Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Contagem via funções geradoras

Marina Miranda Alves Brasiliano

Orientador: Prof. Dr. Robson da Silva

São José dos Campos
Setembro, 2020

Título: *Contagem via funções geradoras*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Setembro, 2020

Miranda Alves Brasiliano, Marina

Contagem via funções geradoras, Marina Miranda Alves Brasiliano – São José dos Campos,2020.

LXVI, 66f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Counting by generating functions

1. Funções geradoras. 2. Funções geradoras no Ensino Médio. 3. Combinação com repetição. 4. Conjuntos ponderados. 5. Séries de potências formais. 6. Funções geradoras exponenciais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

34

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de Departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

MARINA MIRANDA ALVES BRASILIANO

CONTAGEM VIA FUNÇÕES GERADORAS

Presidente da banca: Prof. Dr. Robson da Silva

Banca examinadora:

Profª. Drª. Claudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

Profª. Drª. Gleiciane da Silva Aragão

Prof. Dr. Mateus Alegri

Data da Defesa: 04 de Setembro de 2020

"Façamos o nosso melhor. O restante Deus fará!"
São Padre Pio de Pietrelcina

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me proporcionado todas as condições necessárias para conseguir iniciar, perdurar e finalizar o Mestrado Profissional em Matemática: pais que se sacrificaram para me proporcionar uma educação de qualidade, marido e filhos que compreenderam minha ausência e me apoiaram, um orientador excepcional cuja raiz acadêmica é a mesma que a minha, amigos de turma que deixaram às sextas-feiras mais leves e divertidas, e professores maravilhosos e comprometidos que, com certeza, fizeram toda a diferença na minha formação acadêmica e profissional. A todas essas pessoas que foram presentes de Deus em minha vida, meu muito obrigada!

RESUMO

Motivado por uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem - de 2017, o presente trabalho, visando ampliar o conhecimento do professor de Matemática sobre Combinatória Enumerativa, apresenta as funções geradoras como uma ferramenta importante na resolução de problemas, principalmente os de contagem em que são permitidas repetições na escolha de objetos. Para tanto, essa dissertação apresenta desde uma visão intuitiva para a função geradora, quanto uma mais aprofundada no âmbito de conjuntos ponderados e séries de potências formais. Por fim, uma proposta didática é apresentada para que tal ferramenta de contagem possa ser levada pelo professor aos seus alunos.

Palavras-chave: 1. Funções geradoras. 2. Funções geradoras no Ensino Médio. 3. Combinação com repetição. 4. Conjuntos ponderados. 5. Séries de potências formais. 6. Funções geradoras exponenciais.

ABSTRACT

Motivated by a question from the National High School Examination - Enem - 2017, the present work, aiming at improving teacher's mathematics knowledge about Enumerative Combinatorics, presents as generating functions an important tool to solve problems, mainly the ones in which repetitions in the choice of objects are allowed. For this purpose, this dissertation presents an intuitive vision of generating function, as well as in the context of weighted sets and series of formal powers. Finally, a didactic proposal is presented so that such a counting tool can be used by the teacher and his students.

Keywords: 1. Generating functions. 2. Generating funtions in High School. 3. Combination with repetition. 4. Weighted sets. 5. Formal power series. 6.Exponential generating functions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os professores do Ensino Médio devem trabalhar com alunos a habilidade de “elaborar e resolver problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamentos de elementos, por meio dos princípios aditivo e multiplicativo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore”. Essa habilidade está dentro da Competência Matemática e suas Tecnologias (ver Item 5.2 em [1]). Tal competência refere-se à “capacidade do aluno de utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente”. Nesse contexto, cabe ao professor verificar qual a melhor maneira de trabalhar a Análise Combinatória com os seus alunos, o quão aprofundada ela será dada. Para [2], o professor deve estar presente e ser atuante nas diferentes fases do processo de aprendizagem de seu aluno, tendo necessariamente que interpretar, gerir, planejar, colocar em prática e avaliar as suas opções curriculares.

Na maioria das vezes e na maior parte dos materiais didáticos a Análise Combinatória contempla os princípios fundamentais da contagem e os seguintes tipos de agrupamentos de objetos: permutação simples, permutação com repetição, arranjo simples e combinação simples. Por várias questões como número de aulas semanais e obrigatoriedade de cumprir o conteúdo, independente da efetividade do aprendizado, nada além disso é ensinado. E essa atitude de se trabalhar o básico da combinatória tem boa aceitação entre os professores.

No entanto, em 2017, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), trouxe uma questão de combinatória mais desafiadora, era necessário saber resolver uma equação com variáveis inteiras não negativas. O resultado não podia ser outro, segundo a plataforma +ENEM (ver [6]), apenas 10% dos alunos no Brasil que fizeram a prova acertaram essa questão. Mas o mais intrigante foi o fato de que quase a metade dos alunos escolheram a alternativa que trabalhava a questão como um problema de combinação simples, ou seja, possivelmente eles só usaram as ferramentas que conheciam para tentar resolver e chegar a uma solução que estava presente como alternativa. Assim, esse trabalho tem como objetivo apresentar ao professor de Matemática uma ferramenta para se resolver questões de contagem que ultrapassa o básico trabalhado no ensino médio e, mostrar, através de uma simples proposta didática que utiliza o produto notável do quadrado da soma de duas variáveis como disparador, que é possível também ampliar o horizonte do aluno no que tange à análise combinatória.

1

PRELIMINARES

Ao analisarmos os conteúdos que apareceram, desde 2009 até 2019, no Exame Nacional do Ensino Médio - Enem, conhecido como a maior porta para a universidade pública, verificamos que pelo menos uma questão de análise combinatória esteve presente em uma de suas versões (o comum, Libras ou PPL), sendo que o do ano de 2017 foi o exame que mais questões desse assunto contemplou, foram quatro ao todo. Mas foi uma questão em especial nesse ano que assustou muitos vestibulandos e professores por não ser usual e depois da apresentação dos resultados, pelo baixíssimo índice de acerto.

A referida questão do ENEM 2017 era a seguinte: *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*

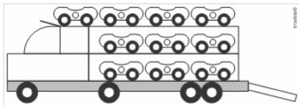

Figura 1: Caminhão-cegonha

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$
b) $C_{9,3}$
c) $C_{10,4}$
d) 6^4
e) 4^6

Ao se deparar com uma questão como essa, a primeira noção que o aluno tem que ter é o que significa $C_{6,4}$ ou $C_{9,3}$, por exemplo. Se o estudante nunca teve contato com a análise combinatória e suas simbologias ficará confuso, mas se por outro lado, sabe o que significa a notação $C_{n,p}$ estará mais próximo de uma possível resolução. Trata-se de uma combinação simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq 1$ e p um número natural tal que $p \leq n$. De maneira simplista, $C_{n,p}$ gera o número de maneiras de se agrupar p elementos pertencentes a um grupo de n elementos, sem a preocupação do lugar que ocupa.

Os agrupamentos diferem-se entre si apenas pela natureza dos elementos, e não por sua posição. Assim, quando o aluno se depara com a frase "Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo", possivelmente irá inferir que a ordem não importa e, portanto, que se trata de uma combinação. Basta saber agora qual é a correta. E nesse raciocínio, cabe a pergunta: o que explica que quase a metade dos estudantes brasileiros optaram pela alternativa c, ou seja, $C_{10,4}$? Talvez tenham pensado: "são dez carrinhos e quatro cores, logo deverá ter o número 10 e o número 4 na alternativa", ou ainda, "tenho dez carrinhos e quatro cores, vou escolher dos dez carrinhos quatro para pintar um de cada cor, já que deverá ter pelo menos um de cada cor". Infelizmente, não é possível saber o que se passou na cabeça dos alunos que optaram pela alternativa c, mas é possível procurar maneiras de se trabalhar esse conteúdo com os futuros alunos para que estes não cometam o mesmo engano.

E o professor, será que está pronto para esse desafio? Será que ele mesmo entende que tipo de agrupamento essa questão sugere? Uma alternativa é procurar como se resolver a questão. Um dos sites mais utilizados por professores para fazer provas e listas de exercícios trouxe a seguinte resolução (ver [11]):

Sabendo-se que cada caminhão cegonha possui 10 *carros e que é preciso ao menos um carrinho de cada cor, então restam* 6 *carrinhos nos quais as cores podem ser permutadas. Sendo a, b, c e d a quantidade de carrinhos brancos, laranjas, amarelos e verdes, além dos* 4 *já pintados (um de cada cor), tem-se:*

$$a + b + c + d = 6.$$

Assim, a quantidade de soluções inteiras não negativas dessa equação de quatro variáveis será:

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = C_{9,3}.$$

Para quem sabe resolver equações de variáveis inteiras positivas utilizando-se combinação com repetição essa resolução é suficiente, mas para a grande maioria que não ultrapassa o limite da combinação simples, essa resolução não é nada plausível. O indivíduo irá se perguntar como uma equação de quatro variáveis possui o número de soluções possíveis expressa por um número binomial? Posto isto, o que está por trás de uma questão como essa? E se fossem dadas mais restrições para as cores dos carrinhos, como por exemplo, a empresa determina que obrigatoriamente terá que ter 1, 2 ou 3 carrinhos laranjas e, ao mesmo tempo, 1, 2 ou 3 carrinhos verdes. Como resolveríamos essa questão? Será que também chegaríamos a uma combinação? Será que existe uma maneira para se resolver problemas como estes, em que é permitida a repetição de elementos e que, além disso, existem restrições importantes a serem consideradas? É nesse espírito, de ir além do que se trabalha no ensino médio, que será feito aqui o estudo de funções geradoras, que segundo [9, Cap. 5], é uma das "principais ferramentas para a solução de problemas de contagem, especialmente problemas que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida".

Mas antes, é necessário que tenhamos a base de combinatória bem definida. Vejam seus dois princípios básicos de acordo com [9, Cap. 2]:

Princípio Aditivo da Contagem: Se A e B são dois conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ terá $p + q$ elementos. Poderemos também dizer que sejam dois eventos A e B mutuamente exclusivos, de tal forma que o primeiro pode ocorrer de p maneiras diferentes e o segundo, de q maneiras distintas, então o número de maneiras de ocorrer o evento A ou o evento B é $p + q$.

Princípio Multiplicativo da Contagem: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$.

Note que o Princípio Aditivo é usado quando temos hipóteses e o Princípio Multiplicativo, quando temos etapas. Geralmente, as hipóteses são ligadas pela conjunção "ou", já as etapas, pela conjunção "e". Além do mais, esses dois princípios podem ser estendidos para um número finito de conjuntos ou eventos sucessivos, conforme mostra [9, Cap. 2] ao definir as seguintes extensões para os dois princípios.

Extensão do Princípio Aditivo: Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} = A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Extensão do Princípio Multiplicativo: Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então esses n eventos podem ocorrer sucessivamente de $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ maneiras diferentes.

Exemplo 1.1. *(IFAL 2018) Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras. Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?*

*a)*4.

*b)*12.

*c)*16.

*d)*40.

*e)*120.

Temos 4 *hipóteses: a palavra possui uma letra (evento* A_1*), duas letras (evento* A_2*), três letras (evento* A_3*) ou quatro letras (evento* A_4*). Vamos calcular o total de maneiras de cada evento ocorrer sabendo que nesse alfabeto só existem* 3 *letras, e pelo Princípio Aditivo da Contagem, somar essas possibilidades. Para o evento* A_1*, temos* 3 *possibilidades. Para o evento* A_2*, temos* 3 *possibilidades para a primeira letra e* 3 *para a segunda, como são* 2 *etapas, teremos pelo Princípio Multiplicativo da Contagem,* $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ *maneiras. Analogamente, para os eventos* A_i*, teremos* 3^i *maneiras. Logo, a resposta esperada será* $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 3 + 9 + 27 + 81 = 120$.

Em relação aos tipos de agrupamentos, iremos mostrando e definindo os que iremos utilizar conforme forem aparecendo no texto. No Capítulo 2, veremos funções geradoras de maneira mais intuitiva à luz das ideias de [9], já no Capítulo 3, mostraremos como de certa forma essa função está implícita em alguns conteúdos trabalhados no ensino médio.

No Capítulo 4, veremos combinações com repetição partindo de resoluções de equações cujas variáveis são inteiros não negativos. Voltando às funções geradoras, veremos, no Capítulo 5, o que significam seus coeficientes e como calculá-los, pois nem sempre representarão uma resposta para problemas como o do caminhão-cegonha.

No Capítulo 6, veremos como encontrar, dada a função geradora, uma forma mais simples de reescrevê-la, chamada forma fechada de uma função geradora. A partir daí, iniciaremos a parte mais formal da dissertação que, baseado em [4], veremos uma combinatória enumerativa enfatizando métodos bijetivos. Para isso trabalharemos conjuntos ponderados e suas respectivas funções geradoras no Capítulo 7, porém, nesse capítulo só serão apresentados exemplos de conjuntos finitos, por exemplo, o conjunto de permutações de uma palavra ponderados por suas inversões.

No Capítulo 8, apresentaremos o que são séries de potências formais e sua relação com conjuntos ponderados, mas desta vez, infinitos. Também veremos como eles devem ser para também admitirem função geradora. Além disso, veremos algumas propriedades importantes dessas séries, por exemplo, todo polinômio de uma variável é um caso especial de séries de potências formais e que podemos ter composição de séries dadas algumas restrições. Veremos tudo isso, para que, no Capítulo 9, possamos estudar funções geradoras exponenciais e diferenciá-las das ordinárias vistas anteriormente.

E, finalmente, no Capítulo 10, será apresentada uma proposta didática com problemas, inclusive o do caminhão-cegonha, para que os alunos possam resolvê-los usando a ideia de função geradora. A proposta utiliza conhecimentos pré-existentes sobre produto notável e sobre os princípios básicos da contagem, a fim de explicar de maneira mais didática possível como funciona tal ferramenta e como ela gera resultados de combinatória para, neste caso, problemas em que a ordem não será considerada.

2

FUNÇÕES GERADORAS

As funções geradoras tiveram origem nos trabalhos do matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754), que tem seu nome conhecido pelos alunos do ensino médio pela famosa fórmula da potência de um número complexo, a fórmula de De Moivre, e que contribuiu de maneira significativa para a teoria das probabilidades. Porém, foi Leonhard Euler (1707-1783), o matemático que de fato "domou" os números complexos, descobertos dois séculos antes, tornando acessíveis as operações com estes [3, p. 185], que aplicou funções geradoras de maneira intensiva para solucionar problemas em Teoria Aditiva dos Números, especialmente na Teoria de Partições. Outros dois importantes matemáticos que utilizaram esse método foram S. Laplace (1749-1827) no estudo da probabilidade e N. Bernoulli (1687-1759) no estudo de permutações caóticas.

Mas o que é uma função geradora? Se voltarmos à questão do Enem sobre o caminhão-cegonha que motivou o presente estudo, podemos interpretar esse problema da seguinte maneira: sabendo que no caminhão-cegonha estão dez carrinhos, que pelo menos um deles deverá ter cada uma das quatro cores e que a ordem dos carrinhos não é considerada, temos que sobram seis carrinhos que podem ser pintados com as quatro cores, de tal forma que podemos ter todos da mesma cor, cinco de uma cor e um de outra, quatro da mesma cor e dois de outra, etc. Ou seja, se atribuirmos as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 para, respectivamente, a quantidade de carrinhos a serem pintados da cor amarela, branca, laranja ou verde, teremos que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Assim, o resultado do problema será numericamente igual ao total de soluções inteiras não negativas dessa equação.

Pensemos agora nos valores que cada uma dessas variáveis podem ter. Por exemplo, se todos os carrinhos forem pintados de amarelo, esse fato corresponde à solução $(6, 0, 0, 0)$ da equação. Se dois carrinhos forem pintados de amarelo, dois de branco, um de laranja e um de verde, isso corresponderá a solução $(2, 2, 1, 1)$. Logo, podemos inferir que as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 podem assumir os valores $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ou 6.

Em seguida, façamos a associação de cada variável ao polinômio $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, que controla seus possíveis valores. Perceba que os expoentes correspondem a cada valor que x_1, x_2, x_3 e x_4 podem assumir. Assim, como temos quatro variáveis e utilizando-se o princípio multiplicativo da contagem, temos:

$$\begin{aligned}(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 = \; & x^{24}+4x^{23}+10x^{22}+20x^{21}+35x^{20}+56x^{19} \\ & +84x^{18}+116x^{17}+149x^{16}+180x^{15}+206x^{14} \\ & +224x^{13}+231x^{12}+224x^{11}+206x^{10}+180x^9 \\ & +149x^8+116x^7+84x^6+56x^5+35x^4+20x^3 \\ & +10x^2+4x+1.\end{aligned}$$

Sabemos que a resposta procurada é $C_{9,3}$, e que essa combinação é igual a 84. Observe que o coeficiente de x^6 é 84, exatamente a resposta esperada. Mas o que significa então o coeficiente de x^{24} ou o coeficiente de x^9? São soluções de que situação? Ora, como x_1, x_2, x_3 e x_4 podem assumir qualquer valor do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, poderíamos escolher, por exemplo, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 6$, obtendo assim $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$. Note que não teríamos nenhuma outra maneira para que a soma das variáveis desse 24, ou seja, só existe uma maneira de escolhermos valores para as variáveis de tal forma que sua soma seja 24, e de fato, o coeficiente de x^{24} é 1. Observe também que as soluções $(5,6,6,6)$, $(6,5,6,6)$, $(6,6,5,6)$ e $(6,6,6,5)$ geram $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$, e que não existe nenhuma outra solução com as restrições dadas com a soma dando esse resultado, o que nos mostra que existem apenas quatro soluções para a referida equação. Veja o coeficiente de x^{23}, exatamente o número de soluções encontradas. Logo, podemos inferir que existem consequentemente 180 soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, com as variáveis assumindo valores de 0 a 6, já que o coeficiente de x^9 é igual a 180.

