UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Geimeson Mendes de Almeida

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: Demonstrando Resultados no Ensino Médio

RECIFE
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Geimeson Mendes de Almeida

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: Demonstrando Resultados no Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bárbara Costa da Silva

RECIFE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A447p Almeida, Geimeson Mendes de

Princípio da Indução Matemática: Demonstrando Resultados no Ensino Médio / Geimeson Mendes de Almeida. - 2019.

79 f.

Orientadora: Professora Doutora Barbara Costa da Silva.

Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2019.

1. Princípio de Indução Matemática. 2. Ensino Médio. 3. Axiomas de Peano. 4. Sequência Didática. I. Silva, Professora Doutora Barbara Costa da, orient. II. Título

CDD 510

Geimeson Mendes de Almeida

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA: Demonstrando Resultados no Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ /____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva (Orientador) – PROFMAT/UFRPE

____

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – UFPE

____

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva – PROFMAT/UFRPE

DECLARAÇÃO

Eu, Geimeson Mendes de Almeida declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título Princípio da Indução Matemática: Demonstrando Resultados no Ensino Médio, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador Dra. Bárbara Costa da Silva, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 14 de Setembro de 2020.

Assinatura: Geimeson Mendes de Almeida

Dedico a Deus

Agradecimentos

Agradeço a Deus que me deu sabedoria e inteligência para ingressar no mestrado, para permanecer nele e para concluí-lo. Tudo que tenho, tudo o que sou e o que vier a ser vem de ti Senhor. A Deus seja a honra e a glória pela minha vitória, pois sem Ele eu não teria conseguido.

Aos meus pais, Sr. Evaldo Alves de Almeida e Sra. Josineide Pereira Mendes de Almeida que me ensinaram o caminho em que eu devo andar. Por isso sou muito grato a eles. Essa vitória também é de vocês.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática que durante o período em que ali estive me ensinaram a compreender melhor a matemática, essa ciência tão maravilhosa.

À minha orientadora, professora Bárbara Costa da Silva, que desempenhou um papel fundamental na elaboração desse projeto. Agradeço por sua paciência, disponibilidade em me atender, por seu apoio incondicional e, claro, por ter aceitado ser a minha orientadora, pois com certeza não haveria outra pessoa que fizesse melhor.

Por fim, mas não menos importante, quero aqui deixar o meu agradecimento à minha esposa, Sra. Ana Nery Gomes do Nascimento Almeida. Quero agradecer por sua paciência, por seu amor dedicado a mim, pelo carinho, pelo respeito e pelo apoio que tem me dado desde o dia em que nos conhecemos até hoje. Agradeço por ter suportado, junto comigo, os momentos difíceis pelos quais passamos e por ter me dado dois filhos maravilhosos, Daniel e Isaque. Muito obrigado!

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Resumo

Ao fazer um levantamento sobre a abordagem dada à indução matemática em algumas coleções de livros de matemática do ensino médio, fomos surpreendidos com o fato de que apenas uma dessas coleções apresentava o Princípio da Indução Matemática. Isso já nos mostra o desafio que o professor terá que enfrentar se optar por desenvolver tal tema ao longo do ensino médio. O fato da indução matemática não ser tratada na maioria dos livros do ensino médio é reforçado, pois os documentos oficiais que regem a educação no país não mencionam em seu bojo o tema indução matemática.

Diante desse cenário, e pensando naqueles educadores que decidiram inserir nas suas aulas esse tema tão importante para o aperfeiçoamento dedutivo de seus alunos, idealizamos essa pesquisa com a intenção de ajudá-los na propagação da indução matemática.

Esta obra divide-se basicamente em quatro partes, a saber, na primeira parte é feita uma abordagem teórica referente ao Princípio de Indução Matemática considerando, para tanto, a questão histórica relacionada ao tema, os axiomas de Peano e o princípio de indução em sua primeira e segunda forma; na segunda, apresentamos e demonstramos os resultados, encontrados nos livros do ensino médio, que podem ser provados usando indução; na terceira, vamos propôr uma sequência didática com a finalidade de orientar o professor no desenvolvimento do referido tema; finalmente, na quarta parte, demonstramos uma variedade de problemas usando indução, com isso o professor poderá montar outras sequências didáticas para as suas aulas.

Este trabalho, por conseguinte, consiste de uma abordagem metodológica para a aplicação do Princípio de Indução Matemática na educação básica.

Palavras-chave: Princípio de Indução Matemática, ensino médio, axiomas de Peano, sequência didática.

Abstract

Of all collections of high school mathematics that we researched for the accomplishment of this work, only one presented the Principle of Mathematical Induction. This alreadyshows us the challenge wich the teacher will have to face if he chooses to develop such a theme throughout the high school. It is also worthy remembering that the official documents governing education in the country do not mention Mathematical Induction. Faced with this scenario and thinking about those educators who decided to insert in their classes that important theme for the deductive improvement of their students, we idealized this research with the intention of helping in the propagation of Mathematical Induction. This work basically is divided into three parts, namely, in the first part we will make a theoretical approach regarding the Principle of Mathematical Induction considering, therefore, the historical question related tyo the theme, Peano axioms and the recurrences; in the second part, we will present results, found in high school textbooks, that can be proved using Math Induction; Finally, in the third part, we will propose a didactic sequencethat guides the teacher in the development of this topic in high school. This work, therefore, consists of a methodological approach for the application of the Principle of Mathematical Induction in basic education.

Keywords: Principle of Mathematical Induction, high school, Peano axioms, Recurrences, didactic sequence.

Sumário

Introdução

Segundo o (1) Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa, o termo "indução"tem origem no latin *inductione* e significa: (1) ato ou efeito de induzir; (2) operação de estabelecer uma proposição geral com base no conhecimento de dados singulares. O mesmo autor ainda define induzir como concluir, deduzir.

Entendemos que a indução é uma técnica de demonstração dedutiva, ou seja, uma maneira de demonstrar um conjunto de hipóteses relativas ao conjunto dos números naturais.

Embora o Princípio da Indução Matemática não faça parte do programa do ensino médio proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (2), tal documento salienta o quanto é importante que os alunos conheçam um sistema dedutivo, analisem os significados dos postulados, dos teoremas e compreendam o valor das demonstrações. O documento supracitado informa que:

> "Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.(...)Afirmar que algo é 'verdade' em matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente."

Sendo assim, note que os PCNEM apontam para a importância que deve ser dada à validação dos conhecimentos matemáticos por meio do pensamento lógico dedutivo.

Um dos desafios que os professores dos diversos níveis de ensino têm encarado é estabelecer uma conexão com os conteúdos vistos nas disciplinas da licenciatura em matemática com os conteúdos que fazem parte da estrutura curricular do ensino básico. No presente trabalho, trataremos do Princípio da Indução Matemática que, como já foi dito acima, embora não faça parte do programa do ensino médio, tem aplicações diretas em temas matemáticos estudados nesse nível de ensino.

Inicialmente, no capítulo 1, vamos abordar alguns aspectos históricos da Indução Matemática, apresentar os axiomas de Peano como sendo uma caracterização para os números naturais e introduzir o Princípio de Indução em sua primeira e segunda forma.

Nos capítulos 2 faremos as demonstrações de alguns dos resultados vistos no 1º ano, no 2º ano e no 3º ano do ensino médio, resultados esses que usam o Princípio de indução Matemática para serem concluído.

No capítulo 3, apresentaremos uma sequência didática, onde o aluno a cada demonstração mobilize mais conceitos matemáticos, ou seja, à medida que o aluno passa de um problema para outro ser-lhe-á exigido mais conhecimento matemático. Essa sequência de atividades poderá ser alterada, pelo professor, baseando-se no apêndice desta obra, pois lá está uma série de resultados que usam indução matemática em suas demonstrações.

1 Fundamentação teórica

1.1 Notas Históricas

A indução matemática sem sombra de dúvida é um tema dentro da matemática pura que desempenha um papel importantíssimo. É um método de demonstração matemática utilizado para provar a validade de um número infinito de proposições.

É bom neste momento esclarecermos a diferença que existe entre a Indução Matemática e a indução que chamamos de empírica. Enquanto a indução matemática refere-se às sentenças abertas sobre números naturais, que é o objeto do nosso estudo, a indução empírica está relacionada às ciências naturais. Então, na indução empírica o processo de validação é que após se considerar um número suficiente de casos particulares, necessariamente finito, conclui-se uma verdade geral, até que se tenha uma prova em contrário. Em matemática isso não existe, ou seja, quero dizer que a matemática é uma ciência exata. Ela não aceita algo como verdade "até prova em contrário". A demonstração por indução vai na contra-mão da indução empírica, isto é, ela vai se ocupar de determinar se uma sentença aberta referentes a números naturais é, ou não, sempre verdadeira.

O princípio da indução já era utilizado por matemáticos desde os tempos de Euclides, mas sem que eles lhes dessem esse nome. Durante séculos o raciocínio indutivo foi usado sem um nome característico.

Foi o matemático John Wallis (1616 - 1703), em sua obra *Arithmetica Infinitorun*, publicada em 1656, quem introduziu o termo "indução", referindo-se a uma forma de demonstrar teoremas. Para Wallis essa "indução" não era a indução matemática, a que tratamos neste trabalho, e sim, a indução empírica.

O termo "indução matemática" surge com o matemático e lógico britânico Augustus de Morgan (1806 - 1871). Natural da cidade de Madura, Índia, Augustus de Morgan iniciou seus estudos no Trinity College, em Cambridge e em 1828 tornou-se professor de matemática na recém-criada universidade em Londres onde lecionou até o ano de 1866. Formulou as leis que levam o seu nome, leis de De Morgan, e foi o primeiro a introduzir a ideia de indução matemática no sentido de indicar raciocínio para passar de n a $n+1$ e a torná-la rigorosa.

Contudo a indução matemática ganha destaque quando no ano de 1889 é publicado na *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (Novo Método de Exposição dos Princípios da Aritmética) "os axiomas de Peano". Giuseppe Peano (1858 - 1932) foi um matemático italiano que definiu os números naturais em termos de conjuntos. Peano publicou quatro axiomas que caracterizavam todos os números naturais. Tais axiomas serão apresentados na próxima seção.

