plano dada por $x + y + z = 1$ é uma variedade afim que contém os pontos $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Para cada um desses pontos existe um único subespaço vetorial tal que os elementos da variedade afim acima serão dados pela soma dos elementos do subespaço vetorial com um dos elementos citados. Para os três pontos acima, teremos o subespaço vetorial definido pela equação $x + y + z = 0$.

Exemplo 2.1.6 Se uma variedade afim $V \subset E$ contém o vetor zero, então V é um subespaço vetorial de E . De fato, como o vetor zero pertence a V , pelo Teorema 2.1.1 temos que $V = V + 0$. Assim, V é um subespaço vetorial de E .

Dos Exemplos 2.1.4 e 2.1.6 teremos que dados $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, o conjunto de V de vetores $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n se, e somente se, $b = 0$. Temos ainda que V é uma variedade afim.

De fato, se V é um subespaço vetorial, então $(0, 0, \dots, 0) \in V$, isto é, $a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = b = 0$. Agora, seja $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$.

- $0 \in V$, pois $a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0$.
- Suponha que $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ pertençam a V . Então

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0, \quad (2.4)$$

$$a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = 0. \quad (2.5)$$

Somando as equações (2.4) e (2.5) teremos que

$$a_1(x_1 + y_1) + \dots + a_n(x_n + y_n) = 0.$$

Portanto, $u + v \in V$.

- Multiplicando a equação (2.4) por α teremos que

$$a_1(\alpha x_1) + \dots + a_n(\alpha x_n) = 0. \quad (2.6)$$

Logo, da equação (2.6), $\alpha u \in V$.

Com isso, temos que V é subespaço vetorial de \mathbb{R}^n se, e somente se, $b = 0$. Para mostrar que V é variedade afim, suponha que $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ pertençam a V , em que V é o conjunto de vetores $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$, ou seja,

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b, \quad (2.7)$$

$$a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = b. \quad (2.8)$$

Multiplicando o primeiro lado da equação (2.7) por t e o primeiro lado da equação (2.8) por $(1 - t)$ e somando tudo, teremos que

$$\begin{aligned} & a_1(tx_1 + (1-t)y_1) + \dots + a_n(tx_n + (1-t)y_n) = \\ & = t(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) + (1-t)(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n) = \\ & = tb + (1-t)b = b. \end{aligned}$$

Portanto, o vetor $tu + (1-t)v \in V$. Assim, V é variedade afim.

2.2 Variedade Afim Gerada

Antes de falarmos sobre variedade afim gerada vejamos que a definição de variedade afim diz, em (2.2), que a condição para que $V \subset E$ seja variedade afim é que $x, y \in V$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1-t)x + ty \in V$. Podemos escrever uma condição mais geral.

Seja $V \subset E$ uma variedade afim. Dados $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, então $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$.

Para mostrar que essa condição mais geral é válida, tome $v_0 \in V$ qualquer. Do Teorema 2.1.1 temos que existe um único subespaço vetorial $F \subset E$ tal que, para todo $x \in V$ tem-se $V = x + F$. Então, para $v_0 \in V$, temos que $F = V + (-v_0)$ é um subespaço vetorial. Assim, mostrar que um vetor v está em V é o mesmo que mostrar que $v - v_0 \in F$. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Temos que $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0 \in F$. Como F é subespaço vetorial, toda combinação linear de vetores de F está em F ; em particular, $\alpha_1(v_1 - v_0) + \alpha_2(v_2 - v_0) + \dots + \alpha_k(v_k - v_0) \in F$. Como $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, então teremos que $\alpha_1(v_1 - v_0) + \alpha_2(v_2 - v_0) + \dots + \alpha_k(v_k - v_0)$ será igual a $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k - v_0$, que pertence a F . Então temos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \in V$, que conclui a verificação da condição geral.

Definiremos agora variedade afim gerada. Dado o subconjunto não vazio $X \subset E$, a *variedade afim gerada* por X é, por definição, o conjunto $V(X)$ de todas as combinações lineares $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, com $v_1, \dots, v_n \in X$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

Exemplo 2.2.1 Seja $X = \{x, y, z \in \mathbb{R}; xyz = 0\}$. Veja que os vetores $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$ pertencem a X . Então, como a variedade afim $V(X)$ gerada por X é o conjunto de todas as combinações lineares de vetores que pertençam a X ; teremos que, em particular, $V(X)$ será o conjunto das combinações lineares dos vetores $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$, de modo que a soma dos coeficientes das combinações seja igual a 1. Nesse caso teremos que $V(X) = \mathbb{R}^3$, que é um espaço vetorial, conseqüentemente um subespaço vetorial. Vale ressaltar que uma variedade afim será um subespaço vetorial quando o vetor zero pertence a variedade e neste exemplo é notável que o vetor $(0, 0, 0)$ pertence a $V(X)$.

Proposição 2.2.1 $V(X)$ é uma variedade.

Demonstração: Sejam $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_j u_j$ e $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k$ dois vetores de $V(X)$ de modo que $\sum \alpha_i = 1$, $\sum \beta_i = 1$ e os vetores $u_1, u_2, \dots, u_j, w_1, w_2, \dots, w_k$ pertencem a X . Temos que mostra que, se $\alpha + \beta = 1$, então $\alpha u + \beta w \in V(X)$. Mas de fato, $\alpha u + \beta w = \alpha(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_j u_j) + \beta(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k)$ é uma combinação linear de vetores de X cuja soma dos coeficientes é $\alpha \alpha_1 + \dots + \alpha \alpha_j + \beta \beta_1 + \dots + \beta \beta_k = \alpha(\sum \alpha_i) + \beta(\sum \beta_i) = \alpha + \beta = 1$. Portanto, $\alpha u + \beta w \in V(X)$, e $V(X)$ é variedade afim. ■

Proposição 2.2.2 Fixado qualquer $v_0 \in X$, tem-se $V(X) = v_0 + F$, em que F é o subespaço vetorial de E gerado pelos vetores $v - v_0$, com $v \in X$.

