UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

JOGOS MATEMÁTICOS COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO MÉDIO

Lucielma Meyre da Silva Almeida

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadores: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer
Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2020

A447j Almeida, Lucielma Meyre da Silva.
Jogos matemáticos como recurso didático no ensino médio / Lucielma Meyre da Silva Almeida. - Campina Grande, 2020.
91f. : il. Color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer, Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Ensino Médio. 2. Jogos Matemáticos. 3. Recurso Didático. I. Nemer, Rodrigo Cohen Mota. II. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. III. Título.

CDU 373.5:51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS CRB-15/93

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Jogos Matemáticos Como Recurso Didático No Ensino Médio

por

Lucielma Meyre da Silva Almeida †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Jogos Matemáticos Como Recurso Didático No Ensino Médio

por

Lucielma Meyre da Silva Almeida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB

Prof. José Lindomberg Possiano Barreiro - UFCG

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer - UFCG
Orientador

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Coorientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2020

Dedicatória

Às pessoas mais importantes na minha vida: Cicero, Ludmilla, Caio, Francisca, Luiz e Eurides.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir realizar esse trabalho, foram tantos obstáculos que surgiram e Ele com Sua infinita bondade sempre agindo na minha vida.

Agradeço,

Ao meu esposo e companheiro, Cicero, aos meus filhos, Ludmilla e Caio e à minha sogra, Francisca, pelo amor, carinho, incentivo, por toda a compreensão nos momentos que precisei me ausentar e por estarem sempre ao meu lado me dando força pois sem eles não teria conseguido.

Aos meus pais, Luiz e Eurides, por seu empenho para que eu pudesse estudar e por suas orações para que eu conseguisse vencer todos desafios encontrados ao longo do curso.

A todos os meus amigos que fazem parte da Escola Estadual General Joaquim Inácio pelo apoio e à equipe gestora e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

A todos os integrantes da Escola de Referência em Ensino Médio José Pereira Burgos, em especial aos professores, equipe gestora e alunos que colaboraram com a realização do meu trabalho.

À todas as minhas amigas que torceram para que eu conseguisse concretizar este trabalho e à Diana Sheila, por me ajudar na correção ortográfica e gramatical do texto.

Aos amigos que conquistei no PROFMAT, Marília - a amiga-irmã que conheci no ENA e esteve ao meu lado nos meus piores e melhores momentos durante o curso, Matheus - além de amigo de viagens foi um grande incentivador que me auxiliou em cada disciplina, Bruno, Renato, Geraldo, Sandra, Rejane, Hydayne, Márcio, Eduardo, Teófilo, Wagner e Daniel, serei sempre grata pela colaboração de cada um para que eu pudesse superar todas as dificuldades que passei e lembrarei de todos os bons momentos que vivemos.

A todos da UFCG, em especial aos professores: Alessandro Bezerra Cavalcanti, Deise Mara Barbosa de Almeida, Denilson da Silva Pereira, Jaime Alves Barbosa, Luiz Antonio da Silva Medeiros, Marcelo Carvalho Ferreira e Romildo Nascimento de Lima por todos os ensinamentos que muitas vezes foram além dos conteúdos apresentados, às secretárias da UAMat e aos terceirizados pelo acolhimento e excelente trabalho que realizam.

Aos meus orientadores, Professor Rodrigo Cohen Mota Nemer e o Professor Daniel Cordeiro de Morais Filho, que aceitaram a minha proposta do tema, acreditaram no meu potencial e incentivaram a superar minhas dificuldades, sempre dispostos a auxiliar no aprimoramento do meu trabalho. Jamais esquecerei de todo o aprendizado que obtive e das mudanças maravilhosas que aconteceram na minha vida graças a ajuda e apoio de vocês.

Aos professores que fizeram parte da Banca Examinadora, Maria Isabelle Silva e José Lindomberg Possiano Barreiro pelas observações para que pudesse aprimorar este Trabalho de Conclusão de Curso.

A todos que participaram direta e indiretamente na construção deste trabalho.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de analisar como o processo do ensino da Matemática pode ser facilitado com a utilização de jogos matemáticos elaborados com base na BNCC e oferecer propostas didáticas que apresentem elementos necessários para que a participação dos alunos nas aulas de Matemática do Ensino Médio seja realizada ativamente. O intuito é mostrar que esse recurso didático pode ser empregado nessa etapa da educação básica, adotando uma nova postura educacional para auxiliar de modo eficaz e tornar satisfatória a aprendizagem desta disciplina. Enfatizando ainda por meio de um relato de experiência que a aplicação dos jogos matemáticos traz além da possibilidade de aprender determinados conteúdos, outras situações de aprendizagem como: a socialização, o respeito às regras, a participação na coletividade e a reflexão sobre o saber perder e ganhar.
Palavras Chaves: Ensino Médio. Jogos matemáticos. Recurso didático.

Abstract

This work aims to analyze how the process it can be facilitated with the use of mathematical games developed based on the BNCC and offer didactic proposals that present elements necessary for the development of the game participation of students in high school mathematics classes is held actively. The aim is to show that one can employ this teaching resource at this stage of basic education adopting a new educational approach to assist effectively and make satisfactory the learning of this discipline. Also emphasizing through an experience report that the application of mathematical games brings beyond the possibility of learning certain content, other learning situations such as: socialization, respect for rules, participation in the community and reflection on knowing how to lose and win.
Keywords: High school. Mathematical games. Teaching resources.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento matemático se faz necessário em várias situações diárias, como instrumento para lidar com circunstâncias da vida cotidiana, apoiando outras áreas do conhecimento ou, ainda, desenvolvendo habilidades de pensamento.

No Ensino Médio, a Matemática deve ser entendida como uma parcela do conhecimento necessário para a formação do jovem, pois contribui para a construção de uma visão de mundo e desenvolve capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

A autora, como professora de Matemática do Ensino Médio, percebeu a necessidade de utilizar o jogo matemático como recurso didático na realização do processo de ensino-aprendizagem, com o intuito de mostrar que é possível introduzir conceitos e aprofundar o conhecimento de conteúdos de forma lúdica e motivadora.

A proposta deste trabalho surgiu a partir de experiências pessoais vivenciadas na Escola de Referência em Ensino Médio José Pereira Burgos, em que a autora trabalha, onde todos os anos há um momento para a realização de jogos matemáticos com as turmas do Ensino Médio.

Nessas ocasiões, a empolgação dos alunos foi perceptível durante o tempo em que eles estavam jogando. Como esse evento era realizado esporadicamente, a autora se questionou sobre a necessidade de torná-lo mais frequente. Então, ela decidiu escolher este tema como proposta para realizar seu Trabalho de Conclusão de Curso e começou a pesquisa bibliográfica, tendo em vista seu embasamento teórico.

Em uma conversa com outros professores de Matemática, eles afirmaram que também sentiam a necessidade de utilizar os jogos, pois eram um ótimo instrumento para superar as dificuldades apresentadas por alguns alunos para aprender determinados conteúdos. Por sua vez, a coordenadora pedagógica relatou que a ideia da escola, em realizar um evento com a aplicação de jogos matemáticos, surgiu a partir dos resultados dos indicadores avaliativos da escola, que eram insatisfatórios. Com o objetivo de melhorar os índices, segundo ela, a proposta pretendia levar suavidade, interação e dinamismo ao ensino e aprendizagem da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) [3] e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2] foram utilizados para dar suporte teórico, tendo em vista que suas competências e habilidades faziam o alinhamento entre os conteúdos selecionados e os jogos propostos.

A pesquisa começou em setembro de 2019, quando aconteceram os primeiros encontros com os orientadores para analisar o tema pretendido. Nas reuniões seguintes foram discutidas as ideias para a elaboração dos jogos propostos, levando em conta os conteúdos que são trabalhados na última etapa da Educação Básica e as competências e habilidades propostas pela BNCC [2] e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) [3].

Neste trabalho são apresentados jogos matemáticos inéditos e propostas didáticas, envolvendo conteúdos que fazem parte do currículo do Ensino Médio. Tendo como objetivo motivar e despertar o interesse do aluno em aprender Matemática, construindo um novo conceito de aprendizagem e um olhar diferente para o universo da disciplina. Enquanto suporte metodológico, o jogo é uma alternativa muito positiva e estimulante da aprendizagem da Matemática, uma vez que historicamente essa disciplina traz uma carga de dificuldades e angústias entre professores e estudantes.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estimular a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio através de jogos, que são recursos didáticos que permitem ao aluno criar, testar e refazer o raciocínio para se chegar a um propósito, despertando o interesse e o gosto pelo estudo da disciplina.

Para que o objetivo geral seja alcançado tem-se como objetivos específicos:

- Perceber como diversos povos em diferentes épocas utilizavam os jogos;
- Mostrar que a Matemática pode ser entendida através de jogos que apresentam situações desafiadoras;
- Ressignificar conceitos previamente aprendidos de uma forma motivadora para os alunos;
- Explorar elementos como a inclusão, criatividade, interação social e conscientização sobre a importância do trabalho em grupo;
- Proporcionar a participação ativa dos alunos na construção do seu próprio conhecimento.

1.2 Organização

Neste trabalho, é mostrado como os jogos matemáticos podem tornar as aulas mais divertidas e agradáveis. Ao utilizar os jogos, há uma oportunidade de socialização dos alunos, pois existe cooperação e participação da equipe na busca de resolver o problema proposto e consequentemente alcançar a vitória. Entretanto, para que isso aconteça, o professor precisa planejar e ofertar um jogo interessante e desafiador, que incite o aluno a buscar a solução para os desafios propostos.

Para que nosso objetivo seja alcançado, além deste capítulo, este trabalho está assim organizado:

No segundo capítulo, são destacados alguns aspectos, como a utilização dos jogos matemáticos ao longo da história por diversos povos, a relação entre as funções lúdica e educativa, a classificação dos tipos de jogos matemáticos para que se possa escolher o mais adequado para cada situação em que será utilizado, as vantagens de sua utilização, mostrando a importância dos jogos como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem.

No terceiro capítulo, serão apresentados os jogos elaborados pela autora com o auxílio dos orientadores, retratando a motivação para elaboração de cada jogo, e ainda, destacando algumas características, como o conteúdo com o qual está relacionado, o material utilizado, as regras que devem ser obedecidas e a apresentação teórica de forma breve do conteúdo abordado em cada jogo.

No quarto capítulo, serão apresentadas propostas didáticas para trabalhar conteúdos do Ensino Médio utilizando os jogos matemáticos, expostos no Capítulo 3, como recursos didáticos.

No quinto capítulo, serão relatadas: a experiência da aplicação de uma proposta didática em uma turma do Ensino Médio de uma escola pública estadual, a aplicação e análise de um questionário com enfoque na importância da utilização do jogo nas aulas de Matemática e a experiência da criação e elaboração dos jogos propostos no Capítulo 3.

No sexto capítulo, será apresentada a conclusão à qual chegou-se com a realização do trabalho.

Por fim, seguem as Referências Bibliográficas e os Apêndices, nesta ordem.

Capítulo 2

Os jogos matemáticos como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem da Matemática

Neste capítulo, são abordadas algumas particularidades sobre os jogos matemáticos como sua utilização ao longo da história por diversos povos, a relação existente entre as funções lúdica e educativa, a classificação dos seus tipos para a escolha adequada em cada situação em que será utilizado e as vantagens de sua utilização. O propósito é ressaltar sua importância como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem.

2.1 Os jogos matemáticos ao longo do tempo

Os jogos estão presentes no cotidiano da humanidade desde os tempos mais longínquos e até hoje podem ser encontrados em diferentes sociedades.

De acordo com KISHIMOTO [12], "a origem dos jogos não pode ser identificada e nem datada, uma vez que sempre esteve presente no cotidiano de diversos povos de épocas bem distintas, nas quais através de suas dinâmicas sociais e históricas deixou marcas em seus praticantes". Para HUIZINGA [10], "o jogo é tão antigo quanto a civilização e o puro e simples ato de jogar constitui uma das principais bases desse povo. Além disso, relata que o jogo é mais antigo que a cultura, pois esta, mesmo em suas definições menos rigorosas, presume sempre a sociedade humana".

Dentre os mais diferentes jogos existentes, destacam-se os jogos matemáticos. Segundo NETO [18], são aqueles que não possuem componentes do acaso e nem informação subentendida, sendo também designados por jogos de informação perfeita ou jogos abstratos. Tendo como exemplo os *puzzles* (quebra-cabeças), os jogos de tabuleiro e os problemas e atividades simples, como charadas ou enigmas. De acordo com BORIN [6], esses jogos estimulam o raciocínio e aperfeiçoam elementos como observação, concentração, análise e atenção, que são fundamentais para o aprendizado de Matemática.

A história dos jogos matemáticos remonta há milênios antes de Cristo e as referências históricas são encontradas em registros das mais antigas civilizações em diferentes épocas, conforme serão destacadas adiante.

Segundo O´CONNOR [42], a Matemática grega produziu muitos jogos sob a forma de quebra-cabeças clássicos. Talvez os mais famosos sejam de Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) apresentados no livro O Contador de areia , citado por MENDELL em [41] onde ele propõe um dos desafios que mais se destaca que é o Problema do Gado que é assim anunciado: “Se fores diligente e sábio, ó estranho, calcule o número de gado do Sol $\cdots$”

Conforme o egiptólogo Pierre Montet (1885-1966) afirma em [15], os egípcios eram jogadores que jogavam por passatempo, muito embora até os inimigos resolvessem suas diferenças por meio desse entretenimento.

Segundo MURRAY [17], as primeiras civilizações que registraram a existência de artefatos definidos como jogos de tabuleiros, achados por arqueólogos, foram as do Egito e da Babilônia. O mais antigo deles, ainda composto por todas as suas peças, foi descoberto ao norte de Abidos, no Egito, mas as regras que explicavam como jogá-lo não sobreviveram. Um desses jogos mais conhecidos é o *Senet*, de acordo com BELL [1], é um jogo egípcio de tabuleiro, dividido em três fileiras de dez sessões, que embora não se tenha conhecimento exato de suas regras, tratava-se de um jogo de estratégia; sua construção variava bastante com relação aos materiais e técnicas empregados, alguns gravados em pedra, outros moldados em barro ou em madeira.

Os chineses, para se divertir e ocupar o tempo, criaram vários jogos e passatempos que utilizavam a Matemática. Segundo MURRAY [17], no que diz respeito ao famoso jogo Go, há evidências que tenha evoluído de algum objeto utilizado para marcar datas e épocas do ano. Uma lenda, no entanto, afirma que este foi criado como um instrumento do imperador Yao (2337-2258 a.C.) para educar seu filho Danzhu na disciplina, na concentração e no equilíbrio. Além desta versão, de acordo com SILVA [48], outras versões para a criação desse jogo é que ele surgiu com propósitos divinatórios para controle de enchentes, como símbolo da ordem cosmológica e para ser usado por generais chineses para estabelecer estratégias de guerra.

A história dos jogos matemáticos está ligada a nomes de grandes matemáticos. Vale a pena citar Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) que de acordo com O´CONNOR [42], criou quebra cabeças clássicos e também inventou uma divisão de um quadrado em 14 peças, levando a criação de um jogo semelhante ao Tangram, exposto em [45]; Leonhard Euler (1707-1783), que criou os quadrados latinos que foram utilizados na criação do Sudoku conforme afirma YOUNG em [46] ; Édouard Lucas (1842-1891), que criou a Torre de Hanói, como pode ser visto em [28].

2.1.1 Breve histórico de alguns jogos matemáticos

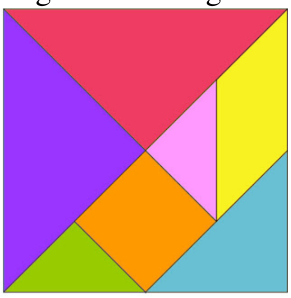
Muitos jogos matemáticos conhecidos, como o Tangram, os Quadrados mágicos, o Sudoku, a Torre de Hanói e o Ouri, embora tenham sido usados por muito tempo apenas como diversão, foram contribuindo como elementos estimuladores do raciocínio, e nos dias atuais, têm auxiliado como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Adiante será apresentado um breve histórico de cada um desses jogos e algumas de suas características serão destacadas.

Tangram

De acordo com MOREIRA [32], o Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar, formado por sete peças a partir de um quadrado. Apresenta regras bem simples: todas as peças devem ficar em contato e não pode haver sobreposição. As peças que fazem parte do Tangram, conforme podemos ver na Figura 2.1 são: dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo.

Figura 2.1: Tangram.



[Fonte:www.espacoeducar.net.com]

Segundo READ [20], o criador e vendedor de quebra-cabeças Sam Loyd (1841–1911) apresentou uma história imaginária acerca da origem do Tangram no livro intitulado como *Oitavo Livro de Tan*. Loyd alegou que o Tangram tinha vários milênios de idade, embora não soubesse exatamente a data de seu surgimento e acreditasse que sua origem tivesse sido durante a dinastia chinesa Song, entre os anos de 960 e 1279 d.C. A referência mais antiga de sua utilização é descrita em um livro publicado na China em 1813 que segundo ele foi trazido por um capitão de um navio americano.

Conforme afirma MOREIRA [32], não há anotações históricas que comprovem a origem da palavra Tangram embora existam várias versões. Uma dessas, relata que a origem da primeira parte –tan– é muito duvidosa e abstrata e como existem várias tentativas de explicação, está relacionada à dinastia Tang (618-906), uma vez que em certos dialetos da China a palavra *Tang* é sinônima de “chinês” e a parte final da palavra –gram– significa “algo desenhado” ou “escrito como um diagrama”. E uma outra versão, de sua origem etimológica está ligada à palavra chinesa "*Tchi Tchiao Pan*", cuja tradução seria “os sete pedaços inteligentes” ou “sete peças da sabedoria”. Quanto à sua origem, também existem várias lendas, dentre elas serão destacadas algumas dessas versões apresentadas por SMOLE et al. [22]:

O mensageiro e o Imperador

> "Há cerca de 4000 anos atrás, um mensageiro partiu o espelho quadrado do imperador Tan, quando o deixou cair ao chão. O espelho partiu-se em sete pedaços. Preocupado, o mensageiro foi juntando as sete peças, a fim de remontar o quadrado. Enquanto tentava resolver o problema, o mensageiro criou centenas de formas de pessoas, animais, plantas, até conseguir refazer o quadrado."

O discípulo e o mestre

> "Um jovem chinês despedia-se do seu mestre para fazer uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:
> – Com esse espelho, registrarás tudo o que vires durante a viagem para me mostrares na volta.
> O discípulo, surpreso, indagou:
> – Mas mestre, como poderei mostrar-lhe, com um simples espelho, tudo o que encontrar durante a viagem?
> No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete peças.
> Então o mestre disse:
> – Agora poderás, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viste durante a viagem."

O Senhor Tan e o azulejo

> "Era uma vez, num país muito distante, um senhor chinês chamado Tan. O senhor Tan vivia num palácio dourado, junto de um lago. O que ele mais adorava era passear à volta do lago durante horas a fio... Um dia, enquanto vagueava no meio dos juncos, viu no chão um objeto brilhante. Abaixou-se e descobriu um magnífico azulejo de prata. Apanhou-o e admirou-o pois o azulejo era liso como a superfície do lago, macio como uma pluma, brilhante como o seu traje. Quis virá-lo, mas... infelizmente, o lindo azulejo escapou-lhe das mãos e partiu-se no chão em 7 pedaços. O senhor Tan, desiludido, tentou reconstituí-lo. Juntando as peças, criou a forma de uma pequena personagem. Deslocou mais umas peças e, para seu espanto, formou-se uma linda casa. O senhor Tan regressou ao palácio muito entusiasmado por ter inventado um novo jogo, o qual deu o nome de *Tangram* e mandou fabricar um para cada habitante do seu reino."

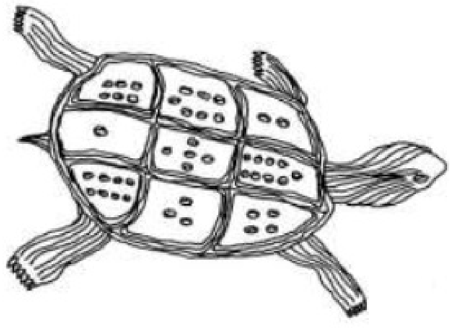
Se tais histórias são verdadeiras não se sabe, no entanto, essa é a essência do Tangram: um quadrado que pode ser confeccionado com diversos materiais, madeira e papel, que ao ser decomposto em sete outras formas geométricas, possibilita a criação de inúmeras figuras– em verdade de acordo com IMENES [26], a partir dessas peças, é possível criar e montar cerca de 1700 figuras que representam animais, plantas, pessoas, objetos, letras e números.

O Tangram instiga a criatividade e o raciocínio lógico, utiliza ludicidade, sendo natural imaginá-lo importante para o ensino da Matemática. Segundo IMENES [26], é possível utilizá-lo na identificação de formas geométricas, na composição e decomposição de figuras, nas relações entre os elementos de uma figura, na exploração dos conceitos de perímetro e área de figuras planas, na resolução de situações problema envolvendo proporção e razão, e na observação de simetrias e semelhanças. Para história do Tangram,vide também [43].

Quadrados mágicos

Os quadrados mágicos são considerados um dos desafios matemáticos mais antigos e intrigantes. Em relação à sua origem existem diversas versões, mas há uma evidência maior que tenha vindo da China por volta de 3000 a.C. Para FULTS [8], os chineses foram os primeiros a descobrir as propriedades dos quadrados mágicos e provavelmente foram também seus inventores. Essa referência traz, ainda, uma lenda sobre a origem do jogo: A lenda conta que o imperador da antiga China, chamado *Yu*, da dinastia Hsia, costumava caminhar com frequência nas margens do rio Lo. Certo dia, observou a presença de uma tartaruga, que possuía um casco diferente, onde se podia notar as marcas de pontos e alguns quadros, conforme pode ser visto na Figura 2.2.

