



Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB  
Campus Reitor Edgar Santos  
Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias  
Mestrado Profissional em Matemática



---

Jean Ferreira Corado

# **NÚMEROS IRRACIONAIS: Uma Proposta Didática para o Ensino Médio**

BARREIRAS

2020

Jean Ferreira Corado

**NÚMEROS IRRACIONAIS:  
Uma Proposta Didática para o Ensino Médio**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista

BARREIRAS  
2020

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

C787

Corado, Jean Ferreira

Números irracionais: uma proposta didática para o ensino médio. / Jean Ferreira Corado. – 2020.

84f.: il

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista

Dissertação (Mestrado) – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, BA, 2020.

1. Matemática – Estudo e Ensino I. Batista, Edvaldo Elias de Almeida II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias III. Título.

CDD 510.7

---

**Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB**

Jean Ferreira Corado

## **NÚMEROS IRRACIONAIS: Uma Proposta Didática para o Ensino Médio**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista

Trabalho aprovado. BARREIRAS, 29 de junho de 2020:



---

**Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida  
Batista**  
**Doutor em Matemática, UFG**  
**Universidade Federal do Oeste da Bahia**  
Orientador



---

**Profa. Dra. Ana Maria Porto do  
Nascimento**  
**Doutora em Educação, UNB**  
**Universidade Federal do Oeste da Bahia**  
Convidado 1



---

**Prof. Dr. Pablo Vandr  Jacob Furlan**  
**Doutor em Matemática, UFG**  
**Instituto Federal de Goiás**  
Convidado 2

BARREIRAS  
2020

*Ao meu filho Jean Victor, à minha esposa Grazielly e aos meus pais Deonilce e Bernaldino, que estão sempre me apoiando na certeza que fiz a escolha certa explícita em minha alegria de trabalhar com a “rainha das ciências”.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo grande presente, a vida, por sempre me conduzir a trilhar pelos caminhos da sabedoria e manter-me sempre motivado.

Aos meus pais Deonilce e Bernaldino que são minhas principais fontes de inspiração e sempre me concederam a oportunidade de alcançar meus objetivos.

À minha esposa Grazielly que foi uma das principais incentivadoras para que eu realizasse este mestrado e por ter sempre deixado o ambiente favorável aos meus estudos.

Ao meu filho Jean Victor que mesmo sem entender o que eu estava fazendo, devido a pouca idade, vinha com frases tais como: “ está complicado não é papai”, me impulsionando e encorajando a estar realizando esse sonho.

Aos meus irmãos Cristiano, Berenice, Érike e Fernanda por sempre acreditarem e incentivarem a minha constante evolução cognitiva na Matemática.

Ao meu orientador Edvaldo pelas grandes contribuições, pela paciência e por me inspirar não somente nos estudos de Matemática mais também na postura em sociedade aliada à fé.

Aos professores e coordenação da 1<sup>o</sup> turma do PROFMAT da UFOB, campus Barreiras, pelos ensinamentos.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e à Universidade Federal do Oeste Baiano (UFOB) por me oportunizarem a realização desse sonho que é ter o título de mestre em Matemática.

Aos meus colegas de aula pelo companheirismo, atenção e amizade construída, em especial aos meus colegas Janeil e Ulisses.

Aos meus colegas de trabalho do CETI Dr. Dionísio Rodrigues Nogueira, em especial à diretora e amiga Priscila por ter dado condições para eu cursar este mestrado.

A todos os meus amigos, em especial o meu amigo Marcelo Coelho pela parceria e conselhos.

# Resumo

O Conjunto dos Números Irracionais apesar de pouco exposto nos livros didáticos, é de fundamental importância para a matemática, este conjunto apresenta características tais como: densidade em relação ao conjunto dos reais, cardinalidade infinita e não enumerabilidade. Os irracionais apresenta uma medida maior que o conjunto dos racionais, em uma análise probabilística a escolha de um irracional em um intervalo é quase um evento certo, além da grande presença na reta real, os irracionais estão presentes também em diversos objetos e situações do cotidiano, por exemplo, na folha de papel A4, em juros capitalizados continuamente, na razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro que pode ser explicitada através do software Geogebra, mas cabe destacar que o conjunto dos números irracionais não é fechado para as operações de adição e multiplicação, daí, é necessário uma análise minuciosa de sua aritmética, consubstanciada com exemplos e aplicações. A BNCC ressalta a importância de localizar números irracionais na reta real, para tanto um dos caminhos é a aproximação por racionais que pode ser dada através de manipulações de frações contínuas que pode ser obtida de forma mais rápida pelo Geogebra. O estudo do números irracionais também pode ser realizado através da teoria dos algébricos e transcendentos, teoria esta que conduziu à soluções de diversos problemas, por exemplo, os três problemas clássicos da geometria euclidiana, a saber, duplicação do cubo, trisseção geral de ângulos e quadratura do círculo. De modo geral os estudos dos números irracionais conduz a serem feitas incursões em diversos tópicos da matemática, o que torna sua aplicação no ensino médio algo imprescindível, sendo assim, este trabalho tem por objetivo a construção de um material didático em que os professores possam a partir do mesmo perceber a importância dos números irracionais e realizar aplicações em sala de aula.

**Palavras-chave:** Números irracionais. Ensino. Aritmética. Algébricos. Transcendentos.

# Abstract

The Set of Irrational Numbers, although little exposed in textbooks, is of fundamental importance for mathematics, set this set has characteristics such as: density in relation to the set of reals, infinite cardinality and non-enumerability. The irrationals have a greater measure than the set of rationals, in a probabilistic analysis the choice of an irrational in an interval is almost a event certain, in addition to the great presence in the real line, the irrationals are also present in various objects and everyday situations , for example, on the A4 sheet of paper, in interest capitalized continuously, in the ratio of the length of a circumference to its diameter, which can be explained through the Geogebra software, but it should be noted that the set of irrational numbers is not closed for the operations of addition and multiplication, hence, it is necessary a thorough analysis of its arithmetic, substantiated with examples and applications. The BNCC emphasizes the importance of locating irrational numbers on the real line, for which one of the ways is the approximation by rationals that can be given through manipulations of continuous fractions that can be obtained more quickly by Geogebra. The study of irrational numbers can also be carried out through the theory of algebraic and transcendent, a theory that has led to the solution of several problems, for example, the three classic problems of Euclidean geometry, namely, duplication of the cube, general trisection of angles and square the circle. In general, the study of irrational numbers leads to incursions in several topics of mathematics, which makes its application in high school something essential, therefore, this work aims to build a didactic material in which teachers can from the same perceive the importance of irrational numbers and and make applications in the classroom.

**Keywords:** Irrational numbers. Teaching. Arithmetic. Algebraic. Transcendent.



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>CONHECIMENTOS PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1	Os Números Reais . . . . .	10
1.2	Análise de $\mathbb{R}$ de Forma Geométrica . . . . .	11
1.3	O Corpo Ordenado Completo dos Reais ( $\mathbb{R}$ ) . . . . .	11
1.4	Análise de $\mathbb{R}$ como conjunto infinito e não enumerável . . . . .	14
<b>2</b>	<b>CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1	A densidade dos irracionais em $\mathbb{R}$ . . . . .	17
2.2	Cardinalidade e Não Enumerabilidade dos Números Irracionais . . . . .	18
<b>3</b>	<b>A IRRACIONALIDADE DE ALGUNS NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES</b> <b>21</b>	
3.1	O número irracional $\sqrt{2}$ . . . . .	21
3.1.1	Aplicações do $\sqrt{2}$ . . . . .	23
3.2	O número irracional $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razão áurea) . . . . .	24
3.2.1	Aplicações de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . . . . .	26
3.3	O número irracional $e$ (número de Euler) . . . . .	27
3.3.1	Aplicação de $e$ . . . . .	29
3.4	O número irracional $\pi$ . . . . .	31
3.4.1	Aplicações de $\pi$ . . . . .	36
<b>4</b>	<b>ARITMÉTICA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS</b> . . . . .	<b>38</b>
4.1	Propriedades dos Números Irracionais . . . . .	38
4.2	Aproximação de Irracionais por Racionais . . . . .	48
<b>5</b>	<b>IRRACIONAIS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>72</b>
	<b>APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DE <math>\pi</math> VIA GEOGEBRA</b> . . . . .	<b>74</b>
	<b>APÊNDICE B – FRAÇÕES CONTÍNUAS VIA GEOGEBRA</b> . . . . .	<b>82</b>
	<b>APÊNDICE C – LISTA DE EXERCÍCIOS</b> . . . . .	<b>84</b>

# Introdução

Sabe-se que o entendimento dos tópicos de Matemática se dá de forma contínua, ou seja, para absorver conteúdos do Ensino Médio é necessário que tenha os conteúdos do Ensino Fundamental bem consolidados e isso se propaga para os demais níveis de ensino. No entanto, na prática o que ocorre é um ensino com rupturas e com entes matemáticos poucos assistidos, por exemplo, o conjunto dos números irracionais.

Os números irracionais na educação básica são tratados de forma sucinta, onde a experiência do autor constata que os livros didáticos majoritariamente destinam duas páginas para tratar de tais números não ficando nítido a natureza aritmética dos mesmos, conseqüentemente, os discentes ficam alheios à grande importância que o conjunto dos irracionais tem para a Matemática e isso gera problemas que são refletidos até mesmo no ensino superior, pois pesquisas constatarem que “alunos do quarto período do curso de Licenciatura em Matemática chegam ao curso com dúvidas e até mesmo sérios equívocos em relação a conceitos, definições e propriedades dos números reais, particularmente, dos números irracionais” [1].

Até o presente momento as pesquisas relacionadas diretamente com números irracionais na plataforma do PROFMAT representam aproximadamente 0,3%, além disso, cabe destacar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem por expectativa que os discentes reconheçam a necessidade dos números irracionais e ainda coloca como habilidade do discente: reconhecer o número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica [2].

As informações expostas anteriormente justificam a importância do presente trabalho que tem por objetivo a construção de um material didático em que os professores possam a partir do mesmo perceber a importância dos números irracionais e realizar aplicações em sala de aula. Para cumprimento do objetivo explicitado o presente trabalho está organizado em 5 capítulos fundamentais.

O Capítulo 1 traz os conhecimentos preliminares para o estudo do conjunto dos números irracionais, a saber, expõe as propriedades do conjunto dos números reais.

O Capítulo 2 aborda as características do números irracionais enquanto conjunto, isto é, explicita a densidade, a cardinalidade e a não enumerabilidade.

O Capítulo 3 versa sobre os números irracionais mais conhecidos, onde há as demonstrações da irracionalidade dos mesmos seguida de aplicações.

O Capítulo 4 trata da aritmética dos números irracionais, de modo que, tece asserções que garanta a irracionalidade de diversos números seguido de exemplos e retrata as aproximações de irracionais por racionais através das frações contínuas.

O Capítulo 5 apresenta os irracionais sob o prisma da teoria dos algébricos e transcendentais através de exemplos e aplicações à geometria.

# 1 Conhecimentos Preliminares

Este primeiro capítulo tem por objetivo revisar e estabelecer fatos fundamentais sobre o conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) para as asserções posteriores do presente trabalho, sendo assim, não faremos aqui uma análise a rigor sobre  $\mathbb{R}$ , para o leitor que queira um conhecimento aprofundado de tal tema sugerimos [3], [4], [5], [6] e [7]. Assumimos do leitor familiaridade com as definições e conceitos básicos sobre conjuntos; assumimos também conhecidos os conjuntos dos números **naturais**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

dos números **inteiros**,

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

e **racionais**,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

## 1.1 Os Números Reais

Em conformidade com [5], temos que a todo número real positivo  $x$  corresponde um inteiro  $m$  (não negativo) e uma lista  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  de algarismos, tal que  $x = m + 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ . Se  $m > 0$  e  $m = b_n \dots b_1 b_0$ , com os  $b_i$ 's sendo seus algarismos, escrevemos

$$x = b_n \dots b_1 b_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

e dizemos que  $b_n \dots b_1 b_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  é a representação decimal de  $x$ .

O conjunto dos números reais será então particionado em representações decimais finita ou infinita periódica, formando o conjunto dos números racionais, e representações decimais infinitas aperiódicas que constituirá o nosso objeto de estudo que é o conjunto dos números irracionais.

Do ponto de vista aritmético, uma grande vantagem do conjunto dos números reais, em comparação com o conjunto dos números racionais, é a possibilidade de extrairmos raízes de números reais positivos, isto é, temos no conjunto dos números reais a ideia do contínuo, daí concebe o fato de não termos Análise Racional. Mais precisamente, dados  $x > 0$  real e  $n \in \mathbb{N}$ , é possível provar que existe um único real positivo  $y$  tal que  $y^n = x$ , tal real positivo  $y$  será doravante denotado por  $y = \sqrt[n]{x}$ , e denominado a raiz  $n$ -ésima de  $x$ , ou ainda a raiz de índice  $n$  de  $x$ . Assim,

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n.$$

## 1.2 Análise de $\mathbb{R}$ de Forma Geométrica

Na concepção atual, um número real é o resultado da comparação de uma grandeza com a unidade, que é uma grandeza da mesma espécie, tomada como padrão. A grandeza aqui descrita é contínua, sendo assim, compará-la com a unidade é medi-la e o resultado de tal comparação é um número real. Se a grandeza que se quer medir é comensurável (razão de números inteiros) com a unidade escolhida, a medida é um número racional, mas caso seja incomensurável, a medida é um número irracional.

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta  $r$  e o conjunto dos números reais, a qual fica totalmente determinada pelas seguintes escolhas:

- (a) Um ponto  $O$  sobre a  $r$  para representar o número real  $0$ .
- (b) Uma semirreta, dentre as que  $O$  representa sobre  $r$ , onde serão marcados os reais positivos.
- (c) Um ponto  $A$  sobre a semirreta do item (b), ao qual corresponderá o número real  $1$ .

## 1.3 O Corpo Ordenado Completo dos Reais ( $\mathbb{R}$ )

### Corpo

Um corpo é um conjunto  $K$ , munido de duas operações binárias fechadas, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas do corpo, a saber

- (A<sub>1</sub>). *Associatividade*: quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , tem-se  $(a + b) + c = a + (b + c)$  e  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- (A<sub>2</sub>). *Comutatividade*: quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , tem-se  $a + b = b + a$  e  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- (A<sub>3</sub>). *Existência de elementos neutros únicos*: os racionais  $0$  e  $1$  são elementos neutros respectivamente para as operações de adição e multiplicação em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $0 + a = a$  e  $1 \cdot a = a$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .
- (A<sub>4</sub>). *Existência de inversos aditivo e multiplicativo*: se  $a \in \mathbb{R}$ , então existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $a + b = 0$ . Se  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , então existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $a \cdot b = 1$ .
- (A<sub>5</sub>). *Distributividade*: Dados  $a, b, c$  quaisquer, em  $\mathbb{R}$ , tem-se  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Diante do exposto conquistamos que o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, munido das operações de adição (+) e multiplicação (·) de escalares tem satisfeita as condições dos axiomas do corpo, daí, temos o corpo dos números reais. Cabe destacar que as operações ilustradas na definição de corpo estão em conformidade ao modo como o conjunto é definido, isto é, existem conjuntos cujo elementos não são números, por exemplo, se o conjunto for um espaço vetorial,

tem-se que a adição se trata de soma de vetores e a multiplicação se refere ao produto de um número real por um vetor, para maiores detalhes sugerimos ao leitor a Seção 1 do Capítulo III de [3].

## Relação de Ordem

Ao dissertar sobre relação de ordem devemos elucidar que há a *ordem parcial* e a *ordem total*. Uma relação de ordem  $\leq$  sobre  $K$  é denominada de parcial se satisfizer aos axiomas a seguir

(R<sub>1</sub>). *Reflexividade*:  $a \leq a$ , para todo  $a \in K$ .

(R<sub>2</sub>). *Antissimétrica*: se  $a, b \in K$  são tais que  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , então  $a = b$ .

(R<sub>3</sub>). *Transitividade*: se  $a, b, c \in K$  são tais que  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então  $a \leq c$ .

**Exemplo 1.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio, a relação de inclusão no conjunto  $\mathcal{P}(X)$  das partes de  $X$  é uma relação de ordem parcial. Com efeito,*

- *Reflexividade*:  $A \subseteq A$ , para todo  $A \in \mathcal{P}(X)$ .
- *Antissimétrica*: se  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  são tais que  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ , então  $A = B$ .
- *Transitividade*: se  $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$  são tais que  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ .

Uma relação de ordem parcial passa a ser uma relação de ordem total quando satisfaz ao seguinte axioma:

(R<sub>4</sub>). *Dicotomia*: para todo  $a, b \in K$ , tem-se  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . (este axioma garante que dois quaisquer elementos de  $K$  podem sempre ser comparados)

**Exemplo 2.** *Seja  $P$  o conjunto de todas as potências de base real positiva  $a$  e expoente natural  $n$ , isto é,  $P = \{a^n; a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$ . A relação de ordem “divide” ( $|$ ) no conjunto  $P$  é uma relação de ordem total. Com efeito,*

- *Reflexividade*:  $a^n | a^n$ , para todo  $a^n \in P$ .
- *Antissimétrica*: se  $a^{n_1}, a^{n_2} \in P$  são tais que  $a^{n_1} | a^{n_2}$  e  $a^{n_2} | a^{n_1}$ , então  $a^{n_1} = a^{n_2}$ .
- *Transitividade*: se  $a^{n_1}, a^{n_2}, a^{n_3} \in P$  são tais que  $a^{n_1} | a^{n_2}$  e  $a^{n_2} | a^{n_3}$ , então  $a^{n_1} | a^{n_3}$ .
- *Dicotomia*: para todo  $a^{n_1}, a^{n_2} \in P$  com  $n_1 < n_2$ , tem-se que  $a^{n_1} | a^{n_2}$ .

De posse da informação do que venha a ser uma relação de ordem total, temos condições de enunciar as duas definições a seguir.

**Definição 1.1** (Corpo Ordenado). *Seja  $K$  um corpo e  $\leq$  uma relação de ordem total em  $K$ . Diz-se que um corpo  $K$  é ordenado se existir algum subconjunto  $P \subseteq K$  com as duas propriedades a seguir.*

(O<sub>1</sub>). *Tricotomia: dado um  $a \in K$ , vale exatamente uma das três opções*

$$a \in P, \quad a = 0, \quad \text{ou} \quad -a \in P$$

(O<sub>2</sub>). *Fechamento: dados  $a, b \in P$ , também  $a + b \in P$  e  $a \cdot b \in P$ .*

A relação  $\geq$  (lê-se *maior ou igual que*) no corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais é uma relação de ordem total, isto é, uma relação *reflexiva, antissimétrica, transitiva e dicotômica*, além disso, o corpo  $\mathbb{R}$  possui um subconjunto  $P$  que satisfaz os axiomas da *tricotomia* e do *fechamento*, por exemplo,  $P$  pode ser o conjunto dos números positivos. Portanto concluímos que o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais é um **Corpo Ordenado**, o que assegura definir as noções de cota, elemento máximo e supremo de subconjuntos desse corpo [4].

**Definição 1.2.** *Um conjunto não vazio  $K$  é dito bem ordenado pela relação de ordem total  $\leq$ , se todo subconjunto não vazio de  $K$  tiver um elemento mínimo.*

**Exemplo 3** (Princípio da Boa Ordem). *O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais pela relação de ordem usual  $\leq$  (lê-se *menor ou igual que*) é bem ordenado, ou seja, todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  apresenta um elemento mínimo.*

**Observação 1.** *O Princípio da Boa Ordem garante a existência do mínimo múltiplo comum (mmc), conteúdo estudado no Ensino Fundamental II.*

## Completude

De acordo com [3] um corpo ordenado  $K$  chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, possui supremo em  $K$ . Além disso, postula-se que existe um corpo ordenado completo,  $\mathbb{R}$ , chamado o corpo dos números reais. Por conseguinte, dado um subconjunto  $X \subseteq \mathbb{R}$ , temos  $\sigma = \sup X$  se, e somente se,

(S<sub>1</sub>).  $a \leq \sigma$ , qualquer que seja o elemento  $a$  de  $X$  e

(S<sub>2</sub>). se o real  $b$  for tal que  $b < \sigma$ , então existirá algum elemento  $a$  de  $X$  tal que  $b < a$ .

De posse da completude de  $\mathbb{R}$ , tem-se como consequência que no corpo dos reais não há lacunas (o que difere de  $\mathbb{Q}$ ) assegurando a existência de  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  (números irracionais) e também que  $\mathbb{R}$  é arquimediano, isto é, nele é válida qualquer das quatro condições equivalentes a seguir, cuja verificação pode ser encontrada na Página 18 de [7].

- (C<sub>1</sub>). Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  for positivo, existirá  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < \alpha$ .
- (C<sub>2</sub>). Se  $\alpha, b \in \mathbb{R}$  forem positivos, existirá  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < b < n \cdot \alpha$ .
- (C<sub>3</sub>). Dado qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha < n$ .
- (C<sub>4</sub>). Dados  $\alpha, b \in \mathbb{R}$  com  $\alpha < b$ , existe algum  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $\alpha < r < b$ .

## 1.4 Análise de $\mathbb{R}$ como conjunto infinito e não enumerável

Para entendermos a definição de conjunto infinito é de fundamental importância definirmos conjunto finito. De sorte, já temos uma noção intuitiva de conjunto finito, pois é todo conjunto que seja possível realizar uma contagem dos seus elementos (pelo menos em tese). No entanto, essa ideia não segue o rigor de uma definição matemática, sendo assim, faz-se necessário a definição a seguir.

**Definição 1.3.** Um conjunto  $A$  é denominado finito se  $A$  é vazio ou se existe, para algum número natural  $n$ , uma bijeção

$$f : I_n \rightarrow A,$$

onde  $I_n$  representa o conjunto dos números naturais menor do que ou igual a  $n$ .

No primeiro caso dizemos que o número de elementos de  $A$  é zero, já no segundo caso o número de elementos de  $A$  é  $n$ . Em qualquer um dos casos, referimo-nos à cardinalidade de  $A$  (simbolicamente  $n(A)$ ).