Demonstração: Seja $G = V(X) - v_0$. Cada vetor de G é um vetor de $V(X)$ menos v_0 , isto é, um vetor da forma $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n - v_0 = \alpha_1(v_1 - v_0) + \cdots + \alpha_n(v_n - v_0)$, que é uma combinação linear de vetores da forma $v - v_0$, em que $v \in X$. Isso mostra que $G \subseteq F = S(X - v_0)$, em que $S(X - v_0)$ é o subespaço gerado por $X - v_0$. Por outro lado, como $V(X)$ é variedade afim, sabemos que G será um subespaço vetorial, e, portanto, $F = S(X - v_0) \subseteq G$. Vale ressaltar que F é o menor subespaço contendo $X - v_0$. Logo concluímos que $F = G$. ■

Exemplo 2.2.2 Seja $X = \{x, y, z \in \mathbb{R}; xyz = 0\}$. Tomemos o vetor $0 = (0, 0, 0) \in X$, então $F = V(x) - 0$ deverá ser um subespaço vetorial. No exemplo 2.2.1, vimos que $V(X) = \mathbb{R}^3$. Portanto, $F = V(x) = \mathbb{R}^3$. Temos que \mathbb{R}^3 é um espaço vetorial tridimensional sobre o conjunto dos reais e, obviamente, é um subespaço vetorial.

Capítulo 3

Posições Relativas

Nesse capítulo iremos discutir um pouco sobre as posições relativas de variedades afins. Assim como na geometria espacial, podemos analisar as posições relativas entre as variedades afins, ou seja, determinar se duas variedades afins são paralelas ou concorrentes ou reversas. Para isso, temos que analisar os subespaços vetoriais aos quais as variedades afins estão associadas. Seja V uma variedade afim no espaço vetorial E . Sabemos que existe um único subespaço vetorial $F \subset E$ tal que, para todo $x \in V$, teremos $V = \{x + v; v \in F\}$. O subespaço vetorial F será chamado de espaço diretor de V e será denotado por $F(V)$ e a variedade afim V tem a mesma dimensão de $F(V)$.

Sejam V_1 e V_2 variedades afins com subespaços diretores $F(V_1)$ e $F(V_2)$, respectivamente.

Definição 3.1 Dizemos que a variedade afim V_1 é paralela à variedade afim V_2 se $F(V_1) \subset F(V_2)$ ou se $F(V_2) \subset F(V_1)$.

Exemplo 3.1 Seja V_1 uma variedade afim em um espaço vetorial E . Se A é um ponto de E , então a variedade afim $V_2 = \{B \in E; \overline{AB} \in F(V_1)\}$ é paralela a V_1 e contém o ponto A .

Observações.

- (1) Se $V_1 \subset V_2$ dizemos que V_1 e V_2 são paralelas.
- (2) A variedade afim formada por um ponto A pertencente a um espaço vetorial E é paralela a qualquer variedade afim de E , pois o subespaço diretor de $\{A\}$ é $\{0\}$, que está contido em qualquer subespaço vetorial de E .

Definição 3.2 As variedades afins V_1 e V_2 serão chamadas de variedades afins concorrentes se elas não forem paralelas e tiverem pelo menos um ponto em comum.

Suponhamos que as variedades afins V_1 e V_2 (pertencentes ao espaço vetorial E) sejam concorrentes, então consideremos A um ponto comum entre elas. Se M é um ponto qualquer da variedade afim V_1 (ou de V_2), então o vetor \overline{AM} pertence ao subespaço vetorial $F(V_1)$ (ou a

$F(V_2)$). Assim a questão da posição relativa das variedades afins V_1 e V_2 , nesse caso, está relacionada com o estudo dos subespaços $F(V_1)$ e $F(V_2)$ pertencentes ao espaço vetorial E .

Observações.

- (1) Se as variedades afins V_1 e V_2 se interceptam, então a sua interseção, $V_1 \cap V_2$, é uma variedade afim que passa por um ponto que pertence a V_1 e V_2 e tem $F(V_1) \cap F(V_2)$ como espaço vetorial diretor.
- (2) A variedade afim $V_1 \cap V_2$ pode ser formada por um único ponto, por exemplo, se V_1 e V_2 forem duas retas ou uma reta e um plano.

Definição 3.3 Duas variedades afins serão chamadas reversas se elas não forem concorrentes nem paralelas.

Exemplo 3.2 No espaço tridimensional \mathbb{R}^3 sabemos que duas retas podem ser reversas, enquanto que um plano e uma reta nunca serão reversos.

Conforme a dimensão do espaço vetorial aumenta há possibilidade da existência de variedades afins reversas com dimensão maior que 1. Veremos agora um teorema que mostra uma maneira de construir variedades afins reversas.

Teorema 3.1 Sejam V_1 e V_2 variedades afins concorrentes e não paralelas de dimensões m e n , respectivamente. Seja $V(V_1 \cup V_2)$ a variedade afim gerada pela união das duas variedades afins dadas. Então qualquer variedade afim que não esteja contida em $V(V_1 \cup V_2)$ que tenha dimensão n e que seja paralela a V_2 é reversa a V_1 .

Demonstração: Chamemos de V_3 a variedade afim que não esteja contida em $V(V_1 \cup V_2)$, que tenha dimensão n e que seja paralela a V_2 . Seja C um ponto de V_3 . Como V_3 é paralela a V_2 e tem dimensão n , podemos escrever:

$$V_3 = C + F(V_2). \quad (3.1)$$

Em que $F(V_2)$ é o subespaço vetorial diretor de V_2 . Vamos mostrar que V_3 e V_1 são reversas. Observe que V_3 não é paralela a V_1 , pois senão teríamos $F(V_2) \subset F(V_1)$ ou $F(V_1) \subset F(V_2)$ e, assim, V_2 seria paralela a V_1 . Vamos mostrar agora que V_3 e V_1 não se interceptam. Por hipótese, V_2 e V_1 são concorrentes. Consideremos então um ponto $B \in V_2 \cap V_1$ e teremos:

$$V_1 = B + F(V_1). \quad (3.2)$$

Suponhamos por contradição que exista um ponto $A \in V_3 \cap V_1$. Então, a partir de (3.1) e (3.2) concluímos que existem vetores $v \in F(V_2)$ e $w \in F(V_1)$ tais que $A = B + w$ e $A = C + v$. O que implica em:

$$C = B + (w - v). \quad (3.3)$$

De onde concluímos que $C \in B + (F(V_1) + F(V_2))$. Como o subespaço diretor de $V(V_1 \cup V_2)$ é o subespaço $F(V_1) + F(V_2)$ e como $B \in V_2 \cap V_1$, então teremos que $V(V_1 \cup V_2) = B + (F(V_1) + F(V_2))$. Temos assim uma contradição, pois por hipótese V_3 não está contida em $V(V_1 \cup V_2)$. Portanto, V_3 é reversa a V_1 . ■