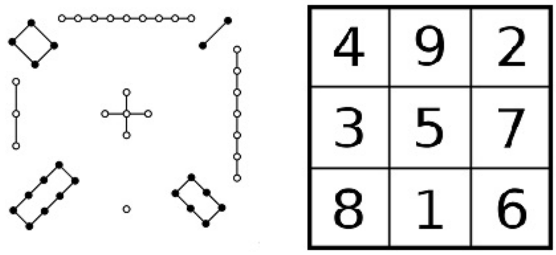
Figura 2.2: Tartaruga encontrada pelo imperador Yu no rio Lo.



[Fonte: FULTS,1974]

O imperador Yu pegou a tartaruga pela cauda e começou a contar os pontos nos quadros, observando que cada um possuía quantidades diferentes de pontos variando de um a nove e, para seu espanto, notou que somavam quinze em todas as direções, como se fossem algarismos mágicos, como pode ser visto na Figura 2.3. A este padrão encontrado no casco da tartaruga, deu-se o nome de Lo Shu, pois na época achava-se que esses tipos de quadrados tivessem poderes especiais, fazendo com que muitos usassem gravados em metal ou em pedra, em forma de amuletos ou talismãs.

Figura 2.3: O padrão Lo Shu e o quadrado mágico.



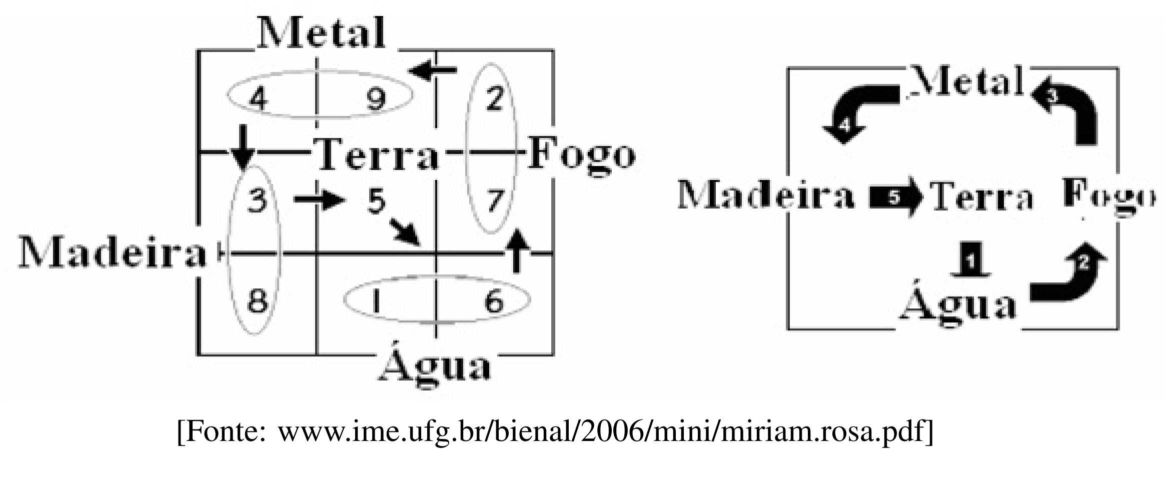
[Fonte:www.commons.wikimedia.org]

Segundo SANTINHO [47], atribuiu-se ao Lo Shu um caráter enigmático, pois entendia que ele era o elemento que reunia os princípios básicos que formavam o Universo. De fato, os números que apareciam no Lo Shu não estavam dispostos de modo aleatório, tendo seu significado, conforme ele anunciara:

- “os números pares simbolizavam o princípio feminino, o *Yin*:
- os números ímpares simbolizavam o princípio masculino, o *Yang*;
- o número 5 representava a Terra e ao seu redor estavam distribuídos os quatro elementos principais, a água nos números 1 e 6, o fogo nos números 2 e 7, a madeira nos números 3 e 8, os metais nos números 4 e 9.”

Na Figura 2.4, podem ser observadas a representação mística do Lo Shu e a relação entre os números e os elementos.

Figura 2.4: A representação mística do Lo Shu.



[Fonte: www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/miriam.rosa.pdf]

De acordo com POSSAMAI [33], os quadrados mágicos ficaram conhecidos na Europa a partir da obra “Tratado de Quadrados Mágicos” do escritor Manuel Moschopoulos (1282-1328), que segundo BROWN [40] foi um estudioso e professor bizantino bem conhecido pelos classicistas por seu trabalho na edição e parafraseamento de textos gregos clássicos.

Na época, os quadrados mágicos eram relacionados à Alquimia, sendo gravados em uma placa de prata para serem usados como amuleto contra a Peste Negra, doença devastadora que ocorreu na segunda metade do século XIV, na Europa.

Ainda segundo SANTINHO [47], na Idade Média se tornaram muito populares pelo seu uso em talismãs onde eram associados aos planetas. O físico alemão Heinrich Cornelius Agrippa (1486-1535) construiu sete quadrados mágicos e lhes atribuiu um significado astronômico, de modo que representavam simbolicamente os sete planetas conhecidos por ele incluindo o Sol e a Lua (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno, o Sol e a Lua). Além de todas essas conotações místicas, SANTINHO [47] enfatiza que os quadrados mágicos também despertaram interesse em alguns matemáticos pelos problemas difíceis que originaram, em relação à sua construção, classificação e enumeração.

Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n^2 elementos distintos, dispostos de tal maneira que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou das diagonais têm a mesma soma chamada *soma mágica do quadrado*. A ordem do quadrado mágico corresponde ao número de elementos de uma linha, uma coluna ou uma diagonal. Os elementos utilizados para realizar a soma mágica podem ser números positivos, números negativos, frações ou potências. Os quadrados mágicos também oferecem a possibilidade de mudanças na sua realização: em vez de apresentar uma soma mágica pode ser utilizado um produto mágico. Além de ser um jogo de fácil abordagem, ele desperta a curiosidade e pode ser utilizado para abordar os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais.

Sudoku

O ancestral do Sudoku, como afirma NUNES [39], não é o quadrado mágico. A não ser pela presença de números e pelo formato, o Sudoku não guarda quase nenhuma relação com o jogo citado, mas tem tudo a ver com o quadrado latino.

Ainda de acordo com NUNES [39], esses quadrados foram uma construção matemática concebida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) no século XVIII. Foram apresentadas duas versões para o objetivo da criação dos quadrados latinos: uma delas diz que o jogo nasceu da tentativa de resolver um problema comum nas famílias, que era fazer os filhos se interessarem por Matemática; a outra é que teria sido proposto um desafio ao matemático, no qual trinta e seis oficiais do exército, cada um com uma patente, teriam que ser dispostos em seis regimentos diferentes, de tal forma que não fossem repetidos nem o regimento e nem a patente. Euler resolveu o problema desenvolvendo um quadrado de ordem n, ou seja, uma matriz quadrada de ordem n preenchida com n símbolos de tal forma que o mesmo símbolo nunca se repetia na mesma linha ou coluna como pode ser observado na Figura 2.5.

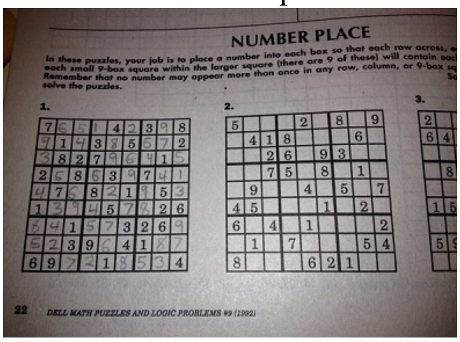
Figura 2.5: Quadrado latino

1	34	33	32	9	2
29	11	18	20	25	8
30	22	23	13	16	7
6	17	12	26	19	31
10	24	21	15	14	27
35	3	4	5	28	36

[Fonte: https://www.matematica.com.br/blog]

De acordo com TEIXEIRA [29], o Sudoku foi projetado por Howard Garns (1905-1989), um arquiteto aposentado de 74 anos de idade e construtor independente de *puzzles*, baseando-se nos quadrados latinos. Ele adicionou ao quadrado latino uma grade parcialmente preenchida onde o solucionador deveria preencher os demais quadros vazios, criando, assim, a sua versão. O formato com 9 linhas e 9 colunas se tornou popular quando começou a ser publicado nos EUA, na década de 1970 na revista americana *Math Puzzles and Logic Problems*, da editora *Dell Magazines*, especializada em desafios e quebra-cabeças. A editora deu ao jogo o nome de *Number Place*, usado até hoje nos Estados Unidos. A Figura 2.6 apresenta um exemplar de um *Number Place* publicado em 1992.

Figura 2.6: Exemplar de um *Number Place* publicado na revista *Dell Magazine*.



[Fonte: https://motris.livejournal.com]

De acordo com a revista *Sientific American Brasil* [27] em 1984, a *Nikoli*, maior empresa japonesa de quebra-cabeças, descobriu o *Number Place* e decidiu levá-lo ao Japão, e lá foi denominado de Sudoku – "número único", "número sozinho". Em 1986, depois de alguns aperfeiçoamentos no nível de dificuldade e na distribuição dos números, o Sudoku tornou-se um dos jogos mais vendidos do Japão e apesar de toda a popularidade conquistada nesse país, não conseguiu atrair a mesma atenção no Ocidente até o final de 2004. Um juiz neozelandês aposentado, Wayne Gould, teve contato com a diversão em 1997 e dedicou seis anos para montar um programa de computador que gerasse novos jogos rapidamente. Em 12 de novembro de 2004, o jornal *The Times* tendo adquirido o programa deu o pontapé inicial e cinco meses depois em abril de 2005, o jogo já havia conquistado muitos outros jornais.

Aqui no Brasil, é divulgado desde 1994 pela Revista Coquetel do Grupo Ediouro. Em [44] pode-se obter mais informações a respeito da história desse jogo.

De acordo com TEIXEIRA [29], o Sudoku está estruturado como um quebra-cabeças em formato de um quadrado dividido em n linhas e n colunas que deve ser preenchido com n símbolos diferentes onde cada símbolo aparece uma só vez em cada linha e em cada coluna. Os elementos utilizados para o seu preenchimento podem ser os mais variados possíveis, números, letras, formas geométricas e desenhos, por exemplo. De acordo com os símbolos escolhidos para preenchê-lo, pode ser utilizado com alguns conteúdos matemáticos como frações, conjuntos numéricos e geometria plana.

Segundo NUNES [39], o Sudoku tem conquistado adeptos no que diz respeito à sua aplicação como recurso didático nas aulas de Matemática, pois seu processo de resolução têm aumentado grandemente a simpatia dos alunos com os conteúdos relacionados à matéria, impulsionando seu aproveitamento e obtendo resultados satisfatórios. Por sua própria natureza, o Sudoku não serve apenas para levar diversão para a sala de aula, ele também estimula o raciocínio lógico e a concentração, já que para preencher os espaços vazios, o jogador deve analisar e justificar mentalmente as ações realizadas em cada jogada.

Torre de Hanói

De acordo com SILVA [35], em meados de 1883, o matemático francês François Edouard Anatole Lucas (1842 – 1891), com o pseudônimo de *Claus*, um anagrama de seu nome, apresentou ao mundo um jogo matemático que hoje é conhecido como “Torre de Hanói”, “torre de bramanismo” ou ainda como o “jogo do fim do Mundo”. Segundo SOUZA [36], Lucas o incluiu no terceiro volume da sua obra *Récréations Mathématiques*, publicada também em 1883. Esta primeira publicação dizia que o jogo teve origem em Hanói, no Vietnã, tornando-se muito popular na China e no Japão, sendo oferecida uma quantia de mais de um milhão de Francos para quem resolvesse o problema da Torre de Hanói com 64 peças. Neste mesmo ano, o jogo passou a ser comercializado como brinquedo, cuja capa está representada na Figura 2.7.

Figura 2.7: Capa do Jogo Torre de Hanói de 1883.

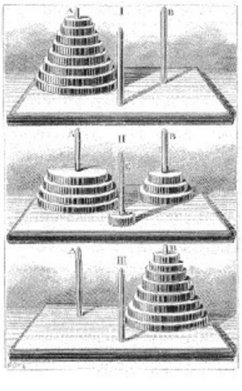
[http://olmo.pntic.mec.es/ aserra10/articulos/hanoi.html]

Segundo WATANABE [24], a razão para os outros dois nomes dados à Torre de Hanói, reside no fato de Lucas ter anexado ao jogo uma história de uma antiga lenda hindu que dizia o seguinte:

> "O templo de Benares, cidade santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Durante a Criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma. Durante o dia e à noite os sacerdotes trocariam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o debaixo nunca fosse menor do que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, ao se terminar esta tarefa, o templo se reduziria à pó e com um estrondo de trovões o mundo se acabaria."

Ainda de acordo com SOUZA [36], esse jogo consiste em uma torre com oito discos com furos centrais, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em três hastes verticais, tendo como objetivo transferir a torre inteira para uma das outras hastes, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor, como pode ser observado na Figura 2.8.

Figura 2.8: Torre de Hanói



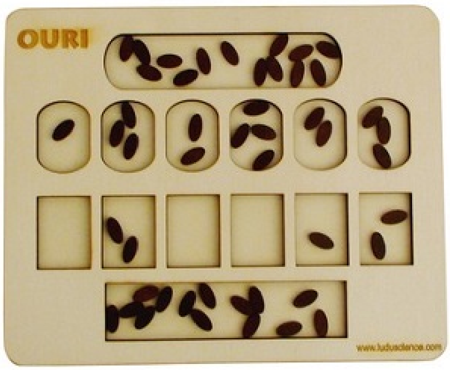
[http:olmo.pntic.mec.es/ aserra10/articulos/hanoi.html]

A Torre de Hanói é o jogo mais conhecido do mundo matemático, segundo SILVA [35], pois mesmo apresentando diversos níveis de dificuldade em decorrência da variabilidade da quantidade de discos disponíveis, é aplicado em todos os níveis de ensino desde a educação infantil até o ensino superior. Este jogo possui regras muito simples e pode estimular as habilidades mentais de concentração, planejamento das ações, diferenciação das formas geométricas, percepção de tamanho e forma. Além de proporcionar o estabelecimento de estratégias para a transferência das peças, para a contagem dos movimentos e para a utilização do raciocínio indutivo e das relações de recorrência. Envolve a lógica e desenvolve o raciocínio matemático, e a partir dele podem ser abordados implicitamente alguns conteúdos matemáticos como contagem, potenciação, conceito de diferenciação de áreas, função exponencial, noções do princípio de Indução Finita.

Jogo Ouri

O jogo matemático africano "Ouri" pertence a uma família de jogos de tabuleiro designados por Mancala e "é considerado o mais difundido no Brasil" como afirma BARRETO [31]. Conforme é definido por WALKER [25],"Mancala é um jogo de tabuleiro de contar e capturar, jogado por duas pessoas, num tabuleiro contendo dois, três ou quatro fileiras paralelas de depressões no formato de copo ou simplesmente buracos, utilizando um predeterminado número de peças idênticas ou sementes", como pode ser visto na Figura 2.9.

Figura 2.9: Tabuleiro do Ouri.



[http://www.luduscience.com/ouri.html]

BARRETO [31] afirma que o Ouri é um dos jogos mais conhecidos da família Mancala porque possui regras compreensíveis e pode ser utilizado por crianças e adultos. Possibilita o desenvolvimento de estratégias enquanto os jogadores analisam as peças no tabuleiro e as chances de jogadas presentes no jogo. Apesar de muito simples, não basta apenas conhecer suas regras para saber jogar, uma vez que é de pura habilidade mental baseada em contagem, e não envolve nenhum elemento externo de sorte ou azar. Requer cálculo e reflexão, pois é necessário saber escolher com segurança entre as hipóteses possíveis que se oferecem em cada jogada, bem como prever os ataques do adversário. Seu objetivo é realizar uma grande colheita, e desse modo, o jogador que colher mais sementes até o final da partida, ganha. No Apêndice A, encontram-se as instruções do jogo Ouri, descrição do material utilizado e das regras e procedimentos para sua realização. Ainda segundo BARRETO [31], este jogo desperta o interesse e mobiliza a atividade do aluno na Matemática, pois alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição. Sua prática contribui para o desenvolvimento da capacidade de formalização de estratégias, memorização e interação social, já que proporciona atividades cooperativas de aprendizagem orientadas para a inclusão e troca de conhecimento de forma lúdica. Sendo possível, por meio de sua utilização, explorar conteúdos matemáticos como contagem, análise de possibilidades e operações básicas, como a adição e a subtração.

Conclusões

Depois de realizada a pesquisa para o embasamento desta subseção, não foram encontradas referências que apresentassem uma motivação pedagógica para a criação dos jogos mencionados, até mesmo porque na época que eles foram criados não existia o interesse em trabalhá-los didaticamente. Porém, a presença de elementos matemáticos fez com eles sejam empregados nas salas de aula. O xadrez, o dominó e o jogo de damas também não foram criados para fins educacionais, mas são utilizados para se trabalhar com a Matemática. Foi encontrada uma extensa lista de referências que abordavam a sua aplicação como recurso didático para a apresentação e explanação de conteúdos que estão presentes no Ensino Médio.

A escolha dos cinco jogos abordados nesta subseção foi motivada pelo fato de além de apresentarem um histórico interessante, permitem abordar temas trabalhados no Ensino Médio. Com o Tangram, podem ser trabalhados os seguintes assuntos: áreas e perímetros de figuras planas, razões de semelhança, teorema de pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo e leis do seno e do cosseno. Já com os quadrados mágicos podem ser explorados os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e dos números racionais $\mathbb{Q}$. Com a Torre de Hanói podem ser trabalhados a análise de possibilidades, as potências e suas propriedades, função exponencial e o Princípio de Indução. Por sua vez, o Sudoku e o Ouri treinam elementos como concentração, atenção e agilidade, que são importantes para o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos.

Na próxima seção, será abordada a classificação dos jogos matemáticos, de acordo com as situações em que serão aplicados.

2.2 Classificação dos jogos matemáticos

Segundo LARA [13], o jogo ao ser concebido no ensino da Matemática apenas como um processo de capacitação e memorização, será considerado um exercício repetitivo, mas se for realizado a partir de um momento de conquista, de criação e de investigação, será visto não só como um instrumento de diversão, mas principalmente como um veículo para a construção do conhecimento. Além disso, pode-se mostrar que a Matemática é um conhecimento dinâmico que pode ser construído de diferentes maneiras. Desse modo, enfatiza-se que, nem sempre a resolução de atividades repetitivas desenvolve a capacidade de autonomia do aluno, mas esta pode ser desenvolvida por meio dos jogos, uma vez que envolvem regras e tomadas de decisões em grupo.

Com essa compreensão, LARA [13] classifica os jogos no ensino da Matemática de acordo com sua utilização e a situação a ser vivenciada:

Os jogos de construção

São jogos que trazem ao aluno um assunto desconhecido, fazendo com que através da manipulação de materiais ou de perguntas e respostas, ele sinta a necessidade de uma nova ferramenta ou um novo conhecimento para resolver determinada situação-problema proposta. Permitem a compreensão de alguns conceitos matemáticos que são apenas transmitidos pelo professor e memorizados sem um real entendimento pelo aluno, prejudicando o aprendizado. São utilizados para introduzir algo, explicar e exemplificar o que precisa ser ensinado, pois visualizando, participando e entendendo a função de cada elemento, a aprendizagem ocorrerá de forma mais rápida. Nesse tipo de jogo, se exije mais do professor, tanto na elaboração quanto na execução. Com efeito o aluno está com seu conhecimento limitado, precisa ser instruído e guiado na busca de conhecimento e informações novas. O objetivo do professor é fazer com que o discente atinja níveis mais avançados do desenvolvimento da capacidade de criação, pois se enquadra na tendência pedagógica Construtivista baseada nas ideias de Jean Piaget (1896-1980), um dos maiores pensadores do século XX. A Torre de Hanói (ver Subseção 2.1.1) é um exemplo desse tipo de jogo, assim como o jogo Batalha Naval, que com frequencia aparece em livros didáticos de Matemática sendo usado, por exemplo, para introduzir o sistema de coordenadas cartesianas.

Os jogos de treinamento

São aqueles utilizados para fixar determinado conhecimento ou pensamento matemático, não com o intuito de memorizá-lo, mas de generalizá-lo. Além disso, pretendem aumentar seu nível de confiança ao familiarizar-se com o novo conhecimento adquirido, uma vez que auxiliam no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais ágil. Pode ser utilizado para verificar se o discente adquiriu ou não determinado conhecimento, uma vez que, com sua participação ativa nos jogos, o professor poderá perceber suas dificuldades e elaborar adequados procedimentos para auxiliá-lo. Esse tipo de jogo tem uma vantagem incontestável: substitui aulas desinteressantes que apresentem exercícios repetitivos, que muitas vezes se tornam mecanizados e enfadonhos, por uma atividade prazerosa e motivante onde o aluno passa a ser ativo e construtor de seu conhecimento. As listas de exercícios não são inadequadas, mas às vezes a forma como são elaboradas ou propostas são desmotivantes e cansativas, tirando o interesse do educando em praticar e executar o que aprendeu. Os quadrados mágicos e o Sudoku (ver Subseção 2.1.1) são exemplos desse tipo de jogo.