1.2 Os Axiomas de Peano

Nesta seção apresentaremos os axiomas de Peano. Giuseppe Peano foi um matemático do século XIX que, estudando os números naturais, percebeu que esses números gozavam de propriedades específicas. Essas propriedades fundamentais que caracterizam os números naturais recebem o nome de "Axiomas de Peano" e são:

1. Todo número natural tem um único sucessor que é um número natural.

2. Números naturais distintos têm sucessores distintos.

3. Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um", que não é sucessor de nenhum outro número natural.

4. Se um conjunto de números naturais possui o número 1 e possui também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto possui todos os números naturais.

Podemos escrever os axiomas de Peano em linguagem matemática da seguinte maneira:

1.a. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ associa o número natural $s(n) \in \mathbb{N}$. A função s é chamada função sucessor e o número $s(n) := n + 1$ é denominado o sucessor de n.

2.b. A função s é injetora, ou seja, se $a \neq b$ então $s(a) \neq s(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$.

3.c. Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = 1$, isto é, $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, a imagem da função s é o conjunto $\mathbb{N} - \{1\}$.

4.d. Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é um conjunto tal que $1 \in A$ e $s(A) \subseteq A$ (ou seja, se $k \in A$, então $s(k) \in A$), então $A = \mathbb{N}$.

Esses axiomas supracitados constituem os pilares da teoria de construção do conjunto dos números naturais (3).

Queremos destacar o quarto axioma, conhecido como Axioma da Indução Matemática. De maneira intuitiva ele traduz o fato de que todo número natural n pode ser escrito partindo-se do número 1 e tomando o seu sucessor $s(1)$, em seguida o sucessor de $s(1)$, $s(s(1))$, e assim por diante, com um número finito de iterações.

O axioma da indução matemática é usado como base para um método de demonstração de resultados relativos aos números naturais, a saber, o método de indução ou recorrências.

1.3 Primeiro Princípio de Indução Matemática

Definiremos proposição em $\mathbb{N}$ ou sentença aberta, e denotaremos por $p(n)$, toda afirmação que pode assumir valor lógico verdadeiro ou falso quando substituímos n por um número natural.

Vamos a seguir enunciar um teorema e prová-lo com o uso do quarto axioma de Peano conhecido pelo nome de Primeiro Princípio de Indução Matemática (1^o P. I. M.), tal resultado constitui uma das mais eficientes técnicas de demonstração: a demonstração por indução.

Teorema 1.1. *(1^o P.I.M.) Seja $p(n)$ uma sentença aberta relativa aos números naturais. suponha que:*

i) para $n = 1$, $p(1)$ é verdadeira, e

ii) para $n = k$, se $p(k)$ é verdadeira, $k \in \mathbb{N}$, resulta que $p(k+1)$ também é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todos os números naturais.

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto tal que $X = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ é verdadeira}\}$. Note que $1 \in X$, pois, pelo item (i), $p(1)$ é verdadeira. Do item (ii), conclui-se que o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X. Logo pelo axioma da indução, tem-se $X = \mathbb{N}$ e, portanto, $p(n)$ é verdadeira para todos os números naturais. $\square$

O item (i) do (1^o P.I.M.) é chamado de **passo/caso base** e o item (ii), **passo indutivo**.

O primeiro princípio de indução matemática proposto dessa maneira, mostra que para provar a validade de uma sentença aberta $p(n)$ é suficiente mostrar que ela é verdadeira para um valor inicial (base), ou seja, que p é verdadeira para $n = 1$ e, supondo que p é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$, implicar que $p(k+1)$ é verdadeira(passo indutivo), então a sentença $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para entender que esses dois passos são suficientes, pense no efeito dominó: imagine que você tem uma imensa fila de dominós todos em pé. Se você puder garantir que a primeira peça do dominó cairá e que sempre que uma peça do dominó cair a próxima peça vizinha também cairá, então você poderá garantir que todas as peças do dominó cairão.

Vejamos alguns exemplos de demonstrações que usam o primeiro princípio de indução matemática.

Exemplo 1.2. Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \forall\, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, n \in \mathbb{Z}, n > 0.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1.$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k), k \in \mathbb{Z}, k > 0$, seja verdadeira:

$$p(k) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

e provemos que decorre a validade de $p(k + 1)$, isto é:

$$p(k + 1) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + (2(k + 1) - 1) \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \forall\, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. □

Exemplo 1.3. Prove que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1(1 + 1)}{2} \Rightarrow \\ 1 &= \frac{1 \cdot 2}{2} = 1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k), k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$. □

Note através desses dois exemplos que o segredo, por assim dizer, de uma demonstração que usa o primeiro princípio de indução matemática está no fato de se encontrar uma maneira de relacionar aquilo que se deseja mostrar com o que assumimos como verdade, a hipótese de indução.

Se você, caro professor, conseguir levar seu aluno ao entendimento dessa relação, certamente ele compreenderá e realizará uma demonstração por indução.

1.4 Segundo Princípio de Indução Matemática

Em alguns problemas não conseguimos realizar uma demonstração por indução usando o primeiro princípio de indução matemática. Em problemas como esses faz-se necessário o uso do Segundo Princípio de Indução Matemática que é, em outras palavras, outra versão do primeiro princípio de indução.

Conhecido como indução forte, o segundo princípio de indução matemática é enunciado assim:

(2^o P.I.M.) Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto que tem a seguinte propriedade: Dado um número natural n, se A contém todos os números naturais k tais que $k < n$, então A também contém n. Tem-se assim, $A = \mathbb{N}$.

Como fizemos para o primeiro princípio de indução matemática, vamos enunciar o segundo princípio de indução matemática em termos de uma sentença aberta $p(n)$. Fica assim:

Teorema 1.4. *(2º P.I.M.) Seja $p(n)$ uma sentença aberta relativa aos números naturais e n_0 um número natural. Suponha que:*

i) $p(n_0)$ seja verdadeira;

ii) Dado $n \geqslant n_0$, se $p(k)$ é verdadeira para todo k pertencente ao intervalo $[n_0, n]$, então $p(n+1)$ é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geqslant n_0$.

Demonstração. Considere o seguinte conjunto $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto tal que $X = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n_0 + n - 1)$ é verdadeira$\}$. Note que $1 \in X$, pois, pelo item (i), $p(n_0 + 1 - 1) = p(n_0)$ é verdadeira. Do item (ii), conclui-se que se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Logo pelo axioma da indução, tem-se $X = \mathbb{N}$ e, portanto, $p(n_0 + n - 1)$ é verdadeira para todos os números naturais, ou seja, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geqslant n_0$. □

Vejamos um exemplo de problema onde não podemos usar o primeiro princípio de indução matemática para demonstrá-lo e, portanto, recorreremos ao segundo princípio.

Exemplo 1.5. Prove que para todo número inteiro $n \geqslant 2$, n é um número primo ou é produto de números primos.

Antes da demonstração usando o 2º P.I.M., vejamos porquê não podemos usar o 1º P.I.M.:

Seja $p(n)$: todo número inteiro $n \geqslant 2$ é primo ou é produto de números primos. Temos que $p(2)$ é verdadeira, pois 2 é primo. Admitindo como hipótese que $p(k)$: k é primo ou é produto de primos, $\forall\, k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 2$, vejamos o que ocorre com $p(k+1)$, onde $p(k+1)$: $k+1$ é primo ou é produto de primos.

a) se $k+1$ **é primo** nada temos que provar;

b) se $k+1$ **não é primo**, então $k+1$ é um número composto, ou seja, $k+1 = x \cdot y$, com $x, y \in \mathbb{N}$. Note que se $k+1 = x \cdot y$, então $1 < x < k+1$ e $1 < y < k+1$. Então $x \leqslant k$ e $y \leqslant k$. Contudo, não temos informações com respeito a números inteiros menores do que k. Daí, conclui-se que precisamos de uma hipótese que seja válida para inteiros menores do que k. Isso mostra que o 1º P.I.M. não pode ser aplicado na demonstração desse problema.

Vamos então demonstrar o problema usando o 2º P.I.M..

Demonstração. Seja $p(n)$: todo número inteiro $n \geqslant 2$ é primo ou é produto de números primos.

i) Verifiquemos que $p(2)$ é verdadeira:

$$2 \text{ é primo.}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que para todo k, $2 \leqslant k \leqslant n$, $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$p(k) : k \text{ é primo ou é produto de primos}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : k+1 \text{ é primo ou é produto de primos.}$$

Temos:

a) se $k+1$ **é primo** nada temos que provar;

b) se $k+1$ **não é primo**, então $k+1$ é um número composto, ou seja, $k+1 = x \cdot y$, com $1 < x < k+1$ e $1 < y < k+1$, equivalentemente, $2 \leqslant x \leqslant k$ e $2 \leqslant y \leqslant k$. Note que agora podemos aplicar a hipótese de indução aos números x e y. Assim x e y são primos ou são produto de primos e, portanto, $k+1$ é um produto de números primos.

Logo, pelo 2º P.I.M., todo número inteiro $n \geqslant 2$ é primo ou é produto de números primos. □

1.5 Princípio da Boa Ordenação - PBO

Definição 1.6. Seja n um número natural e A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Dizemos que n é o menor elemento do conjunto A quando para todo $a \in A$, temos $n \leqslant a$. É facil ver que o menor elemento é único, de fato, se n_1 e n_2 são ambos os menores elementos de A, então, por definição, $n_1 \leqslant n_2$ e $n_2 \leqslant n_1$ o que implica $n_1 = n_2$.