Exemplo 3.3 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 . Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do \mathbb{R}^4 . Sejam $S_1 = [e_1, e_2]$ e $S_2 = [e_1, e_3]$ subespaços vetoriais do \mathbb{R}^4 . Seja V_1 a variedade afim que passa pelo ponto $A = (1, 1, 1, 1)$ e tem a direção de S_1 , então teremos que $V_1 = \{(1 + \alpha, 1 + \beta, 1, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Seja V_2 a variedade afim que passa por $A = (1, 1, 1, 1)$ e tem a direção de S_2 , ou seja, $V_2 = \{(1 + \gamma, 1, 1 + \theta, 1); \gamma, \theta \in \mathbb{R}\}$. As variedades afins V_1 e V_2 são concorrentes, pois $V_1 \cap V_2$ é a variedade afim que passa pelo ponto A e tem a direção de $S_1 \cap S_2 = [(1, 0, 0, 0)]$, ou seja, $V_1 \cap V_2 = \{(1 + \alpha, 1, 1, 1); \alpha \in \mathbb{R}\}$. A variedade afim, gerada pela união $V_1 \cup V_2$, que passa pelo ponto A e tem a direção de $S_1 + S_2$ é dada por $V(V_1 \cup V_2) = \{(1 + \alpha, 1 + \beta, 1 + \gamma, 1); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Observe que $V(V_1 \cup V_2) \neq \mathbb{R}^4$, pois o ponto $B = (1, 1, 1, 0) \notin V(V_1 \cup V_2)$. Seja V_3 a variedade afim que passa por $B = (1, 1, 1, 0)$ e tem a direção de S_2 , ou seja, $V_3 = \{(1 + \delta, 1, 1 + \lambda, 0); \delta, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Temos que V_3 é paralela a V_2 e reversa a V_1 .

Capítulo 4

Sistemas Lineares

Nesse capítulo iremos discutir um pouco sobre os sistemas lineares usando os conceitos de variedades afins. Inicialmente, temos que um sistema linear é um conjunto de equações lineares da forma $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$. Um sistema linear com m equações e n incógnitas é representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4.1)$$

Podemos escrever o sistema acima como $Ax = b$; em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Quando fazemos $b = 0$, dizemos que o sistema linear é *homogêneo* e o novo sistema está associado ao sistema linear (4.1) original. Assim, temos que o sistema linear homogêneo com m equações e n incógnitas é representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Uma observação importante sobre os sistemas lineares homogêneos é que eles admitem pelo menos a solução trivial, ou seja, admitem pelo menos a solução $(0, 0, \dots, 0)$. De fato, cada uma das equações de (4.2) representam um subespaço vetorial, portanto, contêm o vetor nulo. Geometricamente, essas equações representam retas, planos ou hiperplanos que passam pela origem do sistema cartesiano.

As equações de (4.1) descrevem pontos, retas, planos e hiperplanos, que são exemplos de variedades afins. Como a solução de um sistema linear representa geometricamente a interseção de tais elementos, então teremos como possíveis representações das soluções elementos geométricos como pontos, retas, planos e hiperplanos e em alguns casos o conjunto vazio, que são variedades afins. Obviamente, segue do exemplo 2.1.3, que a interseção de variedades afins é uma variedade afim.

Proposição 4.1 Seja $S = \{x; Ax = b\}$ o conjunto solução de um sistema de equações lineares. S é uma variedade afim.

Demonstração: Sejam $x, y \in S$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} A(tx + (1 - t)y) &= tAx + (1 - t)Ay = \\ &= tb + (1 - t)b = \\ &= b. \end{aligned} \tag{4.3}$$

O que mostra que a reta $tx + (1 - t)y$ está em S . Portanto, S é uma variedade afim. ■

O subespaço vetorial associado a S é o núcleo de S , ou seja, $\ker(S) = \{x; Ax = 0\}$ é o subespaço vetorial associado a variedade afim S . Como $Ax = 0$ é o sistema linear homogêneo associado ao sistema linear $Ax = b$, então as soluções do sistema linear não homogêneo estão associadas às soluções do sistema linear homogêneo e podem ser escritas como $S = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n); (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \ker(S)\}$, em que a solução (p_1, p_2, \dots, p_n) é uma solução particular do sistema linear não homogêneo.

Para resolver os sistemas de equações lineares utilizamos o método de escalonamento ou a regra de Cramer. A regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quociente de dois determinantes. Mas, por outro lado, possui dois inconvenientes em comparação com o método de escalonamento. O primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero, ou seja, quando sistema possui uma única solução. O segundo inconveniente é o custo operacional: dá mais trabalho, por exemplo, calcular quatro determinantes do que escalonar uma matriz 3×3 . Mas podemos tirar uma conclusão importante quando os determinantes são iguais à zero. Concluímos que o sistema possui infinitas soluções, pois teremos nos quocientes a indeterminação $\frac{0}{0}$. Analisando o caso em que o sistema linear tem o número de equações igual ao número de incógnitas e tem infinitas soluções, ou seja, os determinantes das matrizes são iguais a zero, então umas das equações lineares do sistema é combinação linear das outras equações lineares e se descartarmos tal equação, o novo sistema terá as mesmas soluções do sistema linear anterior. Assim, o sistema obtido terá o número de equações menor que o número de incógnitas. Nesse caso, o sistema linear homogêneo associado admitirá infinitas soluções, pois já sabemos que o sistema linear homogêneo associado admite ao menos a

solução trivial. O lema a seguir mostra que, além da solução trivial, um sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial, então pelas conclusões que a regra de Cramer fornece tais sistemas terão infinitas soluções e representarão subespaços vetoriais.