Os jogos de aprofundamento

São utilizados pelo professor após o aluno ter compreendido determinado assunto para que o aplique na resolução de situações-problema. A resolução de problemas é um exercício bastante conveniente para que o discente compreenda a utilidade do conteúdo, e esse tipo de atividade pode vir sob a forma de jogos. Através desses jogos também pode-se fazer uma articulação entre diferentes conteúdos que já tenham sido abordados pelo docente. Os jogos Descobrindo Funções, Ligando pontos no plano e Juntando 4 que serão apresentados no Capítulo 3, são alguns exemplos desse tipo de jogo.

Os jogos estratégicos

São jogos que trabalham habilidades que compõem o raciocínio lógico. Os alunos leem as regras e buscam caminhos para atingirem o objetivo final, por meio do desenvolvimento de estratégias em que ele possa atuar como jogador e resolver as situações que o jogo cria. Utilizando mecanismos para isso, criam hipóteses, desenvolvem um pensamento sistêmico e buscam múltiplas alternativas para resolver um determinado problema. É ideal para o educando corrigir possíveis erros e aperfeiçoar seu raciocínio lógico, indispensável para compreender Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (PCN) [5] ressaltam a importância dos jogos de estratégias para o ensino da Matemática e destacam que eles partem da execução de exemplos práticos e não da repetição de modelos de procedimentos prontos e com isso desenvolvem habilidades específicas para a resolução de problemas. O jogo Ouri (ver Subseção 2.1.1 e descrição no Apêndice A) e o xadrez se enquadram nesse tipo de jogo.

Os jogos geométricos

Têm como objetivo desenvolver a habilidade de observação e o pensamento lógico dentro do universo das formas e da espacialidade. Com eles é possível trabalhar diversos conteúdos matemáticos, tais como classificação das figuras geométricas, semelhança de triângulos, relação entre arcos e ângulos, conceituação do cálculo de áreas e perímetros dos polígonos, determinação do volume dos sólidos. O Tangram (ver Subseção 2.1.1) é um exemplo desse tipo de jogo.

A análise cuidadosa dos tipos de jogos é primordial na escolha e elaboração dos jogos utilizados para a efetivação do objetivo de levar o lúdico para o Ensino Médio sem prejuízo à abordagem dos conteúdos.

2.3 A utilização dos jogos matemáticos no Ensino Médio

GIOVANNI [9] afirma que o Ensino Médio é a etapa da educação básica que situa o educando como sujeito que produz seu conhecimento e participa do mundo do trabalho. Dentre as competências e habilidades requeridas pelo mercado de trabalho, criatividade, autonomia e capacidade de solucionar problemas têm grande destaque e são primordiais para o seu eficaz desempenho.

Segundo a BNCC [2],

> “ [. . .] para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. Propõe-se então nessa fase o desenvolvimento das capacidades de pesquisar, buscar, analisar, selecionar e apreender informações, criar e formular estratégias de resolução de problemas, em vez de apenas realizar exercícios repetitivos e técnicas de memorização.”

De acordo com SMOLE et al. [21], “o reconhecimento das ações exigidas atualmente e a preparação para todas as outras com as quais certamente o aluno irá se deparar durante e após o ensino básico, implicam uma diferente utilização do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos”. Atribui-se ao ensino da Matemática a dupla função de desenvolver habilidades e competências e de levar o discente a adquirir conhecimentos que se constituem em chaves para a leitura do mundo em que vive, bem como para a percepção e participação no seu progresso científico e tecnológico.

Conforme garantem as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais–Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias(PCN$_+$) [4],

> “Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias e para outras ações necessárias à sua formação.”

Para GIOVANNI [9], a Matemática no Ensino Médio tem duas vertentes básicas que justificam sua inclusão nos currículos escolares, são elas:

> “– É necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como são as atividades que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo, entre outras;
> – Desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar e a de transcender o que é imediatamente sensível.”

Esses dois aspectos são de fato componentes indispensáveis na formação do educando, pois ajudam a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Além disso, a Matemática também desempenha um papel instrumental; é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

A Matemática é uma das disciplinas que mais oferece desafios, dadas as dificuldades encontradas por educadores em transmitir os saberes matemáticos de modo significativo, bem como pela histórica hostilidade percebida em grande parte dos discentes em relação ao aprendizado desses conteúdos. Com um quadro assim delineado, de longa data, continua urgente a necessidade de experimentação de outros caminhos para a superação desses problemas metodológicos. Diante desse cenário surgem algumas indagações:

- Como realizar o ensino da matemática de modo eficaz, especialmente ao se constatar a dificuldade de cativar o interesse dos alunos?

- Quais seriam os recursos didáticos mais apropriados para realizar tal tarefa?

Segundo BORIN [6], uma resposta para essas indagações seria a seguinte:

> "Com a introdução de jogos nas aulas de matemática temos a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que ao mesmo tempo em que os alunos usam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem."

SMOLE et al. [23], afirma que o Ensino Médio é sem dúvidas a etapa desse nível de ensino que apresenta maior oposição para a aplicação de jogos matemáticos, devido a uma crença bastante propagada de que a Matemática é uma disciplina séria, e a aplicação desse recurso didático introduziria um elemento divertido que comprometeria tal seriedade. Alguns estudantes chegam ao Ensino Médio desmotivados, desinteressados e sem domínio dos conceitos básicos da disciplina. Isto leva o docente a pensar na necessidade de tornar as aulas mais instigantes para os alunos, para estimular uma aprendizagem que tenha mais sentido, integrando-os em um processo no qual deixem de ser apenas espectadores e se tornem sujeitos ativos e participantes.

Quando as aulas de Matemática são somente expositivas, em que o professor é o único agente dinâmico e apenas reproduz o conteúdo do livro didático para o quadro, sem a participação ativa dos alunos, a aprendizagem se torna mais difícil. Neste instante, o uso dos jogos matemáticos implica em uma mudança significativa, despertando o interesse pelo conteúdo matemático, possibilitando uma situação mais agradável e eficiente de aprendizagem na sala de aula, para que se concretize o conhecimento da teoria na prática das atividades.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (PCN) [5], defendem o uso de jogos nas aulas de Matemática, destacando características importantes para a aprendizagem do aluno através desse recurso didático. Em verdade, "os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a criação de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas."

Deve-se reconhecer o potencial do jogo para tornar o ensino da Matemática atraente, já que é um importante recurso para efetivos resultados, pois proporciona conhecimento, auxilia na socialização, potencializa o raciocínio e aguça a motivação e a criatividade. Além disso, ajuda a criar um entusiasmo sobre o conteúdo a ser trabalhado, levando em consideração as preferências e motivações dos educandos, diminuindo os bloqueios advindos do medo de errar e tornando-os, assim, mais autônomos e confiantes.

Mas para haja esse reconhecimento do potencial do jogo é preciso que não deixe o discente participar da atividade de qualquer jeito: regras gerais devem ser seguidas; metas, traçadas e almejadas. O aluno não pode encarar o jogo como uma parte da aula em que não irá fazer uma atividade escrita ou não precisará prestar atenção no professor. Precisa ser conscientizado de que aquele momento é importante para sua formação, pois usará seus conhecimentos e experiências para participar, argumentar e propor soluções na busca de alcançar os resultados esperados pelo professor. O jogo pode não ter uma solução única e todas devem ser respeitadas, apresentadas e discutidas, desde que sejam condizentes com a atividade e não fujam do propósito.

Na próxima seção, será visto que a dimensão lúdica e a educativa, presentes no jogo, se complementam, estão interligadas nas abordagens que se utilizam este recurso.

2.4 A relação entre a função lúdica e a função educativa presentes nos jogos matemáticos

Podemos utilizar os jogos como situações-problema a partir das quais consegue-se trabalhar conceitos e conteúdos relevantes para o Ensino Médio. Os jogos também possibilitam desenvolver diferentes habilidades, levando o aluno a compreender e raciocinar por analogias. Além disso, promovem um ensino diferenciado, já que jogo apresenta um aspecto relevante – o desafio – que proporciona satisfação, interesse e prazer ao aluno. Dentre as mais diversas funcionalidades que apresentam, podem-se destacar duas, enfatizadas por RODRIGUES [34]:

> - "A lúdica, pois está ligado a divertimento, prazer e descontração;
> - e a educativa, pois pode ser utilizado para a apresentação de conceitos ou para o aprofundamento de conteúdos."

Alguns aspectos têm sido apontados como pedagogicamente importantes nas experiências com jogos nas aulas de Matemática. Um deles, refere-se à necessidade de ampliar a dimensão lúdica, importante para o desenvolvimento do estudante, uma vez que favorece a inserção dele em sua cultura, visto que a ludicidade está enraizada nela e dessa forma se explora sua realidade.

Segundo TEIXEIRA [37], a ludicidade é uma necessidade do ser humano em qualquer idade e não está associada unicamente a uma mera diversão. Ao exigir uma predisposição interna facilita a aprendizagem e potencializa o desenvolvimento pessoal, social e cultural. Ainda enfatiza que a atividade lúdica é aquela que se executa no jogo tornando-se um grande laboratório de experiências interessantes e reflexivas que produzem efetivamente conhecimento. Nela, o que importa não é apenas o produto da atividade e o que dela resulta, mas a própria ação – nesse sentido, não se diferencia o jogo da atividade lúdica, pois entende-se que o primeiro propõe um sujeito ativo, responsável por suas escolhas e pelas consequências delas advindas. As aulas com ludicidade podem constituir-se em um ponto de partida na construção do conhecimento aliado ao prazer e à motivação de aprender, principalmente nas disciplinas menos apreciadas pelos educandos.

Ao apresentar conceitos matemáticos que estão presentes numa enorme variedade de jogos é possível que aconteça um encontro inicial estimulante. Tendo em vista que constituem uma forma interessante de lidar com problemas, favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e buscam soluções por meio da possibilidade de serem propostos de modo atrativo.

Os jogos matemáticos são excelentes oportunidades de mediação entre o prazer e o conhecimento historicamente construído. O psicólogo suíço Jean Piaget afirmava em PIAGET [19], que a concepção de jogos não era apenas uma forma de entretenimento para gastar energias das pessoas, mas meios que contribuíam e enriqueciam o desenvolvimento intelectual.

De acordo com SMOLE et al. [23], devido à visão retrógrada de que a aprendizagem não pode ser algo prazeroso, boa parte dos professores parece desvincular o lúdico do processo educativo. No entanto, essa inovação seria uma estratégia de uso de recurso didático para atrair mais a atenção dos alunos e torná-los mais motivados, facilitando o processo de aprendizagem. Quando se aplicam atividades lúdicas em sala, tem que se ter a consciência de que não há possibilidade de dar receitas prontas. Deve-se ter em mente quais os objetivos que se pretende atingir, respeitando a individualidade de cada discente, o tempo de duração da atividade, a necessidade do resgate dos conhecimentos prévios em relação aos conteúdos abordados, para agir de modo eficaz e seduzir o aluno a participar com entusiasmo.

Segundo CHAVES [38], o trabalho com o lúdico exige do professor uma profunda reflexão sobre o sentido do jogo na prática pedagógica. De fato, a utilização de recursos lúdicos implica no conhecimento da metodologia empregada, do estabelecimento de objetivos claros a serem alcançados e da maneira adequada de orientar o aluno para a função e regras das atividades. A postura do docente frente ao lúdico deve ser a de incitar no momento certo, desafiar, debater e interferir quando necessário, promovendo a satisfação na realização da atividade. Assim, para que a proposta atinja o educando, o educador precisa externar a satisfação em trabalhar com jogos e acreditar no sucesso da empreitada, visto que quando o estudante percebe a segurança e entusiasmo no orientador, ele também se sente seguro pois sabe que tem um apoio por perto caso necessite. O docente não precisa apenas acreditar nas possibilidades pedagógicas que o jogo traz, mas também no educando e em sua capacidade de gerenciar sua aprendizagem através da prática com a ferramenta. No entanto, a utilização dos jogos no âmbito escolar exige um planejamento detalhado em que todos os passos devem ser previamente analisados e definidos.

Ainda de acordo com CHAVES [38], para trabalhar com o lúdico, cabe ao professor:

> - "Problematizar sempre, desafiando os alunos a encontrar soluções para seus questionamentos;
> - Discutir e analisar com os alunos os efeitos do jogo, bem como as reações e as atitudes dos participantes;
> - Ter consciência do que faz e saber por que faz;
> - Motivar-se com os alunos, trabalhar com eles, mostrando-se sempre firme e seguro, passando-lhes a confiança necessária;
> - Possibilitar aos alunos assumir lideranças, dando-lhes espaços para conduzir os jogos;
> - Preparar e conscientizar os alunos para os jogos em grupo, vivenciando os princípios da dinâmica de grupo;
> - Relatar e publicar experiências para que outros passam conhecê-las e enriquecê-las."

É preciso que se tenham claras todas as etapas desse trabalho, bem como os instrumentos que possibilitem o acompanhamento do progresso dos alunos e uma integração da finalidade dos jogos com os objetivos pensados. Isso é importante para que o jogo seja parte de um planejamento coerente e não apenas um espaço de diversão em sala de aula, ou seja, é necessário que o professor disponha de mecanismos que o validem como prática pedagógica.

Os jogos não são apenas para tornar as aulas mais divertidas ou dinâmicas, mas são fundamentais para tornar as aulas mais desafiadoras e provocativas. Na próxima seção, serão apresentadas algumas das diversas vantagens da utilização dos jogos matemáticos como ferramenta de ensino.

2.5 Vantagens da utilização dos jogos matemáticos como ferramenta de ensino

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [5] apontam os jogos como um caminho a ser seguido para o desenvolvimento do ensino da Matemática. Indicam, também, alguns objetivos que levam o aluno a identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter intelectual de um jogo característico da Matemática.

As atividades com jogos representam um importante instrumento metodológico em sala de aula, porque apresentam os problemas de modo atrativo para o aluno, uma vez que trazem uma nova aparência para os exercícios apresentados nos livros didáticos.

GRANDO [30] garante que a utilização dos jogos como ferramenta de ensino apresenta diversas vantagens, dentre as quais pode-se destacar:

- Ressignifica conceitos já aprendidos de uma forma estimuladora para o aluno, ou seja, um novo sentido é dado para a compreensão dos conteúdos abordados;
- introduz e desenvolve conceitos de difícil compreensão, facilitando assim a aprendizagem de conteúdos com nível mais elevado;
- desenvolve estratégias para a resolução de problemas, uma vez que propõem desafios que devem ser resolvidos de forma rápida e eficiente;
- permite a tomada de decisões e ensina como avaliá-las, ao elaborar estratégias para a resolução dos desafios propostos em cada etapa do jogo;
- fornece um novo significado para conceitos aparentemente incompreensíveis;
- propicia o relacionamento das diferentes disciplinas, ao realizar a interdisciplinaridade;
- requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento, uma vez que desperta o autoconhecimeno na tomada de decisões;
- favorece a interação social entre os alunos e a conscientização do trabalho em grupo, enfatizando a cooperação mútua e a importância de se trabalhar em equipe;
- por se tratar de um recurso didático dinâmico e interativo sua aplicação é um fator de interesse para os alunos;
- favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição sadia, da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender;
- permite ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos e elaborar estratégias adequadas para auxiliar os mesmos na superação;
- estimulam o raciocínio e aprimoram elementos como observação, concentração, análise e atenção, que são fundamentais para o aprendizado de Matemática;
- podem ser utilizadas para o desenvolvimento de habilidades de que os alunos necessitam, visto que é útil no trabalho com alunos de diferentes níveis.

No próximo capítulo serão propostos jogos matemáticos que envolvem conteúdos do Ensino Médio, levando em consideração as informações fornecidas nessa seção.

Capítulo 3

Uma proposta de jogos matemáticos para o Ensino Médio

Os jogos propostos neste capítulo foram elaborados pela autora juntamente com seus orientadores com o intuito de dinamizar a abordagem de conteúdos do Ensino Médio, levando em consideração a classificação dos jogos matemáticos presente na Seção 2.2, a importância de se utilizar o lúdico conforme está exposto na Seção 2.4 e as vantagens da utilização apresentadas na Seção 2.5. A criação foi norteada pelas competências e habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2], documento organizado por Áreas do Conhecimento, onde cada uma tem suas competências específicas que devem ser desenvolvidas e aprofundadas ao longo da etapa do Ensino Médio. Na área de Matemática e suas tecnologias são propostas cinco competências específicas, dentre as quais serão destacadas algumas que foram empregadas para realizar essa proposta:

1. “[...]
2. [...]
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.”

Na competência específica 3, as habilidades indicadas estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos e probabilísticos, elementos que são necessários para a realização dos jogos: Descobrindo Funções e Ligando os pontos no plano. Já a competência específica 4, vincula habilidades que tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, que são primordiais para o desenvolvimento do jogo Juntando 4. Por sua vez, a competência 5, pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experimentações com materiais concretos, o que é realizado durante a aplicação do jogo das Probabilidades. Essas competências não têm uma ordem predeterminada, pois formam um todo conectado, de maneira que o desenvolvimento de uma delas requisita a mobilização de outra, embora algumas sejam mais enfatizadas em determinadas situações.

Além da contribuição fornecida por essas competências, outros fatores também foram levados em consideração no processo de elaboração dessa proposta, como a escolha de materiais acessíveis, viabilizando a aplicação em ambientes com carência de recursos tecnológicos ou financeiros. Embora nos dias atuais a tecnologia esteja presente, optou-se por utilizar materiais que fazem parte do cotidiano do aluno. Considerou-se, também, a utilização de regras simples e diretas, o que torna a aplicação em sala de aula mais prática, tornando a abordagem, dos tópicos matemáticos, dinâmica e interativa.

Nas seções que seguem serão abordadas as características, as instruções e o conteúdo matemático presentes nos jogos e nos Apêndices encontram-se figuras que ilustram os modelos do material necessário para sua realização.

3.1 Jogo Descobrindo funções

Este jogo foi elaborado com o objetivo de abordar de forma dinâmica e interativa as situações-problema envolvendo função afim, desenvolvendo assim a habilidade EM13MAT302[1] da competência específica 3 proposta pela BNCC [2]. É considerado um jogo de aprofundamento (ver Seção 2.2) e deve ser utilizado após a explicação do conteúdo Função afim (ver Subseção 3.1.3) para a efetivação da aprendizagem das definições e conceitos presentes no conteúdo. No Apêndice B está apresentado o modelo das fichas utilizadas no jogo e imagens do material que foi utilizado durante sua aplicação.

[1]O primeiro par de letras (EM) indica a etapa de ensino, neste caso Ensino Médio. O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos. A segunda sequência de letras (MAT) indica a área - Matemática e suas tecnologias. Os números finais (302) indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números)

3.1.1 Características do Jogo

Este jogo pode ser aplicado em qualquer uma das três séries do Ensino Médio e seu propósito é fazer com que os alunos interajam e cooperem com os outros participantes, trabalhando coletivamente na busca de soluções, realizando processos de cálculos mentais e escritos com a função afim, estimulando fortemente o espírito de investigação.

Com a realização do jogo, serão desenvolvidas as seguintes habilidades:

- Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º e/ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Corresponde a habilidade EM13MAT302 proposta pela BNCC);
- Investigar taxas de variações de funções de uma variável com base em dados numéricos;
- Representar por meio de estruturas algébricas as situações problema presentes no cotidiano;
- Utilizar relações e funções em diferentes representações que retratem as diversas formas de pensar e manipular objetos matemáticos.

3.1.2 Instruções do jogo

Este jogo tem como objetivo descobrir, através de dicas ou pistas, a representação algébrica de uma função afim oculta.

Material necessário:

Para a realização devem ser providenciados pares de envelopes contendo dicas idênticas em quantidade suficiente para a turma, levando em conta que a atividade será realizada em dupla. Cada envelope deve conter 6 dicas, impressas separadamente em 6 cartões que definem uma única função; em particular, a quantidade de dicas indica a duração da partida.

Regras:

Antes de iniciar o jogo, devem ser apresentadas as seguintes regras:

- A turma será dividida em times, cada um com dois integrantes;
- As partidas, nas quais dois times se enfrentam, são divididas em turnos, enumerados de 0 a 6; por sua vez, cada turno, a partir do 1, é dividido em três momentos: sorteio, troca, resposta;
- Definidos os times adversários, a partida se inicia com o turno 0, momento reservado exclusivamente à distribuição dos envelopes aos times;

- Em seguida, no turno 1, os times retiram, aleatória e simultaneamente, uma dica do seu envelope, mantendo a informação para si – momento sorteio; Conhecida a pista, cada time pode pedir a troca da dica coletada neste turno com o time adversário, ação que só é permitida uma vez durante toda a partida e que, se solicitada, não pode ser evitada – momento troca;

- Efetuada a (eventual) troca e leitura da nova dica, os times podem dizer a expressão algébrica da função que seu envelope determina – momento resposta;

- Depois do momento resposta de cada turno, passa-se ao próximo turno, repetindo-se os 3 passos anteriores;

- O jogo termina se um dos times acertar a expressão algébrica da função que seu envelope determina.

É possível jogar com a turma toda com algumas alterações. Mantendo-se a organização fixada acima, faz-se o seguinte:

1. São dados, inicialmente, 6 pontos a cada time;

2. Em cada momento resposta, se o time errar a expressão da função, é punido com a perda de 1 ponto;

3. Ganha a partida o time que acertar primeiro a função associada ao seu envelope e possuir a maior quantidade de pontos.

4. Se as duas duplas acertarem no primeiro turno, considera-se empate.

Observações sobre o jogo

- O jogo também pode ser utilizado para trabalhar função quadrática, desde que este conteúdo seja anteriormente abordado e que se utilize dicas nos cartões referentes a ele;

- O número de dicas pode variar, porém o professor deve observar se ao aumentar essa quantidade, as novas informações fornecidas estão se repetindo;

- O professor pode utilizar a mesma função em todos os envelopes ou deixar cada par de envelopes com uma função e ir trocando entre os grupos formados com as 2 duplas.