Teorema 1.7. *(PBO) Todo subconjunto não-vazio de* $\mathbb{N}$ *possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Se $1 \in A$, então nada temos que provar, pois 1 seria o menor elemento. Suponhamos que 1 não pentença ao conjunto A. Assim, o menor elemento de A será um número maior do que 1 e, portanto, pode ser escrito na forma $n+1$. Queremos determinar um número n tal que $n+1 \in A$ e, dessa forma, todos os elementos de A são maiores do que n, consequentemente maiores do que $1, 2, \ldots, n$. O que queremos, em outras palavras, é encontrar um número n tal que $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N} - A$ e $n+1 \in A$. Seja $X = \{n \in \mathbb{N} | \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N} - A\}$. Ora, X é um subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os elementos de A que são maiores do que n. Como, por hipótese, 1 não pertence a A, temos que $1 \in X$. Sendo $A \neq \varnothing$, temos que existem naturais que não pertencem a X, ou seja, $X \neq \mathbb{N}$. Pelo axioma da indução, segue que existe algum $n \in X$ tal que $n + 1$ não pertence a X. Isto implica que todos os elementos de A são maiores do que n, contudo, nem todos são maiores do que $n + 1$. Sabendo que não existe número natural entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1 \in A$ e é o menor elemento. $\square$

2 O Princípio da Indução no Ensino Médio

Neste capítulo iremos apresentar alguns resultados vistos no ensino médio que podem ser demonstrados com o princípio da indução matemática. Esses resultados estão presentes em vários temas dos PCNEM, tais como Conjunto, Potenciação, Progressão Aritmética e Geométrica, Matemática Financeira, entre outros. Para selecionar os resultados que apresentaremos fizemos uma pesquisa bibliográfica em alguns livros do ensino médio, a saber, Matemática: contexto e aplicações do autor Luiz Roberto Dante, Matemática 1, Matemática 2 e Matemática 3 do autor Manoel Paiva e a coleção Matemática Elementar.

O objetivo deste capítulo é entregar ao professor de matemática do ensino médio, que decidir inserir em suas aulas a indução matemática como uma forma de desenvolver o raciocínio lógico, um material alternativo para ser consultado durante suas aulas.

2.1 Conjuntos

Definição 2.1. Chama-se **conjunto das partes de um conjunto** A, e indica-se por $\wp(A)$, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A (4).

Observação 2.2. O número de elementos de um conjunto A será indicado por $\sharp\, A$.

Proposição 2.3. *Se um conjunto A possui n elementos, então $\wp(A)$ possui 2^n elementos.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : \sharp\, A = n \Rightarrow \sharp\, \wp(A) = 2^n \, , \, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira: $\sharp\, A = 1 \Rightarrow A$ possui dois subconjuntos, a saber, $\varnothing$ e $A \Rightarrow \sharp\, \wp(A) = 2 = 2^1$.

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k), k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : \sharp\, A = k \Rightarrow \sharp\, \wp(A) = 2^k$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : \sharp\, A' = k+1 \Rightarrow \sharp\, \wp(A') = 2^{k+1}.$$

Temos: $A' = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}\} = A \cup \{a_{k+1}\}$. Note que há subconjuntos de A' onde a_{k+1} pertence e há outros em que a_{k+1} não pertence. Se a_{k+1} não pertence a tal subconjunto, então este é um subconjunto de A. Por hipótese de indução, $\sharp\,\wp(A) = 2^k$. Acrescentando a todos os subconjuntos de A o elemento a_{k+1}, obtemos 2^k novos subconjuntos.

Daí:

$$\sharp\, A' = k + 1 \Rightarrow \sharp\,\wp(A') = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Logo, pelo princípio de indução, $\sharp\, A = n \Rightarrow \sharp\,\wp(A) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. □

PARA O PROFESSOR: Terminada a demonstração sobre a quantidade de elementos de $\wp(A)$, sugerimos ao professor que ele faça uma ligação desse resultado com o número de combinações simples dos n elementos do conjunto A. Comente, por exemplo, que todos os subconjuntos formados por dois elementos de A são as combinações simples dos seus n elementos tomados dois a dois ou, ainda, interprete o resultado que se obtém quando calculamos o número de combinações simples dos n elementos de A tomados 0 a 0, dizendo que esse resultado simboliza o conjunto vazio que aparece como elemento de $\wp(A)$.

2.2 Potenciação de Números Reais

Na sequência, provaremos, usando o 1º P.I.M., as propriedades de potenciação.

Definição 2.4. Seja $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, e seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \end{cases}$$

Note que decorre imediatamente da definição que $a^1 = a$.

Proposição 2.5. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Então $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - vezes}}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n - vezes}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$a^1 = a,$$

pela definição 2.4.

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{k - vezes}}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : a^{k+1} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{k + 1 - vezes}}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k \cdot a^1 \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{k - vezes}} \cdot a \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{k + 1 - vezes}}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n - vezes}}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 2.6. *Sejam $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a \neq 0$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. Seja

$$p(n) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1},$$

pela definição 2.4.

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+(k+1)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{k+1} &= a^m \cdot (a^k \cdot a^1) \\ &= (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 \\ &= a^{m+k} \cdot a^1 \\ &= a^{(m+k)+1} \\ &= a^{m+(k+1)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 2.7. *Sejam $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $a^m \div a^n = a^{m-n}, a \neq 0$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. Seja

$$p(n) : a^m \div a^n = a^{m-n}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} a^m &= a^{m-1} \cdot a^1 \Rightarrow \\ a^{m-1} &= \frac{a^m}{a^1} \Rightarrow \\ a^{m-1} &= a^m \div a^1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : a^m \div a^k = a^{m-k}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : a^m \div a^{k+1} = a^{m-(k+1)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} a^{m-k} &= a^{m-(k+1)+1} \Rightarrow \\ a^{m-k} &= a^{m-(k+1)} \cdot a^1 \Rightarrow \\ a^{m-(k+1)} &= \frac{a^{m-k}}{a^1} \\ &= a^{m-k} \div a^1 \\ &= \frac{a^m}{a^k} \div a^1 \\ &= \frac{a^m}{a^k} \cdot \frac{1}{a^1} \\ &= \frac{a^m}{a^{k+1}} \\ &= a^m \div a^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $a^m \div a^n = a^{m-n}, n \in \mathbb{N}$. □

Observe que as proposições 2.6 e 2.7 poderiam ser enunciadas juntas, a saber:

"*Seja $a \in \mathbb{R}^*$ e sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Então, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$*".

De fato, se $n \in \mathbb{N}$, temos a proposição 2.6, se $n = 0$ o resultado é óbvio e se $n < 0$, digamos $n = -k$ com $k > 0$ temos $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-k} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^k} = a^m \div a^k$ e $a^{m+n} = a^{m-k}$. Logo, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, com $n < 0$, é equivalente a $a^m \div a^k = a^{m-k}$, com $k > 0$ (proposição 2.7).

Optamos apresentar separadamente pois não podemos usar indução em $\mathbb{Z}$ visto que precisamos de um "menor elemento"para provar o passo inicial(base).

Proposição 2.8. *Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$. Então $(a^n)^k = a^{nk}, a \neq 0$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em k. Seja

$$p(k) : (a^n)^k = a^{nk}, k \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} (a^n)^1 &= a^n \\ &= a^{n \cdot 1}. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(j)$, com $j \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(j) : (a^n)^j = a^{nj}$$

e provemos que decorre a validade de $p(j+1)$, isto é:

$$p(j+1) : (a^n)^{j+1} = a^{n(j+1)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} (a^n)^{j+1} &= (a^n)^j \cdot (a^n)^1 \\ &= a^{nj} \cdot a^n \\ &= a^{nj+n} \\ &= a^{n(j+1)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $(a^n)^k = a^{nk}$, $k \in \mathbb{N}$. □

A proposição 2.8 ainda vale se $k \in \mathbb{Z}$. De fato, se $k = 0$ é óbvio. Se $k < 0$, considere $k = -r$ com $k > 0$, então $(a^n)^k = (a^n)^{-n} = \dfrac{1}{(a^n)^n} = \dfrac{1}{a^{n \cdot n}} = a^{-n \cdot n} = a^{n \cdot (-n)} = a^{n \cdot k}$.

Proposição 2.9. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^1 &= a \cdot b \\ &= a^1 \cdot b^1.\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : (a \cdot b)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^{k+1} &= (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)^1 \\ &= a^k \cdot b^k \cdot a^1 \cdot b^1 \\ &= (a^k \cdot a^1) \cdot (b^k \cdot b^1) \\ &= a^{k+1} \cdot b^{k+1}.\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 2.10. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^1 &= \frac{a}{b} \\ &= \frac{a^1}{b^1}.\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{k} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{1} \\ &= \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a^1}{b^1} \\ &= \frac{a^k \cdot a^1}{b^k \cdot b^1} \\ &= \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}.\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}$, $n \in \mathbb{N}$. □

De modo análogo à proposição 2.8, as proposições 2.9 e 2.10 podem ser generalizadas para $n \in \mathbb{N}$.

PARA O PROFESSOR: Após a demonstração desses seis resultados referentes à potenciação de números reais, trago como sugestão para o professor que o mesmo comente a importância desse tema para o estudo da função exponencial e dos logaritmos. Diga ao aluno que, junto com radiciação, potenciação é visto como um pré-requisito para o estudo de tais assuntos. Embora os resultados demonstrados nesta seção sejam referentes a números reais, o professor poderá levantar a seguinte questão: *Vocês (alunos) acham que esses resultados continuam válidos quando a base da potência for um número complexo?* Após alguns minutos de reflexão afirme para a classe que sim, que os mesmos resultados continuarão válidos quando a base da potência for um número complexo e, dependo do nível da turma, faça pelo menos uma demonstração para o caso da base ser complexa.

2.3 Progressão Aritmética

Definição 2.11. Progressão Aritmética é toda sequência numérica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente com uma constante r, ou seja,

$$a_{n+1} = a_n + r, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

O número r é chamado de razão da progressão aritmética (5).