**Exemplo 4.** Dado um inteiro positivo  $\alpha$  ( $\alpha \neq 1$ ) qualquer, consideremos a sua decomposição em fatores primos<sup>1</sup> positivos distintos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , isto é,

$$\alpha = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot p_3^{q_3} \cdot \dots \cdot p_n^{q_n}, \quad q_i \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq n.$$

O conjunto  $D(\alpha)$  dos divisores positivos de  $\alpha$  é um conjunto finito, cuja cardinalidade é

$$n[D(\alpha)] = (q_1 + 1) \cdot (q_2 + 1) \cdot (q_3 + 1) \cdot \dots \cdot (q_n + 1).$$

Para definir, de modo preciso, o conceito de conjunto infinito, devemos considerar a negação da definição a rigor de conjunto finito, pois a negação da noção intuitiva de conjunto finito, a saber, todo conjunto em que não é possível contar seus elementos, não é satisfatória. Para tanto, o professor poderá sugerir aos discentes que imaginem uma quantidade de grãos de areia em uma praia, sabemos que é finita, mas é impossível realizar tal contagem.

**Definição 1.4.** Um conjunto  $A$  diz-se infinito quando existe uma função injetora  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ , ou seja, um conjunto é infinito quando contiver um subconjunto  $B$  em bijeção com  $\mathbb{N}$ , o que também se expressa dizendo que  $B$  é equipotente a  $\mathbb{N}$ .

<sup>1</sup> Um inteiro  $p > 1$  é primo se seus únicos divisores positivos forem 1 e  $p$ .

**Exemplo 5.** Por definição, se conseguirmos um subconjunto dos naturais em bijeção com o próprio conjunto  $\mathbb{N}$  dos naturais, então teremos que o conjunto  $\mathbb{N}$  é infinito. Para tanto, seja  $P$  o conjunto dos números pares e  $f$  a função definida como

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow P \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

Devemos mostrar que a função  $f$  é sobrejetiva e injetiva, sendo assim, dado um  $m \in P$ , temos que  $m = 2n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , onde com esse mesmo  $n$  obtemos um  $f(n) = 2n$ , pelo modo como  $f$  foi definida, de onde conquistamos que  $f(n) = m$ , ou seja, qualquer  $m \in P$  será imagem de algum  $n \in \mathbb{N}$ , o que garante a sobrejetividade de  $f$ . Quanto a injetividade temos que se  $f(m) = f(n)$ , então  $2m = 2n$ , o que resulta em  $m = n$  garantido assim a injetividade. Portanto a função  $f$  é bijetiva e, conseqüentemente, o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais é equipotente ao subconjunto  $P$  dos números pares, daí,  $\mathbb{N}$  é infinito.

**Observação 2.** O resultado do Exemplo 5 nos diz ainda que existem naturais tanto quanto existem números pares.

Os resultados a seguir serão fundamentais para asserções inerentes ao conjunto objeto de estudo deste trabalho, números irracionais.

**Proposição 1.1.** Todo subconjunto de um conjunto finito é finito. Mais precisamente, se  $Y$  for algum subconjunto não vazio de um conjunto finito  $X$ , então  $n(Y) \leq n(X)$  e, além disso,  $n(Y) = n(X)$  se, e só se,  $Y = X$ .

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor a Página 37 de [4] ■

**Corolário 1.1.** Se um conjunto tem um subconjunto infinito, então ele também é infinito.

*Demonstração.* Seja  $X = Y \cup Z$  e  $Y$  um conjunto infinito, suponhamos que  $X$  seja finito, ora, pela Proposição 1.1 tem-se que  $Y$  e  $Z$  são finitos, o que é uma contradição, pois por hipótese  $Y$  é infinito. Logo, a contradição se deu por supormos que  $X$  seria finito, daí, temos que  $X$  é infinito. ■

**Definição 1.5.** Um conjunto  $X$  diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ . No segundo caso,  $X$  diz-se infinito enumerável e, pondo-se  $x_1 = f(1)$ ,  $x_2 = f(2)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = f(n)$ ,  $\dots$ , tem-se  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Cada bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  chama-se uma enumeração (dos elementos) de  $X$ .

**Proposição 1.2.** O Conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é enumerável.

*Esboço da Demonstração.* De fato, se indicarmos por  $\mathbb{Z}^*$  o conjunto dos números inteiros  $\neq 0$ , veremos que  $\mathbb{Z}^*$  é enumerável. Logo é também enumerável o produto cartesiano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Ora, a função  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ , definida por  $f(m, n) = \frac{m}{n}$ , é sobrejetiva. De onde segue que  $\mathbb{Q}$  é enumerável [3]. ■



**Proposição 1.3.** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  conjuntos enumeráveis, então a união*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

*é enumerável.*

*Esboço da Demonstração.* Tomemos, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , uma função sobrejetiva  $f_m : \mathbb{N} \rightarrow X_m$ . Em seguida, definamos uma função  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$  pondo  $f(m, n) = f_m(n)$ . Vê-se imediatamente que  $f$  é sobrejetiva. Como  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é enumerável, conclui-se que  $X$  é enumerável [3]. ■

**Proposição 1.4.** *O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais não é enumerável*

*Demonstração.* Dados um intervalo limitado, fechado  $I = [a, b]$ , com  $a < b$ , e um número real  $x_0$ , existe um intervalo fechado, limitado,  $J = [c, d]$ , com  $c < d$ , tal que  $x_0 \notin J$  e  $J \subset I$ . Isto pode ser verificado facilmente. Usaremos este fato repetidamente para mostrar que, dado qualquer subconjunto enumerável  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ , podemos encontrar um número real  $x \notin X$ . Com efeito, sejam  $I_1$  um intervalo limitado fechado e não-degenerado, tal que  $x_1 \notin I_1$ ,  $I_2$  um intervalo do mesmo tipo com  $x_2 \notin I_2$  e  $I_2 \subset I_1$  e assim indutivamente: supondo obtidos  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n$  limitados fechados e não-degenerados, com  $x_i \notin I_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), podemos obter  $I_{n+1} \subset I_n$  com  $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ . Isto nos fornece uma sequência decrescente  $I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  de intervalos limitados e fechados. Dessa forma existe um número real  $x$  que pertence a todos os  $I_n$ . Como  $x_n \notin I_n$ , segue-se que  $x$  não é nenhum dos  $x_n$ , e portanto nenhum conjunto enumerável  $X$  pode conter todos os números reais [3]. ■

## 2 Conjunto dos Números Irracionais

**Definição 2.1.** Um número irracional é um número decimal, isto é, pode ser expresso como soma de um número inteiro mais uma quantidade infinita de frações decimais, onde não há periodicidade dos numeradores das frações decimais. Em símbolos, um número irracional apresenta-se da seguinte forma:

$$\alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots,$$

onde  $\alpha \in \mathbb{Z}$  e  $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , com  $i \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 6.** A constante de Liouville

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,1100010000000000000000010000\dots$$

observe que é um decimal não periódico constituído somente de 0's e 1's, onde o algarismo 1 sempre ocupa a ordem decimal de  $n!$ . Cabe destacar que os números de Liouville são de grande representatividade no estudo dos irracionais, para leitor que queira aprofundar os estudos de tais números sugerimos o livro [8].

**Exemplo 7.** A concatenação de todos os naturais em ordem crescente

$$0,1234567891011121314151617\dots,$$

observe que do modo como é definido tal número, não haverá periodicidade dos dígitos. Este número é conhecido como constante de Champernowne e apresenta a característica de ser um número normal, isto é, em sua expansão qualquer dígito ocorre com frequência  $1/10$ . Para maiores detalhes sobre números normais sugerimos ao leitor a obra [9].

### 2.1 A densidade dos irracionais em $\mathbb{R}$

Segundo o dicionário, Densidade “significa a qualidade daquilo que é denso”. Dessa forma, a densidade determina a quantidade de algo existente em um espaço delimitado, que pode ser uma superfície, um comprimento ou uma unidade de volume. Restrito à Matemática, segue a definição.

**Definição 2.2.** Um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}$  é **denso** (em  $\mathbb{R}$ ) se, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e toda aproximação  $\epsilon > 0$  dada, tivermos

$$X \cap (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \neq \emptyset.$$

Para o Lema que segue assumiremos a irracionalidade de  $\sqrt{2}$ . No entanto, cabe destacar que na Seção 3.1 do presente trabalho há a demonstração de tal asserção.

**Lema 2.1.** *O produto do número irracional  $\sqrt{2}$  por um número  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , onde  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{N}^*$ , é um número irracional.*

*Demonstração.* suponha que  $\frac{p\sqrt{2}}{q} \in \mathbb{Q}$ , isto é,  $\frac{p\sqrt{2}}{q} = \frac{r}{s}$ , com  $r \in \mathbb{N}$  e  $s \in \mathbb{Z}^*$ , daí, obtemos  $\sqrt{2} = \frac{r \cdot q}{s \cdot p}$ , como  $\mathbb{Q}$  é fechado para a multiplicação, então  $\frac{r \cdot q}{s \cdot p} \in \mathbb{Q}$ . O que é uma contradição, pois  $\sqrt{2}$  é irracional. Dessa forma,  $\frac{p\sqrt{2}}{q}$  é irracional. ■

**Teorema 2.1.** *O conjunto dos números irracionais é denso em  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $(a, b)$  um intervalo aberto qualquer em  $\mathbb{R}$ . Queremos mostrar que existe um número irracional em  $(a, b)$ . Para tanto a estratégia a ser seguida é tomarmos um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ , isto é,  $\frac{\sqrt{2}}{n} < b - a$ . De sorte que números da forma  $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ , onde  $m \in \mathbb{Z}^*$ , são irracionais e dividem a reta  $\mathbb{R}$  em intervalos de comprimento  $\frac{\sqrt{2}}{n}$ . Como  $\frac{\sqrt{2}}{n} < |b - a|$ , conclui-se que algum  $\frac{m\sqrt{2}}{n}$  deve pertencer a  $(a, b)$ . A rigor temos  $A := \left\{ m \in \mathbb{Z}; \frac{m\sqrt{2}}{n} \geq b \right\}$ , como  $\mathbb{R}$  é arquimediano,  $A$  é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por  $\frac{b \cdot n}{\sqrt{2}}$ . Seja  $m_0 \in A$  o menor elemento de  $A$ , então  $b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{n}$ , mas como  $m_0 - 1 < m_0$ , tem-se  $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{n} < b$ . Afirmamos que o  $a < \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{n} < b$ . De fato, se não fosse assim, teríamos  $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{n} \leq a < b < \frac{m_0\sqrt{2}}{n}$ , acarretaria em  $b - a \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{n} - \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{n} = \frac{\sqrt{2}}{n}$ , uma contradição. Logo, o número irracional  $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{n}$  pertence ao intervalo  $(a, b)$ . ■

*Para um melhor entendimento acerca do conceito de densidade, sugerimos ao professor fazer uma analogia com uma mistura homogênea de água e sal. Tomando a mistura como sendo o conjunto dos reais, a água como sendo o conjunto dos números irracionais e o sal como sendo a parte complementar que são os números racionais, daí, observe que qualquer porção da tal mistura que se retirar haverá na mesma água e sal.*

## 2.2 Cardinalidade e Não Enumerabilidade dos Números Irracionais

Dado que os números irracionais são números com infinitas casas decimais não periódicas isso nos sugere que não teremos condições de modelar situações do nosso cotidiano perfeitamente com tais números e além disso precisamos conceber se este conjunto é ou não equipotente a um segmento de  $\mathbb{N}$ . Diante disso, devemos preparar nosso ambiente para assegurar a veracidade das modelagens com números irracionais.

É de fundamental importância que façamos um breve contexto histórico de como se deu a ideia de infinito, dado que estamos interessados em entender a cardinalidade do conjunto dos números irracionais. Segundo [4] durante séculos foi unanimidade a quinta noção comum que Euclides apresentou no primeiro livro de *Os elementos*, a saber, o todo é maior do que a parte.

A errônea noção de Euclides só foi refutada no final do século XIX com os trabalhos de Georg Cantor e Dedekind, estes conseguiram formalizar a noção de infinito, que, então, deixou de ser somente *potencial* e tornou-se um conceito *real*.

O *infinito potencial* é caracterizado pela possibilidade de sempre ser possível acrescentar uma unidade, por exemplo,  $\frac{1}{3} = 0,333333\dots$  sempre podemos acrescentar o numeral 3 à direita nessa representação decimal, mas cabe frisar que há números em que sabemos que pode ser sempre acrescentado um dígito, porém identificar qual seja se torna uma tarefa difícil, por exemplo,  $\pi = 3,141592\dots$  é um infinito potencial.

O *infinito real* se trata do resultado do processo, ou seja, considera-se o infinito como algo que pode ser alcançado, um objeto, um número, sendo assim, temos condições de trabalhar com o infinito enxergando-o como um todo. Dessa forma, por exemplo, invés de pensarmos na representação decimal de  $\sqrt{2}$  (infinito potencial), pensemos no próprio  $\sqrt{2}$  (infinito real).

Por conseguinte, a ideia de infinito real condiciona as modelagens através de números irracionais, mas devemos também fazermos uma análise da ideia de infinito dos números irracionais enquanto conjunto, o que será explicitado no teorema a seguir.

**Teorema 2.2.** *O conjunto dos números irracionais é infinito.*

*Demonstração.* Definamos o conjunto  $\mathcal{A} := \{r\sqrt{2}; r \in \mathbb{Q}^*\}$ , observe que Lema 2.1 o conjunto  $\mathcal{A}$  é um subconjunto próprio do conjunto  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  dos números irracionais, daí, sendo  $\mathcal{A}^c$  o complementar de  $\mathcal{A}$  em relação a  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , então temos que

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c.$$

De sorte que o conjunto dos racionais é infinito, conquistamos que  $\mathcal{A}$  também é infinito. Por conseguinte, temos pelo Corolário 1.1 que a união de um conjunto infinito com qualquer outro conjunto resulta em um conjunto infinito, sendo assim, concluímos que o conjunto dos números irracionais é infinito. ■

De posse do fato que o conjunto dos números irracionais é infinito, devemos analisar se este conjunto é enumerável ou não enumerável, isto é, devemos investigar a possibilidade de haver uma correspondência biunívoca com os naturais. Para tanto observemos o teorema a seguir.

**Teorema 2.3.** *O conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

*Demonstração.* A priori temos pela Proposição 1.4 que o conjunto  $\mathbb{R}$  é não enumerável e é a união dos racionais com os irracionais, isto é,  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ . Suponha que o conjunto dos números irracionais é enumerável, daí, a união dos racionais que pela Proposição 1.2 é enumerável com os irracionais resultaria em um conjunto enumerável (veja a Proposição 1.3), ora, mas esta união é o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números que é não enumerável (veja a Proposição 1.4), ou seja, chegamos a uma contradição, por supormos que os irracionais são enumeráveis, daí, concluímos que o conjunto dos números irracionais só pode ser não enumerável. ■

Os resultados da presente seção nos mostram que a medida dos irracionais é maior que a dos racionais e cabe destacar que do ponto de vista probabilístico a escolha aleatória de um número em um intervalo é praticamente nula a probabilidade em ser racional, ou seja, ao escolher de forma aleatória um número em um intervalo é quase certo que será um irracional, para o leitor que queira aprofundar seus conhecimentos sobre este resultado sugerimos o livro [10].

## 3 A Irrracionalidade de Alguns Números e suas Aplicações

Este capítulo discorrerá sobre os números irracionais mais elencados nos textos matemáticos, onde propomos uma abordagem que vai além da forma axiomática que muitos textos apresentam. Com efeito, será destacado o contexto histórico em que tais números surgiram, a demonstração da irracionalidade, quando possível, usando tópicos da matemática que são apreciados no currículo do Ensino Médio e apresentando aplicações que podem ser explicitadas aos alunos do nível de ensino aqui destacado.

### 3.1 O número irracional $\sqrt{2}$

Na Grécia antiga todos acreditavam apenas na comensurabilidade, que consiste em dois segmentos serem múltiplos de uma unidade de medida dada. Esta grandeza matemática para Pitágoras, se tratava de uma doutrina filosófica de que tudo era “número”, ou seja, tudo era comensurável.

A descoberta de que as frações não são suficientes para as necessidades da geometria foi feita pelos gregos, há mais de 2500 anos [11]. Pitágoras foi vítima de seu próprio teorema (Teorema de Pitágoras), pois ao calcular a diagonal de um quadrado unitário observou-se que tal segmento era incomensurável, ou seja, não podia ser expresso pela razão de dois inteiros, daí, surgia o estudo sobre o conjunto dos números irracionais tendo como ponto de partida a  $\sqrt{2}$ , veja a Figura 1.

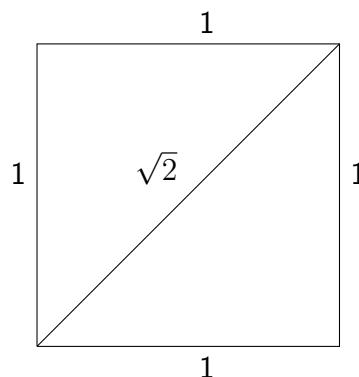


Figura 1 – Quadrado de lado unitário.

No parágrafo anterior afirmamos que  $\sqrt{2}$  é um número irracional, mas para a matemática essa afirmação não é tão óbvia a ponto de assumirmos como uma verdade incontestável, ou seja, um axioma. Dessa forma, devemos demonstrar que de fato se trata de um número irracional, sendo assim, a seguir tecemos duas demonstrações que podem inclusive serem apresentadas

pelos professores aos alunos do Ensino Médio, pois ambas são feitas por contradição e exigem conteúdos elementares, como o leitor poderá observar a seguir.

*Demonstração 1.* Suponha que  $\sqrt{2}$  seja um número racional ( $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ), sendo assim, existirá um  $p \in \mathbb{Z}$  e um  $q \in \mathbb{N}^*$ , com  $p$  e  $q$  relativamente primos, ou seja,  $(p, q) = 1$ , de modo que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

elevando ao quadrado, temos

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

multiplicando por  $q^2$  ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$p^2 = 2 \cdot q^2 \tag{3.1}$$

Observe que  $p^2$  é par, daí, pela paridade devemos ter  $p$  também par, de onde segue  $2 \mid p$ , além disso, temos que existe um  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $p = 2k$ , que ao substituirmos na equação (3.1) acarreta em

$$q^2 = 2 \cdot k^2.$$

De onde concluímos, de forma análoga a  $p$ , que  $2 \mid q$ . Pelos argumentos anteriores resulta que  $p$  e  $q$  tem 2 como um divisor comum, o que é uma contradição, pois por hipótese temos  $(p, q) = 1$ .

Logo, a contradição se deu por termos suposto que  $\sqrt{2}$  seria racional, conseqüentemente, temos que  $\sqrt{2}$  é irracional. ■

*Demonstração 2.* Suponha que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , daí, podemos sempre encontrar um natural que multiplicado por  $\sqrt{2}$  resulte em um número inteiro, ou seja, define-se o conjunto  $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}; n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$  que não é vazio, pelo Princípio da Boa Ordenação, possui um elemento mínimo  $b$ . Dessa forma, existe um  $a \in \mathbb{Z}$ , tal que  $b\sqrt{2} = a$ . Segue que

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1},$$

substituindo no segundo membro  $\sqrt{2}$  por  $\frac{a}{b}$ , temos

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 1},$$

o que resulta em

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{\frac{a - b}{b}},$$

que equivale a

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b},$$

multiplicando por  $(a - b)$ , obtemos

$$(a - b)\sqrt{2} = 2b - a.$$

Dessa forma, temos que  $(a - b) \in \mathcal{A}$ . Atente-se que

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4},$$

daí, temos

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

o que acarreta em

$$1 < \frac{a}{b} < 2,$$

multiplicando desigualdade acima por  $b$ , que é natural, obtemos

$$b < a < 2b,$$

subtraindo  $b$ , temos

$$1 < a - b < b.$$

Logo,  $(a - b) \in \mathcal{A}$  e é menor que  $b$  o que é uma contradição, pois por hipótese tínhamos que  $b$  era mínimo. Portanto,  $\sqrt{2}$  é irracional. ■

### 3.1.1 Aplicações do $\sqrt{2}$

Uma grande curiosidade acerca do  $\sqrt{2}$  é que nós estamos em constante contato com esse número no nosso cotidiano. O leitor deve ter ficado surpreso com essa afirmação e se sentindo uma pessoa à mercê de tal aplicação matemática, mas não se preocupe pois isso não é uma particularidade sua.

Diuturnamente as pessoas estão em contato com folhas de papéis e no ambiente escolar é algo quase que indissociável, pois bem, uma das aplicações do  $\sqrt{2}$  que professor pode fazer uso está justamente na folha de papel **A4**. Com efeito, a folha de papel de tamanho **A4** possui um formato retangular de dimensões 210mm X 297mm, como na Figura 2.

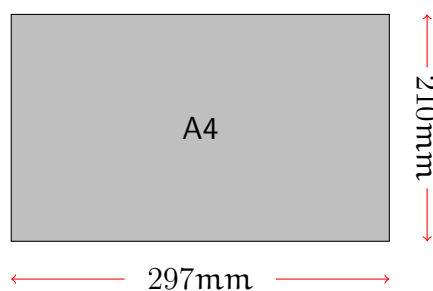


Figura 2 – Folha de Papel A4.

A justificativa para que a folha **A4** tenha tais dimensões é que quando esta folha é dobrada ao meio, o retângulo obtido é semelhante ao anterior e a razão de semelhança é  $\sqrt{2}$ . Com



feito, seja  $C$  o comprimento e  $L$  a largura, tomaremos como comprimento sempre o lado maior, da folha de papel na forma inicial, ao ser dobrada obtemos um retângulo de comprimento  $\frac{C}{2}$  e largura  $L$  [12].

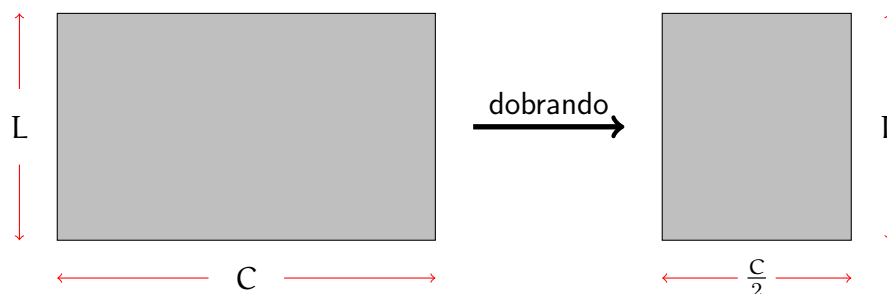


Figura 3 – Processo de dobradura da folha A4.