- O jogo também pode ser utilizado para resolver situações do cotidiano dos alunos, bastando apenas que o professor realize a leitura dos problemas e nas fichas tenham dicas para determinar a função representada.

- O número de alunos de cada time pode ser aumentado.

3.1.3 Conteúdo relacionado ao jogo

O conteúdo que será apresentado foi elaborado utilizando as definições, proposições e exemplos abordados em LIMA [14] e em IEZZI [11].

Em situações cotidianas, como ir à feira livre ou pegar um táxi, pode ser observada a presença da Matemática. Por exemplo, durante a permanência na feira, o preço pago pelos produtos nela vendidos sofre variações de acordo com a quantidade de produtos adquiridos; ao utilizar um táxi o valor a ser pago depende do trajeto a ser percorrido. A relação entre essas grandezas pode ser representada por uma função afim.

Definição 3.1 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se* ***afim*** *quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Os números a e b são chamados, respectivamente, de* ***coeficientes angular e linea****r de f. Em particular, a cada $x \in \mathbb{R}$ é associado, por f, um valor $f(x) \in \mathbb{R}$, chamado* ***valor numérico*** *ou* ***imagem*** *de f em x.*

Exemplo 3.1 *A seguir, tem-se algumas funções afins com seus respectivos coeficientes angular e linear.*

i) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$, *com* $a = \frac{3}{4}$ *e* $b = 2$;

ii) $f(x) = -2x + 1$, *com* $a = -2$ *e* $b = 1$;

iii) $f(x) = 4x$, *com* $a = 4$ *e* $b = 0$;

iv) $f(x) = 6$, *com* $a = 0$ *e* $b = 6$.

Várias situações-problema presentes no cotidiano, em outras áreas do conhecimento e na própria Matemática podem ser resolvidas utilizando funções, em especial devido a sua simplicidade, a função afim. Sendo assim, faz-se necessária a apresentação de algumas definições, teoremas e proposições que a definem.

Definição 3.2 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e x, $h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$. Chama-se acréscimo de f com um incremento h no ponto x a diferença $f(x+h) - f(x)$; a razão $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é denominada* ***taxa de variação da função*** *f entre os pontos x e $x+h$.*

O próximo resultado traz uma relação entre o coeficiente angular de uma função afim e a taxa de variação entre dois pontos quaisquer do seu domínio.

Proposição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Tem-se, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$,*

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Demonstração. Com efeito, sejam $x,h \in \mathbb{R}$ quaisquer, com $h \neq 0$. Logo

$$f(x+h)-f(x)=a(x+h)+b-(ax+b)=ah.$$

Portanto,

$$a=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

$\square$

Com relação ao coeficiente linear de uma função afim, tem-se, como consequência imediata da Definição 3.1, usando as mesmas notações do Teorema 3.1:

$$b=f(0). \tag{3.1}$$

Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?

A resposta está na compreensão da caracterização da função, pois desse modo pode-se perceber em que situações ela se aplica. O teorema a seguir, faz-se necessário para que se possa caracterizar a função afim.

Teorema 3.2 ***Teorema Fundamental da Proporcionalidade**: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx)=n.f(x)$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$;

(2) Pondo $a=f(1)$, tem-se $f(x)=ax$ para todo $x \in R$;

(3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para quaisquer $x;y \in R$.

Demonstração. Serão provadas as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$.

A fim de demonstrar que $(1) \Rightarrow (2)$, será provado inicialmente que, para todo número racional $r=\frac{m}{n}$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx)=r.f(x)$, seja qual for $x \in R$. Com efeito, tem-se

$$n.f(rx)=f(nrx)=f(mx)=m.f(x),$$

logo

$$f(rx)=\frac{m}{n}.f(x)=r.f(x).$$

Seja $a=f(1)$ e como $f(0)=f(00)=0f(0)=0$, tem-se que $a=f(1)>f(0)=0$, desse modo a é positivo. Além disso, tem-se que $f(r)=f(r1)=rf(1)=ra=ar$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostra-se que $f(x) = ax$ para todo $x \in R$. Suponha, por absurdo, que exista algum número irracional x tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admite-se $f(x) < ax$, (o caso $f(x) > ax$ seria demonstrado de modo análogo.) Tem-se $\frac{f(x)}{a} < x$ e toma-se um número racional r tal que $\frac{f(x)}{a} < r < x$. Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deve-se ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2).

Para demonstrar que (2) $\Rightarrow$ (3) tem-se

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$$

E por último, demonstra-se que (3) $\Rightarrow$ (2), então tem-se

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(x+x+...+x) = f(x) + f(x+x+...+x) = f(x) + f(x) + ... + f(x) \\ &= n.f(x), \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.3 ***Caracterização da função afim****: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração. Suponha que a função f é crescente. Então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = O$. Além disso, para quaisquer h, k $\in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi(h+k) &= f(x+k) - f(x) \\ &= ((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \\ &= \varphi(h) + \varphi(k). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.2, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 3.4 *Uma função afim é crescente se, e somente se, seu coeficiente angular for positivo.*

Demonstração. Sejam $f(x) = ax + b$ uma função afim e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$. Pela Proposição 3.1 tem-se, fazendo $x = x_1, h = x_2 - x_1$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a. \tag{3.2}$$

Se $a > 0$, então
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0.$$
Logo, multiplicando-se a desigualdade acima por $x_2 - x_1$, um número positivo,
$$f(x_2)-f(x_1) > 0.$$
Assim, $f(x_1) < f(x_2)$, e f é crescente.

Reciprocamente, se f é crescente, então $f(x_2) > f(x_1)$ e, por (3.2),
$$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{0}{x_2-x_1} = 0.$$
$\square$

De modo análogo, prova-se o resultado seguinte.

Teorema 3.5 *A função afim é decrescente se, e somente se, seu coeficiente angular for negativo.*

Definição 3.3 *O zero de uma função é todo número x cuja imagem é nula.*

Com relação a esta definição, se x é zero de uma função f, então $f(x) = 0$. Assim, para determinar o zero da função afim $f(x) = ax + b$, basta resolver a equação do 1º grau
$$ax + b = 0,$$
que possui única solução, a saber, $x = -\frac{b}{a}$.

Por fim, haja vista os resultados listados até aqui, tem-se o seguinte fato: uma função afim f fica unicamente determinada por quaisquer dois números x_1 e x_2 reais distintos e por suas imagens, uma vez que seu gráfico é uma reta, que será provada no Teorema 3.7 e fica determinada por dois pontos. Mais precisamente, com esses dados, pode-se determinar os valores de a e b, que definem a expressão algébrica de f.

Exemplo 3.2 *Determine a função afim f, sabendo-se que $f(2) = -2$ e $f(1) = 1$.*

Solução: Para determinar a função pedida, dois modos serão utilizados:
Modo I: através da Proposição 3.1.

A partir da taxa de variação, fica determinado o coeficiente angular de f:
$$a = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3.$$
Assim,
$$f(x) = -3x + b.$$

O coeficiente linear b é obtido a partir da equação acima e da escolha de um dos valores cuja imagem é conhecida, por exemplo, $x = 1$. Daí,

$$1 = f(1) = -3.1 + b,$$

donde $b = 4$. Desse modo, $a = -3$ e $b = 4$ e a função afim é $f(x) = -3x + 4$.
Modo II: pela solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas.

O sistema é montado com base nos dados fornecidos pelo enunciado, usando-se a expressão algébrica de função afim. De fato,

- $f(2) = -2$ gera a equação $-2 = 2a + b$, fazendo-se $x = 2$ em $f(x) = ax + b$;
- $f(1) = 1$ implica, de modo análogo, $1 = a + b$.

Asim, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + b = 1 \end{cases},$$

cuja solução é dada por $a = -3$ e $b = 4$. Sendo assim, a função procurada é $f(x) = -3x + 4$.
□

Exemplo 3.3 *Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R\$900,00, e uma variável que corresponde a uma comissão de 8% do total de vendas que ele fez durante o mês. Expresse a lei da função afim que representa seu salário mensal.*

Solução. É solicitada a expressão de uma função afim, que denotaremos por $S(v)$, que modele o salário do vendedor; logo, $S(v) = av + b$, onde a é o coeficiente angular, b é o coeficiente linear e v representará o total de vendas do mês.

Nota-se que a parte fixa corresponde ao coeficiente linear da função. Com efeito, mesmo se nada for vendido, o vendedor terá saldo de R\$900,00. Posto de outro modo: se não são realizadas vendas – ou seja, se $x = 0$ – , ele receberá $S(0) = a.0 + b$ reais; assim, $b = 900$.

Apresenta-se também um valor que corresponde a uma comissão, equivalente a 8% do total das vendas realizadas durante o mês. Desta maneira, sendo v o número de vendas, ele receberá, por mês $8\%.v = \frac{8}{100}.v = 0,08v$. De fato, utilizando a ideia do Teorema 3.3, o aumento no valor do salário $S(v)$ dependerá apenas do acréscimo no total das vendas v. Como o salário é a soma da parte fixa com a comissão, a função é $S(v) = 0,08.v + 900$.

Para concluir esta seção, enfatiza-se ainda que durante a realização do jogo, o professor terá a oportunidade de explorar toda a teoria apresentada pelo conteúdo.

3.2 Jogo Probabilidades

Jogo criado para auxiliar a introdução dos conceitos iniciais de probabilidade. Foi produzido pela autora do trabalho juntamente com seus orientadores a partir de um “Kit de Probabilidade”, que foi encontrado no laboratório da Escola General Joaquim Inácio, localizada na cidade de Custódia-PE. Enfatiza o desenvolvimento das habilidades EM13MAT311 e EM13MAT312 (ver nota de rodapé presente na Seção 3.1, página 29) da competência específica 3 proposta pela BNCC [2]. Trata-se de um jogo de construção (ver Seção 2.2) pois através da realização dos sorteios, o discente irá construindo as possibilidades e conhecendo os conceitos de espaço amostral e evento. Traz ainda para o aluno um assunto desconhecido, fazendo com que, através da manipulação de materiais, ele sinta a necessidade de uma nova ferramenta, ou um novo conhecimento para resolver determinada situação-problema proposta pelo jogo. Logo, deve ser aplicado antes do conteúdo Probabilidade (ver Subseção 3.2.3) ser explanado. No Apêndice C estão apresentadas figuras que expõe o material que compõe o jogo.

3.2.1 Características do jogo

Este jogo pode ser realizado nas turmas de 2º e 3º anos do Ensino Médio. Tem como objetivo compreender o caráter aleatório e não determinístico de fenômenos naturais e sociais, mobilizando o raciocínio para calcular a probabilidade de acontecimentos simples equiprováveis, e desse modo, construir o conceito de probabilidade com a participação dos alunos, e prepará-los naturalmente para lidar com os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade.

Com a realização do jogo, serão desenvolvidas habilidades como:

- Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade (Corresponde à habilidade EM13MAT311 proposta pela BNCC);

- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos (Corresponde a habilidade EM13MAT312 proposta pela BNCC);

- Utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática para calcular a probabilidade de um evento;

- Utilizar conhecimentos de probabilidade como recurso para a construção de argumentação;

3.2.2 Instruções do jogo

O jogo coloca o aluno como organizador de um sorteio; seu objetivo é desenvolver e utilizar uma estratégia para dificultar as chances de seus adversários sortearem bolinhas com cores escolhidas previamente.

Material necessário

Para que o jogo seja realizado devem ser providenciados saquinhos de tecido opaco e 10 bolinhas de duas cores diferentes (5 de cada cor) em quantidade suficiente para a turma, levando em consideração que a atividade será realizada em duplas. Para auxiliar no entendimento das regras, considera-se o saquinho na cor preta e as bolinhas nas cores verde e vermelha.

Regras

Antes de iniciar a aplicação do jogo, as seguintes regras devem ser apresentadas:

- A turma será dividida em times, cada um com dois integrantes;
- As partidas, nas quais dois times se enfrentam, são divididas em rodadas.;
- Antes de iniciar as rodadas, cada time receberá o material necessário e a partir das cores das bolinhas presentes no material, definirão a cor que as três bolinhas retiradas consecutivamente do saquinho deverão apresentar;
- Cada time escolherá 8 das 10 bolinhas que receberá e colocará dentro do saquinho, de modo que a outra dupla não veja sua escolha;
- Na primeira rodada, um dos integrantes vai retirar do saquinho do time adversário 3 bolinhas sem reposição e observará se todas apresentam a cor previamente escolhida no início do jogo. Em caso afirmativo, o seguinte procedimento deverá ser realizado:
  - O outro time também retirará as três bolinhas, se forem de cores diferentes o time que tirou primeiro vence o jogo;
  - Se todas as bolinhas retiradas também apresentarem a cor escolhida, ganhará o jogo o time que apresentar no seu saquinho a menor probabilidade de sair a cor escolhida inicialmente, pois terá dificultado a retirada das bolinhas por parte da outra dupla.
- Após realizadas 5 rodadas , caso nenhum dos times consiga retirar as três bolinhas da cor escolhida, ganhará o jogo aquele que apresentar no seu saquinho a menor probabilidade de sair a cor escolhida inicialmente, pois terá dificultado a retirada das bolinhas por parte da outra dupla.

Observações sobre o jogo

- Se forem escolhidas as cores vermelha e verde para as bolinhas, por exemplo, o time pode colocar no seu saquinho:
  - 3 bolinhas vermelhas e 5 verdes;
  - 4 bolinhas vermelhas e 4 verdes;
  - 5 bolinhas vermelhas e 3 verdes
- O professor pode substituir as bolinhas por tampinhas de garrafa PET de duas cores diferentes.
- O professor pode modificar a quantidade de cores distribuídas, mantendo a quantidade total de bolinhas e o objetivo de dificultar a retirada de uma cor predeterminada. A partir dessa alteração, pode-se observar que mudanças vão ocorrer com o espaço amostral e com os eventos.

3.2.3 Conteúdo relacionado ao jogo

O conteúdo que será apresentado foi elaborado utilizando as definições, proposições e exemplos abordados em CARVALHO [7] e em IEZZI [11].

Segundo SMOLE [21], a teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que pesquisa e desenvolve modelos, visando estudar experimentos para a explicação de fenômenos aleatórios ao quantificar a chance desses fenômenos acontecerem.

Definição 3.4 *Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados geralmente diferentes são chamados de* ***experimentos aleatórios****.*

Exemplo 3.4 *Alguns experimentos aleatórios:*

a) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

b) De um saquinho contendo 5 bolas vermelhas e 3 bolas verdes, extrair uma bola e observar sua cor.

Definição 3.5 *O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado* ***espaço amostral*** *e indicado por U; e todo subconjunto de U recebe o nome de* ***evento****.*

Os eventos apresentam alguns casos particulares:

- Evento certo: possui os mesmos elementos do espaço amostral.
- Evento impossível: $E = \emptyset$;

- Eventos mutuamente exclusivos: quando a ocorrência de um deles implica a não ocorrência do outro. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$

- Eventos independentes: quando a realização ou a não-realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa.

Exemplo 3.5 *Ao lançar um dado e observar a face de cima.*

a) Qual é o espaço amostral?

   O espaço amostral é obtido com todos os resultados possíveis no lançamento de um dado, e assim, tem-se que $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) A partir do enunciado, determine os seguintes eventos:

   i) A: ocorrência de número ímpar.
      No dado, os números ímpares são 1, 3 e 5, logo $A = \{1,3,5\}$

   ii) B: ocorrência de número primo.
      Os números primos são 2, 3 e 5, logo $B = \{2,3,5\}$

   iii) C: ocorrência de número menor que 4.
      Os números menores do que 4 presentes no dado, são 1, 2 e 3, logo $C = \{1,2,3\}$.

   iv) D: ocorrência de número maior que 7.
      Não há números maiores que 7, logo $D = \emptyset$, trata-se de evento impossível.

Definição 3.6 *Seja um evento A de espaço amostral finito e não vazio U. A probabilidade de ocorrer A é a razão entre o número de elementos de A e o número de elementos de U.*

Considerando $n(A)$, o número de elementos do evento A, e $n(U)$, o número de elementos do espaço amostral U, temos que a probabilidade $P(A)$ de ocorrer o evento A será expressa por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Como consequência imediata da definição anterior, tem-se que:

1. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$ ou $0\% \leq P(A) \leq 100\%$.

2. $P(U) = 1$, nesse caso temos o evento certo.

3. Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teorema 3.6 *Se A e B são eventos, então apresentam as propriedades das probabilidades.*

i) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ii) $P(\emptyset) = 0.$

iii) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B).$

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

v) *Se* $A \supset B$ *então* $P(A) \geq P(B).$

Demonstração.

i) Pela definição 3.6 tem-se $P(U) = 1$. Da,

$$\begin{aligned} P(A) + P(\overline{A}) &= P(A \cup \overline{A}) \\ &= P(U) = 1 \end{aligned}$$

Portanto, $P(\overline{A}) = 1 = P(A)$.

ii) Como U e $\emptyset$ são mutuamente excludentes tem-se que $P(U) = P(U \cup \emptyset)$ e pela consequência da definição 3.6, $P(U) = P(U)$ + P($\emptyset$), logo $P(\emptyset) = P(U) - P(U) = 0$.

iii) Sendo $P(A) = P(A \backslash B) \cup P(A \cap B)$ e como $A \backslash B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes, tem-se que $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$, e assim conclui-se que $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) Como $P(A \cup B) = P[(A \backslash B) \cup B]$ então $P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B)$, pois $A \backslash B$ e B são mutuamente excludentes. Sendo $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$, como pode ser visto no item *iii*, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

v) Sendo $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$ e se $A \supset B$ tem-se $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$.

Como $P(A \backslash B) \geq 0$, logo $P(A) \geq P(B)$. □

Exemplo 3.6 *Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade das três moedas caírem com a mesma face para cima?*

Solução Como cada moeda pode produzir dois resultados distintos, três moedas irão produzir $2.2.2 = 8$ resultados distintos, ou seja, $n(U) = 8$. Dentre as 8 possibilidades do espaço amostral, o evento que representa todas as moedas com a mesma face para cima possui apenas 2 possibilidades – (K, K, K) ou (C, C, C) – , então $n(A) = 2$. Com base nesses dados, determina-se a probabilidade, que será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\%.$$

Logo, a probabilidade das três moedas caírem com a mesma face para cima é 25%.

Exemplo 3.7 *Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. Qual a probabilidade do bilhete sorteado ser maior do que 40 ou número par?*

Solução: A rifa tem 100 bilhetes, logo seu espaço amostral tem 100 elementos e $n(U) = 100$. O evento A, o bilhete sorteado ser maior do que 40, tem 60 elementos logo $n(A) = 60$. O evento B, o bilhete ser um número par, tem 50 elementos e diante disso $n(B) = 50$.

A partir desses dados, pode-se calcular a probabilidade dos eventos A e B, e assim tem-se $P(A) = \dfrac{60}{100} = 0,6$ e $P(B) = \dfrac{50}{100} = 0,5$.

Mas como 30 bilhetes são maiores do que 40 e pares, então temos 30 elementos em comum e portanto $n(A \cap B) = 30$, onde a probabilidade será $P(A \cap B) = \dfrac{30}{100} = 0,3$.

Utilizando o item *iv* do Teorema 3.6, determina-se a probabilidade pedida que será expressa por:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,6 + 0,5 - 0,3 \\ &= 0,8 = 80\%. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade do bilhete sorteado ser maior que 40 ou par é 80%.

Ao concluir esta seção deve-se salientar que o professor realizará primeiramente o jogo e depois de concluído deverá apresentar e explicar o conteúdo aqui sugerido.

3.3 Jogo Ligando os pontos no plano

Este jogo tem o propósito de trabalhar de forma mais criativa as situações-problema envolvendo os gráficos das funções (afim, quadrática, exponencial e logarítmica). Com o intuito de auxiliar na abordagem desse conteúdo em turmas de 3º ano do Ensino Médio, a autora e seus orientadores criaram este jogo levando em consideração a simplicidade na elaboração do material e o desenvolvimento das habilidades EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT403, EM13MAT501 e EM13MAT502 (ver nota de rodapé presente na Seção 3.1 na Página 29) das competências específicas da área de Matemática e suas tecnologias propostas pela BNCC [2]. É um jogo de aprofundamento (ver Seção 2.2), já que requer que o aluno tenha aprendido os conceitos e definições dos gráficos das funções e por isso deve ser utilizado pelo professor após ter apresentado e explicado o conteúdo para que o discente possa aplicar na resolução das situações-problema que a atividade trará. No Apêndice D estão apresentados os modelos dos planos e das fichas utilizados no jogo.

3.3.1 Características do Jogo

Essa atividade tem como objetivo promover a interação entre os alunos, ao trabalhar coletivamente na busca de soluções para situações apresentadas pelo jogo. A realização dos processos de cálculos mentais e escritos com as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica despertam a curiosidade, o espírito explorador e a capacidade para resolver atividades que abordem essa temática.

Com a realização do jogo, serão desenvolvidas habilidades como:

- Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identifcar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função (corresponde à habilidade EM13MAT403 proposta pela BNCC);

- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional (corresponde à habilidade $EM13MAT401$ proposta pela BNCC);

- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano (corresponde à habilidade EM13MAT402 proposta pela BNCC);

- Interpretar algumas situações-problema por equações a partir de funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las;

- Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (corresponde à habilidade EM13MAT501 proposta pela BNCC);

- Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identifcando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax^2 (corresponde à habilidade EM13MAT502 proposta pela BNCC);

- Resolver sistemas com duas equações que envolvam expressões que definem um ou mais tipos de funções.