Assim, o polinômio $x^{24}+4x^{23}+10x^{22}+20x^{21}+35x^{20}+56x^{19}+84x^{18}+116x^{17}+149x^{16}+180x^{15}+206x^{14}+224x^{13}+231x^{12}+224x^{11}+206x^{10}+180x^9+149x^8+116x^7+84x^6+56x^5+35x^4+20x^3+10x^2+4x+1$ é a função geradora para o problema "qual é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m$ tal que $x_i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ para $i = 1,2,3,4$?", uma vez que a sequência formada pelos seus coeficientes nos fornece as respostas para este problema para todos os possíveis valores de m.

De maneira mais geral, conforme [9, Cap. 5], uma função geradora para uma sequência $(a_0, a_1, a_2, ...)$ é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

Note que um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ pode ser visto como a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$, em que $a_n = 0$, para $\forall n > m$.

No caso do problema do caminhão-cegonha, a sequência que fornece as respostas do problema é

$$(1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 116, ..., 10, 4, 1, 0, 0, 0, ...),$$

sendo que cada termo a_r dessa sequência, para $r = 0, 1, 2, ...$, é o coeficiente de x^r na série de potências que representa sua função geradora ordinária:

$$\begin{aligned} f(x) = &x^{24} + 4x^{23} + 10x^{22} + 20x^{21} + 35x^{20} + 56x^{19} + 84x^{18} + 116x^{17} + 149x^{16} + 180x^{15} \\ &+ 206x^{14} + 224x^{13} + 231x^{12} + 224x^{11} + 206x^{10} + 180x^{9} + 149x^{8} + 116x^{7} + 84x^{6} \\ &+ 56x^{5} + 35x^{4} + 20x^{3} + 10x^{2} + 4x + 1. \end{aligned}$$

Mais adiante será mostrada uma outra maneira de se conceber função geradora, bem como serão apresentados tipos especias dessas funções, como por exemplo, a função geradora de inversão e a função geradora exponencial, respectivamente apresentadas nos Capítulos 7 e 9.

3

FUNÇÕES GERADORAS NO ENSINO MÉDIO

Ao analisarmos o Currículo do Estado de São Paulo sobre Matemática e suas tecnologias da Secretaria da Educação de 2011 [10], encontraremos um conteúdo que faz parte da lista dos referentes ao segundo ano do Ensino Médio chamado "Binômio de Newton", cuja habilidade a ser trabalhada em sala de aula pelo professor com seus alunos é "conhecer e saber utilizar as propriedades simples do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal". E esse mesmo currículo mostra a importância de tal conteúdo fazendo a seguinte comparação: "A Matemática, sua história e sua cultura são um exemplo candente de equilíbrio entre a conservação e a transformação, no que tange aos objetos do conhecimento. Uma máquina a vapor ou um computador IBM 360 certamente têm, hoje, interesse apenas histórico, podendo ser associados a peças de museu. O Teorema de Pitágoras, o Binômio de Newton e a Relação de Euler, no entanto, assim como os valores humanos presentes em uma peça de Shakespeare, permanecem absolutamente atuais."

Outro ponto a ser destacado sobre o Binômio de Newton é que apesar de levar o nome do matemático e físico inglês Isaac Newton (1642-1727), que para [3, p.157], em seu Capítulo XV intitulado sagazmente como *"Faça-se Newton! E tudo foi Luz..."*, foi o " maior intelecto já produzido pela Humanidade no âmbito das Ciências Exatas", o binômio com expoente inteiro não-negativo não foi o real objeto de estudo de Newton. Esse gênio estava na verdade interessado na época em três temas: o traçado analítico de tangentes, a quadratura de curvas e as séries infinitas. Foi quando, por volta de 1664-1665, descobriu como exprimir potências racionais de binômios por meio de séries, cuja fórmula pode ser expressa resumidamente como:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{m}{n}} =& 1+\frac{\frac{m}{n}}{1!}x+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2!}x^2+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3!}x^3 \\ &+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)(\frac{m}{n}-3)}{4!}x^4+...\end{aligned} \tag{1}$$

A demonstração rigorosa de tal descoberta só foi feita por Gauss no século XIX. Assim, o Binômio de Newton estudado na escola é um caso particular do binômio de expoente racional tratado por Newton em relação ao expoente, tal que m poderá ser $0, 1, 2, 3...$ e n sempre será 1 e, por outro lado, é um caso expandido em relação ao binômio, pois ao invés de usar apenas o $(1 + x)$, utiliza-se qualquer binômio, por exemplo, $(a + b)$.

Na maioria dos livros didáticos de Matemática do ensino médio o Binômio de Newton é apresentado aos alunos como a potência $(a + b)^n$ para $n = 0, 1, 2, ...$ com suas respectivas expansões. Veja os primeiros casos das expansões do Binômio de Newton:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.
\end{aligned}
$$

Note que existe um padrão em relação aos coeficientes, como por exemplo, quando temos o a ou o b elevados ao maior expoente possível, tem-se coeficientes sempre iguais a 1, termos que representam monômios de mesmo grau também sempre possuem o mesmo expoente, ou seja, resumidamente podemos dizer que termos simétricos têm mesmo coeficiente. E porque isso acontece?

Se ao invés de potência, fosse verificado um produto entre três binômios distintos, por exemplo, $(a+b)(c+d)(e+f)$. Perceba que

$$(a+b)(c+d)(e+f) = ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf \tag{2}$$

é formado de 8 termos, cada termo possui três letras, cada uma delas selecionadas de um dos binômios. Como são duas opções de letras em cada binômio, pelo princípio multiplicativo da contagem, temos $2^3 = 8$ termos. Se o produto fosse formado por n binômios, pelo princípio multiplicativo da contagem, teríamos 2^n termos. Consideremos, agora, $(a+b)(a+b)(a+b)$. E em (2) substituiremos c e e por a, bem como, d e f por b, obtendo

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a+b)(a+b) &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb \\
&= a^3+a^2b+a^2b+ab^2+a^2b+ab^2+ab^2+b^3 \qquad (3)\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{aligned}
$$

Note que a soma dos coeficientes continuou 8, porém, tivemos três termos em que o a foi selecionado duas vezes e o b uma vez, pois posso tirar o a dos dois primeiros binômios, dos dois últimos, ou do primeiro e do último, ou seja, são três maneiras de escolher dentre três binômios, dois para serem os fornecedores de a, e consequentemente, o binômio que sobrou, fornecerá b. Assim, conforme definição de combinação simples dada nas preliminares, o coeficiente de a^2b é igual a $C_{3,2}$. Analogamente, o coeficiente de ab^2 será $C_{3,1}$, pois será escolhido de três binômios um para ser o fornecedor de a. Logo, podemos reescrever (3) como

$$(a+b)^3 = C_{3,3}a^3 + C_{3,2}a^2b + C_{3,1}ab^2 + C_{3,0}b^3.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, como $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$, o coeficiente de $a^k b^{n-k}$ será igual ao total de k escolhas de a, dentre os n produtos de $a+b$. Para cada k escolhas de a, restam $n-k$ escolhas de b. Pela comutatividade dos número reais, a ordem não importa e, consequentemente, há $C_{n,k}$ maneiras de se fazer essa escolha. Logo,

$$\begin{aligned}(a+b)^n =& C_{n,n}a^n + C_{n,n-1}a^{n-1}b + C_{n,n-2}a^{n-2}b^2 + ... \\ &+ C_{n,2}a^2b^{n-2} + C_{n,1}ab^{n-1} + C_{n,0}b^n.\end{aligned} \tag{4}$$

De fato, segundo [4, Cap. 1], $C_{n,k}$, para $0 \leq k \leq n$, é dado por $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Para $k < 0$ ou $k > n$, define-se $C_{n,k} = 0$.

No Ensino Médio, geralmente após ser apresentado o Binômio de Newton, o professor segue para um famoso triângulo chamado de "Triângulo de Pascal", que para [9, Cap. 3] é definido como o triângulo formado pelos coeficientes de (4) para $n = 0, 1, 2, 3....$ Esse triângulo também é conhecido como Triângulo Aritmético, de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo Combinatório. Existem maneiras distintas de escrevê-lo em relação ao seu formato, mas para facilitar a comparação de cada elemento aos coeficientes das expansões binomiais, ele será mostrado da seguinte forma:

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Enumerando-se as linhas de acordo com o expoente da potência da qual os coeficientes foram retirados e enumerando-se as colunas da mesma forma, de 0 a n, é possível perceber que cada elemento representa a combinação simples $C_{n,p}$, onde n é a potência do binômio e p é a coluna referente, ou seja, o termo $(p+1)$ da expansão binomial. Por exemplo, na linha 4 e na coluna 2 temos o número 6, coeficiente do terceiro termo da expansão de $(a+b)^4$, que equivale a $C_{4,2}$. Assim, podemos dizer que existem seis maneiras de escolhermos dois elementos de um conjunto de quatro elementos distintos.

Como nosso interesse aqui são as funções geradoras, tomemos $a = x$ e $b = 1$ em cada binômio a enésima potência para os Binômios de Newton. Obteremos as expansões binomiais reescritas da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^0 = 1\\
&(x+1)^1 = x+1\\
&(x+1)^2 = x^2+2x+1\\
&(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1\\
&(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1\\
&(x+1)^5 = x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1
\end{aligned}
$$

Note que os coeficientes mantiveram-se os mesmos, e portanto, continuam sendo os números de cada linha do Triângulo de Pascal. Além disso, voltamos a equação (1) para $m = 0, 1, 2...$ e $n = 1$.

Note que cada expansão acima pode ser considerada, conforme definição dada no capítulo anterior, uma função geradora ordinária para a sequência formada pelos elementos de cada linha do referido triângulo.

Por exemplo, um problema prático que teria $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ como função geradora seria "Quantos subconjuntos de n elementos tem um conjunto de cinco elementos?". Assim, se $n = 0$, teríamos o conjunto vazio (1 maneira), se $n = 1$, teríamos o conjunto unitário (5 maneiras), e assim por diante. Logo, a sequência $(a_r) = (1, 5, 10, 10, 5, 1)$ pode ser vista como o resultado do total de escolhas que posso fazer de um grupo de cinco elementos tomados r a r, ou seja, combinação simples de 5 elementos tomados r a r ($C_{5,r}$). Uma outra maneira de escrever a função geradora acima, usando o Binômio de Newton, seria

$$f(x) = (x+1)^5.$$

Mais a diante, verificaremos que essa é a forma fechada de se escrever a referida função geradora.

Consequentemente, segundo [9, Cap. 5], como o número de maneiras de retirarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, $r \leq n$, é $C_{n,r}$, a função geradora ordinária para este problema é: $f(x) = \sum_{r=0}^{n} C_{n,r} x^r$, como visto na equação (4), teremos

$$f(x) = (x+1)^n.$$

Outra parte desse conteúdo que é trabalhado no ensino médio são as propriedades do Triângulo de Pascal. Uma em especial é o Teorema das Linhas (ver [7, Cap. 6]), que diz que para cada linha n do Triângulo Aritmético, a soma de seus elementos é numericamente igual ao total de subconjuntos de um conjunto de n elementos, ou seja, $\sum_{i=0}^{n} C_{n,i} = 2^n$. Isso ocorre pois para achar o número de elementos de um subconjunto posso pensar que vou escolher dos n elementos i para compor o subconjunto para $0 \leq i \leq n$, ou simplesmente, que para cada elemento tenho 2 possibilidades de escolha, estar ou não no subconjunto, ou seja, pelo princípio multiplicativo da contagem, de 2^n maneiras. Ainda posso chegar nesse resultado usando a função geradora $f(x) = (x+1)^n$, pois é ensinado no conteúdo de Binômio de Newton que para encontrarmos a soma dos coeficientes da expansão de um binômio, temos que substituir as variáveis por 1. Note que

$$f(1) = (1+1)^n = 2^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i},$$

ou seja, resulta na soma dos coeficientes da função geradora $f(x) = (x+1)^n$. A ideia de substituirmos a variável por 1 de uma função geradora será revisitada no Capítulo 7 com maiores detalhes.

Assim, apesar de função geradora não ser um conteúdo previsto para o ensino médio, é possível, sem ferir o que está previsto no currículo de Matemática, se trabalhar com este assunto no âmbito da educação básica a partir de problemas da análise combinatória rotineiros e utilizando-se o Binômio de Newton, como foi o caso do problema prático acima.

Mas ainda é possível ir um pouco mais além no ensino médio, em seu currículo do Estado de São Paulo (ver [10]), por exemplo, não é especificado o tipo de combinação que se deve ser trabalhada com o aluno, tanto que a questão do Enem de 2017 que impulsionou o presente estudo referiu-se a combinação com repetição, e já vimos nas preliminares que existe uma função geradora que gerou o resultado da questão. Falta saber o motivo dos coeficientes da função geradora encontrada resultar na combinação com repetição desejada. No próximo capítulo será estudada a combinação com repetição.

4

COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Retornemos ao problema do Enem de 2017 que motivou o presente estudo. Vimos que o resultado do problema será numericamente igual ao total de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \tag{5}$$

ao atribuirmos as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 para, respectivamente, a quantidade de carrinhos a serem pintados da cor amarela, branca, laranja ou verde. No Capítulo 2, a esse problema foi atribuída uma função geradora que apresentou a solução em um dos seus coeficientes, sem ainda provar que isso de fato é válido. Mas antes de chegarmos a tal demonstração, vamos verificar uma maneira de resolvermos tal equação utilizando-se conceitos básicos de combinatória.

Seja a equação $x_1 + x_2 = 6$ para x_1 e x_2 inteiros não-negativos. Note que o conjunto solução dessa equação será $\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,0)\}$, e portanto, ela possui 7 soluções possíveis. Representemos cada uma dessas soluções da seguinte maneira:

$$(0,6) : +111111$$

$$(1,5) : 1 + 11111$$

$$(2,4) : 11 + 1111$$

$$(3,3) : 111 + 111$$

$$(4,2) : 1111 + 11$$

$$(5,1) : 11111 + 1$$

$$(6,0) : 111111+$$

Note que existem sete lugares possíveis para se colocar o sinal de "+" entre seis $1's$.

Agora, e se fosse a equação (5), como representaríamos suas soluções dessa maneira? Ora, manteríamos a mesma quantidade de $1's$, porém acrescentaríamos mais símbolos de "+". Por exemplo, a solução $(2,3,0,1)$ seria representada por "$11 + 111 + +1$". Note que existem dois "+"consecutivos pois $x_3 = 0$. Já as soluções $(1,3,1,1)$ e $(0,2,4,0)$ seriam representadas, respectivamente, por "$1 + 111 + 1 + 1$" e "$+11 + 1111+$". Em todas as representações temos seis símbolos $1's$ e três símbolos $+'s$, que, para cada caso, vão permutando seus lugares. Assim, podemos perceber que o total de soluções inteiras não-negativas para (5) será igual ao número de maneiras que podemos escolher dentre nove símbolos, três para serem o "+", ou seja, $C_{9,3} = \frac{9!}{6!.3!} = 84$. De fato, 84 é a solução desse problema conforme visto no Capítulo 2.

Veja o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *O número de soluções em inteiros não-negativos da equação*

$$x_1 + x_2 + ... + x_r = m, \tag{6}$$

para $m > 0$, é dado por $C_{m+r-1,r-1}$.

Demonstração. Como estamos interessados em expressar o inteiro m como soma de r inteiros não-negativos, basta, como fizemos no caso anterior, colocarmos $r-1$ sinais de +" e m números $1's$:

$$11111...1 + + + ...+,$$

totalizando $m + r - 1$ símbolos. Como cada permutação distinta entre esses símbolos gerará uma solução para a equação (6), basta verificar de quantas maneiras isso deve ser feito. Devemos escolher dentre os $m + r - 1$ símbolos, $r - 1$ para serem os sinais de "+", o que pode ser feito de $C_{m+r-1,r-1}$ maneiras diferentes.

□

Exemplo 4.2. *(Efomm 2019) Considere uma loja que vende cinco tipos de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar três refrigerantes desta loja?*
a) Dez.
b) Quinze.
c) Vinte.
d) Trinta e cinco.
e) Sessenta.

Solução: *Tomemos as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 para determinar a quantidade de cada tipo de refrigerante a ser comprado. Como serão comprados três refrigerantes, temos que:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3.$$

Como temos mais tipos de refrigerantes do que o número de unidades que deverá ser comprada, existirão variáveis que serão iguais a zero, logo, as soluções dessa equação serão inteiras não-negativas. Conforme Teorema 4.1, o número de soluções dessa equação, onde $m = 3$ e $r = 5$, será

$$C_{3+5-1,5-1} = C_{7,4} = \frac{7!}{4!.3!} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35.$$

Logo, teremos 35 formas diferentes de comprar os três refrigerantes.

Suponhamos, agora, que os tipos de refrigerante do Exemplo 4.2 são a, b, c, d e e. Na tabela abaixo temos a lista de todas as 35 possibilidades de compra dos três refrigerantes:

aaa	bbb	ccc	ddd	eee
aab	bba	cca	dda	eea
aac	bbc	ccb	ddb	eeb
aad	bbd	ccd	ddc	eec
aae	bbe	cce	dde	eed
abc	acd	ade	abd	abe
ace	ade	bcd	bce	bde

Note que a primeira linha da tabela representa as possibilidades de compra do mesmo tipo de refrigerante, da segunda à quarta linha, temos as possibilidades de compras de dois tipos iguais e um diferente, e nas duas últimas linhas, estão as de compras de tipos distintos. Perceba também que essas duas últimas linhas representam as possibilidades de escolhermos de cinco tipos de refrigerantes, três tipos distintos, ou seja, trata-se de uma combinação simples de 5 elementos tomados 3 a 3:

$$C_{5,2} = 10.$$

Assim, temos para o problema mais soluções que uma combinação simples pode oferecer. Para [9, Cap. 3], uma tabela como essa é uma lista das combinações com repetição de 5 tomados 3 a 3, que denotaremos como $CR_{5,3}$.