*É de fundamental importância que o professor esclareça aos discentes as propriedades inerentes à semelhança de figuras planas, conseqüentemente, proporcionalidade e também deixe claro as propriedades das potências.*

Considerando que os retângulos são semelhantes, obtemos que

$$\frac{C}{L} = \frac{L}{\frac{C}{2}},$$

que resulta em

$$\frac{C^2}{L^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}},$$

pelos propriedades das potências, obtemos

$$\left(\frac{C}{L}\right)^2 = 2$$

de modo que aplicando raiz quadrada de ambos os lados, conquistamos

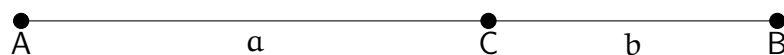
$$\frac{C}{L} = \sqrt{2}.$$

Dessa forma, temos que na folha **A4**  $C = 297\text{mm}$  e  $L = 210\text{mm}$ , sendo assim, a razão  $\frac{297}{210} = 1.4142857$  (sugerimos o uso da calculadora) que é uma ótima aproximação racional para  $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$ , com erro na ordem de centésimo de milésimo.

### 3.2 O numero irracional $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razão áurea)

Assim como a  $\sqrt{2}$ , a razão áurea  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  também surgiu de uma inquietação de cunho geométrico. No tempo dos pitagóricos (século V a.c), era conhecida a divisão de um segmento em *média e extrema razão*, que consistia em dividir um segmento em dois outros de tal forma

que o segmento mais longo fosse média geométrica entre o segmento menor e o segmento todo. Sob uma ótica geométrica, seja o segmento  $AB$ , não degenerado, particionado por um ponto  $C$  de tal forma que o segmento  $AC$  tenha medida  $a$  e o segmento  $CB$  tenha medida  $b$ , com  $b < a$ .



A sequência  $(b, a, a + b)$  forma uma Progressão Geométrica, sendo assim, temos que

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b},$$

multiplicando ambos os membros por  $\frac{a}{b}$ , obtemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1.$$

Por conseguinte, se tomarmos  $\frac{a}{b} = \phi$  implica na equação do 2 grau

$$\phi^2 = \phi + 1,$$

de onde segue que

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0, \tag{3.2}$$

cuja raiz positiva é  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Logo a partir de então surgia a *extrema razão* ou razão áurea que viria a se tornar um número com aplicações tão excepcionais que os matemáticos propunha haver um certo misticismo com o mesmo. A descoberta deste número nos remete a outra inquietação: a qual conjunto numérico pertence o  $\phi$ ? para tanto segue a demonstração.

*Sugerimos ao professor trabalhar a priori os critérios de divisibilidade.*

*Demonstração 1.* A priori observe que se  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , então pela equação (3.2) temos

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Diante do exposto, suponhamos que  $\phi$  pertença ao conjunto dos números racionais ( $\phi \in \mathbb{Q}$ ), sendo assim, existem  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\phi = \frac{a}{b}$ , com  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . Dessa forma, temos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

o que acarreta em

$$a^2 - ab = b^2,$$

dividindo ambos os membros por  $a$ , obtemos

$$a - b = \frac{b^2}{a}.$$

Observe que por um lado temos  $a - b$  que é inteiro o que implica em  $a$  dividir  $b^2$  e pelo critério de divisibilidade  $a$  divide  $b$ , daí,  $a$  e  $b$  têm um fator em comum, o que é um absurdo, pois por hipótese  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . Logo,  $\phi$  pertence ao conjunto dos números irracionais. ■

### 3.2.1 Aplicações de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Para encontrar uma aplicação de  $\phi$  não precisa de tantos esforços, quanto outros números irracionais. Dentre estas, uma que é de fácil manipulação para o professor em salas de aula é o chamado *Retângulo Áureo*.

Um retângulo ABCD para ser áureo deve apresentar a propriedade de que ao ser retirado dele um quadrado AEFD, o retângulo EBCF remanescente é semelhante ao inicial (EBCF ~ ABCD).

Algo de fundamental importância no retângulo áureo é que o processo se propaga, isto é, sempre do retângulo restante retira-se um quadrado gerando um retângulo semelhante ao anterior. Perceba que diante da propriedade do retângulo áureo a dimensão do quadrado é obtida pela diferença do lado maior pelo lado menor do retângulo, sendo assim, a dimensão do quadrado diminuirá tendendo a zero.

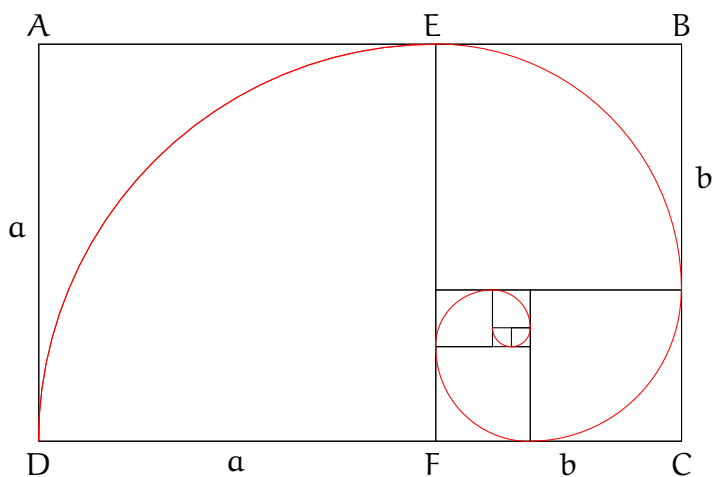


Figura 4 – Retângulo Áureo.

Decorre dos fatos anteriores a sequência  $(a + b, a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, \dots)$ , onde quaisquer dois termos consecutivos são dimensões do retângulo áureo. Atente-se que a sequência  $a_n = (1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$  de Fibonacci aparece (como combinações) na sequência áurea descrita anteriormente, através da recorrência linear de segunda ordem

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \text{onde } a_1 = a_2 = 1,$$

cuja solução é da forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Esta de Fibonacci aparece de forma surpreendente na natureza, pois observe na Figura 4 que o processo de construção dos retângulos áureos gera uma espiral, daí, o professor deve ficar atento que possivelmente os objetos em forma de espiral podem ser modelados pelos retângulos áureos, cabe destacar que o fascínio dos matemáticos por tais retângulos é tão grande que a própria Sociedade Brasileira de Matemática o adotou como símbolo representante.

### 3.3 O número irracional $e$ (número de Euler)

O número de Euler assim como a razão áurea é uma constante de grande apreciação na Matemática. Entretanto, no âmbito da Educação Básica em relação ao número  $e$ , a experiência do autor enquanto professor, constata que este não tem uma exposição condizente com sua importância para os tópicos da Matemática. Com efeito, na educação básica os problemas relacionados com números irracionais são majoritariamente encarados com o uso de uma calculadora, onde até mesmo tem uma tecla com a constante  $e$  que ao ser pressionada aparece no visor a aproximação 2,71828182 algo que não esboça a natureza aritmética do número em ser irracional, observe que em uma análise célere o aluno é levado a conjecturar que haja um padrão após a segunda casa decimal.

Na educação básica, mais precisamente no ensino médio, o número  $e$  aparece de forma camuflada na expressão logaritmo natural ( $\ln$ ), que representa o sistema de logaritmos neperianos, isto é, o sistema de base  $e$ . Todavia, tratado apenas dessa forma impossibilita ao discente de perceber que o termo natural se deve ao fato de que no estudo de fenômenos naturais geralmente aparece uma lei de correspondência de uma função exponencial de base  $e$ .

Atente-se que até então não ilustramos como a constante de Euler é definida, sendo assim, faz-se necessário dissertarmos uma definição, como segue.

**Definição 3.1.** A constante de Euler é o limite da série de termo geral  $\frac{1}{k!}$ . Em símbolos

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (3.3)$$

A série aqui em destaque converge para um número compreendido entre 2,5 e 3, isto é,  $2,5 < e < 3$ . Com efeito, seja  $(s_n)_{n \geq 0}$  a sequência das somas parciais da série (3.3), ou seja,

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Atente-se que  $1 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots$ , além disso,  $k! > 2^{k-1}$  para todo natural  $k > 2$ , daí, conquistamos que para  $n \geq 4$  temos

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{8}{3} + \sum_{k \geq 4}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}, \quad (3.4)$$

observe que  $\sum_{k \geq 4}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$  se trata da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo  $\frac{1}{2^{4-1}} = \frac{1}{8}$  e razão  $\frac{1}{2}$ , daí, temos

$$\sum_{k \geq 4}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

aplicando tal resultado em (3.4), obtemos que

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{8}{3} + \frac{1}{4} = \frac{35}{12}.$$

Dessa forma, acarreta que a sequência  $(s_n)_{n \geq 0}$  é monótona e limitada, conseqüentemente convergente, pelo teorema de Bolzano - Weierstrass (para uma análise aprofundada sugerimos ao leitor o livro [13]). Logo, a partir de  $s_n < \frac{35}{12}$  e  $s_3 = 2,5$  conquistamos que  $2,5 < e < 3$ .

De posse do resultado que  $e$  se trata de um número real, precisamos assegurar o pertencimento deste número em relação ao conjunto dos irracionais, como segue.

*Demonstração.* Suponhamos que  $e$  seja um número racional positivo, isto é,  $e = \frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$  e relativamente primos, segue que

$$\begin{aligned} 0 &< \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

observe que em todas as parcelas do somatório anterior temos o fator  $\frac{1}{n!}$  em comum, sendo assim, podemos reescreve-lo como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1)} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Perceba que a expressão entre parenteses na equação (3.6) se trata da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita (para uma abordagem aprofundada sugerimos ao leitor [14]) de primeiro termo igual a  $\frac{1}{(n+1)}$  que também é a razão, daí, temos que a soma (S) é dada por

$$S = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{n}. \quad (3.7)$$

De posse dos fatos explícitos em (3.6) e (3.7) podemos retornar à expressão (3.5), obtendo

$$0 < \overbrace{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right)}^e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$$

atente que por hipótese  $e = \frac{m}{n}$ , sendo assim, temos

$$0 < \frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n},$$

mas como o termo central se trata de subtrações de frações que têm como mínimo múltiplo comum dos denominadores  $n!$ , equivalentemente conquistamos

$$0 < \frac{m \cdot (n-1)! - n! - n! - n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 - \dots - n - 1}{n!} < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$$

multiplicando a desigualdade anterior por  $n!$ , resulta em

$$0 < m \cdot (n-1)! - n! - n! - n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 - \dots - n - 1 < \frac{1}{n}.$$

De sorte que  $n \in \mathbb{N}$ , segue que,  $\frac{1}{n} \leq 1$ , daí, por transitividade obtemos que

$$0 < m \cdot (n-1)! - n! - n! - n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 - \dots - n - 1 < 1$$

o que é um absurdo. Com efeito, a propriedade de fechamento do conjunto dos números inteiros em relação à subtração e a multiplicação nos garante que o termo central da desigualdade anterior é um número inteiro, mas não há inteiros entre 0 e 1. O absurdo se deu da hipótese de  $e \in \mathbb{Q}$ , sendo assim, pelo princípio do terceiro excluído resulta que  $e$  é um número irracional. ■

### 3.3.1 Aplicação de $e$

Se R\$ 1000,00 forem investidos a 5% de juros, capitalizados anualmente, então depois de um ano o investimento valerá R\$  $1000 \cdot 1,05 =$  R\$ 1050, depois de 2 anos valerá R\$  $[1000 \cdot (1,05)] \cdot 1,05 =$  R\$ 1102,50, e depois de  $t$  anos valerá R\$  $1000 \cdot (1,05)^t$ . De modo geral, se uma quantia  $C_0$  for investida a uma taxa de juros  $i$  ( $i = 0,05$  nesta situação), então depois de  $t$  anos, terá um montante de  $C_0(1+i)^t$ , no regime de juro composto (sugerimos ao professor trabalhar exemplos sobre juros compostos). No entanto, usualmente, os juros são

capitalizados com mais frequência, digamos em  $n$  vezes em um ano. Dessa forma, em cada período de capitalização, a taxa de juros é  $\frac{i}{n}$  e existem  $nt$  períodos de capitalização em  $t$  anos, de modo que o valor do investimento é dado por

$$C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}.$$

Por exemplo, depois de dois anos a 5% de juros, um investimento de R\$ 1000,00 valerá

$$\text{R\$ } 1000 \cdot (1,025)^4 = \text{R\$ } 1103,81 \quad \text{com capitalização semestral}$$

$$\text{R\$ } 1000 \cdot (1,0125)^8 = \text{R\$ } 1104,48 \quad \text{com capitalização trimestral}$$

$$\text{R\$ } 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{24} = \text{R\$ } 1104,94 \quad \text{com capitalização mensal}$$

$$\text{R\$ } 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{365}\right)^{2 \cdot 365} = \text{R\$ } 1105,16 \quad \text{com capitalização diária.}$$

Observe que os juros pagos aumentam conforme o número de períodos de capitalização ( $n$ ) aumenta, daí, se colocarmos  $n \rightarrow \infty$ , então teremos os juros capitalizados continuamente. A rigor temos que o montante  $M$  desta situação será

$$M(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = C_0 \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n/i} \right]^{it}$$

se tomarmos  $m = \frac{n}{i}$  acarreta em

$$M(t) = C_0 \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{it}. \quad (3.8)$$

Pra elucidar o resultado obtido, sugerimos ao professor aplicar a situação problema. Um investidor chamado Leviano de posse da equação (3.8) e de toda a abordagem sobre juros até aqui apresentada, raciocina: “se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade do juro, sendo assim, receberei o montante  $C_0 \left(1 + \frac{i}{2}\right)$  a partir disso reinvestirei este valor por mais um semestre e acumularei o montante de  $C_0 \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$ , e esse valor é maior do que o  $C_0(1 + i)$  que seria a capitalização anual”. De fato, até então o raciocínio do investidor está perfeito, pois pela desigualdade de Bernoulli tem-se que  $\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 > 1 + i$ . Entusiasmado com o resultado obtido, Leviano de forma ambiciosa, lança mãos a uma calculadora e verifica que se a capitalização for mensal ganhará um valor maior, ou seja,  $\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}$  e de imediato afirma ficarei rico.

Fazendo jus ao seu nome, o nosso investidor raciocinou de forma precipitada. Embora seja verdade que  $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{i}{n+1}\right)^{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $i > 0$ , o equívoco reside no fato de pensar que a sequência  $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$  é ilimitada. Com efeito, todos os termos da sequência são menores do que  $e^i$ , o leitor deve ter ficado surpreso com tal afirmação, pois não temos até então de forma explícita a série (3.3) que converge para  $e$ . No entanto, temos que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

para certificar a veracidade de tal afirmação sugerimos ao leitor as Páginas 168-169 de [13]. Por conseguinte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}} \right]^i = e^i.$$

O número  $e$  explícito como limite surgiu de fato de atividades de cunho financeiro, talvez o professor se surpreenda com tal afirmação, mas era de se esperar que um número com tamanha relevância tenha surgido de atividades práticas de investigação como acontece em toda a matemática, ou seja, ocorre os padrões para depois serem modelados. Em conformidade [15] afirma que

Desde épocas imemoriais as questões financeiras têm-se encontrado no centro das preocupações humanas. Nenhum outro aspecto da vida tem uma característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Assim, não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo – ou talvez um mercador, ou um prestamista –, no início do século XVII, tenha notado uma ligação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de uma certa expressão matemática no infinito.

Portanto, pra desespero do personagem Leviano a equação (3.8) é reescrita como

$$M(t) = C_0 e^{it}.$$

Atualmente a constante de Euler tem aplicações diversas nesse escopo científico como, por exemplo, no cálculo diferencial a constante surgiu como uma grande facilitadora na derivação de funções da forma  $[f(x)]^{g(x)}$ , dentre outras aplicações.

Este arcabouço teórico explicitado na presente subseção pode ser transposto de forma didática pelo professor através de atividades de investigações com o uso de calculadora, podendo o discente perceber que os valores se aproximam para algo constante, sendo assim, sob a tutoria do seu professor o aluno perceberá propriedades inerentes aos números irracionais e também terá contato com a noção de limites.

### 3.4 O número irracional $\pi$

O número  $\pi$  é uma das constantes mais “conhecida” da matemática, tanto que em sua homenagem a UNESCO oficializou o dia 14 de março, que pelo padrão americano é escrito como 3/14, como sendo o Dia Internacional da Matemática [16], observe que 3/14 são os primeiros dígitos de  $\pi$ , a saber

$$\pi \approx 3,14159265369\dots$$

A partir de então somos levados a fazer uma análise acerca da origem de tal número (sugerimos ao professor fazer um trabalho integrado com o professor de história), que de antemão afirmamos ser um número irracional. No entanto, cabe destacar que o número irracional  $\pi$  tem sua natureza aritmética um tanto ofuscada pela aproximação por 3,14, é de fundamental



importância sempre deixar claro ao discente que há infinitos dígitos após 4 centésimos, pois a experiência do autor constata que grande parte dos alunos do ensino médio tem em mente que  $\pi$  é exatamente igual a 3,14, isto é, um decimal exato (número racional).

Acredita-se que o uso majoritário da aproximação de  $\pi$  por 3,14 tem estreita relação com o modo como tal número surgiu, conhecido como método clássico de Arquimedes. Para começarmos a entender o método utilizado por Arquimedes, devemos nos questionar acerca do porquê usar a letra grega  $\pi$  para representar a constante em destaque, pois bem, segundo [4] a escolha do  $\pi$  se deve ao fato desta ser a primeira letra da palavra grega περιμετρο (perímetro), observe que essa informação vai de encontro à grandeza representada por  $\pi$ , que é a razão do comprimento de uma circunferência qualquer pelo diâmetro correspondente.

Em consonância com [17], no livro *A Medida do Círculo* Arquimedes demonstra que a área  $A$  de um círculo de raio  $r$  é igual à de um triângulo de base igual ao comprimento  $C$  da circunferência e altura  $r$ , como segue

$$A = \frac{1}{2}rC,$$

daí, ao fazer a razão da área do círculo pelo quadrado do seu raio, obtemos

$$\frac{A}{r^2} = \frac{C}{2r},$$

ou seja, a razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro ( $2r$ ), que chamamos hoje de  $\pi$ , que pelos cálculos de Arquimedes chegou-se em

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

que escrevendo até a ordem de centésimo de milésimo, resulta em

$$3,1408 < \pi < 3,1428,$$

observe que ele conseguiu uma precisão na ordem de centésimos.

A estratégia usada por Arquimedes foi aproximar o comprimento da circunferência por polígonos regulares inscritos e circunscritos, de modo que, aproximação acima foi conquistada com polígonos regulares de 96 lados. Cabe destacar que Arquimedes já tinha informações fundamentais advindas de Os Elementos de Euclides, por exemplo, no livro XII a proposição II afirmava que “os círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros”, isso mostra que os gregos já dispunha de boas ferramentas para atacar problemas geométricos como o do comprimento da circunferência, conseqüentemente, a aproximação para  $\pi$ .

Analisemos o método clássico de Arquimedes, partindo de um polígono regular de 6 lados (hexágono), iremos subdividi-lo em 6 triângulos justapostos e denotaremos por  $l$  o lado do hexágono inscrito e por  $L$  o lado do hexágono circunscrito à circunferência  $C$  e por simplicidade dos cálculos tomaremos o raio unitário,  $r = 1$ , veja a Figura 5.

Atente-se que cada triângulo inscrito é equilátero com lado igual ao raio  $r = 1$ , daí, temos que seu perímetro é  $6 \cdot 1 = 6$ . Para cada triângulo do polígono inscrito tem-se um correspondente

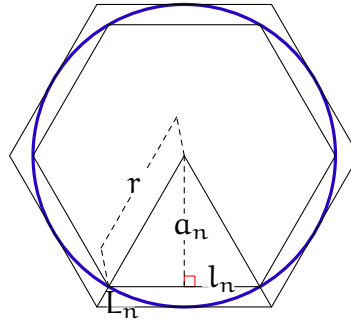


Figura 5 – Aproximação da circunferência por polígonos regulares.

semelhante no polígono circunscrito. Dessa forma, para fazermos as proporções decorrente da semelhança dos triângulos é fundamental calcularmos o apótema<sup>1</sup> ( $\alpha$ ) do triângulo inscrito, para tanto basta aplicar o Teorema de Pitágoras que resultará em

$$\alpha = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l^2}{2}\right)},$$

como estamos partindo do princípio que  $r = 1$  e constatamos que  $l = r$ , então

$$\alpha = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

que equivale a

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A partir da semelhança dos triângulos temos que

$$\frac{L}{l} = \frac{r}{\alpha},$$

sendo assim,

$$\frac{L}{1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

o que resulta em

$$L = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, aproximando por hexágonos constatamos que

$$6 \cdot 1 < C < 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

dividindo pelo diâmetro  $2 \cdot r = 2 \cdot 1$ , obtemos

$$3 < \frac{C}{2} < 2\sqrt{3}.$$

<sup>1</sup> Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado.

Os procedimentos usados em relação ao hexágono servem de motivação para fazermos a análise em polígonos regulares de  $n$  lados, de modo que o apótema  $a_n$  é dado por

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2},$$

daí, podemos usar a recorrência

$$l_{2n} = \sqrt{2r(r - a_n)},$$

essa expressão nos indica que se conhecemos a medida do lado de um polígono de 6 de lados, então podemos encontrar a medida do de 12 lados, de posse deste podemos encontrar a medida do de 24 lados, depois do de 48 lados, de posse deste podemos encontrar do de 96 lados e sucessivamente. Arquimedes usou este argumento somente até o polígono regular de 96 lados.

Atente-se que a expressão de  $l_{2n}$  refere-se ao lado do polígono regular inscrito à circunferência, mas pela semelhança de polígonos temos que se  $p_n$  representa o perímetro do polígono inscrito e  $P_n$  representa o perímetro do polígono circunscrito, então temos que

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{r}{a_n},$$

sendo assim, esses instrumentos são suficientes para delinear o Método Clássico de Arquimedes, para um círculo de raio unitário. Para melhor fixação do procedimento acima descrito, faremos aproximações com polígonos regulares de 12 lados.

