
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

**Proposta didática para o ensino
interdisciplinar: Matrizes e Óptica
Geométrica**

Arthur Alves de Oliveira

Orientador: Prof^a. Dr^a. Kelly Cristina Jorge Sakamoto

São José dos Campos-SP

Julho, 2020



PROFMAT

Título: *Proposta didática para o ensino interdisciplinar: Matrizes e Óptica Geométrica*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos-SP
Julho, 2020

Oliveira, Arthur Alves

Proposta didática para o ensino interdisciplinar: Matrizes e Óptica Geométrica, Arthur Alves de Oliveira – São José dos Campos-SP, 2020.

ix, 66f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Didactic proposal for interdisciplinary teaching: Matrices and Geometric Optics

1. Matemática. 2. Física 3. Interdisciplinaridade. 4. Matrizes. 5. Óptica Geométrica 6. Experimental

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de Departamento:

Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

ARTHUR ALVES DE OLIVEIRA

PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO
INTERDISCIPLINAR: MATRIZES E ÓPTICA GEOMÉTRICA

Presidente da banca: Prof^a. Dr^a. Kelly Cristina Jorge Sakamoto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rudimar Riva - ICT-UNIFESP

Prof^a. Dr^a Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita - ICT-UNIFESP

Prof. Dr. Nicolau André Silveira Rodrigues - IEAv-CTA

Data da Defesa: 31 de Julho de 2020

*"Presentemente eu posso me considerar um sujeito de sorte
Porque apesar de muito moço, me sinto são e salvo e forte ". - Belchior*

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida;

Aos meus pais Alberto e Adélia, meus irmãos André e Alessandro e minha irmã de coração Vanessa pelo apoio incondicional;

A professora Kelly pela parceria, ajuda e paciência em todo o processo;

Aos meus amigos Julio, Zé, Marina, Gisele, Robert, Felipe e Leonardo pela parceria nesses dois anos de curso, pelas sextas-feira de conhecimento, trocas, cafés, almoços e alegrias, que me faziam esquecer um pouco a correria da vida;

Aos professores não só pelo ensino da Matemática, mas pela inspiração e incentivo para ser um profissional e um ser humano melhor;

Ao Celso, que além de primo é um grande amigo, que me escutou, me ajudou e me incentivou nos últimos anos;

Aos professores Carlos Toffoli e Ligia Correa pelo incentivo, apoio e amizade nos últimos anos.

A todos os amigos, colegas e familiares que de alguma forma estiveram presentes em todo processo. Uma pequena ajuda é de imenso significado.

RESUMO

A luz e seu comportamento sempre foram alvos de diversos estudos e de muita discussão, até se concluir que a luz pode ter um comportamento ondulatório e corpuscular (partículas), que caracteriza a teoria da dualidade onda-partícula. Da interação da luz com a matéria podem ocorrer vários fenômenos ópticos, como a refração, reflexão, difração, absorção, dentre outros. O que os cientistas observaram que dependendo do fenômeno e da facilidade de melhor entendimento, pode-se escolher se quer explicá-lo, usando a luz como onda ou como partícula. Por exemplo, pela teoria ondulatória é possível entender o efeito de difração que a luz sofre ao passar por uma fenda (uma obstrução) usando o Princípio de Huygens, e bem demonstrada pelo experimento de fenda dupla de Young. Outro exemplo é quando a luz incide na superfície de um espelho, nesse caso ela pode ser tratada como partícula e como onda. Na situação em que o tamanho da abertura por onde o raio de luz é propagado é muito maior comparado com o comprimento de onda da luz usada, o efeito de difração pode ser negligenciado e assim, a óptica geométrica pode ser aplicada. Neste caso, o traçado de raios e as ferramentas de geometria são usados para determinar os parâmetros que formam o sistema óptico de imagem, como as distâncias dos planos objeto e imagem em relação à posição da lente e aos tamanhos do objeto nestes planos. A proposta didática deste trabalho explora a formação de imagem por um sistema óptico composto por uma ou mais lentes usando quatro formas diferentes utilizando a forma algébrica pela utilização da equação de lentes; a forma geométrica através do traçado de raios; de forma matricial pela aplicação das matrizes de transferência e a última forma com aulas prática, montando experimentalmente o sistema óptico. Desta forma, esta proposta relaciona a óptica geométrica (formação de imagens) e as matrizes para ser um ensino interdisciplinar de Física e Matemática. Diversos autores defendem a interdisciplinaridade no ensino de Matemática e Física, por conectar esses conteúdos e mostrar uma aplicação real da Matemática. Além disso o uso de atividades práticas interfere no ensino da Física, pois o aluno pode visualizar e compreender um conteúdo que se mostra, na maioria das vezes, abstrato. Então, espera-se que o ensino em conjunto de ambos conceitos pode oferecer uma contextualização nas aulas, melhorias no aprendizado do aluno e também a satisfação do professor colhendo os resultados positivos do seu trabalho.

Palavras-chave: 1. Matemática. 2. Física 3. Interdisciplinaridade. 4. Matrizes. 5. Óptica Geométrica 6. Experimental

A B S T R A C T

Light and its behavior have always been the subject of several studies and much discussion, until it has been concluded that light can have a wavy and corpuscular behavior (particles), which characterizes the theory of wave-particle duality. Various optical phenomena can occur from the interaction of light with matter, such as refraction, reflection, diffraction, absorption, among others. What scientists have observed is that depending on the phenomenon and the ease of better understanding, one can choose whether to explain it, using light as a wave or as a particle. For example, by the wave theory, it is possible to understand the diffraction effect that light suffers when passing through a crack (an obstruction) using the Huygens Principle, and well demonstrated by Young's double-slit experiment. Another example is when light strikes the surface of a mirror, which, in this case, can be treated as a particle and as a wave. In the situation where the size of the opening through which the light beam is propagated, it is much larger compared to the wavelength of the light used, the diffraction effect can be neglected and thus, geometric optics can be applied. In this case, ray tracing and geometry tools are used to determine the parameters that make up the optical image system, such as the distances of the object and image planes in relation to the lens position and the sizes of the object in these planes. The didactic proposal of this work explores the formation of image by an optical system, composed of one or more lenses using four different forms, utilizing the algebraic form by using the lens equation; the geometric shape through the ray tracing; in a matrix form by the application of transfer matrices and the last form with practical classes, experimentally setting up the optical system. In this way, this proposal relates geometric optics (image formation) and matrices to be an interdisciplinary teaching of Physics and Mathematics. Several authors defend the interdisciplinarity in the teaching of Mathematics and Physics, for connecting these contents and showing a real application of Mathematics. In addition, the use of practical activities interferes in the teaching of Physics, as the student can visualize and understand a content that appears, in most cases, abstract. Therefore, it is expected that teaching together both concepts can offer contextualization in class, improvements in student learning and teacher satisfaction, reaping the positive results of their work.

Keywords: 1. Physics. 3. Interdisciplinarity. 4. Matrices. 5. Geometric Optics. 6. Experimental

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
1.1	Os problemas do ensino de Matemática	5
1.2	A Interdisciplinaridade Física-Matemática	7
1.3	Aulas práticas no Ensino da Física e da Matemática	8
2	ÓPTICA	10
2.1	Um pouco de História	10
2.2	A óptica ondulatória	11
2.3	Óptica Geométrica	14
2.4	Sistema óptico de imagem	15
2.4.1	Definição de objeto	16
2.4.2	Definição de imagem	16
2.5	Lentes Delgadas	18
2.6	Traçado de Raios	19
2.6.1	Traçado de raios de um sistema formado por uma lente convergente	20
2.6.2	Traçado de raios de um sistema formado por uma lente divergente	22
2.7	Equação de lente delgada	23
2.8	Imagens produzidas por lentes delgadas	25
2.9	Lentes e defeitos na visão	27
3	AS MATRIZES	30
3.1	Um pouco de História	30
3.2	Definição de Matrizes	31
3.3	Classificação de Matrizes	31
3.4	Operações com Matrizes	32
3.5	Análise de Raios Paraxiais	37
4	MATERIAIS E MÉTODOS PARA O DESENVOLVIMENTO E CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS ÓPTICOS	42
4.1	Método I - Equação de Lentes	42
4.2	Método II - Traçado de Raios	43
4.2.1	Traçado de raios para um sistema óptico formado por uma lente	43
4.2.2	Traçado de Raios para o sistema óptico formado por duas lentes	44
4.3	Método III - Tratamento Matricial	45
4.3.1	Sistema óptico formado por uma lente	45
4.3.2	Sistema óptico de imagem formado por duas lentes	46

4.4	Método IV - Atividade prática - Experimentos	48
5	RESULTADOS	50
5.1	Sistema Óptico formado por uma lente	50
5.2	Sistema óptico de imagem formado por duas lentes convergentes	54
5.3	Sistema formado por duas lentes: uma divergente e uma convergente	59
6	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

INTRODUÇÃO

É inegável que a Matemática assume um papel importante, no mundo em que vivemos, estando presente em todas as atividades dos seres humanos. Por essa relevância, também é notório que o ensino da Matemática se tornou imprescindível em nossas vidas. No entanto, é comum ouvirmos comentários de alunos, sobre um descontentamento e dificuldade do entendimento em sala de aula. Desta forma, muito se questiona sobre a qualidade do ensino da matemática em todos os níveis escolares. Uma prova disso, que é alarmante, é o péssimo resultado do país no PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) [1] [2]. O exame nos revela, por exemplo, que dois terços dos brasileiros de 15 anos tem um conhecimento inferior quando se refere ao básico em Matemática. Este cenário nos faz questionar sobre o que precisa ser feito para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da disciplina em nosso país.

Diversos fatores colaboram para o problema do ensino da Matemática e todos os personagens do processo de ensino e aprendizagem são responsáveis por essa situação. Alunos desmotivados, famílias ausentes, professores desvalorizados e sem motivação para renovar suas habilidades e conhecimentos para o uso de novas ferramentas de ensino. Além disso, têm-se como problemas, a má dos professores e sistemas de ensino que priorizam avaliações externas que não consideram o aprendizado do aluno.

Entretanto, para minimizar os problemas e tornar o ensino mais efetivo e agradável, muitas propostas têm surgido no que diz respeito às práticas e metodologias adotadas pelos docentes. Se destacam, o uso de materiais manipuláveis (ábaco, Tangram, material dourado, entre outros), uso de tecnologias de informação e comunicação, programas matemáticos, sala de aula invertida, entre outros [3] [4]. No programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) os alunos, que são professores atuantes no ensino da matemática, tem trazido em seus trabalhos de conclusão importantes propostas para tornar o ensino da matemática mais efetivo nas salas de aula de nosso país (para ter acesso às dissertações do PROFMAT acesse [5]). Pode-se destacar dois trabalho com viés similar com o que propomos aqui, como o ensino de matrizes usando figuras geométricas plana [6] e o uso de matrizes com auxílio de programa de matemática [7]. No presente trabalho propõe-se explorar a interdisciplinaridade e as atividades práticas em para o melhoramento do ensino em sala de aula.

Defendida por diversos autores, a interdisciplinaridade quebra as barreiras das disciplinas e apresenta um conteúdo de maneira mais abrangente, mostrando suas diversas faces e aplicações. Sendo assim, o conteúdo é apresentado de maneira mais interessante para o aluno, possibilitando novas conclusões e aprendizados que seriam impossíveis de maneira isolada. A Matemática e a Física podem ser ensinadas dessa maneira, pois a

Física utiliza-se da Matemática como linguagem, para explicar os fenômenos presentes na natureza e em toda a tecnologia atual.

As atividades práticas, por sua vez, dão sentido a conteúdos da Física e Matemática que são bastante abstratas e de difícil compreensão, além de fugir de uma aula convencional, motivando os alunos, que por meio dessa ferramenta, trabalham o raciocínio lógico, o desenvolvimento cognitivo, a criatividade e a curiosidade. Por outro lado, a ideia de implementar as aulas práticas, traz a sensação que é necessário um laboratório completamente equipado para a realização das atividades, o que é um engano, aparatos simples e de baixo custo têm muito valor e devem ser usados em sala de aula. Inclusive, a realização do desenvolvimento e a montagem dos experimentos pelos próprios alunos é uma alternativa enriquecedora. Por exemplo, na Figura 1.1 é apresentada uma fotografia do feixe de laser vermelho sendo refratado e refletido através de uma lente feita de gelatina, a qual pode ser produzida pelos próprios alunos [8]. Nesse trabalho serão utilizados materiais do laboratório de Física da UNIFESP, mas podem ser adaptados com materiais de baixo custo.

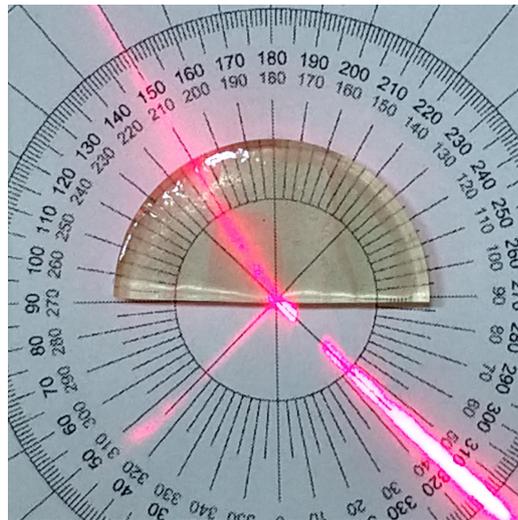


Figura 1.1: Demonstração dos fenômenos de refração e reflexão usando uma lente feita de gelatina. Fonte: [8]

Sendo assim, o trabalho tem por objetivo, sugerir atividades interdisciplinares e práticas de Óptica Geométrica e Matrizes, visando um ensino inovador desses dois conteúdos em conjunto. Geralmente, seus respectivos conceitos são ensinados com excesso de formalismo e com exercícios que visam a prática de fórmulas matemáticas. Ao aluno é ensinado a operação de matrizes com todo o rigor matemático sem conectar com as possíveis aplicações de matrizes. Desta forma, o conteúdo é ensinado de maneira descontextualizada sem despertar no aluno o interesse pelo estudo.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. O primeiro capítulo introduz o tema, sua importância e revela qual o problema a ser solucionado, assim como os objetivos que são esperados atingir. O segundo capítulo define os conceitos fundamentais da óptica, especificamente, os conceitos de Óptica Geométrica a serem explorados nas discussões

e análises realizadas ao longo deste trabalho. O terceiro capítulo explora o conceito de Matrizes, sua história, as operações que podem ser realizadas, em especial a multiplicação, e as Matrizes de transferências de raios, utilizadas para definir as propriedades de um sistema óptico de imagem. O quarto capítulo aborda os quatro métodos utilizados para definir três sistemas ópticos com elementos distintos. Os métodos se dividem em algébrico, geométrico, matricial e experimental. O quinto capítulo mostra os resultados obtidos a partir dos métodos utilizados, comparando os resultados atingidos pelos métodos de cálculo e experimentais. As considerações finais sobre o trabalho estão no sexto e último capítulo.

1.1 OS PROBLEMAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino da Matemática não tem alcançado o seu objetivo de fazer o aluno aprender as ferramentas da disciplina e a utilizá-las no seu cotidiano. Resultados da Prova Brasil de 2017 mostram que 7 em cada 10 brasileiros saem do Ensino Médio com conhecimentos insatisfatórios em Matemática. O PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) de 2018 mostra que 2 em cada 3 alunos sabem menos que o básico em Matemática. Além disso, o Brasil ficou entre os dez piores em Matemática e Ciências no ranking mundial [2]. Esse insucesso preocupa professores, alunos, gestores, governantes, ou seja, a comunidade escolar no geral e vem sido bastante discutido, no tocante as causas e as soluções para esse problema [1].

Pela maioria dos alunos, a matemática é vista como uma disciplina abstrata e difícil de ser assimilada. Isso se deve, na maioria dos casos, ao fato de que ela é ensinada como algo longe das suas realidades. Os alunos acreditam que é inútil estudá-la por não visualizarem uma conexão desta com o cotidiano [9].

Em [9] o autor cita que o rigor do formalismo matemático tem dominado o modelo de ensino, impossibilitando a aplicação prática de conceitos e fórmulas. Esse formalismo muitas vezes cria exemplos confusos, desconexos e que prioriza demonstrações, que são importantes, mas não mostram a aplicação ou algo próximo do cotidiano do aluno, consequentemente, não contribui de forma eficiente na construção do conhecimento.

Os resultados apresentados pelos nos exames apontados e os fatos citados mostram que o método de ensino tradicional, onde o professor detém e transmite o conhecimento e o aluno o absorve como uma esponja, precisa ser repensado. Esse modelo perdura por muito tempo, mas deve-se ter a consciência que o mundo e os adolescentes mudam. Vivemos em um mundo dinâmico em que as informações estão, quase literalmente, na palma de nossas mãos. O professor é convidado a usar esse dinamismo como um aliado e planejar aulas dinâmicas, com participação dos alunos, onde ele age sobre seu conhecimento saindo da posição de passividade.

Em relação a família do aluno, é fato que nos dias de hoje existe um distanciamento e uma falta de tempo dos responsáveis familiares em acompanhar a vida escolar dos seus

filhos. O papel da família de educar e transmitir seus valores tem sido negligenciado e sendo entregue a escola e até a terceiros [10]. Na fase da adolescência, o aluno convive diariamente com intensa mudança emocional, física e biológica tornando a sua relação com seus familiares mais delicada. Em [9] o autor também explora que um dos fatores que contribui com o sucesso escolar no aluno é a aproximação familiar, na qual o responsável acompanha as mudanças e com sua presença como uma figura adulta favorece a um amadurecimento saudável.

Por sua vez, os professores são desmotivados e desvalorizados com remunerações inferiores e longas jornadas de trabalho. Com isso, o tempo torna-se escasso para planejar suas aulas, corrigir trabalhos e participar de cursos de aperfeiçoamento e capacitação [9].

Uma das ações apontadas para tornar o processo ensino aprendizagem mais motivador e eficiente é a conexão das atividades em sala de aula com as experiências sociais e de vida dos alunos [11]. Esta conexão é uma das tarefas mais importante da figura do professor em sala de aula, pois o próprio aluno não possui maturidade suficiente para conectar o que aprende em sala de aula com suas vivências no seu cotidiano [10].

É importante o professor se posicionar como um facilitador do conhecimento, diversificando sua prática, ouvindo os alunos, descobrindo suas dificuldades e anseios. O professor precisa ter a visão clara que o seu papel é ser a fonte de inspiração e de conhecimento, permitindo se inspirar e aprender com alunos. Essa aproximação estimula a participação do aluno, tornando a aula mais atrativa, além de utilizar formas diversificadas de expressar o conteúdo de maneira que todos entendam, introduzindo a curiosidade e a cooperação [12].

Mais um fator que precisa ser considerado quando se fala do fracasso do ensino da Matemática é a formação de professores. Nos cursos de licenciatura há uma lacuna entre os assuntos puramente teóricos e as disciplinas ditas pedagógicas, em relação a prática docente em sala de aula. O professor tem o conhecimento das teorias das metodologias de ensino mas não sabe ou não domina sua aplicação. Isso o conduz a escolher a opção mais fácil que é a exploração das aulas expositivas com resolução de exercícios, ou seja, o método de ensino tradicional. A ideia é que seja uma formação pedagógica fundamentada em uma base teórica e científica de qualidade, apoiada na reflexão sobre a prática nos dias de hoje. Isso requer um longo tempo de estudo e experiência, com constante consulta das pesquisas científicas e com orientação de formadores qualificados [13]. Além disso, a formação continuada (treinamentos e capacitações) é essencial para que o professor se mantenha atualizado para aprimorar sua prática.

Por fim, os sistemas educacionais usam de recursos que contribuem ainda mais para o fracasso do ensino. A avaliação, que é uma das etapas mais importantes do processo de ensino e aprendizagem, no entanto, é constantemente utilizada como uma ferramenta para ameaçar e disciplinar os alunos. Conseqüentemente, favorece aqueles que apenas estão interessados na promoção, não importa os meios ou o conhecimento a ser adquirido [14]. A avaliação precisa ser usada como uma ferramenta para lapidar, completar o aprendizado e verificar a qualidade do ensino.

Duas alternativas didáticas são exploradas neste trabalho como sugestões para aperfeiçoar o ensino da Matemática: a interdisciplinaridade Física-Matemática e a aplicação de aulas práticas. A seguir o papel e a importância destas duas alternativas na sala de aula serão discutidos.

1.2 A INTERDISCIPLINARIDADE FÍSICA-MATEMÁTICA

A interdisciplinaridade é objeto de destaque nas discussões sobre o processo de ensino aprendizagem por ser uma alternativa com intuito de oferecer um ensino mais eficaz e significativo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 2006 indicam a Interdisciplinaridade como um componente para a organização curricular. Os PCNEM defendem que idealmente a interdisciplinaridade deve ser construída no projeto pedagógico da escola, sendo que qualquer atividade isolada, como por um exemplo uma aula onde os professores de duas disciplinas diferentes trabalham o mesmo assunto em perspectivas distintas, pode facilitar na aprendizagem do aluno [15].

Por sua vez a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [16] defende que os professor devem decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação ao ensino e da aprendizagem.