Portanto, $CR_{n,p}$ é o número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes. Assim como $CR_{5,3}$ gerou o total de soluções inteiras não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$, $CR_{n,p}$ gera o total de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$. Logo, conforme o Teorema 4.1 e a analogia anterior, temos que a combinação com repetição de n elementos tomados p a p será:

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,n-1}.$$

Um fato interessante a ser considerado é que para combinação simples de n elementos tomados p a p, p tem que ser menor do que ou igual a n. Já para combinação com repetição, esta restrição não é necessária, veja a equação gerada pelo problema do caminhão-cegonha $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Temos $n = 4$ e $p = 6$, ou seja, $p > n$.

Outro fato também a ser considerado é que essa fórmula para $CR_{n,p}$ pode ser escrita como

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p},$$

pois, segundo [9, Cap. 2], $C_{n+p-1,n-1}$ e $C_{n+p-1,p}$ são combinações complementares e, portanto, resultam no mesmo valor. Note que se considerarmos m objetos distintos, o número de maneiras de escolhermos r objetos é igual ao número de escolhermos $(m-r)$ objetos, pois, se dos m objetos tirarmos r, sobram $(m-r)$ e o contrário será verdadeiro. Se dos m objetos tirarmos $(m-r)$, sobram r, pois trata-se de uma bijeção. Logo, $C_{m,r} = C_{m,m-r}$, onde $C_{m,m-r}$ é chamada de *combinação complementar* de $C_{m,r}$. Assim, se tomarmos $m = n + p - 1$ e $r = n - 1$, teremos $(m - r) = (n + p - 1) - (n - 1) = p$. Portanto,

$$C_{n+p-1,n-1} = C_{n+p-1,p}.$$

Essa mesma informação sobre combinações complementares também pode ser útil para darmos uma outra resposta para o questionamento feito no Capítulo anterior sobre o fato de que termos simétricos da expansão de um Binômio de Newton do tipo $(a + b)^n$ possuem o mesmo coeficiente. De (4) teremos, por exemplo, que $C_{n,n-1}$ e $C_{n,1}$ são coeficientes de termos simétricos da expansão e, por serem, respectivamente, numericamente iguais às combinações complementares $C_{n,n-1}$ e $C_{n,1}$, terão o mesmo valor. No próximo Capítulo iremos mais a fundo no cálculo de coeficientes de uma função geradora.

5

COEFICIENTES DE FUNÇÕES GERADORAS

No Exemplo 4.2 do Capítulo anterior foi utilizada a combinação com repetição para solucionar o problema. Vamos agora verificar como ele pode ser resolvido utilizando-se a ferramenta “função geradora”. Lembremos que no Capítulo 2 definimos função geradora para uma sequência numérica como a série de potências que possuem seus elementos como coeficientes. Para [9, Cap. 5], se essa sequência é formada por soluções de um problema combinatório, essa série de potências é uma função geradora ordinária. Vamos encontrar agora a função geradora da sequência associada às soluções do Exemplo 4.2, que tem como objetivo calcular de quantas maneiras diferentes podemos comprar três refrigerantes de uma loja dentre os cinco tipos que ela vende.

Novamente usando as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 para determinar a quantidade de cada tipo de refrigerante a ser comprado, temos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3.$$

As variáveis envolvidas podem valer de 0 a 3 unidades. Assim, façamos a associação de cada variável ao polinômio $x^0 + x^1 + x^2 + x^3$, que controla seus possíveis valores. Novamente, pelo princípio multiplicativo:

$$\begin{aligned}(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^5 = \; & x^{15} + 5x^{14} + 15x^{13} + 35x^{12} + 65x^{11} + 101x^{10} \\ & + 135x^9 + 155x^8 + 155x^7 + 135x^6 + 101x^5 + 65x^4 \\ & + 35x^3 + 15x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

O polinômio resultante é a função geradora requerida. Como o coeficiente de x^3 é 35, essa é a resposta esperada.

A partir dessa resolução podemos formular alguns questionamentos sobre os passos utilizados. A primeira pergunta a se fazer é por qual motivo fazemos a associação de cada variável ao polinômio $x^0 + x^1 + x^2 + x^3$ e em seguida aplicamos o princípio multiplicativo. A segunda pergunta é porque só usamos um dos coeficientes como resposta e desconsideramos os outros.

Antes de chegarmos a essas respostas analisemos um outro exemplo que apresenta um número reduzido de tipos de refrigerantes.

Exemplo 5.1. *Considere uma loja que vende dois tipos de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos comprar três refrigerantes desta loja?*

Esse problema pode ser facilmente resolvido usando-se enumeração das possibilidades. Sejam a e b os dois tipos de refrigerantes, as possíveis soluções serão:

$$aaa, aab, abb, bbb.$$

Logo, teremos 4 *maneiras de comprarmos três refrigerantes desta loja.*

Note que o exemplo acima tem como resposta o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 = 3$, que vimos no capítulo anterior que seria $CR_{2,3} = C_{2+3-1,2-1} = C_{4,1} = 4$. Assim, suas soluções seriam $(3,0),(2,1),(1,2)$ e $(0,3)$.

Veja que cada variável x_i pertence ao conjunto $\{0,1,2,3\}$. Vamos fazer a associação delas, então, ao polinômio $x^0 + x^1 + x^2 + x^3$, conforme feito nos exemplos anteriores para encontrarmos a função geradora. Assim, fazendo o produto entre o polinômio associado a x_1 e a x_2, teremos, ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, o seguinte:

$$\begin{aligned}(x^0+x^1+x^2+x^3)\cdot(x^0+x^1+x^2+x^3) = \quad & x^0\cdot x^0 + x^0\cdot x^1 + x^0\cdot x^2 + x^0\cdot x^3\\ & +x^1\cdot x^0 + x^1\cdot x^1 + x^1\cdot x^2 + x^1\cdot x^3\\ & +x^2\cdot x^0 + x^2\cdot x^1 + x^2\cdot x^2 + x^2\cdot x^3\\ & +x^3\cdot x^0 + x^3\cdot x^1 + x^3\cdot x^2 + x^3\cdot x^3.\end{aligned}$$

Perceba que cada parcela $x^a \cdot x^b$ acima pode ser vista como a soma da quantidade de elementos de a e de b, já que $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, ou seja,

$$\begin{aligned}(x^0+x^1+x^2+x^3)\cdot(x^0+x^1+x^2+x^3) = \quad & x^0 + x^1 \quad +x^2 + x^3\\ & \quad\; + x^1 \quad +x^2 + x^3 \quad +x^4\\ & \qquad\qquad\; +x^2 + x^3 \quad +x^4 + x^5\\ & \qquad\qquad\qquad\quad + x^3 \quad +x^4 + x^5 \quad +x^6.\end{aligned}$$

Note que ficamos com uma parcela de x^0, duas de x^1, três de x^2, quatro de x^3, três de x^4, dois de x^5 e uma de x^6. Assim,

$$(x^0+x^1+x^2+x^3)\cdot(x^0+x^1+x^2+x^3) = x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6.$$

Pelo o que foi visto anteriormente, $f(x) = x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$ é a função geradora ordinária associada a sequência $(a_r) = (1,2,3,4,3,2,1,0,0,0,...)$, cujos elementos são soluções de um problema de combinatória. Nesse caso $1,2,3,4,3,2$ e 1 representam o número de maneiras de comprarmos, respectivamente, $0,1,2,3,4,5$ e 6 refrigerantes dentre duas opções a e b. Note que como só nos interessa comprarmos três, ficamos apenas com o coeficiente de x^3, onde x^3 foi formada por todas as possibilidades em que a quantidade de refrigerantes de a somada a quantidade de refrigerantes de b desse 3 unidades. Note também que com as restrições dadas não conseguimos comprar 7 refrigerantes, já que no máximo podemos comprar três de cada tipo, assim os coeficientes de x_k para $k \geq 7$ serão iguais a 0.

Para esse problema conseguimos responder nossos dois questionamentos da seguinte maneira: usamos para as duas variáveis o polinômio $x^0 + x^1 + x^2 + x^3$ pois o número máximo de refrigerantes de cada tipo que podemos comprar é três e o número mínimo é zero. Acrescentar x^4 a esse polinômio, por exemplo, nos daria a possibilidade de comprarmos quatro refrigerantes de um tipo, o que seria inadequado já que só queremos três ao todo. Como a quantidade de cada tipo de refrigerante é representada por um expoente, e nosso objetivo seria "somar os expoentes", temos que de alguma forma multiplicarmos as potências. Como queremos somar a quantidade de refrigerantes do tipo a com a quantidade do tipo b, precisamos ver de quantas maneiras podemos escolher os de a e os de b. Conforme vimos no Capítulo 1, o uso da conjunção "e" nos sugere a utilização do princípio multiplicativo da contagem, e ao multiplicarmos os polinômios associados a cada variável, teremos pela propriedade distributiva da multiplicação, o produto de todas as potências possíveis, e consequentemente, a soma de todas as quantidades de refrigerantes de cada tipo disponíveis para compra. Assim, nesse exemplo só nos interessa do polinômio resultante o termo de grau 3, cujo coeficiente é gerado pela soma de todos os produtos que após a aplicação da distributiva deram x^3. Porém os outros coeficientes também têm significado, eles representam o número de maneiras que podemos comprar, podendo escolher no máximo três de cada tipo, m refrigerantes, onde m é o grau de cada termo. Assim como os termos de x^k, para $k \geq 7$, não aparecem, temos que seus coeficientes são nulos, ou seja, temos 0 maneira de comprarmos 7 ou mais refrigerantes.

Para uma melhor compreensão, vamos agora trabalhar com uma situação em que cada variável possui uma restrição diferente. Reformulemos o Exemplo 4.2 da seguinte maneira:

Exemplo 5.2. *Considere uma loja que vende cinco tipos de refrigerantes (A, B, C, D e E). De quantas formas diferentes podemos comprar oito refrigerantes desta loja, de tal forma que sejam comprados de 2 a 7 do tipo A, de 1 a 3 do tipo B e do tipo C e pelo menos um de D?*

De fato teríamos outro tipo de restrição pois $x_1 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $x_2 \in \{1, 2, 3\}$, $x_3 \in \{1, 2, 3\}$, $x_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e* $x_5 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Além disso, se considerarmos que a soma das quantidades mínimas irá dar* 5, *cada variável só poderá chegar até seu mínimo mais três unidades, assim cada conjunto ficará restrito a:* $x_1 \in \{2, 3, 4, 5\}$, $x_2 \in \{1, 2, 3\}$, $x_3 \in \{1, 2, 3\}$, $x_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $x_5 \in \{0, 1, 2, 3\}$. *Logo, associando, respectivamente, as variáveis* x_1, x_2, x_3, x_4 *e* x_5 *aos polinômios que controlam seus possíveis valores, pelo princípio multiplicativo, teremos:*

$$
\begin{aligned}
(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) = \\
x^{18} + 5x^{17} + 15x^{16} + 33x^{15} + 57x^{14} + 81x^{13} + 96x^{12} + 96x^{11} + 81x^{10} + 57x^9 \\
+33x^8 + 15x^7 + 5x^6 + x^5.
\end{aligned}
$$

Como o coeficiente de x^8 é 33, essa é a solução do novo problema.

Perceba que o menor expoente de x é 5, de fato a soma dos valores mínimos das variáveis é 5, bem como, a soma de seus valores máximos é 18, maior expoente de x. Além disso, se verificarmos o coeficiente de x^6, por exemplo, teremos 5 maneiras de comprarmos 6 refrigerantes. Veja que como é necessário comprar no mínimo 2 do tipo A e no mínimo 1 dos tipos B, C e D, cinco refrigerantes já estão definidos, sobra apenas um refrigerante para ser escolhido dentre as cinco opções (A, B, C, D ou E), ou seja, teremos cinco maneiras de escolhermos seis refrigerantes. Assim, conseguiremos encontrar as soluções de problemas desse tipo mesmo que as restrições das variáveis sejam diferentes entre si.

No Capítulo 3, vimos conteúdos do ensino médio que estão ligados à funções geradoras e é importante mostrar ao aluno essa "ferramenta poderosa", porém é fato que o tempo é preciosíssimo em se tratando de uma prova importante, por exemplo. O aluno provavelmente não teria tempo hábil para, sem ajuda de uma calculadora online (ver [8]) ou outras ferramentas similares, fazer o produto dos polinômios associados a cada variável e, consequentemente, chegar no coeficiente requerido. Vimos alguns exemplos em que o coeficiente era numericamente igual a combinação com repetição de n elementos tomados até p vezes ($CR_{n,p}$). Mas será que isto é válido sempre ou existem situações específicas em que não podemos usar a combinação com repetição? Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5.3. *(FGV 2017) O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ é igual a*

a) 120.

b) 90.

c) 81.

d) 60.

e) 54.

Se fôssemos resolver como os exemplos anteriores poderíamos considerar $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ como a função geradora para o número de soluções inteiras não-negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 12,$$

com a restrição $x_i \in \{0, 4, 5\}$. O que de fato ocorre. Porém, seguindo os exemplos anteriores como o Exemplo 4.2, faríamos para achar o coeficiente de x^{12} a seguinte combinação: $CR_{10,12} = C_{10+12-1,12} = C_{21,12} = 293930$, que obviamente não é a resposta correta visto que não há essa opção dentre as possíveis. Logo, podemos concluir que nem sempre essa ideia é válida. Nesse caso, podemos pensar em uma lógica simples. Para obtermos x^{12}, podemos verificar de que maneira o 4 e o 5 podem somados gerar 12. Veja que apenas 3 quatros somados geram 12, isto é, $4 + 4 + 4$. Como são dez fatores iguais a $(1 + x^4 + x^5)$, devemos escolher três fatores, tomando x^4 em cada um, e nos demais tomamos o 1. Como podemos fazer isto de $C_{10,3} = \frac{10!}{3!.7!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$ maneiras diferentes, este é o coeficiente de x^{12}. Portanto, a alternativa correta é a letra *a*.

Observe que se fosse substituído o 12 por 7, por exemplo, não teríamos nenhuma solução pois não temos como escrever 7 como a soma de quatros e cincos. Assim, a restrição $x_i \in \{0, 4, 5\}$ influenciou totalmente na forma de resolvermos o problema.

Como na maioria dos problemas de combinatória, cada caso é único e deve ser resolvido com cautela, pensando com cuidado nas restrições e possibilidades que cada situação oferece. No próximo capítulo iremos fazer o caminho inverso, iremos encontrar, dados os coeficientes, a forma fechada da função geradora, ou seja, a função geradora escrita em uma expressão simples.

6 FORMA FECHADA DE UMA FUNÇÃO GERADORA

No Capítulo 3, vimos que o problema *"Quantos subconjuntos de n elementos tem um conjunto de cinco elementos?"* está associado à função geradora

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1,$$

cujos coeficientes são os elementos da sequência $a_r = C_{5,r}$, onde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, isto é, cada um desses elementos representam a quantidade de subconjuntos de r elementos. Vimos também que uma outra maneira de se escrever a função geradora acima seria $f(x) = (x+1)^5$, já que $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ é a expansão do binômio $(x+1)^5$. Ao escrevermos a função geradora como $f(x) = (x+1)^5$, encontramos sua forma fechada.

Consideremos, agora, uma sequência simples formada por n números $1's$, ou seja, $(a_r) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ..., 1)$. Sua função geradora será

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-1}. \tag{7}$$

Essa função é tratada de maneira especial por Loehr [4, Cap. 6], já que é um polinômio gaussiano que aparece muito nos estudos de funções geradoras, também conhecido como *q-análogo do natural n relativo à variável x* e cuja simbologia que o representa é $[n]_x$, ou seja, (7) poderia ser reescrita como $f(x) = [n]_x$.

Para encontrarmos uma forma fechada para (7), utilizaremos um conteúdo trabalhado no ensino médio, a progressão geométrica. Uma progressão geométrica, mais conhecida como PG, é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do primeiro, é gerado pelo produto do termo anterior por uma constante real, chamada de razão. Note que a sequência $(1, x, x^2, x^3, x^4, ..., x^{n-1})$ é uma progressão geométrica finita de razão x, cujo primeiro termo é 1. Se fizermos a soma de todos os termos desta PG, obteremos exatamente a função (7).

Para chegarmos a uma forma fechada para (7), vamos utilizar os passos da demonstração da soma dos n primeiros termos de uma PG feita em [7, p. 53]. Primeiramente, vamos multiplicar a função (7) por x, obtendo

$$xf(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-1} + x^n. \tag{8}$$

Em seguida, vamos fazer a subtração (7) – (8), obtendo $f(x) - xf(x) = 1 - x^n$, isto é, $(1-x).f(x) = 1 - x^n$. Logo,

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}. \tag{9}$$

Assim, em (9) temos a forma fechada de $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-1}$. Além disso, podemos dizer que é uma forma fechada para o polinômio $[n]_x$, ou seja, $[n]_x = \frac{1-x^n}{1-x}$, ou se preferirem, multiplicando numerador e denominador por -1, temos:

$$[n]_x = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \tag{10}$$

Para fins de convergência, trabalharemos com o intervalo $|x| < 1$, o que faz com que a função (9) esteja definida em todo seu domínio.

No caso anterior, usamos uma sequência finita de números $1's$. E se ela fosse infinita, ou seja, $(a_r) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$, como ficaria a forma fechada de sua função geradora?

Poderíamos considerar esse novo caso como sendo a soma de infinitos termos de uma PG. Tomemos novamente para x valores tais que $|x| < 1$. Assim, como $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ para $|x| < 1$ (ver [7, p. 54]), temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1-0}{1-x},$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{11}$$

Portanto, de (11) temos que a forma fechada da função geradora $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$ da sequência $(a_r) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$ é

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{12}$$

Exemplo 6.1. *Encontre a forma fechada da função geradora para a sequência* $(a_r) = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, ...)$.

Note que a função geradora procurada é a série de potências

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ...,$$

ou seja,

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ...$$

Portanto, se colocarmos em evidência o fator x^3, teremos que

$$f(x) = x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...) = x^3.\frac{1}{1-x},$$

conforme (12).