3.3.2 Instruções do jogo

Este jogo pode ser aplicado como revisão da representação gráfica das funções (afim, quadrática, exponencial e logarítmica) e seu objetivo é ligar pontos predeterminados no plano cartesiano utilizando funções adequadas dentro de um conjunto de funções fornecidas.

Material necessário

Para a realização do jogo devem ser providenciados envelopes contendo cartões idênticos em quantidade suficiente para a turma, levando em conta que a atividade será realizada em dupla. Os cartões devem conter: a representação no plano cartesiano de pontos predeterminados e diferentes exemplos da expressão algébrica de apenas uma das seguintes funções: afim, quadrática, exponencial ou logarítmica.

Regras

Os pontos marcados no plano cartesiano serão classificados como ponto de partida, de passagem e de chegada. Os alunos ligarão os três pontos presentes no plano cartesiano, utilizando apenas duas expressões algébricas do mesmo tipo de função. Antes de iniciar o jogo as seguintes regras devem ser apresentadas:

- A turma será dividida em times, cada um com dois integrantes;
- As partidas, nas quais dois times se enfrentam, são divididas em rodadas.;
- Antes de iniciar as rodadas, cada time receberá um envelope contendo os cartões;
- Na primeira rodada, um integrante retira o cartão com a representação do plano cartesiano e verifica os pontos de chegada, passagem e partida;
- Cada rodada posterior, é dedicada a retirada de uma ficha do envelope por cada equipe, que, em seguida, verifica se a expressão da ficha liga quaisquer pontos do plano;
- O número máximo de rodadas realizadas vai depender da quantidades de expressões algébricas presentes no envelope;
- Ganha o jogo o time que descobrir primeiro as funções que ligam os pontos representados no plano.

3.3.3 Conteúdo relacionado ao jogo

O conteúdo que será apresentado foi elaborado utilizando as definições, proposições e exemplos abordados em LIMA [14] e em IEZZI [11].

O estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica será realizado utilizando instrumentos algébricos para a construção e análise do comportamenos dos seus respectivos gráficos.

Definição 3.7 *O gráfico de uma função $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ dado por:*

$$\mathbb{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{D} : y = f(x)\right\}$$

Assim, um ponto (x,y) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $x \in \mathbb{D}$ e os números reais x e y satisfazem a lei de associação de f.

Com relação ao gráfico de funções afins, tem-se o resultado a seguir.

Teorema 3.7 *O gráfico de uma função afim é uma **reta**.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, uma função afim. Para provar a afimativa, basta que seja verificado o fato de que três pontos quaisquer do gráfico de f são colineares. Sejam, portanto, $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ pontos do gráfico de f. Para verificar que P_1, P_2 e P_3 são colineares, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1,P_2), d(P_2,P_3)$ e $d(P_1,P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Sem perda de generalidade, podemos supor que as abscissas x_1, x_2 e x_3 foram ordenadas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A partir da fórmula da distância entre dois pontos, tem-se:

$$\begin{aligned}
d(P_1,P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - ax_1 - b)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.
\end{aligned}$$

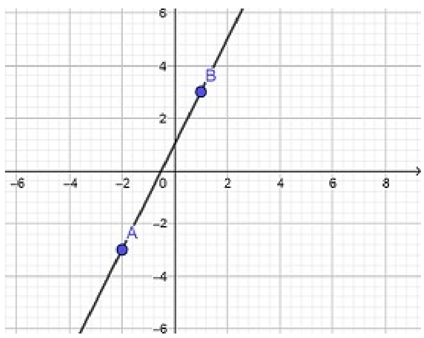
De modo análogo,

$$d(P_2,P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \quad \text{e} \quad d(P_1,P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Daí,

Logo, os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares e o resultado está mostrado. $\square$

Exemplo 3.8 *O gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ é*



[Fonte: Elaborado pela autora]

O gráfico da função afim crescente presente no exemplo anterior é uma reta. Como por dois pontos quaisquer passa uma única reta, então para se construir o gráfico basta encontrar as coordenadas de dois pontos que pertencem a esta função. Para determinar esses dois pontos constrói-se uma tabela de valores, atribuindo-se a x dois valores distintos e calcula-se os correspondentes valores de $f(x)$.

x	$f(x) = 2x+1$
- 2	- 3
1	3

Os valores atribuídos a x na tabela (-2 e 1) são aleatórios e escolhidos próximos à origem do plano – importante notar que esta escolha não altera o resultado final, se outros dois valores fossem utilizados o gráfico seria o mesmo. Para função afim decrescente, procede-se de modo análogo.

A seguir, são apresentadas algumas definições de gráfico de funções quadráticas e de parábolas.

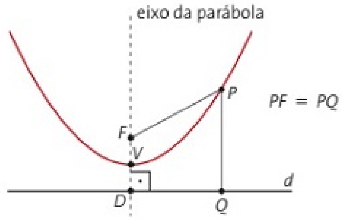
Definição 3.8 *Considere um ponto F e uma reta d que não o contém. Será chamado de **parábola de foco** F e **diretriz** d o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente do foco F e de d.*

Definição 3.9 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O gráfico da função quadrática é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$\mathbb{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = ax^2 + bx + c\right\}$$

A partir da definição de parábola, surgem outros elementos interessantes: a reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se **eixo da parábola**; ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se **vértice** V, que é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o foco F e a intersecção do eixo com a diretriz D, conforme podemos observar na Figura 3.1.

Figura 3.1: Parábola



[Fonte: https://www.flickr.com/photos]

O resultado a seguir estabelece a relação entre parábola e gráfico de funções quadráticas.

Teorema 3.8 *O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.*

Demonstração. Inicialmente, será mostrado que os pontos da parábola cuja a diretriz é horizontal pertencem ao gráfico de uma função quadrática.

Seja a função $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ e a parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$. Tendo em vista que o vértice V da parábola coincide com a origem do plano cartesiano e o foco é o ponto de coordenadas $(0, p)$. A diretriz d será a reta $y = -p$. Seja ainda $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola. Pela definição 3.8, tem-se que P é equidistante do foco F e da diretriz d, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p \tag{3.3}$$

onde o primeiro membro representa a distância entre os pontos P e F e o segundo membro representa a distância entre o ponto P e a diretriz d.

Elevando ao quadrado os dois lados da equação 3.3, obtém-se,

$$\begin{aligned} x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ y &= \frac{x^2}{4p}. \end{aligned}$$

Logo, os pontos da parábola de foco $F(0, p)$ e diretriz $d : y = p$ satisfazem a equação $y = \frac{x^2}{4p}$, ou seja, pertencem ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ com $a = \frac{1}{4p}$.

Reciprocamente, os pontos do gráfico da função $f(x) = ax^2$ pertencem à parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$. Com efeito, seja $P(x, ax^2)$, ponto do gráfico da função $f(x) = ax^2$.

A distância entre P e F é dada por: $\sqrt{x^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2}$.

Observe que:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2} &= \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} \\ = \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} &= \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a}^2)} = ax^2 + \frac{1}{4a}^2 \end{aligned}$$

Como é satisfeita a igualdade para todo $x \in \mathbb{R}$ isso mostra que os pontos do gráfico de $f(x) = ax^2$ coincidem com os da parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e de diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$.

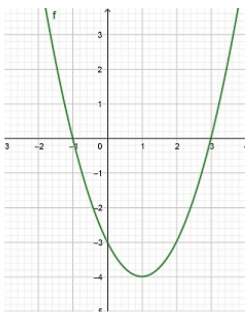
Para o caso geral de uma função quadrática qualquer, que pode ser escrita na forma canônica [2] $f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$, tem um gráfico que pode ser considerado como o resultado da ação de transformações simples, translações horizontais e verticais sobre o gráfico da função $f(x) = ax^2$, conforme pode ser observado no *Modo II* da solução do exemplo 3.9.

Observação 3.1 *Para os casos em que $f = f(y)$ é uma função quadrática de variável y, o gráfico é uma parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo y.*

Na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os parâmetros a, b e c também contribuem na identificação do gráfico da função quadrática.

- O parâmetro a indica o comportamento da concavidade e a abertura da parábola.
  - Se $a > 0$, a concavidade é para cima.
  - Se $a < 0$, a concavidade é para baixo.
- O parâmetro b indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola.
  - Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente.
  - Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente.
  - Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice.
- O parâmetro c indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo y. A parábola intersecta o eixo y no ponto $(0,c)$,ou seja, $f(0) = c$.

Exemplo 3.9 *O gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é*



[Fonte: Elaborado pela autora]

O gráfico da função quadrática presente no exemplo anterior pode ser obtido de dois modos que serão mostrados a seguir.

Modo I

Inicialmente será mostrado como é obtido o gráfico usualmente. Para isso alguns passos devem ser realizados.

[2] Modo de expressar uma função quadrática, que baseia-se na técnica de completar quadrados cuja finalidade é obter a expressão $f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$.

i) Observa-se o valor do parâmetro a: no exemplo 3.9, $a = 1$ então a concavidade é voltada para cima.

ii) Obtém-se o ponto $(0,c)$ que intercepta o eixo y: desse modo, a partir da função tem-se o ponto (0,-3).

iii) Encontra-se o vértice da parábola representado por $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a})$: Nesse caso, o vértice da função dada é $V(1,-4)$.

iv) Determina-se as raízes da função, se houver. Para essa função as raízes são -1 e 3, logo podemos obter os pontos $(1,0)$ e $(3,0)$.

Com esses dados, pôde-se esboçar o gráfico mencionado no Exemplo 3.9.

Modo II

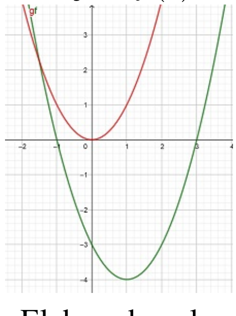
A partir do gráfico da função $f(x) = x^2$, realizando translações horizontais e verticais, pode-se obter o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Para realizar translações horizontais ou verticais as definições a seguir devem ser observadas.

Definição 3.10 *Considere uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Se aplicarmos a translação vertical $(x,y) \to (x, y+y_0)$, o gráfico da nova função é obtido deslocando o gráfico de f verticalmente y_0 unidades acima ou abaixo, conforme $y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$.*

Definição 3.11 *Considere uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Se aplicarmos a translação horizontal $(x,y) \to (x+x_0, y)$, o gráfico da nova função é obtido deslocando o gráfico de f horizontalmente x_0 unidades, para a direita ou para esquerda, conforme $x_0 > 0$ ou $x_0 < 0$.*

Escrevendo a função do Exemplo 3.9 em sua forma canônica tem-se $f(x) = (x-1)^2 - 4$. Aplicando-se na função $f(x) = x^2$ a translação horizontal $(x,y) \to (x+1,y)$, o vértice do gráfico será deslocado no eixo x em 1 unidade para a direita; realizando-se uma translação vertical $(x,y) \to (x, y-4)$, será deslocado no eixo y em 4 unidades para baixo. Com isso, obtém-se o gráfico da função $f(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$, que pode ser observado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 - 2x - 3$



[Fonte: Elaborado pela autora]

A seguir, são apresentadas algumas definições dos gráficos das funções exponenciais.

Definição 3.12 *Dado $a \in \mathbb{R}^*$ em que $a \neq 1$, a potência a^x pode ser definida para qualquer número $x \in \mathbb{R}$. Portanto, fixando $a \in \mathbb{R}^*$, podemos definir uma função que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $a^x \in \mathbb{R}^*$. Esta função será chamada de* ***função exponencial*** *de base a, indicada pela notação $f(x) = a^x$, tal que, para quaisquer $x, f(x) \in \mathbb{R}$.*

Considerando que $a, b > 0$, então, para todos os reais x e y:

(1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^1 = a$;

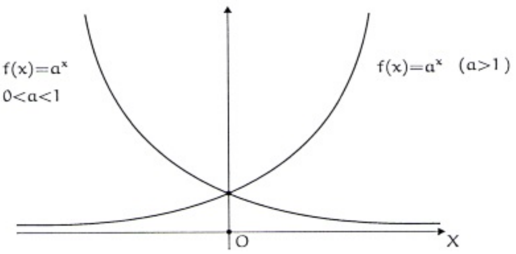
(3) se $x < y$, então $a^x < a^y$, quando $a > 1$, ou $a^y < a^x$, quando $0 < a < 1$.

Os gráficos de funções exponenciais, apresentam as seguintes propriedades, que podem ser observadas na Figura 3.3.

- Quando $a > 1$, a função é crescente, isto é, se $x_1 > x_2$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$. Geometricamente, percebe-se que quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquando x é negativo; à medida que x aumenta, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico: para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical.

- Quando a base a é tal que $0 < a < 1$, a função é decrescente, ou seja, se $x_1 > x_2$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$. No que diz respeito ao seu gráfico, percebe-se que quando x varia da esquerda para a direita com valores positivos, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um decrescimento bastante lento enquanto x é negativo; à medida que x cresce, o decrescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico: para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase horizontal.

Figura 3.3: Gráficos da funções exponenciais



[Fonte: Números e Funções Reais/ Elon Lages Lima, 2012]

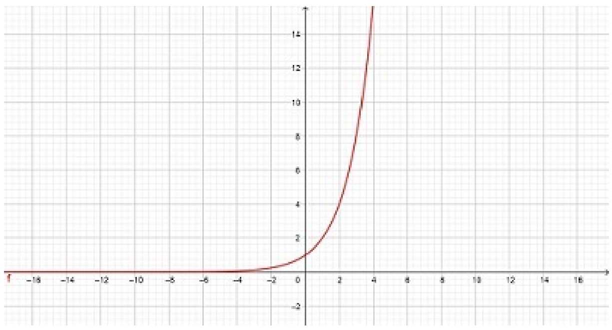
Exemplo 3.10 *Esboce o gráfico da função exponencial crescente* $y = 2^x$.

Para esboçar o gráfico atribui-se valores a x que sejam simétricos em relação a origem e calcula-se os correspondentes valores de y, obtendo a tabela.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	2	4	8

No gráfico pode-se observar que:

- o gráfico nunca intercepta o eixo horizontal, logo a função não tem raízes;
- o gráfico corta o eixo vertical no ponto (0,1);
- os valores de y são sempre positivos (potência de base positiva é positiva), portanto o conjunto imagem é o conjunto dos números reais positivos.



[Fonte: Elaborado pela autora com o auxílio do Geogebra]

Para esboçar o gráfico da função exponencial decrescente procede-se de modo análogo.

Por fim, serão apresentadas algumas definições dos gráficos das funções logarítmicas.

Definição 3.13 *A inversa da função exponencial de base a é a função logarítimica* $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número real positivo x o número real* $\log_a x$*, chamado de* ***logaritmo de x na base a****.*

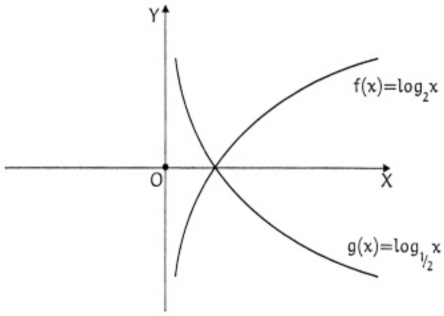
Assim, se $y = \log_a x$, então, $x = a^y$, ou seja, o logaritmo de x na base a é o expoente ao qual a deve ser elevado para obter x. Reciprocamente, se $x = a^y$, então, $y = \log_a x$.

Exemplo 3.11 *A função* $f(x) = \log_2 x$ *é definida como* $y = \log_2 x$ *se* $2^y = x$*. Como* $2^4 = 16$*,* 4 *é o expoente ao qual* 2 *deve ser elevado de modo a obter* 16*; logo,* $\log_2 16 = 4$.

Com relação ao gráfico de funções logarítmicas, tem-se as seguintes propriedades que podem ser observadas na Figura 3.4.

- A função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$, uma vez que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.
- A função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é decrescente quando $0 < a < 1$.

Figura 3.4: Gráfico das funções logarítmicas



[Fonte: Números e Funções Reais/ Elon Lages Lima, 2012]

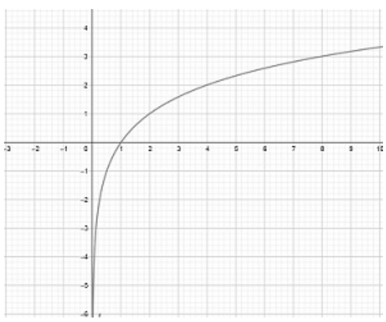
Exemplo 3.12 *Esboce o gráfico da função logarítmica crescente $y = log_2 x$.*

Para esboçar o gráfico atribui-se valores positivos a x e calcula-se os correspondentes valores de y, obtendo a tabela.

x	1	2	4	8
$y = log_2 x$	0	1	2	3

No gráfico pode-se observar que:

- o gráfico nunca intercepta o eixo vertical; e corta o eixo horizontal no ponto (1,0);
- os valores de x são sempre positivos, portanto o domínio é o conjunto dos números reais positivos.

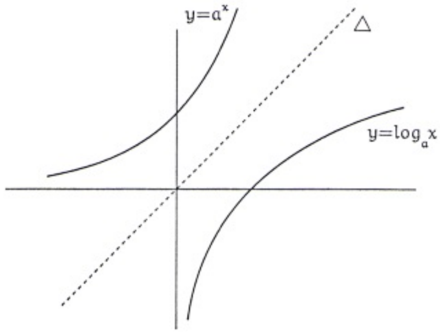


[Fonte: Elaborado pela autora com o auxílio do Geogebra]

Para esboçar o gráfico da função logarítmica decrescente procede-se de modo análogo.

O crescimento lento da função logarítmica, contrasta com o crescimento rápido da função exponencial, como está ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^x$ e $y = log_a x$ na Figura 3.5. Analisando os respectivos gráficos, concluí-se que apresentam gráficos simétricos em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

Figura 3.5: Gráficos das funções exponencial e logarítmica



[Fonte: Números e Funções Reais/ Elon Lages Lima, 2012]

3.4 Jogo Juntando 4

Este jogo é uma adaptação do jogo *Quatro é o limite* utilizando a geometria espacial. Ele explora as representações espacial e planificada dos sólidos geométricos, as medidas correspondentes das áreas (total, das bases e lateral) e do volume, características específicas como números de faces, vértices e arestas ou tipo de faces dos sólidos geométricos. Aborda situações-problema envolvendo geometria espacial que desenvolvem a habilidade EM13MAT309 (ver nota de rodapé presente na Seção 3.1 na Página 29) da competência específica 3 proposta pela BNCC [2].Trata-se de um jogo de aprofundamento (ver seção 2.2) e deve ser aplicado após a apresentação do conteúdo Sólidos Geométricos sugerido na Subseção 3.4.3

3.4.1 Características do jogo

Este jogo pode ser aplicado nos 2 e 3 anos do Ensino Médio. Tem como objetivo levar os alunos a buscarem soluções para os problemas propostos, com a compreensão e realização de cálculos mentais e escritos que envolvem as propriedades dos sólidos geométricos regulares. .

Com a realização do jogo, serão desenvolvidas habilidades como:

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas ou objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;

- Identificar características de figuras planas ou espaciais, relacionando com outros tópicos da Matemática, especialmente quando associado ao cálculo de áreas e de volume;

- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (corresponde à habilidade EM13MAT309 proposta pela BNCC).

3.4.2 Instruções do jogo

É um jogo de cartas cujo objetivo é agrupar um total de 4 ou 5 delas com as características de um mesmo sólido geométrico.

Material necessário

Para a realização do jogo deve ser providenciado um conjunto de 20 cartas de papel para cada grupo com 2 a 4 alunos, onde. Aqui, as cartas terão as seguintes informações:

- As representações espacial e planificada e a nomenclatura do sólido geométrico;
- O valor correspondente as medidas de cada uma das áreas (total, da base ou lateral) de cada sólido ou de seu respectivo volume ;
- Uma característica específica como: números de faces, de vértices, de arestas ou os tipos de faces;
- Imagens de objetos do cotidiano que apresentam o formato do sólido geométrico;
- A definição de cada sólido geométrico.

Regras

Antes de iniciar o jogo, devem ser apresentadas as seguintes regras:

- A turma será dividida em grupos que podem ter de 2 até 4 jogadores, dispostos em círculos, de modo que se defina quem será o primeiro a jogar;
- As cartas são embaralhadas e distribuídas de modo que cada jogador receba 4 delas;
- As cartas restantes ficarão sobre a mesa, de modo que as informações que elas trazem ficam escondidas, para que os integrantes possam pegar quando necessário;
- Respeitando-se a ordem definida inicialmente, cada jogador pega uma carta da mesa, analisa se tem formado um quarteto de propriedades. Em caso afirmativo, escolhe uma das cartas que tem nas mãos que não compõe o quarteto e descarta na mesa;
- O próximo jogador, poderá escolher se quer pegar uma carta do monte que sobrou ou a carta descartada na mesa, e realiza o mesmo procedimento realizado pelo jogador anterior;

- O jogador que primeiro completar um quarteto de cartas contendo todas as informações do mesmo sólido, vence.

3.4.3 Conteúdo relacionado ao jogo

O conteúdo que será apresentado foi elaborado utilizando as definições, proposições e exemplos abordados em MUNIZ NETO [16] e em IEZZI [11].