Já temos que

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e que

$$l_6 = r = 1.$$

Por conseguinte, temos

$$l_{12} = \sqrt{2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

o que resulta em

$$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

daí, segue que

$$a_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - l_{12}^2},$$

o que implica em

$$a_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Dessa forma, temos

$$p_{12} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

consequentemente, obtemos

$$P_{12} = \frac{p_{12}}{a_{12}},$$

ou seja,

$$P_{12} = \frac{24\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

que simplificando resulta em

$$P_{12} = 24(2 - \sqrt{3})$$

Logo, conquistamos outra aproximação para  $\pi = \frac{C}{2}$

$$\frac{p_{12}}{2} < \frac{C}{2} < \frac{P_{12}}{2},$$

que corresponde a

$$\frac{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < \frac{C}{2} < \frac{24(2-\sqrt{3})}{2},$$

escrevendo os valores acima até a ordem de centésimo de milésimo, temos

$$3,1058 < \frac{C}{2} < 3,2153.$$

De forma análoga, aproxima-se por  $p_{24}$  e  $P_{24}$ ,  $p_{48}$  e  $P_{48}$ ,  $p_{96}$  e  $P_{96}$ , onde este último foi o limítrofe usado por Arquimedes, chegando em uma aproximação racional por excesso de  $\frac{22}{7}$ , onde o erro está na ordem de milésimos, como veremos na Seção 4.2. Diante do exposto fica nítido que Arquimedes realizou cálculos laboriosos e conseguiu de certa forma uma boa aproximação para  $\pi$ , mas a rigor o ideal é que fizesse o  $p_n$  e  $P_n$  tendendo ao infinito.

Com a advento da tecnologia podemos realizar aproximações por polígonos regulares que tenham uma grande quantidade de lados, por exemplo, através do software GeoGebra é possível convencer-se da aproximação da circunferência por tais polígonos, o procedimento via GeoGebra está descrito no Apêndice A.

Atualmente existem outras formas para realizar aproximações de  $\pi$ , por exemplo, através da série de Gregory-Leibniz que é um caso particular da série de Taylor, como segue

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

tomando  $x = 1$ , obtemos

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

De sorte que  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ , conquistamos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots,$$

multiplicando ambos os membros por 4, resulta em

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} + \dots$$

Na série de Gregory-Leibniz a convergência se dá de forma lenta em relação a outras aproximações via séries. No entanto, do ponto de vista didático tal série se torna mais vantajosa

para que o professor realize aplicações no Ensino Médio, pois conduzirá os discentes a realizarem operações elementares envolvendo frações.

Diferentemente dos números tratados no presente capítulo, a demonstração da irracionalidade de  $\pi$  requer conhecimentos que fogem do escopo desse trabalho, por exemplo, o anel dos inteiros gaussianos. No entanto, para o leitor que queira fazer incursão a tal demonstração sugerimos as Páginas 45-46 de [8].

**Observação 3.** *No Capítulo 5 apresentamos uma prova de que  $\pi$  é irracional através da teoria dos algébricos e transcendentos.*

### 3.4.1 Aplicações de $\pi$

O modo como se deu a descoberta de  $\pi$ , por si só já é uma ótima aplicação desse número irracional. No entanto, ao tecer comentários sobre tal número somos direcionados a fazer análise do mesmo como unidade de medida de ângulo, sendo assim, nesta subseção iremos nos ater à aplicação de  $\pi$  como medida de ângulo.

Vimos anteriormente que  $\pi$  é definido como a razão entre o comprimento ( $C$ ) de uma circunferência e o seu diâmetro ( $2r$ ), isto é,

$$\pi = \frac{C}{2r},$$

daí, temos que

$$C = 2\pi r,$$

que é conhecida como a fórmula do comprimento de uma circunferência, mas esta expressão nos informa também que ao subdividir a circunferência, conseqüentemente, estaremos subdividindo  $\pi$ , essa noção ajudará a compreender uma unidade de medida para ângulo diferente da conhecida graus.

Comumente em livros didáticos usa-se expressões do tipo “arco de 60”, não deixando claro que se trata de um arco que subtende um ângulo central de 60 e essa compreensão é de fundamental importância nas comparações entre unidades de medidas de ângulos, além disso, é importante salientar que arcos que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios, isso justifica o fato de geralmente optarem por círculos de raio unitário. Dessa forma, é que se permite definir o radiano como uma unidade de medida para ângulos.

**Definição 3.2.** *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo (ângulo central) e o comprimento do raio do círculo.*

Na Figura 6,  $\widehat{AÔB} = \frac{s}{r}$  radianos. Por conseguinte à definição, temos que se  $s$  é o comprimento do arco determinado por um ângulo central  $\alpha$  radianos em um círculo de raio  $r$ ,

então

$$\alpha = \frac{s}{r},$$

o resulta em

$$s = \alpha r.$$

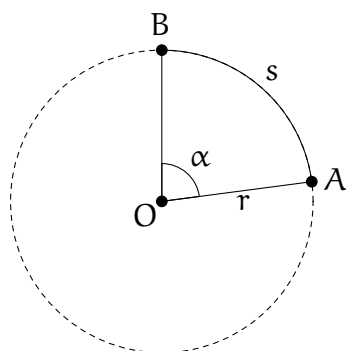


Figura 6 – Arco que subtende ângulo central  $\alpha$ .

Atente-se que a definição da medida em radianos tem estreita relação com  $\pi$ . Com efeito, o comprimento de um semi-círculo (que é um arco de 180) é  $\pi r$ , daí, temos que

$$180 = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ radianos.}$$

A grande vantagem dos radianos em relação à medida em grau é que em radianos estamos trabalhando com o comprimento do arco, o que impulsiona o estudo das funções trigonométricas.

## 4 Aritmética dos Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais apresenta uma característica desfavorável, não é fechado para as operações aritméticas. No entanto, cabe destacar que o fato de tal conjunto não ser fechado para adição e multiplicação não implica dizer que todas as somas e multiplicações de irracionais resulte em seu complementar racional, isto é, ao serem realizadas tais operações podemos ter resultados tanto racional, quanto irracional. Diante do exposto, devemos tecer algumas asserções que nos asseguram o pertencimento ou não de um número em relação ao conjunto dos números irracionais e é de fundamental importância também buscarmos localizar irracionais na reta real, pois como já vimos no Teorema 2.1 os números irracionais se acham espalhados por toda parte entre os números reais.

### 4.1 Propriedades dos Números Irracionais

Tendo em vista que o conjunto dos irracionais tem uma natureza aritmética peculiar, esta seção delineará algumas propriedades envolvendo tais números com intuito de munir o leitor de resultados que facilitem a garantia de pertencimento de certos números ao conjunto em destaque

**Teorema 4.1.** *Toda raiz  $n$ -ésima, com  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 2$ , de um  $p$  primo é um número irracional.*

*Demonstração.* Suponha que  $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$ , isto é,  $\sqrt[n]{p} = \frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . Dessa forma, ao elevarmos a  $n$  ambos os membros da igualdade aqui em destaque, obtemos

$$p = \frac{a^n}{b^n},$$

daí segue que

$$b^n \cdot p = a^n. \tag{4.1}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por  $p$ , conquistamos que

$$b^n = \frac{a^n}{p}.$$

Dessa forma, temos que  $p \mid a^n$ , dado que no primeiro membro temos o inteiro  $b^n$ , o que implica que  $p \mid a$ , daí, existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = m \cdot p$ , sendo assim, substituindo tal resultado na equação (4.1), obtemos

$$b^n \cdot p = p^n \cdot m^n,$$

de modo que ao dividirmos ambos os membros da equação por  $p$ , resulta em

$$b^n = p^{n-1} \cdot m^n,$$

ora, de sorte que  $n \geq 2$  teremos pelo menos um fator  $p$ , conseqüentemente,  $p \mid b^n$ , o que acarreta em  $p \mid b$ . Portanto conquistamos que  $p$  ( $p > 1$ ) é divisor comum de  $a$  e  $b$ , o que é um absurdo, pois por hipótese o  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , tal absurdo surgiu por supormos que  $\sqrt[n]{p}$  seria racional, daí, segue que  $\sqrt[n]{p}$  é irracional, com  $p$  primo e  $n \geq 2$ . ■

Observe que o irracional  $\sqrt{2}$  é um caso particular desse teorema.

**Corolário 4.1.** Não existe em  $\mathbb{R}^2$  triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

*Demonstração.* Suponhamos que exista um triângulo equilátero  $ABC$ , com  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $C = (x_3, y_3)$  e lado medindo  $l$ , onde  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  e  $y_3$  são inteiros. Vamos inscrever o triângulo  $ABC$  em um retângulo  $CDEF$ , de modo que,  $D = (x_1, y_3)$ ,  $E = (x_1, y_2)$ ,  $F = (x_3, y_2)$  e  $a, b, c, d, e$  e  $f$  as medidas dos segmentos  $\overline{CF}$ ,  $\overline{FB}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{EA}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\overline{DC}$ , respectivamente, conforme a Figura 7.

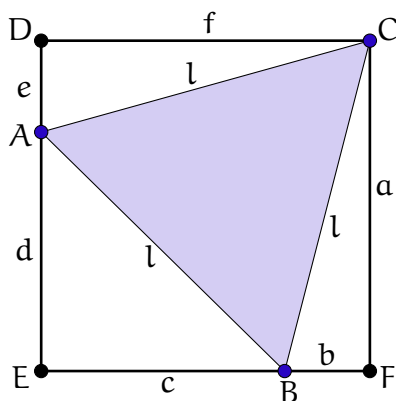


Figura 7 – Suposto triângulo no  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas inteiras

Observe que  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são números inteiros. Com efeito,  $a = y_3 - y_2$ ,  $b = x_3 - x_2$ ,  $c = x_2 - x_1$ ,  $d = y_1 - y_2$ ,  $e = y_3 - y_1$  e  $f = x_3 - x_1$ . Atente-se que o retângulo  $CDEF$  também tem área inteira, pois é o produto  $af$ . Diante do exposto sendo  $S$  a área, temos que

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC}).$$

Segue que

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = af - \left( \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{ef}{2} \right),$$

multiplicando ambos os membros por  $\frac{4}{l^2}$ , obtemos

$$\sqrt{3} = \frac{4af - 2 \cdot (ab + cd + ef)}{l^2}. \tag{4.2}$$

Observe que  $l^2$  é inteiro, pois  $l^2 = a^2 + b^2$ , daí segue que o segundo membro da equação (4.2) é um número racional, o que é um absurdo pois pelo Teorema 4.1  $\sqrt{3}$  não pode ser racional dado que o mesmo é um número irracional. ■



O leitor poderá realizar experimentos através do software *GeoGebra*. Para tanto, basta ativar a malha quadriculada do mesmo e tentar superjustapor os três vértices de um triângulo equilátero nos vértices da malha, mesmo fazendo isometrias somente conseguirá êxito com dois vértices, o terceiro vértice sempre ficará sem a superjustaposição aqui desejada.

**Lema 4.1** (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

*Demonstração.* Se  $n = 2$ , o resultado é obviamente verificado. Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que  $n$  e vamos provar que vale para  $n$ . Se o número  $n$  é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que  $n$  seja composto. Logo, existem números naturais  $n_1$  e  $n_2$  tais que  $n = n_1 n_2$ , com  $1 < n_1 < n$  e  $1 < n_2 < n$ . Pela hipótese de indução, temos que existem números primos  $p_1, \dots, p_r$  e  $q_1, \dots, q_s$  tais que  $n_1 = p_1 \cdots p_r$  e  $n_2 = q_1 \cdots q_s$ . Portanto,  $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$ .

Aprova da unicidade fica a cargo do leitor [18]. ■

**Teorema 4.2.** *Dado um número composto  $m$ , existem primos  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ , tal que*

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

*Se existir um  $\alpha_i$ , para  $i \in \{1, \dots, k\}$ , da forma  $\alpha_i = n \cdot q + r$ , onde  $q \in \mathbb{Z}$  e  $0 < r < n$ , então para  $n \geq 2$  temos que a raiz  $n$ -ésima de  $m$  ( $\sqrt[n]{m}$ ) será irracional.*

*Demonstração.* Seja  $m$  um número composto, suponhamos que  $\sqrt[n]{m}$  seja um número racional, isto é, existem inteiros positivos  $a$  e  $b$ , com  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , tal que

$$\sqrt[n]{m} = \frac{a}{b}$$

elevando ambos os membros à potência  $n$ , obtemos

$$m = \frac{a^n}{b^n}$$

o que acarreta em

$$b^n \cdot m = a^n. \quad (4.3)$$

Tomemos  $\alpha_k$ , expoente de  $p_k$ , como o expoente da hipótese, isto é,  $\alpha_k = n \cdot q + r$ , daí, segue que

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n \cdot q + r}$$

substituindo na equação (4.3), obtemos

$$b^n \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n \cdot q + r} = a^n, \quad (4.4)$$

observe que  $p_k \mid a$ , conseqüentemente,  $p_k \nmid b$ , pois por hipótese o  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . Dessa forma, na equação (4.4) por um lado temos o inteiro  $a$  elevado a  $n$ , sendo assim, todos os fatores primos da sua decomposição tem como expoente múltiplos de  $n$ , por outro lado temos pelo menos o fator  $p_k^r$ , cujo expoente não é múltiplo de  $n$ , o que contraria o Lema 4.1 no que tange à unicidade da decomposição. A contradição se deu por termos suposto que  $\sqrt[n]{m}$  (nas condições expostas) fosse racional, conseqüentemente, temos que  $\sqrt[n]{m}$  é irracional. ■

**Exemplo 8.**  $\sqrt{2020}$  é irracional. Com efeito, temos que

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101,$$

observe que os expoentes dos fatores primos 5 e 101 não são múltiplos de 2, daí, pelo que foi verificado no Teorema 4.2 temos que  $\sqrt{2020}$  é irracional.

**Teorema 4.3.** O inverso de um número irracional é também um número irracional

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  um número irracional, conseqüentemente,  $\alpha^{-1}$  é seu inverso. Suponha que  $\alpha^{-1}$  não seja um número irracional, isto é, existe um  $a \in \mathbb{Z}$  e um  $b \in \mathbb{N}^*$ , tal que

$$\alpha^{-1} = \frac{a}{b},$$

elevando a  $-1$  ambos os membros da igualdade anterior, obtemos

$$\alpha = \frac{b}{a}.$$

O que é um absurdo, pois por hipótese temos que  $\alpha$  é um número irracional, sendo assim, não pode ser uma razão de inteiros. logo, o absurdo foi gerado por termos suposto que  $\alpha^{-1}$  era racional, daí,  $\alpha^{-1}$  é irracional. ■

**Situação-problema 1** (amigo secreto). *É comum no Brasil em épocas festivas como o natal grupos de pessoas realizarem a brincadeira do amigo secreto, que consiste em colocarem em um recipiente todos os nomes dos envolvidos e um a um pega um papel com um determinado nome, de modo que o papel com um respectivo nome que cada um pegar ficará secreto em relação aos demais, há de frisar que a brincadeira tem por regra inicial não ter a si mesmo como amigo secreto. No entanto, como se trata de uma escolha aleatória há a possibilidade de um indivíduo pegar seu próprio nome, em caso afirmativo, o papel retorna para o recipiente fazendo uma nova escolha e pode ocorrer o evento da pessoa pegar seu próprio nome novamente, isso nos sugere levantar o seguinte questionamento: Qual a probabilidade disso acontecer?*

*A busca da resposta da questão anterior nos remete ao estudo de Permutações Caóticas, ou seja, às permutações em que nenhum objeto está no seu lugar primitivo. Cada sorteio define uma função  $f$  do conjunto das pessoas em si mesmo, na lei de correspondência  $f(x) = y$  significa que  $x$  deve presentear  $y$ . Atente-se que duas pessoas diferentes não podem tirar o mesmo amigo secreto, sendo assim, o sorteio é feito sem reposição e todas as pessoas receberão*

$n$	1	2	3	4	5	6
$P_n$	0,00000	0,50000	0,33333	0,37500	0,36667	0,36806

Tabela 1 – probabilidade dos sorteios bem sucedidos

um presente. Dessa forma  $f$  é uma bijeção do conjunto  $A$  das  $n$  pessoas sobre si mesmo, em símbolos

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow A \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

Segue que uma pessoa será amiga de si mesma quando  $f(x) = x$ , quando isso ocorrer o  $x$  será chamado de ponto fixo de  $f$ .

A partir do exposto nossa solução se direciona em saber dentre as  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  permutações dos elementos de  $A$ , quantas são as que têm pontos fixos. Observe que as permutações que tem pontos fixos são os sorteios fracassados e as que não têm pontos fixos são os sorteios bem sucedidos, onde estes casos são as chamadas permutações caóticas.

A priori seja  $D_n$  o número de permutações caóticas de  $n$  elementos, segue que  $D_1 = 0$ , pois não há outros elementos para serem permutados;  $D_2 = 1$ , pois com os elementos  $(1, 2)$  só podemos obter a permutação caótica 21;  $D_3 = 2$ , pois com os elementos  $(1, 2, 3)$  obtemos as permutações caóticas 231 e 312;  $D_4 = 9$ , pois com os elementos  $(1, 2, 3, 4)$  obtemos as permutações caóticas 2143, 3142, 3241, 4123, 3412, 2413, 2341, 3421 e 4321.

De modo geral temos que

$$D_n = n! \left[ \frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Dessa forma, a probabilidade ( $P_n$ ) do sorteio bem sucedido é dada por

$$P_n = \frac{D_n}{n!} = \frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Fazendo um análise da tabela 1, atente-se que os valores de  $P_n$  crescem (cada vez menos) quando  $n$  passa de ímpar para par, e diminuem (cada vez menos) quando  $n$  passa de par para ímpar, daí, isso sugere que  $P_n$  tende a um certo valor. Com efeito, esse valor é justamente o número irracional  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ , lançando mãos a uma calculadora o leitor verá que  $\frac{1}{e} \approx 0,36788$ .

Logo, podemos dizer que a probabilidade do sorteio ser bem sucedido é de aproximadamente 37% e do sorteio ser fracassado é de aproximadamente 63% (para maiores detalhes sugerimos ao leitor as obras [19] e [20])

**Teorema 4.4.** Se  $Q$  é um racional positivo, não inteiro, então  $Q^Q$  é irracional.

*Demonstração.* Seja  $Q = \frac{a}{b}$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}_+^*$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , suponhamos que  $Q^Q$  seja racional, isto é,  $Q^Q = \frac{m}{n}$ , onde o  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Segue que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{m}{n},$$

elevando ambos os membros a  $b$ , obtemos

$$\frac{a^a}{b^a} = \frac{m^b}{n^b},$$

o que equivale a

$$a^a \cdot n^b = b^a \cdot m^b,$$

daí,  $m^b \mid a^a \cdot n^b$  e como  $\text{mdc}(m, n) = 1$  implica que  $m^b \mid a^a$ , além disso, temos que  $a^a \mid b^a \cdot m^b$ , mas  $\text{mdc}(a, b) = 1$  o que acarreta em  $a^a \mid m^b$ . Por conseguinte  $a^a = m^b$ , consequentemente,  $b^a = n^b$ .

Atente-se que  $b \neq 1$ , pois  $Q \notin \mathbb{Z}$ , acarreta que existe um primo  $p$ , tal que  $b = p^r k$  com  $r \geq 1$  e  $p \nmid k$ . Pela relação  $b^a = n^b$ , obtemos

$$(p^r k)^a = n^b$$

de onde segue que

$$p^{r \cdot a} \cdot k^a = n^b,$$

que é uma igualdade de inteiros, sendo assim, devem ter a mesma decomposição em fatores, daí,  $n$  apresenta uma quantidade inteira  $s \geq 1$  de fatores primos  $p$  de modo que

$$p^{r \cdot a} = p^{s \cdot b},$$

que acarreta em

$$r \cdot a = s \cdot b$$

dividindo ambos os membros por  $b$ , conquistamos

$$\frac{r \cdot a}{b} = s$$

observe que  $b \mid r \cdot a$ , pois no segundo membro temos um inteiro  $s$ , ora, como  $b \neq 1$  e por hipótese  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $b \nmid a$ , sendo assim, tem-se que  $b \mid r$ , o que é um absurdo, pois  $b = p^r k \geq p^r > r$ . Logo, o absurdo se deve ao fato de ter suposto que  $Q^Q$  era racional, sendo assim, temos que  $Q^Q$  é irracional. ■

**Exemplo 9.**  $\left(\frac{2019}{2020}\right)^{\frac{2019}{2020}}$  é um número irracional.

**Teorema 4.5.** O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um irracional.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  um número irracional e  $r$  um racional não nulo, isto é,  $r = \frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}^*$  e  $b \in \mathbb{N}^*$ . Suponhamos que  $\alpha \cdot r$  seja racional, sendo assim, temos que

$$\alpha \cdot r = \frac{m}{n},$$

substituindo  $r = \frac{a}{b}$ , obtemos

$$\alpha \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{n},$$

o que acarreta em

$$\alpha = \frac{m \cdot b}{n \cdot a},$$

o que é um absurdo, pois os racionais são fechados em relação à multiplicação e por hipótese  $\alpha$  é irracional. Logo, o absurdo surgiu por termos suposto que  $\alpha \cdot r$  era racional, daí, temos que  $\alpha \cdot r$  é irracional. ■

**Exemplo 10.** *Todo triângulo equilátero de lado inteiro tem área irracional. Com efeito, a área de um triângulo equilátero de lado  $l \in \mathbb{N}$  é dada por  $\frac{l^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ .*

**Teorema 4.6.** *A soma ou subtração de número racional com um número irracional é irracional.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  um número irracional e  $r$  um número racional, isto é,  $r = \frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{N}^*$ . Suponhamos que o resultado seja racional, daí, existem  $m$  e  $n$  inteiros, tal que

$$\alpha \pm r = \frac{m}{n},$$

dos fatos elencados na hipótese, conquistamos

$$\alpha \pm \frac{a}{b} = \frac{m}{n},$$

de onde segue que

$$\alpha = \frac{m}{n} \mp \frac{a}{b}.$$

O que é absurdo, pois por um lado temos  $\alpha$  irracional e por outro lado temos um número racional, dado que este conjunto é fechado em relação à soma e subtração. logo, temos que o resultado de  $\alpha + r$  é irracional. ■

Observe que o número  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é um caso particular desse teorema.

**Exemplo 11.** *Todo pentágono regular que apresenta como medida do lado um número racional tem sua diagonal com medida irracional. De fato, observe na Figura 8 o pentágono regular de lado  $l$  e diagonal  $d$ , onde o triângulo ACE é semelhante ao triângulo FEA, sendo assim, temos que*

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}.$$

Atente-se que

$$\overline{AE} = l,$$

$$\overline{CE} = d,$$

$$\overline{FA} = \overline{AC} - \overline{CF} = d - l.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\frac{l}{d-l} = \frac{d}{l},$$

daí, conquistamos que

$$d^2 - ld - l^2 = 0.$$

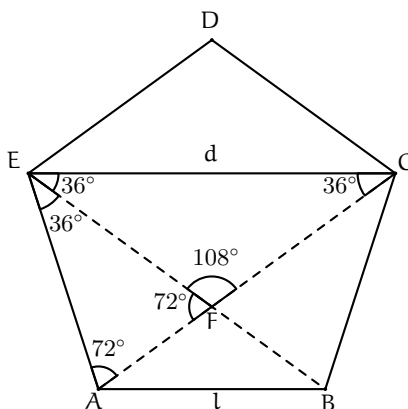


Figura 8 – Pentágono regular.