De forma geral, a interdisciplinaridade é a interação de um determinado assunto entre duas ou mais disciplinas. A interdisciplinaridade é definida de duas formas que se completam. A primeira, científica, onde cada disciplina precisa ser analisada não apenas no lugar que ocupa, mas nas suas particularidades e movimento, próprios de seu lócus de cientificidade. Essa cientificidade, ganha status interdisciplinar, quando o professor revê sua prática, no momento em que ao movimento da disciplina, seu próprio movimento, for incorporado [17].

A segunda ordenação é social que busca o desenvolvimento dos saberes científicos interdisciplinares às exigências sociais, políticas e econômicas. Esta concepção coloca em questão toda a separação entre a construção das ciências e a demanda da sociedade [17].

A interdisciplinaridade surge como uma forma de analisar conhecimentos que seriam difíceis de construir de maneira disciplinar. Permite responder questões com uma busca da exteriorização a partir da interiorização. Aplica-se assim, o diálogo com outras disciplinas e formas de conhecimento para que seja possível ampliar a visão de mundo. Logo, o que define a ação interdisciplinar é a busca de uma nova maneira de trabalhar o conhecimento a partir da troca e da reciprocidade entre as disciplinas e áreas de conhecimentos [17].

A interdisciplinaridade é muito válida, pois implica em uma nova maneira de pensar e agir, privilegiando a abertura para conhecimentos diversificados, superando a linearidade do currículo escolar. Ela também reorganiza o currículo de maneira a superar a tendência de uma lista de conteúdos regidos por série/ano, de forma estática. A interdisciplinaridade auxilia na superação da fragmentação da prática educacional, contextualiza diferentes

saberes, dá o direito ao aluno de escolher alternativas e desmitifica o professor como detentor da verdade.

Nessa maneira de agir e pensar todos são favorecidos. O conhecimento, por recuperar sua totalidade e sua complexidade. O professor, pela necessidade de evoluir, ao repensar sua prática como docente, ao ganhar um novo modo de ensinar e, principalmente, pela interação colaborativa com os colegas. A escola, por sua vez, é favorecida por ter sua prática pedagógica repensada por todos de maneira conjunta e contínua, com um forte trabalho realizado por uma equipe mais unida.

Por fim, a partir de projetos interdisciplinares, os alunos têm contato com trabalho em grupo e ganham maturidade de escolher quais das alternativas são adequadas para ele. Além disso, em [18], os alunos constroem o conhecimento de maneira mais fácil e dinâmica, utilizando uma maior gama de informações e recursos. E depois, de adquirir o conhecimento em questão, o aluno é então capaz de relacionar essas informações.

Geralmente, a Matemática e a Física são disciplinas que são estudadas separadamente e ministradas muitas vezes por professores com diferentes formações acadêmicas, mas que possuem aplicações que podem ser trabalhadas de forma conjunta. Assim um projeto de interdisciplinaridade entre os conteúdos pode contribuir para o aprendizado do aluno. Em se tratando dessas duas disciplinas, um enfoque interdisciplinar é ainda mais válido, pois a Física utiliza a Matemática para descrever, verificar e validar fenômenos do cotidiano, sendo assim a Física é uma aplicação da Matemática na natureza [19].

Existe uma ampla gama de conteúdos matemáticos que podem ser aplicados na física nos quais se destacam: a Função do 1º Grau e o Movimento Uniforme; Função do 2º Grau e o movimento Uniformemente Variado; A parábola e o Movimento de Projéteis; Logaritmos e Estudo do Som; Trigonometria e Refração/Reflexão da Luz, entre outros. Portanto a Matemática e a Física são disciplinas que andam de mãos dadas e podem facilmente ser ensinadas de maneira conjunta não desvencilhando uma da outra.

Entretanto deve-se tomar alguns cuidados ao introduzir a prática interdisciplinar na sala de aula. É necessário que se proceda a uma análise detalhada dos porquês dessa prática, além de uma profunda imersão nos conceitos de escola. Em resumo deve ser planejado e analisado o onde e o por que usar a interdisciplinaridade.

Para a inserção da interdisciplinariedade, alguns obstáculos precisam ser superados, como o empenho de professores, falta de tempo, falta de infraestrutura, desvalorização do professor e de outras práticas, etc. Enfim, a interdisciplinaridade não pode ser considerada a única solução, mas é uma alternativa que depende de outros fatores para ser bem aplicada.

1.3 AULAS PRÁTICAS NO ENSINO DA FÍSICA E DA MATEMÁTICA

As aulas experimentais são muito importantes e relevantes para um ensino eficaz das ciências naturais. Vários estudiosos da área da educação elencam diversos fatores para

inserção de aulas práticas que permitem ao aluno observar os fenômenos que envolvem conceitos da Física e da Matemática. A experimentação tem sido apontada como uma das maneiras mais produtivas para se reduzir as dificuldades encontradas no ensino destas disciplinas [20].

A experimentação é uma boa prática para o desenvolvimento do aluno, afinal permite que o aluno desenvolva seu raciocínio próprio aumentando sua capacidade de refletir, argumentar e refutar sobre o assunto abordado. Assim o aluno sai de uma postura passiva, onde ele apenas ouve o professor e replica exercícios e começa a ser estimulado a agir sobre o objeto de estudo [21]. O aluno pode observar o fenômeno e questionar, pensar, argumentar, usar sua criatividade e naturalmente, através de seu esforço e tempo dedicado sobre o problema, o aluno encontrará respostas às suas indagações aplicando os conceitos que regem o experimento.

O aluno pode participar de todas as fases da atividade, desde o planejamento do experimento, até a formulação de hipóteses, verificação e conclusão. Assim o aluno age sobre todo o método científico, obtendo um conhecimento não só de Física ou de Matemática, mas em outras áreas afins.

Entretanto, as aulas experimentais ainda não são plenamente adotadas pelos professores, talvez isso se deve ao fato que estas aulas demandam de mais tempo para preparação e execução do que as aulas expositivas. Sem contar que o professor já possui várias atividades para serem cumpridas em um vasto currículo de sua disciplina. Além disso, tem-se a crença de que os experimentos e aparatos devem ser caros e sofisticados, o que é um engano. Os experimentos podem ser feitos com materiais de baixo custo, que são encontrados em casa, incluindo assim nas atividades, o hábito de reaproveitar materiais descartados.

Não existe uma solução para a melhoria do processo ensino-aprendizagem. Os experimentos educativos não têm a capacidade de mudar totalmente a realidade deficitária em que se insere o ensino da Física, mas podem servir como um bom começo. Sem abandonar a abordagem teórica, os usos de metodologias variadas auxiliam o professor a manter o aluno engajado durante as aulas [22].

ÓPTICA

Neste capítulo a ideia principal é apresentar como é a formação da luz usando as ferramentas de Óptica Geométrica. Com a Óptica Geométrica se explica praticamente todos os fenômenos envolvendo luz, no entanto, detalhes que são explicados devido a influência da difração não são considerados nos resultados. Por isso, vamos apresentar uma breve explicação do fenômeno de difração ao usar a teoria ondulatória, a qual com a teoria de Huygens e o experimento de Young pode ser tão bem descrita. Importante o aluno entender o fenômeno de difração pois ao realizar o experimento poderá observar este fenômeno em seus resultados que podem ser diferentes daqueles obtidos com a Óptica Geométrica e as Matrizes de Transferência.

A óptica é um dos ramos da Física que estuda a luz e os fenômenos que envolvem a sua interação com a matéria. Com este estudo é possível entender desde porque o céu é azul até o funcionamento de equipamentos de alta tecnologia, como por exemplo, um aparelho celular de última geração. Falando em celular, atualmente, tornou-se muito fácil e rápido tirar fotos e a formação de imagens na tela do celular é explicada através dos fundamentos de óptica. Pelo sistema ocular, as imagens são processadas por nosso sistema visual que começa na retina e finaliza no córtex visual. Esse sistema identifica as várias características e oferece uma imagem como uma representação obtida de raios luminosos.

Os fenômenos ópticos podem ser explicados com a Óptica Geométrica e quando é desejado obter mais detalhes é usada a Óptica Física. Para os casos de partículas subatômicas e com velocidade próximo da velocidade da luz, é aplicado os fundamentos da da Óptica Quântica. O estudo pela Óptica Geométrica é baseado em traçado de raios, onde os efeitos por difração são negligenciados, enquanto que o estudo pela Óptica Física é incluído os efeitos por difração, pelo qual a interação da luz com a matéria é descrita com mais detalhes.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Os fenômenos ópticos e a luz sempre chamaram atenção da humanidade e seus estudos são remetidos a antiguidade com os principais pensadores gregos. De acordo com Barros e Carvalho [23] uma teoria difundida da Antiguidade sustenta que do olho emanava raios retilíneos capazes de examinar o mundo externo e trazer para a mente dados necessários para reconhecer formas e cores. Platão, por sua vez, a visão de um objeto se dá pela combinação de três jatos de partículas, um partindo do olho, outro do objeto e um terceiro vindo das fontes luminosas.

Entretanto, o declínio dessas teorias começou com as contribuições de Al Hazen (965-1039) que desmitificou que o olho que produz ação, mas que sofre a ação da luz e do meio. Sendo assim o olho não emite raios visuais e as imagens são formadas do objeto para o olho. [24]

No século XVII as expressões matemáticas providenciaram a descrição de diversos fenômenos e assim, diversos dispositivos ópticos, como o telescópio de Galileu [25], surgiram. Nesse século também são elaborados as formulações matemáticas da propagação da luz. Kepler foi o primeiro a calcular a refração para pequenos ângulos, antes de Rene Descartes e Willebrord Snell, chegar a conhecida Lei de Snell.

A grande descoberta em relação a luz foi feita por Isaac Newton que afirmou que a luz era composta por corpos muito pequenos. A luz se propaga em linha reta e velocidade constante devido a falta de forças agindo sobre a mesma. Sendo assim a luz tinha um comportamento ondulatório. No mesmo período, Christian Huygens trouxe uma nova explicação para a luz que segundo ele se comporta como onda, na qual deduziu as leis de reflexão e refração. Essa dualidade de comportamentos foram aceitas pela comunidade científica mas devido a influência de Newton, a teoria corpuscular prevaleceu [26].

Entretanto no século XIX, Zilio cita em [26] que os trabalhos de Thomas Young, Gustav Robert Kirchoff, Augustin Jean Fresnel, Michael Faraday, entre outros cientistas, reforçou a Teoria ondulatória. Através das equações de James Clark Maxwell é possível determinar a velocidade da Luz, tornando assim um elo da Óptica e com o Eletromagnetismo.

A dualidade da luz foi confirmado, segundo [26], no começo do Século XIX com os trabalhos de Albert Einstein com o efeito fotoelétrico que fundamentava a teoria corpuscular evidenciando que a interação da luz com a matéria era feita por pacotes de energia, chamado quanta. Além disso, com a teoria da relatividade, Einstein provou que a onda eletromagnética não precisa de um meio para se propagar.

2.2 A ÓPTICA ONDULATÓRIA

Diversos cientistas como Isaac Newton e Albert Einstein estudaram o comportamento da luz, até se concluir que a luz pode ter seu comportamento descrito como uma partícula e como uma onda. O comportamento ondulatório da luz pode ser descrito pelas Equações de Maxwell, que permite descrever como a luz se propaga em materiais e no vácuo e assim, explicar os fenômenos como a absorção, espalhamento, refração, reflexão, e entre outros. Vamos partir do Princípio de Huygens e o experimento de duas fendas de Young para explicar o efeito de difração. Vale ressaltar aqui, que Maxwell realizou seus estudos baseados das descobertas de Huygens, Young e dos demais grandes nomes do estudo do eletromagnetismo como Oersted e Faraday para formular suas brilhantes equações.

O físico holandês Christiaan Huygens (1629 - 1665) defendia que a luz tinha um comportamento ondulatório onde cada ponto da onda é uma fonte de ondas esféricas

centrada naquele ponto. Isso explica por que uma sala escura é completamente iluminada se uma fonte de luz entrar pela abertura da porta.

Huygens em [27] diz que "Todos os pontos de uma frente de onda se comportam como fontes pontuais de ondas secundárias. Depois de um intervalo de tempo t , a nova posição da frente de onda é dada por uma superfície tangente a essas ondas secundárias". Sendo assim é possível prever como uma frente de onda vai se comportar depois de um intervalo de tempo t . Na Figura 2.1 é apresentado um diagrama esquemático do Princípio de Huygens: Na frente de onda no instante t_0 , todos os pontos são fontes pontuais de ondas esféricas secundárias de raio $r = vt$. A frente de onda no instante de tempo $t_0 + \Delta t$ é a curva tangente a todas as ondas secundárias.

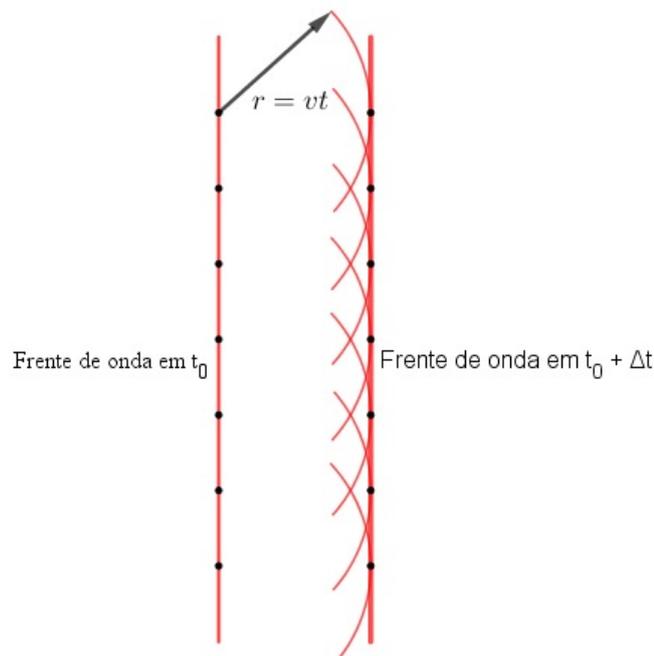


Figura 2.1: Diagrama esquemático do Princípio de Huygens que demonstra o comportamento ondulatório da luz. Fonte: [27] adaptado pelo Autor.

A partir dos estudos de Huygens, em 1801, Thomas Young (1773 - 1829) provou experimentalmente que a luz tem um comportamento ondulatório. Para provar isso, Young desenvolveu um experimento com fenda dupla, o qual tem seu arranjo experimental esquematizado na Figura 2.2. Inicialmente a luz incidente é uma onda plana que é primeiramente difratada ao propagar pela fenda S_0 (a letra S refere-se a *source*, fonte em inglês). Na posição A, onde é localizada a fenda S_0 , é então produzida uma fonte pontual (*source*) conforme a descrição do Princípio de Huygens (na verdade seriam várias fontes pontuais, para título de ilustração, foi desenhado apenas uma fonte pontual). A partir da fenda S_0 a onda adquire um formato esférico até atingir as próximas fendas S_1 e S_2 localizadas no plano B.

Novamente tem-se uma fonte pontual em cada uma das fendas do aparato B. A luz se propaga a partir dessas fendas, da mesma maneira descrita por Huygens. Mais adiante no

plano C é fixado um anteparo onde se pode observar um padrão de interferência como o exemplo apresentado na Figura 2.3. As ondas se interferem produzindo este padrão formado por franjas claras (presença de luz) e escuras (ausência de luz). Se conclui que este padrão de interferência só é observado devido à presença do fenômeno de difração e ainda mais, que a teoria de Huygens é provada e conseqüentemente, pode-se afirmar que a luz possui um comportamento ondulatório. É possível fazer uma afirmação inversa: a difração é um fenômeno que indica que a luz é uma onda.

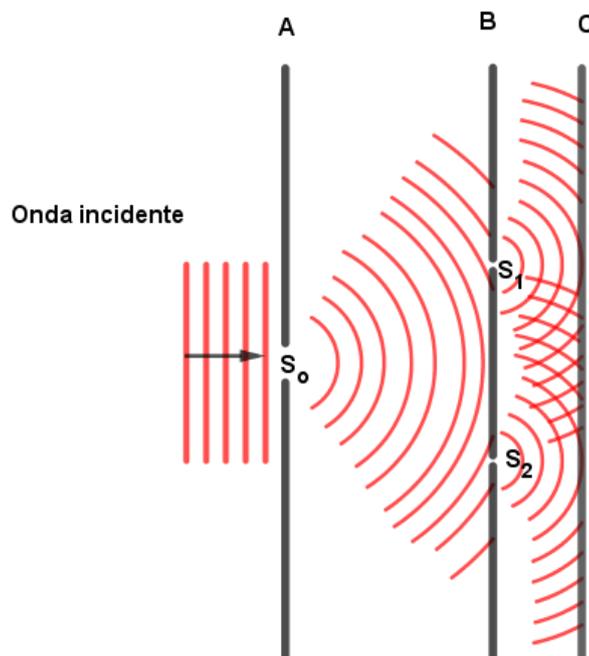


Figura 2.2: Diagrama esquemático do arranjo experimental de fenda dupla de Thomas Young que comprova que a luz tem um comportamento ondulatório. Fonte: [27] adaptado pelo Autor

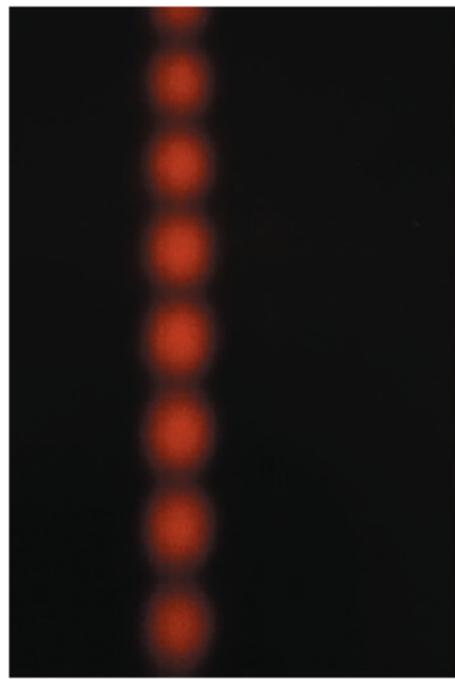


Figura 2.3: Fotografia de um exemplo do padrão de interferência formado no anteparo no plano C no experimento de fenda dupla de Young. Fonte: [27]

2.3 ÓPTICA GEOMÉTRICA

A óptica geométrica, por sua vez, trata a propagação da luz como uma linha reta, em meios isotrópicos e homogêneos. Young e Freedman, definem o raio de luz em [28], como uma linha imaginária ao longo da direção da propagação da onda, representados na figura 2.4. A óptica geométrica usa a geometria como ferramenta para obter os parâmetros que descrevem um sistema óptico.

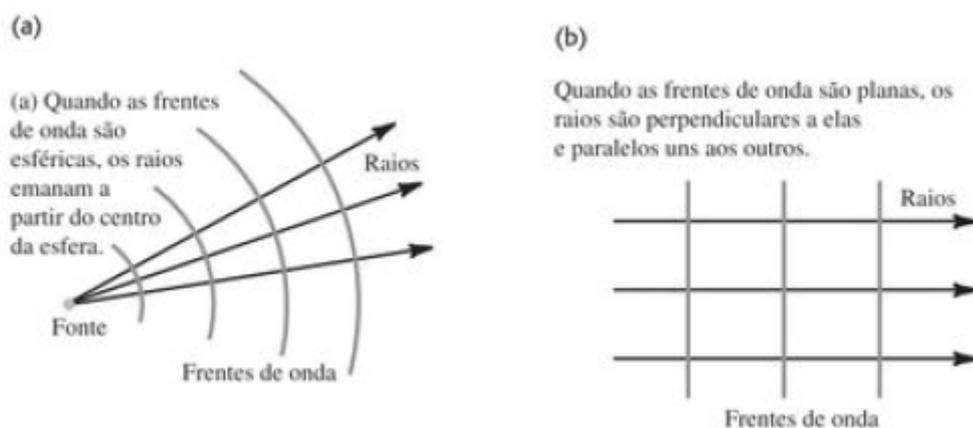


Figura 2.4: Esquema do raio de luz na mesma direção da propagação da onda. Fonte: [28]

Nos dias de hoje, um bom aliado nos laboratórios de óptica é o laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) [29], o qual é uma fonte direcional de luz, podendo assim ser facilmente aplicada para observar os fenômenos ópticos. Quando o feixe de laser atinge uma superfície, alguns fenômenos podem ocorrer dependendo do tipo de material.

A seguir são descritas as leis da Óptica Geométrica que serão usadas neste trabalho.

- **Lei 1:** Em meios isotrópicos e homogêneos, os raios de luz se propagam em linha reta.
- **Lei 2 - Lei de Reflexão:** Considere uma superfície onde o raio de luz é refletido (por exemplo um espelho) e a reta normal perpendicular à superfície. O raio incidente e a normal determinam o plano de incidência. Se o raio incidente e a normal formam um ângulo θ_i , enquanto o raio refletido com a normal, formam um ângulo θ_r . Em resumo, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, $\theta_i = \theta_r$. Além disso a normal, o raio incidente e o raio refletido pertencem ao mesmo plano.
- **Lei 3 - Lei de Refração de Snell:** Considere uma superfície onde o raio de luz é refratado e a reta normal perpendicular à superfície. O raio incidente e a normal determinam o plano de incidência. Seja θ_1 o ângulo formado entre o raio incidente e a normal e o ângulo θ_2 formado entre o raio refratado e a normal, obtém-se a seguinte relação:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (1)$$

onde n_1 e n_2 são os índices de refração dos respectivos meios de incidência (1) e refração (2). O índice de refração de um meio é dado pela razão entre a velocidade da luz nesse meio e a velocidade da luz no vácuo. A razão n_1/n_2 é chamada de índice relativo de refração. O quanto o raio de luz é refratado (desviado em relação à normal) no meio 2 depende dos índices de refração de ambos meios e do ângulo de incidência.