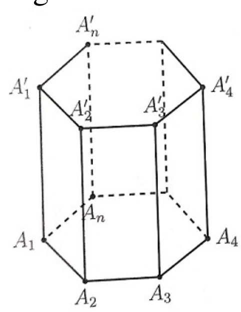
Sólidos geométricos

Os sólidos geométricos estão presentes no cotidiano, permitem a interpretação de representações matemáticas e o uso de modelos para analisar as relações entre as figuras no espaço.

Prismas

Definição 3.14 *Sejam os polígonos $A_1A_2\cdots A_n$ e $A'_1A'_2\cdots A'_n$ situados em planos paralelos tais que as retas $\overleftrightarrow{A_1A'_1}$, $\overleftrightarrow{A_2A'_2}$, $\cdots$, $\overleftrightarrow{A_nA'_n}$ sejam também paralelas. Então o quadrilátero $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$ é um paralelogramo e os polígonos são congruentes. O* ***prisma*** *de bases $A_1A_2\cdots A_n$ e $A'_1A'_2\cdots A'_n$ é a porção limitada do espaço delimitada pelos polígonos $A_1A_2\cdots A_n$ e $A'_1A'_2\cdots A_n$ e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$, para $1 \le i \le n$, conforme pode ser visto na Figura 3.6.*

Figura 3.6: Prisma



[Fonte: Geometria. MUNIZ NETO, 2013]

Além dos elementos citados na definição de prismas, tem-se os **vértices** representados pelos pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n, A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$; as **arestas** que são os segmentos denotados por $A_iA'_{i+1}, A'_{i+1}, A_1A'_i$ para $1 \le i \le n$; as **faces laterais** que são os paralelogramos $A_iA'_{i+1}A'_{1+i}A'_i$; O **interio**r que é o conjunto dos pontos que não pertence a nehuma das faces do prisma e a **altura** que é a distância entre os planos de suas bases. Um **prisma reto** é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos de suas bases.

Uma vez que as bases do prisma são polígonos de n-lados, diz-se que se trata de um prisma n-gonal. Quando $n = 3$ e $n = 4$, usa-se constantemente as nomenclaturas alternativas prisma triangular e quadrangular.

A partir dos polígonos que formam sua superfície, pode-se definir as áreas de um prisma:

- Área da base (A_b): é a área de um dos polígonos das bases.
- Área lateral (A_l): é a soma das áreas de todas as faces laterais.
- Área total (A_t): é a soma da área lateral e das áreas das bases.

$$A_{total} = A_{lateral} + 2.A_{bases}$$

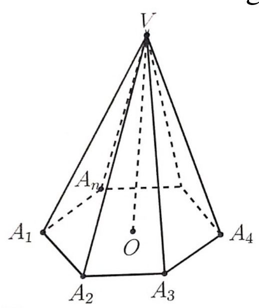
O volume de um prisma é igual ao produto da área de sua base pela altura.

$$V_{prisma} = A_b.h$$

Pirâmides

Definição 3.15 *Dados um polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano $A_1A_2\ldots A_n$, define-se* ***pirâmide*** *$VA_1A_2\ldots A_n$ de vértice V e base $A_1A_2\ldots A_n$, como a porção limitada do espaço delimitado pelo polígono $A_1A_2\ldots A_n$ e pelos triângulos VA_iA_{i+1}, para $1 \leq i \leq n$,conforme está ilustrado na Figura 3.7.*

Figura 3.7: Pirâmide regular



[Fonte: Geometria. MUNIZ NETO, 2013]

As **arestas** da pirâmide são os segmentos VA_i juntamente com os segmentos A_iA_{i+1}, as **faces laterais** são os triângulos VA_iA_{i+1}. É chamado de **interior** de uma pirâmide o conjunto de pontos que não pertence a nenhuma de suas faces. Baixando de V uma perpendicular ao plano da base $A_1A_2\ldots A_n$ de uma pirâmide VA_1A_{2n}, determina-se um ponto P, que é o pé da perpendicular por V. Chama-se a **altura** da pirâmide a distância entre o ponto P e o vértice V. A nomenclatura das pirâmides é feita de acordo com o polígono da base de modo que se a base da pirâmide é um polígono de n lados, esta pirâmide será chamada de pirâmide n-gonal. Uma pirâmide é dita regular se o polígono de sua base for regular.

As áreas da superfície de uma pirâmide podem ser assim definidas:

- Área da base (A_b): é a área do polígono da base.

- Área lateral (A_l): é a soma das áreas de todas as faces laterais.

- Área total (A_t): é a soma da área lateral e da área das base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

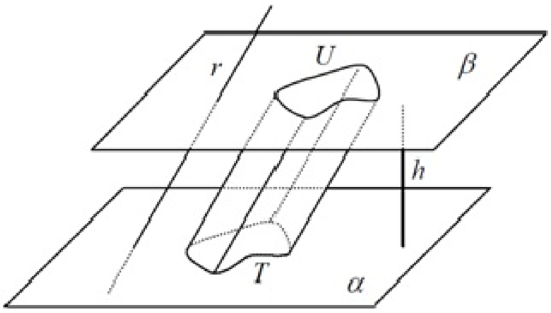
O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área de sua base pela altura, ou seja:

$$V_{pirmide} = \frac{1}{3}.A_b.h$$

Cilindro

Definição 3.16 *Sejam T uma curva fechada do plano α e U uma curva fechada do plano β que é paralelo a α, r uma reta que intersecta os planos e h a distância entre os planos α e β. A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a r e que têm extremidades em T e em U formam um subconjunto do espaço, ao qual chamamos de **cilindro**, conforme pode ser observado na Figura 3.8.*

Figura 3.8: Cilindro.



[Fonte: Geometria. LIMA, 2016]

O número h é definido como sendo a **altura do cilindro** e seu **interior** é o conjunto de pontos que não pertence a nehuma de suas bases. Chamamos de **geratriz** do cilindro a qualquer segmento de reta paralelo a r que mantêm uma extremidade em T e outra em U. Quando a reta r, que intersecta os planos α e β, é perpendicular aos planos, o cilindro passa a ser chamado de **cilindro reto de base** T, caso contrário, ele recebe o nome de **cilindro oblíquo**. E quando suas bases são círculos, trata-se de um **cilindro circular**.

Pode-se definir as áreas da superfície de um cilindro como:

- Área da base (A_b): é a área do círculo de raio r:

$$A_b = \pi.r^2$$

- Área lateral (A_l): é a área do retângulo de dimensões $2\pi.r$ e h:

$$A_l = 2\pi.r.h.$$

- Área total (A_t): é a soma da área lateral com as áreas das duas bases do cilindro.

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_{lateral} + 2.A_{base} \\ A_t &= 2\pi.r.h + 2.\pi.r^2 \\ A_t &= 2\pi.r(h+r) \end{aligned}$$

O volume de um cilindro é igual ao produto da área de sua base pela altura, ou seja:

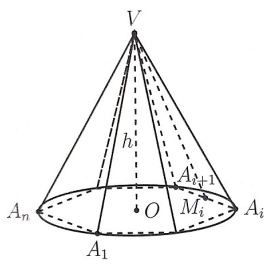
$$\begin{aligned} V_{cilindro} &= A_b.h \\ V &= \pi.r^2.h \end{aligned}$$

Cone

Definição 3.17 *Consideremos uma figura plana M e um ponto V que não pertence ao plano de M. A reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em V e a outra extremidade em M forma um subconjunto do espaço ao qual chamamos de* **cone** *de base M e vértice V.*

Em um cone, a base não é um polígono, mas qualquer região plana delimitada por uma curva fechada e simples. Os **cones circulares** são aqueles cuja base é um círculo, como pode ser observado na figura 3.9.

Figura 3.9: Cone de raio R



[Fonte: Geometria. MUNIZ NETO, 2013]

Cada um dos segmentos que ligam o vértice aos pontos situados sobre a curva que delimita a base é chamado de **geratriz do cone**. A união de todos esses segmentos é uma superfície, chamada de **superfície lateral** e a **altura** é definida como sendo a distância do vértice V ao plano da base.

Definindo as áreas da superfície de um cone, tem-se:

- Área da base (A_b): é a área do círculo de raio r:

$$A_b = \pi.r^2$$

- Área lateral (A_l): é a área do setor circular de raio g:

$$A_l = \pi.r.g$$

- Área total (A_t): é a soma da área lateral com a área da base.

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_l + A_b \\ A_t &= \pi.r.g + \pi.r^2 \\ A_t &= \pi.r(g+r) \end{aligned}$$

O volume de um cone é igual a um terço do produto da área de sua base pela altura:

$$\begin{aligned} V_{cone} &= \frac{1}{3}A_b.h \\ V &= \frac{1}{3}\pi.r^2.h \end{aligned}$$

Capítulo 4

Apresentação de propostas didáticas que utilizam os jogos matemáticos como recurso didático

Analisando de forma prática os benefícios do lúdico à construção do conhecimento, neste capítulo apresentam-se propostas didáticas que foram produzidas utilizando como recurso didático os jogos apresentados no Capítulo 3 com o intuito de trabalhar conteúdos presentes no currículo do Ensino Médio.

4.1 Proposta didática: Revisando função afim

Tendo por propósito mostrar uma abordagem educacional diferenciada no ensino da Matemática, essa proposta pode ser trabalhada em qualquer uma das três séries do Ensino Médio, visto que o conteúdo explorado no jogo é sugerido no currículo de Matemática de todas as séries.

- **Objetivos**:
  - Apresentar para o aluno uma nova linguagem da expressão de dependência entre variáveis, desenvolvendo habilidades e competências para que ele seja capaz de aplicar tal conhecimento em atividades futuras, estruturando o pensamento e o raciocínio dedutivo.
  - Utilizar o conhecimento de função afim para a resolução de atividades que abordam situações do cotidiano.
- **Habilidades**:
  - Identificar os dados relevantes e as relações envolvidas em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções com base no conhecimento de funções.

- Interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações .
- Resolver problemas envolvendo relações de proporcionalidade entre duas grandezas.
- Identificar conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas utilizando a construção do conceito de função.

- **Material utilizado**:
  - Quadro branco e lápis;
  - Projetor multimídia e notebook;
  - Livro didático;
  - Jogo Descobrindo funções (ver Seção 3.1 e Apêndice B).
- **Tempo estimado**: 2 aulas de 50 minutos.
  - Momento I: 1 aula;
  - Momento II: 1 aula.
- **Desenvolvimento**:

Momento I:

Em todo conteúdo que se introduz a uma turma, é importante que ocorra a valorização do conhecimento prévio do aluno. Portanto, inicialmente, deve-se mostrar e explorar situações-problema que retratam o conteúdo função afim, que está descrito na Subseção 3.1.3. O conteúdo deve ser explicado com o auxílio do projetor multimídia e os alunos devem fazer as anotações dos tópicos trabalhados em seus respectivos cadernos para posterior consulta. O objetivo neste momento é explicar os conceitos envolvendo Função afim, fazendo com que os alunos compreendam o conteúdo e esclareçam as dúvidas que forem surgindo.

Momento II:

Neste momento a turma será organizada para realizar o jogo Descobrindo funções (ver Seção 3.1). Será explicado que se trata de um jogo de aprofundamento e que por isso está sendo utilizado após a apresentação do conteúdo necessário na resolução das situações-problema propostas. Em seguida, as regras devem ser apresentadas e distribuído o material necessário (ver Subseção 3.1.2). Ao preparar o material usado no jogo devem ser providenciados, pelo menos 2 envelopes com funções diferentes para cada dupla, de modo que se possam realizar no mínimo 2 disputas, visto que cada partida está condicionada a descoberta de uma função. Depois que eles descobrirem a função presente no primeiro envelope e determinarem a dupla vencedora, se houver, uma vez que ambas possam encontrar a função, trocam-se os envelopes de modo que cada dupla realize 2 partidas.

Após a conclusão do jogo, alguns questionamentos podem ser realizados, por exemplo:

- Você utilizou alguma estratégia para ganhar o jogo? Em caso afirmativo, qual teria sido utilizada?
- Qual a contribuição do jogo para a aprendizagem do conteúdo?
- Qual era a sua expectativa antes da realização do jogo? Ela foi superada? Em caso afirmativo, de que maneira?
- O professor pode aproveitar e deixar que os alunos exponham suas opiniões a respeito da utilização desse recurso didático nas aulas de Matemática.

No próximo capítulo será relatada a experiência da aplicação dessa proposta em uma turma do Ensino Médio de uma escola pública estadual.

4.2 Proposta didática: As chances em um sorteio

O cotidiano é permeado de incertezas e a necessidade de se ter algum controle sobre elas motivou a elaboração da teoria das probabilidades, uma ferramenta capaz de medir a esperança que se tem a respeito de um determinado experimento produzir um certo resultado. A utilização do jogo em sala de aula servirá como instrumento de ensino, procurando ser um meio de apoio e de motivação para a aprendizagem de conceitos de probabilidade. Não foi possível aplicar esta proposta, em virtude da suspensão das aulas por conta da pandemia do COVID-19. De todo modo, a seguir tem-se a descrição de todas as etapas que a compõem.

- **Objetivos**:
  - Compreender o caráter aleatório e não determinístico de fenômenos naturais e sociais, mobilizando o raciocínio para calcular a probabilidade de acontecimentos simples equiprováveis.
  - Construir o conceito de probabilidade com a participação da turma, usando o jogo para dar sentido as noções de experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade.
- **Habilidades**:
  - Utilizar conceito de eventos independentes simultâneos para a resolução de algumas questões.

  - Compreender a noção de probabilidade de um acontecimento através da realização de experiências repetidas.
  - Identificar e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática para calcular a probabilidade de um evento.
  - Identificar os dados relevantes e as relações envolvidas em uma dada situação-problema para buscar possíveis soluções utilizando o conceito de probabilidade.
  - Interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações.

- **Material utilizado**:
  - Quadro branco e lápis;
  - Projetor multimídia;
  - Livro didático;
  - Jogo Probabilidades (ver Seção 3.2 e o Apêndice C).

- **Tempo estimado**: 2 aulas de 50 minutos.
  - Momentos I e II: 80 min;
  - Momento III: 20 min;

- Desenvolvimento:

Momento I:

A proposta não é meramente para a fixação de um conteúdo, pois desta forma estará ensinando a Matemática para resolver um jogo e não um jogo para entendê-la. A intenção é que o professor disponha das regras do jogo a fim de introduzir o conteúdo de Probabilidade. Neste momento a turma será organizada para a realização do jogo Probabilidades (ver Seção 3.2). As regras do jogo devem ser apresentadas e cada dupla receberá o material necessário (ver Subseção 3.2.2) para jogar. Em cada partida pode haver até 5 rodadas e ocorrer empate, logo o aluno deverá perceber que a busca pela vitória não é o mais importante, mas a compreensão de conceitos indispensáveis ao estudo da probabilidade.

Depois de realizado o jogo, os seguintes questionamentos devem ser feitos:

- Quais seriam as possibilidades de se colocar as 8 bolinhas dentro do saquinho?
- Se as bolas tivessem sido retiradas com reposição, seria mais fácil ou mais difícil retirar em seguida as três bolinhas da mesma cor?
- Qual estratégia vocês utilizaram para que a dupla adversária não ganhasse?

Momento II:

Após a conclusão do momento anterior com a reflexão acerca dos questionamentos, depois da aplicação do jogo e de serem comentadas as respostas, o professor utilizará esse momento para realizar a explanação do conteúdo Probabilidade apresentado na Subseção 3.2.3. Feito isso, outras indagações ainda relativas a realização do jogo podem ser feitas:

- Qual seria o espaço amostral desse experimento aleatório?
- Quais eventos poderíamos determinar com esse experimento?

Os alunos poderão realizar as anotações dos tópicos trabalhados e acompanhar o conteúdo presente no seu livro didático. As dúvidas que forem surgindo serão esclarecidas com a realização dos exemplos presentes na anotação.

Momento III:

O professor pode, a partir do que foi vivenciado nos momentos I e II, elaborar uma lista de exercícios para que os alunos possam aplicar através de cálculos o conhecimento adquirido.

4.3 Proposta didática: Funções e seus gráficos

Funções podem ser representadas geometricamente no plano cartesiano. A relação entre os pares ordenados presentes em cada uma, em especial, das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, têm grande importância no estudo dos seus respectivos gráficos. Não foi possível aplicar esta proposta, em virtude da suspensão das aulas por conta da pandemia do COVID-19. No entanto, serão descritas todas as etapas para sua realização.

- **Objetivos**:
  - Realizar a identificação, leitura e interpretação das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica representadas por gráficos;
  - Utilizar conhecimento sobre estas funções como recurso para a avaliação de propostas de intervenção na realidade.
- **Habilidades**:
  - Identificar estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das atividades cotidianas, utilizando a construção dos gráficos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica;
  - Interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes representações gráficas;

- Identificar os dados relevantes e as relações envolvidas em uma dada situação-problema para buscar possíveis soluções com base no conhecimento das funções que são tema da proposta atual.

- **Material utilizado**:
  - Quadro branco e lápis;
  - Projetor multimídia;
  - Folhas de sulfite com a anotação impressa do conteúdo;
  - Jogo Ligando pontos no plano (ver Seção 3.3 e Apêndice D).

- **Tempo estimado**: 2 aulas de 50 minutos.
  - Momento I: 1 aula;
  - Momento II: 1 aula;

- Desenvolvimento:

Momento I:

O objetivo neste momento é explicar os conceitos, características e propriedades envolvendo os gráficos das funções e fazer com que os alunos compreendam o conteúdo apresentado. Inicialmente, para expor os conceitos iniciais dos gráficos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, deve-se explorar situações-problema que abordam o conteúdo que está exposto na Subseção 3.3.3; este material, por sua vez, pode ser exposto usando um projetor multimídia e cópia impressa fornecida à turma. Os alunos poderão acompanhar a explicação dos tópicos trabalhados presentes na anotação recebida. As dúvidas que forem surgindo, serão esclarecidas com os exemplos respondidos durante a explanação.

Momento II:

Neste momento, após a apresentação do conteúdo, a turma será organizada para a realização do jogo Ligando pontos no plano (ver Seção 3.4). Deve ser explicado que esse jogo é de aprofundamento e por isso está sendo realizado após a explicação do conteúdo. As regras devem ser apresentadas e o material necessário descrito na Subseção 3.3.1 deve ser distribuído. Ao preparar o material usado no jogo, devem ser providenciados pelo menos 2 envelopes contendo cartões com planos diferentes para cada dupla, de modo que se possam realizar no mínimo 2 disputas, visto que cada partida está condicionada a descoberta das funções que interligam os pontos presentes no plano.

Após a conclusão do jogo alguns questionamentos podem ser realizados:

- Você utilizou alguma estratégia para ganhar o jogo? Em caso afirmativo, qual teria sido utilizada?

- De que modo o jogo contribuiu para a aprendizagem do conteúdo?
- Qual era a sua expectativa antes da realização do jogo? Ela foi superada? Em caso afirmativo, de que maneira?

O professor pode aproveitar e deixar que os alunos falem das suas conclusões em relação a utilização desse recurso didático nas aulas de Matemática.

4.4 Proposta didática: Explorando os sólidos geométricos

Os sólidos geométricos são formas espaciais muito presentes no nosso dia a dia. É um tema que permite a continuidade do desenvolvimento da interpretação e do uso de modelos e representações matemáticas para analisar relações entre figuras e obter determinadas medições dos aspectos físicos relacionados a sólidos. A aplicação desta proposta não pôde ser realizada, em virtude da suspensão das aulas por conta da pandemia do COVID-19. No entanto, todas as etapas para sua realização, serão descritas:

- **Objetivos**:
  - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade para agir sobre ela;
  - Identificar as características dos poliedros e dos corpos redondos.
- **Habilidades**:
  - Utilizar conhecimentos geométricos para elaborar argumentos para a resolução e análise de situações do dia a dia;
  - Identificar os dados relevantes e as relações envolvidas em uma dada situação-problema para buscar possíveis soluções com base no conhecimento de sólidos geométricos;
  - Interpretar dados ou informações apresentadas nas representações planificadas dos poliedros e corpos redondos.
  - Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos relativos aos poliedros e aos corpos redondos.
  - Associar os sólidos geométricos às suas representações no espaço e no plano;
  - Identificar estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das atividades cotidianas utilizando os conceitos e propriedades dos sólidos geométricos.
- **Material utilizado**:

- Quadro branco e lápis;
- Projetor multimídia e notebook;
- Livro didático;
- Embalagens e objetos nos formatos de prismas, pirâmides, cilindros e cones;
- Jogo Juntando 4 (ver Seção 3.4 e o Apêndice E).

• **Tempo estimado**: 2 aulas de 50 minutos.

  - Momento I: 1 aula;
  - Momento II: 1 aula;

• Desenvolvimento:

Momento I:

Inicialmente, para apresentar os conceitos iniciais dos sólidos geométricos, deve-se apresentar e explorar situações problema que abordam o conteúdo utilizando as embalagens e objetos nos formatos de poliedros e corpos redondos. O conteúdo que está exposto na Subseção 3.4.3 será apresentado e explanado para os alunos, por meio de slides apresentados no projetor multimídia que farão as anotações dos tópicos trabalhados em seus cadernos. O objetivo neste momento é explicar os conceitos, características e propriedades envolvendo os poliedros (prismas e pirâmides) e os corpos redondos (cilindro e cone) e fazer com que os alunos compreendam o conteúdo abordado presente no seu livro didático. As dúvidas que forem surgindo, serão esclarecidas com a apresentação dos exemplos durante a explicação do conteúdo.