Portanto, a forma fechada pedida é

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x}.$$

Exercícios como o do exemplo anterior são resolvidos através de manipulações algébricas. Não existe uma única regra, uma única maneira para resolver todos os exercícios desse tipo, temos que analisar caso a caso e verificar qual é o melhor caminho a seguir para resolvê-los. Por exemplo, se fosse pedido a forma fechada da função geradora da sequência $(a_r) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$, o primeiro passo seria analisar como escrever a função geradora na forma de série de potências. Ficaria $f(x) = 1 + 0x + x^2 + 0x^3 + x^4 + 0x^5 + x^6 + ...$, ou seja, $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$ Todos os expoentes dessa série agora são pares, o que nos sugere resolver esse problema, por exemplo, como em uma resolução de equação biquadrada, que é resolvida por substituição de variáveis. Tomemos $z = x^2$, obtendo $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$. De (12) temos que $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Porém, $z = x^2$, o que nos leva a forma fechada pedida:

$$f(z) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Um exemplo muito interessante que [9, Cap.5] traz é o seguinte:

Exemplo 6.2. *Encontre a forma fechada da função geradora para a sequência $a_r = r$.*

A função geradora procurada é representada pela série de potências

$$g(x) = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + ...$$

Nos resta procurarmos uma maneira de manipular algebricamente tal função para encontrarmos sua forma fechada. Sabemos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5... = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5....$$

Note que o expoente de cada termo corresponde a cada elemento da sequência. Uma maneira de passarmos o expoente para coeficiente em um monômio seria derivá-lo, já que $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$*. Portanto, se derivarmos* $f(x)$ *em função de* x *obteremos:*

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ...$$

Perceba que as manipulações ainda não cessaram, teremos agora que multiplicar nossa $f'(x)$ *por* x *para finalmente chegarmos a* $g(x)$*.*

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = 0 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + ... = g(x).$$

Logo, a forma fechada da função geradora para a sequência $a_r = r$ *será*

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Independentemente da sequência dada em um exercício como este, ela irá gerar uma série de potências conforme a própria definição de função geradora, portanto, é interessante conhecermos algumas funções que podem ser escritas como tal. Em [4, Cap. 7] encontramos a expansão em série de potências da função exponencial, das funções trigonométricas seno e cosseno e de uma função logarítmica. São exemplos de séries de potências formais que veremos mais a diante, no Capítulo 8. Veja:

1. Função exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

   Portanto, $f(x) = e^x$ é a função geradora da sequência de termo geral $a_r = \frac{x^r}{r!}$ para $r \geq 0$.

2. Função seno:

$$sen(x) = 0 + x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!} + 0x^6 - \frac{x^7}{7!}...$$

   Portanto, $f(x) = sen(x)$ é a função geradora da sequência de termo geral

$$a_r = \begin{cases} 0, & \text{se r é par} \\ \frac{(-1)^{(r-1)/2}}{r!}x^r, & \text{se r é ímpar} \end{cases},$$

   para para $r \geq 0$.

3. Função cosseno:

$$cos(x) = 1 + 0x - \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + \frac{x^4}{4!} + 0x^5 - \frac{x^6}{6!}...$$

Portanto, $f(x) = cos(x)$ é a função geradora da sequência de termo geral

$$a_r = \begin{cases} 0, & \text{se r é ímpar} \\ \frac{(-1)^{r/2}}{r!}x^r, & \text{se r é par} \end{cases},$$

para para $r \geq 0$.

4. Função logarítmica natural:

$$ln(1 + x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}...$$

Portanto, $f(x) = ln(1 + x)$ é a função geradora da sequência de termo geral

$$a_r = \begin{cases} 0, & \text{se r} = 0 \\ \frac{(-1)^{r+1}}{r}x^r, & \text{se r} \geq 1 \end{cases}.$$

Note que para esses exemplos, as funções geradoras perderam a característica de terem uma forma fechada de função composta com polinômios como as encontradas nos Exemplos 6.1 e 6.2, por exemplo. No Capítulo 9, veremos que a expansão em série de potências da função exponencial poderá ser vista como um outro tipo de função geradora, a função geradora exponencial. Iremos diferenciá-la da função geradora ordinária e mostrar a sua utilidade para a resolução de problemas de contagem.

7

CONJUNTOS PONDERADOS

Conforme dito no Capítulo 2, iremos ver uma outra maneira de conceber uma função geradora. Para isso, vamos entender primeiro o que vem a ser um conjunto ponderado. Para [4, Cap. 6], um conjunto ponderado é um par (S, wt), onde S é um conjunto e $wt : S \to \mathbb{N}$ é uma função de S em números inteiros não-negativos, chamada de função peso. Assim, para cada $z \in S$, o inteiro $wt(z)$ é chamado de peso de z. Nesta definição, não é necessário que S seja um conjunto finito, porém iniciaremos com exemplos em que ele será.

Definição 1 (Função geradora para um conjunto ponderado)**.** *Dado um conjunto ponderado finito (S, wt), a função geradora para S é o polinômio:*

$$G_{S,wt}(x) = \sum_{z \in S} x^{wt(z)}$$

Podemos escrever para essa função geradora simplesmente $G_S(x)$ ou $G(x)$. Observe também que em nossa definição a soma do lado direito está bem definida, uma vez que S é finito e a adição de polinômios é uma operação associativa e comutativa.

No Capítulo 3 discutimos o problema "Quantos subconjuntos de n elementos tem um conjunto de cinco elementos?" e associamos a ele a função geradora $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$. Mas será que essa é a única função geradora para esse problema?

Para respondermos a essa pergunta, vamos primeiramente entender o que acontece para um caso mais simples. Seja $\{1, 2, 3\}$ um conjunto de três elementos distintos e chamemos de S o conjunto formado por seus subconjuntos, ou seja,

$$S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

A função geradora relacionada a pergunta "Quantos subconjuntos de n elementos tem um conjunto de três elementos?" será $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ pois consideremos a função peso $wt : S \to \mathbb{N}$ tal que $wt(A) = |A|$, para todo $A \in S$, em que $|A|$ é o número de elementos de A. Usando a Definição 1, temos que

$$G_{S,wt}(x) = \sum_{A \in S} x^{wt(A)} = x^0 + x^1 + x^1 + x^1 + x^2 + x^2 + x^2 + x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Portanto, $G(x) = f(x) = (1 + x)^3$.

Note que x^0 apareceu uma vez pois o conjunto vazio não possui elementos, x^1 apareceu três vezes pois existem três conjuntos unitários em S, e assim por diante.

Mas e se definíssemos a função peso diferente, como por exemplo $wt(A) = \sum_{i \in A} i$ com $A \in S$ e $wt(\emptyset) = 0$, isto é, o peso de A será dado pela soma de seus elementos. Assim, novamente usando a Definição 1 teremos a função geradora:

$$G(x) = \sum_{A \in S} x^{wt(A)} = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = 1 + x + x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Note que apenas o coeficiente de x^3 é 2 pois tanto o subconjunto $\{3\}$ quanto $\{1, 2\}$ resultam em 3 quando somamos seus elementos.

Assim, temos duas funções geradoras distintas para um mesmo conjunto S e poderíamos encontrar mais tantas funções quanto a nossa imaginação permitisse, já que podemos criar diferentes funções pesos e, consequentemente, diferentes funções geradoras. Logo, para o questionamento "Quantos subconjuntos de n elementos tem um conjunto de cinco elementos?" só teríamos a função geradora $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ relacionada pois implicitamente já descrevi a função peso wt e o conjunto S. A função wt retorna a quantidade de elementos dos subconjuntos de um conjunto de 5 elementos contidos em S. Concluindo que só existirá um conjunto ponderado e, portanto, sua respectiva função geradora se houver o par (S, wt) bem definido.

Para o problema do caminhão-cegonha que motivou nosso estudo, encontramos a função geradora

$$\begin{aligned} f(x) =& x^{24} + 4x^{23} + 10x^{22} + 20x^{21} + 35x^{20} + 56x^{19} + 84x^{18} + 116x^{17} + 149x^{16} + 180x^{15} \\ &+ 206x^{14} + 224x^{13} + 231x^{12} + 224x^{11} + 206x^{10} + 180x^9 + 149x^8 + 116x^7 + 84x^6 \\ &+ 56x^5 + 35x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

pois tratava-se de um conjunto ponderado (S, wt), onde S é o conjunto de todas as possibilidades de se pintar carrinhos usando quatro cores, de tal forma que cada cor poderia ser usada de 0 a 6 vezes e wt é a função peso que conta o total de carrinhos pintados. Veja que o coeficiente de x^{24} é igual a 1 pois só tem um elemento em S que possui 24 carrinhos pintados, que corresponde à situação de pintarmos 6 carrinhos com cada uma das quatro cores disponíveis. O mesmo ocorre para o termo independente igual a 1 da função geradora, ou seja, o x^0, pois também só tem um elemento em A que possui zero carrinho pintado, que seria a situação de pintarmos 0 carrinho com cada uma das cores. Perceba também que utilizamos como resposta do nosso problema o coeficiente de x^6 pois nos interessava de quantas maneiras poderiam ser pintados 6 carrinhos ao todo com as quatro cores disponíveis.

Agora, se quiséssemos achar uma forma fechada para a função geradora acima, poderíamos retornar a potência de polinômios que a gerou no Capítulo 2:

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4.$$

Note que trata-se de um polinômio gaussiano $[7]_x$ elevado à quarta potência. No capítulo anterior, vimos que $[7]_x = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = \frac{x^7-1}{x-1}$. Logo, a forma fechada para a função geradora em questão será

$$f(x) = \left(\frac{x^7 - 1}{x - 1}\right)^4. \tag{13}$$

Perceba que o próprio polinômio $[7]_x$ pode ser encarado como uma função geradora $G(x) = [7]_x$ de um conjunto ponderado (S, wt), tal que $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $wt(i) = i$ para todo $i \in S$, em um contexto que para cada cor disponível podemos pintar i carrinhos. Como são quatro cores, pelo princípio multiplicativo da contagem, teremos $G(x) \cdot G(x) \cdot G(x) \cdot G(x) = [G(x)]^4$ como a função geradora do problema do caminhão-cegonha. Mas porque isso está correto? Na sequência será justificado o porquê que podemos multiplicar funções geradoras de conjuntos ponderados. O mesmo faremos para a adição dessas funções. Em ambos os casos nos basearemos nas demonstrações feitas em [4, Cap. 6].

Teorema 7.1 (Regra da Soma para Conjuntos Ponderados)**.** *Suponhamos* (S_1, wt_1), (S_2, wt_2),..., (S_k, wt_k) *conjuntos ponderados finitos tais que* $S_1, ..., S_k$ *são conjuntos disjuntos dois a dois. Seja* $S = S_1 \cup ... \cup S_k$ *e* $wt : S \to \mathbb{N}$ *tal que* $wt(z) = wt_i(z)$ *para todo* $z \in S_i$*. Então*

$$G_{S,wt}(x) = G_{S_1,wt_1}(x) + G_{S_2,wt_2}(x) + ... + G_{S_k,wt_k}(x).$$

Demonstração. Pela Definição 1, $G_{S,wt}(x) = \sum_{z \in S} x^{wt(z)}$. Como a adição de polinômios é comutativa e associativa, nós podemos ordenar os termos da soma para que todos os objetos em S_1 venham primeiro, em seguida os de S_2, e assim por diante, até chegarmos nos de S_k. Obtendo

$$\begin{aligned} G_{S,wt}(x) &= \sum_{z \in S_1} x^{wt(z)} + \sum_{z \in S_2} x^{wt(z)} + ... + \sum_{z \in S_k} x^{wt(z)} \\ &= \sum_{z \in S_1} x^{wt_1(z)} + \sum_{z \in S_2} x^{wt_2(z)} + ... + \sum_{z \in S_k} x^{wt_k(z)} \\ &= G_{S_1,wt_1}(x) + G_{S_2,wt_2}(x) + ... + G_{S_k,wt_k}(x). \end{aligned}$$

□

Teorema 7.2 (Regra do Produto para Dois Conjuntos Ponderados)**.** *Suponhamos* (S_1, wt_1) *e* (S_2, wt_2) *conjuntos ponderados finitos tais que o conjunto* S *seja dado pelo produto cartesiano entre os conjuntos* S_1 *e* S_2*, ou seja,* $S = S_1 \times S_2$*. Definimos o peso* wt *como* $wt((i, j)) = wt_1(i) + wt_2(j)$ *para* $i \in S_1$ *e* $j \in S_2$*. Então*

$$G_{S,wt}(x) = G_{S_1,wt_1}(x) \cdot G_{S_2,wt_2}(x).$$

Demonstração. Pela Definição 1 e conforme definições acima, temos que

$$G_{S,wt}(x) = \sum_{z\in S} x^{wt(z)} = \sum_{(i,j)\in S} x^{wt((i,j))} = \sum_{(i,j)\in S_1\times S_2} x^{wt_1(i)+wt_2(j)}.$$

Como $x^{wt_1(i)+wt_2(j)} = x^{wt_1(i)} \cdot x^{wt_2(j)}$, segue que

$$G_{S,wt}(x) = \sum_{(i,j)\in S_1\times S_2} x^{wt_1(i)} \cdot x^{wt_2(j)} = \left(\sum_{i\in S_1} x^{wt_1(i)}\right) \cdot \left(\sum_{j\in S_2} x^{wt_2(j)}\right),$$

pelo Lema (2.5) em [4, Cap. 2].

Assim, novamente usando Definição 1, temos que

$$G_{S,wt}(x) = G_{S_1,wt_1}(x) \cdot G_{S_2,wt_2}(x).$$

□

Teorema 7.3 (Regra do Produto para k Conjuntos Ponderados)**.** *Suponhamos que* (S_i, wt_i) *é um conjunto ponderado finito para* $1 \leq i \leq k$. *No conjunto produto* $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$, *definimos o peso* wt *como* $wt((z_1, ..., z_k)) = \sum_{i=1}^{k} wt_i(z_i)$ *para todo* $z_i \in S_i$. *Então*

$$G_{S,wt}(x) = \prod_{n=i}^{k} G_{S_i,wt_i}(x).$$

Demonstração. Esta fórmula segue a regra do produto para dois conjuntos ponderados por indução em k. Sabemos pelo Teorema 7.2 que é válido para $k = 2$, ou seja, para $S = S_1 \times S_2$. Suponhamos válido para k, ou seja, para $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$, tendo $G_{S,wt}(x) = \prod_{n=i}^{k} G_{S_i,wt_i}(x)$. Como $S \times S_{k+1}$ é um produto de dois conjuntos ponderados, novamente pelo Teorema 7.2, temos

$$G_{S\times S_{k+1},wt}(x) = G_{S,wt}(x) \cdot G_{S_{k+1},wt} = \prod_{n=i}^{k} G_{S_i,wt_i}(x) \cdot G_{S_{k+1},wt} = \prod_{n=i}^{k+1} G_{S_i,wt_i}(x).$$

□

Esse último teorema justifica a função (13), forma fechada da função geradora do problema do caminhão-cegonha, estar correta.

Existem muitos tipos de funções geradoras, algumas inclusive são conhecidas por nomes específicos. Como o objetivo aqui é relacionar a função geradora vista de maneira intuitiva no Capítulo 2 e a forma aqui apresentada nesse capítulo, trabalharemos agora com um tipo especial: a função geradora de inversão.

Para entendermos o que é uma inversão, pensemos em uma palavra w tal que w pode ser escrita como $w_1w_2...w_n$, ou seja, dado um conjunto A finito, uma palavra em um alfabeto A é a sequência $w = w_1w_2...w_n$, onde cada $w_i \in A$ com $1 \leq i \leq n$ pode ser considerado como se fosse uma letra dessa palavra, no entanto, nesse caso tomemos $A = \mathbb{Z}$, isto é, w_i é um número inteiro e não uma letra do nosso alfabeto. Assim, definimos inversão como um par de índices $i < j$ de tal modo que ocorre $w_i > w_j$. Escrevemos $inv(w)$ para o número de inversões de w, ou seja, $inv(w)$ conta pares de letras em w, não necessariamente adjacentes, que estão fora da ordem numérica. Matematicamente, conforme [4, Cap. 6], temos que

$$inv(w_1 w_2 ... w_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi(w_i > w_j).$$

Definimos , também, $Inv(w)$ como o conjunto de todos os pares de inversão (i, j), ou seja, $|Inv(w)| = inv(w)$. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 7.4. *Considere a palavra $w = 3272$, onde $w_1 = 3$,$w_2 = 2$, $w_3 = 7$ e $w_4 = 2$. O par $(1, 2)$ é uma inversão de w pois $w_1 = 3 > 2 = w_2$. O par $(2, 3)$ não é uma inversão, pois $w_2 = 2 \leq 7 = w_3$. Analogamente ao primeiro caso, $(1, 4)$ e $(3, 4)$ são inversões. Logo, teremos*

$$Inv(w) = \{(1, 2), (1, 4), (3, 4)\}$$

e, consequentemente, $inv(w) = 3$ já que $inv(w) = |Inv(w)|$.

Posto isto, podemos definir na sequência o que vem a ser uma função geradora de inversão.

Definição 2 (Função geradora de inversão)**.** *Dado um conjunto finito S de palavras sobre o alfabeto $\mathbb{Z}$, a função geradora de inversão para S é*

$$G_{S,inv}(x) = \sum_{w \in S} x^{inv(w)}.$$

Como nosso objetivo nessa dissertação é trabalharmos a combinatória via função geradora, de preferência utilizando conteúdos do Ensino Médio, iremos agora analisar a ideia da permutação simples de n elementos, conforme a definição dada em [4, Cap. 1].

Definição 3 (Permutação)**.** *Dado um conjunto A com n elementos. Uma permutação de A é a palavra $w = w_1 w_2 ... w_n$ em que cada letra de A aparece exatamente uma vez. Por exemplo, seja o conjunto $A = \{x, y, z\}$, as palavras xyz e zxy são permutações de A.*

Para isso, vamos verificar como ficaria a função geradora de inversão para o conjunto das permutações entre os elementos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ que chamaremos de S. Um aluno do Ensino Médio que já aprendeu o conteúdo sobre permutação simples, certamente saberia dizer que existirão 6 elementos em S, mas como encontrar a função geradora requerida?