As leis 1 e 2 já eram conhecidas pelos gregos. A terceira lei foi intensamente pesquisada no século XVII, até ser formulada por Willebrod Snell em 1620 e publicada por René Descartes em 1637.

A seguir serão utilizadas as leis para definir alguns elementos que formam o sistema óptico de imagem.

2.4 SISTEMA ÓPTICO DE IMAGEM

Todo sistema óptico de imagem é formado por um plano objeto e um plano imagem, ou seja, no plano objeto está localizado o objeto e o plano imagem é onde a imagem deste objeto será formada, estes planos definem o plano conjugado de um sistema óptico. A imagem 2.5 mostra os planos localizados sobre o eixo óptico (geralmente coincidente ou paralelo ao o eixo x de um sistema cartesiano xy). A posição de cada plano sobre o eixo óptico é definida em relação a posição que a lente se encontra no eixo óptico (geralmente a lente está posicionada na origem do sistema cartesiano), sendo s_o a distância do plano objeto até a lente, enquanto que s_i é a distância da lente até o plano imagem.

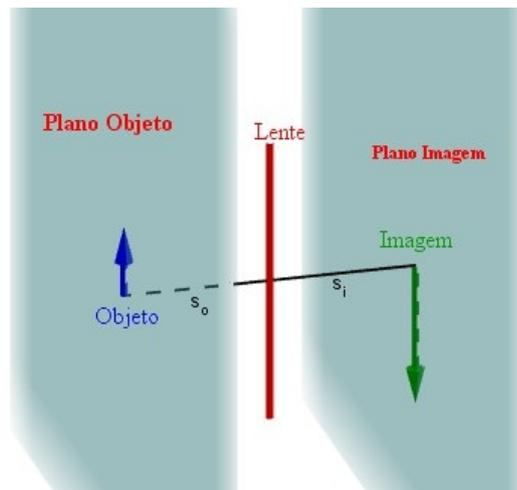


Figura 2.5: Esquemática da posição do plano objeto e plano imagem em um sistema óptico de imagem. Fonte: O Autor

2.4.1 Definição de objeto

Na óptica, o objeto é definido por um ponto ou um conjunto de pontos que emane raios de luz. Se a luz é emitida pelo próprio objeto diz-se que ele tem luz própria, ou seja, é uma fonte luz como por exemplo, uma lâmpada. Caso contrário, o objeto é iluminado por uma fonte e neste caso a luz é refletida pelo objeto. Por exemplo, se você lê um livro é por que a luz é refletida pelas páginas iluminadas por uma fonte luminosa.

Em relação ao tamanho do objeto, o objeto é definido como objeto pontual quando pode ser representado por um ponto e indica a situação em que suas dimensões são muito pequenas em relação as distâncias entre o plano objeto e imagem, desta forma suas dimensões são negligenciadas nos cálculos e considerada apenas sua localização no plano cartesiano. Caso contrário, se as dimensões do objeto são da ordem das distâncias dos planos em relação a lente, este objeto deve ser tratado como um objeto extenso e passa a ser representado por um conjunto de objetos pontuais [28]. Neste trabalho, o objeto será tratado como um ponto localizado no plano cartesiano xy , cujas coordenadas são dadas por (s_o, h_o) , onde h_o refere-se a altura que o objeto pontual se encontra ou também pode ser apenas um ponto de um objeto de altura igual a h_o .

2.4.2 Definição de imagem

Para que uma pessoa possa ver, por um exemplo, um carro é necessário que os olhos interceptem alguns dos raios luminosos que partem do carro e os redirecionem para a retina, no fundo do olho. O sistema visual que vai da retina até o córtex visual, processa as informações no raio luminoso e identifica arestas, texturas, cores e formas. Segundo [27], isso oferece à consciência uma **imagem**, que é uma representação obtida através dos raios luminosos. O sistema visual faz esse processamento mesmo que a luz não venha diretamente do carro, mas que sejam refletidos ou refratados por certos instrumentos.

Suponha que os raios luminosos atinjam uma superfície plana metálica polida que reflete aproximadamente 100 % dos raios incidentes. Pela lei de reflexão o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão e como a superfície é plana, a normal é perpendicular a superfície em qualquer ponto como apresentado no desenho esquemático da Figura 2.6.

Quando os raios que partem do ponto A são traçados seriam como se estes fossem emanados de um ponto A' que se encontra atrás do espelho. O ponto A' é chamado de imagem. Se a superfície não fosse lisa e polida a reflexão seria difusa sem uma imagem formada.

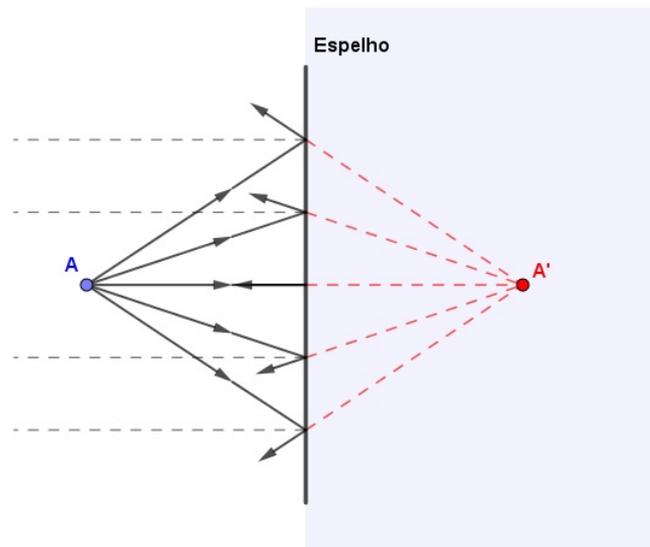


Figura 2.6: Imagem formada por uma superfície plana metálica polida (um espelho). Fonte: [28] adaptado pelo Autor

Uma imagem também pode ser formada por uma superfície refratora como o desenho esquemático apresentado na Figura 2.7. A região do desenho na cor azul indica a região com índice de refração n_a , enquanto a região da direita do desenho indica a região com índice de refração n_b , sendo $n_a > n_b$. N

Os raios provenientes do ponto P sofre um desvio causado pelo fenômeno de refração, definidos pela Lei de Snell 1. Assim, os raios que emanem P quando refratados seriam os mesmos se fossem emanados do ponto P', se não houvesse interface entre os meios. Nesse caso o ponto P' é a imagem de P. Por isso, quando vemos um objeto na água ele parece estar mais perto da superfície do que realmente está. Isso ocorre devido a refração que Knight, define em [30] como o fenômeno que ocorre quando o raio de luz transmitido tem sua direção alterada ao cruzar uma interface de índice de refração diferente.

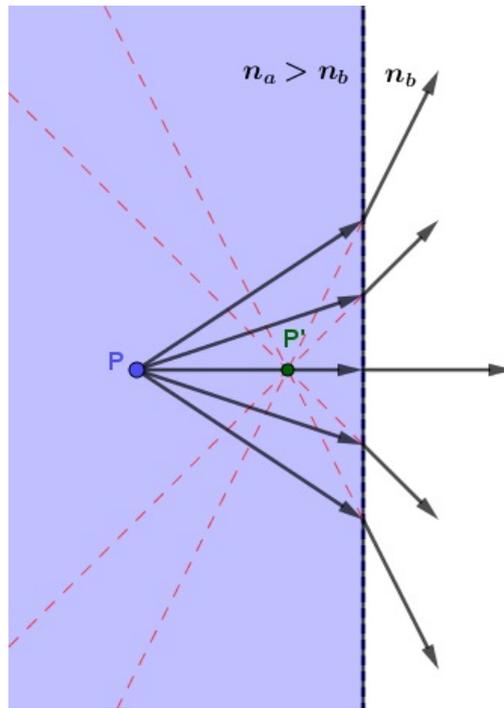


Figura 2.7: Imagem formada por uma superfície refratora. Fonte: [28] adaptado pelo Autor.

Uma imagem pode ser virtual, quando formada pelo prolongamento de raios luminosos. Por exemplo, se os raios luminosos são refletidos por um espelho plano, o objeto parece estar atrás do espelho. Uma imagem real por sua vez, é formada necessariamente pelos raios luminosos e pode ser produzida em uma folha de papel ou uma tela de cinema. Em uma lente, as imagens que estão do mesmo lado do objeto em relação à lente são virtuais e as imagens do outro lado são reais.

2.5 LENTES DELGADAS

Uma lente delgada significa que sua espessura é fina comparada com o comprimento de sua distância focal f . Uma lente é um objeto transparente limitado por duas superfícies refratoras (faces) com um eixo central em comum. Quando a lente está imersa no ar, a luz é refratada duas vezes e volta a se propagar no ar. As refrações modificam a direção dos raios luminosos. Na Figura 2.8 é apresentado o diagrama esquematizado de duas lentes: (a) é uma lente convexa onde os raios propagados convergem. (b) é uma lente côncava onde os raios propagados divergem.

Quando os raios de origem no infinito, paralelos ao eixo óptico, atravessam as duas superfícies de uma lente convexa, Figura 2.8(a), a dupla refração faz os raios convergirem para um ponto F_2 . A lente é definida convergente e forma uma imagem real no ponto F_2 . O ponto F_2 é chamado de segundo foco da lente (ou foco imagem) e a distância desse ponto em relação a lente é chamada de distância focal f . Importante observar que a imagem é formada no foco da lente devido o objeto estar muito distante da lente (a distância $s_o \approx \infty$), como mostrado pelos raios incidentes que estão paralelos ao eixo óptico.

Por outro lado, na figura 2.8(b) os raios que emanem ou passam pelo ponto F_1 emergem da lente formando uma feixe de retas paralelas. O ponto F_1 é chamado de primeiro foco (ou foco objeto). De maneira análoga distância desse ponto até a lente é chamada distância focal.

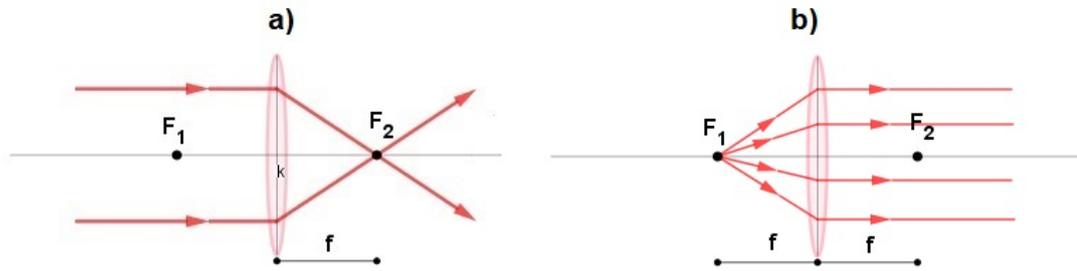


Figura 2.8: Diagrama esquemático de (a) uma lente convergente e de (b) uma lente divergente. Fonte: [27] adaptado pelo autor.

Quando os raios se afastam, a lente é chamada de divergente, Figura 2.9(a). Quando os raios atravessam as duas superfícies de uma lente côncava, a dupla refração faz os raios divergirem e os seus prolongamentos convergem para um ponto F_2 . O ponto F_2 é chamada de primeiro foco (ou foco imagem). A lente é definida divergente e a distância do ponto focal F_2 até a lente é chamada de distância focal da lente f . Para uma lente divergente a distância focal é negativa.

Por outro lado, quando os raios que vão em direção ao ponto F_1 , , como na figura 2.9(b), emergem da lente, de maneira paralela ao eixo óptico e seu prolongamento converge para o ponto F_1 . O ponto F_1 é chamada de primeiro foco da lente (ou foco objeto). A distância desse ponto a lente é chamada de distância focal f .

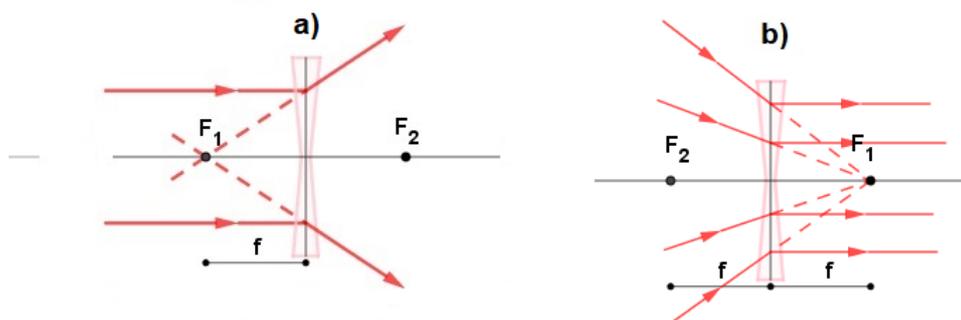


Figura 2.9: Diagrama esquemático de (a) uma lente convergente e de (b) uma lente divergente. Fonte: [27] adaptado pelo autor.

2.6 TRAÇADO DE RAIOS

Como visto anteriormente, na óptica geométrica os raios de luz são representados por linhas retas. A realização do traçado de raios é feita na situação em que a abertura por

onde o raio se propaga é grande comparada com o comprimento de onda da luz. Para descrever os parâmetros de um sistema óptico de imagem, tais como as posições dos planos objeto e imagem e tamanho da imagem usando o traçado de raios é realizada uma análise de dois a três raios desenhados na forma de linhas retas em relação a um eixo óptico definido sobre um sistema cartesiano. Em conjunto então é utilizado as ferramentas de geometria como a semelhança de triângulos.

Considere um ponto A e uma lente convergente, como na figura 2.10(a). Todos os raios que emanem de A e propagam na direção da lente são desviados para o mesmo ponto A' da imagem. Isso também ocorre na lente divergente 2.10(b), todos os raios que emanem de um único ponto são prolongados em direção de um único ponto da imagem.

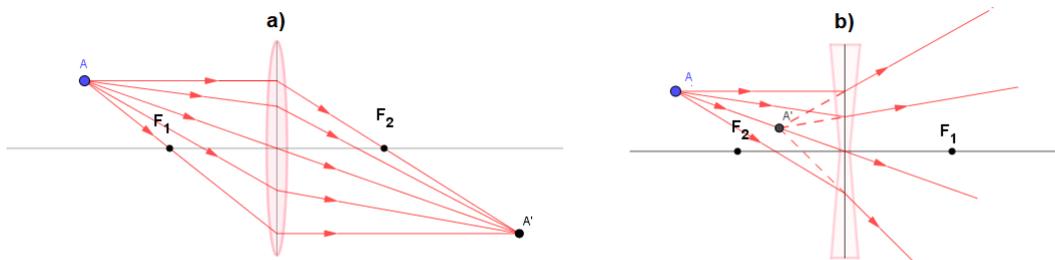


Figura 2.10: Na lente convergente (a) e na lente convergente (b), os raios que emanem de um ponto do objeto convergem para um único na imagem. Fonte: o autor.

Sendo assim, não é necessário traçar os infinitos raios que emanem de um ponto do objeto para obter o ponto na imagem. Usaremos apenas aqueles que conhecemos suas característica e seu comportamento quando atravessa uma lente, chamados raios principais. Isso será mostrado nas próximas seções.

2.6.1 Traçado de raios de um sistema formado por uma lente convergente

Na Figura 2.11 é apresentado o diagrama esquemático de um sistema óptico formado por uma lente convergente. O **raio 4** neste diagrama esquemático é exatamente o eixo óptico do sistema óptico, traçado a partir da base do objeto de um ponto localizado em $(s_0, 0)$ e não sofre nenhum desvio por atravessar exatamente no ponto central da lente. Isso ocorre pois a espessura da lente é muito pequeno em relação ao raio de curvatura e assim o desvio é muito pequeno, podendo ser desprezado. Os demais raios (raios 1 a 3) são traçados a partir de um ponto (s_o, h_o) do topo do objeto. O **raio 1** é paralelo ao eixo óptico e ao atravessar a lente converge para o ponto focal da lente e prolongado após cruzar o eixo óptico. O **raio 2** é traçado passando pelo foco antes da lente e, após a lente o raio é desviado e seguindo o seu traçado paralelamente ao eixo óptico. O **raio 3** é traçado passando no centro da lente (geralmente coincide com a origem de um sistema cartesiano) e prolongado após cruzar o eixo óptico. Importante ressaltar que o raio 3 não sofre nenhum desvio.

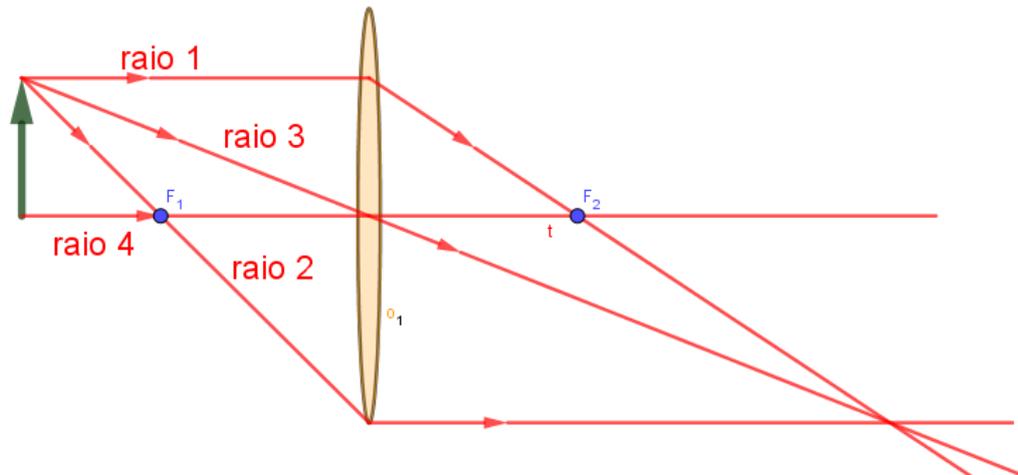


Figura 2.11: Diagrama esquemático do traçado de raios de um sistema óptico de imagem formado por uma lente convergente. Fonte: O Autor

Na Figura 2.12 é apresentado o mesmo sistema óptico de imagem já descrito na Figura 2.11. Agora, com o prolongamento dos raios 1, 2 e 3 traçados anteriormente é definido um ponto a partir do cruzamento destes raios, no qual é determinada a altura do objeto no plano imagem e conseqüentemente a sua posição sobre o eixo óptico, ou seja, a localização do ponto do objeto (s_o , h_o) na imagem indicado por (s_i , h_i). A altura h_i é invertida (sinal negativo).

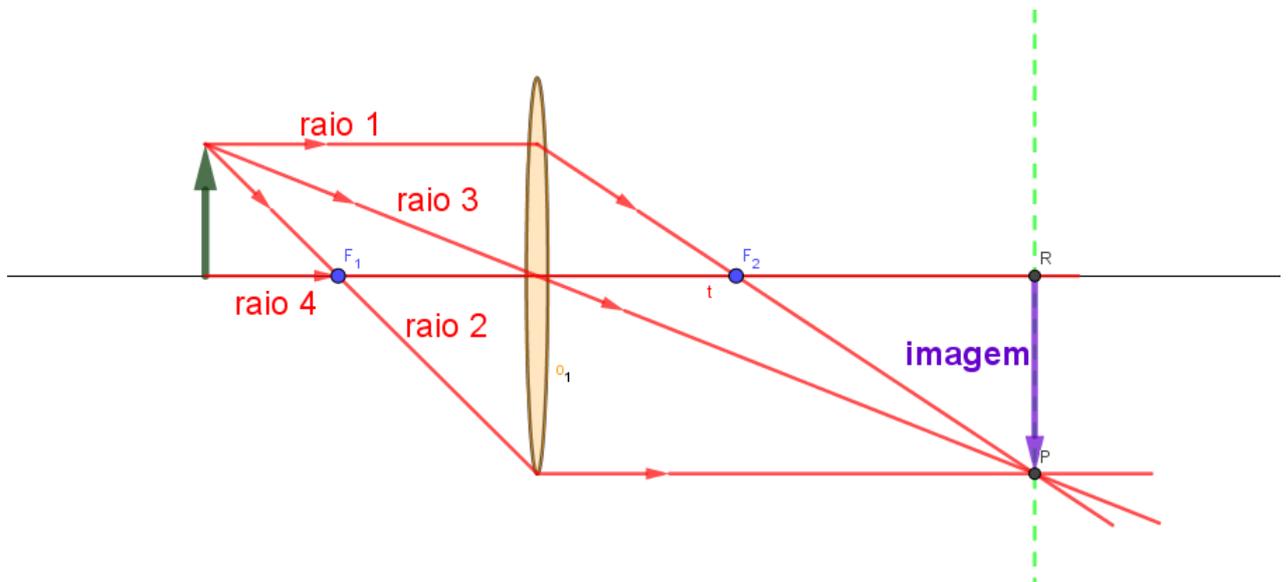


Figura 2.12: Formação da imagem pelo traçado de raios através de um sistema óptico formado por uma lente convergente. Fonte: O Autor

2.6.2 Traçado de raios de um sistema formado por uma lente divergente

Para o traçado de raio de um sistema óptico formado por uma lente divergente, três raios são traçados para definir a formação da imagem conforme apresentados na Figura 2.13. O **raio 3** neste diagrama esquemático é exatamente o eixo óptico do sistema, traçado a partir da base do objeto de um ponto localizado em $(s_o, 0)$ e não sofre nenhum desvio por atravessar exatamente no ponto central da lente. O **raio 1** é traçado paralelamente ao eixo óptico partindo do topo do objeto localizado no ponto (s_o, h_o) do sistema cartesiano. Ao passar pela lente, o **raio 1** é desviado e divergido sem cruzar o eixo óptico e o seu prolongamento (desenhado em linha tracejada) cruza o ponto focal F_1 (antes da lente). O **raio 2** é análogo ao raio 3 do sistema formado por uma lente convergente da Figura 2.11, em que os raios que passam pelo ponto central da lente não sofrem desvio. O **raio 4** propaga em direção ao foco imagem, F_2 , ao passar pela lente, emerge paralelamente ao eixo óptico, assim como o seu prolongamento.