Por conseguinte, ao resolvermos a equação do segundo grau na incógnita  $d$ , resulta em

$$d = \frac{l(1 + \sqrt{5})}{2},$$

que é o produto de um racional ( $l$ ) por um irracional, consequentemente,  $d$  é um número irracional.

**Teorema 4.7.** Se  $a > 1$  é um inteiro positivo que não é múltiplo de 10 (dígito das unidades diferente de zero), então  $\log a$  é irracional.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\log a$  seja racional, ou seja, existem inteiros  $m$  e  $n$ , tal que

$$\log a = \frac{m}{n},$$

o que equivale a termos

$$10^{\frac{m}{n}} = a,$$

elevando ambos os membros a potência  $n$ , obtemos

$$10^m = a^n,$$

o que é um absurdo. Com efeito,  $10^m = 2^m \cdot 5^m$  é provido apenas de fatores primos 2 e 5, mas  $a^n$  por não ser múltiplo de 10 terá em sua decomposição a ausência de 2 ou 5, sendo assim, a igualdade contraria o teorema fundamental da aritmética. A contradição se deu por termos suposto que  $\log a$  seria racional, com  $a > 1$  e não divisível por 10, consequentemente, o número em destaque é irracional. ■

**Situação-problema 2** (Escala Richter). *Muitos lugares no mundo é acometido por abalos sísmicos ou terremotos, por exemplo, no dia 22 de março de 2020 a Croácia foi atingida por um terremoto de **magnitude** 5,3 (para maiores detalhes veja [21]). Atende-se que o tamanho de um terremoto é dado pela medida da sua magnitude, isso nos faz levantar o seguinte questionamento: Como é calculada a magnitude de um terremoto?*

A magnitude de um terremoto é calculada através de um escala que foi apresentada em 1935 por Charles F. Richter, na qual considerava o logaritmo decimal da amplitude máxima do registro sísmico. O cálculo é realizado através do seguinte algoritmo

$$M = \log A + 3 \log(8\Delta t) - 2,92$$

onde  $A$  representa a amplitude das ondas e  $\Delta t$  representa o tempo entre as ondas primárias (P) e secundárias (S). Destaca-se com esse algoritmo que a magnitude de um terremoto só será o valor de fato exposto à sociedade, um decimal exato (número racional), se houver uma combinação perfeita entre a amplitude ( $A$ ) e o tempo entre ondas P e S ( $\Delta t$ ) de modo que ambas sejam múltiplos de 10, pois caso contrário a magnitude de um terremoto será de fato um número irracional.

**Observação 4.** A análise do Teorema 4.7 pode ser estendida para outras bases de logaritmos usando a propriedades da mudança de base. Além disso sempre que a base do logaritmo e o logaritmando forem inteiros que apresentam pelo menos um fator primo diferente e logaritmo será irracional.

O lema a seguir será útil na demonstração do próximo teorema.

**Lema 4.2.** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos, então temos:

$$(a) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

$$(b) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

$$(c) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$(d) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor as Páginas 313-315 de [22] ■

**Teorema 4.8.** Se  $\theta$  for um ângulo, tal que  $\cos 2\theta$  é irracional, então  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  e  $\tan \theta$  também serão irracionais.

*Demonstração.* Dividiremos a nossa demonstração em casos, a saber

Caso I –  $\cos \theta$  é irracional:

Observe que do item (a) e (c) do Lema 4.2 conquistamos que  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ , daí, vamos supor que  $\cos \theta$  seja racional, sendo assim, temos que  $2 \cos^2 \theta - 1$  também é racional, o que é um absurdo, pois por hipótese  $\cos 2\theta$  é irracional.

Caso II –  $\sin \theta$  é irracional:

De forma análoga temos que  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ , supondo que  $\sin \theta$  seja racional, acarreta que  $1 - 2 \sin^2 \theta$  também é racional, o que é absurdo, pois por hipótese  $\cos 2\theta$  é irracional.

Caso III –  $\tan \theta$  é irracional:

Manipulando convenientemente os itens (c) e (d) do Lema 4.2 e de posse do conhecimento

de que  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ , obtemos  $\cos 2\theta = \frac{1}{\tan^2 \theta} - 1$ , supondo que  $\tan \theta$  seja racional, implica em  $\frac{1}{\tan^2 \theta} - 1$  também ser racional, o que é um absurdo, pois por hipótese  $\cos 2\theta$  é irracional. ■

**Observação 5.** Este teorema nos condiciona a obtermos uma infinidade de números irracionais na forma trigonométrica.

**Situação-problema 3** (Pentágono regular). De acordo com [17] a construção do pentágono regular desempenhou papel importante no cálculo de elementos das tabelas trigonométricas gregas. A construção do mesmo através dos métodos euclidianos (usando somente régua e compasso) para a época não era uma atividade simples.

A estratégia é buscar construir um ângulo de  $72$ , pois este é o ângulo central do pentágono. No entanto, a forma mais engenhosa para tais fins é construir um ângulo de  $36 = \frac{72}{2}$  (ângulo central do decágono regular), devido às propriedades agradáveis do triângulo central AOB veja Figura 9.

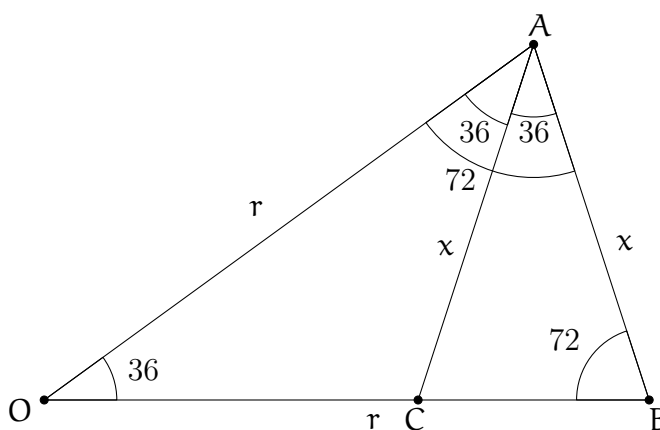


Figura 9 – Triângulo central do decágono regular.

Em relação às medidas,  $\hat{A} = \hat{B} = 72$ , pois o triângulo AOB decorre de um decágono regular inscrito em um círculo de raio  $r$ , daí, o mesmo é isósceles de vértice  $O$ . Com centro em  $A$  e raio  $AB = x$  construímos um círculo que intersecta  $OB$  em  $C$ , sendo assim, os triângulos BAC e AOC são também isósceles de base  $BC$  e  $AC$ , respectivamente. Dessa forma, temos que  $OC = x$  e  $BC = r - x$ , atente-se que o triângulo AOB é semelhante ao triângulo BAC (ângulos internos congruentes) e conseqüentemente temos que

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{r - x},$$

que equivale a

$$x^2 + rx - r^2 = 0.$$

Chegamos em uma equação do segundo grau na incógnita  $x$ , cujas soluções são  $x_1 = r \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  e  $x_2 = r \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ , mas como  $x$  é a medida de um segmento devemos desprezar a raiz negativa,



daí, segue que

$$x = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Observe agora o que acontece ao dividirmos o lado maior de AOB pelo lado menor, isto é,

$$\frac{r}{x} = \frac{r}{r \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

É isso mesmo que você está pensando, a razão áurea, triângulos com esta característica são denominados de triângulos áureos.

De posse das informações anteriores temos plenas condições de calcularmos o  $\cos 72$ , para tanto basta aplicarmos a lei dos cossenos no triângulo AOB (para maiores detalhes sobre lei dos cossenos sugerimos ao leitor o livro [23]). Segue que

$$r^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos 72,$$

manipulando algebricamente a equação anterior, obtemos

$$\cos 72 = \frac{x}{2r}.$$

De sorte que  $x = r \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , conquistamos que

$$\cos 72 = \frac{r \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2r}.$$

Por conseguinte, temos

$$\cos 72 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

O Teorema 4.1 nos garante que  $\cos 72$  é irracional e pelo Teorema 4.8 podemos obter uma infinidade de números irracionais trigonométricos, a saber

$$\begin{array}{lll} \cos 36 & \sin 36 & \tan 36 \\ \cos 18 & \sin 18 & \tan 18 \\ \cos 9 & \sin 9 & \tan 9 \\ \cos 430' & \sin 430' & \tan 430' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

## 4.2 Aproximação de Irracionais por Racionais

Como já foi definido no Capítulo 2 um número irracional é um decimal aperiódico, sendo assim, manipular com sua forma decimal é algo desfavorável, daí, o porquê de na geometria se manter os resultados na forma algébrica, pois como se trata de medida de segmento ao aproximar estaremos desconsiderando uma fatia do segmento (por menor que seja). No entanto, é sabido que em alguns tópicos na matemática faz-se necessário realizarmos aproximações, por exemplo, localização na reta numérica.

Uma aproximação é tida como boa, quando ao serem realizadas poucas iterações já podemos chegar em um erro pequeno. Nosso foco é fazer aproximações do nosso objeto de estudo, números irracionais, e isso se fará por números racionais, dado que o mesmo é denso em  $\mathbb{R}$ . Para tanto, devemos escolher um processo para tal finalidade, sendo assim, faremos uso das frações contínuas.

Cabe destacar que a abordagem subsequente tem por objetivo realizar uma transposição didática acerca das aproximações de irracionais por racionais a partir do estudo de frações contínuas, daí, o motivo de uma abordagem sem o rigor matemático que tal conteúdo exige, pois há teoremas de fundamental importância que nos asseguram as operações aqui explicitada. Contudo, sugerimos ao leitor o livro [24] para uma análise minuciosa das frações contínuas.

De acordo com [24] as frações contínuas sempre fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, e de fato fornece todas as aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural e conceitualmente simples.

A priori temos que dado qualquer  $\sigma \in \mathbb{R}$ , existe um único inteiro  $q \in \mathbb{Z}$  tal que

$$q \leq \sigma < q + 1,$$

denominada parte inteira de  $\sigma$  e denotado por  $\lfloor \sigma \rfloor = q$ . Em relação à parte fracionária de  $\sigma$ , esta é dada por  $\sigma - \lfloor \sigma \rfloor$  e denotada por  $\{\sigma\}$ , observe que  $\{\sigma\} \in [0, 1)$ , será nula caso  $\sigma$  for um inteiro.

**Definição 4.1** (Fração Contínua). *Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos recursivamente que*

$$\sigma_0 = x, \quad \text{onde } a_n = \lfloor \sigma_n \rfloor,$$

se  $\sigma_n \in \mathbb{Z}$  não há nada a fazer, mas no caso de  $\sigma_n \notin \mathbb{Z}$ , segue que

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{\sigma_n - a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em pormenores a definição 4.1 sugere um processo cíclico que poderá ser finito ou infinito, além disso, tal processo nos concede informações acerca do número real dado, sendo assim, devemos obter também a natureza aritmética do real, isto é, o pertencimento ao conjunto dos racionais ou ao conjunto dos irracionais. Ocorre que se o processo for finito teremos um número racional e se for infinito teremos um número irracional.

Atente-se que o valor fundamental em cada iteração na definição de frações contínuas será a parte inteira de  $\sigma_n$  ( $a_n$ ). Dessa forma, para uma melhor compreensão de tal processo segue o algoritmo:

1. Escolha o número real;
2. Destaque a parte inteira;
3. Realize a subtração do número escolhido pela sua parte inteira;

4. Pare se o resultado for zero e continue se o resultado for diferente de zero;
5. Inverte o resultado;
6. Retorne para o item 1.

De forma acurada temos que  $\alpha_0$  será a parte inteira do número real de entrada, daí,  $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1$  será a parte inteira do segundo número de entrada decorrente da primeira iteração do algoritmo,  $\alpha_2$  será a parte inteira do terceiro número de entrada decorrente da segunda iteração do algoritmo e sucessivamente. Diante do exposto temos que  $\alpha_n \in \mathbb{N}$  para  $n \geq 1$ , pois quando o número real escolhido é positivo, conseqüentemente, todos os  $\alpha_n$  serão positivos, no caso do número real ser negativo a parte inteira do mesmo será negativa ( $\alpha_0 < 0$ ), porém ao realizar o processo de subtração (item 3 do algoritmo) o resultado será não negativo, de modo, que os próximos número serão positivos. Veja na Figura 10 o processo de construção das frações contínuas aqui delineado para números positivos.

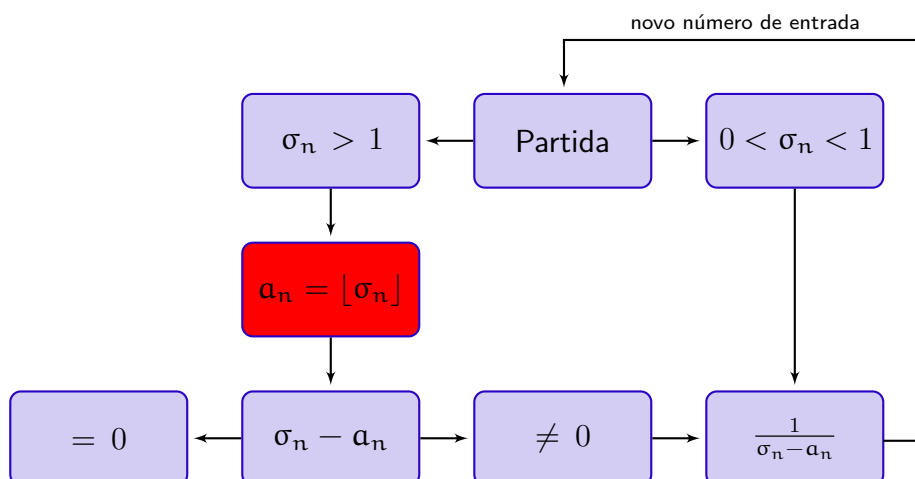


Figura 10 – Fluxograma de construção das frações contínuas.

Para o processo precedente há uma representação de forma compacta, a saber,

- Representação compacta finita (número racional):

$$x = \sigma_0 = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n].$$

- Representação compacta infinita (número irracional):

$$x = \sigma_0 = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots].$$

onde  $x = \sigma_0$  é o número real escolhido e como já explicitamos anteriormente  $\alpha_0$  é a parte inteira da primeira iteração,  $\alpha_1$  é a parte inteira da segunda iteração,  $\alpha_2$  é a parte inteira da terceira iteração e sucessivamente.

O professor deve ter percebido que estamos discorrendo sobre frações contínuas e até então não houve uma fração escrita, pois bem, por fins didáticos não lançaremos mãos à representação de frações sobre frações, comum no estudo de frações contínuas. A experiência do autor constata que ao apresentar tal estrutura para os discentes, os mesmos se mostram desmotivados e além disso no quadro branco tal representação não fica apresentável.

**Exemplo 12.** *Calculemos a fração contínua do racional  $1,66666\dots$  ou  $1,\overline{6}$ . Por definição temos*

$$\sigma_0 = 1,66666\dots,$$

*cuja parte inteira é dada por*

$$\alpha_0 = \lfloor \sigma_0 \rfloor = 1$$

*daí, segue que*

$$\sigma_0 - \alpha_0 = 1,\overline{6} - 1 = 0,\overline{6},$$

*observe que  $0,66666\dots$  pode escrito da seguinte forma*

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \dots,$$

*que se trata da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo  $\frac{6}{10}$  e razão  $\frac{1}{10}$ , sendo assim, a soma  $s$  é obtida por*

$$s = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9} \neq 0$$

*daí, pelo algoritmo devemos realizar uma nova iteração com inicial*

$$\sigma_1 = \frac{1}{\frac{6}{9}} = \frac{9}{6},$$

*de parte inteira*

$$\alpha_1 = \lfloor \sigma_1 \rfloor = 1$$

*segue que*

$$\sigma_1 - \alpha_1 = \frac{9}{6} - 1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

*devemos realizar uma nova iteração com valor inicial*

$$\sigma_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

*de parte inteira*

$$\alpha_2 = \lfloor \sigma_2 \rfloor = 2$$

*de modo que*

$$\sigma_2 - \alpha_2 = 2 - 2 = 0.$$

*Como o resultado da subtração foi zero, então o processo para e temos a fração contínua na forma compacta de  $1,\overline{6} = 1,66666\dots$ , a saber,*

$$1,\overline{6} = [1; 1, 2].$$

**Exemplo 13.** Calculemos a fração contínua do racional  $-2,25$ . Por definição, temos

$$\sigma_0 = -2,25$$

cuja parte inteira é dada por

$$\alpha_0 = \lfloor \sigma_0 \rfloor = -3$$

daí, segue que

$$\sigma_0 - \alpha_0 = -2,25 - (-3) = 0,75 \neq 0,$$

para simplicidade dos cálculos coloque  $0,75$  em sua forma fracionária que é  $\frac{3}{4}$ , dando continuidade ao algoritmo devemos realizar uma nova iteração com valor inicial

$$\sigma_1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3},$$

de parte inteira

$$\alpha_1 = \lfloor \sigma_1 \rfloor = 1$$

segue que

$$\sigma_1 - \alpha_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \neq 0$$

realizemos uma nova iteração com inicial

$$\sigma_2 = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

de parte inteira

$$\alpha_2 = \lfloor \sigma_2 \rfloor = 3$$

segue que

$$\sigma_2 - \alpha_2 = 3 - 3 = 0.$$

Como o resultado da subtração foi zero, então o processo de construção da fração contínua para e temos a forma compacta a seguir

$$-2,25 = [-3; 1, 3].$$

**Exemplo 14.** Calculemos a fração contínua de  $\sqrt{2}$ . Por definição temos

$$\sigma_0 = \sqrt{2},$$

cuja parte inteira é dada por

$$\alpha_0 = \lfloor \sigma_0 \rfloor = 1$$

daí, segue que

$$\sigma_0 - \alpha_0 = \sqrt{2} - 1 \neq 0$$

fazendo uma nova iteração com inicial

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1,$$

de parte inteira

$$\alpha_1 = \lfloor \sigma_1 \rfloor = 2$$

segue que

$$\sigma_1 - \alpha_1 = (\sqrt{2} + 1) - 2 = \sqrt{2} - 1 \neq 0,$$

com outra iteração de entrada

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

observe que  $\sigma_1 = \sigma_2$ , daí, chegamos em uma sequência periódica, conseqüentemente, os próximos  $\alpha_n$  já ficam determinados, isto,  $\alpha_n = 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ . Logo, a forma compacta da fração contínua de  $\sqrt{2}$  é

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

**Exemplo 15.** Calculemos a fração contínua de  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Por definição temos

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

cuja parte inteira é

$$\alpha_0 = \lfloor \sigma_0 \rfloor = 1,$$

segue que

$$\sigma_0 - \alpha_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \neq 0.$$

Devemos fazer outra iteração de entrada

$$\sigma_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

atente-se que  $\sigma_0 = \sigma_1$ , daí,  $\alpha_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por conseguinte, temos que a representação em fração contínua de  $\phi$  é

$$\phi = [1; 1, 1, 1, \dots].$$

Nos Exemplos 14 e 15 nos deparamos com dois irracionais cuja representação em frações contínuas são periódicas. No entanto, não podemos generalizar esta periodicidade para todos os irracionais, os irracionais que apresentam essa particularidade serão tratados no próximo capítulo. Devemos destacar que existem números que apresentam representação em frações contínuas de forma infinita e aperiódica, por exemplo,

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, 18, 1, \dots],$$

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, \dots].$$

De posse do conhecimento acerca da construção dos irracionais em frações contínuas, iremos delinear sobre o objeto de estudo dessa seção que é aproximar irracionais por racionais.

Dessa forma, iremos trabalhar com frações contínuas na forma finita que é a reduzida ou concentrada do irracional que queira aproximar, sendo assim, teremos a liberdade de truncar a fração contínua da forma que desejarmos, mas cabe destacar que quanto mais valores usarmos para a concentrada melhor será a aproximação.

A estratégia a ser seguida pelo professor é escolher o  $\alpha_n$  onde a fração contínua (forma compacta) será truncada, realizada tal escolha, pegue o inverso do  $\alpha_n$  e some ao  $\alpha_{n-1}$ , inverta o resultado e some ao  $\alpha_{n-2}$ , inverta o resultado e some ao  $\alpha_{n-3}$ , o processo finaliza com o inverso do resultado antecedente somado ao  $\alpha_0$ , encontrando a fração reduzida ou concentrada, veja a Figura 11.

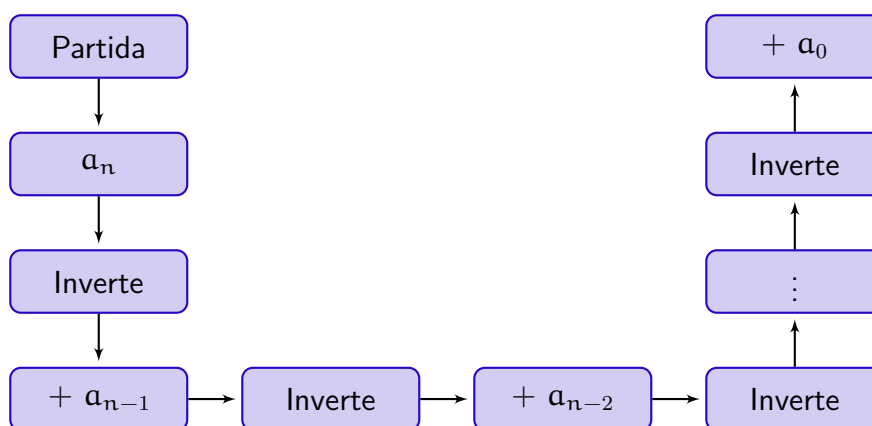


Figura 11 – Fluxograma para obter a fração reduzida.