Lema 4.1 Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial.

Demonstração: Consideremos o sistema (4.2), de m equações com n incógnitas, em que $m < n$. Usaremos indução no número m de equações. Para $m = 1$, temos uma única equação $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$, com $n > 1$ incógnitas. Um dos coeficientes a_{1i} é diferente de 0. Mudando o nome das incógnitas, se necessário, podemos supor que $a_{1n} \neq 0$. Então a equação dada equivale a:

$$x_n = -\left(\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 + \dots + \frac{a_{1n-1}}{a_{1n}}x_{n-1}\right). \quad (4.4)$$

Atribuindo arbitrariamente valores não nulos às $n - 1$ incógnitas x_1, \dots, x_{n-1} e calculando x_n através da expressão (4.4), obtemos uma solução não trivial (x_1, \dots, x_n) para a equação dada. Para completar a indução, suponhamos o lema 4.1 verdadeiro para um sistema com $m - 1$ equações. Mudando, se necessário, a ordem das equações e os nomes das incógnitas, podemos admitir que, no sistema (4.2) dado, tem-se $a_{mn} \neq 0$. Então da m -ésima equação resulta:

$$x_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 + \dots + \frac{a_{mn-1}}{a_{mn}}x_{n-1}\right). \quad (4.5)$$

Substituindo, em cada uma das $m - 1$ primeiras equações, a incógnita x_n pelo valor em (4.5), obtemos um sistema homogêneo de $m - 1$ equações nas $n - 1$ incógnitas x_1, \dots, x_{n-1} . Pela hipótese de indução, este sistema admite uma solução não trivial $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, pois $n - 1 > m - 1$. Pondo $\alpha_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}\alpha_1 + \dots + \frac{a_{mn-1}}{a_{mn}}\alpha_{n-1}\right)$, obtemos uma solução não trivial $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ do sistema (4.2) proposto. ■

Exemplo 4.1 Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases} \quad (4.6)$$

Temos que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ é igual a 0, pois a primeira linha é múltipla da terceira linha. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & -38 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, que é a matriz anterior com a terceira coluna substituída pelos termos independentes do sistema linear, também é igual a zero pelo mesmo motivo da matriz anterior. Facilmente verificamos que as outras matrizes também têm determinantes iguais à zero. Então, pela regra de Cramer, temos que o sistema admite infinitas soluções. Nesse caso, umas das equações deve ser combinação linear das outras equações. De fato, a primeira equação é a combinação linear das segunda e terceira equações, pois se multiplicarmos a segunda equação por 0 e a terceira equação por 2 e somando as novas equações, obteremos a primeira equação. Podemos então descartar a primeira equação e o novo sistema $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$ terá as mesmas soluções do sistema inicial (4.6). As soluções do novo sistema linear estão associadas as soluções do sistema linear homogêneo associado

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Somando as duas equações obtemos a equação $4x - z = 0$. Daí, temos que $z = 4x$ e, conseqüentemente, $y = \frac{-13x}{2}$. Portanto, o sistema (4.7) terá como solução o subespaço vetorial $\left\{ \left(\lambda, \frac{-13\lambda}{2}, 4\lambda \right); \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Basta agora tomar uma solução particular do sistema (4.6). Podemos tomar uma solução particular facilmente fazendo $x = 1$. Teremos então que o sistema se resumirá a $\begin{cases} -2y - 4z = -41 \\ 2y + 3z = -4 \end{cases}$. Em seguida, somando as duas equações, obtemos $z = 45$ e $y = -\frac{139}{2}$. Assim, teremos como solução particular do sistema linear (4.6) o vetor $\left(1, -\frac{139}{2}, 45 \right)$. Como a solução do sistema (4.7) é uma variedade afim caracterizada pelo subespaço vetorial $\left\{ \left(\lambda, \frac{-13\lambda}{2}, 4\lambda \right); \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ transladado do vetor $\left(1, -\frac{139}{2}, 45 \right)$, então a solução do sistema será dado por $\left\{ \left(\lambda + 1, \frac{-13\lambda - 139}{2}, 4\lambda + 45 \right); \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Capítulo 5

Reta Tangente a um Gráfico

Nesse capítulo iremos discutir um pouco sobre o problema da reta tangente a um gráfico de uma função em um determinado ponto. Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $p \in Dm(f)$ é a derivada de f no ponto p . Então, inicialmente, iremos definir a derivada de uma função f em um ponto p e, em seguida, iremos analisar a reta tangente ao gráfico de f no ponto p usando variedades afins.

Definição 5.1 Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \quad (5.1)$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \quad (5.2)$$

Se f admite derivada em p , então diremos que f é derivável ou diferenciável em p .

Consideremos agora o problema de definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$; assim a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser seu coeficiente angular. Consideremos, então, a reta s_x que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$, como mostra a figura 5.1.

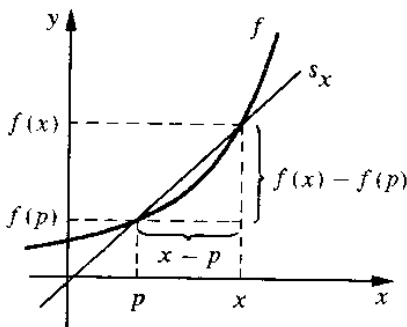


Figura 5.1 Coeficiente angular da reta s_x

O coeficiente angular de s_x será dado por:

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \quad (5.3)$$

Quando x tende a p , o coeficiente angular de s_x tende a $f'(p)$.

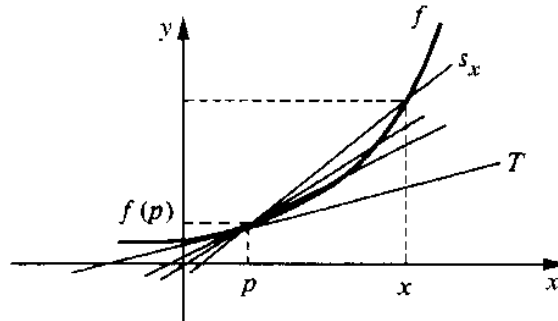


Figura 5.2 A reta s_x tendendo a reta T .