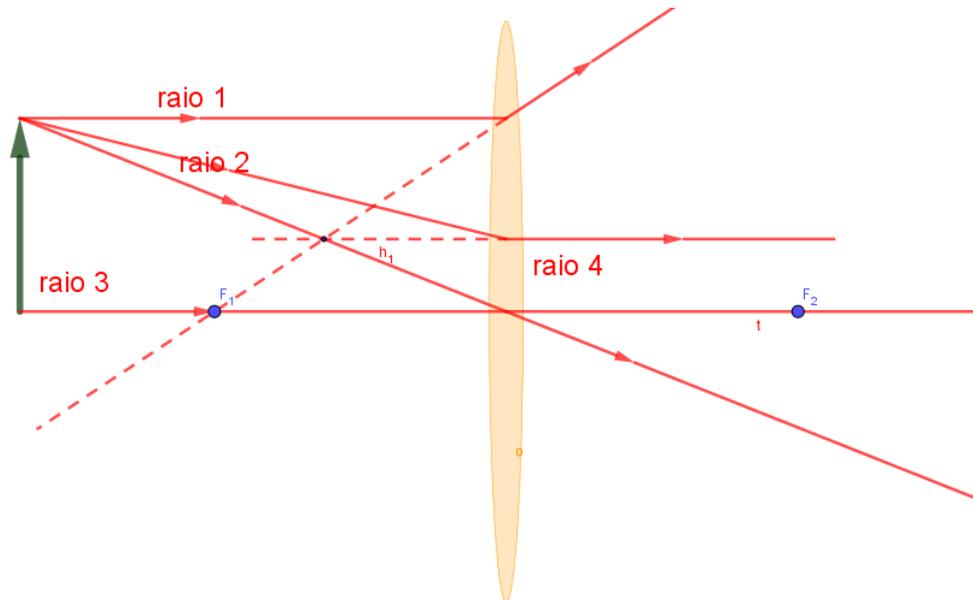


Figura 2.13: Diagrama esquemático do traçado de raios de um sistema óptico formado por uma lente divergente. Fonte: O Autor

Na Figura 2.14 é apresentado o mesmo sistema óptico de imagem descrito na Figura 2.13. O ponto onde os raios 1 (parte tracejada) e 2 se encontram antes da lente define a formação da imagem, com a distância s_i é negativa e a altura h_i é não invertida.

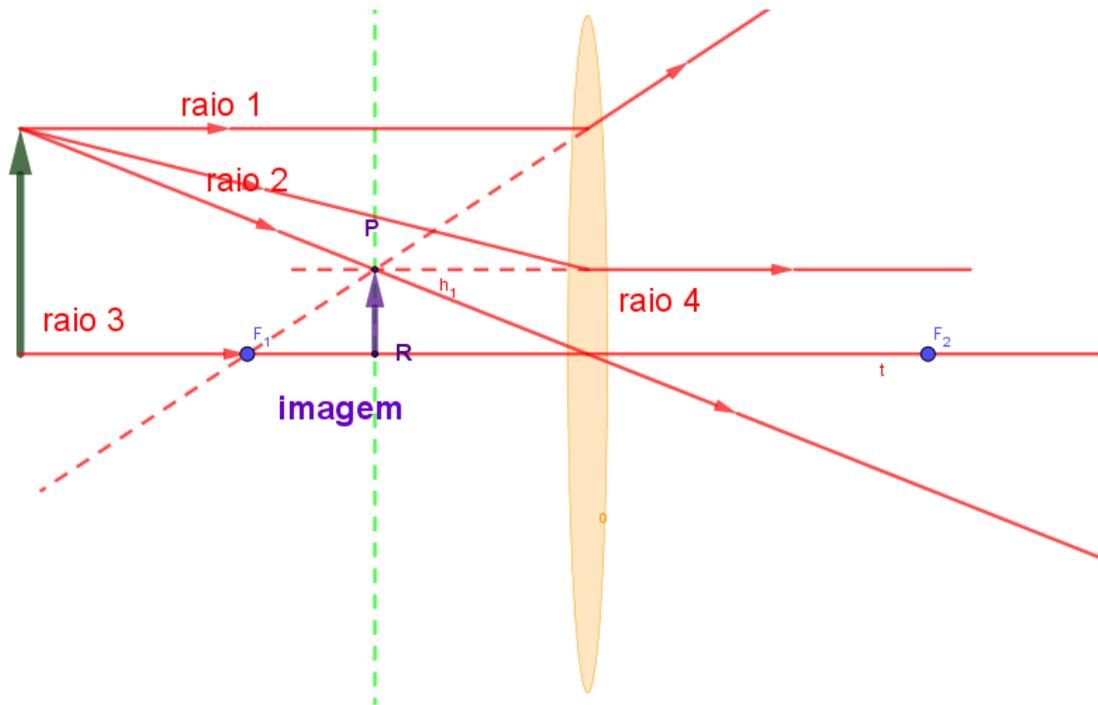


Figura 2.14: Formação de imagem em lentes divergentes a partir do traçado de raios. Fonte: O Autor

2.7 EQUAÇÃO DE LENTE DELGADA

A Equação de lente delgada, também conhecida como equação de Lente Fina, é usada para determinar os parâmetros de um sistema óptico de imagem. Na Figura 2.15 é apresentado o diagrama esquemático de um sistema óptico formado por uma lente convergente. Com uma análise de semelhança de triângulos é definida a equação da lente delgada a seguir. Para isso, com o traçado de raios são identificados: a altura da imagem indicada por h_i ; a distância do plano objeto até a lente por s_o e a distância da lente até o plano imagem por s_i . Na Figura 2.15 foram inseridos os pontos Q e Q' para indicar os vértices dos triângulos a serem analisados; os pontos P e P' estão exatamente nas posições do plano objeto e a imagem; o ponto A indica o ponto que o traçado paralelo ao eixo óptico cruza a lente; e por último, o ponto $O=(0,0)$ indica o ponto central da lente.

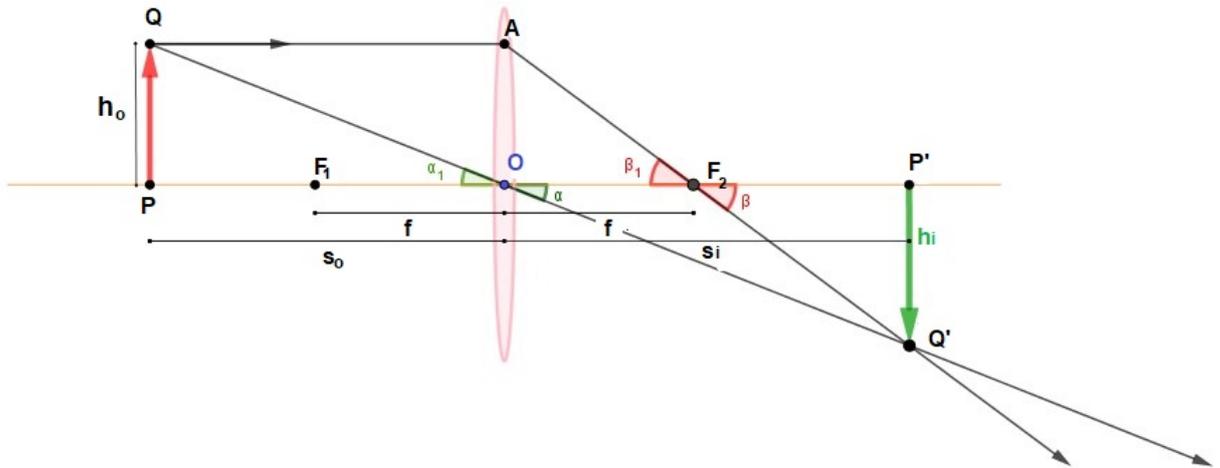


Figura 2.15: Diagrama esquemático de formação de imagem de um sistema óptico com uma lente convergente. Fonte: O Autor

A partir da semelhança dos triângulos formados ΔPQO e $\Delta P'Q'O$ é obtida a seguinte relação:

$$\frac{h_o}{s_o} = -\frac{h_i}{s_i} \quad (2)$$

Também pela semelhança de mais dois triângulos formados ΔOAF_2 e $\Delta P'Q'F_2$ é obtida a seguinte relação:

$$\frac{h_i}{h_o} = -\frac{s_i - f}{f} \quad (3)$$

Ao igualar a Equação 2 com a Equação 3 a partir da razão h_i/h_o é definida a equação de lente delgada, ou equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \quad (4)$$

Esta equação permite determinar as distâncias dos planos objeto (s_o) e imagem (s_i) em relação a lente (f) que forma o sistema óptico.

A razão das distâncias dos planos em relação à posição da lente ou da razão entre os tamanhos (alturas) do objeto se determina a magnificação (M) do sistema óptico dada por:

$$M = -\frac{s_i}{s_o} = \frac{y'}{y} \quad (5)$$

Para $M > 1$ o tamanho da imagem é maior que o objeto, $h_i > h_o$, indica que o objeto tem sua imagem ampliada. Para $0 < M < 1$ o tamanho da imagem é menor que o objeto,

$h_i < h_o$, indica que objeto tem sua imagem reduzida. Para o caso de $M = 1$ a imagem e o objeto tem o mesmo tamanho, $h_i = h_o$.

2.8 IMAGENS PRODUZIDAS POR LENTES DELGADAS

Nesta seção é analisada a formação da imagem dependendo da posição do objeto em relação a posição da lente. Na Figura 2.16 é apresentado o diagrama esquemático do sistema óptico formado por uma lente convergente para o caso em que o plano do objeto é localizado atrás do ponto focal F_1 . Então, os raios formam uma imagem invertida e real.

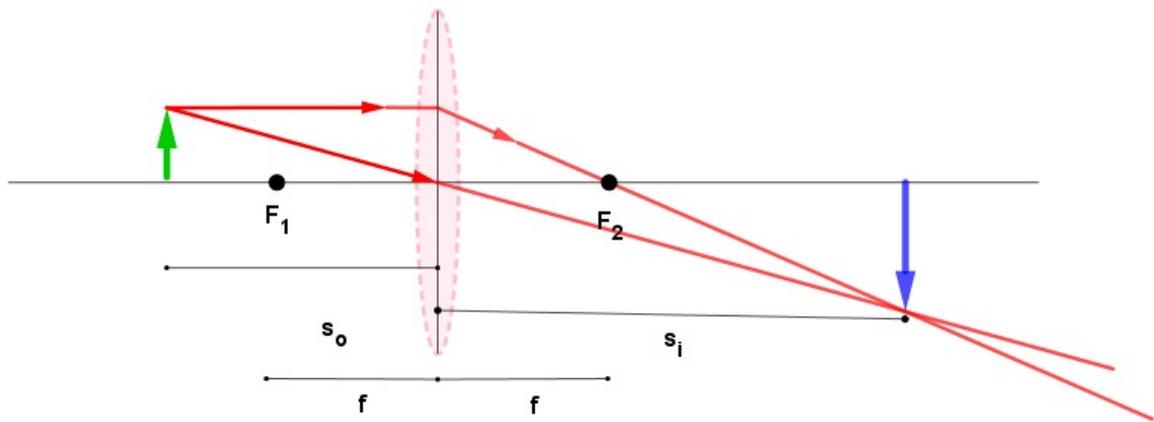


Figura 2.16: Diagrama esquemático do traçado de raios para um sistema óptico de uma lente convergente, se o $s_o > f$ a imagem é real e invertida. Fonte: [27] adaptado pelo Autor

Quando o plano objeto está entre o ponto focal F_1 e a posição da lente como apresentado no diagrama esquemático do sistema óptico de uma lente convergente da Figura 2.17. Neste caso, os raios formam uma imagem virtual e com a mesma orientação do objeto.

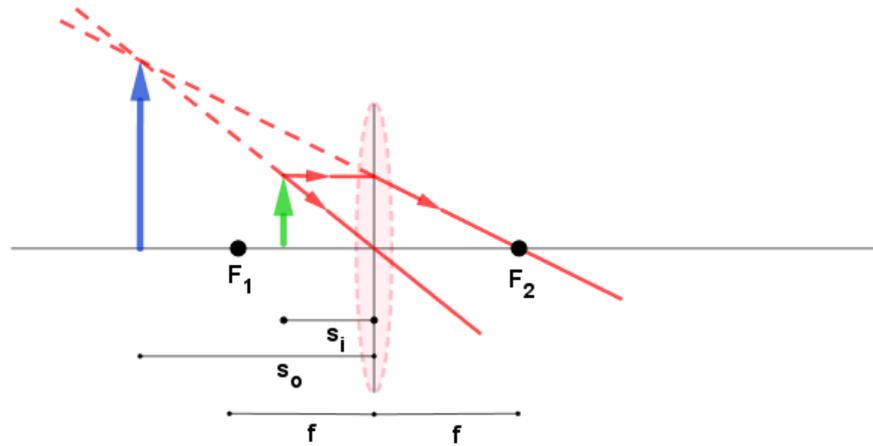


Figura 2.17: Diagrama esquemático do traçado de raios para um sistema óptico de uma lente convergente, se o $s_o < f$ a imagem é virtual e com a mesma orientação do objeto. Fonte [27] adaptado pelo Autor

A terceira análise é quando o plano objeto é localizado no ponto focal F_1 , indica então que $s_o = f$. Isto é observado no diagrama esquemático apresentado do sistema óptico de imagem formado por uma lente convergente da Figura 2.18. Os traçados de raios após a lente são paralelos, portanto não se encontram e sendo assim, a imagem formada está no infinito. No entanto nossos olhos fazem os raios convergirem, logo é possível ter uma imagem do objeto.

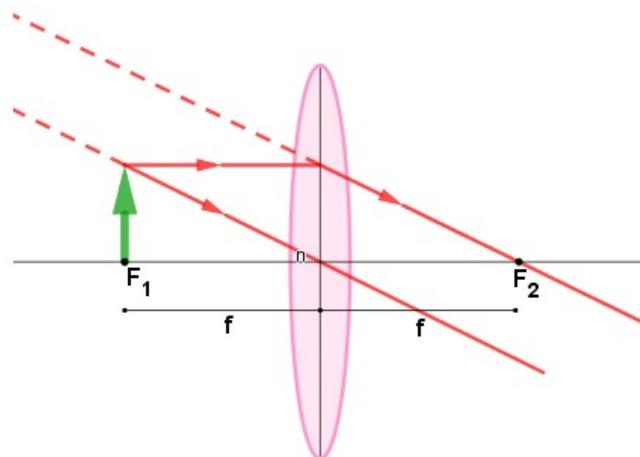


Figura 2.18: Diagrama esquemático do traçado de raios para um sistema óptico de uma lente convergente, se o $s_o = f$ a imagem não é formada. Fonte: [27] adaptado pelo Autor

Na situação do sistema óptico formado por uma lente divergente, como apresentado no diagrama esquemático da Figura 2.19, independentemente da posição do objeto, os raios formam uma imagem virtual com a mesma orientação do objeto.

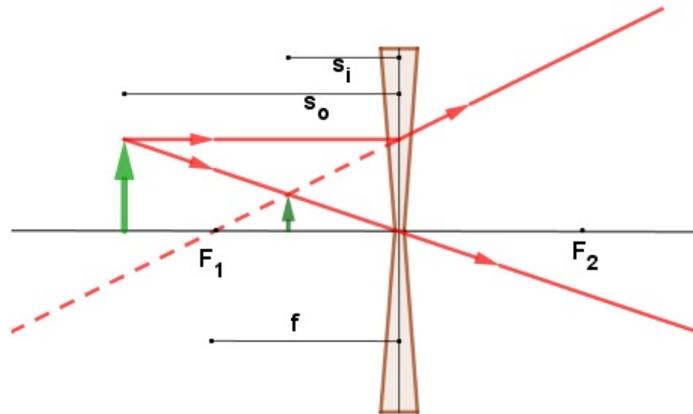


Figura 2.19: Diagrama esquemático do sistema óptico formado por uma lente divergente. A imagem é sempre virtual e não invertida. Fonte: [27] adaptado pelo Autor

2.9 LENTES E DEFEITOS NA VISÃO

É papel do professor contextualizar os assuntos abordados em sala de aula e trazer os conteúdos para a realidade do aluno. Uma maneira de fazer isso utilizando a óptica geométrica e as lentes é falando das ametropias oculares e como isso é corrigido. O olho humano está representado na figura 2.20.

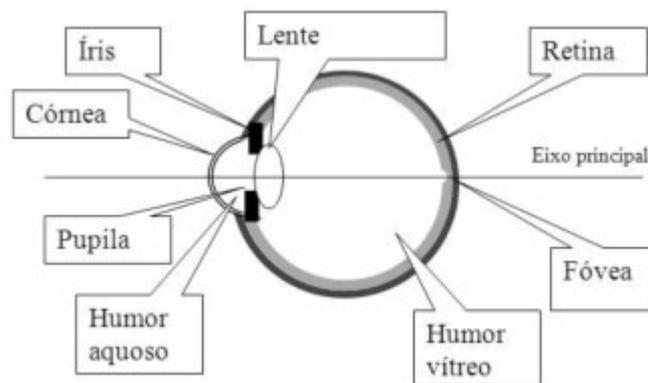


Figura 2.20: Diagrama esquemático do olho humano com seus elementos principais. Fonte: [31]

A refração da córnea e nas superfícies da lente formam uma imagem real na retina, na parte de trás do olho. A retina portanto funciona como plano imagem, onde é projetada uma imagem e transmitem os impulsos para o cérebro através do nervo óptico. Para que a imagem seja nítida, ela deve ser formada na retina. O olho através dos músculos ciliares se adaptam a qualquer distância do objeto, mudando a distância focal de sua lente. Esse processo é chamada de acomodação. A maior e a menor distância que são possíveis a visão são chamadas de ponto remoto e ponto próximo. O ponto remoto do olho normal está no infinito e o próximo depende da acomodação.

As ametropias são os defeitos da visão que ocorrem quando a imagem formada não está na retina. A imagem 2.21 esquematizam dois dos defeitos mais comuns. A **Miopia**, o globo ocular é alongado e a imagem formada por raios originados do infinito está em um ponto anterior a retina. Por outro lado na **Hipermetropia**, o globo ocular é curto e os raios luminosos de um objeto, convergem para um ponto atrás da retina.

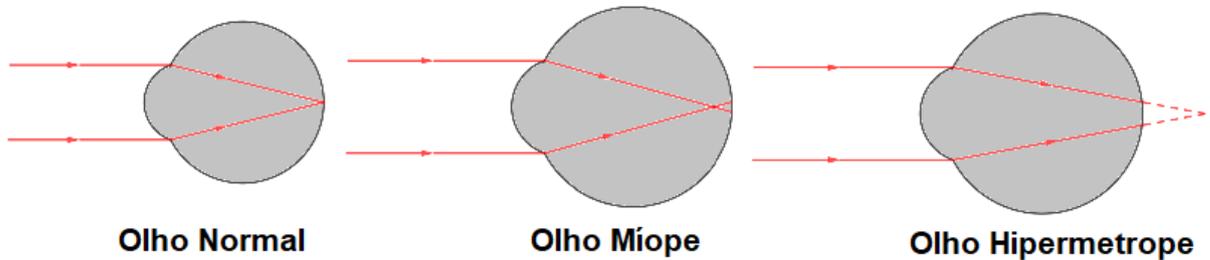


Figura 2.21: Diagrama esquemático da miopia e hipermetropia e suas diferenças em relação ao olho normal. Fonte: O Autor

A correção destas ametropias são feitas com uso de lentes. As pessoas com miopia tem dificuldade de enxergar objetos muito distantes, pois os raios convergem para um ponto anterior a retina. Uma lente divergente como na Figura 2.22 cria um objeto virtual dentro do ponto próximo do olho, sendo possível assim a acomodação e a projeção da imagem na retina.