Momento II:

Nesta ocasião, após a apresentação do conteúdo, a turma será dividida em grupos com 4 alunos que ficarão em círculos e se enfrentarão na realização do jogo Juntando 4 (ver Seção 3.4). De início, alguns alunos podem ficar à espera do exercício relacionado ao assunto, e será explicado que participarão de um jogo de aprofundamento (ver 2.2). Em seguida, as regras do jogo serão apresentadas e o material necessário descrito na Subseção 3.4.2 será distribuído. A quantidade de partidas realizadas, será escolhida pelo professor, uma vez que a partida encerra quando um dos jogadores completa seu quarteto de cartas com a informações referentes ao mesmo sólido.

Depois de concluído o jogo, alguns pontos podem ser levantados:

• Você utilizou alguma estratégia para ganhar o jogo? Em caso afirmativo, qual teria sido utilizada?

• Qual a contribuição do jogo para a aprendizagem do assunto?

- Qual era a sua expectativa antes da realização do jogo? Ela foi superada? Em caso afirmativo, de que maneira?

O professor pode aproveitar e deixar que os alunos falem das suas conclusões em relação a utilização desse recurso didático nas aulas de Matemática.

4.5 Resultados esperados com a aplicação das propostas

Os jogos matemáticos destinados ao Ensino Médio não podem ser trabalhados esporadicamente para tornar uma ou outra aula divertida e diferente. Bem como, não podem ser vistos como algo distante da realidade da sala de aula, porque a posssibilidade de sua utilização está relacionada com a construção do conhecimento matemático durante a realização da atividade.

SMOLE et al. [23] mostra em seus estudos, que quando as situações de jogos são bem aproveitadas, todos ganham. Ganha o professor porque tem a possibilidade de propor formas diferenciadas dos discentes aprenderem, permitindo um maior envolvimento de todos e criando naturalmente uma situação de atendimento à diversidade; e ganha o aluno que aprenderá mais, ao mesmo tempo em que desenvolve outras habilidades que lhe serão úteis por toda a vida e não apenas para a Matemática.

A elaboração destas propostas tem como intuito mostrar que os jogos são elementos que fazem parte da aula, pois a visualização e manipulação dos materiais fazem parte da construção do conhecimento de cada um desses conteúdos abordados. Os jogos não são empregados apenas para divertir, mas para tornar esse momento mais dinâmico fazendo com que a aprendizagem ocorra de modo significativo. Cada uma delas foi preparada de modo que seus objetivos sejam alcançados e as habilidades presentes sejam trabalhadas e desenvolvidas de modo eficiente.

Com a realização da proposta presente na seção 4.1, espera-se que o aluno compreenda melhor o conteúdo função afim. Para isso, será utilizada uma atividade apresentada de um modo diferente do que se costuma vir nos livros didáticos. Será percebida uma motivação maior na grande maioria dos alunos envolvidos, e essa ação fará com que haja uma aprendizagem efetiva do conteúdo abordado, e desse modo se chegará a conclusão se o resultado esperado foi obtido.

Na proposta presente na Seção 4.2, espera-se que os alunos possam compreender as noções de probabilidade a partir da manipulação do material concreto. De modo, que este contato possibilite ao aluno construir, utilizando o jogo, as ideias de espaço amostral e evento.

Com a aplicação da proposta "Funções e seus gráficos", presente na Seção 4.3, espera-se mais do que apenas a interação e cooperação entre alunos: o objetivo central é confrontar os vários tipos de funções através de suas propriedades gráficas. Ademais, o jogo apresentado serve para dar nova roupagem a exercícios clássicos relativos a esse tópico, trabalhando as mesmas propriedades e técnicas, mas com uma abordagem diferente.

Por fim, a proposta apresentada ao longo da Seção 4.4, mostra um modo de se trabalhar as diferenças entre as características dos sólidos geométricos, confrontando-as entre si. Importante ressaltar que poucos exercícios conseguem fazer esse tipo de provocação, comparando sistematicamente as diversas propriedades dos objetos geométricos estudados no Ensino Médio.

No próximo capítulo serão relatadas as experiências da criação e elaboração dos jogos e da aplicação da proposta presente na Seção 4.1.

Capítulo 5

Diário de uma pesquisadora

Este capítulo foi elaborado com a intenção de mostrar os momentos vivenciados pela autora, desde o surgimento das ideias para elaboração de cada jogo, até a sua concretização, com a aplicação de uma proposta que emprega o produto final obtido com a realização deste trabalho.

5.1 Relato da aplicação da proposta didática: Revisando função afim

A realização da pesquisa e a aplicação da proposta didática *Revisando função afim* (ver Seção 4.1) ocorreram na Escola de Referência em Ensino Médio José Pereira Burgos, localizada na cidade de Custódia-PE, em uma turma do 3º Ano do Ensino Médio. A autora trabalha no ambiente onde ocorreu a aplicação, de modo a contribuir para a construção do conhecimento, possibilitando uma maior liberdade de ação dos alunos participantes. Quanto à escolha por realizar o estudo nas turmas com as quais a autora trabalha, aconteceu em virtude dos benefícios potenciais trazidos à pesquisa, já que o contato mais próximo com os alunos poderia possibilitar uma melhor análise de seus aspectos qualitativos. Contando, também, com a possibilidade de mudança no processo de aprendizagem de um público que poderá ser observado por um período de tempo maior, pois como professora da turma existe a possibilidade de se continuar em contato com o grupo após o término da pesquisa.

Ao realizar a proposta, o Momento I foi iniciado com a apresentação e explanação do conteúdo Função afim (ver Subseção 3.1.3). À medida que o conteúdo era explicado, os alunos faziam anotações dos tópicos trabalhados em seus respectivos cadernos para consultar posteriormente. As dúvidas que surgiam eram esclarecidas com a explicação de alguns exemplos.

Concluído o Momento I, ocorreu a preparação do material para a realização do Momento II. De início, alguns alunos estavam esperando o exercício relacionado ao assunto, mas ficaram surpresos quando foi explicado que eles participariam de um jogo e qual era o objetivo desta intervenção. Antes dos discentes começarem a jogar, foi explicado que tratava-se de um jogo de aprofundamento e foi explicada a definição desse tipo de jogo.

Algumas indagações foram feitas por eles:

– “Não vai ter exercício, não, professora? ” – perguntou um aluno.

– “Cadê as questões do assunto?” — indagou outro aluno.

Durante a realização do jogo, foi observado o comportamento dos alunos diante daquela situação. Muitos estavam empolgados em descobrir primeiro a função, mas não apenas porque queriam vencer o jogo, mas porque estavam conseguindo colocar em prática o conteúdo que tinha sido abordado antes.

Alguns até fizeram os seguintes comentários:

– “Gostei, professora, dessa maneira de fazer o exercício”. – disse um aluno.

– “Assim fica fácil, fazer a atividade.” – falou uma aluna.

– “Devia ter mais vezes esse jogo na aula.”– relatou um aluno.

Embora não tenha sido na totalidade dos alunos que compõe a turma, uma grande parte se envolveu e participou de forma efetiva da atividade. Encerradas as rodadas de todos os grupos, foi providenciado o material para realização do último momento.

As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 retratam a realização do jogo e a participação dos alunos de uma turma de 3º ano.

Figura 5.1: Alunas interagindo durante o jogo.

[Fonte: Elaborada pela autora.]

Figura 5.2: Alunos criando estratégias durante o jogo.

[Fonte: Elaborada pela autora.]

Figura 5.3: Alunos participando do jogo.

[Fonte: Elaborada pela autora.]

O Momento III foi iniciado com a aplicação de um questionário para um grupo de 28 alunos. O intuito era colher opiniões a respeito da intervenção.

O questionário apresentava as seguintes perguntas:

1. A atividade foi motivadora?

   ( ) Sim, me motivou. ( ) Sim, me motivou em partes. ( ) Não.

2. Você conseguiu traçar uma estratégia para vencer o jogo?

   ( ) Não. ( ) Sim. Em caso afirmativo. Qual foi a estratégia?

3. O jogo ajudou em compreender melhor o conteúdo matemático?

   ( ) Não. ( ) Sim.

4. O jogo despertou o seu interesse em relação à disciplina?

   ( ) Não. ( ) Sim.

5. Como você avalia a atividade?

   ( ) Muito Ruim ( ) Ruim ( ) Boa ( ) Muito boa ( ) Excelente

6. Neste espaço você poderá deixar alguma sugestão para melhorar a atividade, crítica sobre a atividade ou elogio.

Ao observar os questionários, foi verificado que dois deles não foram devidamente preenchidos e que os demais apresentavam respostas claras e concisas. Grande parte das respostas do questionário, foram favoráveis a aplicação de jogos nas aulas de Matemática, muito embora não se pôde perceber os efeitos que essa prática pode trazer a longo prazo.

Após analisar as respostas obtidas com a aplicação do questionário e o comportamento dos alunos durante a aplicação da proposta, pôde-se concluir que levar um recurso didático diferente, mesmo que utilize o material à disposição cotidianamente, fez com que os alunos do Ensino Médio, participassem daquele momento ativamente. A satisfação em ter conseguido encontrar a função, mesmo que não significasse a vitória, era notória no semblante de alguns alunos.

Devido a boa recepção e repercussão da apresentação da proposta presente neste trabalho na escola escolhida, a rotina do ambiente escolar foi alterada com a implementação de uma disciplina eletiva na qual a temática trabalha com os jogos matemáticos, abordando-se seu histórico, a produção do material e sua utlização nas aulas de Matemática.

Ao concluir a aplicação da atividade, a autora sentiu-se realizada em poder contribuir com a comunidade escolar, ao criar e produzir um jogo que foi utlizado para facilitar a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Infelizmente, não foi possível aplicar todas as propostas sugeridas. Em virtude da pandemia de COVID-19, houve a suspensão das aulas na escola escolhida, e com isso não houve a possibilidade de realizar a proposta em outras turmas, no entanto quando as aulas retornarem isso será feito, bem como a aplicação das outras propostas. Na seção que segue, será relatada a experiência da criação e elaboração dos jogos apresentados no capítulo 3.

5.2 Relato da criação e elaboração dos jogos propostos

Os primeiros encontros com os orientadores ocorreram em setembro de 2019 para discutir a temática que a autora pretendia abordar no seu Trabalho de Conclusão de Curso. A autora começou a realizar uma pesquisa sobre o tema e fez um estudo com alunos do Ensino Médio, abordando os seguintes questionamentos:

- O que você acha da utilização de jogos nas aulas de Matemática?
- Que tipo de jogo você gostaria que fosse utlizado?

Depois de analisar as respostas, percebeu que os jogos que seriam criados deveriam despertar, mais do que a atenção do aluno, mas provocar seu pensamento crítico, tirá-lo da posição passiva na qual é colocado durante as aulas que são normalmente praticadas. Foi, então, a busca de ideias que correspondessem a essa expectativa. Não foi uma tarefa muito simples, pois teria que criar levando em consideração os conteúdos que são trabalhados nesta etapa do ensino e as competências e habilidades propostas pela BNCC [2]. Cada jogo foi projetado em momentos diferentes, conforme será contado a seguir:

O jogo *Descobrindo funções*, inicialmente, foi proposto para utilizar qualquer função. Porém ao longo do trabalho percebeu-se que seria mais proveitosa a utilização de apenas um tipo de função, em virtude do tempo de aplicação. No decorrer do seu desenvolvimento não ocorreram tantas alterações e foi o único jogo aplicado por meio da proposta didática sugerida no capítulo 4.

O jogo *Probabilidades* foi criado a partir do material "Kit de Probabilidade" que a autora encontrou na escola onde trabalha. A ideia foi levar o jogo para a partir dele, fazer suscitar questões que a Matemática traz em sua modelagem. Assim, com alunos devidamente provocados, no sentido de estarem atentos ao cerne de problemas simples, que têm questões probabilísticas em sua natureza, o professor pode apresentar as ferramentas matemáticas que o descrevem. Como o "Kit de Probabilidade" não seria acessível a todos que o desejassem utilizar, foi sugerido um material de baixo custo e de fácil acesso.

O jogo *Ligando pontos no plano* foi criado com o intuito de abordar as diferentes funções que devem ser trabalhadas no Ensino Médio e foi o único que sofreu muitas mudanças desde sua criação. De início, a sugestão era demarcar faixas do plano cartesiano pelas quais gráficos de funções seriam traçados. Apesar de ser uma ideia que agradou a equipe, percebeu-se que não seria fácil tirá-la do papel, e sua execução em sala de aula demandaria muito tempo. O jogo teria dois níveis, diferenciados apenas pelo fato de usar um tipo de função em um primeiro estágio ou dois tipos de função no segundo. O jogo presente na Seção 3.3 e na proposta apresentada na Seção 4.3 não apresenta níveis, pois utiliza apenas um tipo de função e isso permite que o professor disponha de dois jogos em um, pois utilizará as mesmas regras caso queira utilizar dois tipos de função. No Apêndice D serão apresentados os modelos de planos e fichas para as duas situações.

O jogo *Juntando 4* foi elaborado baseado no jogo "Quatro é o limite" (que trata originalmente de funções quadráticas), mas a proposta é utilizar Geometria Espacial, tema muito comum no Ensino Médio, porém de uma maneira diferente, já que muda a ordem em que os elementos comumente aparecem.

Estes jogos abordam as situações-problema que costumam aparecer nos livros didáticos porém com uma aparência diferente. Por menor que seja a mudança, pode despertar motivação nos alunos, impelindo-os a resolvê-las. Ao longo do processo de elaboração foram apresentados para alguns professores que os analisaram e teceram opiniões a respeito de cada um. No entanto, essas ponderações foram levadas em consideração na fase de aprimoramento de cada jogo.

Capítulo 6

Conclusões

Os jogos matemáticos estimulam o raciocínio e aprimoram elementos como observação, concentração, análise e atenção, que são fundamentais para o aprendizado de Matemática e contribuem para desenvolver o raciocínio lógico de cada jogador envolvido. No contexto do lúdico, identifica-se o uso de jogos matemáticos como instrumento didático útil nas aulas, proporcionando clareza e organização de ideias, além de auxiliar positivamente na formulação de hipóteses ao contribuir para a resolução de diversos problemas propostos nesta disciplina.

Quando o aluno joga, perdendo ou ganhando, ele consegue adquirir novos aprendizados e vivencia novas experiências; estas, por sua vez, possibilitam a reflexão sobre a validade de hipóteses levantadas no momento da atividade. Os jogos que foram elaborados e sugeridos exemplificaram a facilidade de se produzir este importante recurso para abordar diferentes conteúdos do Ensino Médio.

As propostas didáticas aqui apresentadas foram elaboradas com o intuito de mostrar que a utilização dos jogos matemáticos pode ser realizada de modo simples, porém com grande eficácia.

Com a conclusão deste trabalho, a autora pretende motivar professores a utilizar jogos matemáticos com mais frequência, nas aulas de Matemática de turmas do Ensino Médio, e ainda por meio da exposição de suas vivências mostrar que este recurso pode contribuir para a melhoria do ensino, proporcionando a compreensão de conceitos e facilitando a aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] BELL, R. C. *Board and table games from many civilization*. Nova Iorque: Dover. 1980.

[2] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2017.

[3] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio(PCNEM)*. Secretaria de Educação Básica - Brasília: MEC/SEMT – 2000.

[4] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+): Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Secretaria de Educação Básica - Brasília: MEC/SEMT – 2002.

[5] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (PCN)* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF - 1998.

[6] BORIN,J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática* São Paulo: IME-USP- 1996.

[7] CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C. Matemática discreta. SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

[8] FULTS J.L. *Magic Squares.* Illinois- EUA: Open Court Publishing Co, 1974.

[9] GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. JR, José Ruy Giovanni. *Matemática Fundamental: uma nova abordagem*. São Paulo: FTD, 2002.

[10] HUIZINGA, J. *Homo ludens: o jogo como elemento da cultura*. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2000.

[11] IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos da matemática elementar 1: conjuntos e funções*. 9ª.ed. São Paulo: Atual, 2013.

[12] KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e educação*. 8ª ed. São Paulo: Cortez, 2005.

[13] LARA, Isabel Cristina M. de, *Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série*. 2ª edição. São Paulo, Rêspel, 2003.

[14] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. SBM. 2012. Coleção PROFMAT.

[15] MONTET, Pierre. *Les énigmes de Tanis.* Paris: Payot, 1952.

[16] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*. SBM. 2013. Coleção PROFMAT

[17] MURRAY, H. J. R. *A history of board-games other than chess*. Londres: Oxford University Press.1952.

[18] NETO, J. P. SILVA J. N. *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*. Lisboa: Gradiva. 2004.

[19] PIAGET, J. *A psicologia da criança.* Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998.

[20] READ, Ronald C. *Tangrams: 330 puzzles*. New York: Dover Publications, 1965.

[21] SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez. *Matemática - Ensino Médio 2*. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[22] SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez. CÂNDIDO, Patrícia. *Figuras e formas*. 2.ed.rev. Porto Alegre: Penso, 2014.

[23] SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; PESSOA, Neide; ISHIHARA, Cristiane. *Jogos de matemática do 1° ao 3° ano (Série Caderno do Mathema: Ensino Médio)*. Porto Alegre: Artmed, 2008.

[24] WATANABE, R. *Uma lenda: Torre de Hanói. Explorando o Ensino da Matemática, Volume II*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília. 2004.

[25] WALKER, R. *Sculptured mancala gameboard of Sub-Saharan África*. (Tese) Phd, Indiana University, 1990.

[26] IMENES, Luiz Marcio P., SANTOS, Carlos Henrique.*TANGRAM Um antigo jogo chinês nas aulas de Matemática*. Revista de Ensino de Ciências. Nº 18. Agosto, 1987.

[27] SCIAM, Scientific American Brasil. *A ciência do Sudoku.* Disponível em: https://sciam.uol.com.br/a-ciencia-do-sudoku/. Acesso em: 10 mai. 2020.

[28] SCIAM, Scientific American. *A torre de Hanói* Disponível em: https://www.scientificamerican.com/article/the-tower-of-hanoi/. Acesso em: 10 ago. 2020.

[29] TEIXEIRA, Ricardo Cunha. *Curiosidades numéricas: A Matemática do Sudoku.* Artigo de divulgação: Expresso Atlântico. Publicado em 13 de abril de 2015.

[30] GRANDO, Regina Célia. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Campinas, SP, 2000. 239p. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. UNICAMP. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251334 Acesso em: 15 nov. 2019.

[31] BARRETO, Gláucia Bomfim Barbosa. *O ensino de matemática através de jogos educativos africanos: um estudo de caso em uma turma de educação de jovens e adultos (EJA) de uma escola municipal de Aracaju*. Dissertação de Mestrado em Ensino e Ciências Naturais e Matemática - Universidade Federal de Sergipe. Aracaju, 2016.

[32] MOREIRA, Paula Burkardt. *Proposta para o ensino de matemática através da construção e aplicação do Tangram: da educação infantil ao ensino fundamental II.* Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática - 2016.

[33] POSSAMAI, Angelita. *Quadrados Mágicos*. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020.

[34] RODRIGUES, Gustavo Souza. *Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Universidade de Brasília. Brasília. 2018.

[35] SILVA, Claudenor Ancelmo da. Torre de hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas - Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró. 2015.

[36] SOUZA, Bruno de O. *Ensinando Matemática com jogos*. Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da UENF. Campos dos Goytacazes. 2013.

[37] TEIXEIRA, Susane Fernandes de Abreu. *Uma reflexão sobre a ambiguidade do conceito de jogo na educação matemática*. Dissertação apresentada a Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008.

[38] CHAVES, Eni Fátima de Souza.*O lúdico e a matemática*. Monografia apresentada ao Curso de Graduação da Faculdade Pedro II. Belo Horizonte, 2009.

[39] NUNES, Pablo da Silva. *Sudoku: O lúdico interagindo com os conceitos matemáticos*. Monografia apresentada ao Departamento de Matemática - Instituto de Ciências Exatas da UFRJ. Seropédica, 2007.

[40] BROWN, Peter G. *"Os Quadrados Mágicos de Manuel Moschopoulos - Introdução*, Convergência(julho de 2012).Disponível em: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-magic-squares-of-manuel-moschopoulos-introduction.Acesso em 10 mai 2020.

[41] MENDELL, Henry. *Arquimedes, Sand-Reckoner*. Disponível em: http://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Archimedes/SandReckoner/SandReckoner.html. Acesso em: 12 ago. 2020.

[42] O'CONNOR, J.J. ROBERTSON, E.F. *Jogos e recriações matemáticas*. Disponível em: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mathematica-games.html. Acesso em: 5 abr. 2020.

[43] *História do Tangram*. Disponível em: http: //jwilson.coe.uga.edu/emt668/emat6680.2000/wiginton/emat6690/pagemill/History.html. Acesso em: 5 jul. 2020.

[44] *História do Sudoku*. Disponível em: https://www.sudokuonline.io/pt/dicas/historia-do-sudoku. Acesso em: 5 jul. 2020.

[45] *Stomachion*. Disponível em: https://illuminations.nctm.org/uploadedFiles/Content/Lessons/Resources/3 – 5/Stomachion-AS-ArchPuzzle.pdf. Acesso em: 10 jul. 2020.

[46] YOUNG, Elaine. *Euler Squares - Introdução*. Disponível em: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/euler-squares-introduction. Acesso em: 12 ago. 2020.

[47] SANTINHO, Miriam Sampieri; MACHADO, Rosa Mariama. *Os fascinantes Quadrados Mágicos*. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Goiás: Anais, 2006. Disponível em: http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/miriam.rosa.pdf; Acesso em: 10 fev. 2020.

[48] SILVA, Alexandre Pinheiro. *Uma breve história do jogo GO: das suas origens ao século XXI*. Monografia apresentada ao Departamento de História de Ciências Humanas da UNB. Brasília, 2011.