Observação 2.12. Decorre imediatamente da definição 3.1 que a razão r de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é dada por:

$$r = a_{n+1} - a_n, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 2.13. *Numa progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r tem-se:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + (1-1) \cdot r \Rightarrow \\ a_1 &= a_1 + 0 \cdot r \Rightarrow \\ a_1 &= a_1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$\begin{aligned} p(k+1) : a_{k+1} &= a_1 + [(k+1) - 1] \cdot r \\ &= a_1 + k \cdot r. \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} r &= a_{k+1} - a_k \Rightarrow \\ r &= a_{k+1} - [a_1 + (k-1) \cdot r] \Rightarrow \\ a_{k+1} &= a_1 + (k-1) \cdot r + r \Rightarrow \\ a_{k+1} &= a_1 + k \cdot r - r + r \Rightarrow \\ a_{k+1} &= a_1 + k \cdot r. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}$. □

PARA O PROFESSOR: Sugerimos ao caro professor que agora, após ter visto a demonstração da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e antes de mostrar o resultado para soma de uma P. A., realize com a turma alguns problemas referentes a este resultado. Após dois ou três exercícios sobre soma de P. A., use a proposição a seguir que trás a demonstração para o caso geral (fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética) e realize-a com a sua turma para mostrar a validade dos resultados obtidos nos exercícios.

Proposição 2.14. *A soma S_n dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(a_1 + a_1)\cdot 1}{2} \\ &= \frac{2\cdot a_1}{2} \\ &= a_1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : S_k = \frac{(a_1 + a_k)\cdot k}{2}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_{k+1})\cdot (k+1)}{2}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_{k+1})\cdot (k+1)}{2} &= \frac{(a_1 + a_k + r)\cdot (k+1)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_k)\cdot k}{2} + \frac{a_1 + a_k + r\cdot (k+1)}{2} \\ &= S_k + \frac{(a_1 + rk) + (a_k + r)}{2} \\ &= S_k + \frac{2\cdot a_{k+1}}{2} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}$. □

2.4 Progressão Geométrica

Definição 2.15. Progressão Geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente por uma constante q, ou seja, $a_{n+1} = q \cdot a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. O número q é chamado de razão da progressão geométrica (5).

Observação 2.16. Se uma Progressão Geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ possui todos os termos diferentes de zero, então sua razão q é dada por:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 2.17. *Numa Progressão Geométrica* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ *de razão* q *tem-se:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}$$

.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^{1-1} \Rightarrow \\ a_1 &= a_1 \cdot q^0 \Rightarrow \\ a_1 &= a_1 \cdot 1 \Rightarrow \\ a_1 &= a_1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : a_{k+1} = a_1 \cdot q^k.$$

Temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cdot q \Rightarrow \\ a_{k+1} &= (a_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q \Rightarrow \\ a_{k+1} &= a_1 \cdot (q^{k-1} \cdot q) \Rightarrow \\ a_{k+1} &= a_1 \cdot q^k. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 2.18. *Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, temos:*

- *se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1$.*
- *se $q \neq 1$, então $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$.*

Demonstração. Vamos provar por indução.

(1º caso: $q = 1$**)**

Seja $p(n)$: se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1, n \in \mathbb{N}$.

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$S_1 = 1 \cdot a_1 \Rightarrow S_1 = a_1.$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : q = 1 \Rightarrow S_k = k \cdot a_1.$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : q = 1 \Rightarrow S_{k+1} = (k+1) \cdot a_1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= k \cdot a_1 + a_1 \\ &= (k+1) \cdot a_1. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(2º caso: $q \neq 1$**)** Vamos provar por indução.

Seja $p(n)$: se $q \neq 1$, então $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, n \in \mathbb{N}$.

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^1)}{1 - q} \\ &= \frac{a_1 \cdot (1 - q)}{1 - q} \\ &= a_1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : q \neq 1 \Rightarrow S_k = \frac{a_1 \cdot (1 - q^k)}{1 - q}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : q \neq 1 \Rightarrow S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{k+1})}{1 - q}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^k)}{1 - q} + a_1 \cdot q^k \\ &= \frac{a_1 - a_1 \cdot q^k + a_1 \cdot q^k - a_1 \cdot q^{k+1}}{1 - q} \\ &= \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{k+1}}{1 - q} \\ &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^{k+1})}{1 - q}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, se $q \neq 1$, então $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

PARA O PROFESSOR: Sugerimos ao caro professor que antes de mostrar a demonstração da fórmula que trata do produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, proposição seguinte, realize com a turma alguns problemas referentes a este resultado. Após um ou dois exercícios sobre produto dos termos de uma P. G., use a proposição a seguir que trás a demonstração para o caso geral e realize-a com a sua turma para mostrar a validade dos resultados obtidos nos exercícios.

Proposição 2.19. *Sendo P_n o produto dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, temos:*

$$P_n = {a_1}^n \cdot q^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : P_n = {a_1}^n \cdot q^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} P_1 &= {a_1}^1 \cdot q^{\frac{(1-1)\cdot 1}{2}} \\ &= a_1 \cdot q^{\frac{(0\cdot 1)}{2}} \\ &= a_1 \cdot q^0 \\ &= a_1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : P_k = {a_1}^k \cdot q^{\frac{(k-1)\cdot k}{2}}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : P_{k+1} = {a_1}^{k+1} \cdot q^{\frac{(k\cdot(k+1))}{2}}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k \cdot a_{k+1} \\ &= {a_1}^k \cdot q^{\frac{(k-1)\cdot k}{2}} \cdot a_1 \cdot q^k \\ &= {a_1}^{k+1} \cdot q^{\frac{(k-1)\cdot k}{2}+k} \\ &= {a_1}^{k+1} \cdot q^{\frac{k^2-k+2k}{2}} \\ &= {a_1}^{k+1} \cdot q^{\frac{k^2+k}{2}} \\ &= {a_1}^{k+1} \cdot q^{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $P_n = {a_1}^n \cdot q^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}, n \in \mathbb{N}$. □

2.5 Matemática Financeira

Definição 2.20. (5)**(Juros Simples)** Sendo J os juros simples produzidos por um capital C aplicado a uma taxa i durante o tempo t, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t.$$

Definição 2.21. (5)**(Montante)** O Montante de uma aplicação é definido como sendo a soma do capital aplicado com os juros. Assim:

$$M = C + J.$$

Definição 2.22. (Juros Compostos) Em uma aplicação no regime de juros compostos, passado o primeiro período de tempo (primeiro mês, primeiro bimestre, primeiro trimestre, etc.) os juros são calculados sobre o capital aplicado inicialmente. A partir do segundo período de tempo (segundo mês, segundo bimestre, segundo trimestre, etc.) os juros incidirão sobre o montante obtido após o término do período de tempo anterior.

Proposição 2.23. *O montante acumulado ao final da aplicação de um capital C no regime de juros compostos, durante n unidades de tempo à taxa i por unidade de tempo, é dado por:*

$$M = C \cdot (1+i)^n.$$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : M = C \cdot (1+i)^n, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i)^1 \\ &= C \cdot (1+i) \\ &= C + C \cdot i \\ &= C + C \cdot i \cdot 1 \\ &= C + J. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : M = C \cdot (1+i)^k$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : M' = C \cdot (1+i)^{k+1}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} M' &= M + J \\ &= M + Mi \\ &= M \cdot (1+i) \\ &= C \cdot (1+i)^k \cdot (1+i) \\ &= C \cdot (1+i)^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $M = C \cdot (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 2.24. *O montante acumulado ao final da aplicação de um capital C durante n unidades de tempo à taxa variável para o juro composto é dado por:*

$$M = C \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n).$$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : M = C \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n), n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i_1) \\ &= C \cdot (1+i_1)^1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : M = C \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_k)$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : M' = C \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_k) \cdot (1+i_{k+1}).$$

Temos:

$$\begin{aligned} M' &= M + J \\ &= M + Mi_{k+1} \\ &= M \cdot (1 + i_{k+1}) \\ &= C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_k) \cdot (1 + i_{k+1}). \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $M = C \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n), n \in \mathbb{N}$. □

2.6 Combinatória

Definição 2.25. (6)Seja n um número inteiro não negativo. Define-se o fatorial de n, que indicamos por $n!$, como sendo

$$\begin{cases} 0! = 1. \\ 1! = 1. \\ n! = n \cdot (n-1)!, \, se \, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Proposição 2.26. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

i) Verifiquemos que $p(2)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1! \\ &= 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, seja verdadeira:

$$p(k) : k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : (k+1)! = (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &= (k+1) \cdot [k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1] \\ &= (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1, \forall\, n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$ □

Definição 2.27. (6)Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo tal que $p \leqslant n$. Chama-se "**arranjos simples** de p elementos de I" toda sequência formada por p elementos distintos de I.

Definição 2.28. (6)O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, $p \leqslant n$, é dado por:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1).$$

Proposição 2.29. *$A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}, n \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. Seja

$$p(n) : A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, n \in \mathbb{N}, p \leqslant n.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$A_{1,p} = \frac{1!}{(1-p)!}.$$

Como $p \leqslant 1$, segue que $p = 1$. Daí:

$$A_{1,1} = 1, \text{por definição, e } \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1!}{0!} = 1.$$

Então:

$$A_{1,1} = \frac{1!}{(1-1)!}.$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}, p \leqslant k$, seja verdadeira:

$$p(k) : A_{k,p} = \frac{k!}{(k-p)!}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : A_{k+1,p} = \frac{(k+1)!}{[(k+1)-p]!}, \ p \leqslant k+1.$$

Assim:

- se $p = k+1$, temos

$$\begin{aligned} A_{k+1,k+1} &= (k+1)! \\ &= \frac{(k+1)!}{0!} \\ &= \frac{(k+1)!}{[(k+1)-(k+1)]!}. \end{aligned}$$

- se $p < k+1$, ou seja, $p \leqslant k$, temos

$$\begin{aligned} A_{k+1,p} &= (k+1)\cdot k \cdot (k-1)\cdot \ldots \cdot (k+1-p+1) \\ &= \frac{(k+1)\cdot [k\cdot (k-1)\cdot \ldots (k-p+2)\cdot (k-p+1)]}{k-p+1} \\ &= \frac{(k+1)}{k-p+1}\cdot A_{k,p} \\ &= \frac{k+1}{k+1-p}\cdot \frac{k!}{(k-p)!} \\ &= \frac{(k+1)!}{(k+1-p)!}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}, n \in \mathbb{N}, p \leqslant n.$ $\square$

2.7 Números Complexos

Os resultados desta seção são os mesmos da seção 2.2, sendo aqui feitos para números complexos.