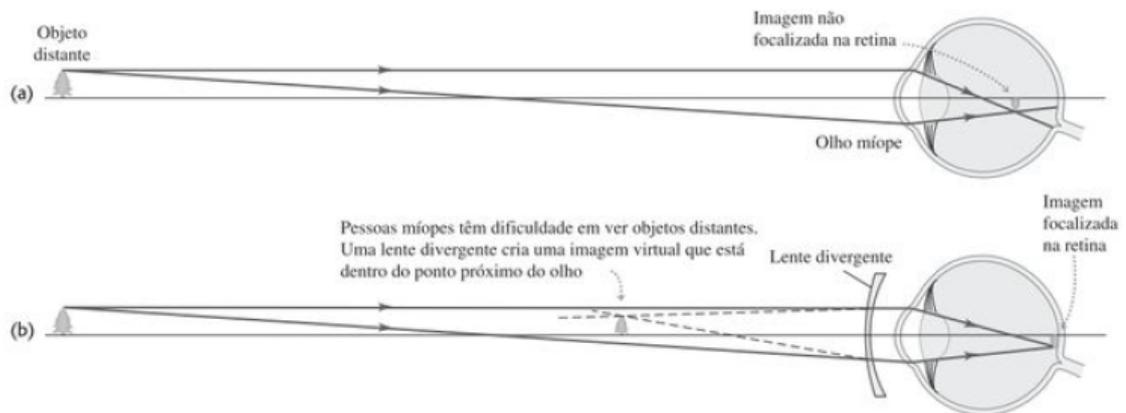


Figura 2.22: Correção da Miopia feita por uma lente divergente. Fonte: [28]

O hipermetrope, por sua vez, tem dificuldade em enxergar objetos próximos pois os raios convergem para um ponto atrás da retina. Na Figura 2.23 Uma lente convergente cria uma imagem virtual atrás do objeto com tamanho maior, dentro do ponto próximo do olho que consegue realizar a acomodação e projetar a imagem na retina.

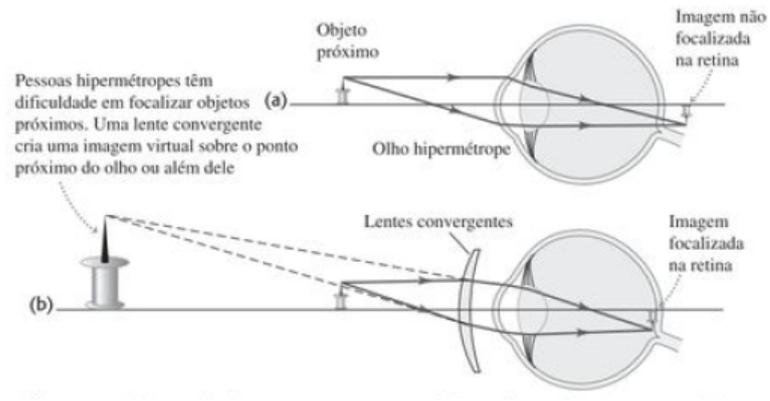


Figura 2.23: Correção da Hipermetropia feita por uma lente convergente. Fonte: [28]

AS MATRIZES

Nesse capítulo são apresentados a história, o conceito e as operações de matrizes, incluindo as matrizes de transferência de raios que são utilizadas nesse trabalho. Para os resultados e discussões deste trabalho usaremos apenas a operação de multiplicação de matrizes ao aplicar as matrizes de transferência de raios.

3.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

O conceito de matrizes é utilizado desde a antiguidade com os chineses, no entanto, a consolidação e disseminação de seus conceitos elementares foram feitos apenas no século XIX. Gottfried Leibniz e Carl Friedrich Gauss utilizaram matrizes em seus estudos, porém Arthur Cayley e James J. Sylvester chegaram na cobiçada consolidação algébrica [32]

Os chineses utilizavam as matrizes para resolver sistemas de equações com várias variáveis, utilizando métodos matriciais comuns hoje em dia [33]. No século XVII, Takakazu Seki Kowa (1642-1708) utilizou determinantes para resolver sistemas lineares, dando um grande passo para a evolução dos conceitos de matrizes e determinantes. Gottfried Leibniz, em 1698, sintetizou o método de Kowa. Reescrevendo a equação, eliminando as incógnitas, obteve uma regra para alcançar o determinante de um conjunto de equações. Isso mostra como matrizes e determinantes estão intimamente ligados a sistemas lineares de equações [34]. Diversos matemáticos foram importantes para a consolidação e demonstrações das relações, como Etienne Bézout (1730-1783), Alexandre Vandermonde (1735-1796), Gabriel Cramer (1704-1752), Colin Maclaurin (1698 - 1746), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) e Felice Chiò (1813-1871).

Entretanto, o ápice das matrizes veio na segunda metade do século XIX, com as ideias de Arthur Cayley (1821-1895) descritas em sua obra "Memoir on The Theory of Matrices". Arthur introduziu os conceitos de operações de matrizes e conceituou as matrizes especiais, além de utilizar as notações que conhecemos e utilizamos até hoje [34]. James J. Sylvester (1814-1897) foi mais um matemático importante para a consolidação dessas ideias. Ele introduziu o termo matriz e diferenciou do conceito de determinantes. Um bloco retangular de termos não representa em si um determinante, mas é como uma matriz que na qual pode-se formar um determinante [34] [35].

3.2 DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Seja dois números naturais m e n , ambos não nulos. Uma matriz real m por n (indicado por $m \times n$) indica uma tabela A formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas [36]. A seguir exemplos de matrizes apresentados, sendo A uma matriz 2×2 e B uma matriz 4×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

Em uma matriz A cada elemento é denotado por a_{ij} , onde i indica a linha e j indica a coluna onde o elemento se encontra. Por exemplos, alguns elementos da matrizes A e B :

Na matriz A , o elemento a_{22} é 0 que está localizado na linha 2 coluna 2. Na matriz B , o elemento por b_{13} é $\sqrt{2}$ que está localizado na linha 1 e coluna 3.

3.3 CLASSIFICAÇÃO DE MATRIZES

A seguir são apresentadas as matrizes especiais que são aquelas que possuem alguma particularidade.

Matriz Linha: matriz que possui apenas uma linha, ou seja, do tipo $1 \times n$

Matriz Coluna matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, do tipo $m \times 1$.

Matriz Nula Matriz onde todos os elementos são nulos.

Matriz quadrada de ordem n : Quando o seu número de linhas e colunas são iguais a n . Com isso uma matriz quadrada possui algumas elementos importantes

- Diagonal Principal: São os elementos m_{ii} onde $i = 1, \dots, n$. Ou seja, os elementos que os índices são iguais.
- Diagonal Secundária: São os elementos m_{ij} onde $i + j = n + 1$. Ou seja, os elementos que a soma dos índices é igual ao número de linhas mais um.

Matriz Diagonal Matrizes quadradas cujo os elementos que não estão na diagonal principal são zero.

Matriz Identidade Matriz diagonal que os elementos da diagonal principal são iguais a um.

3.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES

- a) **Igualdade de Matrizes:** Duas matrizes $m \times n$, A e B são iguais se e somente se, os elementos $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$. Por exemplo as matrizes A e B são iguais

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

- b) **Adição de Matrizes** Sejam as matrizes A e B de m linhas e n colunas. A matriz C de m linhas e n colunas é a soma $A + B$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j . Ou seja, os elementos de C são obtidos a partir da soma dos elementos correspondentes de A e B. Por exemplo a matriz C representa a adição da matriz A com a matriz B:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 12 \\ 2 & \frac{9}{6} & 3 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C = A + B$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 12 \\ 2 & \frac{9}{6} & 3 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 19 \\ 4 & \frac{15}{6} & 0 \\ 12 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

A Adição de Matrizes goza das seguintes propriedades:

- Comutatividade: $A + B = B + A$

Seja a matriz C tal que $C=A+B$. Logo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$. Como $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ e adição dos números reais é comutativa, $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$, logo $C = B + A$.

- Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Seja a matriz D tal que $D = (A + B) + C$. Logo $d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$ $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$. Como $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$ e adição dos números reais é associativa. Logo, $d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$, logo $D = (A + B) + C$.

- Elemento Neutro: Existe uma matriz M tal que $A + M = A$

Se $A + M = A$, então $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij}$ implicando que $m_{ij} = 0$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$. Logo, o elemento neutro da adição é a matriz nula.

- Possui elemento simétrico: Existe uma matriz A' tal que $A + A' = M$.

Pela demonstração anterior, M é uma matriz nula, logo $m_{ij} = 0 \forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$. Então $a_{ij} + a'_{ij} = 0$, logo $a'_{ij} = -a_{ij}$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$.

- c) **Produto de uma matriz por um número real:** Seja A uma matriz e k um número real qualquer. O produto $A \cdot k$ é a matriz B tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$. Ou seja, todos os elementos de B são produzidos a partir da multiplicação de k pelo elemento correspondente de A .

Por exemplo, seja a Matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $k = 2$ Logo produto $B = A \cdot k$ será a matriz:

$$B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & \frac{4}{6} & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 14 \\ 4 & \frac{8}{6} & -6 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja A e B duas matrizes de mesma dimensão e k e y dois números reais. O produto de uma matriz por um número real goza das seguintes propriedades.

- $k \cdot (y \cdot A) = (k \cdot y) \cdot A$

Seja $C = k \cdot (y \cdot A)$, logo $c_{ij} = k \cdot (y \cdot a_{ij})$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$ Como $a_{ij}, k, y \in \mathbb{R}$ e a multiplicação de números reais é associativa, então $c_{ij} = (k \cdot y) \cdot a_{ij}$, logo $C = (k \cdot y) \cdot A$.

- $(k + y) \cdot A = k \cdot A + y \cdot A$

Seja $C = (k + y) \cdot A$, logo $c_{ij} = (k + y) \cdot a_{ij}$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$ Como $a_{ij}, k, y \in \mathbb{R}$ e a multiplicação de números reais é distributiva em relação a adição, então $c_{ij} = k \cdot a_{ij} + y \cdot a_{ij}$, logo $C = k \cdot A + y \cdot A$.

- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
Seja $C = k \cdot (A + B)$, logo $c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$
Como, $k, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ e a adição de números reais é distributiva em relação a multiplicação então $c_{ij} = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij}$, logo $C = k \cdot A + k \cdot B$
- $1 \cdot A = A$ Seja $C = 1 \cdot A$, logo $c_{ij} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $j \in 1, \dots, n$.
Logo $C = A$

d) **Multiplicações de Matrizes:** Sejam as matrizes, A de m linhas e n colunas, e a matriz B de n linhas e p colunas. O produto de A e B é a matriz C de m linhas e p colunas, tal que:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ para todo } i \in 1, \dots, m \text{ e } j \in 1, \dots, p.$$

Ou na notação de somatório:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \quad (6)$$

A partir dessa definição podemos observar que o produto de A com B só existe, se e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B . Desta forma o produto de A com B é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B .

A seguir apresentamos alguns exemplos:

- (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ uma matriz 3×2 e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ uma matriz 2×3 . A multiplicação de A com B é possível, pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B . A matriz resultante AB será composta pelo número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz B , isto é, uma matriz 3×3 :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 & 4 \cdot 6 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 & 1 \cdot 6 + 6 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 16 & 24 & 27 \\ 23 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

- (b) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -\sqrt{8} & 5 \end{pmatrix}$ uma matriz 2×2 e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 8 & -1 & 20 \end{pmatrix}$ uma matriz 3×3 . Como o número de colunas da matriz A é diferente do número de linhas da matriz B , não é possível fazer a multiplicação.

O produto de matrizes goza das seguintes propriedades:

- Associatividade: $(AB)C = A(BC)$:

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{(m \times n)}$, a matriz $B = (b_{jk})_{(n \times p)}$ e a matriz $C = (c_{kl})_{(p \times r)}$.

Fazendo:

$$D = AB = (d_{ik})_{(m \times p)};$$

$$E = (AB)C = (e_{il})_{(m \times r)};$$

$$F = BC = (f_{jl})_{(n \times r)}$$

Temos que:

$$e_{il} = \sum_{k=1}^p d_{jk} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} \quad (7)$$

Pelas propriedades do somatório:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} = \\ & \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \\ & \sum_{k=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_{jl} = A(BC) \end{aligned} \quad (8)$$

Logo $(AB)C = A(BC)$.

- Distributividade a direita: $(A + B)C = AC + BC$

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{(m \times n)}$, a matriz $B = (b_{ij})_{(m \times n)}$ e a matriz $C = (c_{jk})_{(n \times p)}$.

Fazendo: $D = (A + B)C = d_{ik(m \times p)}$ temos:

$$(D_{il}) = \sum_{j=1}^n ((a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk})$$

Pelas propriedades do somatório:

$$\begin{aligned} (d_{ik}) &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) = \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot c_{jk} = \\ & AC + BC \end{aligned} \quad (9)$$

Logo $(A + B)C = AC + BC$

- Distributividade à esquerda: $C(A + B) = CA + CB$
Demonstração análoga feita na distributiva à direita.
- Associatividade em relação a multiplicação a um número real: $(KA)B = K(AB)$

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{(m \times n)}$, a matriz $B = (b_{jk})_{(n \times p)}$.

Fazendo: $D = kA = (d_{ij})_{m \times n}$;

$E = kB = (e_{jk})_{n \times p}$;

$F = AB = (f_{ik})_{m \times p}$

Temos que:

$$\begin{aligned} (KA)B &= \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot b_{jk} = \\ &= \sum_{j=1}^n (K \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} \end{aligned}$$

Pelas propriedades do somatório:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n (K \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} = \\ &= K \cdot \sum_{k=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = K(AB) \end{aligned} \quad (10)$$

Logo $(KA)B = K(AB)$

A partir da apresentação das propriedades do produto de matrizes podemos considerar duas observações importantes. A primeira é que a multiplicação não é comutativa, ou seja, $AB \neq BA$. A segunda se refere a afirmação $AB=0$ (matriz nula) então $A=0$ ou $B=0$ que não é verdadeira.

- e) **Transposição de Matrizes:** Seja A uma matriz m por n . A matriz transposta de A (indica-se por A^t) é a matriz B , n por m , tal que, $a_{ij} = b_{ji}$, ou seja, $A_{11} = B_{11}$, $A_{12} = B_{21}$, $A_{13} = B_{31}$ e assim sucessivamente. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 5 & -5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 8 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

A transposição, portanto, troca a disposição dos elementos na matriz. A primeira linha passa a ser a primeira coluna, a segunda linha passa a ser a segunda coluna e assim por diante.

A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

- $(A^t)^t = A$
O elemento (i, j) da Matriz A é a_{ij} , logo o elemento (i, j) da matriz A^t é $a_{ji} = a_{ij}$. Logo o elemento (i, j) de $(A^t)^t$ é $a_{ji} = a_{ij}$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
Seja $A + B = C = c_{ij}$ e $(A + B)^t = C^t = c'_{ji}$
Temos: $c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji}$ para todos i e j . Logo $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(kA)^t = k(A^t)$
Seja $(kA)^t = a'_{ji}$
Temos: $a'_{ji} = k \cdot a_{ij} = k \cdot a'_{ji}$ para todos i e j . Logo $(kA)^t = k(A^t)$
- $(AB)^t = A^t \cdot B^t$
Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m \times p}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p \times m}$
Temos $c_{ki} = c'_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} =$
 $\sum_{j=1}^n b_{jk} \cdot a_{ji} = \sum_{j=1}^n b'_{kj} \cdot a'_{ji}$. Logo $(AB)^t = A^t \cdot B^t$

Definições:

- *Matriz Simétrica*: Toda matriz quadrada de ordem n tal que $A^t = A$. Ou seja uma matriz e sua transposta são iguais.
- *Matriz antissimétrica*: Toda matriz de ordem n tal que $A^t = -A$. Ou seja uma matriz e sua transposta são opostas.

f) *Inversão de Matrizes* Uma matriz quadrada de ordem n é inversível se e somente se existir uma matriz B com a mesma dimensão de A tal que $AB = BA = I_n$. A matriz B é única e é chamada de inversa de A .

3.5 ANÁLISE DE RAIOS PARAXIAIS

A propagação de raios paraxiais é feita quando o ângulo θ formado pelo raio e o eixo óptico é no máximo 30° [37], pois nesse caso $\theta_1 \sin \theta_1 \approx \theta_2 \sin \theta_2$. Nesse caso, o sistema óptico de imagem pode ser descrita a partir de Matrizes de Transferência de Raios. Na Figura 3.1 é ilustrada a propagação de raios paraxiais através de uma lente. Com auxílio do traçado de raios de Óptica Geométrica, apresentados na seção 2.4.1, é possível definir que a luz incide na lente com altura h_1 e ângulo θ_1 . Após a dupla refração o raio de luz sai da lente com altura h_2 e ângulo θ_2 .

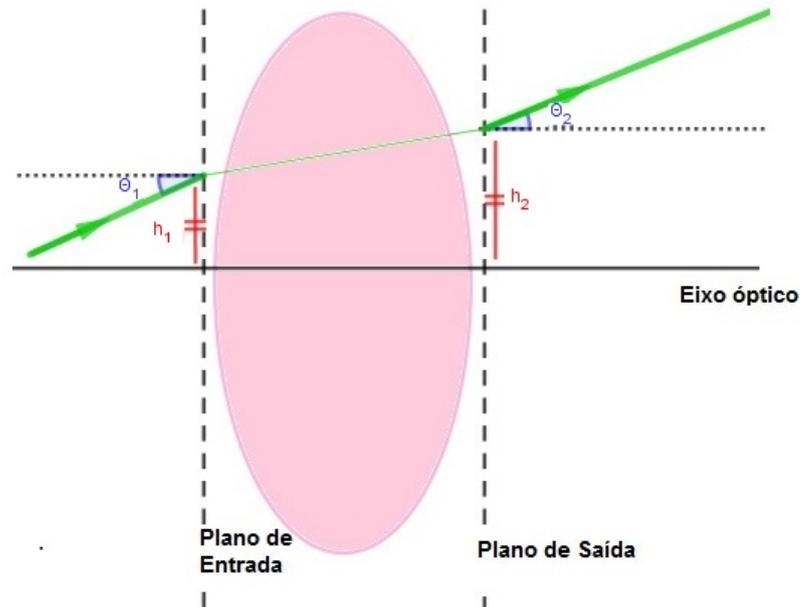


Figura 3.1: Diagrama esquemático do raio propagado através de uma lente de distância focal f . Fonte: [37] e adaptado pelo Autor.

Um raio paraxial é caracterizado pela distância ao eixo óptico (h_1) e pelo ângulo (θ_1) também com o eixo óptico. O caminho que o raio percorre através do sistema depende das propriedades da estrutura e das entradas h_1 e θ_1 . As saídas h_2 (distância ao eixo) e θ_2 (ângulo com o eixo óptico estrutura) são linearmente dependentes com as entradas e podem ser escritas como matriz,

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

onde a matriz $ABCD$ é chamada Matriz de Transferência de Raios e seu determinante é igual a 1 ($AD - BC = 1$). Os elementos da matriz $ABCD$ estão relacionadas com a distância focal f e h_1 e h_2 são as distâncias da estrutura óptica do plano de entrada e saída dos raios.

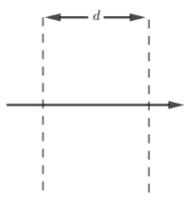
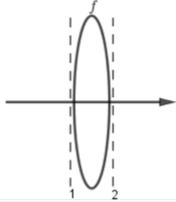
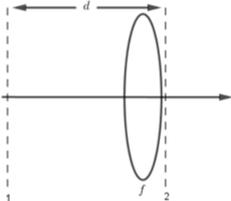
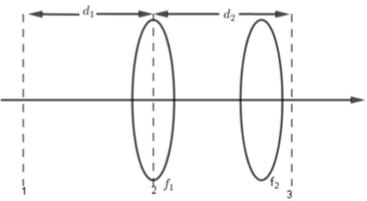
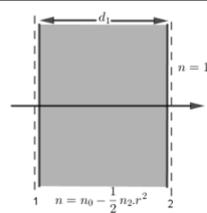
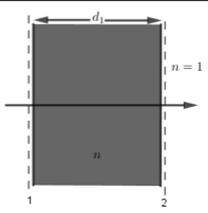
Na Tabela 3.1 são apresentadas as matrizes de transferências de raios de algumas estruturas com seus respectivos diagramas esquemáticos com lentes e meios com índices de refração, n . A seguir são descritas cada estrutura das matrizes apresentadas na Tabela 3.1:

- A primeira matriz descreve a transferência do raio através de uma distância d .
- A segunda matriz descreve a transferência de raios através de uma lente com distância focal f .
- A terceira matriz descreve uma combinação das duas primeiras. Primeiramente o raio passa por uma distância d e atravessa uma lente de distância focal f . Pode ser obtida como a combinação das matrizes 2 e 1.

- d) A quarta matriz descreve a passagem de raios através de duas estruturas do tipo 3. A matriz é obtida multiplicando as matrizes do tipo 3.
- e) A quinta matriz descreve a passagem de raio por um material que o índice de refração varia de acordo com a distância do eixo óptico. Esse caso ocorre lentes de gás.
- f) A última matriz descreve a passagem da luz por uma estrutura com índice de refração constante e diferente do ar. A matriz pode ser obtida pela Lei de Snell.

O índice 1 representa a entrada dos raios de luz através da estrutura, sendo o plano onde está localizado o objeto. O índice 2, por sua vez, representa a saída dos raios de luz, sendo o plano onde está localizado a imagem. Daqui pra frente serão representados pelos índices o (objeto) e i (imagem), respectivamente.

Tabela 3.1: Matrizes de transferências de principais estruturas para descrever meios e sistemas ópticos por onde o feixe de luz pode ser propagado.