**Exemplo 16.** Vamos obter a fração reduzida de  $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ , para tanto iremos truncar em  $\alpha_5$ , isto é, manipularemos com

$$[ \begin{array}{cccccc} 1; & 2, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{array} ].$$

Segue que

- $\frac{1}{\alpha_5} + \alpha_4 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2};$
- $\frac{1}{\frac{5}{2}} + \alpha_3 = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5};$
- $\frac{1}{\frac{12}{5}} + \alpha_2 = \frac{5}{12} + 2 = \frac{29}{12};$
- $\frac{1}{\frac{29}{12}} + \alpha_1 = \frac{12}{29} + 2 = \frac{70}{29};$
- $\frac{1}{\frac{70}{29}} + \alpha_0 = \frac{29}{70} + 1 = \frac{99}{70}.$

Conquistamos a fração reduzida  $\frac{99}{70}$  de  $\sqrt{2}$  truncada em  $\alpha_5$ . Observe que  $\frac{99 \cdot 3}{70 \cdot 3} = \frac{297}{210}$  que a razão utilizada na folha de papel A4 vista na Subseção 3.1.1 e como já foi visto o erro de aproximação é na ordem de centésimos de milésimos.

**Exemplo 17.** Calculemos a fração reduzida de  $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$ , truncando a representação em fração contínua em  $\alpha_6$ , daí, a expansão finita é

$$\begin{array}{ccccccc} [ & 1; & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{array} ] .$$

- $\frac{1}{\alpha_6} + \alpha_5 = \frac{1}{1} + 1 = 2;$
- $\frac{1}{2} + \alpha_4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2};$
- $\frac{1}{\frac{3}{2}} + \alpha_3 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3};$
- $\frac{1}{\frac{5}{3}} + \alpha_2 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5};$
- $\frac{1}{\frac{8}{5}} + \alpha_1 = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8};$
- $\frac{1}{\frac{13}{8}} + \alpha_0 = \frac{8}{13} + 1 = \frac{21}{13}.$

Para analisarmos o erro de aproximação de  $\phi$  por  $\frac{21}{13}$  iremos escrever tais valores até a ordem dos milésimos, isto é,  $\phi \approx 1,618$  e  $\frac{21}{13} \approx 1,615$ , daí, o erro está na ordem que escrevemos os valores. Atente-se que usar  $\frac{21}{13}$  não é uma boa aproximação racional, sendo assim, isso nos sugere usar mais  $\alpha_n$  da forma compacta, conseqüentemente iremos refazer as iterações. No entanto, os resultados que obtivemos nas iterações precedentes nos mostram a razão entre números que nos é familiar, isso mesmo amigo leitor, cada fração é a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

incrivelmente já podemos descobrir as próximas aproximações racionais sem precisar usar o algoritmo.

**Exemplo 18.** Já vimos anteriormente a representação em fração contínua da constante de euler ( $e$ ) e observe que a partir  $\alpha_2$  a mesma apresenta um padrão

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots],$$

facilitando a obtenção dos demais termos da forma compacta. Por conseguinte, iremos buscar aproximar  $e$  por um número racional, para tanto iremos truncar a fração contínua infinita em  $\alpha_5$ , daí, a expansão finita é dada por



$$\begin{array}{cccccc}
 [ & 2; & 1, & 2, & 1, & 1, & 4 & ] \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 
 \end{array}$$

Segue que

- $\frac{1}{\alpha_5} + \alpha_4 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4};$
- $\frac{1}{\alpha_4} + \alpha_3 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5};$
- $\frac{1}{\alpha_3} + \alpha_2 = \frac{5}{9} + 2 = \frac{23}{9};$
- $\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_1 = \frac{9}{23} + 1 = \frac{32}{23};$
- $\frac{1}{\alpha_1} + \alpha_0 = \frac{23}{32} + 2 = \frac{87}{32}.$

Por conseguinte, temos que uma aproximação racional para  $e$  é  $\frac{87}{32}$ , escrevendo ambos os valores até sua quarta casa decimal,  $e \approx 2,7182$  e  $\frac{87}{32} \approx 2,7187$ , observamos que o erro está na ordem de décimos de milésimo.

**Exemplo 19.** Analisemos uma aproximação racional para a constante irracional  $\pi$  que como é sabido tem a representação em fração contínua como

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots].$$

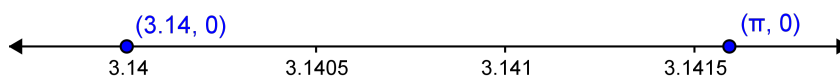
Para tanto iremos truncar a fração contínua infinita em  $\alpha_3$ , daí, usaremos a expansão finita

$$\begin{array}{cccc}
 [ & 3; & 7, & 15, & 1 & ] \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 
 \end{array}$$

Seque que

- $\frac{1}{\alpha_3} + \alpha_2 = \frac{1}{1} + 15 = 16;$
- $\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_1 = \frac{1}{16} + 7 = \frac{113}{16};$
- $\frac{1}{\alpha_1} + \alpha_0 = \frac{16}{113} + 3 = \frac{355}{113}.$

Para analisarmos o erro de aproximação de  $\pi$  por  $\frac{355}{113}$ , iremos escrever os valores até a sétima casa decimal, isto é,  $\pi \approx 3,1415926$  e  $\frac{355}{113} \approx 3,1415929$ , daí, conquistamos que tal erro está na ordem de centésimo de milionésimo. Dessa forma, fica nitidamente perceptível que a aproximação de  $\pi$  por  $\frac{314}{100} = 3,14$ , difundida nos livros didáticos, não é das melhores opções e ainda cabe destacar que do ponto de vista geométrico há uma perda considerável no comprimento de um segmento, veja a Figura 12.

Figura 12 – Distância entre  $\pi$  e 3,14.

Em relação à aproximação por  $\frac{355}{113}$ , na reta da Figura 12 um ponto no eixo  $x$  de coordenadas  $(\frac{355}{113}, 0)$  estaria praticamente superjusto ao ponto de coordenadas  $(\pi, 0)$ , para conseguirmos perceber a distância entre eles seria necessário dá um *zoom* ainda maior no eixo  $x$ .

Sugerimos ao leitor o uso software *GeoGebra* para que sejam feitas as análises acerca dos erros de aproximações sob a ótica da geometria junto aos discentes em sala de aula.

Quando nos referimos às aproximações de imediato somos levados a tomar uma primeira decisão que é aproximar por valores menores (pela esquerda) ou por valores maiores (pela direita). Nos exemplos aqui elucidados tivemos que escolher em qual  $\alpha_n$  iria acontecer o truncamento das frações contínuas dos irracionais, nos Exemplos 16, 18 e 19 truncamos em um  $\alpha_n$  de ordem ímpar, daí, as aproximações se deram pela direita, já no Exemplo 17 truncamos em um  $\alpha_n$  de ordem par e a aproximação se deu pela esquerda, esse processo pode ser generalizado, isto é, as frações reduzidas alternam de esquerda para direita à medida que alternam a ordem do truncamento de par para ímpar.

O que é fundamental nas aproximações aqui aclaradas é ter de imediato a representação em frações contínuas do número que se queira aproximar, mas em diversos casos o processo de obtenção de tal representação pode ser um tanto trabalhoso. Pensando na agilidade do professor em sala de aula, no Apêndice B há o detalhamento de como obter frações contínuas através do software *Geogebra*.

Destaca-se com o estudo de aproximações via frações contínuas o grande número de manipulações com frações, dado que é um tópico na matemática no qual os discentes do ensino médio apresentam sérios equívocos, acredita-se que isso se deve ao fato das frações serem evitadas no nosso cotidiano, por exemplo, as frações geralmente são substituídas por outros termos, falamos em cinquenta centavos ao invés de um meio de real, falamos em 20% ao invés de um quinto de algo, falamos em uma fatia de pizza ao invés de um oitavo de pizza (pizza com 8 pedaços). Na matemática faz-se valer a ideia de que a prática é amiga da perfeição, daí, a importância de manipularmos as frações nas salas de aula com maior frequência.

## 5 Irracionais Algébricos e Transcendentes

Até então realizamos uma abordagem do conjunto dos números irracionais expondo suas propriedades dentro da teoria dos conjuntos e especificamos sua aritmética, ilustrando nesse processo com argumentos geométricos. No entanto, ainda não expusemos os irracionais através de uma roupagem algébrica, daí, faz-se necessário realizarmos uma análise do conjunto dos números reais particionado em algébricos e transcendententes com foco no nosso objeto de estudo, números irracionais.

Cabe destacar que a teoria explicitada no presente capítulo não é contemplada nos livros didáticos da educação básica, sendo assim, sugerimos ao professor fazer uso da mesma em projetos de extensão ou em programas de iniciação científica.

**Definição 5.1.** Um número complexo  $\alpha$  é dito **algébrico** sobre  $\mathbb{Q}$  se existir um polinômio  $P$  não nulo de coeficientes racionais ( $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ )

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

tal que  $P(\alpha) = 0$ . Um número complexo que não é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$  é dito **transcendente** sobre  $\mathbb{Q}$ .

Na definição de números algébricos foi utilizado os polinômios  $P$  de coeficientes racionais, isso se deve ao fato de termos números algébricos raízes de polinômios de coeficientes racionais. No entanto, cabe destacar que é possível manipular com polinômios de coeficientes inteiros, para tanto, basta multiplicar a equação resultante do polinômio de coeficientes racionais pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores dos coeficientes.

**Exemplo 20.** Todo número racional é algébrico. Com efeito, seja  $\alpha = \frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{N}^*$ , daí,  $\frac{a}{b}$  é raiz do polinômio  $P(x) = bx - a$ .

**Exemplo 21.** O número complexo  $i$  é algébrico. Com efeito, por definição temos que

$$i = \sqrt{-1},$$

elevando ao quadrado, obtemos

$$i^2 = -1,$$

somando 1 em ambos os lados, conquistamos que

$$i^2 + 1 = 0.$$

Dessa forma,  $i$  é raiz do polinômio  $P(x) = x^2 + 1$ .

Por simplicidade do texto diremos que um número real é algébrico, quando for algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ . Números não algébricos serão chamados de transcendentos.

A partição em algébricos e transcendentos é mais abrangente do que em racionais e irracionais, pois se estende ao conjunto dos números complexos. No entanto, como nosso foco é o conjunto dos números irracionais nos reportaremos na maioria dos casos ao conjunto  $\mathbb{R}$  e o uso dos números complexos terá por finalidade provar alguns teoremas que são fundamentais na identificação de um dado número ser irracional.

Com a partição aqui elencada é possível atacar problemas como não enumerabilidade dos irracionais e problemas de amplitude de conjuntos, mas parte desses tópicos requerem um arcabouço teórico que foge do escopo desse trabalho, recomendamos ao leitor os livros [8] e [25] para uma análise em pormenores. Cabe destacar que os teoremas que não tiverem as demonstrações explícitas nesse texto, se deve ao fato das mesmas fazerem incursões a resultados matemáticos que necessitam de uma análise minuciosa, podendo serem encontradas nas referências sugeridas no ambiente da demonstração.

No Exemplo 20 ficou claro que todo racional é algébrico, mas isso não implica que todos os irracionais serão transcendentos, isto é, existem irracionais que são algébricos e existem irracionais que são transcendentos, daí, segue o porquê desse capítulo, tecer asserções que nos possibilitem identificar a irracionalidade de um dado número alicerçados na teoria dos algébricos e transcendentos.

**Exemplo 22.**  $\sqrt{2}$  é um número algébrico, pois é raiz do polinômio  $P(x) = x^2 - 2$ .

De sorte que  $\sqrt{2}$  é irracional e também algébrico, devemos detalhar propriedades aritméticas sobre os algébricos. Para simplicidade na escrita convencionaremos a partir de então que  $\overline{\mathbb{Q}}$  representa o conjunto dos números algébricos e  $\mathbb{T}$  representa o conjunto dos números transcendentos.

**Teorema 5.1.** Dados  $\alpha$  e  $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ , temos:

- (i)  $\alpha \pm \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ ;
- (ii)  $\alpha \cdot \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ ;
- (iii)  $-\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ ;
- (iv) Se  $\alpha \neq 0$ , então  $\alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$ .

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor as Páginas 17-20 de [25]. ■

**Teorema 5.2.** O conjunto  $\overline{\mathbb{Q}}$  é enumerável.

*Demonstração.* Dado

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

o conjunto das raízes de  $P$  é denotada por  $\mathcal{R}_P$ . Observe que pelo teorema fundamental da álgebra  $\mathcal{R}_P$  tem no máximo  $n$  elementos. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe apenas uma quantidade enumerável de polinômios, em  $\mathbb{Q}[x]$ , com grau  $n$ . De fato, considere  $\mathbb{X}_n = \{Q \in \mathbb{Q}[x] : \partial Q = n\}$ .

Tome  $\psi : \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}^*}_{n+1 \text{ cópias}} \rightarrow \mathbb{X}_n$  dada por

$$\psi(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

De sorte que  $\psi$  é uma bijeção, conquistamos que  $\mathbb{X}_n$  é enumerável, pois como  $\mathbb{Q}$  é enumerável o produto cartesiano  $\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}^*$  também o é.

Definamos  $\mathcal{A}_n = \bigcup_{\partial P=n} \mathcal{R}_P$ , conseqüentemente, temos que  $\mathcal{A}$  é enumerável, pois é a união enumerável de conjuntos finitos. Agora é só observar que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n,$$

daí,  $\overline{\mathbb{Q}}$  é enumerável [8]. ■

**Corolário 5.1.** *O conjunto  $\mathbb{T}$  é não enumerável.*

*Demonstração.* A priori temos que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  e sabemos que  $\mathbb{R}$  é não enumerável, conseqüentemente,  $\mathbb{C}$  é não enumerável, pois caso contrário  $\mathbb{R}$  deveria ser enumerável. Por definição temos que  $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$ , ora, como o conjunto dos números complexos é não enumerável, segue que o mesmo não pode ser constituído apenas de algébricos que pelo Teorema 5.2 é enumerável, pois a união de conjuntos enumeráveis é enumerável, conseqüentemente, a parte complementar ( $\mathbb{T}$ ) é não enumerável. ■

**Teorema 5.3.** *Se um número real  $\alpha$  é transcendente, então é irracional.*

*Demonstração.* O resultado segue pela contrapositiva, pois ao negarmos a tese, que é ser irracional, temos os racionais que já é sabido serem algébricos, ou seja, negação da hipótese. ■

**Corolário 5.2.** *O conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

*Demonstração.* O resultado é imediato, pois o Corolário 5.1 nos garante  $\mathbb{T}$  não enumerável e o Teorema 5.3 assegura que  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{R}$  é constituído somente por irracionais. Por conseguinte os irracionais são não enumeráveis. ■

As asserções do presente capítulo até o momento nos mostram que se provarmos que um dado número é transcendente conquistamos também que o mesmo é irracional. Todavia, provar que um número é transcendente por vezes se apresenta de modo laborioso. No que tange à prova que um real algébrico é irracional o processo se apresenta acessível, inclusive como uma ferramenta facilitadora da transição da aritmética para álgebra, como veremos nos resultados subsequentes.

**Teorema 5.4.** *Sejam  $n > 1$  inteiro,  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio de coeficientes inteiros e  $p$  e  $q$  inteiros não nulos relativamente primos. Se  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , então:*

(a)  $p \mid a_0$  e  $q \mid a_n$ .

(b) Se  $P$  for mônico<sup>1</sup>, então as possíveis raízes racionais de  $P$  são inteiras.

(c)  $(p - mq) \mid P(m)$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Em particular,  $(p - q) \mid P(1)$  e  $(p + q) \mid P(-1)$ .

*Demonstração.*

(a) Da hipótese de que  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , conquistamos

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

multiplicando ambos os membros da equação anterior por  $q^n$ , obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (5.1)$$

daí, mantendo no primeiro membro somente o termo que depende de  $q$ , obtemos

$$a_0 q^n = p (-a_n p^{n-1} - \dots - a_1 q^{n-1}),$$

segue que  $p \mid a_0 q^n$  e conseqüentemente  $p \mid a_0$ , pois por hipótese  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .

Na equação (5.1) ao mantermos no primeiro membro somente o termo que depende de  $p$ , obtemos

$$a_n p^n = q (-a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_0 q^{n-1}),$$

e de forma análoga conquistamos que  $q \mid a_n p^n$  o que implica em  $q \mid a_n$ , pois o  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .

(b) é imediato a partir de (a).

(c) Como por hipótese  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , então

$$P(m) = P(m) - P\left(\frac{p}{q}\right),$$

de onde segue que

$$P(m) = (a_n m^n + \dots + a_1 m + a_0) - \frac{1}{q^n} (a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n),$$

multiplicando a equação anterior por  $q^n$ , obtemos

$$q^n P(m) = q^n (a_n m^n + \dots + a_1 m + a_0) - (a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n),$$

<sup>1</sup> Um polinômio é mônico quando o coeficiente líder  $a_n$  é igual a 1.

que ao associar os termos de mesmo coeficientes resulta em

$$q^n P(m) = a_n ((mq)^n - p^n) + \dots + a_1 q^{n-1} (mq - p),$$

no segundo membro temos uma soma de números inteiros em que há um fator em comum, a saber,  $(mq - p)$  que ao ser colocado em evidência fica multiplicado por outro inteiro  $r$ , daí, temos que

$$q^n P(m) = (mq - p) r$$

Dessa forma,  $(mq - p) \mid q^n P(m)$ , sendo assim,  $(mq - p) \mid q^n$  ou  $(mq - p) \mid P(m)$ . Atente-se que as propriedades do mdc (sugerimos ao leitor as Páginas 74-85 de [18]) nos asseguram que

$$\text{mdc}(p, q) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(mq - p, q) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(mq - p, q^n) = 1.$$

Segue que  $(mq - p) \nmid q^n$ , o que implica em  $(mq - p) \mid P(m)$ , conseqüentemente, para  $m = 1$  tem-se  $(p - q) \mid P(1)$  e para  $m = -1$  tem-se  $(p + q) \mid P(-1)$ .

■

**Exemplo 23.** Prove que  $\sqrt{2}$  é irracional.

*Prova.* Seja

$$\alpha = \sqrt{2}$$

elevando ao quadrado ambos os lados, obtemos

$$\alpha^2 = 2,$$

subtraindo 2 de ambos membros, segue que

$$\alpha^2 - 2 = 0.$$

Dessa forma, temos que  $\alpha$  é raiz de polinômio mônico de coeficientes inteiros

$$P(x) = x^2 - 2.$$

Portanto, se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , pelo Teorema 5.4  $\alpha \mid P(0) = -2$ , isto é, as possíveis raízes racionais de  $P$  são  $\pm 1$  ou  $\pm 2$ . Entretanto, calculando diretamente  $P(\pm 1)$  e  $P(\pm 2)$  obtemos que nenhum desses valores são iguais a zero, daí, segue  $\alpha = \sqrt{2}$  só pode ser irracional. ■

**Exemplo 24.** Prove que  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  é irracional.

*Prova.* Na Seção 3.2 já constatamos que  $\phi$  é raiz de um polinômio mônico de coeficientes inteiros

$$P(x) = x^2 - x - 1.$$

Portanto, se  $\phi \in \mathbb{Q}$ , pelo Teorema 5.4  $\phi \mid P(0) = -1$ , isto é, as possíveis raízes racionais de  $P$  são  $\pm 1$ . No entanto, calculando diretamente  $P(\pm 1)$  obtemos que nenhum desses valores são iguais a zero, daí, segue que  $\phi$  é irracional. ■

Na Seção 4.2 observamos que  $\sqrt{2}$  e  $\phi$  apresentaram suas representações em frações contínuas de forma comportada, isto é, são periódicas e observe que ao fazermos a análise dos mesmos como raiz de um polinômio  $P$ , constatamos que esses irracionais são também *quadráticos*, isto é, são raízes de um polinômio de grau 2 com coeficientes inteiros. Dessa forma, isso nos sugere investigar se há uma estreita relação entre tais constatações, para tanto, vejamos o teorema a seguir.

**Teorema 5.5.** *Se  $x$  é uma irracionalidade quadrática, isto é, se  $x$  é um irracional do tipo  $r \pm \sqrt{s}$ , com  $r, s \in \mathbb{Q}$  e  $s > 0$ , então a fração contínua de  $x$  é periódica.*

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor as Páginas 125-126 de [24]. ■

**Exemplo 25.** *Prove que a  $\sqrt[3]{2}$  é irracional.*

*Prova.* Seja

$$\alpha = \sqrt[3]{2},$$

elevando ao cubo ambos os membros, obtemos

$$\alpha^3 = 2,$$

subtraindo 2 de ambos os membros, segue que

$$\alpha^3 - 2 = 0.$$

Dessa forma, temos que  $\alpha$  é raiz de um polinômio mônico de coeficientes inteiros

$$P(x) = x^3 - 2.$$

Portanto, se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , pelo Teorema 5.4  $\alpha \mid P(0) = -2$ , isto é, as possíveis raízes racionais de  $P$  são  $\pm 1$  ou  $\pm 2$ . Entretanto, calculando diretamente  $P(\pm 1)$  e  $P(\pm 2)$  obtemos que nenhum desses valores são iguais a zero, daí, segue  $\alpha = \sqrt[3]{2}$  só pode ser irracional. ■

Na análise do Exemplo 25 o professor é remetido a um problema que durante muito tempo inquietou a mente dos matemáticos, em particular os geômetras, o problema consistia em duplicar um cubo, isto é, a partir do cubo unitário construir um outro cubo que tenha o volume igual ao dobro do volume do cubo unitário, de modo que isso fosse feito através dos métodos euclidianos (usando régua sem métrica e compasso), veja a Figura 13.

Dessa forma, o fundamental seria construir um segmento de medida  $\sqrt[3]{2}$ , pois seja  $V_{(1,1,1)}$  o volume do cubo unitário e  $V_{(\alpha,\alpha,\alpha)}$  o volume do cubo duplicado, daí, segue que

$$2 \cdot V_{(1,1,1)} = V_{(\alpha,\alpha,\alpha)},$$

o que equivale a

$$2 \cdot 1 = \alpha^3$$



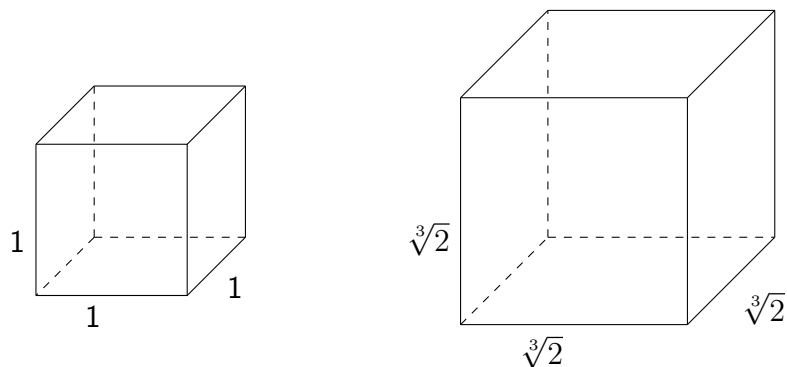


Figura 13 – Cubos duplicados.

resultando no nosso valor em questão que é

$$\alpha = \sqrt[3]{2}.$$

No entanto a construção do segmento de medida  $\sqrt[3]{2}$  é impossível e isso será ratificado pelo teorema a seguir.