2.7.1 Potenciação de números complexos

Definição 2.30. (6)Sendo w um número complexo qualquer e $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\begin{cases} w^0 = 1. \\ w^{n+1} = w^n \cdot w, \forall\, n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0. \\ w^{-n} = \dfrac{1}{w^n}, w \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Proposição 2.31. *Sejam $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $w, w \neq 0$, um número complexo qualquer. Então $w^n \cdot w^m = w^{n+m}$.*

Proposição 2.32. *Sejam $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $w, w \neq 0$, um número complexo qualquer. Então $w^m \div w^n = w^{m-n}$.*

Proposição 2.33. *Sejam $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ e $w, w \neq 0$, um número complexo qualquer. Então $(w^n)^m = w^{n\cdot m}$.*

Proposição 2.34. *Sejam w e v números complexos e $n \in \mathbb{N}$. Então $(w\cdot v)^n = w^n \cdot v^n$.*

Proposição 2.35. *Sejam w e v números complexos e $n \in \mathbb{N}$. Então $\left(\dfrac{w}{v}\right)^n = \dfrac{w^n}{v^n}$.*

PARA O PROFESSOR: As demonstrações dos resultados acima, referentes a números complexos, são análogas às realizadas para potenciação de números reais (ver capítulo 2, seção 2.2). Então deixamos a critério do professor demonstrá-las ou deixar como exercício para os alunos.

2.7.2 Conjugado de um Número Complexo

Definição 2.36. (6)O conjugado de um número complexo $z = a+bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, é o número complexo $\overline{z}$ (lê-se "conjugado de z") tal que $\overline{z} = a - bi$.

Observação 2.37. Sendo w e v números complexos, então $\overline{w} \cdot \overline{v} = \overline{w \cdot v}$. De fato, sendo $w = a + bi$ e $v = c + di$ números complexos, temos:

$\overline{w} \cdot \overline{v} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i.$

Como:

$w \cdot v = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

Segue:

$\overline{w \cdot v} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$

E, portanto, $\overline{w} \cdot \overline{v} = \overline{w \cdot v}$.

Proposição 2.38. *Seja zumnúmerocomplexo. Então,* $(\overline{z})^n = \overline{z^n}, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : (\overline{z})^n = \overline{z^n}, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} (\overline{z})^1 &= \overline{z^1} \Rightarrow \\ (\overline{z}) &= \overline{z}. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : (\overline{z})^k = \overline{z^k}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k + 1)$, isto é:

$$p(k+1) : (\overline{z})^{k+1} = \overline{z^{k+1}}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} (\overline{z})^{k+1} &= (\overline{z})^k \cdot (\overline{z})^1 \\ &= \overline{z^k} \cdot \overline{z} \\ &= \overline{z^k \cdot z} \\ &= \overline{z^{k+1}}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $(\overline{z})^n = \overline{z^n}, n \in \mathbb{N}$. □

2.7.3 Módulo de um Número Complexo

Definição 2.39. (6)O módulo de um número complexo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, é o número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observação 2.40. Sendo w e v números complexos, então $|w| \cdot |v| = |w \cdot v|$. De fato, sendo $z = a + bi$, temos:

$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$. Logo, $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Assim, sendo w, v números complexos, tem-se:

$$\begin{aligned} |w| \cdot |v| &= \sqrt{w \cdot \overline{w}} \cdot \sqrt{v \cdot \overline{v}} \\ &= \sqrt{(w \cdot \overline{w}) \cdot (v \cdot \overline{v})} \\ &= \sqrt{(w \cdot v) \cdot (\overline{w \cdot v})} \\ &= |w \cdot v|. \end{aligned}$$

Proposição 2.41. $|z|^n = |z^n|, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : |z|^n = |z^n|, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} |z|^1 &= |z^1| \Rightarrow \\ |z| &= |z|. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : |z|^k = |z^k|$$

e provemos que decorre a validade de $p(k + 1)$, isto é:

$$p(k + 1) : |z|^{k+1} = |z^{k+1}|.$$

Temos:

$$\begin{aligned} |z|^{k+1} &= |z|^k \cdot |z|^1 \\ &= |z^k| \cdot |z^1| \\ &= |z^k \cdot z^1| \\ &= |z^{k+1}|. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $|z|^n = |z^n|, n \in \mathbb{N}$. □

3 Sequência Didática

CONTEÚDO

Desenvolvimento do Princípio da Indução Matemática a partir dos axiomas de Peano e aplicações em demonstrações relativas aos números naturais.

OBJETIVOS

1. Fornecer subsídios ao professor afim de que ele possa usar o Princípio de Indução Matemática em demonstrações de resultados indexados pelos números naturais, no ensino médio;

2. Ajudar o professor a traçar uma sequência de problemas onde ele possa avançar gradualmente no ensino de indução matemática tendo este trabalho como um material para consulta em suas aulas;

3. Alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo do aluno.

PÚBLICO ALVO

Ao longo deste trabalho fica claro que o Princípio de Indução Matemática pode ser utilizado para demonstrar resultados que aparecem em todas as séries do Ensino Médio. Por isso pensamos em uma sequência de atividades para ser aplicada e desenvolvida com alunos desse nível de ensino.

Claro que o professor pode desenvolver esta sequência didática em qualquer turma do ensino médio: seja no 1º ano, no 2º ano ou no 3º ano. Contudo, por questões didáticas e obviamente dentro das condições do professor, sugiro que seja desenvolvida preferencialmente no 1º ano do ensino médio. Tal sugestão é dada pelo fato de que no 1º ano o aluno começa a estudar conjuntos e, logo após, conjuntos numéricos. Então, dentro desse contexto, acredito que esse seja o momento mais adequado para se falar em indução.

Embora seja uma turma do ensino médio, vale apena observar o fato de que os alunos do 1º ano são alunos concluintes do 9º ano do ensino fundamental II. Portanto, é importante que o professor tenha sensibilidade para perceber algumas dificuldades que com certeza irão aparecer. Esses alunos, não todos certamente, ainda não estão acostumados com a linguagem simbólica e mais abstrata da matemática. Talvez tenham alunos que até consigam perceber os padrões existentes nos problemas, mas a parte complicada para eles será transformar essas ideias em uma linguagem matemática precisa e clara.

METODOLOGIA

Acreditamos que no decorrer da aplicação e do desenvolvimento da nossa sequência de atividades, surgirão algumas dificuldades tendo em vista o público alvo. Sendo assim, indico que o professor mantenha sempre o diálogo com seus alunos ao longo de toda a atividade: esclarecendo as dúvidas; apontando erros; diante dos erros, sugerindo estratégias; incentivando a troca de ideias entre os alunos para que ocorra a promoção da aprendizagem.

Duração

Embora esta sequência didática seja composta de cinco etapas, foram estimadas cinco ou seis aulas para sua conclusão. Isso porque cada aluno tem "seu tempo", ou seja, a construção do conhecimento não ocorre de modo uniforme em uma sala de aula.

Recursos Metodológicos

Para a aplicação e desenvolvimento da sequência didática o professor vai utilizar: o quadro branco; marcador para quadro branco; régua e compasso, daqueles que se usam no quadro.

Os alunos vão precisar de: lápis; borracha; folhas de papel ofício(de preferência) ou folhas do próprio caderno; régua e compasso.

DESENVOLVIMENTO

1ª ETAPA - Investigação 1

Nessa etapa inicial, Pretendemos por meio da investigação de um problema conduzir o aluno a formular conjecturas, levantar questionamentos e perceber a ocorrência de regularidades existentes no problema.

O problema proposto que vamos considerar como objeto de nossa investigação é o que refere-se a contagem do número de diagonais de um polígono convexo. Didaticamente, dividimos essa investigação em seis passos tendo como objetivo que ao final de cada um deles o aluno tenha compreendido e analisado os resultados ali obtidos.

Diante do exposto, é importante que o aluno esteja ciente do seu papel nessa etapa, a saber, de investigador. A atividade aqui proposta não deve ser resolvida de um modo meramente mecânico, mas com um olhar analítico, buscando desvendar a lógica e os padrões nela escondidos.

Sugerimos que para a aplicação desta etapa o professor divida a turma em duplas e desenvolva a atividade em uma única aula.

PROBLEMA: Determinar o número de diagonais de um polígono convexo.

passo 1. Solicite ao aluno que desenhe em uma folha, com o auxílio de régua e compasso, cinco polígonos convexos:

* Triângulo
* Quadrilátero
* Pentágono
* hexágono
* Heptágono

passo 2. Uma vez desenhado cada polígono, peça que o aluno trace todas as diagonais de cada um deles e, em seguida, faça a contagem do número de diagonais e escreva o resultado obtido ao lado da figura correspondente.

passo 3. Nesse momento o aluno deverá organizar os dados obtidos no **passo 2** em uma tabela. A 1ª coluna preencha com o nome do polígono. A 2ª coluna preencha com o número de lados. A 3ª coluna preencha com o respectivo número de diagonais. Finalmente, solicite que o aluno tente relacionar os resultados da 2ª coluna com os resultados da 3ª coluna, ou seja, ele deverá escrever na 4ª coluna da tabela uma expressão matemática que relaciona o número de lados com o número de diagonais.

Para o professor: Certamente o preenchimento da 4ª coluna da tabela será a parte mais difícil para o aluno. Está na hora de você, professor, instigar o raciocínio investigativo do seu aluno. Pergunte, por exemplo, o que acontece com o número de diagonais quando o número de lados aumenta de uma unidade? Feito isso, deixe-o pensar, investigar, perceber padrões e formular conjecturas.

passo 4. Levante o seguinte questionamento para a turma: Baseado nos resultados obtidos na 4ª coluna da tabela, é possível escrever uma expressão geral que relaciona o número de lados com o número de diagonais? Em caso afirmativo, qual seria essa expressão?