Apêndice A

Instruções para o Jogo Ouri

Neste apêndice será apresentado o material, as regras e os procedimentos para realização do Jogo Ouri.

Material necessário:

- 48 sementes (ou outros objetos pequenos, tais como avelãs ou pedras);
- Tabuleiro com 14 buracos.

Objetivo:

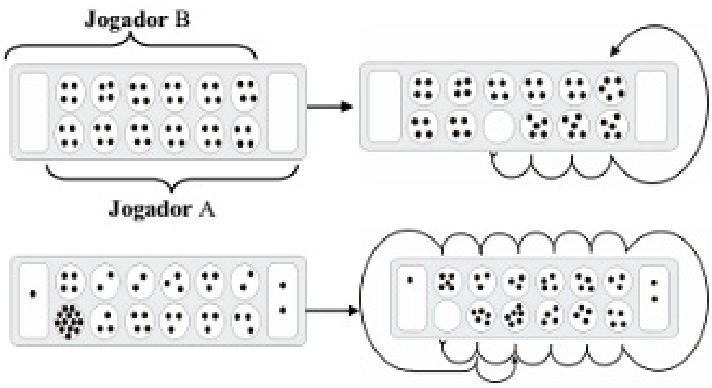
O objetivo do jogo é recolher mais sementes que o adversário, pois vence o jogador que obtiver 25 (ou mais) sementes.

Regras

- No tabuleiro existem duas filas, cada uma com seis buracos circulares, chamados casas, nos quais se encontram as sementes em jogo.
- Cada extremidade do tabuleiro é ocupada por um buraco maior, designado por "depósito", destinado a guardar as sementes capturadas do adversário ao longo do jogo.
- Participam no jogo dois jogadores e estes jogam alternadamente e o depósito de cada um é o que fica à sua direita.

Movimentos

- No início do jogo são colocadas 4 sementes em cada uma das doze casas. O jogador que inicia o jogo colhe todas as sementes de um dos seus buracos e as distribui, uma a uma, nos buracos seguintes, no sentido anti-horário. E isso se mantém para todas as jogadas.
- Quando uma casa contiver 12 ou mais sementes, o jogador dá uma volta completa ao tabuleiro, saltando a casa donde partiu. Não se pode tirar as sementes das casas que contenham apenas uma, enquanto houver casas com duas ou mais.



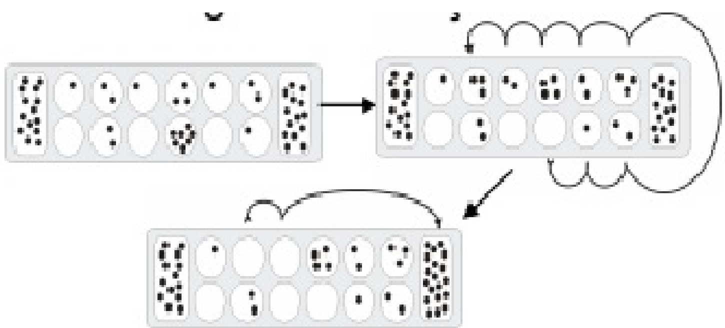
[Fonte:http://ex.ludicum.org/cnjm/2005/]

Capturas

Os jogadores capturam sementes nas seguintes situações:

1. Quando, ao colocar a última semente numa casa do adversário, esta ficar com duas ou três sementes, o jogador retira-as e coloca-as no seu depósito.

2. Se a(s) casa(s) anterior(es) a essa também tiver(em) duas ou três sementes, o jogador captura-as e guarda-as no seu depósito. A captura é interrompida na primeira casa que não tenha esse número de sementes.



[Fonte:http://ex.ludicum.org/cnjm/2005/]

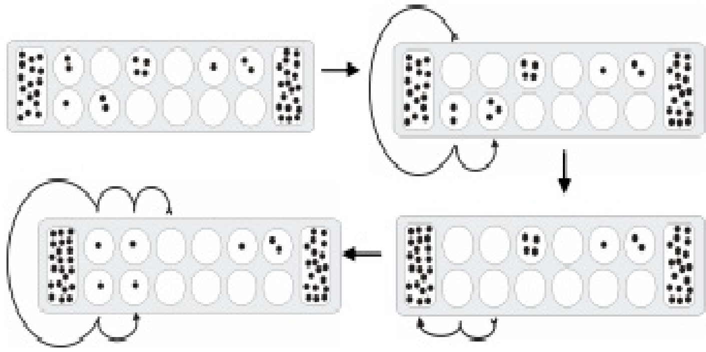
NOTA: Se, ao depositar a última semente na casa do adversário, esta ficar com quatro ou mais sementes, o jogador não as pode capturar. Se a casa estiver vazia e ficar com uma semente após a jogada, também não haverá captura.

Regras Suplementares

As regras suplementares aplicam-se quando um dos jogadores fica sem sementes:

- Quando um jogador realiza um movimento e fica sem sementes, o adversário é obrigado a efetuar uma jogada em que introduza uma ou várias sementes do lado desse jogador.

- Se um jogador realiza uma captura e deixa o adversário sem sementes, é obrigado a jogar novamente, para introduzir uma ou várias sementes nas casas dele.

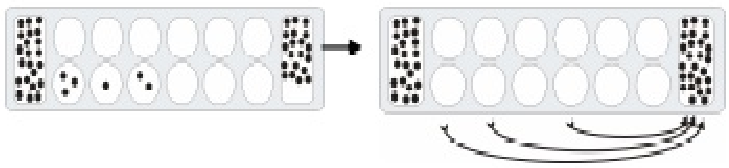


[Fonte:http://ex.ludicum.org/cnjm/2005/]

Fim da Partida

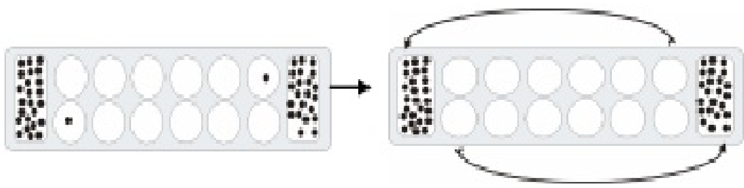
- Quando um jogador capturar a maioria das sementes, 25 ou mais, a partida finaliza e esse jogador ganha.

- Quando um jogador fica sem sementes e o adversário não pode jogar de forma a introduzir algumas sementes nas casas desse jogador, a partida termina e o adversário recolhe as sementes que estão nas suas casas para o seu depósito. Ganha quem tiver um maior número de sementes;



[Fonte:http://ex.ludicum.org/cnjm/2005/]

- Quando existem poucas sementes no tabuleiro e se cria uma situação que se repete ciclicamente, sem que os jogadores possam ou queiram evitá-lo, cada jogador recolhe as sementes que se encontram nas suas casas e coloca-as nos respectivos depósitos.



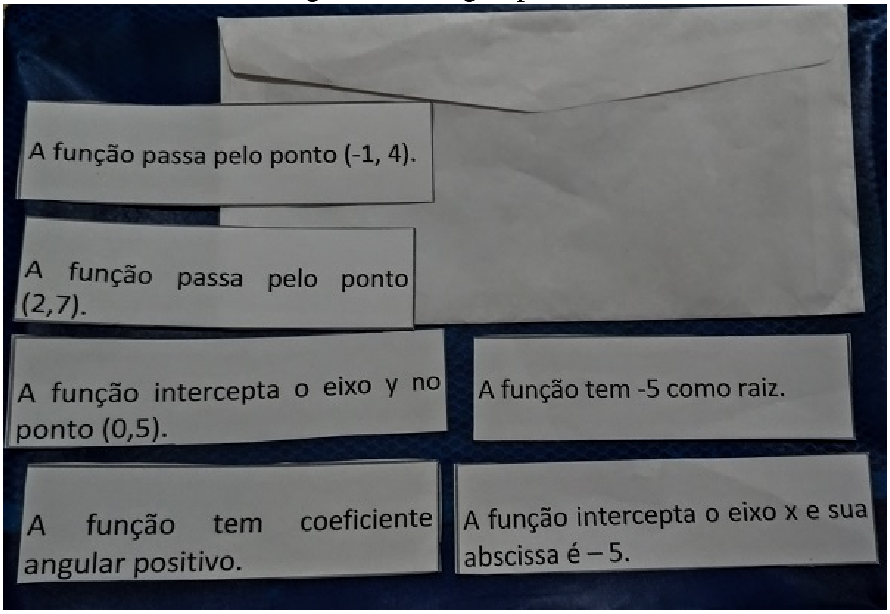
[Fonte:http://ex.ludicum.org/cnjm/2005]

Apêndice B

Modelo das fichas do jogo Descobrindo funções

A Figura 5.3 ilustra o material utilizado no jogo realizado durante a aplicação da proposta didática, apresentada no Capítulo 4 e relatada no Capítulo 5,em uma turma do 3º ano do Ensnino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio José Pereira Burgos, localizada na cidade de Custódia-PE.

Figura B.1: Jogo aplicado



[Elaborada pela autora]

Todas as figuras desta página foram elaboradas pela autora.

Figura B.2: Dicas para determinação da função afim $f(x) = -x+5$

A função passa pelo ponto (1,4)	A função tem coeficiente angular negativo.
A função intercepta o eixo X quando sua abscissa é 5.	A função tem 5 como raiz.
A função intercepta o eixo Y no ponto de ordenada igual a 5.	A função passa pelo ponto (3,2).

Figura B.3: Dicas para determinação da função afim $f(x) = -4x+6$

A função passa pelo ponto (1,2)	A função tem coeficiente angular negativo.
A função intercepta o eixo Y no ponto de ordenada igual a 6.	A função tem $\frac{3}{2}$ como raiz.
A função intercepta o eixo x quando sua abscissa é $\frac{3}{2}$	A função passa pelo ponto (3,-6)

Figura B.4: Dicas para resolver o problema: O preço a ser pago por uma corrida de táxi, inclui uma parcela fixa, denominada *bandeirada* e uma parcela que depende da distância a ser percorrida uma vez que o valor para cada quilômetro rodado é o mesmo. Que função afim representa o valor a ser pago em cada corrida de táxi realizada?

Os valores a serem pagos sempre aumentam, de acordo com a distância.	Para rodar 20 quilômetros, o valor a ser pago será R$33,00.
O menor valor a ser pago é R$3,00.	Cada quilômetro rodado custa R$1,50.
O preço de uma corrida de 10 quilômetros é R$18,00.	A bandeirada custa R$3,00.

Apêndice C

Material do jogo Probabilidades

Este material foi mencionado nas Instruções do Jogo na Subseção 3.2.2 onde foi sugerido um saquinho de tecido preto e 10 bolinhas (sendo 5 verdes e 5 vermelhas) conforme a imagem.

[Fonte: Elaborada pela autora]

Para participar do jogo cada dupla deverá escolher 8 das 10 bolinhas.

Utilizando bolinhas vermelhas e verdes, por exemplo, as possibilidades de escolha são:

- 3 bolinhas verdes e 5 vermelhas

[Fonte: Elaborada pela autora]

[Fonte: Elaborada pela autora]

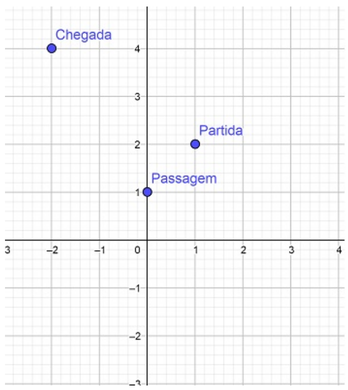
- 4 bolinhas verdes e 4 vermelhas.
- 5 bolinhas verdes e 3 vermelhas

[Fonte: Elaborada pela autora]

Apêndice D

Modelos dos planos cartesianos e das fichas do jogo Ligando pontos no plano.

Figura D.1: Os pontos ligam as funções: $f(x) = 2^x$ e $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

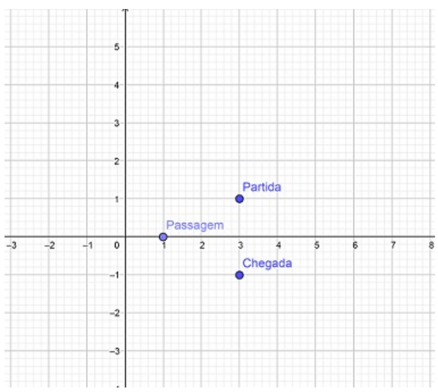


f(x) = 4^x	f(x) = $(\frac{1}{2})^x$
f(x) = $(\frac{1}{4})^x$	f(x) = 2^x

[Fonte: Elaborada pela autora com auxílio do Geogebra]

.

Figura D.2: Os pontos ligam as funções:$f(x) = \log_3 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

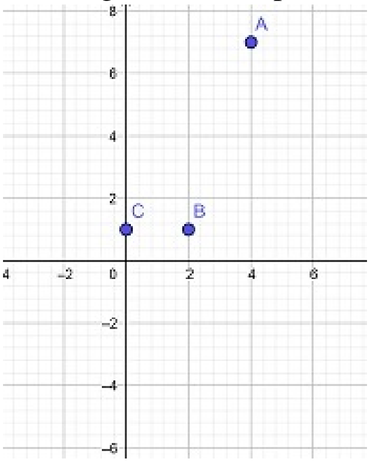


f(x) = $\log_{\frac{1}{9}} x$	f(x) = $\log_3 x$
f(x) = $\log_{\frac{1}{3}} x$	f(x) = $\log_9 x$

[Fonte: Elaborada pela autora com o auxílio do Geogebra]

.

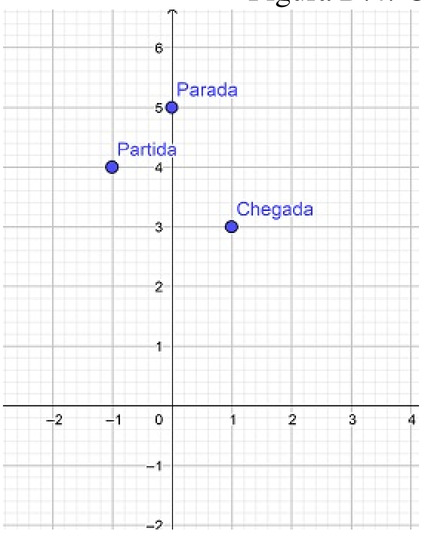
Figura D.3: Os pontos ligam as funções: $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 3$



$f(x) = x^2 + x + 1$	$f(x) = x^2 - 3x + 3$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	$f(x) = 2x^2 - x + 5$

[Fonte: Elaborada pela autora com o auxílio do Geogebra]

Figura D.4: Os pontos ligam duas funções diferentes.



$f(x) = x + 5$	$f(x) = x^2 - 3x + 5$
$f(x) = \log_5 x$	$f(x) = 2^x$

[Fonte: Elaborada pela autora com o auxílio do Geogebra]

.

.

Apêndice E

Modelo das cartas do jogo Juntando 4

Figura E.1: Cartas contendo informações de sólidos geométricos diferentes

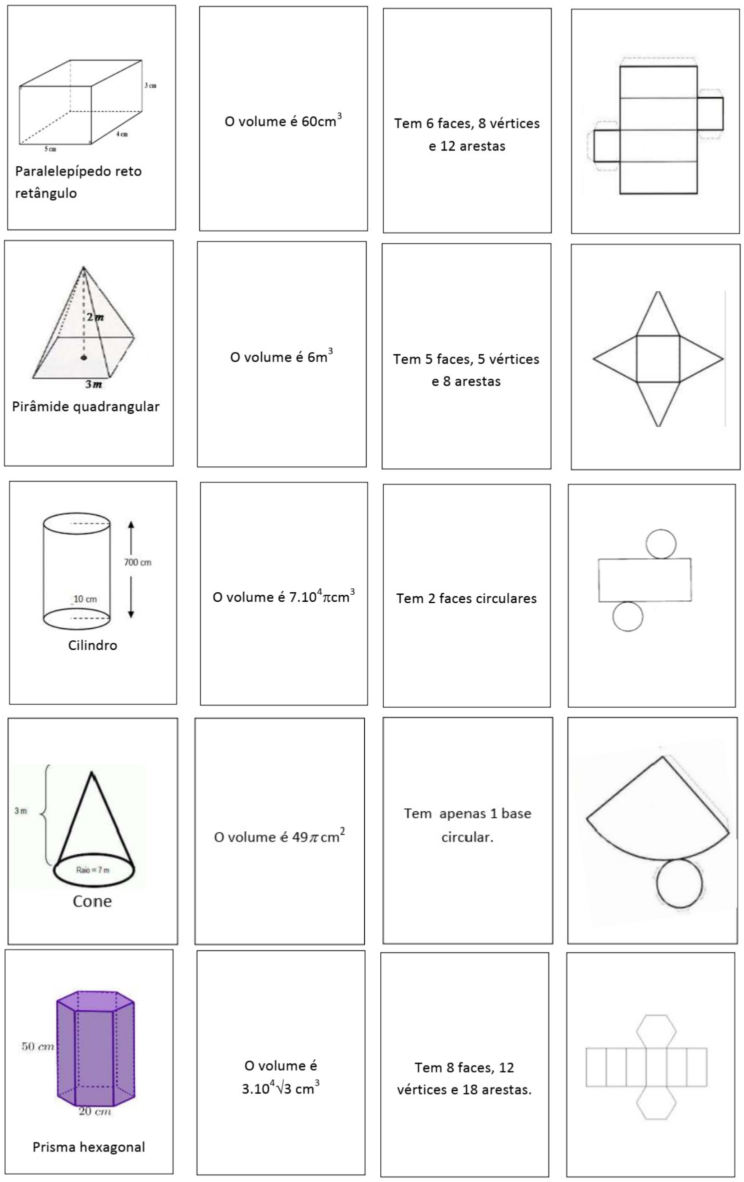


Figura E.2: Cartas contendo definições de sólidos geométricos diferentes

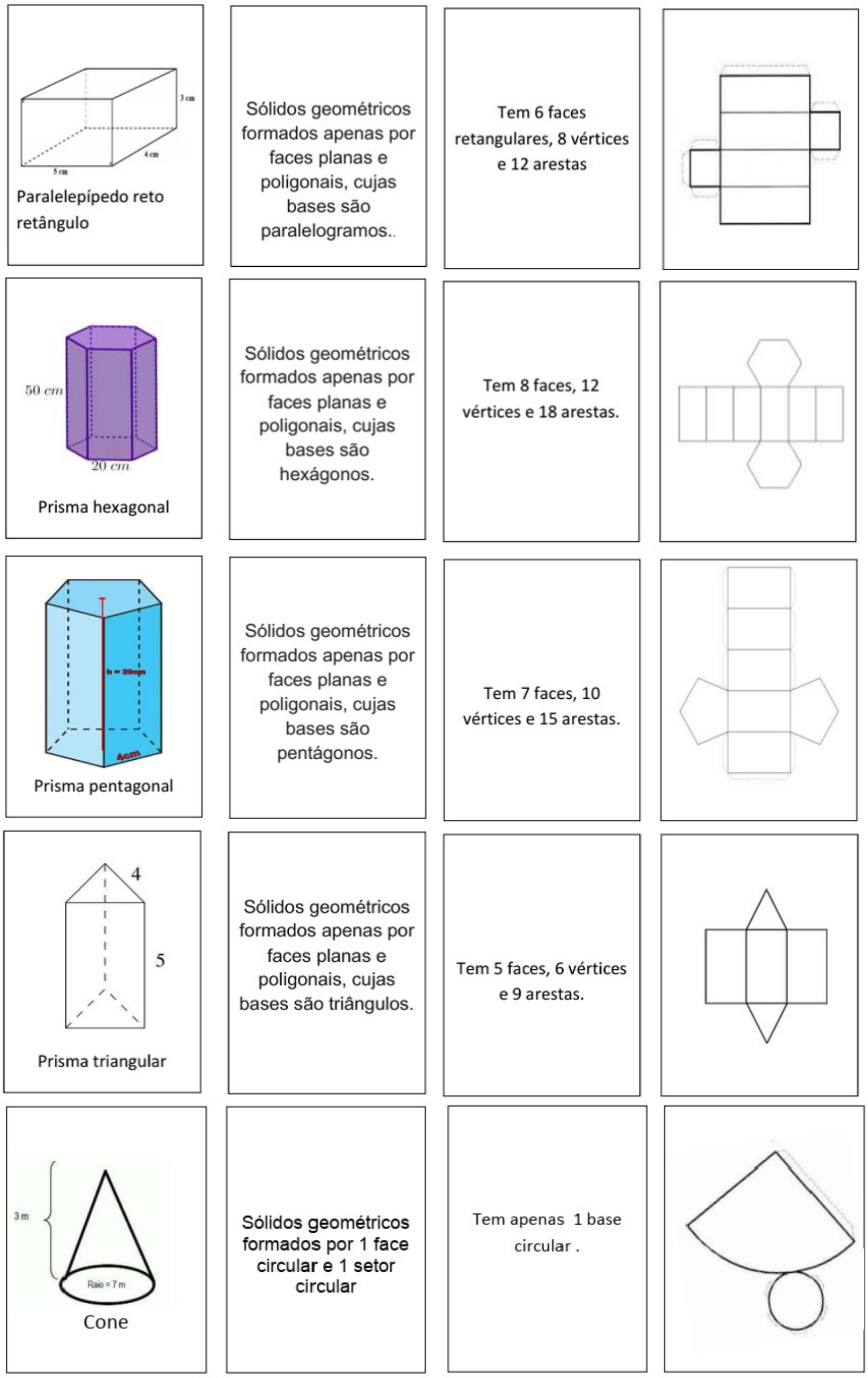


Figura E.3: Cartas contendo a representação espacial do sólido de um modo diferente