**Teorema 5.6.** *Um número só será construtível se for algébrico, de grau igual a uma potência de 2.*

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor as Páginas 113-114 de [26]. ■

**Exemplo 26.** *Prove que  $\tan 10$  é irracional.*

*Prova.* A priori manipulando convenientemente os itens do Lema 4.2, obtemos que

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \tag{5.2}$$

sempre que  $\tan \alpha$ ,  $\tan \beta$  e  $\tan(\alpha \pm \beta)$  estiverem definidos. A estratégia é sempre deixar o irracional trigonométrico em função de outro irracional trigonométrico que se conheça de forma explícita sua representação, daí, deixaremos  $\tan 10$  em função de  $\tan 30$ , daí, aplicando sucessivamente o resultado da equação (5.2), obtemos que

$$\tan 30 = \frac{\frac{2 \tan 10}{1 - \tan^2 10} + \tan 10}{1 - \frac{2 \tan^2 10}{1 - \tan^2 10}}.$$

Seja

$$\alpha = \tan 10,$$

segue que

$$\tan 30 = \frac{\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + \alpha}{1 - \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}} = \frac{3\alpha - \alpha^3}{1 - 3\alpha^2}.$$

De sorte que  $\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , obtemos

$$\frac{3\alpha - \alpha^3}{1 - 3\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

elevando ao quadrado ambos os membros, resulta em

$$\frac{(3\alpha - \alpha^3)^2}{(1 - 3\alpha^2)^2} = \frac{1}{3},$$

daí, conquistamos

$$3\alpha^6 - 27\alpha^4 + 33\alpha^2 - 1 = 0.$$

Dessa forma  $\alpha$  é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros

$$P(x) = 3x^6 - 27x^4 + 33x^2 - 1.$$

Portanto, se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , pelo Teorema 5.4  $\alpha = \frac{p}{q}$ , de modo que  $p \mid P(0) = -1$  e  $q \mid 3$ , daí, as possíveis raízes racionais de  $P$  são  $\pm 1$  ou  $\pm \frac{1}{3}$ . Entretanto, calculando diretamente  $P(\pm 1)$  e  $P(\pm \frac{1}{3})$ , obtemos que nenhum desses valores são iguais a zero, sendo assim, concluímos que  $\alpha = \tan 10$  é irracional. ■

**Exemplo 27.** Prove que  $\cos 20$  é irracional.

*Prova.* A partir do Lema 4.2, conquistamos que

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

daí, tomando  $\alpha = 20$ , obtemos

$$\cos 60 = 4 \cos^3 20 - 3 \cos 20.$$

Seja

$$\alpha = \cos 20,$$

segue que

$$\cos 60 = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

De sorte que  $\cos 60 = \frac{1}{2}$ , temos

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \frac{1}{2},$$

resultando em

$$8 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha - 1 = 0.$$

Dessa forma,  $\alpha$  é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros

$$P(x) = 8x^3 - 3x - 1.$$

Portanto, se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , pelo Teorema 5.4  $\alpha = \frac{p}{q}$ , de modo que  $p \mid P(0) = -1$  e  $q \mid 8$ , daí, as possíveis raízes racionais de  $P$  são  $\pm 1$ ,  $\pm \frac{1}{2}$ ,  $\pm \frac{1}{4}$  ou  $\pm \frac{1}{8}$ . Entretanto, calculando diretamente  $P(\pm 1)$ ,  $P(\pm \frac{1}{2})$ ,  $P(\pm \frac{1}{4})$  e  $P(\pm \frac{1}{8})$ , obtemos que nenhum desses valores são iguais a zero, sendo assim, concluímos que  $\alpha = \cos 20$  é irracional. ■

De posse dos resultados do Exemplo 27 podemos verificar que a trissecção geral de um ângulo pelos métodos euclidianos é impossível, pois um contraexemplo seria a trissecção do ângulo de 60. Trissectar um ângulo de 60 nos direciona a construir um ângulo de 20, o que, por sua vez, consiste em construir, a partir de um dado segmento unitário, um segmento de medida igual a  $\cos 20$ , para aclarar o procedimento descrito anteriormente, façamos um abordagem geométrica. Com efeito, consideremos um triângulo retângulo de base  $AB$  medindo 1 e os ângulos  $\hat{A} = 90$  e  $\hat{B} = 60$ , como na Figura 14. Marquemos no lado  $AC$  um ponto  $D$ , de modo que o ângulo  $\hat{ABD} = 20$ .

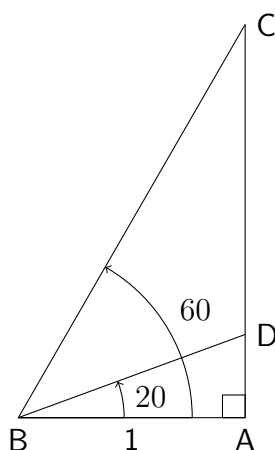


Figura 14 – Triângulo Retângulo

Dessa forma,

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AD}}{1} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \sec 20.$$

Portanto, para trissectar o ângulo de 60 seria necessário construir um segmento de medida igual a  $\sec 20$  que é recíproco de  $\cos 20$ , mas pelos métodos de construção euclidianos a construção de um número implica na construção do seu recíproco. No entanto,  $\cos 20$  é raiz de polinômio de coeficientes inteiros de grau igual a 3 e pelo Teorema 5.6 este número não é construtível.

Até então explicitamos uma teoria que nos condiciona julgar a irracionalidade somente de números algébricos, sendo assim, faz-se necessário tecermos argumentos dedutivos acerca de números transcendentos, conseqüentemente, irracionais. Diante do exposto, apresentamos a seguir um teorema que nos conduz à construção de tais argumentos.

**Definição 5.2.** Um conjunto de valores  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m\}$  são linearmente dependentes sobre um corpo  $A$ , se existirem  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ , não todos nulos, pertencentes a  $A$ , tal que

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \dots + \alpha_m\beta_m = 0.$$

Se por outro lado o único conjunto  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$  para os quais a igualdade acima é satisfeita for  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ , então dizemos que o conjunto de valores  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m\}$  são linearmente independentes.

**Teorema 5.7** (Hermite - Lindemann). *Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  são números algébricos distintos, então  $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$  são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor as Páginas 165-176 de [8]. ■

De acordo com [8] o Teorema de Hermite - Lindemann é um dos mais importantes resultados da Teoria dos Transcendentes, pois dele pode-se deduzir a transcendência de vários números relacionados com as necessárias funções exponencial, logaritmo e funções trigonométricas.

**Exemplo 28.** *Prove que se  $\alpha$  é algébrico não nulo, então  $e^\alpha$  é transcendente.*

*Prova.* Suponha que  $e^\alpha$  seja algébrico, isto é, que seja raiz de um polinômio  $P \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ , daí, segue que

$$a_n e^{\alpha n} + \dots + a_1 e^\alpha + a_0 = 0,$$

mas observe que tal resultado contraria o Teorema 5.7 por ser uma combinação linearmente dependente. Logo,  $e^\alpha$  é transcendente (irracional). ■

**Observação 6.** *Na conformidade do Exemplo 28 se tomarmos  $\alpha = 1$  conquistamos a transcendência também da constante de euler,  $e$ .*

**Lema 5.1** (Fórmula de Euler). *Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

onde  $i$  é unidade imaginária de um número complexo, isto é,  $i^2 = -1$ .

*Demonstração.* Assumiremos a veracidade da forma restrita da série de Taylor, série de Maclaurin, como segue

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Decorre que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (5.3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (5.4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (5.5)$$

Substituindo  $x = i\alpha$  na equação (5.3), obtemos

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \frac{i\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^8}{8!} + \frac{i\alpha^9}{9!} + \dots$$

organizando convenientemente, temos

$$e^{i\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \dots\right) + i \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \dots\right),$$

daí, pelas equações (5.4) e (5.5), concluímos que

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

■

**Exemplo 29.** Prove que  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  e  $\tan \alpha$  são transcendentos, para todo  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ .

*Prova.* Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, aplicando  $-\alpha$  na Fórmula de Euler, temos

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Dessa forma, conquistamos que

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \alpha - i \sin \alpha,$$

daí,

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2(\cos \alpha)e^0 = 0.$$

Portanto, se supormos que  $\cos \alpha$  é algébrico, então pelo Teorema 5.7 teríamos que

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2(\cos \alpha)e^0 \neq 0,$$

o que é um absurdo, sendo assim,  $\cos \alpha$  é transcendente (irracional).

Os resultados para  $\sin \alpha$  e  $\tan \alpha$  seguem de forma análoga, tendo em vista que

$$2i(\sin \alpha)e^0 - e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 0$$

e

$$(i \tan \alpha - 1)e^{i\alpha} + (i \tan \alpha + 1)e^{-i\alpha} = 0.$$

■

**Exemplo 30.** Prove  $\cosh \alpha$ ,  $\sinh \alpha$  e  $\tanh \alpha$  são transcendentos, para todo  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ .

*Prova.* De sorte que a função hiperbólica

$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2},$$

segue que

$$2(\cosh \alpha)e^0 - e^\alpha - e^{-\alpha} = 0.$$

Portanto, se supormos que  $\cosh \alpha$  é algébrico, então pelo Teorema 5.7 teríamos que

$$2(\cosh \alpha)e^0 - e^\alpha - e^{-\alpha} \neq 0,$$

o que é um absurdo, sendo assim,  $\cosh \alpha$  é transcendente (irracional).

Os resultados para  $\sinh \alpha$  e  $\tanh \alpha$  seguem de forma análoga, tendo em vista que

$$2(\sinh \alpha)e^0 - e^\alpha + e^{-\alpha} = 0$$

$$e$$

$$(\tanh \alpha - 1)e^\alpha + (\tanh \alpha + 1) = 0.$$

■

**Exemplo 31.** Prove que  $\pi$  é transcendente.

*Prova.* Aplicando  $\alpha = \pi$  na Fórmula de Euler, temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi,$$

o que resulta em

$$e^{i\pi} = -1,$$

de modo que ao somarmos 1 de ambos os membros da igualdade, obtemos

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (\text{Identidade de Euler}).$$

Portanto, se supormos que  $\pi$  é algébrico, então  $i\pi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ , daí, pelo resultado do Exemplo 28 temos que  $e^{i\pi}$  é transcendente, o que é um absurdo, pois  $e^{i\pi} = -1$ , sendo assim  $\pi$  é transcendente (irracional). ■

A transcendência de  $\pi$  revelou a impossibilidade da quadratura do círculo, isto é, construir pelos métodos euclidianos um quadrado com área igual à de um círculo dado, veja a Figura 15.

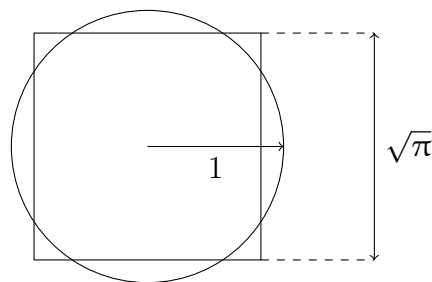


Figura 15 – Quadratura do Círculo

Com efeito, tomando um círculo de raio 1, segue que, sua área ( $A_C$ ) é dada por

$$A_C = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$

Seja  $l$  o lado de um quadrado, então sua área ( $A_Q$ ) é dada por

$$A_Q = l^2.$$

A partir dos resultados anteriores para que  $A_C = A_Q$  é necessário que

$$\pi = l^2,$$

daí, o problema da quadratura do círculo se submete à construtibilidade de

$$\sqrt{\pi} = l,$$

o que é impossível, pois como  $\pi$  é transcendente, então  $\sqrt{\pi}$  também o é, mas pelo Teorema 5.6 números transcendentos não são construtíveis com régua e compasso.

**Exemplo 32.** Prove que  $\ln \alpha$  é transcendente, para  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$  e  $\alpha \notin \{0, 1\}$ .

*Prova.* Suponha que  $\ln \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ , daí, pelo resultado do Exemplo 28  $e^{\ln \alpha}$  é transcendente. Entretanto, temos que

$$e^{\ln \alpha} = \alpha,$$

o que é um absurdo, pois por hipótese  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ , sendo assim,  $\ln \alpha$  é transcendente (irracional). ■

**Teorema 5.8** (Gelfond - Schneider). Se  $\alpha$  é um número algébrico diferente de 0 e 1,  $\beta$  um algébrico não racional. Então  $\alpha^\beta$  é transcendente.

*Demonstração.* Sugerimos ao leitor as Páginas 177-190 de [8]. ■

Segundo [25] o Teorema de Gelfond - Schneider solucionou o sétimo problema de Hilbert, que consistia em provar que  $2^{\sqrt{2}}$  era transcendente. Para Hilbert o ataque a esse problema pelos matemáticos do século XX contribuiria para o desenvolvimento salutar da Matemática.

**Exemplo 33.** Prove que  $4^{\sqrt{2}}$  é irracional.

*Prova.* Observe que 4 é algébrico e que  $\sqrt{2}$  é um irracional algébrico, daí, pelo Teorema 5.8  $4^{\sqrt{2}}$  é transcendente, conseqüentemente, um irracional. ■

**Exemplo 34.** Prove que  $e^\pi$  é transcendente.

*Prova.* Pela Identidade de Euler, temos que

$$e^{i\pi} = -1,$$

elevando ambos os lados ao simétrico da unidade imaginária,  $-i$ , obtemos

$$(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i},$$

de onde segue que

$$e^\pi = (-1)^{-i}.$$

Atente-se que no segundo membro temos um algébrico diferente de 0 e 1  $(-1)$  elevado a um algébrico não racional  $(-i)$ , daí, pelo Teorema 5.8  $(-1)^{-i}$  é transcendente, conseqüentemente,  $e^\pi$  também é transcendente. ■

## 6 Considerações Finais

Diante do que foi explicitado no presente trabalho fica nítida a viabilidade dos estudos acerca dos números irracionais na educação básica, principalmente no Ensino Médio, o que consequentemente impulsiona a aquisição de conhecimentos matemáticos a nível superior. Destaca-se ainda que foram atendidas as exigências da BNCC, pois o texto deixa claro que os números irracionais apresentam representação decimal infinita aperiódica e com as aproximações por racionais através de frações contínuas possibilita a localização de tais números na reta numérica.

Por conseguinte, o modo como o trabalho foi organizado com uma linguagem simples, com aplicações e exemplos que permeiam os currículos da educação básica e fazem incursões a diversos tópicos da matemática, tais como: a teoria dos conjuntos com seus entes fundamentais, a ideia de conjuntos fechados em relação a operações aritméticas, princípio da não contradição, progressões, teorema fundamental da aritmética, proporcionalidade, semelhança, matemática financeira, polígonos regulares, áreas, volumes, trigonometria, expressões aritméticas, polinômios, construtibilidade de números por métodos euclidianos, independência linear, dentre outros. Corroboram com cumprimento do nosso objetivo que é a construção de um material didático em que os professores possam a partir do mesmo perceber a importância dos números irracionais e realizar transposição didática para o uso em sala de aula dos números em destaque.

Faz-se necessário ressaltar que pesquisas realizadas pelo presente autor constatou que provar se um dado número é irracional através da teoria dos algébricos e transcendententes tem aplicação fundamental no Ensino Médio, pois conduzirá o discente a conhecer a natureza aritmética de diversos números e em paralelo aprimorará as técnicas de manipulações algébricas e cálculo de imagem de uma função polinomial, o que suaviza a transição da aritmética para a álgebra.

Em suma, temos a expectativa que este trabalho instigue o leitor a desenvolver pesquisas relacionadas ao Conjunto dos Números Irracionais, pois dessa forma estes números serão cada vez mais estudados em todos os níveis de ensino, consequentemente, aclarando o quão importantes são para a Matemática, rompendo a ideia deste conjunto ser coadjuvante do conjunto dos números racionais, dado que ambos são fundamentais para a análise real.



# Referências

- 1 REZENDE, V. *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Maringá, 2013. 9
- 2 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. 600 p. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 24 abr. 2020. 9
- 3 LIMA, E. L. *Curso de análise*. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. v. 1. 431 p. (Projeto Euclides, v. 1). ISBN 978-85-244-0118-3. 10, 12, 13, 15, 16
- 4 DOERING, C. I. *Introdução à Análise Matemática na Reta*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 580 p. (Coleção Textos Universitários, 17). ISBN 978-85-8337-035-2. 10, 13, 15, 18, 32
- 5 NETO, A. C. M. *Números Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1. 235 p. (Tópicos de Matemática Elementar, 24). ISBN 978-8585818-56-2. 10
- 6 LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P. *Coordenadas no plano*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 336 p. (Coleção do Professor de Matemática, 05). ISBN 978-85-85818-04-3. 10
- 7 LIMA, E. L. *Análise Real*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. v. 1. 198 p. (Coleção Matemática Universitária, v. 1). ISBN 978-85-244-0048-3. 10, 13
- 8 MARQUES, D. *Teoria dos Numeros Transcendentes*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 223 p. (Coleção Textos Universitários, 14). ISBN 978-85-85818-78-4. 17, 36, 59, 60, 67, 70
- 9 MENGUE, J. K.; RIPOLL, C. C. Introdução aos números normais. In: *2<sup>o</sup> Colóquio de Matemática da Região Sul*. [S.l.]: IMPA, 2012. 17
- 10 JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 321 p. (Coleção Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0414-6. 20
- 11 IVAN, N. *Números: racionais e irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 1990. 175 p. (Coleção Iniciação Científica, 02). ISBN 978-85-85818-68-5. 21
- 12 HELLMEISTER, A. C. P. *Geometria em Sala de Aula*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 550 p. (Coleção do Professor de Matemática). 24
- 13 NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: introdução à análise funcional*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 3. 331 p. (Coleção Professor de Matemática, 26). ISBN 978-85-8337-007-9. 28, 31
- 14 MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 294 p. (Coleção PROFMAT, 12). ISBN 978-85-8337-034-5. 28
- 15 MAOR, E. e: *A História de um Número*. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. ISBN 978-85-01-05847-8. 31

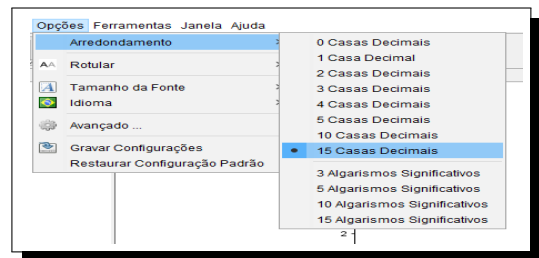
- 16 MATEMATICA ganha um dia para chamar de seu: 14 de março. 2019. IMPA. Disponível em: <https://impa.br/noticias/a-matematica-ganha-um-dia-todo-seu-14-de-marco/>. Acesso em: 17 abr. 2020. 31
- 17 AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. (Coleção do Professor de Matemática, 18). ISBN 978-85-85818-95-1. 32, 47
- 18 HEFEZ, A. *Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p. (Coleção PROFMAT, 8). ISBN 978-85-8337-105-2. 40, 62
- 19 CARNEIRO, J. P. O problema do amigo oculto. *Revista do Professor de Matemática*, n. 28, 2008. 42
- 20 MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 338 p. (Coleção Professor de Matemática, 2). ISBN 978-85-8337-077-2. 42
- 21 TERREMOTO de Magnitude 5,3 Atinge a Croácia e Deixa um Morto. 2020. G1. Disponível em: <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2020/03/22/terremoto-de-magnitude-53-atinge-a-croacia.ghtml>. Acesso em: 22 mar. 2020. 45
- 22 NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 2. 464 p. (Coleção Professor de Matemática, 25). ISBN 978-85-85818-84-5. 46
- 23 CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria/ Números Complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 171 p. (Coleção do Professor de Matemática, 6). ISBN 978-85-85818-08-1. 48
- 24 MARTINEZ, F. E. B. et al. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 497 p. (Coleção Projeto Euclides). 49, 63
- 25 FIGUEIREDO, D. G. de. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 66 p. (Coleção de Iniciação Científica, 1). ISBN 978-85-85818-18-0. 59, 70
- 26 GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 194 p. (Coleção Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0108-4. 64

# APÊNDICE A – Aproximação de $\pi$ via Geogebra

Segue o passo a passo da aproximação do comprimento do círculo por polígonos regulares, por falta e excesso, no software GeoGebra, conseqüentemente, aproximação de  $\pi$ .

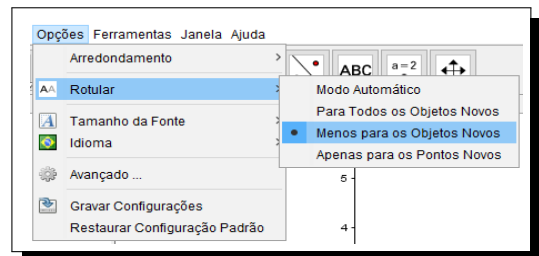
## 1º passo:

1. Barra de menu;
2. Opções;
3. Arredondamento;
4. 15 casas decimais.



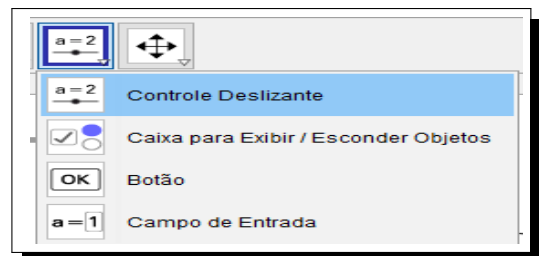
## 2º passo:

1. Barra de menu;
2. Opções;
3. Rotular;
4. Menos para Objetos Novos.



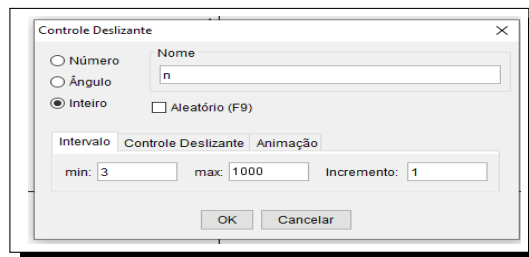
## 3º passo:

1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 11;
3. Controle Deslizante;
4. Clique em qualquer região do plano.