Para o professor: Note que a partir de agora o seu aluno precisará deixar aquele universo de cinco polígonos apenas e pensar de maneira mais geral, ou seja, se o seu resultado continuará válido para qualquer polígono. É preciso enfatizar para o aluno que **tornar geral** uma expressão matemática não significa, apenas, trocar os números, que figuram no resultado, por letras (incógnitas). Nesse momento, o aluno precisa começar a se perguntar o que pode ser feito para mostrar que tal resultado é de fato geral.

passo 5. De posse de uma expressão que relaciona o número n de lados com o número $D(n)$ de diagonais, peça que cada aluno teste sua validade com pelo menos dois polígonos. Por exemplo, desenhe um polígono com oito lados e outro com nove lados. Em seguida, trace todas as suas diagonais e faça uma contagem de todas elas. Compare esse resultado com o resultado obtido usando a fórmula.

passo 6. Pergunte para a turma: Conforme os resultados obtidos no **passo 5**, sua conjectura (isto é, a expressão geral determinada pelo aluno) é válida? Em caso afirmativo, faça uma segunda pergunta: Existe algum valor de n para o qual essa expressão falha? Se não, como provar? Deixe-os levantar um debate e, lógo após, convide-os à segunda etapa da sequência didática.

2ª ETAPA - Investigação 2

Assim como na etapa anterior, sugerimos que o professor na aplicação desta etapa divida a turma em duplas, mantendo as mesmas que foram formadas na 1ª etapa. Conclua esta etapa em uma única aula.

PROBLEMA: Determinação de Números Primos.

passo 1. Compartilhe com a turma o problema a seguir: "Consideremos a equação $y = n^2 - n + 41$, $n \in \mathbb{N}$. Os números y encontrados serão sempre números primos qualquer que seja o valor de n, para $n \geqslant 0$?"

passo 2. Após a apresentação do problema solicite que os alunos testem a validade da afirmação para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

passo 3. Diante dos resultados obtidos no **passo 2**, pergunte aos alunos o que eles pensam com respeito a essa equação. Será que ela produz números primos para qualquer que seja o valor de n, $n \in \mathbb{N}$?

passo 4. Depois de ter ouvido a turma continue com o desafio. Peça que os alunos testem a validade da equação para $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$, ou seja, o valor encontrado para y continua sendo um número primo?

Para o professor: Note que para $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$ os valores de y são respectivamente:

$$y = 53,\ y = 61\ e\ y = 71.$$

Perceba que os resultados encontrados continuam sendo números primos. Com um pouco mais de esforço e tempo solicite que a turma continue o teste para $n = 7$, $n = 8, \ldots, n = 10$. De posse de todos esses resultados verifique junto com os alunos que a equação continua produzindo números primos.

passo 5. Chamando à atenção os alunos que para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\dots$, $n = 10$ a equação nos dá um número primo, um questionamento lógico seria: será que estamops diante de uma fórmula que produz números primos? Continuar os testes não seria uma má ideia. Poderíamos pedir que os alunos continuassem testando fazendo as contas para n variando de 11 até 40, contudo esses cálculos vão gerar números muito grandes.

Para o professor: Mesmo sem ter feito a verificação para n variando de 1 até 40 comente com sua sala que todos os valores encontrados para y nesse intervalo serão números primos. Uma pergunta plausível nesse momento é: será que após todos esses testes podemos concluir que estamos diante de uma equação que "fabrica" números primos qualquer que seja o valor de n, $n \in \mathbb{N}$? Pelo fato de que a verificação fica cada vez mais trabalhosa é possível que o aluno seja tentado a responder afirmativamente.

passo 6. Vamos agora ao último teste. Pergunta: para $n = 41$ o valor encontrado para y é um número primo?

Para o professor: Após alguns minutos dedicados à verificação, interrogue a turma com respeito ao valor encontrado para y. Se todos fizeram os cálculos corretos, então o valor para y foi 41^2 que, para tristeza de alguns, não é um número primo. Mostre através desse problema que não podemos generalizar propriedades após a verificação de alguns casos particulares, pois tal conduta poderá nos levar a sérios enganos em matemática. O aluno que optou em dizer que o resultado encontrado era um número primo, certamente testou alguns casos, contudo não testou todos. Quer dizer, após um número razoável de tentativas o aluno foi induzido a responder afirmativamente, ou seja, para ele (aluno) seria inútil continuar a verificação visto que não encontrava contradições. O problema da determinação de números primos nos mostra que é necessário dispormos de um método com base lógica que nos permita decidir com precisão a validade, ou não, de uma propriedade.

3ª ETAPA - Indução Matemática: Apresentação Teórica

Nesta etapa, o professor apresentará à turma o tema da aula: O Princípio de Indução Matemática.

Nesse início da aula, achamos importante que seja falado um pouco sobre o aspecto histórico da indução matemática. O professor pode até recorrer a tudo o que foi exposto na fundamentação teórica deste trabalho. Em seguida, dê início ao assunto falando primeiro dos axiomas de Peano e, logo após, apresente o primeiro e o segundo princípio de indução matemática.

Indicamos que seja feito um paralelo entre indução matemática e aquilo que conhecemos como efeito dominó: imagine que você tem uma imensa fila de dominós todos em pé. Se você puder garantir que a primeira peça do dominó cairá e que sempre que uma peça do dominó cair a próxima peça vizinha também cairá, então você poderá garantir que todas as peças do dominó cairão.

Faça a seguinte analogia: Suponha, inicialmente, que a 1ª peça da fila de dominós cai. Isto, em indução, equivale ao que chamamos de **base**, ou seja o resultado é verificado para o primeiro natural possível. Suponha agora que independente da posição de uma das peças da fila, se esta cair e derrubar a próxima peça da fila, Isto em indução é chamado de **passo indutivo**, então podemos garantir que todas as peças da sequência cairão. Ou seja, nós supomos que o resultado é verificado para um número natural n e como consequência também é válido para o natural $n + 1$.

Portanto, professor, dada a abstração que o princípio de indução carrega consigo, fica claro que fazendo esse paralelo será mais fácil para o aluno perceber a dinâmica das demonstrações por indução.

Conclua essa etapa em uma aula.

4ª ETAPA - Resolução de Problemas

Nesta etapa, sugerimos ao professor que o mesmo desenvolva com a turma a resolução de alguns problemas referentes à indução. A título de sugestão, indicamos a seguir três problemas: o primeiro, trata da soma de números ímpares; o segundo, refere-se à soma dos ângulos internos de um polígono convexo; e o terceiro, trata da forma trigonômétrica de um número complexo (também conhecida como 1ª fórmula de De Moivre para números complexos).

Talvez você esteja se perguntando: como mostrar um resultado referente a números complexos se já foi dito que a sequência de atividades deve ser aplicada preferencialmente no 1º ano do ensino médio? Tal pergunta é justa e lógica, porém é possível que tal resultado seja demonstrado em uma turma de 1º ano. Note que não é necessário que o professor diga que o problema trata de números complexos, basta que sejam dadas algumas informações necessárias para o denvolvimento e conclusão da demonstração. Ou seja, é suficiente o professor adotar os três resultados que seguem:

$$i^2 = -1.$$

$$cos(a + b) = cos(a) \cdot cos(b) - sen(a) \cdot sen(b).$$

$$sen(a + b) = sen(a) \cdot cos(b) + sen(b) \cdot cos(a).$$

Portanto, aplique os três problemas a seguir deixando que os alunos construam a demonstração de cada um deles. Lembro o fato de que não trata-se de uma avaliação e sim de uma aula de resolução de problemas, quer dizer, o professor pode e deve a todo momento intervir na demonstração, isto é, tirar dúvidas, esclarecer fatos relativos à demonstração e trazer à memória do aluno algum resultado que seja necessário ser usado para concluir a prova.

Terminado o exercício, dê seguimento à aula fazendo a correcão do mesmo no quadro. Faça uma análise dos possíveis erros chamando à atenção da turma para a forma correta de concluir o resultado. Conclua essa etapa em uma aula ou, no máximo, em duas aulas.

PROBLEMA 1: (*Soma de Números Ímpares*) Mostre que $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 1 &= (2\cdot 1-1) \Rightarrow \\ 1 &= (2-1) \Rightarrow \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$$p(k): 1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1): 1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] = (k+1)^2.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] &= k^2+2k+2-1 \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. □

PROBLEMA 2: (*Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo - $S(n)$*) Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2)\cdot 180^{\circ}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n): S(n) = (n-2)\cdot 180^{\circ}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3.$$

i) Verifiquemos que $p(3)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} S(3) &= (3-2)\cdot 180^{\text{o}} \Rightarrow \\ S(3) &= 1\cdot 180^{\text{o}} \Rightarrow \\ S(3) &= 180^{\text{o}}. \end{aligned}$$

De fato, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo $(n=3)$ é 180^{o}.

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, seja verdadeira:

$$p(k) : S(k) = (k-2)\cdot 180^{\text{o}}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : S(k+1) = [(k+1)-2]\cdot 180^{\text{o}}.$$

Seja P um polígono com k lados, cujos vértices são os pontos $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, V_k$.Considere o ponto V_{k+1}, tal que não pertença ao prolongamento dos lados $V_{k-2}V_{k-1}$ e V_1V_k, e por ele trace os segmentos de reta $V_{k+1}V_{k-1}$ e $V_{k+1}V_k$. Note, por construção, que fica determinado assim o triângulo de vértices V_{k-1}, V_k, V_{k+1}. Ou seja, a soma dos ângulos internos do polígono de vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, V_k, V_{k+1}$ é igual à soma dos ângulos internos do plígono de vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, V_k$ com a soma dos ângulos internos do triângulo de vértices V_{k-1}, V_k, V_{k+1}.