No	Sistema Óptico	Matriz de Transferência
1		$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
3		$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}$
4		$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} - \frac{d_1}{f_2} - \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix}$
5		$\begin{pmatrix} \cos d\sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin d\sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin d\sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \cos d\sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \end{pmatrix}$
6		$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fonte: [37] e algumas adaptações feitas pelo Autor.

A grande vantagem do uso de matrizes de transferência de raios na descrição de um sistema óptico de imagem é que apenas uma matriz pode representar todo o sistema óptico independente do número de elementos que o compõe. Por exemplo, se um sistema possui dez lentes, seria necessário aplicar a equação de lentes dez vezes, ao passo que é possível representar todos os elementos a partir de uma única matriz. Para tal, basta fazer a multiplicação das matrizes sempre na ordem do caminho que a luz propaga.

Por exemplo, temos que a matriz 3 da tabela 3.1 é a combinação das matrizes 1 e 2. Os raios de luz passa por uma distância d e depois por uma lente de distância focal f . Logo devemos multiplicar as matrizes 1 e 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot d + 0 \cdot 1 \\ -\frac{1}{f} \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -\frac{1}{f} \cdot d + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}$$

O sistema óptico 3 é uma combinação dos sistemas 1 e 2, logo, a matriz de transformação 3 é uma multiplicação das matrizes 2 e 1. Sendo assim, se quisermos combinar diversas lentes, podemos multiplicar matrizes e obter apenas uma, que representará todo o sistema. Outro exemplo é a matriz 4 que é a multiplicação de duas matrizes do tipo 3.

MATERIAIS E MÉTODOS PARA O DESENVOLVIMENTO E CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS ÓPTICOS

Os métodos para desenvolver e determinar as características de sistemas ópticos de imagem usados neste trabalho são os seguintes:

- I Equação de lentes;
- II Traçado de Raios;
- III Tratamento Matricial;
- IV Atividade prática - Montagem do experimento.

4.1 MÉTODO I - EQUAÇÃO DE LENTES

A Equação 4 da seção 2.7, que se refere à equação da lente, é a forma mais simples e indicada para o desenvolvimento de um sistema óptico de imagem, ou seja, é a partir desta equação que inicia-se a montagem de um sistema óptico. Para isso, podemos partir das condições iniciais, dada pela distância focal da lente f e a Magnificação M definida na seção 2.4 pela Equação 5. Partindo da Equação 4 e substituindo $s_i = M \cdot s_o$, temos as distâncias do objeto e imagem em função das condições iniciais

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{\frac{s_i}{M}} \quad (14)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_i} + \frac{M}{s_i} \quad (15)$$

$$s_i = f(1 + M) \quad (16)$$

$$s_o = \frac{f}{M}(1 + M) \quad (17)$$

As equações 16 e 17 serão usadas para definir as condições iniciais dos próximos métodos.

4.2 MÉTODO II - TRAÇADO DE RAIOS

4.2.1 Traçado de raios para um sistema óptico formado por uma lente

De acordo com os fundamentos de óptica geométrica, apresentados na seção 2.3, podemos traçar raios que nos permite conhecer qual será o tamanho e a posição da imagem, a partir do tamanho e da posição do objeto em relação a lente. Este método é bem prático pois seu funcionamento é através do desenho dos raios de luz. Pode-se aplicar a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras para relacionar os parâmetros da imagem e do objeto. O traçado de raios pode ser usado para confirmar os cálculos efetuados no método I.

Este método pode ser realizado apenas com papel, lápis e régua, no entanto, vamos usar um programa desenvolvido pelo pesquisador Dr. Rudimar Riva, atualmente Professor Visitante da UNIFESP, mostrando assim, uma utilidade dos programas de planilhas. O programa de traçado de raios é apresentado na Figura 4.1, definido para o sistema óptico formado por uma lente.

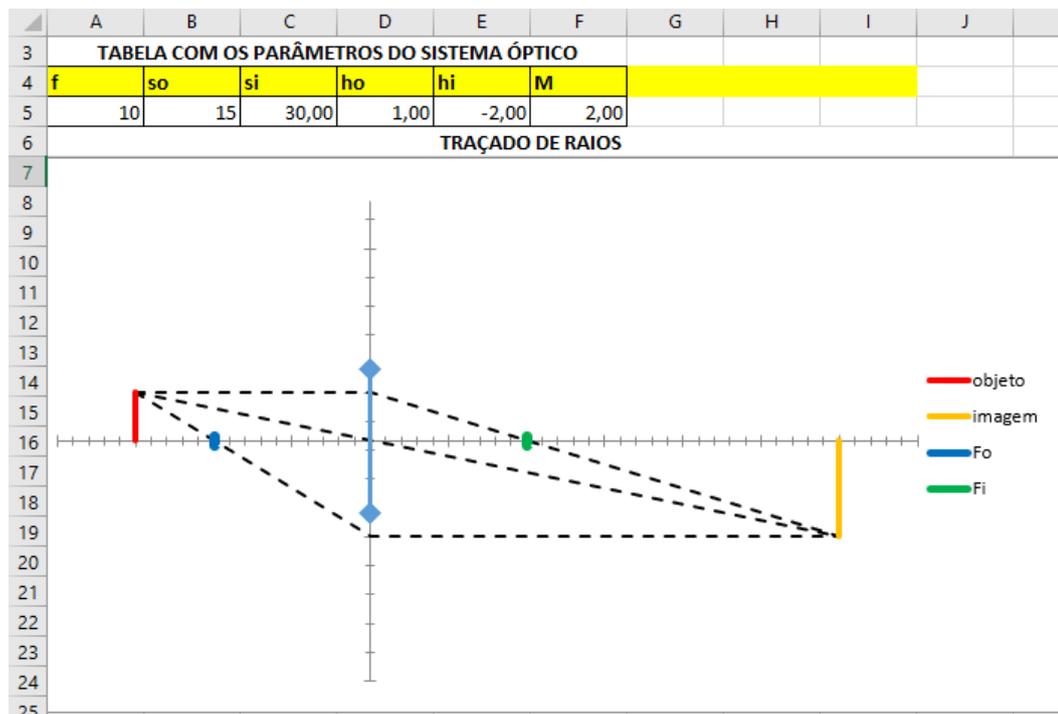


Figura 4.1: Programa de planilhas utilizado para o traçado de raios para um sistema óptico formado por uma lente. Fonte: O Autor

Na parte superior encontra-se uma tabela, onde se insere os parâmetros do plano objeto s_o , h_o e a distância focal f . Os parâmetros do plano imagem s_i e h_i são calculados automaticamente através da equação de lentes (Equação 4). A magnificação M também é calculada automaticamente como a razão entre h_i e h_o , por sua definição apresentada na seção 2.7 pela Equação 5.

Logo abaixo da tabela, é plotado um gráfico com o traçado de raios, feito a partir de um gráfico cartesiano onde o eixo óptico é o eixo das abscissas e a lente é representada

pelo segmento em azul, nos eixos das ordenadas. Os pontos azul e verde são os focos reais e virtuais a lente. O objeto está em linha contínua na cor vermelha atrás do foco, no semieixo x negativo do sistema cartesiano.

Três raios estão traçados em linha tracejada na cor preta, conforme as orientações descritas na seção 2.4.1. Os três traços se cruzam em um ponto, que define a altura da imagem em relação ao eixo y (ordenada) e a posição da imagem em relação a lente é encontrada em relação ao eixo x (abscissa). A imagem formada é paralela a lente, do eixo óptico até esse ponto, representada pela linha amarela contínua.

4.2.2 Traçado de Raios para o sistema óptico formado por duas lentes

Na Figura 4.2 é apresentado o programa de planilhas para o sistema óptico de imagem formado por duas lentes L1 e L2. Cada lente possui seus planos objetos e imagens indicados pelos índices 1 e 2 respectivamente.

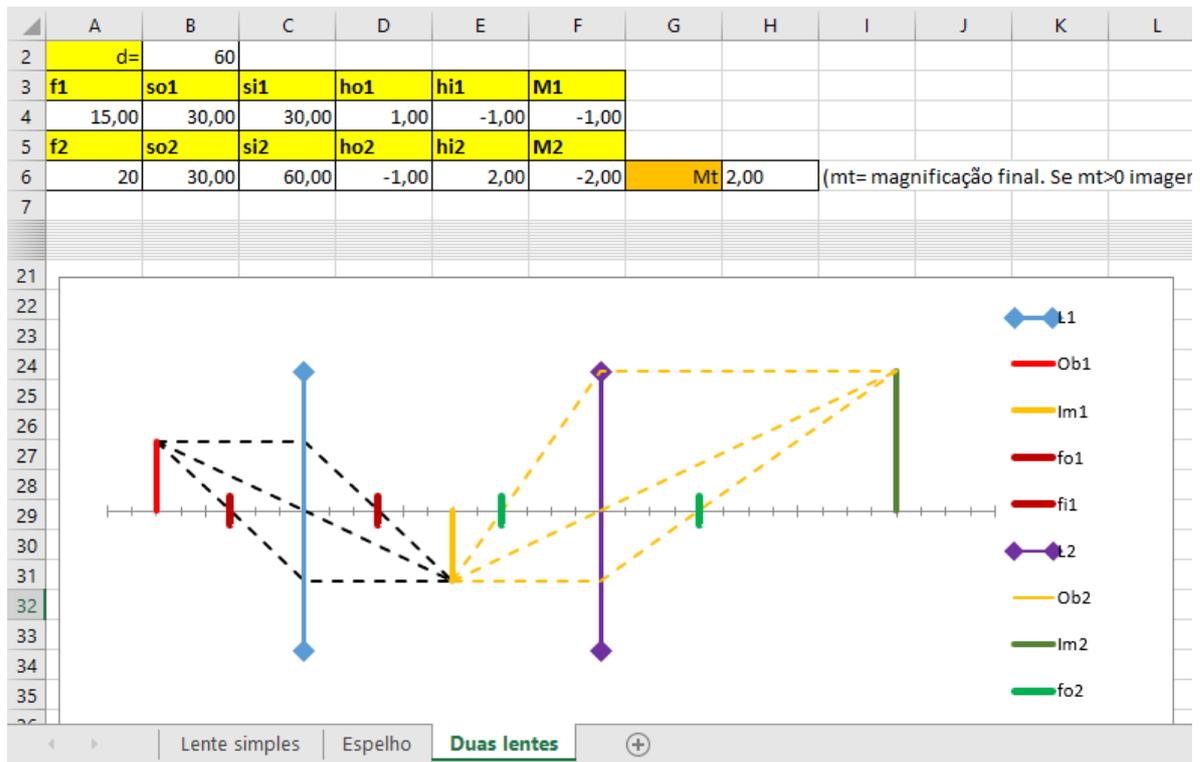


Figura 4.2: Programa de planilhas utilizado para o traçado de raios para um sistema óptico formado por duas lentes. Fonte: O Autor

Na parte superior da planilha está a tabela com os parâmetros das duas lentes. Neste caso, temos que incluir, o parâmetro d que é a distância entre as duas lentes, logo $d = s_{i1} + s_{o2}$. A primeira linha da tabela dados refere-se aos parâmetros de L1, onde f_1 , s_{o1} e h_{o1} . Os parâmetros h_{i1} e s_{i1} da imagem e a magnificação M_1 são calculadas automaticamente.

A segunda linha refere-se aos parâmetros de L2 e sua distância focal f_2 . Os dados do plano objeto de L2 são exatamente iguais do plano imagem de L1, ou seja, $h_{o2} = h_{i1}$ e

$s_{o2} = d - s_{i1}$. Os parâmetros do plano imagem e M_2 são calculados automaticamente. A magnificação total M_t do sistema é então calculado pela razão do tamanho da imagem (h_{i2}) e o tamanho do objeto (h_{o1}).

Logo abaixo da tabela da Figura 4.2 é plotado um gráfico com o traçado de raios. O processo é similar ao caso anterior, no entanto, deve ser feito duas vezes, já que há duas lentes. A lente L2 é apresentada pela linha roxa, paralela ao eixo das ordenadas. Após a formação da imagem pela lente L1, representada pela linha contínua amarela, é feito novamente os três raios em linha tracejada amarela, que se encontram em um ponto que será o topo da imagem referente a lente L2. Essa imagem é paralela as lentes, começando do eixo óptico e terminando nesse ponto, representado pela linha contínua verde.

4.3 MÉTODO III - TRATAMENTO MATRICIAL

Este método consiste em utilizar as matrizes de transferências, apresentadas na seção 3.3, e aplicar a multiplicação de matrizes para caracterizar os sistemas ópticos de imagem.

4.3.1 Sistema óptico formado por uma lente

Para a formação de imagem usando uma lente convergente, é necessário usar as matrizes 1 e 3, descritas na Tabela 3.1, apresentadas na seção 3.3. Na Figura 4.3 é apresentado o diagrama esquemático do sistema óptico formado por uma lente, o qual é caracterizado por duas matrizes de transferência:

- Matriz 1 descreve o caminho óptico da distância do plano até a lente (s_o) e uma lente com distância focal (f)
- Matriz 2 descreve o caminho óptico da distância da lente até o plano imagem (s_i)

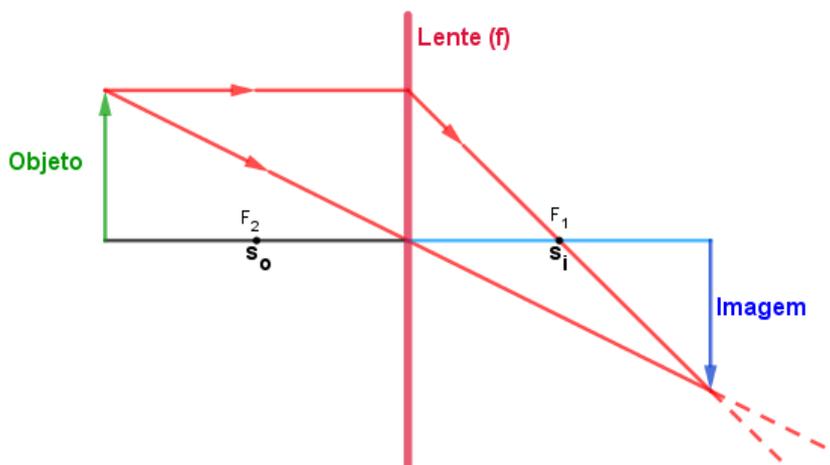


Figura 4.3: Diagrama esquemático de um sistema óptico formado por uma lente, com as distâncias que serão percorridas pelos raios de luz até a formação da imagem. Fonte: O Autor

Conforme já visto, a multiplicação das matrizes deve ser feita na ordem inversa, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_o \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{s_o}{f} \end{pmatrix} = \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s_i}{f} & s_o + s_i - \frac{s_o s_i}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{s_o}{f} \end{pmatrix} \quad (19)$$

A matriz de transformação da Equação 19 será utilizada para obter as características de um sistema óptico de imagem formado por uma lente.

Como uma opção adicional, as multiplicações das matrizes foram feitas com o Excel para facilitar o processo e otimizar a verificação de dados. A planilha é apresentada na Figura 4.4 mostrando um exemplo de como a ferramenta é utilizada para o sistema óptico formado por uma lente.

O produto das matrizes 2 e 1 é denominada "Matriz de Transformação". Essa matriz é multiplicada pela "Matriz inicial" de entrada. Essa operação resulta em uma matriz 2×1 , onde o primeiro elemento representa o tamanho do objeto no plano da imagem e o segundo elemento representa o ângulo de emergência. Os resultados serão discutidos no próximo capítulo.

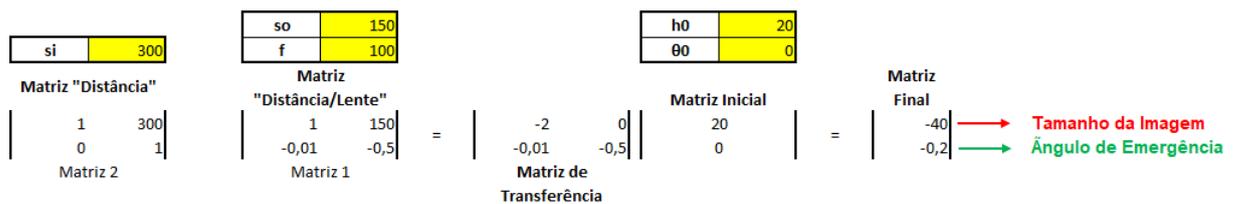


Figura 4.4: Tratamento matricial feito em um programa de planilhas. Esta multiplicação de matrizes refere-se ao sistema óptico formado apenas por uma lente. Fonte: O Autor

4.3.2 Sistema óptico de imagem formado por duas lentes

Para duas lentes L1 e L2 temos a combinação de três matrizes, da seguinte forma:

- Matriz 1 descreve o caminho óptico da distância do plano objeto até L1 (s_o) e uma lente com distância focal (f_1).

- Matriz 2 descreve o caminho óptico da distância entre as duas lentes (d) e a lente L2. (f_2).
- Matriz 3 descreve o caminho óptico da distância de L2 até o plano imagem (s_{i2}).

As matrizes utilizadas nesse caso, são as matrizes 3, 3 e 1 da Tabela 3.1 da seção 3.3. Na Figura 4.5 é apresentado o esquemático do sistema óptico de imagem formado por duas lentes com as distâncias percorridas pelos raios de luz até a formação da imagem.

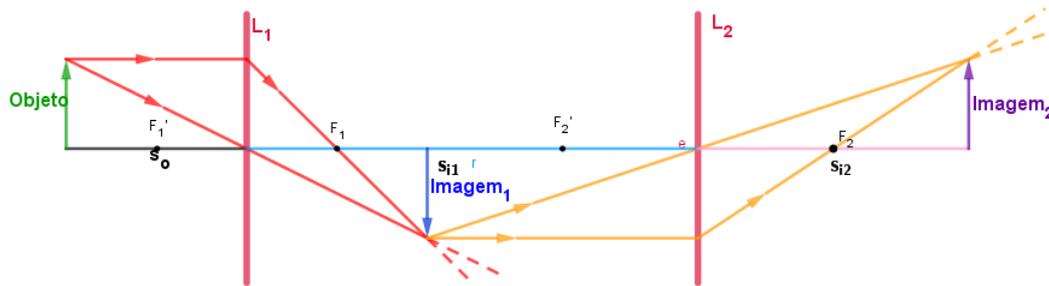


Figura 4.5: Diagrama esquemático do sistema óptico formado por duas lente. Fonte: O Autor.

A distância s_{o1} é a distância do plano objeto à lente L1 de distância focal f_1 . A lente L1 produz uma imagem que será o plano objeto para o sistema da lente L2. O parâmetro d é a distância entre L1 e a lente L2 de distância focal f_2 . A distância da imagem produzida pela segunda lente é dada por s_{i2} .

Conforme já visto, a multiplicação de matrizes é efetuada na ordem inversa ou seja, é multiplicado a partir da matriz 3 com a matriz 2 e a matriz resultante, é multiplicada com a matriz 1, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{i2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{o1} \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{s_{o1}}{f_1} \end{pmatrix} = \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s_{i2}}{f} & d + s_{i2} - \frac{d s_{i2}}{f_2} \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{o1} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{s_{o1}}{f} \end{pmatrix} = \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s_{i2}}{f_2} - \frac{d}{f_1} - \frac{s_{i2}}{f_1} + \frac{d s_{i2}}{f_1 f_2} & s_o - \frac{s_{i2} s_o}{f_2} + (d + s_{i2} - \frac{d s_{i2}}{f_2}) \cdot (1 - \frac{s_o}{f_1}) \\ -\frac{1}{f_2} + (1 - \frac{d}{f_2}) (-\frac{1}{f_1}) & -\frac{s_o}{f_2} + (1 - \frac{d}{f_2}) (1 - \frac{s_o}{f_1}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

A matriz de transformação da equação 22 será utilizada para obter as características de um sistema óptico formado por duas lentes.

Como uma opção adicional, as multiplicações de matrizes foram feitas com o Excel cujo modelo é apresentado na Figura 4.6 mostrando um exemplo de como a ferramenta é utilizada para um sistema óptico composto por duas lentes.

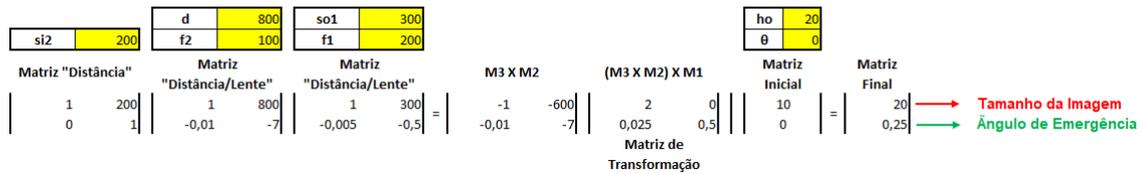


Figura 4.6: Esquema do programa de planilha feito para o tratamento matricial do sistema óptico de duas lentes. Fonte: O Autor

As matrizes foram colocadas na ordem da multiplicação M_3 , M_2 e M_1 . O produto $M_3 \times M_2$ está representada em M3 x M2. O resultado da multiplicação das três matrizes está representada em (M3 X M2)x M1. Essa é a matriz de transformação que será multiplicada com a matriz inicial. Essa operação resulta numa matriz (2×1) , onde o primeiro elemento representa o tamanho da imagem e o segundo representa o ângulo de emergência. Os resultados dessas multiplicações serão discutidos no capítulo 5.