Observe na figura 5.2 que à medida que x vai se aproximando de p , a reta s_x vai se aproximando da posição da reta T de equação:

$$y - f(p) = f'(p) \cdot (x - p). \quad (5.4)$$

A reta T é da forma $y = mx + n$, em que $m = f'(p)$ e $n \in \mathbb{R}$. Obviamente teremos que T é uma variedade afim caracterizada pelo subespaço vetorial $\{(x, f'(p)x); x \in \mathbb{R}\}$ transladado do vetor $(0, n)$. Como o vetor $(p, f(p))$ pertence a variedade, então teremos que $f(p) = f'(p)p + n$. Daí temos que $n = f(p) - f'(p)p$. Logo temos que o subespaço $\{(x, f'(p)x); x \in \mathbb{R}\}$ será transladado do vetor $(0, f(p) - f'(p)p)$. Portanto, a T é a variedade afim dada por $\{(x, f'(p)x) + (0, f(p) - f'(p)p); x \in \mathbb{R}\}$.

De fato, teremos que os vetores da variedade afim T serão da forma:

$$(x, y) = (x, f'(p)x + f(p) - f'(p)p); x \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Observe que $y = f'(p)x + f(p) - f'(p)p = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$, que resulta na identidade (5.4). Outra observação importante é que, por T ser variedade afim, podemos transladar o subespaço vetorial $\{(x, f'(p)x); x \in \mathbb{R}\}$ de qualquer vetor da variedade, então T pode ser dado por $\{(x, f'(p)x) + (p, f(p)); x \in \mathbb{R}\}$, pois o vetor $(p, f(p))$ pertence a variedade. Dessa forma, temos que os vetores da variedade afim T serão da forma:

$$(x, y) = (x + p, f'(p)x + f(p)); x \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Veja que $y = f(x + p)$, então para obtermos $f(x)$ bastaria fazer $x + p = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Substituindo x em (5.6) teremos $y = f'(p)(\alpha - p) + f(p)$. Portanto, a identidade (5.6) seria dada por $(x, y) = (\alpha, f'(p)(\alpha - p) + f(p)); \alpha \in \mathbb{R}$, que resulta novamente na equação da reta T .

Exemplo 5.1 Seja a função $f(x) = x^3 + x$. A reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1 é a variedade afim dada por $V = \{(x, f'(1)x + f(1) - f'(1)); x \in \mathbb{R}\}$. Assim, como $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$, segue que $V = \{(x, 4x - 2); x \in \mathbb{R}\}$. Obviamente, temos que $y = 4x - 2$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Se quisermos que a reta T seja um subespaço basta fazermos $n = 0$, pois T deverá conter a origem já que é subespaço vetorial. Assim, no caso em que T é subespaço, devemos ter $f(p) - f'(p)p = 0$, ou seja, $f'(p) = \frac{f(p)}{p}$. No caso em que $p = 0$, devemos ter $f(p) = 0$. Caso contrário, $f'(p)$ não existirá e f não será contínua no conjunto dos reais.

Capítulo 6

EDO's Lineares de Segunda Ordem

Nesse capítulo iremos analisar as soluções de equações diferenciais ordinárias (EDO's) lineares de segunda ordem não homogêneas como variedades afins. Iremos considerar as EDO's lineares de segunda ordem da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \forall x \in I. \quad (6.1)$$

Em que as funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são contínuas no intervalo $I = (a, b)$ (inclui-se os casos $a = -\infty$ e $b = +\infty$). As funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ podem até não serem contínuas em determinados pontos, mas nesses casos devemos ter alguns cuidados. Em geral, nas situações físicas que originam tais equações, as funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são funções de variável real e iremos tratá-las como funções reais.

Em geral as EDO's lineares de segunda ordem aparecem sob a forma:

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y = F(x). \quad (6.2)$$

Nos intervalos I em que $A(x) \neq 0$ a equação (6.2) se reduz a equação (6.1) através da divisão membro a membro por $A(x)$. Temos então $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$, $q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$ e $f(x) = \frac{F(x)}{A(x)}$. Os pontos em que $A(x) = 0$ são singularidades da equação. Mas iremos tratar de equações sem pontos de singularidade. Quanto às soluções, no caso das EDO's de primeira ordem bastava uma condição inicial para selecionar uma solução específica, dentre várias soluções possíveis. Para as EDO's de segunda ordem são necessárias duas condições. Quando estas condições fixam os valores da incógnita y e sua derivada no mesmo ponto, teremos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}. \quad (6.3)$$

Em que x_0 é um ponto qualquer de I e y_0 e y'_0 são números reais arbitrários. Para cada situação teremos uma solução única para a EDO.

Teorema 6.1 (Existência e Unicidade) Considere o problema de valor inicial (6.3), em que $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são contínuas no intervalo aberto I . Existe uma única função $y = \phi(x)$, a qual é solução deste problema no intervalo I .

Aqui não existe, em geral, um método construtivo capaz de fornecer uma expressão para a solução do problema de valor inicial. Portanto, a demonstração do Teorema 6.1 exige a utilização de argumentos gerais, que independem do conhecimento da solução em termos de funções elementares. Uma possibilidade consiste em reduzir a equação de segunda ordem a um sistema de duas equações de primeira ordem. Mas aqui essa demonstração foge do objetivo do presente trabalho. Para prosseguirmos com a discussão das EDO's lineares de segunda ordem, é conveniente introduzir o conceito de *operadores diferenciais* e reescrever a equação (6.1) na forma:

$$\mathcal{L}[y] = f(x), \quad (6.4)$$

em que \mathcal{L} denota o operador diferencial definido por:

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + q(x), \quad (6.5)$$

para qualquer função $\phi(x)$ com duas derivadas contínuas no intervalo I .

Começaremos pela equação homogênea

$$\mathcal{L}[y] = \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0. \quad (6.6)$$

Relativamente a EDO não homogênea (6.4), a equação (6.6) é denominada EDO homogênea associada. Se soubermos resolver a equação homogênea associada, será possível resolver a equação não homogênea original. Uma propriedade da equação (6.6) é que o conjunto de suas soluções constitui um espaço vetorial sobre o conjunto dos reais. Isto é, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (6.6), então a combinação linear

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (6.7)$$

também será solução, para quaisquer números reais c_1 e c_2 . É notável que a dimensão do espaço vetorial é finita (veremos a seguir), o que reduz o grau de dificuldade para as soluções da equação (6.6).