Primeiramente vamos determinar S:

$$S = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

Em seguida, vamos aplicar a Definição 2:

$$\begin{aligned}
G_{S,inv}(x) &= x^{inv(123)} + x^{inv(132)} + x^{inv(213)} + x^{inv(231)} + x^{inv(312)} + x^{inv(321)} \\
&= x^0 + x^1 + x^1 + x^2 + x^2 + x^3 \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + x^3.
\end{aligned}$$

Note que podemos escrever o polinômio resultante como

$$(1 + x + x^2) + (x + x^2 + x^3) = (1 + x + x^2) + x(1 + x + x^2) = (1 + x)(1 + x + x^2).$$

Assim,

$$G_S(x) = 1(1 + x)(1 + x + x^2).$$

Observe também que $G_S(1) = 6 = 3! = |S|$. O que decorre da Definição 1, já que os coeficientes são gerados pela soma de quantos objetos temos de cada peso, e ao substituirmos x por 1, obtemos a soma de todos os coeficientes de cada termo, que obrigatoriamente terá que resultar em $|S|$. O mesmo ocorrerá para as duas primeiras funções geradoras encontradas nesse capítulo referente ao mesmo conjunto S, onde para ambas temos $G(1) = 8$, valor que corresponde ao total de subconjuntos de um conjunto de 3 elementos. Esse fato também é usado no conteúdo de Binômio de Newton e Triângulo de Pascal trabalhados no Ensino Médio, ao pedirmos a soma dos coeficientes de uma expansão de um binômio ou ainda para demonstrarmos o Teorema das Linhas, conforme discutido no final do Capítulo 3.

Voltando a ideia da permutação, vejamos o que acontece quando queremos determinar a função geradora de inversão $G_T(x)$ para o conjunto T das permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$, um conjunto de 4 elementos. Sabemos que o total de subconjuntos será $4! = 24$, e consequentemente, $G_T(1) = 24$. Mas como encontrar $G_T(x)$ sem ter que analisar cada uma das 24 permutações? Para isso faremos a análise de T para verificarmos se existe alguma hipótese.

Seja $T = \{1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214, 1243, ..., 1423, ..., 4123, ...\}$ mostrado parcialmente, podemos considerar que para as 6 permutações de $\{1, 2, 3\}$ o quatro foi acrescentado como se fosse a quarta letra nas seis primeiras novas palavras, e na sequência, foi inserido entre a última e a penúltima letra, depois, entre a primeira e a segunda, e por fim, como a primeira letra. Para cada situação foi gerado seis novas palavras, em um total de 24, como nós já havíamos previsto. Usando a Definição 2 e o Teorema 7.1, vamos encontrar a função geradora de inversão de T. Para isso, vamos reescrever T como $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, onde T_i é o conjunto das permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$ com o 4 na i-ésima posição. Note que em T_4 cada elemento possui exatamente o mesmo número de inversões que S, conjunto das permutações de $\{1, 2, 3\}$. Logo, a função geradora de inversão para T_4, $G_{T_4}(x)$, é igual a para S, ou seja, $G_{T_4}(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$. Em T_3, o 4 estará na terceira posição e aumentará apenas uma inversão para cada elemento, logo a função geradora de inversão para T_3 será $G_{T_3}(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$. Em T_2, o 4 estará na segunda posição e aumentarão, portanto, duas inversões para cada elemento, logo a função geradora de inversão para T_2 será $G_{T_2}(x) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5$. E por fim, em T_1, o 4 estará na primeira posição e aumentarão três inversões para cada elemento, obtendo como função geradora de inversão para T_1 a $G_{T_1}(x) = x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6$. Assim, pelo Teorema 7.1,

$$\begin{aligned}
G_T(x) &= G_{T_1}(x) + G_{T_2}(x) + G_{T_3}(x) + G_{T_4}(x) \\
&= (x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6) + (x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5) + (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4) \\
&+ (1 + 2x + 2x^2 + x^3) \\
&= x^3(1 + 2x + 2x^2 + x^3) + x^2(1 + 2x + 2x^2 + x^3) + x(1 + 2x + 2x^2 + x^3) \\
&+ 1(1 + 2x + 2x^2 + x^3) \\
&= (1 + 2x + 2x^2 + x^3)(x^3 + x^2 + x + 1) \\
&= 1(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)
\end{aligned}$$

Note que a função geradora acima é dada pelo produto dos polinômios gaussianos $[1]_x$, $[2]_x$, $[3]_x$ e $[4]_x$, ou seja, $G_T(x) = [1]_x \cdot [2]_x \cdot [3]_x \cdot [4]_x$.

Em [4, Cap. 6], encontramos a seguinte definição:

Definição 4 (q-fatorial de n relativo a x). *Para cada $n \geq 1$ e toda variável x, definimos q-fatorial de n relativo a x como o polinômio*

$$[n]!_x = \prod_{i=1}^{n} [i]_x = \prod_{i=1}^{n} (1 + x + x^2 + ... + x^{i-1}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x^i - 1}{x - 1}.$$

Logo, $G_T(x) = [4]!_x$. Assim uma boa hipótese para a função geradora de inversão para um conjunto S formado pelos subconjuntos de n elementos é $G_S(x) = [n]!_x$. Antes de demostrarmos tal hipótese vamos verificar mais um exemplo e alguns conceitos importantes.

Exemplo 7.5. *Dado um n inteiro positivo e considerando n conjuntos ponderados $S_i = \{0, 1, ..., i - 1\}$, para $1 \leq i \leq n$, onde $wt(z) = z$ para cada $z \in S_i$. Pela Definição 1 e usando a simbologia de um q-análogo de n relativo a x, temos que $G_{S_i}(x) = x^0 + x^1 + ... + x^{i-1} = [i]_x$. Agora, consideremos o conjunto produto $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$, pela Regra do Produto de n Conjuntos Ponderados e pela Definição 4, temos que a função geradora para S é*

$$G_S(x) = \prod_{i=1}^{n} [i]_x = [n]!_x.$$

Note que tanto a hipótese da fórmula da função geradora de inversão para as permutações de n elementos, quanto a função geradora encontrada no Exemplo 7.5 são iguais. Será que daria para provar a hipótese acima usando o exemplo? Para isso precisaremos saber que dados dois conjuntos ponderados (S, w_1) e (T, w_2), uma *bijeção de preservação-de-peso* de (S, w_1) para (T, w_2) é a bijeção $f : S \to T$ tal que $w_2(f(z)) = w_1(z)$, para todo $z \in S$ (ver [4, Cap. 6]).

Teorema 7.6 (Regra da Bijeção para funções geradoras)**.** *Suponhamos* (S, w_1) *e* (T, w_2)*, dois conjuntos ponderados finitos tais que existe uma bijeção de preservação-de-peso* $f : S \to T$*. Então*

$$G_{S,w_1}(x) = G_{T,w_2}(x).$$

Demonstração. Seja $g : T \to S$ a função inversa de f. Verifica-se que g é uma bijeção de preservação-de-peso, já que f é. Para cada $k \geq 0$, temos $S_k = \{z \in S : w_1(z) = k\}$ e $T_k = \{u \in T : w_2(u) = k\}$. Como f e g preservam pesos, elas restringem-se para gerar as funções $f_k : S_k \to T_k$ e $g_K : T_k \to S_k$ que são mutuamente inversas. Portanto, $|S_k| = |T_k|$ para todo $k \geq 0$. Isto posto,

$$G_{S,w_1}(x) = \sum_{k\geq 0} |S_k| x^k = \sum_{k\geq 0} |T_k| x^k = G_{T,w_2}(x).$$

$\square$

Após provarmos a Regra da Bijeção para funções geradoras, vamos provar nossa hipótese.

Teorema 7.7 (Fórmula da função geradora de inversão para as permutações de n elementos)**.** *Para todo* $n \geq 0$*, seja* S_n *o conjunto das permutações de* $\{1, 2, ..., n\}$*, ponderados pelas inversões. Então*

$$G_{S_n,inv}(x) = \sum_{w\in S_n} x^{inv(w)} = [n]!_x.$$

Demonstração. Seja $T_n = T'_1 \times T'_2 \times ... \times T'_n$, o conjunto produto análogo ao apresentado no Exemplo 7.5, com $T'_i = \{0, 1, ..., i-1\}$, para $1 \leq i \leq n$, de tal forma que $G_{T_n}(x) = [n]!_x$. Portanto, para provar o teorema é suficiente definir uma bijeção de preservação-de-peso $f_n : S_n \to T_n$. Seja $w = w_1 w_2 ... w_n \in S_n$ uma permutação de $\{1, 2, ..., n\}$. Para cada k entre 1 e n, definimos t_k para ser o número de pares $i < j$ tais que $w_i < w_j$ e $w_i = k$. Então definimos $f_n(w) = (t_1, t_2, ..., t_n)$. Em outras palavras, $t_k = |\, \{(i, j) \in Inv(w) : w_i = k\} \,|$ é o número de inversões que o símbolo k tem com os símbolos à sua direita. Note que esses símbolos tem $k-1$ possibilidades. Note que toda inversão de w é contada somente por um dos números t_k, então temos que $inv(w) = \sum_{k=1}^{n} t_k = wt(f_n(w))$ para todo $w \in S_n$. Isto nos mostra que f_n preservou os pesos, porém, resta agora verificarmos que existe a bijeção em f_n. Seja $g_n : T_n \to S_n$ a função inversa de f_n. O caso para $n \leq 1$ é imediato pois envolve apenas um elemento. Suponhamos que a bijeção é válida para g_{n-1}, com $n > 1$. Tomemos $(t_1, ..., t_n) \in T_n = T_{n-1} \times T'_n$, com $v = g_{n-1}(t_1, ..., t_{n-1})$ uma permutação de $\{1, 2, ..., n-1\}$. Para acharmos $g_n(t_1, ..., t_n)$, vamos inserir o símbolo n na permutação v de tal forma que n gere t_n novas inversões. Note que temos n possibilidades de locais para n ser inserido. Se ele for colocado como o último símbolo, não teremos novas inversões, porém, se ele for colocado como o primeiro, teremos $n-1$ inversões. Assim, podemos inferir que $t_n \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Isto posto, temos que para todo $k \leq n$, t_k é o número de pares de inversões envolvendo o símbolo k e os que estão à sua direita. Assim g_n é a função inversa de f_n, ou seja, existe a bijeção. Logo, pelo Teorema (7.6),

$$G_{S_n,inv}(x) = G_{T_n}(x) = [n]!_x.$$

□

Para exemplificarmos o que foi demonstrado acima, seja $k = 5$, então t_5 só poderá valer $0, 1, 2, 3$ ou 4, já que só haverá inversão se o 5 estiver à esquerda de $0, 1, 2, 3$ ou 4. Assim, temos que $t_k \in \{0, 1, 2, ..., k-1\} = T'_k$ para todo k. Então, $f_n(w)$ está contido no conjunto T_n. Por exemplo, se $w = 4, 1, 7, 5, 2, 8, 3, 6$, então $f_n = (0, 0, 0, 3, 2, 0, 4, 2)$. Nesse caso $t_5 = 2$ pois teremos duas inversões: $(4, 5)$ e $(4, 7)$. Perceba que o 5 é o símbolo w_4 de w e, também, $5 < 2$ e $5 < 3$, com $w_5 = 2$ e $w_7 = 3$. Por outro lado, seja $g_8(0, 1, 0, 3, 2, 1, 1, 5)$, conseguimos chegar em w fazendo o seguinte raciocínio. Como $t_8 = 5$, existem 5 símbolos à direita do 8, logo $w_3 = 8$. Como $t_7 = 1$ e o último símbolo não é o 8, $w_7 = 7$. O mesmo para o 6, como $t_6 = 1$ e $w_7 = 7$, o 6 só poderá ser o w_6. Como o $t_3 = 0$, o 3 só pode ser o último símbolo. Temos então, por enquanto, o final de w: $6, 7, 3$. Como $t_4 = 3$, $t_2 = 1$ e $t_5 = 2$, obrigatoriamente o 4 terá que estar antes de $1, 2$ e 3, o 2 antes do 1 e 5 depois do 4 e do 2. Teremos então a sequência $4, 2, 5, 1$ não necessariamente adjacentes. Como já sabemos a posição do 8, nos resta apenas a possibilidade $w = 4, 2, 5, 1, 6, 7, 3$, que resulta em $f_8(w) = (0, 1, 0, 3, 2, 1, 1, 5)$.

Note que a demonstração do Teorema 7.7 usou a ideia de função geradora para um conjunto ponderado, conforme apresentada na Definição 1. Porém esse não é o único caminho possível, usando a definição de função geradora apresentada no Capítulo 2 e como se apresentou sua construção, poderíamos também chegar, mesmo sem o rigor da demonstração acima, na fórmula da função geradora de inversão para as permutações de n elementos fazendo o seguinte raciocínio. Consideremos todas as permutações de $\{1, 2, ..., n\}$. Obrigatoriamente todos os elementos serão inseridos, alternando apenas as ordens. Para fazer essa inserção vamos pensar da seguinte maneira. Se colocarmos o 1, não chegaríamos a nenhuma inversão, pois teríamos apenas um elemento. Se colocarmos na sequência o 2, teríamos duas possibilidades: uma ou nenhuma inversão. Ao colocarmos o 3, poderíamos agora ter duas, uma ou nenhuma inversão em relação ao 3. Por exemplo, a permutação $3, 2, 1$ gera duas inversões, já $1, 3, 2$ gera apenas uma e $2, 1, 3$, nenhuma inversão em relação ao símbolo 3. Para o 4, teríamos de três a nenhuma inversão em relação ao 4, e assim sucessivamente até chegar em n. Para cada situação acima teríamos um polinômio associado. Para o caso do 1, seria o x^0. Para o 2, seria $x^0 + x^1$, ou seja, nenhuma ou uma inversão. Já para o 3, teríamos o polinômio associado $x^0 + x^1 + x^2$, e assim por diante até chegar em n e seu respectivo polinômio associado $x^0 + x^1 + x^2 + ... + x^{n-1}$. Assim, pelo princípio multiplicativo da contagem, teríamos:

$$f(x) = 1(1 + x)(1 + x + x^2)...(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = [n]!_x.$$

Perceba que o que diferenciou o raciocínio para chegarmos à função geradora de inversão de uma permutação de 4 elementos, anteriormente apresentada nesse mesmo capítulo, e o usado para chegarmos à função acima para n elementos foi o princípio da contagem utilizado. No primeiro caso, chegou-se à função dividindo a situação em hipóteses: ou o 4 ficaria na primeira ou na segunda ou na terceira ou na quarta posição. Cada hipótese gerou sua própria função geradora e, pela Regra da Soma para Conjuntos Ponderados, obtivemos a função final. Tal regra, nada mais é que o princípio aditivo da contagem aplicado às funções geradoras para conjuntos ponderados. Por outro lado, para chegarmos à função geradora de inversão de uma permutação de n elementos, dividimos o problema em etapas. A primeira etapa foi inserir o símbolo 1, a segunda etapa foi inserir o 2, e assim por diante, até a enésima etapa que foi inserir o n. Ao dividirmos o problema de contagem em etapas, podemos resolvê-lo usando o princípio multiplicativo da contagem e foi exatamente o que fizemos. Cada etapa gerou um polinômio associado diferente, que pode ser considerado uma função geradora para cada situação, essas funções foram então multiplicadas. Note que é exatamente a ideia do Teorema 7.3: Regra do Produto para k Conjuntos Ponderados.

Não importa o nível da questão ou do assunto de combinatória, a base para sua resolução são os dois princípios da contagem: aditivo e multiplicativo. Para as funções geradoras de conjuntos ponderados não seria diferente, a base para sua construção são as Regras da Soma e do Produto para Conjuntos Ponderados.

Até agora trabalhamos com situações que envolviam conjuntos finitos de objetos ponderados, mas também é possível que nos deparamos com conjuntos infinitos de objetos com pesos, para isso iremos estudar no próximo capítulo as séries de potências formais.

8 SÉRIES DE POTÊNCIAS FORMAIS

No último capítulo, nós vimos o que são conjuntos ponderados e como chegamos às funções geradoras para esses conjuntos: $G_S(x) = \sum_{z\in S} x^{wt(z)}$, onde S é um conjunto finito de objetos ponderados. Essas funções geradoras são polinômios de variável x, para os quais apresentaremos uma definição mais formal a seguir. Agora, suponhamos que S é um conjunto infinito de objetos com pesos. Por analogia com o caso finito, gostaríamos de definir uma função geradora $G_S(x) = \sum_{z\in S} x^{wt(z)} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, onde a_n é o número de objetos em S de peso n.

Vejamos um exemplo trazido em [4, Cap. 7]. Seja S o conjunto de todas as palavras dentro do alfabeto $\{0,1\}$ ponderado pelo comprimento. Teremos $a_n = 2^n$ para todo $n \geq 0$, pois uma palavra de comprimento n é formada por n símbolos dentro do alfabeto $\{0,1\}$. Para cada símbolo teremos duas opções: 0 ou 1. Logo, pelo princípio multiplicativo da contagem, teremos 2^n maneiras de escrevermos tal palavra, e então

$$G_S(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + ... + 2^n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Note que usamos uma função real para modelar a função combinatória geradora, o que pode ser problemático porque existe uma preocupação com a questão da convergência. No caso acima $G_S(x)$ é uma série de potências que pode ser vista como uma função de variável real que está definida para todo x. Porém, para não cairmos na problemática da convergência podemos restringir esse domínio tomando $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, de tal forma que ao usar a forma fechada (12) do Capítulo 6, tenhamos $G_S(x) = \sum_{n\geq 0}(2x)^n = \frac{1}{1-2x}$ escrita como tal.

Como a ideia é ver uma função geradora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como apenas a forma abreviada para uma sequência infinita de inteiros $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, ou seja, não nos importa o valor de x e sim os coeficientes, a questão de convergência não nos interessa e podemos restringir x de tal forma que fique centrado em $x = 0$, por exemplo. Ou melhor ainda, como não será feita uma substituição de x por um número real específico, podemos pensar em x como um símbolo, não uma variável, e é o que faremos a partir de agora.

Em combinatória, geralmente basta considerar séries de potências formais cujos coeficientes são inteiros, porém, em [4, Cap. 7] encontramos uma situação um pouco mais geral onde os coeficientes provém de um anel arbitrário.