4.4 MÉTODO IV - ATIVIDADE PRÁTICA - EXPERIMENTOS

Neste método propomos a realização de atividades práticas que possuem o objetivo de montar os sistemas ópticos de imagem utilizando os dados obtidos pelo métodos I, II e III apresentados neste capítulo. Os experimentos foram realizados com os materiais do laboratório de Física da UNIFESP - Campus São José dos Campos. Todos os materiais são do fornecedor PASCO (empresa de kits didáticos) e estão listados a seguir. Para ambos sistemas ópticos de imagem (uma ou duas lentes) foram utilizados os mesmos elementos apresentados na Figura 4.7 [38].



Figura 4.7: Uma fotografia dos elementos ópticos usados no arranjo experimental dos sistemas ópticos de imagem montados. Fonte: O Autor.

- a) **Fonte luminosa (objeto)** é uma caixa preta com uma luz branca dentro onde uma das faces da caixa possui o gabarito de setas cruzadas de 20 mm de comprimento. Este gabarito foi usado como o objeto a ser imageado pelos sistemas ópticos de imagem.

- b) **Tela de visualização branca ou anteparo** utilizada para projetar a imagem produzida pela lente.
- c) **Trilhos ópticos de comprimento iguais a 1,20 m e 2,0 m** onde a fonte de luz, a lente e a tela de visualização serão posicionados e fixados. Esse trilho é milimetrado e refere-se ao eixo óptico do sistema óptico de imagem.
- d) **Três lentes esféricas** sendo duas convergentes (L1 e L2) de distância focal igual a $f_1 = 200$ mm e $f_2 = 100$ mm e uma lente divergente (L3) de distância focal igual a $f_3 = 150$ mm.

Com os dados adquiridos nos três primeiros métodos, foram posicionados o objeto (fonte), a(s) lente(s) e a tela de visualização no trilho óptico. Medimos o tamanho da imagem projetada no anteparo usando uma régua escolar comum. Pode haver erros de medida, imagens com tamanhos distintos dos encontrados matematicamente, pois há o fenômeno de difração, como vimos no item 2.1 desse trabalho. Entretanto como já mencionado, esse fenômeno não interfere de maneira direta. Além disso pode haver erros de medidas devido às condições do trabalho que não são perfeitas.

A infraestrutura e os materiais da UNIFESP colaboram para fazer os experimentos mas podem ser substituídos por materiais de baixo custo e produzidos pelos próprios alunos. Por exemplo, é sugerido substituir a fonte por uma caixa com uma lâmpada dentro dela. As lentes podem ser de baixo custo feitas com gelatina incolor e a tela de visualização pode ser um pedaço de papelão revestida com uma folha de papel branco, ou qualquer objeto de superfície plana lisa da cor branca.

RESULTADOS

Neste capítulo estão os resultados do desenvolvimento dos cálculos e atividades práticas referentes aos quatro métodos aplicados para caracterizar três sistemas ópticos de imagens. Estes sistemas ópticos são propostas de atividades para serem aplicados em sala de aula. O primeiro é formado apenas por uma lente convergente, o segundo formado por duas lentes convergentes e o último sistema óptico é formado por uma lente convergente e uma lente divergente.

5.1 SISTEMA ÓPTICO FORMADO POR UMALENTE

Construir um arranjo experimental de um sistema óptico de imagem formado por uma lente convergente de $f = 100$ mm para obter uma imagem com o dobro do tamanho do objeto (magnificação $|M| = 2$). O objeto possui altura igual a $h_o = 20$ mm.

Método I - Equação de Lentes

Através da Equação 16 e Equação 17 descritas na seção 4.1 foram determinadas as distâncias s_o e s_i da seguinte forma:

$$s_i = f(1 + M)$$

$$s_i = 100(1 + 2)$$

$$s_i = 300 \text{ mm}$$

$$s_o = \frac{f}{M}(1 + M)$$

$$s_o = \frac{100}{2}(1 + 2)$$

$$s_o = 150 \text{ mm}$$

Com este método foi determinado que a distância $s_i = 300$ mm é o dobro da distância $s_o = 150$ mm devido a magnificação $M = |2|$. Conseqüentemente, o tamanho do objeto no plano da imagem é dobrado sendo igual a $h_i = 40$ mm. Isto é confirmado no traçado de raios a seguir.

Método II - Traçado de Raios

Os resultados obtidos pelo método I são as condições iniciais para realizar o traçado de raio, sendo então $s_o=150$ mm e $s_i=300$ mm. O diagrama esquemático do traçado de raios apresentado na Figura 5.1 foi configurado conforme a descrição da seção 4.2. Então, com o traçado de raios é possível conferir os resultados calculados no método I a partir de uma análise da semelhança de triângulos formados na região antes e depois da lente conforme o diagrama esquemático apresentado na Figura 5.2.

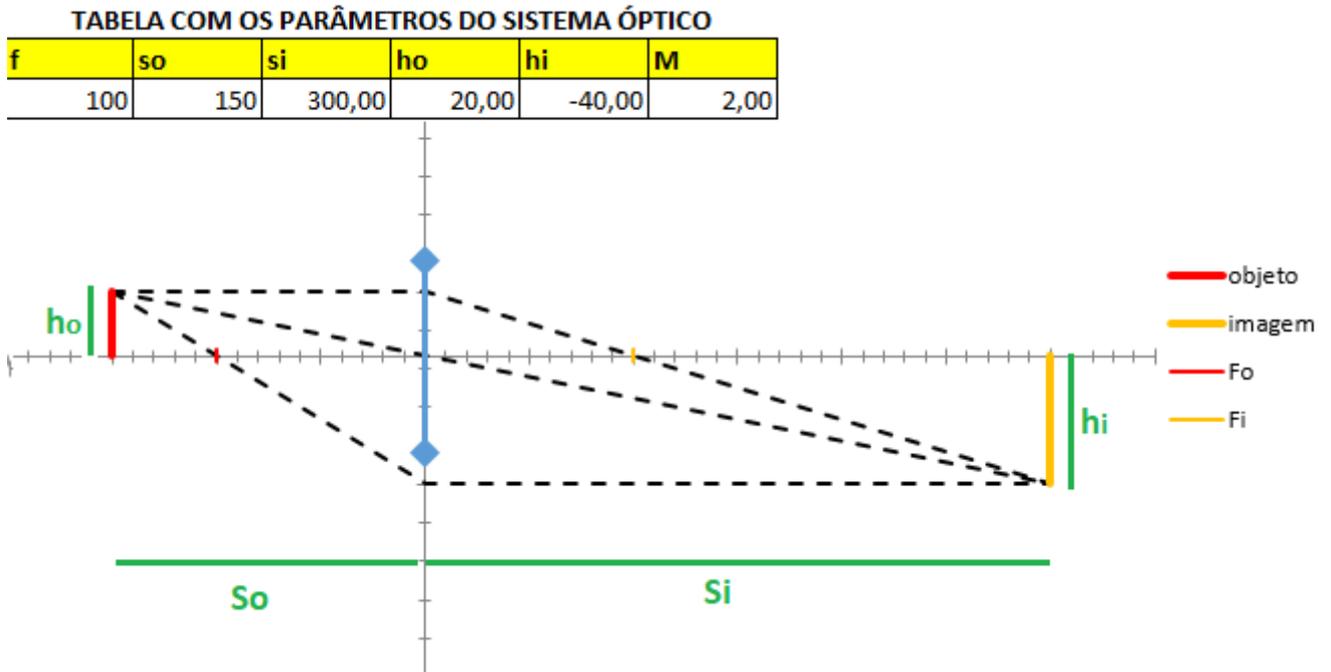


Figura 5.1: Diagrama esquemático do traçado de raios do sistema óptico de imagem formado por uma lente com $f=100$ mm, $s_o = 150$ mm, $s_i = 300$ mm, $|M|=2$, $h_o = 20$ mm e $h_i = 40$ mm. Fonte: O Autor

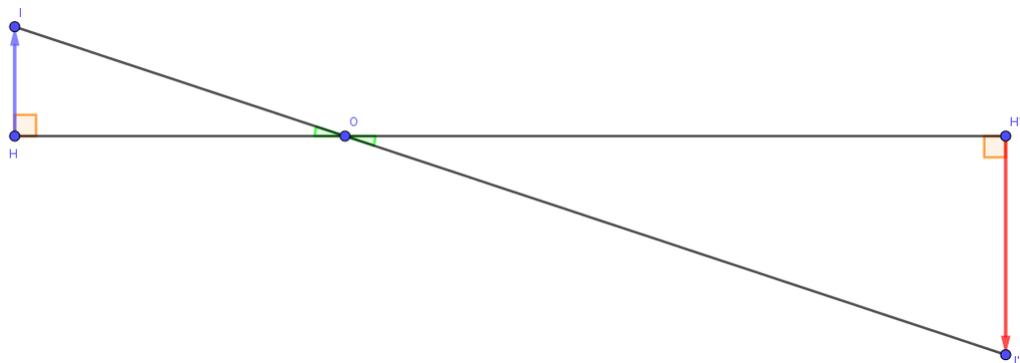


Figura 5.2: Análise da semelhança de triângulos para o sistema óptico formado apenas por uma lente mostrando que o tamanho do objeto no plano da imagem é o dobrado. Fonte: O Autor

Os ângulos $I\hat{O}H$ e $I'\hat{O}H'$ são congruentes (opostos pelo vértice). Além disso os ângulos HIO e $H'I'O$ são retos. Portanto os triângulos ΔHIO e $\Delta H'I'O$ são semelhantes. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{HI}{IO} &= \frac{I'H'}{O'I'} \\ \frac{HI}{150} &= \frac{I'H'}{300} \\ \frac{I'H'}{HI} &= 2\end{aligned}$$

Portanto, a razão entre os tamanhos resulta igual a 2, exatamente a $|M| = 2$ a qual foi adotada para este sistema óptico.

Método III - Tratamento Matricial

No tratamento matricial de um sistema formado por uma lente são usadas as descrições apresentadas na seção 4.3. A partir das condições iniciais e dos resultados obtidos nos métodos I e II e escolhendo um raio incidente com ângulo de incidência $\theta = 0$ rad é determinado a altura h_i e ângulo θ_i no plano da imagem. Estes dados são substituídos na matriz descrita na Equação 19 da seção 4.3 da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{300}{100} & 300 + 150 - \frac{300 \cdot 150}{100} \\ -\frac{1}{100} & 1 - \frac{150}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -0,01 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -0,01 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 + 0 \\ 0,2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

Como esperado para um sistema óptico com $|M| = 2$, a altura do objeto no plano imagem é $h_i = 40$ mm. Esse resultado é negativo indicando que a imagem é invertida. O raio sai da lente com desvio dado pelo ângulo $\theta_i = 0,2$ radianos.

Método IV - Montagem do Experimento

Na Figura 5.3 e Figura 5.4 são apresentados a montagem experimental e o alinhamento dos elementos ópticos do sistema óptico de imagem formado por uma lente. Na Figura 5.3 é apresentada a disposição dos elementos ópticos fixados sobre o trilho óptico a partir dos parâmetros do sistema óptico determinados pelo método I e confirmados com os métodos II e III. O arranjo experimental é montado e alinhado conforme diagrama esquemático apresentado na Figura 4.7 da seção 4.4. Na Figura 5.5 é apresentada uma fotografia da

imagem do objeto formada no anteparo. A altura do objeto no plano imagem foi dobrada como previsto pelos métodos anteriores.



Figura 5.3: Foto da disposição dos elementos ópticos fixados conforme as distâncias calculadas com auxílio dos métodos I e II. Fonte: O Autor



Figura 5.4: O experimento visto por outro ângulo. Fonte: O Autor

Na Figura 5.5 é apresentada a imagem formada no anteparo posicionado no plano imagem do sistema. O tamanho da imagem igual a 41 mm foi medido manualmente usando uma régua escolar. Essa diferença entre o valor calculado e o medido experimental é aceitável, já que experimental sempre haverá a presença do efeito de difração. A imagem está invertida pois a seta está apontada para baixo. Esse fato já era esperado nos métodos II e III, onde o tamanho da imagem é negativo. Lembrar que foi considerado a metade do objeto que possui sua figura simétrica.

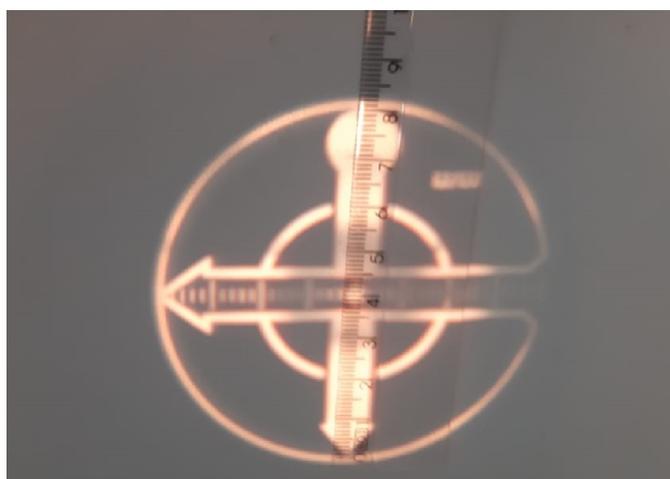


Figura 5.5: Ilustração da imagem formada no plano de imagem do objeto de altura igual a $h_o = 20$ mm. A imagem do objeto apresenta uma $|M| = 2$ e então a altura é igual $h_i = 40$ mm. Fonte: O Autor.

Na Tabela 5.1 é apresentada uma comparação dos resultados encontrados pelos quatro métodos usados para o sistema óptico formado por uma lente convergente. As distâncias s_o e s_i , distância focal f , h_o , não são alterados. A única diferença é o resultado do tamanho da imagem h_i , pois no método experimental ocorre o fenômeno de difração e as condições do trabalho não são totalmente confiáveis

áveis

Tabela 5.1: Comparação dos resultados dos parâmetros encontrados pelos quatro métodos realizados para o sistema formado por uma lente convergente.

Parâmetro	Métodos	
	I a III	IV
f	100 mm	100 mm
s_o	150 mm	150 mm
s_i	300 mm	300 mm
h_o	20 mm	20 mm
h_i	-40 mm	-41 mm
$ M $	2	2,05

Fonte: O Autor

5.2 SISTEMA ÓPTICO DE IMAGEM FORMADO POR DUAS LENTES CONVERGENTES

Construir um sistema óptico de imagem com duas lentes, sendo L1 a lente convergente de $f_1 = 200$ mm e L2 a lente convergente de $f_2 = 100$ mm. O plano objeto está localizado em $s_{o1} = 300$ mm e a distância entre as lentes é igual a $d = s_{i1} + s_{o2} = 800$ mm.

Método I - Equação das lentes

Por ser uma situação de duas lentes foi aplicado duas vezes a Equação 4 da seção 2.4. Para a primeira parte do sistema formado por L1 é calculada a distância do plano imagem:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i1}}$$

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{300} + \frac{1}{s_{i1}}$$

Multiplicando ambos os lados por $s_{i1} = 600$ mm obtém-se:

$$3s_{i1} = 2s_{i1} + 600$$

$$s_{i1} = 600 \text{ mm}$$

O plano imagem está a uma distância de 600 mm da lente L1. Este agora refere-se ao plano objeto de L2 que está a uma distância de 200 mm. É definido então que $s_{o2} = 200$ mm. Para a segunda parte do sistema é obtido a distância do plano imagem em relação a lente L2 da seguinte forma:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}}$$
$$\frac{1}{100} = \frac{1}{200} + \frac{1}{s_{i2}}$$

Multiplicando ambos os lados por $s_{i2} = 200$ mm obtém-se:

$$2s_{i2} = s_{i2} + 200$$

$$s_{i2} = 200 \text{ mm}$$

Com este método foi determinado que a distância do plano imagem em relação a lente L2 é igual a $s_{i2} = 200$ mm. A seguir com o traçado de raios este resultado será confirmado.

Método II - Traçado de Raios

A partir das condições iniciais do problema e dos resultados obtidos pelo método I: $s_{o1} = 300$ mm, e $d = 800$ mm, $f_1 = 200$ mm e $f_2 = 100$ mm é feito o traçado de raios deste sistema óptico conforme apresentado na Figura 5.6.

A distância do plano imagem s_{i1} é 600 mm. A imagem produzida por L1 é objeto para L2, que está a 200 mm dela, ou seja, s_{o2} . O plano imagem também está a $s_{i2} = 200$ mm da lente L2.

FORMAÇÃO DE IMAGENS COM DUAS LENTES.

$d=$	800				
f_1	s_{o1}	s_{i1}	h_{o1}	h_{i1}	M_1
200,00	300,00	600,00	1,00	-2,00	-2,00
f_2	s_{o2}	s_{i2}	h_{o2}	h_{i2}	M_2
100	200,00	200,00	-2,00	2,00	-1,00
					M_t 2,00

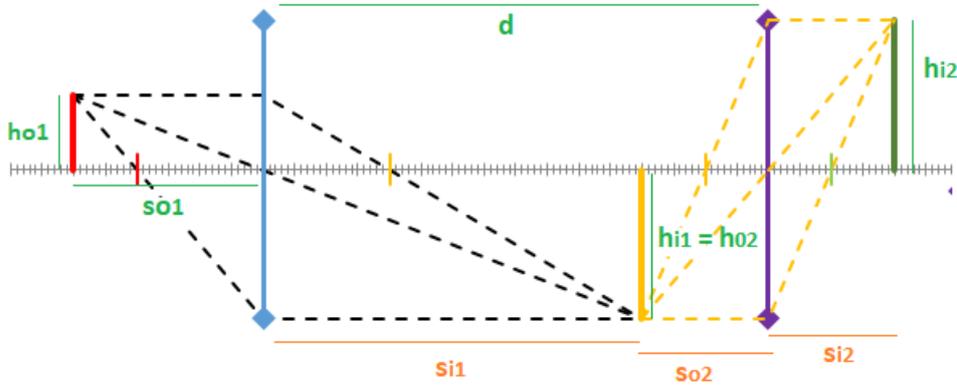


Figura 5.6: Diagrama esquemático do traçado de raios do sistema óptico de imagem formado por duas lentes com $s_o = 300$ mm, e $d = 800$ mm, $f_1 = 200$ mm, $f_2 = 100$ mm e $h_{o1} = 20$ mm. Fonte: O Autor

Pelo traçado de raios foi fornecido o tamanho do objeto no plano imagem igual a $h_i = 40$ mm e a magnificação $|M| = 2$. Esses dados serão confirmados através do tratamento matricial a seguir.

Método III - Tratamento Matricial

No tratamento matricial de um sistema óptico formado por duas lentes são usadas as descrições apresentadas na seção 4.3. A partir das condições iniciais e dos resultados obtidos com método I e II e escolhendo um raio incidente com ângulo de incidência $\theta = 0$ rad é determinado a altura h_i e ângulo θ_i no plano da imagem. Estes dados são substituídos na Equação 22 da seção 4.3 da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{200}{100} - \frac{800}{200} - \frac{200}{200} + \frac{200 \cdot 800}{200 \cdot 100} & 300 - \frac{300 \cdot 200}{100} + (200 + 800 - \frac{200 \cdot 800}{100}) \cdot (1 - \frac{300}{200}) \\ -\frac{1}{100} + (1 - \frac{800}{100}) \cdot (-\frac{1}{200}) & -\frac{300}{100} + (1 - \frac{800}{100}) \cdot (1 - \frac{300}{200}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 - 4 - 1 + 8 & 300 - 600 + 300 \\ -0,01 + 0,035 & -3 + 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0,025 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0,025 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Logo, o tamanho do objeto no plano da imagem é 40 mm, equivale ao dobro do tamanho do objeto e o sistema então é definido com uma magnificação $|M|=2$. Estes resultados são iguais aos resultados obtidos com o traçado de raios. A partir da abordagem matricial, foi verificado que há um desvio de aproximadamente 0,5 rad do raio de luz.

Método IV - Montagem do experimento

Na Figura 5.7 é apresentado o arranjo experimental utilizado com os elementos ópticos dispostos conforme as condições iniciais e dos resultados obtidos nos três métodos anteriores. Na Figura 5.8, por sua vez, é apresentado a imagem do objeto formada no anteparo posicionado exatamente $s_{i2} = 200$ mm após a lente L2. Com auxílio de uma régua escolar, foi medido $h_{i2} = 42$ mm. Essa diferença é muito pequena (5 %) em relação ao valor calculado.