Então, temos:

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + 180^{\text{o}} \\ &= (k-2)\cdot 180^{\text{o}} + 180^{\text{o}} \\ &= [(k-2)+1]\cdot 180^{\text{o}} \\ &= [(k+1)-2]\cdot 180^{\text{o}}. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $S(n) = (n-2)\cdot 180^{\text{o}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. □

PROBLEMA 3: (*Forma Trigonométrica de um Número Complexo*) Prove, por indução em $n, n \in \mathbb{N}$, a fórmula de De Moivre:

$$[cos\theta + i\cdot sen\theta]^n = cos(n\theta) + i\cdot sen(n\theta).$$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : [cos\theta + i\cdot sen\theta]^n = cos(n\theta) + i\cdot sen(n\theta), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}[cos\theta + i \cdot sen\theta]^1 &= cos(1 \cdot \theta) + i \cdot sen(1 \cdot \theta) \Rightarrow \\ cos\theta + i \cdot sen\theta &= cos(1 \cdot \theta) + i \cdot sen(1 \cdot \theta).\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : [cos\theta + i \cdot sen\theta]^k = cos(k\theta) + i \cdot sen(k\theta)$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : [cos\theta + i \cdot sen\theta]^{k+1} = cos[(k+1)\theta] + i \cdot sen[(k+1)\theta].$$

Temos:

$$\begin{aligned}[cos\theta + i \cdot sen\theta]^{k+1} &= [cos\theta + i \cdot sen\theta]^k \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)^1 \\ &= [cos(k\theta) + i \cdot sen(k\theta)] \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta) \\ &= cos(k\theta) \cdot cos\theta + cos(k\theta) \cdot i \cdot sen\theta + i \cdot sen(k\theta) \cdot cos\theta + \\ &= + i^2 \cdot sen(k\theta) \cdot sen\theta \\ &= cos(k\theta) \cdot cos\theta + cos(k\theta) \cdot i \cdot sen\theta + i \cdot sen(k\theta) \cdot cos\theta - \\ &= - sen(k\theta) \cdot sen\theta \\ &= cos(k\theta) \cdot cos\theta - sen(k\theta) \cdot sen\theta + \\ &= + i \cdot [cos(k\theta) \cdot sen\theta + sen(k\theta) \cdot cos\theta] \\ &= cos[k\theta + \theta] + i \cdot sen[k\theta + \theta] \\ &= cos[(k+1)\theta] + i \cdot sen[(k+1)\theta].\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $[cos\theta + i \cdot sen\theta]^n = cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta), \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

5ª ETAPA - Avaliação

Nessa etapa, elabore um exercício avaliativo composto de três a cinco problemas, dependendo do tempo de duração da sua aula, semelhantes aos que você resolveu nas etapas anteriores. Essa avaliação deverá ser aplicada individualmente, isto é, cada aluno fará a sua avaliação sem que haja qualquer tipo de consulta. Conclua essa etapa em uma aula.

Exercício avaliativo: A função do exercício avaliativo é mostrar ao professor aquilo que de fato o aluno conseguiu assimilar dentro do que se esperava. É nele que o professor visualizará o modo como os alunos estão utilizando os métodos aplicados nas demonstrações dos resultados anteriores.

4 Conclusão

Em conformidade com a proposta deste trabalho, o nosso objetivo foi empregar o Princípio da Indução Matemática em demonstrações relativas a conteúdos de matemática ensinados no ensino médio, com o propósito de que o estudante conheça um sistema dedutivo baseado em tais demonstrações.

Sendo assim, partimos dos axiomas de Peano para em seguida conceituarmos o Princípio da Indução Matemática, mostrando que ambos estão intimamente ligados. Tivemos o cuidado de detalhá-lo o suficiente para que o professor, de posse desse material, pudesse revisitar esse tema ou até mesmo estudá-lo pela primeira vez.

Tendo todo embasamento necessário para o ensino da indução matemática, o professor poderá usá-lo nas demonstrações dos resultados indexados pelos números naturais que ocorram ao longo de todo o ensino médio. Para reforçar seu conhecimento, deixo nesta obra, para você professor, uma coleção de demonstrações que poderão ser realizadas nas suas aulas.

Almejamos que esta pesquisa dê ao professor toda ferramenta necessária para que ele introduza em suas aulas o Princípio da Indução Matemática para obtenção de alguns resultados relativos ao conjunto dos Números Naturais e que seus alunos compreendam a importância que deve ser dada a esse tema no estudo da matemática.

Esperamos também contribuir para que o tema Indução Matemática deixe de ser um fantasma no ensino médio, tanto para o professor quanto para o aluno, e passe a ser uma realidade.

Referências

1 FERREIRA, A. B. de H. *Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.* [S.l.]: Positivo, 2010.

2 MAIA, E. M. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III Ciências da Natureza e suas Tecnologias.* [S.l.]: Brasília, 2000.

3 HEFEZ, A. *Indução Matemática.* [S.l.]: SBM, 2009.

4 PAIVA, M. R. *Matemática 1.* [S.l.]: Editora Moderna, 1995.

5 PAIVA, M. R. *Matemática 2.* [S.l.]: Editora Moderna, 1995.

6 PAIVA, M. R. *Matemática 3.* [S.l.]: Editora Moderna, 1995.

Apêndice A

Queremos neste apêndice deixar para o professor algumas demonstrações por indução. Acreditamos que tais exercícios ajudarão o caro colega que talvez não se sente apto a realizar esse tipo de demonstração.

Proposição 4.1. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 2^{1-1} &= 2^1 - 1 \Rightarrow \\ 2^0 &= 2 - 1 \Rightarrow \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k &= 2^k - 1 + 2^k = 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}
1^2 &= \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} \Rightarrow \\
1 &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} \Rightarrow \\
1 &= \frac{1\cdot 6}{6} \Rightarrow \\
1 &= 1.
\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (k+1)^2 &= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1) + 6\cdot(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\cdot[k\cdot(2k+1) + 6\cdot(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)\cdot(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\cdot\left[2\cdot(k+2)\cdot\left(k+\frac{3}{2}\right)\right]}{6} \\
&= \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.3. $1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}(-1)^{1-1}\cdot 1^2 &= (-1)^{1-1}\cdot\frac{1\cdot(1+1)}{2}\Rightarrow\\ (-1)^0\cdot 1 &= (-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}\Rightarrow\\ 1\cdot 1 &= 1\cdot 1.\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k\in\mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k): 1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1): 1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}\cdot k^2+(-1)^k\cdot(k+1)^2=(-1)^k\cdot\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}\cdot k^2+(-1)^k\cdot(k+1)^2 &=\\ (-1)^{k-1}\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(-1)^k\cdot(k+1)^2 &=\\ (-1)^k\cdot(-1)^{-1}\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(-1)^k\cdot(k+1)^2 &=\\ \frac{(-1)^k\cdot(-1)\cdot k\cdot(k+1)+(-1)^k\cdot 2\cdot(k+1)^2}{2} &=\\ \frac{(-1)^k\cdot(k+1)\cdot[(-1)\cdot k+2\cdot(k+1)]}{2} &=\\ \frac{(-1)^k\cdot(k+1)\cdot[-k+2k+2]}{2} &=\\ \frac{(-1)^k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{2}&.\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n\cdot(n+1)}{2},\forall\, n\in\mathbb{N}$. □

Proposição 4.4. $6|n\cdot(n+1)\cdot(n+2),\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n): 6|n\cdot(n+1)\cdot(n+2),\forall\, n\in\mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}6|0\cdot(0+1)\cdot(0+2) &\Rightarrow\\ 6|0\cdot 1\cdot 2 &\Rightarrow\\ 6|0.&\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 6|k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 6|(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3).$$

Temos:

$$\begin{aligned}(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) &= k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 3 \cdot (k+1) \cdot (k+2) \\ &= k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 3k \cdot (k+1) + 6 \cdot (k+1).\end{aligned}$$

Como:

$$6|k \cdot (k+1) \cdot (k+2), 6|6 \cdot (k+1)$$

e, por indução, seja

$$p'(k) : 6|3k \cdot (k+1), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

a) Verifiquemos que $p'(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 6|3 \cdot 1 \cdot (1+1) &\Rightarrow \\ 6|3 \cdot 2 &\Rightarrow \\ 6|6. \end{aligned}$$

b) Admitamos como hipótese de indução que $p'(q)$, com $q \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p'(q) : 6|3q \cdot (q+1)$$

e provemos que decorre a validade de $p'(q+1)$, isto é:

$$p'(q+1) : 6|3 \cdot (q+1) \cdot (q+2).$$

Temos:

$$3 \cdot (q+1) \cdot (q+2) = 3q \cdot (q+1) + 6 \cdot (q+1).$$

Como:

$$6|3q \cdot (q+1), 6|6 \cdot (q+1).$$

Segue:

$$\begin{aligned} 6|3q \cdot (q+1) + 6 \cdot (q+1) &\Rightarrow \\ 6|3 \cdot (q+1) \cdot (q+2). \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $6|3k \cdot (k+1)$.