Definição 5 (Anéis). *Um anel consiste de um conjunto R e de duas operações binárias $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação) com domínio $R \times R$, sujeitos aos seguintes axiomas:*

- $\forall x, y \in R, x + y \in R$

- $\forall x, y, z \in R, x + (y + z) = (x + y) + z$
- $\forall x, y \in R, x + y = y + x$
- $\exists O_R \in R, \forall x \in R, x + O_R = x = O_R + x$
- $\forall x \in R, \exists - x \in R, x + (-x) = O_R = (-x) + x$
- $\forall x, y \in R, x \cdot y \in R$
- $\forall x, y, z \in R, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \in R$
- $\exists 1_R \in R, \forall x \in R, x \cdot 1_R = x = 1_R \cdot x$
- $\forall x, y, z \in R, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $\forall x, y, z \in R, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Também podemos usar xy em vez de $x \cdot y$. Assim, R é uma anel comutativo se, e somente se, satisfaz o axioma comutativo da multiplicação, ou seja,

$$\forall x, y \in R, xy = yx.$$

Uma observação a ser considerada é que, dado um anel R, e supondo $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, como a adição é associativa, podemos inequivocamente escrever a soma $x_1 + x_2 + ... + x_n$ sem parênteses. Analogamente, como a multiplicação é associativa, podemos escrever o produto $x_1 x_2 x_3 ... x_n$ sem parênteses.

Definição 6 (Corpos)**.** *Um corpo é um anel comutativo F com $1_F \neq 0_F$ de tal forma que todo elemento não nulo de F tem um inverso multiplicativo:*

$$\forall x \in F, x \neq 0_F \to \exists y \in F, xy = 1_F = yx.$$

Na sequência, definiremos série de potências formal. Para isso representaremos um corpo que contém o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais pela letra K. Por exemplo, K pode ser o próprio $\mathbb{Q}$, o $\mathbb{R}$(conjunto dos números reais), ou o $\mathbb{C}$(conjunto dos números complexos).

Definição 7 (Séries de potências formais)**.** *Uma série de potências formal em uma variável com coeficientes em K é uma função $F : \mathbb{N} \to K$. Nós escrevemos $F(n)$ ou F_n para o valor da função F em função de n ($n \in \mathbb{N}$). O conjunto de todas essas funções será denotado $K[[x]]$, onde x é um símbolo chamado de indeterminado.*

Uma série de potências formal $F \in K[[x]]$ é exatamente o mesmo que uma sequência

$$F = (F_0, F_1, F_2, ..., F_n, ...) = (F(0), F(1), F(2), ..., F(n), ...)$$

cujos índices são inteiros não negativos, onde cada $F_n \in K$. Costumamos exibir essa sequência usando notação de séries de potências escrevendo

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

e chamando F_n de coeficiente de x^n em F.

Assim, duas séries de potências formais $F, G \in K[[x]]$ serão iguais se, e somente se, $F_n = G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, seja a função $Z : \mathbb{N} \to K$ de tal modo que $Z(n) = 0_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, definida como a série de potências nula, ou seja, $Z = \sum_{n \geq 0} 0x^n$, o que geralmente é denotado simplesmente com o símbolo 0. Note também que o exemplo dado no início desse capítulo, onde encontramos a função geradora $G_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ que, após apresentarmos a Definição 7, pode ser encarada também como uma série de potências formal já que G_S faz parte de $K[[x]]$, pois $G : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Na notação de sequências podemos reescrever G_S como

$$G_S = (1, 2, 4, 8, ..., 2^n, ...).$$

Em [4, Cap. 7], encontramos um exemplo curioso de série de potências formal que nos faz refletir sobre a potencialidade de séries de potências generalizar tudo que já foi visto sobre funções geradoras escritas como polinômios. Vejamos:

Exemplo 8.1. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos uma série de potências $X_i : \mathbb{N} \to K$ por $X_i(i) = 1$ e $X_i(j) = 0$ para todo $j \neq i$. Portanto, X_i é a sequência $(0, 0, ..., 1, 0, ...)$ onde o 1 é precedido de i zeros, ou seja,*

$$X_i = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n = i) x^n.$$

No exemplo acima, se omitíssemos os coeficientes zeros, seria tentador escrever $X_0 = x^0 = 1$, $X_1 = x^1 = x$ e $X_i = x^i$, ou seja, teríamos simples polinômios. Rigorosamente falando, essas abreviações da forma oficial da notação de séries de potências não são permitidas, mas para nosso objetivo que é analisar os coeficientes a fim de contar algo, poderão ser feitas. Intuitivamente, um polinômio é uma série de potências formal com um número finito de coeficientes diferentes de zero. Para formalizarmos polinômios como um grupo especial dentro da séries de potências formais, segue a definição de polinômios formais.

Definição 8 (Polinômios formais)**.** *Uma série de potências formal $F \in K[[x]]$ é um polinômio se, e somente se, $\{n \in \mathbb{N} : F(n) \neq 0\}$ é um conjunto finito. Para tanto, tomemos $K[x]$ como o conjunto de todos os polinômios em $K[[x]]$.*

Somar ou multiplicar polinômios são operações que aprendemos ainda no Ensino Fundamental II, porém, em se tratando de outros tipos de séries de potências formais, como seria sua soma ou seu produto? Vejamos a definição dada por [4, Cap. 7].

Definição 9 (Soma e produto de séries de potências formais)**.** *Dados $F, G \in K[[x]]$, definimos a soma $F+G : \mathbb{N} \to K$ por $(F+G)(n) = F(n) + G(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos o produto $FG : \mathbb{N} \to K$ por*

$$(FG)(n) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} F(i)G(j) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} F(k)G(n-k).$$

FG é às vezes chamado de convolução das funções F e G.

Na notação de sequências essas duas definições podem ser escritas da seguinte forma:

$$(F_n : n \geq 0) + (G_n : n \geq 0) = (F_n + G_n : n \geq 0);$$

$$(F_n : n \geq 0) \times (G_n : n \geq 0) = \left(\sum_{k=0}^{n} F_k + G_{n-k} : n \geq 0 \right).$$

Já para a notação de séries de potências formais, essas operações podem ser escritas como

$$\sum_{n\geq 0} F_n x^n + \sum_{n\geq 0} G_n x^n = \sum_{n\geq 0} (F_n + G_n) x^n;$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} F_n x^n \right) \times \left(\sum_{n\geq 0} G_n x^n \right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i+j=n} F_i G_j \right) x^n.$$

Essas fórmulas são exatamente o que nós esperávamos encontrar ao usarmos a propriedade distributiva generalizada, se x e cada F_n e G_n são elementos de algum anel em que sua soma é finita. Note que, de certa forma, são exatamente os mesmos passos para adição e produto entre polinômios. Analisemos a situação a seguir considerando duas funções polinomiais, por exemplo, $p(z) = 1 + 2z^2 + 3z^4$ e $q(z) = 3 + 2z + 5z^2 + 2z^3$. Ao fazermos a soma e o produto entre elas teremos: $p(z) + q(z) = 4 + 2z + 7z^2 + 2z^3 + 3z^4$ e $p(z)q(z) = 3 + 2z + 11z^2 + 6z^3 + 19z^4 + 10z^5 + 15z^6 + 6z^7$. Perceba que no produto $p(z)q(z)$, o coeficiente de z^4 ficou igual a 19 pois apenas duas possibilidades de produtos entre termos de $p(z)$ e de $q(z)$ resultam em z^4. São eles: $2z^2$ por $5z^2$ e $3z^4$ por 3, ou seja, teremos que somar $10z^4$ com $9z^4$, resultando em $19z^4$. Note que no primeiro caso tivemos $i = j = 2$ e no segundo caso $i = 4$ e $j = 0$, em ambos os casos, $i + j = 4$.

O que fizemos acima pode ser reescrito usando a ideia de séries de potências formais na notação de sequências, tomando $A = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 0...)$ e $B = (3, 2, 5, 2, 0, 0, 0, ...) \in K[[x]]$. Assim, $A + B = (1+3, 0+2, 2+5, 0+2, 3+0, 0+0, ...) = (4, 2, 7, 2, 3, 0, 0, 0, ...)$ e $AB = (1 \cdot 3, 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3, 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5, 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 2, ...) = (3, 2, 11, 6, 19, 10, 15, 6, 0, 0, 0, ...)$.

Exemplo 8.2. *Suponhamos $F = (F_n : n \in \mathbb{N}) \in K[[x]]$ e $C = (1, 1, 1, 1, ...) \in K[[x]]$. Então,*

$$FC = CF = (F_0, F_0 + F_1, F_0 + F_1 + F_2, ..., F_0 + F_1 + ... + F_n, ...).$$

Note que no exemplo acima, a multiplicação por C substitui uma sequência de escalares por uma sequência de somas parciais de escalares.

Fizemos até agora o produto de duas séries de potências formais, mas é possível multiplicarmos um número finito k de séries, sejam elas distintas ou iguais. Quando todas são iguais temos a Potência de Séries Formais. Veja o seguinte teorema:

Teorema 8.3 (Produtos de k Séries de Potências Formais)**.** *Suponhamos $G_1, G_2, ..., G_k \in K[[x]]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$(G_1 G_2 \cdots G_k) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(j_1, j_2, ..., j_k) \in \mathbb{N}^k \\ j_1 + j_2 + ... + j_k = n}} G_1(j_1) G_2(j_2) \cdots G_k(j_k).$$

Demonstração. Façamos por indução em K. O caso $k = 1$ é imediato. O caso $k = 2$ foi apresentado na Definição 9 de produto de duas séries de potências formais. Assumamos $k > 2$ e suponhamos válido para o produto de $k - 1$ séries. Escrevendo $F = G_1 G_2 \cdots G_{k-1}$, calculamos

$$\begin{aligned}
(G_1 G_2 \cdots G_k) = (F G_k)(n) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ r+s=n}} F(r) G_s(s) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ r+s=n}} \left(\sum_{\substack{(j_1, j_2, ..., j_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1} \\ j_1 + j_2 + ... + j_{k-1} = r}} G_1(j_1) G_2(j_2) \cdots G_{k-1}(j_{k-1}) \right) G_k(s) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(j_1, j_2, ..., j_k) \in \mathbb{N}^k \\ j_1 + j_2 + ... + j_k = n}} G_1(j_1) G_2(j_2) \cdots G_{k-1}(j_{k-1}) G_k(j_k).
\end{aligned}$$

Note que o último passo segue a lei distributiva generalizada e uma mudança nos nomes dos índices da soma. □

Novamente, percebemos que são os mesmos passos para o produto entre vários polinômios. Porém, existe algo que está associado a um polinômio que as outras séries de potências não possuem, é o grau de um polinômio.

Definição 10 (Grau de um Polinômio)**.** *Dado um polinômio não nulo $f \in K[x]$, o grau de f, denotado por $deg(f)$, é o maior $n \in \mathbb{N}$ com $f(n) \neq 0$. Esse elemento $f(n) \in K$ é o coeficiente principal de f. Um polinômio f é chamado de "mônico" se $f(n) = 1$. O grau do polinômio nulo é indefinido.*

Apesar das séries formais que não são polinômios não possuírem grau, elas possuem ordem. Toda série de potências formal não nula possui ordem.

Definição 11 (Ordem de uma série de potências formal)**.** *Seja $F = \sum_{n \geq 0} F_n x^n \in K[[x]]$ uma série não nula. A ordem de F, denotada por $ord(F)$, é o menor $n \geq 0$ tal que $F(n) \neq 0$.*

Exemplo 8.4. *A ordem de (0,0,0,3,5,7,8,9,4,...) é* 3. *O polinômio nulo não tem nem grau, nem ordem, já o polinômio* $x^4 + 2x^6 + 5x^8$ *tem grau 8 e ordem 4.*

Outra informação importante sobre séries de potências formais é o fato de admitirem composição, assim como as funções. Para os polinômios isso fica mais claro de perceber, porém, para os outros casos, novamente, desconsideraremos o problema da convergência, pois no final das contas o símbolo x continuará sendo nosso indeterminado. Para as funções a composição pode ser formada da seguinte forma: Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de tal forma que a função composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é representada por $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ para cada $z \in \mathbb{R}$. Analogamente, para dois polinômios $f, g \in K[x]$, a composição formal de f e g é $f \bullet g = P_f(g)$, ou seja, se $f = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$ e $g = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j$, então

$$f \bullet g = \sum_{k=0}^{n} f_k \left(\sum_{j=0}^{m} g_j x^j \right)^k \in K[x].$$

Note que o símbolo "$\bullet$" foi usado para composição formal, já o símbolo "$\circ$", para composição de funções. Podemos também estender essa definição da composição formal $f \bullet g$ para o caso em que $f \in K[x]$ é um polinômio e $G \in K[[x]]$ é uma série formal, de tal forma que $f \bullet G = P_f(G)$. Nosso problema agora é definir $F \bullet G$ quando F e G são ambos séries formais. Sem pensarmos no que pode dar errado, suponhamos $F = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$ e $G = \sum_{m \geq 0} G_m x^m$ como séries formais. Por analogia com o que foi visto anteriormente, definamos

$$F \bullet G = \sum_{n \geq 0} F_n G^n = \sum_{n \geq 0} F_n \left(\sum_{k \geq 0} G_k x^k \right)^n \in K[[x]].$$

O problema é que a soma infinita de séries formais $\sum_{n \geq 0} F_n G^n$ não está bem definida. De fato, se $F_n \neq 0$ para infinitos valores de n e $G_0 = 1$, por exemplo, temos que, por aparecer um termo constante, $\sum_{n \geq 0} F_n G^n$ não existirá. Contudo, [4, Cap. 7] escapou dessa dificuldade exigindo que o fator da direita na composição formal $F \bullet G$ tenha o termo constante igual a zero. Veja a definição de composição de séries de potências formais dada por Loehr.

Definição 12 (Composição de Séries de Potências Formais)**.** *Dados* $F, G \in K[[x]]$ *com* $G(0) = 0$*, a composição formal de* F *e* G *é*

$$F \bullet G = \sum_{n \geq 0} F_n G^n \in K[[x]].$$

Poderíamos nos aprofundar ainda mais nas propriedades, tipos e aplicações de séries de potências formais, porém nosso objetivo é focar em sua utilidade para a combinatória, principalmente no que se refere a conjuntos ponderados infinitos, e o que foi apresentado até aqui já nos possibilita isso.

Agora que temos a base de séries de potências formais, poderemos estudar os conjuntos ponderados infinitos. Iniciaremos nossos estudos com a questão da admissibilidade ou não de um conjunto ponderado e sua respectiva função geradora. Veja a definição dada por [4, Cap. 8].

Definição 13 (Conjunto Ponderado Admissível). *Supondo S um conjunto de função peso $wt : S \to \mathbb{N}$, o conjunto ponderado (S, wt) é chamado admissível se, e somente se, para todo $n \geq 0$, o conjunto $S_n = \{z \in S : wt(z) = n\}$ é finito. Nesse caso, a função geradora do conjunto ponderado (S, wt) é a série de potências formal*

$$G_S = G_{S,wt} = \sum_{n=0}^{\infty} |S_n| x^n \in K[[x]].$$

Informalmente, essa série representa $\sum_{z \in S} x^{wt(z)}$. Por exemplo, todo conjunto ponderado finito S é admissível. Além disso, a função geradora para tal conjunto é um polinômio, pois a partir de um determinado n, $|S_n|$ será sempre igual a 0. Esse tipo de função geradora foi estudada no Capítulo 7. Além disso, seja (S, wt) um conjunto ponderado admissível, e seja T um subconjunto de S com a mesma função peso wt, ou seja, $T_n \subseteq S_n$ para todo n, então (T, wt) também será admissível. Da mesma forma, uma união disjunta limitada de conjuntos ponderados admissíveis também será admissível.

Mas e se S for um conjunto infinito, pode ocorrer de S ser admissível? A resposta é sim, o exemplo dado no início desse capítulo é um caso em que isso ocorre, pois apesar de $G_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = (1, 2, 4, 8, ..., 2^n, ...)$ não gerar um polinômio, $|S_n| = 2^n$ para $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_n = \{z \in S : wt(z) = n\}$ é finito. Logo, nesse exemplo, S é admissível.

No Capítulo 7, vimos a regra da bijeção para a funções geradoras (Teorema 7.6), aqui também se (S, wt_1) e (T, wt_2) são dois conjuntos ponderados de tal forma que existe uma bijeção de preservação-de-peso $f : S \to T$. Então S é admissível se, e somente se, T é admissível com $G_S = G_T$, pois como $wt_2(f(s)) = wt_1(s)$ para todo $s \in S$, f e consequentemente f^{-1} preservam os pesos, assim $|S_n| = |T_n|$ para todo $n \geq 0$.

Saber se o conjunto ponderado é admissível ou não é importante para trabalharmos as regras de soma e de produto para conjuntos ponderados, que agora, passam a poder ser infinitos. Tanto a Regra da Soma (Teorema 7.1), quanto a Regra do Produto (Teoremas 7.2 e 7.3) serão válidos para conjuntos ponderados infinitos, desde que sejam conjuntos admissíveis. Pois ao serem admissíveis a soma e o produto entre os coeficientes poderão ser calculadas, mesmo que para um número infinito de operações.

Assim, a **Regra da Soma para Conjuntos Ponderados Infinitos** poderá ser enunciada da seguinte forma: Suponhamos (S, wt) um conjunto ponderado admissível que é a união disjunta dos subconjuntos $\{T_i : i \in I\}$, onde os índices i são finitos ou iguais aos elementos de $\mathbb{N}$. Logo, para todo $i \in I$ e todo $x \in T_i$, $wt_{T_i}(x) = wt_S(x)$. Então

$$G_s = \sum_{i \in I} G_{T_i}.$$

Isso é válido pois podemos escrever S_n para o conjunto de objetos em S de peso n e escrever $(T_i)_n$ para o conjunto de objetos em T_i de peso n. Assim, por suposição, S_n é um conjunto finito que é a união disjunta dos conjuntos $(T_i)_n$, necessariamente finitos. Seja I_n o conjunto de índices tais que $(T_i)_n$ são conjuntos não vazios, então I_n deveria ser finito, já que S_n é finito. Pela regra da soma para conjuntos finitos (Teorema 7.1),

$$|S_n| = \sum_{i \in I_n} |(T_i)_n|.$$

O lado esquerdo representa o coeficiente de x^n em G_S, enquanto o lado direito, o coeficiente de x^n em $\sum_{i \in I_n} G_{T_i}$, uma vez que as parcelas correspondentes a $i \notin I_n$ geram coeficientes de x^n iguais a zero. Quando $I = \mathbb{N}$, esse argumento também prova a convergência da soma infinita das séries de potências formais $\sum_{i \in I_n} G_{T_i}$, e portanto, a Regra da Soma também será válida.