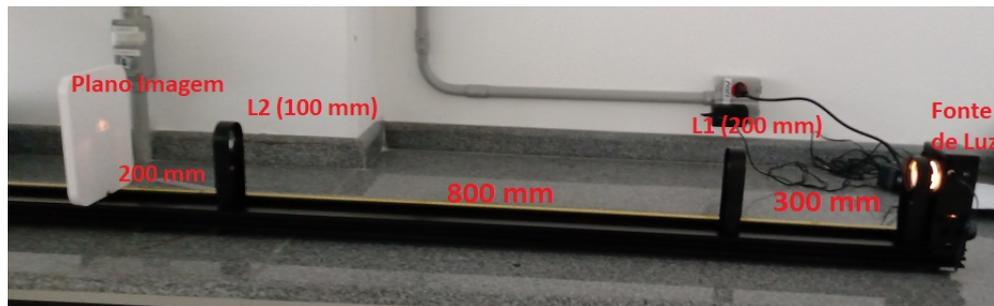


Figura 5.7: Fotografia da disposição dos elementos ópticos fixados conforme as distâncias calculadas com auxílio dos métodos I e II. Fonte: O Autor

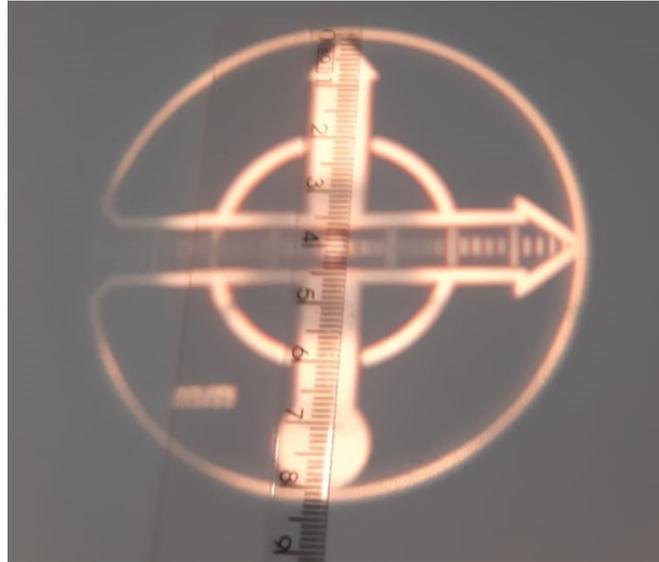


Figura 5.8: Ilustração da imagem formada no plano de imagem do objeto de altura igual a $h_o = 20$ mm. A imagem tem altura igual $h_i = 42$ mm. Fonte: O Autor.

Na Tabela 5.2 é apresentada a comparação dos dados encontrados nos quatro métodos realizados nessa atividade. Novamente os únicos resultados distintos são o tamanho do objeto no plano da imagem e a magnificação.

Tabela 5.2: Comparação dos parâmetros obtidos pelos quatro métodos do sistema óptico formado por duas lentes convergentes.

Parâmetro	Métodos	
	I a III	IV
d	800 mm	800 mm
f_1	200 mm	200 mm
f_2	100 mm	100 mm
s_o	300 mm	300 mm
s_{i1}	600 mm	600 mm
s_{o2}	200 mm	200 mm
s_{i2}	200 mm	200 mm
h_o	20 mm	20 mm
h_i	40 mm	42 mm
$ M $	2	2,05

Fonte: O Autor

5.3 SISTEMA FORMADO POR DUAS LENTES: UMA DIVERGENTE E UMA CONVERGENTE

Construir um sistema óptico de imagem com duas lentes, sendo a lente L1 divergente de $f_1 = -150$ mm e a lente L2 convergente de $f_2 = 200$ mm. O plano objeto está localizado em $s_{o1} = 300$ mm em relação a posição da lente L1. A distância entre as duas lentes é $d = s_{i1} + s_{o2} = 400$ mm.

Método I - Equação de Lentes

De maneira análoga a atividade anterior, é aplicada a Equação 4 duas vezes. Para a primeira parte do sistema formado pela lente L1 é calculada a posição do plano imagem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{-150} &= \frac{1}{300} + \frac{1}{s_{i1}} \\ \frac{-2i}{300s_i} &= \frac{-i}{300s_{i1}} + \frac{300}{300s_{i1}} \\ s_{i1} &= -100 \text{ mm}\end{aligned}$$

O plano imagem está a uma distância - 100 mm da lente L1, este agora refere-se ao plano objeto da lente L2, que está a uma distância de 400 mm, ou seja, é definido $s_{o2} = 400$ mm.

$$\begin{aligned}\frac{1}{200} &= \frac{1}{400} + \frac{1}{s_{i2}} \\ \frac{2i}{400s_{i2}} &= \frac{i}{400s_{i2}} + \frac{400}{400s_{i2}} \\ s_{i2} &= 400 \text{ mm}\end{aligned}$$

Com esse método foi determinada a distância do plano imagem em relação a lente L2: $s_{i2} = 400$ mm. A seguir este resultado será confirmado com o traçado de raios.

Método II - Traçado de Raios

A partir das condições iniciais do problema e dos resultados calculados no método I, os raios do sistema óptico de imagem foram traçados conforme apresentados na Figura 5.9.

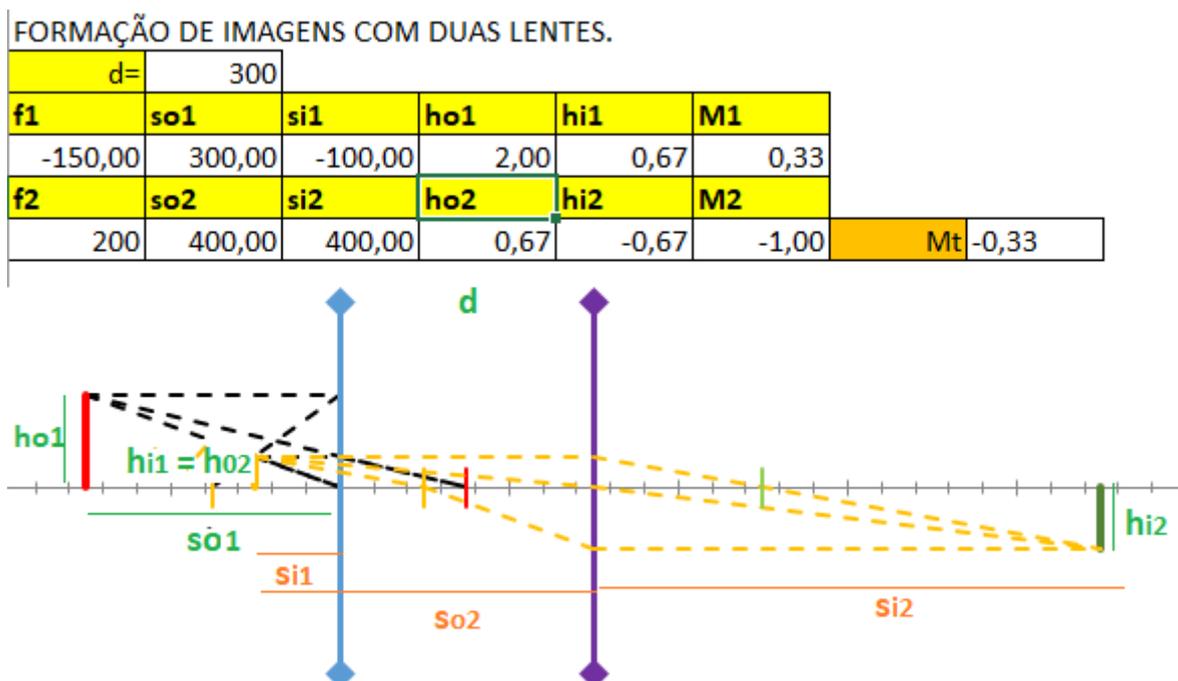


Figura 5.9: Diagrama esquemático do traçado de raios do sistema óptico de imagem formado por duas lentes com $s_{o1} = 300$ mm, e $d=300$ mm, $f_1 = -150$ mm, $f_2 = 200$ mm e $h_{o1} = 20$ mm. Fonte: O Autor

Com o traçado de raios foi obtido o tamanho do objeto no plano da imagem igual a $h_{i2} = 6,67$ mm e conseqüentemente calculado a magnificação igual a $|M| = \frac{1}{3}$. Esses dados serão confirmados pelo tratamento matricial.

Método III- Tratamento Matricial

O tratamento matricial de um sistema óptico formado para duas lentes é realizado seguindo as descrições apresentadas na seção 4.3. A partir das condições iniciais e dos resultados obtidos com método I e escolhendo um raio incidente com ângulo $\theta = 0$ rad, é determinado a altura h_i e o ângulo θ_i no plano da imagem. Estes dados são substituídos na Equação 22 da seção 4.3 da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{400}{200} - \frac{300}{-150} - \frac{400}{200} + \frac{300 \cdot 400}{-150 \cdot 200} & 300 - \frac{400 \cdot 300}{200} + (300 + 400 - \frac{300 \cdot 400}{200}) \cdot (1 - \frac{300}{-150}) \\ -\frac{1}{200} + (1 - \frac{300}{200}) \cdot (-\frac{1}{-150}) & -\frac{300}{200} + (1 - \frac{300}{200}) \cdot (1 - \frac{300}{-150}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 + \frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{3} & 300 - 600 + 300 \\ -\frac{1}{200} - \frac{1}{300} & -1,5 + 0,5 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -0,083 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,33 & 0 \\ -0,0833 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,66 \\ 1,666 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Logo o tamanho do objeto no plano imagem é $h_i = -6,67$ mm, equivale a um terço do tamanho do objeto, como já visto no traçado de raios. A partir da abordagem matricial, há um desvio de aproximadamente 90° no feixe de luz. Como a imagem tem um terço da imagem, a magnificação é $\frac{1}{3}$, em consonância aos resultados obtidos no método anterior.

Método IV - Montagem do experimento

Na Figura 5.10 é apresentado o experimento realizado com os elementos ópticos dispostos conforme as condições iniciais e resultados obtidos nos três métodos anteriores. Na Figura 5.11, por sua vez, é apresentado a imagem da figura do objeto formada no anteparo que estava posicionado no plano imagem do sistema óptico. A medida da altura do objeto na imagem foi de 15,3 mm (lembrando que consideramos a metade da imagem). Esse erro deve-se a difração presente no fenômeno. A imagem é invertida, pois a seta está apontada para baixo. Essa característica já era prevista pelos métodos II e III, onde o tamanho da imagem é negativa.



Figura 5.10: Fotografia da disposição dos elementos ópticos fixados conforme as distâncias calculadas com auxílio dos métodos I, II e III. Fonte: O Autor

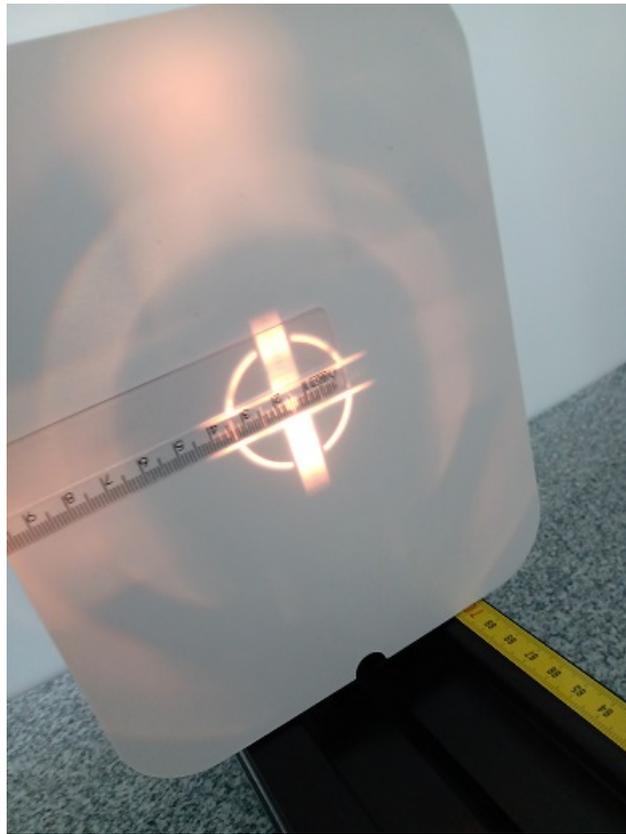


Figura 5.11: Ilustração da imagem formada no plano de imagem do objeto de altura igual a $h_o = 20$ mm. No plano imagem o objeto tem altura $h_i = 15,3$ mm. Lembrando que o objeto considerado nos cálculos representa metade da figura observada na fotografia. Fonte: O Autor

Na Tabela 5.3 é apresentada a comparação dos dados encontrados pelos quatro métodos usados para o sistema óptico de imagem formado por uma lente divergente e uma convergente realizados nessa atividade. As únicas diferenças são no tamanho do objeto no plano da imagem e a magnificação dos sistema óptico.

Tabela 5.3: Comparação dos parâmetros do sistema óptico de imagem formado por duas lentes uma divergente e uma convergente obtidos pelos quatro métodos.

Parâmetro	Métodos	
	I a III	IV
d	300 mm	300 mm
f_1	-150 mm	-150 mm
f_2	200 mm	200 mm
s_o	300 mm	300 mm
s_{i1}	-100 mm	-100 mm
s_{o2}	400 mm	400 mm
s_{i2}	300 mm	300 mm
h_o	20 mm	20 mm
h_i	6,67 mm	15,3 mm
$ M $	0,33	0,765

Fonte: O Autor

CONCLUSÕES

Com este trabalho observou-se que o ensino sempre está em constante desenvolvimento e evolução, algumas metodologias consideradas ultrapassadas são trocadas por outras mais avançadas em termos tecnológicos, no entanto, o ensino sempre é o ato de transformar vidas, e isto não muda. O conhecimento pode ser transmitido por um quadro e um pedaço de giz, como por uma tela interativa com vários aplicativos. O que importa é o quanto aquele conhecimento pode mudar vidas. Por isso, este trabalho apresentou uma proposta didática interdisciplinar e prática para o ensino de matrizes e óptica. Com essa proposta as aulas podem se tornar mais dinâmicas e interessantes, onde os alunos participam ativamente das aulas, verificando hipóteses, analisando resultados e construindo seu conhecimento de maneira mais ampla. Tanto a óptica e o assunto de matrizes podem ser muito bem aplicados ao cotidiano do aluno para para compreender o mundo a nossa volta. A Óptica é um dos mais importantes ramos, pois tudo o que enxergamos é fruto da interação da luz com a matéria e com os meios de propagação. Sendo assim, abordar esse conteúdo de maneira simples e lúdica para o aluno é de suma importância. As atividades experimentais e a interdisciplinaridade, por motivos já apresentados, são de grande importância pois traz a Óptica de maneira abrangente e o aluno pode aplicar isso mais facilmente. Desta forma, em conjunto, a Óptica pode dar vida ao ensino das matrizes, que até o momento são tratadas como apenas um formalismo matemático com atividades somente do uso das regras das operações com matrizes.

Sendo assim, analisamos sistemas ópticos de imagens utilizando essas quatro maneiras, relacionando-as e concluindo que caminhos diferentes, usando abordagens e disciplinas distintas retornam resultados semelhantes. Logo a multiplicação de matrizes pode ser usada para calcular posição e tamanho de imagens produzidas por lentes, o que é feito, geralmente aplicando a equação de lentes, priorizando o algebrismo.

Desta forma, esse trabalho mostra na prática, uma sugestão para se ensinar de maneira mais lúdica, interessante e diferente, duas disciplinas que são ensinadas no mesmo período escolar, apresentando uma alternativa pra o ensino de matrizes é óptica geométrica, que pode ser usada em qualquer situação. Além disso trabalha com planilhas eletrônicas para realizar cálculos complexos de maneira rápida e auxiliar na execução dos traçados de raios de maneira dinâmica.

Uma alternativa para permitir uma maior abrangência da aplicação desta proposta é incluir práticas usando materiais desenvolvidos pelos próprios alunos. Assim, não será um empecilho não ter os materiais usados nos experimentos deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G1. É preocupante que 50% dos alunos brasileiros não tenham nível básico de leitura, diz analista da ocde. <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/e-preocupante-que-50-dos-alunos-brasileiros-nao-tenham-nivel-basico-de-leitura-ghhtml>, 2018. Acesso em: 01 abr. 2020.
- [2] G1. Pisa 2018: dois terços dos brasileiros de 15 anos sabem menos que o básico de matemática. <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/pisa-2018-dois-tercos-dos-brasileiros-de-15-anos-sabem-menos-que-o-basico-de-m-ghhtml>, 2018. Acesso em 23 mar. 2020.
- [3] Stafim S. *Uso de laboratório de Matemática na perspectiva da modelagem Matemática na Perspectiva da Modelagem*. Governo do Estado do Paraná, 2013.
- [4] Javaroni S. L. Zampieiri M. T. O Uso das TIC nas Práticas dos Professores de Matemática da Rede Básica de Ensino: o projeto Mapeamento e seus desdobramentos. *Bolema: Boletim de educação Matemática*, 29:998 – 1022, 12 2015.
- [5] PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Dissertações do profmat. <https://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/>, 2020. Acesso em: 16 aug. 2020.
- [6] Brandão P. C. S. Estudo de matrizes de maneira significativa. Master's thesis, PROFMAT - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas - MS, 2018.
- [7] Neto J. R. S. A utilização do software octave na interpretação geométrica das operações de matrizes no ensino médio. Master's thesis, PROFMAT - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2019.
- [8] Gonçalves M. H., Araujo L. E. E. de, and Rodrigues V. Lentes de gelatina. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, 00 2020.
- [9] Santos J. França K. V. Santos L. Dificuldades na aprendizagem de matemática. Master's thesis, Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo-SP, 2017.
- [10] Paula F. S. Tfouni L. V. A persistência do fracasso escolar: desigualdade e ideologia. *Revista Brasileira de Orientação Profissional*, 10:117 – 127, 12 2009.
- [11] Ujiie N. Brum W. Pinheiro N. A. Ciappina J. Silva S. R. Os conhecimentos prévios de matemática de estudantes do ensino fundamental: o que é matemática? de onde ela veio? como seria um mundo sem matemática? *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 10(1):57–73, 2017.

- [12] Pacheco M. Andreis G. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. *Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB*, 1(38):105–119, 2018.
- [13] Fiorentini D. A pesquisa e as práticas de formação de professores de matemática em face das políticas públicas no Brasil. *Boletim da Educação Matemática*, 21(29):43–70, 2008.
- [14] Luckesi C. C. *Avaliação da aprendizagem na escola: reelaborando conceitos e criando a prática*. Malabares Comunicações e eventos, Salvador-BA, 2005.
- [15] Amorim R. Feistel R. A. B. Interdisciplinaridade no ensino de física: algumas discussões. *Revista Eventos Pedagógicos*, 8(1):507–513, 2017.
- [16] Brasil. Base nacional comum curricular. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf, 2017. Acesso em: 16 ago. 2020.
- [17] Fazenda I. *O Que é Interdisciplinaridade?* Cortez, São Paulo, 2008.
- [18] Ocampo D. M., Santos M. E. T., and Folmer V. Interdisciplinaridade no ensino É possível? prós e contras na perspectiva de professores de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30:1014 – 1030, 12 2016.
- [19] R. FERONI, Willian Andreao, and Elson Galvão. Proposta de interdisciplinaridade entre matemática e física resultando na aprendizagem contextualizada. pages 21–24, 12 2016.
- [20] Araújo M. S. T and Abib M. L. V. S. Atividades experimentais no ensino de Física: diferentes enfoques, diferentes finalidades. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:176 – 194, 06 2003.
- [21] Carvalho A. M. P. *Termodinâmica: um ensino por investigação*. FEUSP, São Paulo, 1999.
- [22] Brock C. Opção profissional pela licenciatura em física: Uma investigação acerca das origens desta decisão. Master's thesis, PUC - RS, Porto Alegre, 2010.
- [23] Marcelo Alves Barros and Anna Maria Pessoa de Carvalho. A História Ciiluminando o ensino de física. *Ciã Educaã§ã(Bauru)*, 5:83 – 94, 00 1998.
- [24] Claudemir Roque Tossato. A função do olho humano na física final do século XVI. *Scientiae Studia*, 3:415 – 441, 09 2005.
- [25] Santos J. S. Óptica geométrica; a construção de conceitos através da experimentação. Master's thesis, UFF - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2017.

- [26] S. C Zilio. Cepa. e física. ensino de física on line. <http://efisica.if.usp.br/>, 2020. Acesso em: 24 aug. 2020.
- [27] Haliday D. Resnick R. Walker J. *Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna*. LTC, Rio de Janeiro, 10 edition, 2016.
- [28] Young H. and Freedman R. *Física IV: Óptica e Física Moderna*, volume 12. Pearson, 2009.
- [29] Siegman A.E. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, 1986.
- [30] Knight R. *Física: Uma Abordagem Estratégica 2: Termodinâmica e Ondas*. Bookman, Porto Alegre, 1999.
- [31] Otaviano H. and Frazão H. A. Alguns aspectos da óptica do olho humano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33:1 – 8, 09 2011.
- [32] Bashmakova I. Smirnova G. *The beginnings and evolution of algebra*. Cambridge University Press, 2000.
- [33] Eves H. *Introdução à História da Matemática*. Unicamp, Campinas, 5 edition, 2011.
- [34] Bourbaki N. *Elements of the history of mathematics.N*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [35] Kraieski P. Abordagem de matrizes no ensino médio: Uma avaliação crítica a partir dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. Master's thesis, UFSC, Florianópolis, 1999.
- [36] Iezzi G. Hazzan S. *Fundamentos da Matemática Elementar 4: Sequencias, Matrizes e Determinantes*. Atual, 1997.
- [37] Kogelnik H. and Li T. Laser beams and resonators. *Proceedings of the IEEE*, 54(10):1312–1330, 1966.
- [38] Pasco. Lab apparatus - light optics. <https://www.pasco.com/products/lab-apparatus/light-and-optics?limit=12&page=1>, 2020. Acesso em: 15 abr. 2020.