Teorema 6.2 O conjunto solução da equação $\mathcal{L}[y] = 0$ constitui um espaço vetorial de dimensão dois sobre o conjunto dos reais.

Veremos inicialmente alguns conceitos importantes para a demonstração.

Definição 6.1 Dizemos que duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação (6.6) no intervalo I são *linearmente dependentes* se existirem constantes c_1 e c_2 , não simultaneamente nulas, tais que:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \forall x \in I. \quad (6.8)$$

Caso contrário, se a equação (6.8) só for válida para todo $x \in I$ se as constantes c_1 e c_2 forem nulas, dizemos que as soluções são *linearmente independentes*.

Definição 6.2 Definimos o *Wronskiano* $W(y_1, y_2)(x)$ das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ por:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x). \quad (6.9)$$

Uma condição necessária e suficiente para que duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação (6.6) sejam linearmente dependentes é que o Wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ se anule em algum $x_0 \in I$. De fato, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente dependentes da equação (6.6), então existem constantes c_1 e c_2 , não simultaneamente nulas, que verificam a identidade (6.8). Diferenciando a identidade (6.8) obtemos:

$$y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0, \forall x \in I, \quad (6.10)$$

que justamente com a equação (6.8), fornece o sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

satisfeito pelas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em $x \in I$, para certos valores, não ambos nulos, de c_1 e c_2 . É um resultado fundamental de álgebra linear que o sistema linear homogêneo (6.11) admite soluções não triviais, ou seja, soluções com constantes c_1 e c_2 não simultaneamente nulas, se e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for nulo. Por outro lado, se o

Wronskiano de duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se anular em algum $x_0 \in I$, então existem duas constantes c_1 e c_2 , não simultaneamente nulas, tais que:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Para esta escolha de c_1 e c_2 , definimos a função $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, que é uma solução da equação (6.6). Além disto, esta solução satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 0$. Porém, pelo teorema da existência e unicidade, Teorema 6.1, se uma solução da equação homogênea (6.6) satisfaz estas condições, então esta solução é identicamente nula. Isto implica que as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes.

Teorema 6.3 Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de $\mathcal{L}[y] = 0$ em I , então o Wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ é dado por:

$$W(y_1, y_2)(x) = C \cdot \exp \left\{ \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi \right\}. \quad (6.13)$$

Em que C é uma constante que depende das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, mas não da variável x .

Demonstração: Diferenciando a identidade $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$, teremos $\frac{dW}{dx} = y_1'y_2'' + y_1y_2''' - y_2'y_1'' - y_2y_1''' = y_1y_2''' - y_2y_1'''$. Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (6.6), então teremos que:

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad (6.14)$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \quad (6.15)$$

Multiplicando (6.14) por $-y_2$ e (6.15) por y_1 e fazendo-se a adição das duas equações, segue-se que:

$$y_1y_2''' - y_2y_1''' + p(x)[y_1y_2' - y_2y_1'] = 0. \quad (6.16)$$

Portanto, $\frac{dW}{dx} + p(x)W = 0$ e a EDO de primeira ordem tem como solução a identidade (6.13). ■

Concluimos, em consequência do Teorema 6.3, que ou $W(y_1, y_2)(x) = 0$ em I (se $C = 0$) ou $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em I (se $C \neq 0$). Portanto, para discutirmos se duas soluções da

equação (6.6) são linearmente independentes, basta calcularmos seu Wronskiano em algum ponto de I .

Definição 6.3 Duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da EDO homogênea $\mathcal{L}[y] = 0$ constituem um *conjunto fundamental de soluções* se elas forem linearmente independentes.

Para verificarmos a existência de um conjunto fundamental de soluções tomemos um ponto $x_0 \in I$ e consideremos $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da EDO homogênea $\mathcal{L}[y] = 0$ satisfazendo as condições iniciais $y_1(x_0) = 1$, $y'_1(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$ e $y'_2(x_0) = 1$. A existência destas soluções é garantida pelo Teorema 6.1; além disto, o Wronskiano destas soluções em x_0 é dado por $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. As funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são, assim, linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração do Teorema 6.2: Já mostramos acima a existência de duas soluções linearmente independentes. Resta-nos mostrar que a dimensão do espaço de soluções da equação $\mathcal{L}[y] = 0$ é dois. Suponha então que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ constituam um conjunto fundamental de soluções da equação $\mathcal{L}[y] = 0$ e seja $\phi(x)$ uma solução qualquer desta equação. Devemos mostrar que $\phi(x)$ está incluída no conjunto de combinações lineares da forma $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, ou seja, que para alguma escolha das constantes c_1 e c_2 , a solução $\phi(x)$ é uma combinação do tipo acima. Seja $x_0 \in I$ e sejam y_0 e y'_0 os valores assumidos por $\phi(x)$ e sua derivada $\phi'(x)$ em x_0 :

$$y_0 = \phi(x_0) \text{ e } y'_0 = \phi'(x_0). \quad (6.17)$$

A função $\phi(x)$ é, então, solução do problema de valor inicial acima. Por outro lado, como $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, já que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes, o sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

tem solução única e, portanto, é possível escolher c_1 e c_2 de forma que a identidade $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ seja uma solução do mesmo problema de valor inicial.

Usaremos o Teorema 6.1 para concluir que as soluções $\phi(x)$ e $y(x)$ são a mesma função no intervalo I . Portanto, para uma escolha adequada de c_1 e c_2 teremos:

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (6.19)$$

A função $\phi(x)$ é uma solução arbitrária da EDO homogênea e, com isso, temos que a dimensão do espaço de soluções é dois. ■

Consideraremos agora a EDO linear de segunda ordem não homogênea

$$\mathcal{L}[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \forall x \in I, \quad (6.20)$$

em que I é um intervalo aberto e as funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são contínuas em I . Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções quaisquer de (6.20), então $\mathcal{L}[y_1 - y_2] = \mathcal{L}[y_1](x) - \mathcal{L}[y_2](x) = f(x) - f(x) = 0$, ou seja, a diferença de duas soluções da equação não homogênea (6.20) é solução da equação homogênea associada $\mathcal{L}[y] = 0$. Isto nos permite escrever a solução geral da equação não homogênea na forma:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x), \quad (6.21)$$

em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ constituem um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e $y_p(x)$ é uma solução particular de (6.20).