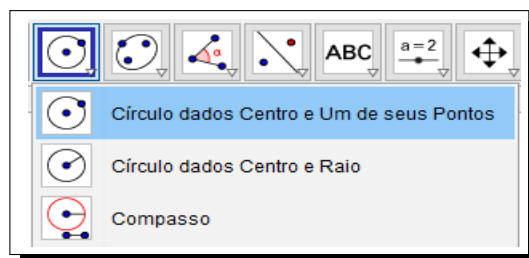
## 4º passo:

1. Aparecerá a Janela do Controle Deslizante;
2. Marque em Inteiro;
3. min: 3;
4. max: 1000.



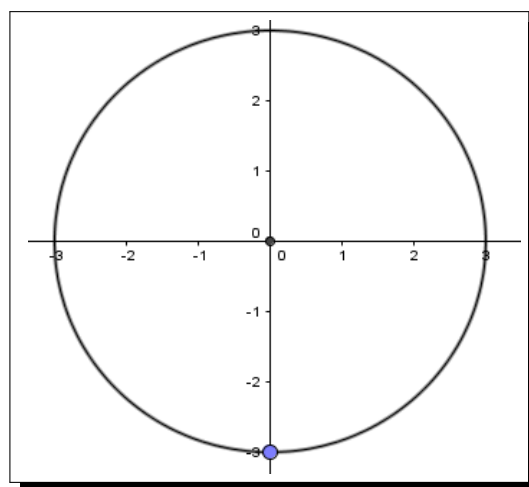
5º passo:

1. Barra de Ferramenta;
2. Janela 6;
3. Círculo dado Centro e Um de seus pontos.



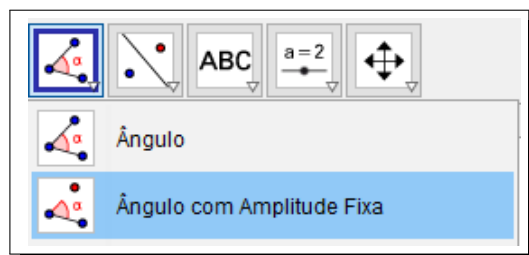
6º passo:

1. Clique no Centro do Plano Cartesiano;
2. Escolha um ponto do Eixo y;
3. A Distância do Centro ao Ponto Determina o Raio.



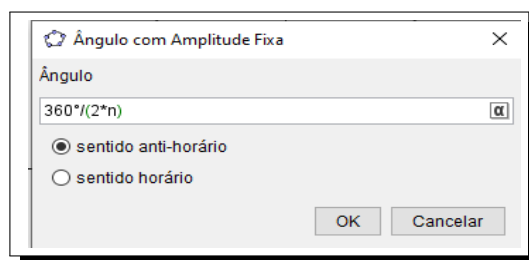
7º passo:

1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 8;
3. Ângulo com Amplitude Fixa;
4. Clique no Ponto Escolhido no Eixo y e no Centro.

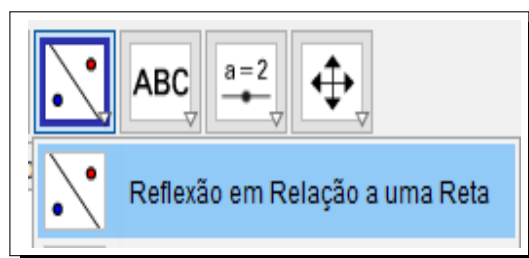


**8º passo:**

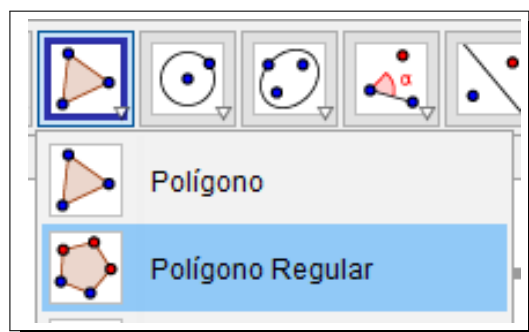
1. Janela Ângulo com Amplitude Fixa;
2.  $\hat{\text{Ângulo}} = 360/2 \cdot n$ ;
3. sentido anti-horário;
4. Aparecerá um ponto sobre o Círculo.

**9º passo:**

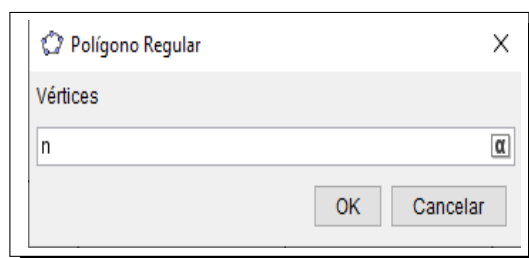
1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 9;
3. Reflexão em Relação a uma Reta;
4. Clique no Ponto que Apareceu no Círculo e no Eixo x.

**10º passo:**

1. Observe que Círculo tem Dois Pontos Refletidos;
2. Barra de Ferramentas;
3. Janela 5;
4. Polígono Regular;
5. Clique nos Dois Pontos Refletidos, sentido anti-horário.

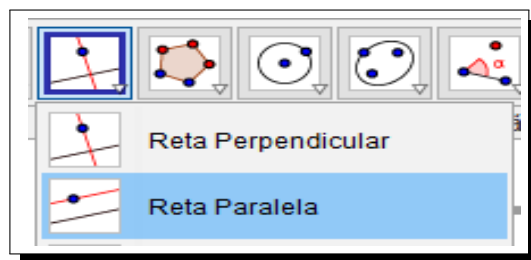
**11º passo:**

1. Janela Polígono Regular;
2. Vértices = n.

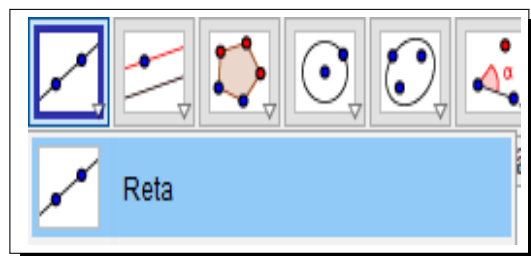


**12º passo:**

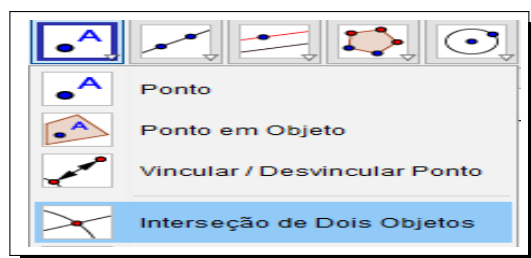
1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 4;
3. Reta Paralela;
4. Clique no Eixo x e no Ponto Escolhido Sobre o Eixo y no 6º passo.

**13º passo:**

1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 3;
3. Reta;
4. A Reta deve Passar pelo centro e Pelo Vértice do Polígono (inicialmente um triângulo).

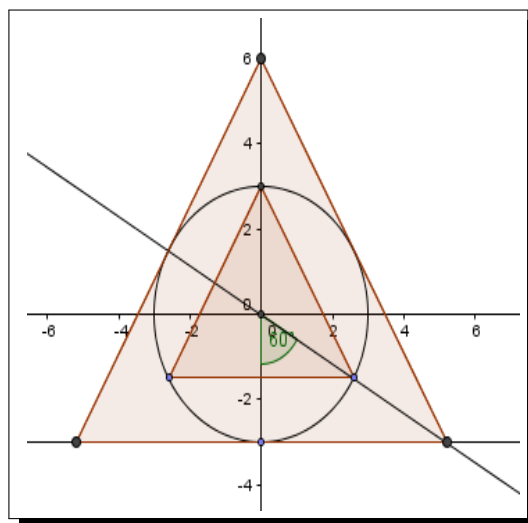
**14º passo:**

1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 2;
3. Interseção de Dois Objetos;
4. A Interseção será das Retas do 12º passo e do 13º passo.

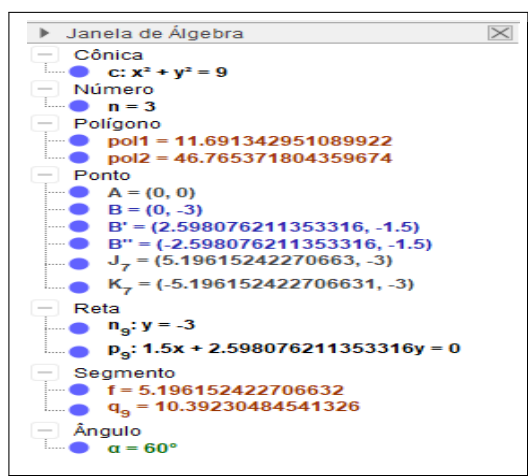


15<sup>o</sup> passo:

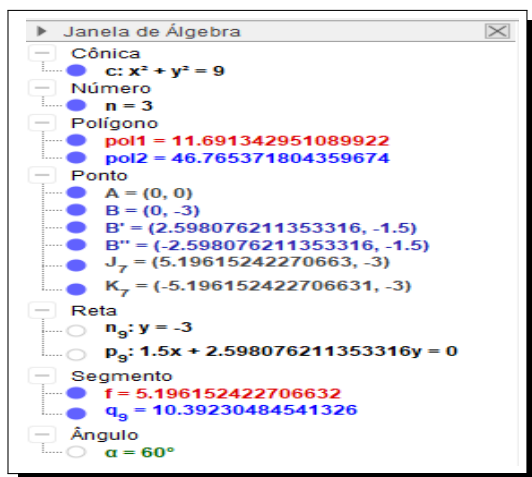
1. Faça a Reflexão do Ponto de Interseção do 14<sup>o</sup> passo em Relação ao Eixo y (veja o 9<sup>o</sup> passo);
2. Selecione Polígono Regular (veja 10<sup>o</sup> passo);
3. Clique nos Pontos aqui Refletidos, sentido anti-horário;
4. Na Janela de Polígono Regular Coloque Vértice igual a n (veja 11<sup>o</sup> passo), até o momento a construção deve está similar à figura ao lado.

16<sup>o</sup> passo:

1. Até Então a Janela de Álgebra Apresenta a Estrutura ao Lado.

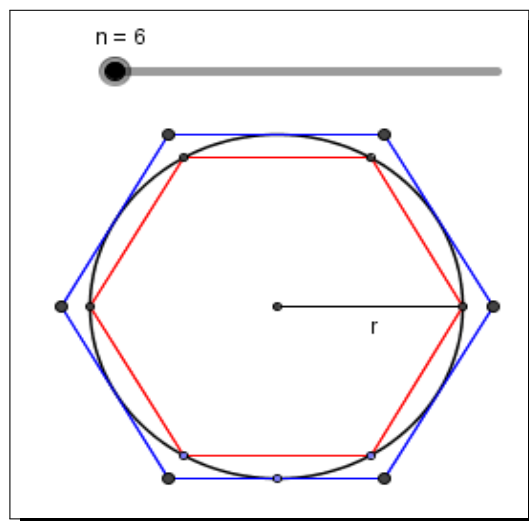
17<sup>o</sup> passo:

1. Desabilite as Retas, o Ângulo e os Eixos;
2. Altere as Cores dos Polígonos e Segmentos a seu Modo;
3. Para Alteração, Coloque o Cursor do Mouse Sobre o Objeto e Clique no Botão Direito do Mouse e Selecione Propriedades.



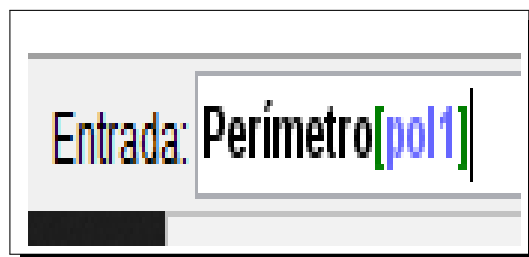
18º passo:

1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 3;
3. Segmento;
4. Ligue o Centro a um Ponto da Circunferência (raio);
5. Renomeie por r.



19º passo:

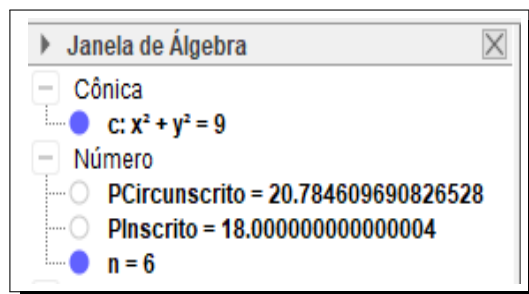
1. Barra de Entrada;
2. Digite a Função **Perímetro[pol1]**;
3. Digite a Função **Perímetro[pol2]**;



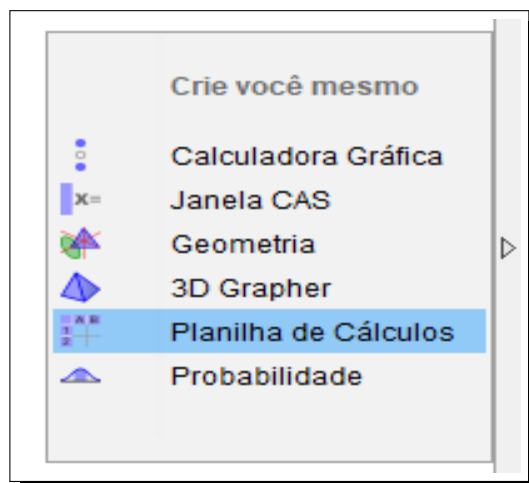


**20º passo:**

1. Os Perímetros Aparecerão na Janela de Álgebra na Seção Número;
2. O Leitor Poderá Renomear;
3. Aqui Renomeamos para PInscrito (perímetro do polígono inscrito) e PCircunscrito (perímetro do polígono circunscrito).

**21º passo:**

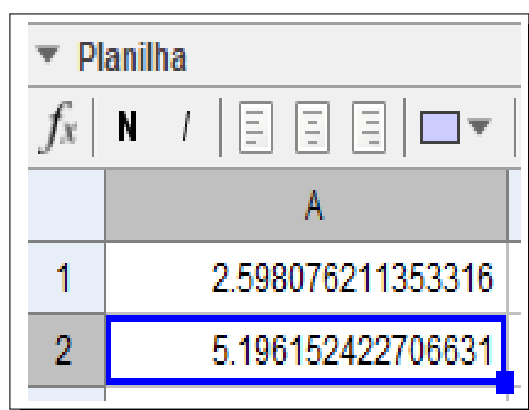
1. Observe que na Metade Lado Direito há uma Seta;



2. Planilha de Cálculo.

**22º passo:**

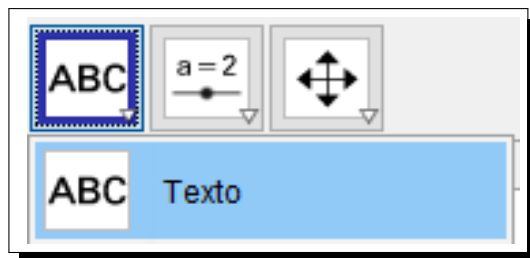
1. Digite na Célula A1 o comando:  
=PInscrito/(2\*r)



2. Digite na Célula A2 o comando:  
=PCircunscrito/(2\*r)

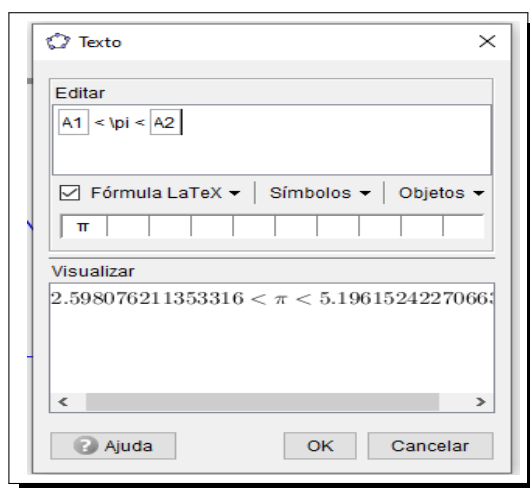
23º passo:

1. Barra de Ferramentas;
2. Janela 10;
3. Texto.



24º passo:

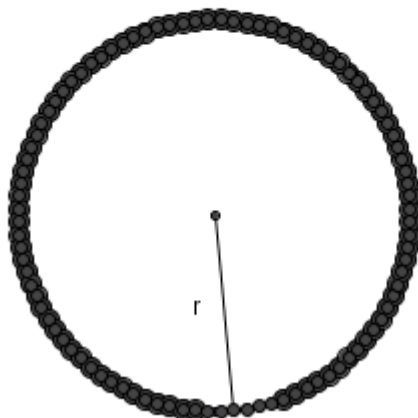
1. Janela de Texto;
2. Fórmula Latex;
3. Clique em Objetos;
4. Serão Selecionados os Objetos A1 e A2;
5. No campo editar:  $A1 < \pi < A2$ ;



Logo, temos através do software GeoGebra o método clássico de Arquimedes para aproximar o valor de  $\pi$ .

n = 96

$$3.141031950890512 < \pi < 3.14271459964537$$



# APÊNDICE B – Frações Contínuas via Geogebra

Como o Geogebra é um software de linguagem de programação em java, faz-se necessário esclarecer alguns comandos do mesmo que são de fundamental importância no estudo de frações contínuas.

Comando	Finalidade
.	tem a função da vírgula
*	multiplicação
/	divisão
^	exponencial
sqrt	raiz quadrada
RaizNÉsima	raiz enésima
sin	seno
cos	cosseno
tan	tangente

Para obter frações contínuas no Geogebra o comando a ser utilizado na barra de entrada é

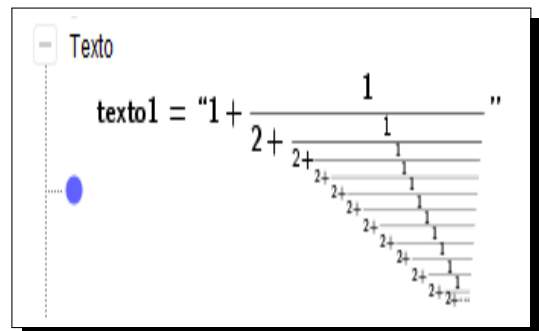
FraçãoContínua[< Número >]

**Exemplo 35.** Obter a fração contínua de  $\sqrt{2}$  no Geogebra.

Na barra de entrada digite o comando como na imagem ao lado.



Aparecerá no campo de visualização e também na janela de álgebra a fração contínua na forma tradicional, fração sobre fração, a saber



De posse do resultado da fração contínua na forma tradicional é possível escrever a mesma na forma reduzida, basta utilizar os inteiros que estão sendo somados às frações, como segue

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

O Geogebra também dá uma boa aproximação racional do número, para tanto na barra de entrada o comando a ser utilizado é

`FraçãoEmTexto[< Número >].`

No caso do  $\sqrt{2}$  a aproximação racional dada pelo programa é  $\frac{19601}{13860}$ , cujo erro está na ordem de décimo de bilionésimo.

De forma análoga ao que foi exposto no exemplo anterior, podemos obter a fração contínua de  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , através do comando

`FraçãoContínua[(sqrt(5) + 1) / 2]`

Quanto à aproximação racional dada pelo programa, basta inserir na barra de entrada o comando

`FraçãoEmTexto[(sqrt(5) + 1) / 2]`

que aparecerá a aproximação racional  $\frac{10946}{6765}$ , cujo erro está na ordem de centésimo de milionésimo.

Os comandos para a obtenção das frações contínuas da constante de euler ( $e$ ) e  $\pi$ , são

`FraçãoContínua[e]` e `FraçãoContínua[pi]`,

respectivamente. No que se refere às aproximações racionais dadas pelo programa, temos para  $e$  o número  $\frac{23225}{8544}$ , com erro está na ordem de décimo de bilionésimo e para  $\pi$  a aproximação dada é  $\frac{103993}{33102}$ , com erro na ordem de centésimo de bilionésimo.

**Exemplo 36.** Obter a fração contínua de  $\sqrt[3]{2}$  no Geogebra.

Para raízes enésimas usa-se o comando

`FraçãoContínua[RaizNÉsima( < x >, < n > )]`

onde  $n$  representa o índice da raiz e o  $x$  representa o radicando. Dessa forma o comando para obter a fração contínua de  $\sqrt[3]{2}$  é

`FraçãoContínua[RaizNÉsima( 2, 3)]`

obtemos a fração contínua na sua forma reduzida, como segue

$$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, \dots].$$

# APÊNDICE C – Lista de Exercícios

## Exercício 1.

O Hotel de Hilbert tinha um infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim-de-semana prolongado, o hotel estava com os seus quartos todos ocupados, quando chega um viajante. A rececionista vai logo dizendo:

–Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

–Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhora.

E ordena:

–Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim em diante. Quem tiver no quarto  $n$ , mude para o quarto  $n + 1$ . Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém-chegado.

a) Qual procedimento a rececionista deve fazer com a chegada de um ônibus com 30 passageiros?

b) Qual procedimento a rececionista deve fazer com a chegada de um trem com uma infinidade de passageiros?

## Exercício 2.

Julgue as afirmações a seguir em relação aos irracionais e se possível mostre contraexemplos.

a) Os números irracionais não podem ser expressos em forma fracionária.

b) Não existem irracionais entre 1 e 2.

c) Existem irracionais tanto quanto existem racionais.

d) Os irracionais tem representação decimal infinita e aperiódica.

e) O conjunto dos números irracionais é finito.

## Exercício 3.

Nos itens a seguir existe apenas um em que os números não são todos irracionais. Identifique qual é o item e avalie junto aos discentes a irracionalidade dos números em todos os itens.

I)  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$

II)  $\pi$ ;  $\phi$ ;  $e$

III)  $\sqrt[3]{9}$ ;  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ;  $(0,5)^{0,5}$

IV)  $\log 15$ ;  $4\sqrt{20}$ ;  $1, \overline{123}$

V)  $3^{\sqrt{3}}$ ;  $\sqrt{6}$ ;  $\pi$

## Exercício 4.

Sabendo que  $\sqrt{2}$  é quadrático, consequentemente, construtível pelos métodos euclidianos. Construa um segmento de comprimento  $\sqrt{2}$  usando apenas régua e compasso.

## Exercício 5.

Prove que se  $p$  é primo, então  $(1 + \sqrt{p})^n$  é irracional, para todo  $n \geq 1$ .

## Exercício 6.

Encontre alguns padrões para representações em frações contínuas de números decimais periódicos. Posteriormente busque aproximar irracionais por racionais.

## Exercício 7.

Prove que o número  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$  é irracional.