Já a Regra do Produto é um pouco mais complexa, pois teremos duas versões. A primeira versão é designada para situações em que construiremos objetos ponderados fazendo uma sequência finita de escolhas. Por outro lado, a segunda versão estende essa regra para uma sequência infinita de escolhas, o que leva a fórmulas envolvendo produtos infinitos de séries de potências formais. Veja os dois diferentes enunciados.

Regra do Produto para Conjuntos Ponderados Infinitos (versão 1): Suponhamos (S, wt) um conjunto ponderado; seja k um número inteiro positivo fixado e finito, e sejam (T_i, wt_i) conjuntos ponderados admissíveis para $1 \leq i \leq k$. Suponhamos que para cada $z \in S$ podemos fazer uma única escolha $z_1 \in T_1$, depois, uma única escolha $z_2 \in T_2$, ..., até escolhermos $z_k \in T_k$, e na sequência, montarmos essas escolhas de alguma maneira. Suponhamos ainda que $wt(z) = \sum_{i=1}^{k} wt(z_i)$ para todo $z \in S$. Então (S, wt) é admissível, e

$$G_S = \prod_{i=1}^{k} G_{T_i}.$$

Essa regra pode ser demonstrada por indução e usando a ideia de bijeção de preservação-de-peso (ver [4, Cap. 8]).

A próxima versão nos permitirá obter funções geradoras para objetos que são construídos fazendo uma sequência infinita de escolhas, para tanto, precisaremos entender o que significa um produto cartesiano restrito. Suponhamos $\{(T_n, wt_n) : n \leq 1\}$ uma coleção contável de conjuntos ponderados admissíveis tais que para todo T_n teremos exatamente um elemento de peso zero, chamado de elemento 1_n, o produto cartesiano restrito de todos os T_n será $T = \prod_{n \geq 1}^{*} T_n$, que será o conjunto de todas as infinitas sequências $(t_n : n \geq 1)$ de tal modo que $t_n \in T_n$ para todo n e $t_n = 1_n$ para todos os índices definidos finitamente. Transformamos, assim, T em um, não necessariamente admissível, conjunto ponderado definido por $wt((t_n : n \geq 1)) = \sum_{n \geq 1} wt(t_n)$.

Regra do Produto para Conjuntos Ponderados Infinitos (versão 2): Tomemos $\{(T_n, wt_n) : n \leq 1\}$ uma coleção contável de conjuntos ponderados admissíveis tais que para todo T_n teremos exatamente um elemento de peso zero, chamado de elemento 1_n e tomemos $T = \prod_{n \geq 1}^{*} T_n$ como o conjunto de todas as infinitas sequências $(t_n : n \geq 1)$ de tal modo que $t_n \in T_n$ para todo n. Se $ord(G_{T_n} - 1) \to \infty$ com $n \to \infty$, então (T, wt) é admissível e

$$G_T = \prod_{i=1}^{\infty} G_{T_n}.$$

Para aplicar esse resultado, nós iniciamos com algum conjunto ponderado (S, wt) e descrevemos uma sequência infinita de escolhas para construirmos objetos em S, escolhendo "blocos de construção" em T_n. Cada conjunto T_n tem um "objeto fictício" de peso zero. Qualquer sequência de escolha específica deverá terminar ao escolher o objeto fictício para um n suficientemente grande, mas não há um número fixo de escolhas "não fictícias" que podemos fazer. Esse procedimento informal de escolha equivale a fazer uma bijeção de preservação-de-peso de S no produto $T = \prod_{n\geq 1}^{*} T_n$. Então podemos concluir que $G_S = \prod_{n\geq 1} G_{T_n}$, desde que o produto infinito no lado direito seja convergente.

Para exemplificar o que foi estudado até aqui sobre séries de potências formais e conjuntos ponderados infinitos, dentre as inúmeras possibilidades apresentadas em [4], iremos trabalhar no próximo capítulo com a função geradora exponencial.

9 FUNÇÕES GERADORAS EXPONENCIAIS

Até agora, vimos exemplos de funções geradoras ordinárias, ou seja, séries de potências formais cujos coeficientes de x^n são soluções de um problema de combinatória. Porém, nem sempre conseguimos chegar nos resultados pretendidos usando esse tipo de função geradora. Esse é o caso da função geradora exponencial que trará também resultados de um problema de combinatória, porém, esses resultados serão coeficientes de $x^n/n!$ em uma série de potência formal para todo $n \in \mathbb{N}$, tanto que [9, Cap. 5] define função geradora exponencial da sequência (a_r) como a série de potências

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + ... + a_r\frac{x^r}{r!} + ...$$

Como no capítulo anterior definimos o que é uma série de potências formal, vamos usar a seguinte definição para essa função geradora:

Definição 14 (Função geradora exponencial)**.** *Dada a sequência $F = (F_n : n \geq 0) \in K[[x]]$, a função geradora exponencial dessa sequência é*

$$F^* = \sum_{n\geq 0} \frac{F_n}{n!}x^n \in K[[x]].$$

Mas qual o motivo para essa função geradora se chamar exponencial? No Capítulo 6 havíamos mostrado alguns exemplos de séries formais e, entre eles, vimos a função exponencial, veja sua versão formal apresentada por [4, Cap. 7].

Definição 15 (Versão formal da exponencial)**.** *Definimos a seguinte série de potências formal em $K[[x]]$:*

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n.$$

Assim, para uma sequência $F = (1, 1, 1, ...)$ teremos $F^* = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n = e^x$, ou seja, e^x é a forma fechada da função geradora exponencial da sequência $F_n = 1$ para todo $n \geq 0$. Note que usamos um número inteiro para o valor de F_n, mas como $F \in K[[x]]$, F_n poderia ser qualquer corpo que contenha o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais (veja Definição 6). Se considerarmos uma sequência $F_n = k$, para todo $n \geq 0$, teríamos $F^* = k + kx + k\frac{x^2}{2!} + k\frac{x^3}{3!} + ... + k\frac{x^r}{r!} + ... = ke^x$ como sua função geradora exponencial. Por outro lado, se tivéssemos a sequência $F = (0, 1, 1, ...)$, sua função geradora seria $F^* = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x - 1$. Esse resultado será usado futuramente em nossos exemplos.

No capítulo anterior encontramos a função geradora ordinária para a sequência $(1, 2, 4, 8, ..., 2^n, ...)$, como ficaria sua função geradora exponencial? Observe que $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ... + \frac{(2x)^r}{r!} + ...$, ou seja, substituímos o x por $2x$ na fórmula exponencial. Logo,

$$e^{2x} = 1 + 2\frac{x}{1!} + 2^2\frac{x^2}{2!} + 2^3\frac{x^3}{3!} + ... + 2^r\frac{x^r}{r!} + ...,$$

que é exatamente a função geradora procurada. Podemos dizer, ainda, que e^{2x} é a forma fechada para essa função geradora, bem como, analogamente, e^{kx} é a forma fechada da função geradora exponencial para a sequência $F_n = k^n$, para $n \geq 0$.

Agora veremos a utilidade da função geradora exponencial para a combinatória. Para isso, sigamos o raciocínio apresentado por [9, Cap. 5], que utilizando um simples exemplo, mostrou a vantagem de utilizarmos essa função geradora para determinados tipos de problemas combinatórios. Imaginemos o seguinte problema: temos três tipos diferentes de bombons a, b e c, e iremos dar 4 deles para 4 pessoas diferentes, mas só temos disponíveis uma unidade de a, três de b e duas de c. De quantas maneiras isso poderá ser feito?

Para resolver este problema, consideremos primeiramente a função geradora ordinária que nos fornecerá as possíveis escolhas com as restrições impostas, porém, esse tipo de função geradora não considera a ordem de entrega dos bombons, só nos fornece a quantidade de cada tipo. Tal função é dada por:

$$\begin{aligned} (1 + ax)(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)(1 + cx + c^2x^2) &= 1 + (a + b + c)x \\ +(b^2 + ab + bc + ac + c^2)x^2 + (b^3 + ab^2 + ac^2 + b^2c + abc + bc^2)x^3 \\ +(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2)x^4 + (ab^3c + b^3c^2 + ab^2c^2)x^5 + ab^3c^2x^6. \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de x^n é a lista de todas as possíveis escolhas de n bombons, com n variando, nesse caso, de 0 a 6 bombons. Observando o coeficiente de x^4, veremos que existem 5 maneiras de se escolher 4 bombons com as restrições impostas, porém sem ainda considerar a ordem. Como pretendemos ordenar os 4 bombons pois serão dados a pessoas diferentes, vamos analisar como calcular de quantas maneiras podemos ordenar cada uma das 5 possibilidades encontradas.

Quando temos b^3c, por exemplo, significa que serão dados três bombons do tipo b e um do tipo c. Vamos verificar de quantas maneiras podemos permutá-los. Vimos na Definição 3 o que é uma permutação. Chamamos de permutações simples de n elementos quando não temos elementos repetidos a serem permutados, e como consequência imediata do princípio multiplicativo da contagem, temos que o total dessas permutações é $n!$. Consideremos, agora, o caso em que dentre os n elementos existam elementos repetidos, como é o caso de b^3c, que são três bombons do tipo b e um do tipo c. Para permutá-los, teremos que escolher das 4 pessoas, 3 para darmos os bombons do tipo b e 1 para darmos o do tipo c, ou seja, pelo que já vimos sobre combinação simples, teremos $C_{4,3} \cdot C_{1,1} = 4!/3!1!$. Já para o caso ab^2c, escolheremos das 4 pessoas 1 para dar o bombom do tipo a, das 3 que sobraram escolhemos 2 para darmos os do tipo b e a que sobra fica com o do tipo c, ou seja, teremos

$$C_{4,1} \cdot C_{3,2} \cdot C_{1,1} = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = \frac{4!}{1!2!1!}.$$

O que acabamos de calcular é uma permutação com repetição de 4 elementos com a aparecendo uma vez, b duas e c uma vez. Assim, para o caso de n elementos com α repetições de a, β repetições de b, γ repetições de c, e assim por diante, teremos o total de permutações com repetição iguais a

$$PR_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}.$$

Logo, considerando todas as cinco possibilidades de darmos os 4 bombons, porém, considerando agora as possíveis permutações, teremos

$$\left(\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!1!2!}\right)$$

maneiras de se fazer tal entrega.

Nosso desafio agora é alterarmos os polinômios que "controlam" a quantidade de cada tipo de bombom introduzindo no coeficiente de x^n o fator $1/n!$. Obteremos:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{1!}x\right)\left(1+\frac{b}{1!}x+\frac{b^2}{2!}x^2+\frac{b^3}{3!}x^3\right)\left(1+\frac{c}{1!}x+\frac{c^2}{2!}x^2\right) &= 1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}\right)x \\ +\left(\frac{b^2}{2!}+\frac{ab}{1!1!}+\frac{bc}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{c^2}{2!}\right)x^2+\left(\frac{b^3}{3!}+\frac{ab^2}{1!2!}+\frac{ac^2}{1!2!}+\frac{b^2c}{2!1!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{bc^2}{1!2!}\right)x^3 \\ +\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4+\left(\frac{ab^3c}{1!3!1!}+\frac{b^3c^2}{3!2!}+\frac{ab^2c^2}{1!2!2!}\right)x^5+\frac{ab^3c^2}{1!3!2!}x^6.\end{aligned}$$

Note que o coeficiente de x^4 é

$$\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right),$$

que ainda não é exatamente o que desejamos pois falta no numerador o 4!, então, vamos multiplicar e dividir o coeficiente por esse valor, obtendo:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}ab^3+\frac{4!}{3!1!}b^3c+\frac{4!}{1!2!1!}ab^2c+\frac{4!}{2!2!}b^2c^2+\frac{4!}{1!1!2!}abc^2\right)\frac{1}{4!}.$$

Logo, o número procurado, tomando-se $a = b = c = 1$, será o coeficiente de $x^4/4!$ na expansão de

$$\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right) = 1+3\frac{x}{1!}$$

$$+\left(\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!}$$
$$+\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right)\frac{x^4}{4!}+\left(\frac{5!}{1!3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!2!2!}\right)\frac{x^5}{5!}+\frac{6!}{1!3!2!}\frac{x^6}{6!}.$$

Se quiséssemos dar 6 bombons, por exemplo, teríamos $\frac{6!}{1!3!2!}$ maneiras de dar a única possibilidade de entrega: um bombom do tipo c, três do tipo b e dois do tipo c.

O que acabamos de ver é um exemplo de uma função geradora exponencial aplicada ao problema de distribuição e ordenação de bombons a pessoas distintas. Mas qual a diferença entre utilizar uma função geradora ordinária e uma exponencial? A diferença, segundo [9, Cap. 5], está no objetivo pretendido. Note que utilizamos a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados foi considerada. Já a função geradora ordinária foi usada quando a ordem era irrelevante, como foi o caso do problema inicial do caminhão-cegonha. Vejamos o que aconteceria se o problema do caminhão-cegonha fosse modificado conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 9.1. *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e até dez carrinhos nela transportados. No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, foi feita a distribuição de* 9 *carrinhos de cores diferentes em* 4 *carretas distintas. O caminhão-cegonha tem que ter pelo menos um carrinho em cada carreta. Com base nessas informações, de quantas maneiras poderá ser feita tal distribuição?*

Observe, inicialmente, que nenhuma carreta poderá receber mais que 6 *carrinhos, uma vez que nenhuma delas poderá ficar vazia. Usamos a função geradora exponencial pois a ordem de colocarmos os carrinhos nas carretas que são diferentes importam. Como cada carrinho poderá aparacer em cada carreta de* 1 *a* 6 *vezes, a função geradora exponencial para este problema será*

$$f(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^6}{6!}\right)^4.$$

Como a resposta pretendida é o coeficiente de $x^9/9!$ nesta função, poderemos trocá-la por

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^6}{6!}+...\right)^4=(e^x-1)^4,$$

uma vez que as potências extras acrescentadas não contribuem para o coeficiente de $x^9/9!$. Como

$$(e^x-1)^4=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1,$$

basta somarmos os coeficientes de $x^9/9!$ de cada parcela do desenvolvimento de $(e^x-1)^4$. As parcelas do tipo ke^{tx} são as formas fechadas das funções geradoras exponenciais para *suas sequências do tipo* $F_n = kt^n$. *Logo, os coeficientes requeridos de* $(e^x - 1)^4$ *são:* $4^9, -4 \cdot 3^9, 6 \cdot 2^9$ *e* -4. *Que somados resultam em* 186.480 *maneiras de fazer tal distribuição.*

No exemplo acima, foi resolvido um problema análogo a "de quantas maneiras podemos distribuir 9 bolas distintas em 4 caixas distintas, sem que nenhuma fique vazia?". Agora, se generalizássemos o problema para n bolas e k caixas, como ficaria o resultado? Veja uma fórmula para calcularmos esse problema, deduzida utilizando-se o mesmo raciocínio usado na resolução do Exemplo 9.1.

Teorema 9.2. *O número de maneiras de distribuirmos* n *bolas distintas em* k *caixas distintas, sem que nenhuma fique vazia, é*

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{14}$$

Demonstração. Como temos k caixas e cada caixa tem que receber pelo menos uma bola, situação em que a ordem é relevante por serem bolas distintas, teremos que a função geradora exponencial para esse problema será

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)^k = (e^x - 1)^k.$$

Estamos interessados no coeficiente de $x^n/n!$ nesta função. Aplicando a fórmula do Binômio de Newton vista no Capítulo 3, temos que:

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (e^x)^{k-i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{x(k-i)},$$

e como

$$e^{x(k-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n,$$

temos

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente de $x^n/n!$ é

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

que é a expressão para $T(n,k)$ fornecida em (14).

□

Assim, se aplicarmos o Teorema 9.2 para resolvermos o Exemplo 9.1, teremos:

$$\begin{aligned}
T(9,4) &= \sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^9 \\
&= 4^9 - \binom{4}{1}3^9 + \binom{4}{2}2^2 - \binom{4}{3} = 4^9 - 4\cdot 3^9 + 6\cdot 2^9 - 4 \\
&= 186.480.
\end{aligned}$$

Esse foi exatamente o resultado encontrado anteriormente.