Concluimos, então, que o conjunto solução de uma EDO linear de segunda ordem é uma variedade afim, pois a solução da EDO pode ser caracterizada por um espaço vetorial (que é um subespaço vetorial) transladado de um vetor que pertence a variedade afim.

Exemplo 6.1 Suponha que uma mola flexível esteja suspensa verticalmente em um suporte rígido e que então uma massa m seja conectada à sua extremidade livre. A distensão ou alongação da mola naturalmente dependerá da massa; massas com pesos diferentes distenderão a mola diferentemente. Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora F oposta à direção do alongamento e proporcional à distensão s . De forma simples, $F = ks$, em que k é constante de proporcionalidade conhecida como constante da mola. A mola é essencialmente caracterizada pelo número k . Por exemplo, se uma massa de 10 libras alonga em $\frac{1}{2}$ pé uma mola, então teremos que $k = 20$ lb/pés. Depois que uma massa m é conectada a uma mola, provoca uma distensão s na mola e atinge sua posição de equilíbrio no qual seu peso w é igual à força restauradora ks . Lembrando que o peso é definido por $w = mg$, em que $g = 9,8$ m/s² ou $g = 32$ pés/s², a condição de equilíbrio será $mg = ks$ ou, simplesmente, $mg - ks = 0$. Se a massa for deslocada por uma quantidade x de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola será então $k(x + s)$, como mostra a figura 6.1.

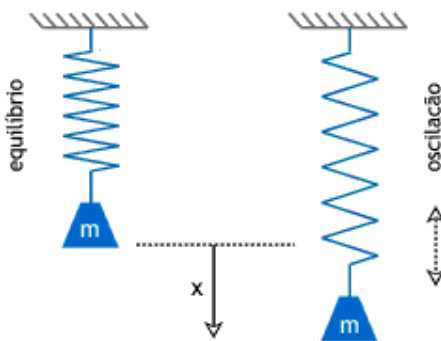


Figura 6.1 Sistema deslocamento após equilíbrio.

Supondo que não haja forças de retardamento sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem a ação de outras forças externas, podemos igualar F com a força resultante do peso e da força restauradora. Portanto, teremos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + s) + mg = -kx \underbrace{-ks + mg}_{\text{zero}} = -kx. \quad (6.22)$$

O sinal negativo indica que a força restauradora da mola age no sentido oposto ao do movimento.

A equação (6.22) descreve um movimento harmônico simples ou movimento livre não amortecido. O conceito de movimento harmônico simples é um tanto quanto irreal, uma vez que é descrito pela equação (6.22) sob a hipótese de que nenhuma força de retardamento age sobre a massa em movimento. A não ser que a massa seja suspensa em um vácuo perfeito, haverá pelo menos uma força contrária ao movimento em decorrência do meio ambiente. No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a uma potência da velocidade instantânea. Em particular, vamos supor que essa força é dada por um múltiplo constante de $\frac{dx}{dt}$. Quando não houver outras forças externas agindo sobre o sistema, segue da segunda lei de Newton que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt}, \quad (6.23)$$

em que β é positivo e chamado constante de amortecimento e o sinal negativo é uma consequência do fato de que a força amortecedora age no sentido oposto do movimento. Dividindo-se a equação (6.23) por m , obtemos a equação diferencial homogênea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\beta}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right) x = 0. \quad (6.24)$$

Fazendo $\frac{\beta}{m} = 2\lambda$ e $\frac{k}{m} = \omega^2$, teremos a EDO linear homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \quad (6.24)$$

O símbolo 2λ foi usado somente para facilitar a análise das raízes da equação auxiliar $y^2 + 2\lambda y + \omega^2 = 0$. Assim teremos como raízes $y = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$. Podemos distinguir três casos possíveis, dependendo do sinal de $\lambda^2 - \omega^2$.

- **Caso I:** (superamortecido) A solução da equação (6.24) para o caso $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ será da forma $x(t) = c_1 \cdot e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t} + c_2 \cdot e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t}$.
- **Caso II:** (amortecimento crítico) A solução da equação (6.24) para o caso $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ será da forma $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t)$.
- **Caso III:** (subamortecimento) A solução da equação (6.24) para o caso $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ será da forma $x(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t) \right)$.

Podemos observar que as soluções em todos os três casos são subespaços vetoriais, que também são variedades afins.

Exemplo 6.2 Considere a situação do exemplo 6.1, agora com uma força externa $f(t)$ agindo sobre a massa. Incluindo $f(t)$ na equação (6.23) resulta na equação:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + f(t). \quad (6.25)$$

Dividindo a equação (6.25) por m e fazendo $\frac{\beta}{m} = 2\lambda$, $\frac{k}{m} = \omega^2$ e $\frac{f(t)}{m} = F(t)$ teremos a EDO linear não homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t). \quad (6.26)$$

As soluções da equação (6.26) estão associadas às soluções da equação homogênea associada (6.24). Dependendo de $F(t)$ e dos valores iniciais do sistema devemos encontrar uma solução particular para a equação (6.26) e a solução geral será dada pela solução da equação homogênea associada mais a solução particular. Assim a solução será uma variedade afim,

pois podemos caracterizá-la como um subespaço vetorial transladado de um vetor da variedade afim.