Segue, assim:

$$\begin{aligned} 6|k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 3k \cdot (k+1) + 6 \cdot (k+1) &\Rightarrow \\ 6|k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 3 \cdot (k+1) \cdot (k+2) &\Rightarrow \\ 6|(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3). \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $6|n \cdot (n+1) \cdot (n+2), \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 4.5. *Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 9|[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3], \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 9|[1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3] &\Rightarrow \\ 9|[1 + 2^3 + 3^3] &\Rightarrow \\ 9|(1 + 8 + 27) &\Rightarrow \\ 9|36. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 9|[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3]$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 9|[(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3].$$

Temos:

$$\begin{aligned} [(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3] &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 9k + 27 \\ &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9 \cdot (k^2 + k + 3). \end{aligned}$$

Como:

$$9|[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3], 9|9 \cdot (k^2 + k + 3).$$

Segue:

$$\begin{aligned} 9|[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9 \cdot (k^2 + k + 3)] &\Rightarrow \\ 9|[(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 9k^2 + 9k + 27)] &\Rightarrow \\ 9|[(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3]. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $9|[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3], \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 4.6. $(1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : (1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1}\right) &= 1+1 \Rightarrow\\ (1+1) &= 1+1 \Rightarrow\\ 2 &= 2.\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : (1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : (1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)+1.$$

Temos:

$$\begin{aligned}(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right) &= (k+1)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\\ &= (k+1)+(k+1)\cdot\frac{1}{k+1}\\ &= (k+1)+1.\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.7. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot(1+1)} &= \frac{1}{1+1} \Rightarrow\\ \frac{1}{1\cdot 2} &= \frac{1}{2} \Rightarrow\\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1): \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&= \frac{k\cdot(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&= \frac{(k+1)\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&= \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$. □

Proposição 4.8. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}, \forall n\in\mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n): \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)} &= \frac{1\cdot(1+3)}{4\cdot(1+1)\cdot(1+2)} \Rightarrow\\
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} &= \frac{1\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 3} \Rightarrow\\
\frac{1}{6} &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k\in\mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k): \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k\cdot(k+3)}{4\cdot(k+1)\cdot(k+2)}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1): \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{(k+1)\cdot(k+4)}{4\cdot(k+2)\cdot(k+3)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} &= \\
\frac{k\cdot(k+3)}{4\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} &= \\
\frac{k\cdot(k+3)^2+4}{4\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} &= \\
\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot(k^2+5k+4)}{4\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot(k+1)\cdot(k+4)}{4\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot(k+4)}{4\cdot(k+2)\cdot(k+3)}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}, \forall\, n\in\mathbb{N}$. □

Proposição 4.9. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}, \forall\, n\in\mathbb{N}.$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n):\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}, \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}
\frac{1^2}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)} &= \frac{1\cdot(1+1)}{2\cdot(2\cdot 1+1)} \Rightarrow \\
\frac{1}{1\cdot 3} &= \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3} \Rightarrow \\
\frac{1}{3} &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k\in\mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k):\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k\cdot(k+1)}{2\cdot(2k+1)}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1):\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2\cdot(2k+3)}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{k\cdot(k+1)}{2\cdot(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+3)+2\cdot(k+1)^2}{2\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot[2\cdot(2k+3)+2\cdot(k+1)}{2\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot(2k^2+5k+2)}{2\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot\left[2\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot(k+2)\right]}{2\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot(2k+1)\cdot(k+2)}{2\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} &= \\
\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2\cdot(2k+3)}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}, \forall\, n\in\mathbb{N}$. □

Proposição 4.10. $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n, \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n): 1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n, \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}
1\cdot 2^{1-1} &= 1+(1-1)\cdot 2^1 \Rightarrow \\
1\cdot 2^0 &= 1+0\cdot 2 \Rightarrow \\
1\cdot 1 &= 1+0 \Rightarrow \\
1 &= 1.
\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k\in\mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k): 1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+k\cdot 2^{k-1}=1+(k-1)\cdot 2^k$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1): 1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^k=1+k\cdot 2^{k+1}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^k &= 1+(k-1)\cdot 2^k+(k+1)\cdot 2^k\\
&= 1+2^k\cdot(k-1+k+1)\\
&= 1+2^k\cdot 2k\\
&= 1+k\cdot(2^k\cdot 2)\\
&= 1+k\cdot 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n, \forall\, n\in\mathbb{N}$. □

Proposição 4.11. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \forall n\in\mathbb{N}, n>1.$

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n):\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \forall\, n\in\mathbb{N}, n>1.$$

i) Verifiquemos que $p(2)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2-1}\right)^{2-1} &= \frac{2^{2-1}}{(2-1)!}\Rightarrow\\
\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} &= \frac{2^1}{1!}\Rightarrow\\
2 &= 2.
\end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k\in\mathbb{N}, k>1$, seja verdadeira:

$$p(k):\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}=\frac{k^{k-1}}{(k-1)!}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1):\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{(k+1)^k}{k!}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\\
&= \frac{k^k\cdot k^{-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\\
&= \frac{1}{k\cdot(k-1)!}\cdot(k+1)^k\\
&= \frac{(k+1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n > 1$. □

Proposição 4.12. $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 1\cdot 1! &= (1+1)! - 1 \Rightarrow \\ 1\cdot 1 &= 2! - 1 \Rightarrow \\ 1 &= 2 - 1 \Rightarrow \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+2)! - 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)! \\ &= (k+1)!\cdot[1 + k + 1] - 1 \\ &= (k+2)\cdot(k+1)! - 1 \\ &= (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.13. $2^n > n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 2^n > n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(0)$ é verdadeira:

$$2^0 > 0 \Rightarrow 1 > 0.$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 2^k > k$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 2^{k+1} > k+1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 2^k &> k \Rightarrow \\ 2^k + 2^k &> k + 2^k \Rightarrow \\ 2 \cdot 2^k &> k + 2^k \Rightarrow \\ 2^{k+1} &> k + 2^k. \end{aligned}$$

Como:

$$2^k \geqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Segue:

$$k + 2^k \geqslant k+1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Daí:

a) se $k + 2^k = k+1$, então $2^{k+1} > k + 2^k = k+1$, ou seja, $2k+1 > k+1$.

b) se $k + 2^k > k+1$, então $2^{k+1} > k + 2^k > k+1$, ou seja, $2k+1 > k+1$.
Então, por (a) e (b), tem - se:

$$2^{k+1} > k+1.$$

Logo, pelo princípio de indução, $2^n > n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.14. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 > \dfrac{n^4}{4}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 > \frac{n^4}{4}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$1^3 > \frac{1^4}{4} \Rightarrow 1 > \frac{1}{4}.$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 > \frac{k^4}{4}$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 > \frac{(k+1)^4}{4}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 &> \frac{k^4}{4} \Rightarrow \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &> \frac{k^4}{4} + (k+1)^3. \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{k^4}{4} + (k+1)^3 &= \frac{k^4}{4} + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= \frac{k^4 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4} \\ &= \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{4} + \frac{6k^2 + 8k + 3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^4}{4} + \frac{6k^2 + 8k + 3}{4}. \end{aligned}$$

Segue:

$$\frac{k^4}{4} + (k+1)^3 > \frac{(k+1)^4}{4}.$$

Daí:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 > \frac{(k+1)^4}{4}.$$

Logo, pelo princípio de indução, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 > \dfrac{n^4}{4}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.15. $2n \geqslant n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : 2n \geqslant n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 &\geqslant 1 + 1 \Rightarrow \\ 2 &\geqslant 2. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : 2k \geqslant k + 1$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : 2(k+1) \geqslant (k+1) + 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} 2k &\geqslant k+1 \Rightarrow \\ 2k+2 &\geqslant (k+1)+2 \Rightarrow \\ 2k+2 &\geqslant (k+1)+1 \Rightarrow \\ 2(k+1) &\geqslant (k+1)+1. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $2n \geqslant n+1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.16. *$(1+a)^n \geqslant 1+na, \forall n \in \mathbb{N}, \forall\, a \in \mathbb{R},\ a \geqslant -1$.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : (1+a)^n \geqslant 1+na, \forall n \in \mathbb{N}, \forall\, a \in \mathbb{R},\ a \geqslant -1.$$

i) Verifiquemos que $p(1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} (1+a)^1 &\geqslant 1+1\cdot a \Rightarrow \\ (1+a) &\geqslant 1+a. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}$, seja verdadeira:

$$p(k) : (1+a)^k \geqslant 1+ka$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : (1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a.$$

Temos:

$$\begin{aligned} (1+a)^k &\geqslant 1+ka \Rightarrow \\ (1+a)^k\cdot(1+a) &\geqslant (1+ka)\cdot(1+a) \Rightarrow \\ (1+a)^{k+1} &\geqslant 1+a+ka+ka^2 \Rightarrow \\ (1+a)^{k+1} &\geqslant [1+(k+1)a]+ka^2, ka^2>0 \Rightarrow \\ (1+a)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)a. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, $(1+a)^n \geqslant 1+na, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, a \in \mathbb{R},\ a \geqslant -1$. □

Proposição 4.17. *$n! > 2^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$.*

Demonstração. Vamos provar por indução. Seja

$$p(n) : n! > 2^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4.$$

i) Verifiquemos que $p(4)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 4! &> 2^4 \Rightarrow \\ 4\cdot3\cdot2\cdot1 &> 2\cdot2\cdot2\cdot2 \Rightarrow \\ 24 &> 16. \end{aligned}$$

ii) Admitamos como hipótese de indução que $p(k)$, com $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 4$, seja verdadeira:

$$p(k) : k! > 2^k$$

e provemos que decorre a validade de $p(k+1)$, isto é:

$$p(k+1) : (k+1)! > 2^{k+1}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} k! &> 2^k \Rightarrow \\ (k+1) \cdot k! &> (k+1) \cdot 2^k \Rightarrow \\ (k+1)! &> 2^k \cdot (k+1). \end{aligned}$$

Como:

$$k \geqslant 4 \Rightarrow (k+1) \geqslant 5 > 2.$$

Segue:

$$2^k \cdot (k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

Daí:

$$(k+1)! > 2^k \cdot (k+1) > 2^{k+1} \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}.$$

Logo, pelo princípio de indução, $n! > 2^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$. $\square$

Apêndice B

Já neste apêndice, deixamos algumas proposições não demonstradas para que o professor, desejando, possa implementar em sua sequência didática. Claro que se o amigo professor se sentir desafiado poderá, como um exercício, demonstrá-las para se aprimorar nesse tema.

Proposição 4.18. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.19. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.20. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.21. $2|(n^2 + n), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.22. $3|(n^3 + 2n), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.23. $8|(3^{2n} - 1), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.24. $80|(3^{4n} - 1), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.25. $9|(4^n + 6n - 1), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.26. $8|(3^{2n} + 7), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.27. $9|(n \cdot 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^n + 1), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.28. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.29. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{1}{2n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.30. $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.31. $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Proposição 4.32. *Mostre, para $n, m \in \mathbb{N}$, que*

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1) + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m-1) \quad &= \\ \frac{1}{m+1} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m). \end{aligned}$$

Proposição 4.33. $n! > 3^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 7.$

Proposição 4.34. $n! > 4^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 9.$