Exemplo 6.3 Seja um sistema de massa mola vibrante, como o exemplo 6.2, que consiste em uma massa ($m = 1/5$ kg) presa a uma mola ($k = 2$ lb/pés). A massa é solta do repouso $\frac{1}{2}$ pé abaixo da posição de equilíbrio. O movimento é amortecido ($\beta = 1,2$) e está sendo forçado por uma força externa periódica ($f(t) = 5\cos(4t)$) que começa em $t = 0$. Assim teremos a equação $\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1,2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos(4t)$, com condições iniciais $x(0) = \frac{1}{2}$ e $x'(0) = 0$. Multiplicando a equação dada por 5, obtemos a equação $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 25\cos(4t)$. Temos que resolver inicialmente a equação homogênea associada $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$, que tem $y^2 + 6y + 10 = 0$ como equação auxiliar. O discriminante da equação auxiliar é negativo e, portanto, teremos um sistema subamortecido que terá como solução, de acordo com o caso III, a combinação linear dada por $e^{-3t}(c_1\cos t + c_2\sin t)$ que é um subespaço vetorial. Uma solução particular da EDO não homogênea é $-\frac{25}{102}\cos(4t) + \frac{50}{51}\sin(4t)$, então teremos que a solução geral será dada pelo subespaço vetorial $e^{-3t}(c_1\cos t + c_2\sin t)$ transladado do vetor $-\frac{25}{102}\cos(4t) + \frac{50}{51}\sin(4t)$, ou seja, $x(t) = e^{-3t}(c_1\cos t + c_2\sin t) - \frac{25}{102}\cos(4t) + \frac{50}{51}\sin(4t)$ que é uma variedade afim. Aplicando as condições iniciais encontramos os valores de c_1 e c_2 , e assim, $x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos(4t) + \frac{50}{51}\sin(4t)$.

Exemplo 6.4 Considere um circuito elétrico RLC em série sob uma voltagem senoidal $V(t) = E\sin(\omega t)$, como mostra figura 6.2.

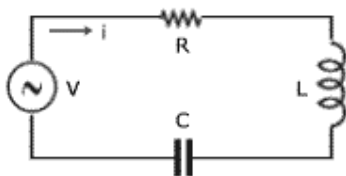


Figura 6.2 Circuito elétrico RLC em série.

Iremos descrever o estado do sistema em termos da carga q no capacitor como função do tempo, em vez de em termos da corrente i . Como $i = \frac{dq}{dt}$, a queda de voltagem através do

capacitor é $\left(\frac{1}{C}\right)q$, a queda de voltagem sobre o indutor é $L\frac{d^2q}{dt^2}$ e a queda de voltagem sobre o resistor é $R\frac{dq}{dt}$. Assim, pela segunda lei de Kirchhoff, teremos a equação:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E\text{sen}(\omega t). \quad (6.27)$$

O circuito acima se assemelha a um sistema massa mola com uma força externa. As soluções da equação (6.27) estão associadas às soluções da equação homogênea associada $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, que tem a equação auxiliar $Ly^2 + Ry + \frac{1}{C} = 0$ cujas soluções são dadas por $y = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$. De acordo com as possibilidades da expressão $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$ podemos ter o circuito acima analisado como um sistema superamortecido ou com amortecimento crítico ou com subamortecimento, como mostra o exemplo 6.1. Assim, dependendo do caso, a equação homogênea terá como solução um dos subespaços vetoriais mostrados no exemplo 6.1, com as devidas substituições. Por exemplo, se o circuito tiver um amortecimento crítico, a solução da equação homogênea será da forma $e^{-(R/2L)t} \cdot (c_1 + c_2t)$. Resta-nos agora verificar uma solução particular para a equação (6.27). Se a resistência não for nula, ou seja, $R \neq 0$, teremos a solução (q_p) particular da forma:

$$q_p = d_1\text{sen}(\omega t) + d_2\text{cos}(\omega t). \quad (6.28)$$

Substituindo (6.28) em (6.27) iremos obter os valores para d_1 e d_2 . Assim obtemos:

$$d_1 = -\frac{E[\omega L - (1/\omega C)]}{\omega\{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2\}}$$

$$d_2 = -\frac{ER}{\omega\{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2\}}$$

Introduzindo as abreviações $\gamma = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ e $Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$, a solução particular pode ser escrita como $q_p = -\frac{E\gamma}{\omega Z^2}\text{sen}(\omega t) - \frac{ER}{\omega Z^2}\text{cos}(\omega t)$, ou ainda mais simplesmente, $q_p = -\frac{E}{\omega Z}\text{cos}(\omega t - \alpha)$, em que $\text{sen}\alpha = \gamma/Z$ e $\text{cos}\alpha = R/Z$.

Portanto, a solução da EDO descrita em (6.27) é uma variedade afim caracterizada por um subespaço vetorial transladado de um vetor da variedade afim.

Capítulo 7

Conclusão

Nesse trabalho mostramos alguns conceitos de variedades afins vistos em Álgebra Linear como a caracterização de uma variedade afim como um subespaço vetorial transladado de um vetor qualquer pertencente à variedade afim.

Associamos essa característica das variedades afins com a representação geométrica de situações matemáticas através de exemplos como o posicionamento relativo de variedades afins, as soluções de sistemas de equações lineares, a reta tangente a um gráfico de uma função e as soluções de EDO lineares homogêneas e não homogêneas de segunda ordem.

Verificamos que quaisquer conjuntos solução de problemas matemáticos ou situações matemáticas, que possam ser caracterizados como subespaços vetoriais transladados de qualquer vetor pertencente ao conjunto solução, podem ser associados a variedades afins.

Por fim, com o conhecimento dessa ferramenta, os alunos podem compreender melhor o comportamento de tais conjuntos soluções e fazer análises mais detalhadas dos problemas estudados. Desse modo, podemos buscar e aprofundar ideias que envolvam essa ferramenta no intuito de analisar e ter melhor compreensão de situações problema que possam ser representados geometricamente.

Referências Bibliográficas

- [1] BUENO, H. P. Álgebra Linear - um segundo curso. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [2] BUTKOV, E. Física Matemática. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1988.
- [3] GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.
- [4] KREIDER, D. L.; KULLER, R. G.; OSTBERG, D. R. Equações Diferenciais. São Paulo: Edgard Blücher, 1972.
- [5] LIMA, E. L. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matemática universitária)
- [6] MARTIN, P. A.; SINGER, M. L. Tópicos de Álgebra Linear: Espaços Afins. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística – USP. 2007. (Apostila)
- [7] OLIVEIRA, E. C. de; TYGEL, M. Métodos Matemáticos para Engenharia. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção textos universitários)
- [8] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra Linear 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2004.
- [9] TEIXEIRA, R. C. Álgebra Linear. Exercícios e soluções. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012. (Coleção matemática universitária)