E se as caixas fossem idênticas, como resolveríamos o problema anterior? Ora, se as caixas são idênticas basta dividirmos o resultado pela permutação das k caixas, ou seja, dividirmos $T(n,k)$ por $k!$. Assim, o número de maneiras $S(n,k)$ de distribuirmos n bolas distintas em k caixas idênticas sem que nenhuma caixa fique vazia é

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}T(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Segundo [9, Cap. 5], o número $S(n,k)$ é chamado *número de Stirling do segundo tipo*, ele também pode ser visto como o número de partições de $\{1,2,...,n\}$ em exatamente k blocos. Por exemplo, uma partição de um número inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é n. Vejam as partições do número 3: 3, $2+1$ e $1+1+1$. A primeira, foi dividida em 1 bloco, a segunda, em 2 blocos, e a terceira, em 3. Por exemplo, seja $n=3$ e $k=3$, então a única partição possível nessas condições é $1+1+1$. De fato, $S(3,3) = \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}(3-i)^3 = \frac{1}{6}\left(\binom{3}{0}3^3 - \binom{3}{1}2^3 + \binom{3}{2}1^3 - \binom{3}{3}0^3\right) = \frac{1}{6}\left(27-24+3-0\right) = 1$. Assim, teremos que a função geradora exponencial para os números de Stirling do segundo tipo $(S(n,k))$ para um k fixo será, para todo $k \geq 0$,

$$f(x) = \sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} \in k[[x]].$$

Para encontrarmos sua forma fechada, lembremos que $S(n,k) = T(n,k)/k!$, como k é fixo, podemos colocá-lo em evidência e, obtermos

$$f(x) = \frac{1}{k!}\sum_{n\geq k} T(n,k)\frac{x^n}{n!}.$$

De (14) e sabendo que $(e^x-1)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(e^x)^{k-i}(-1)^i$, teremos

$$f(x) = \frac{1}{k!}\sum_{n\geq k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k.$$

Segundo [4, Cap. 8], muitas estruturas combinatórias podem ser decompostas em uniões disjuntas de “componentes conectados”, como é o caso do conjunto de partições. A fórmula exponencial nos permite calcular a função geradora para tais estruturas a partir da função geradora para "blocos de construção" conectados, dos quais elas são formadas. Para cada $k \geq 1$, seja C_k um conjunto ponderado admissível de estruturas conectadas de tamanho k e seja $C_k = \sum_{z \in C_k} wt(z) \in K$. Introduzimos a função geradora

$$C^* = \sum_{k \geq 1} \frac{C_k}{k!} x^k$$

para codificar informações sobre todos os conjuntos C_k. A função geradora exponencial de $S(n,k)$ para um k fixo é um exemplo desse tipo de função geradora exponencial.

Se C^* é uma função geradora exponencial para um conjunto de blocos de construção conectados, poderíamos ainda obter $F = exp(C^*)$, que é uma função geradora exponencial para o conjunto de objetos obtidos a partir das uniões disjuntas desses blocos de construção. Definimos U_n como um conjunto de estruturas de tamanho n que consiste de uniões disjuntas de estruturas conectadas de vários tamanhos que somados resultam em n. Para todo $n \geq 0$, temos U_n como um conjunto de pares (S, f) tais que: S é um conjunto partição de $\{1, 2, ..., n\}$, e $f : S \to \bigcup_{k \geq 1} C_k$ é uma função tal que $f(A) \in C_{|A|}$ para todo $A \in S$. Dizemos que para todo m-ésimo bloco A do conjunto de partição S, $f(A)$ é uma estrutura conectada de tamanho m. Seja $wt(S, f) = \prod_{A \in S} wt(f(A))$, e definimos

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{u \in U_n} wt(u) \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Note que $F(0) = 1$ e saiba que podemos reescrever F como

$$F = exp(C^*).$$

Não nos aprofundaremos neste tipo de função geradora exponencial mais complexo neste presente estudo, porém é importante que entendamos o que significa a expressão $exp(C^*)$, lembrando que C^* é uma série de potências formal. No Capítulo 6 havíamos mostrado que tanto a função exponencial quanto a função logarítmica natural $ln(1+x)$ podem ser escritos na forma de séries de potências formais, de tal forma que $ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots$. Para entendermos o que significa $exp(C^*)$, precisamos entender a ideia da composição formal de séries, trabalhada no capítulo anterior. Para ilustrar tal ideia, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 9.3. *Vamos mostrar que sejam as séries $E = e^x - 1 = \sum_{n \geq 1} x^n/n!$ e $L = ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n/n$, temos que $E \bullet L = x$.*

Tomemos $H = E \bullet L$, com $H(0) = 0$. Para que $E \bullet L = x$ basta provar que a derivada de H em função de x vale 1 já que $H(0) = 0$, ou seja, $H' = 1$. Primeiro, sabemos que a derivada de E em função de x vale $E' = e^x$ e que a derivada de L em função de x vale

$L' = 1 - x + x^2 - x^3 = (1+x)^{-1}$. Assim, $E' \bullet L = e^{ln(1+x)} = 1 + x$. Pela Regra da Cadeia do Cálculo Diferencial temos que

$$H' = (E \bullet L)' = (E' \bullet L)L' = (1+x)(1+x)^{-1} = 1.$$

Logo, podemos concluir que $E \bullet L = x$.

Com esse exemplo devidamente demonstrado, podemos agora definir $exp(G)$, sendo G uma série formal com $G(0) = 0$.

Definição 16 ($exp(G)$)**.** *Suponhamos G uma série de potências formal com termo constante nulo e utilizemos a função E definida no Exemplo* 9.3*. Definimos*

$$e^G = exp(G) = (E \bullet G) + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^n}{n!}.$$

Sabemos que, pela Regra da Soma e pela Regra do Produto de séries de potências formais vistas no capítulo anterior, $exp(G)$ também será uma série de potências formal.

Após termos estudado alguns tópicos importantes de funções geradoras e sua relação com a combinatória, veremos uma proposta de aplicação de sua essência para alunos do Ensino Médio em conteúdos que eles aprendem desde o Ensino Fundamental, e muitas vezes permanecem sem entender o motivo de fazerem tal operação por toda sua vida acadêmica.

1

PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo será apresentada uma proposta didática para alunos do Ensino Médio que estão aprendendo Análise Combinatória, que na maior parte dos livros didáticos segue a sequência: Princípios da Contagem, Tipos de Agrupamentos, Permutações simples e com elementos repetidos, Arranjos simples, Combinações simples, Triângulo de Pascal e Binômio de Newton. Esta proposta é ideal para ser aplicada após Combinações simples e antes de Binômio de Newton, porém, isso não é uma regra, poderá variar de acordo com o objetivo do professor em relação ao que será trabalhado. Por exemplo, se o professor decidir também trabalhar Combinações com repetição, essa atividade poderá ser usada como ponto de partida, conforme mostrado mais adiante. Além do mais, o que será apresentado a partir de agora não é um roteiro, nem um planejamento de uma aula conteudista. É uma sugestão de conversa e interação entre professor e aluno com o intuito de apresentar uma nova forma de se utilizar os princípios da contagem via expressões que os alunos já conhecem desde o Ensino Fundamental, encerrando a conversa com três problemas para o aluno tentar resolver e utilizar, de preferência, o que foi discutido para isso, porém poderá apresentar outros tipos de resoluções.

Esta proposta também poderá ser dada como trabalho ou como uma atividade prática no laboratório de informática, pois utilizaremos uma calculadora online para produtos entre polinômios. Segundo [5], atividades como esta "exigirá do aluno uma postura diferente da que sempre observamos quando resolvem os problemas fechados", e complementa que em momentos como este, a calculadora permite que o aluno concentre-se no processo de resolução, ao invés de se preocupar com cálculos longos e repetitivos, já que a calculadora sozinha não vai resolver o problema, o aluno precisa saber o que irá fazer com ela e obtendo, nesse caso, o polinômio resultante, saber de onde extrair o resultado pretendido. Assim, conforme o objetivo do professor, esta atividade poderá durar uma, duas ou mais aulas, pois também poderá haver uma discussão pós atividade sobre a produção de cada aluno e suas conclusões sobre o tema. Outra sugestão é fazer essa atividade em grupo, pois para [5], ao trabalharem em grupos a resolução de problemas abertos que possuem mais de uma maneira de serem resolvidos evitamos "eventuais desencorajamentos, diminuindo o medo de não conseguir resolver, aumentando a chance de produção de conjecturas num intervalo de tempo razoável e possibilitando o surgimento de ricos conflitos sócio cognitivos".

10.1 PROPOSTA DIDÁTICA: TODAS AS POSSIBILIDADES EM UMA SÓ EXPRESSÃO

Você já parou para pensar o que significa o comando "o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo"? Quantas vezes você já o utilizou? Possivelmente várias vezes e, talvez, nunca se tenha perguntado o motivo. Um dia seu professor de Matemática te ensinou que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, você deve ter feito muitos exercícios para fixar, guardou a "fórmula" e continua usando até hoje sem maiores problemas. De fato, não há problemas em usar algo que está correto, porém é importante entender o porquê de um processo para utilizá-lo, mesmo que no futuro ele se torne mecânico. Muitas vezes o raciocínio usado para algo considerado simples pode ser a chave para solucionar problemas mais complexos. A presente atividade te convida a fazer exatamente isto: buscar em seus conhecimentos prévios elementos que te levem a resolver problemas combinatórios referentes a conteúdos ainda não trabalhados.

Escreva em seu caderno $(a+b)^2$. Você pode reescrevê-lo fazendo $(a+b)(a+b)$ e na sequência aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, obtendo

$$a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Dizemos "o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo", pois temos a multiplicando por a uma vez, depois a multiplicando por b duas vezes, já que $ab = ba$ e por fim, b multiplicando por b uma vez.

Imaginemos agora o seguinte problema:

"Tenho duas amigas Ana e Bruna, e tenho dois chocolates, um branco e outro preto, de quantas maneiras posso distribuir esses chocolates a minhas amigas, podendo ser para a mesma ou não?"

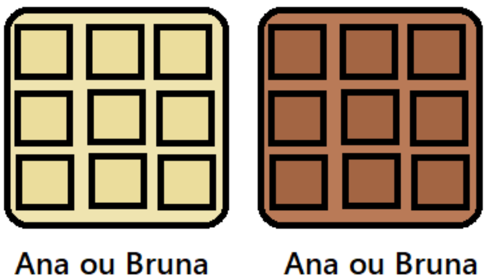

Figura 2: Chocolates a serem distribuídos para Ana e Bruna

Note que você pode resolver esse problema facilmente usando o princípio multiplicativo da contagem: $2 \cdot 2 = 4$, pois temos duas etapas, escolher quem receberá o chocolate branco e depois o preto. Como são duas amigas e a mesma pessoa poderá receber os dois, teremos 4 possibilidades. Mas se perguntássemos, como poderíamos fazer tal distribuição, o que você responderia? Após responder, compare o que achou com a expressão: $a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$. Você percebe alguma semelhança?

Note que ela possui 4 parcelas assim como a sua resposta tinha 4 possibilidades e cada parcela gerou uma de suas respostas: Ana recebeu os dois chocolates $(a \cdot a)$, Ana recebeu o primeiro e Bruna o segundo $(a \cdot b)$, Bruna recebeu o primeiro e Ana o segundo $(b \cdot a)$ e Bruna recebeu os dois $(b \cdot b)$. Também poderíamos analisar o resultado $a^2 + 2ab + b^2$ como: temos uma maneira de Ana receber os dois chocolates, duas maneiras de cada uma receber um e uma maneira de Bruna receber os dois.

Agora, imagine como ficaria esse raciocínio se tivéssemos três chocolates distintos. Quais seriam as possíveis distribuições para Ana e Bruna? Anote seu raciocínio.

Figura 3: Chocolates a serem distribuídos para Ana e Bruna

Poderíamos inclusive ler a expressão $(a + b)$ como "Ana ou Bruna", lembre-se do princípio aditivo e da conjunção que está interligada a ele, a expressão "ou". Como temos 3 chocolates distintos vamos ter três etapas, escolher quem vai receber o primeiro, depois o segundo e na sequência o terceiro chocolate. Pelo princípio multiplicativo da contagem teremos:

$$(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3.$$

Novamente se fizéssemos a distributiva, encontraríamos 8 termos que podem ser resumidos em $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ou seja, tem 1 possibilidade de Ana receber os três chocolates, 3 possibilidades de Ana receber dois e Bruna um, 3 possibilidades de Ana receber um e Bruna dois e 1 possibilidade de Bruna receber os três. Veja que os coeficientes da expressão geraram resultados de problemas de combinatória.

Existe uma ferramenta poderosa que se chama **função geradora** que tem o papel de fazer exatamente isso, gerar os possíveis resultados de um problema de combinatória em seus coeficientes. Não vamos estudá-la aqui, mas vamos continuar trabalhando suas ideias.

Quando você estudou teoria dos conjuntos, possivelmente aprendeu que o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos vale 2^n. Você sabe o motivo disso?

Se você respondeu o motivo é porque provavelmente compreendeu o conteúdo trabalhado em análise combinatória, se são ao todo n elementos, cada um deles tem duas possibilidades de escolhas: estar ou não no subconjunto, e portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem, teremos 2^n maneiras de se formar o subconjunto.

Mas agora, vamos pensar como no problema dos chocolates, imaginemos que a ***fosse não estar no subconjunto e*** b ***fosse estar, o que significaria*** $(a+b)^2$ ***para esse problema?***

Como elevamos ao quadrado teremos apenas duas situações que podem estar ou não no subconjunto, ou seja, dois elementos. De fato, quando temos 2 elementos, por exemplo $\{1,2\}$, teremos 4 subconjuntos que são os seguintes: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1,2\}$. Então,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

poderá significar que teremos um subconjunto no qual nem o 1 e nem o 2 fazem parte, ou seja, o conjunto vazio, 2 subconjuntos que apenas um deles faz parte, que são os dois unitários e um subconjunto com os dois elementos do conjunto fazendo parte, que é o próprio conjunto. Para ficar mais didático, troquemos a e b por x^0 e x^1 e veja o que acontece, lembrando que $x^0 = 1$. Vamos obter

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1x^0 + 2x^1 + 1x^2.$$

Note como ficou mais claro entender, principalmente por $1x^0 + 2x^1 + 1x^2$, que teremos um subconjunto vazio, dois unitários e um com dois elementos. O coeficiente nos deu a quantidade de subconjuntos e o expoente de x nos deu a quantidade de elementos em cada subconjunto. Por isso que utilizar o x^0 como não aparece e o x^1 como aparece uma vez é mais interessante. Assim se um elemento pudesse aparecer em um conjunto de 0 a 4 vezes, poderíamos representar essas possibilidades pela expressão $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$, ou seja, aparece $0, 1, 2, 3$ ou 4 vezes o elemento, por outro lado, se aparecesse de 5 a 7 vezes, poderíamos representar por $x^5 + x^6 + x^7$.

Existem muitas calculadoras online que fazem produtos entre polinômios, você pode escolher a que achar melhor. Uma muito interessante é a do site *Symbolab*, cujo endereço está em [12], pois além de mostrar a resposta, também apresenta o passo-a-passo do que foi feito. Por outro lado, se o polinômio tiver muitos termos, ela não faz a expansão, nesse caso use a calculadora online *EasyCalculation.com*, cujo endereço está em [8]. Para essa segunda opção você só poderá usar produtos, ela não aceita potenciação, por exemplo, para expandir $(1+x)^3$ deverá ser digitado $(1+x)(1+x)(1+x)$.

Agora, resolva com auxílio de uma calculadora online $(1+x)^5$ ***e anote sua expansão. O que você pode nos contar sobre o resultado e sua relação com os***

subconjuntos de um conjunto de* 5 *elementos? E ao somar os coeficientes da expansão que valor encontrou? Compare esse valor ao total de subconjuntos de um conjunto de* 5 *elementos.

Na sequência, resolva três problemas sobre o que acabamos de discutir.

Problema 1: Uma loja vende bombons. No final do dia ainda sobraram 3 de abacaxi, 4 de morango e 2 de coco. Maria que ama bombons chegou na loja para comprá-los, mas ainda não sabe se vai ou não, e se comprar, ainda não sabe como poderá fazer isso.

a) Ajude Maria a decidir, mostrando um polinômio que apresenta todas as possibilidades de Maria fazer ou não essa compra.

b) De quantas maneiras Maria poderá comprar 6 bombons? Explique como o resultado da letra a te ajudou a responder a pergunta da letra b.

c) De quantas maneiras Maria poderá comprar de 3 a 5 bombons?

Problema 2: Laura comprou 2 sacos de feijão, 3 de farinha e 4 de arroz, todos de 1 quilo, e irá montar uma cesta básica de tal forma que tenha pelo menos um saco de feijão, dois de farinha e três de arroz.

a) O produto $(x+x^2)(x^2+x^3)(x^3+x^4)$ nos geraria o total de possibilidades de Laura montar a cesta? Em caso afirmativo, explique o motivo.

b) De quantas maneiras Ana poderá montar a cesta com 7 quilos de alimento?

Problema 3: (ENEM 2017-adaptada) *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*

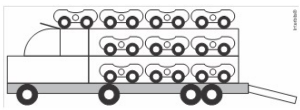

Figura 4: Caminhão-cegonha

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

10.2 ORIENTAÇÕES SOBRE A PROPOSTA DIDÁTICA

Note que essa atividade é um excelente instrumento introdutório para Triângulo de Pascal e Binômio de Newton. A propriedade da soma dos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal, que chamamos de Teorema das Linhas no Capítulo 3, por exemplo, pode ser vista claramente ao comparar a soma dos coeficientes da expansão de $(1+x)^5$ ao total de subconjuntos de um conjunto de 5 elementos.

Em relação aos problemas, espera-se que o aluno tenha compreendido como utilizar os polinômios para se chegar à função geradora da questão mesmo não utilizando essa expressão.

Problema 1

Ao verificar as hipóteses para um determinado elemento, espera-se que o aluno faça a relação com o princípio aditivo da contagem, e portanto, ao dizermos que são 3 bombons de abacaxi disponíveis, Maria poderá comprar $0, 1, 2$ ou 3 bombons desse tipo, ou seja, o polinômio que controla esse fato será $1 + x + x^2 + x^3$. E assim, por diante, obtendo como resposta da letra (a) do Problema 1 a expressão:

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2) =$$
$$1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 11x^4 + 11x^5 + 9x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9.$$

Note que foi feito o produto entre os polinômios controladores pois temos três etapas: ver a quantidade a ser comprada do bombom de abacaxi, depois a do bombom de morango e depois a do de coco. Quando temos etapas podemos aplicar o princípio multiplicativo da contagem. Já a intenção da pergunta na letra (b) é verificar se o aluno consegue interpretar o significado do coeficiente de cada parcela da expansão. O resultado pretendido é 9, pois esse é o coeficiente de x^6 no polinômio acima, conforme estudamos no Capítulo 2. Também na letra (c) o aluno precisará dessa informação, mas como podem ser comprados de 3 a 5 bombons, ele terá que somar os coeficientes de x^3, x^4 e x^5, resultando em 31 possibilidades.

Problema 2

O Problema 2 propõe que a cesta básica seja composta por sacos de feijão, farinha e arroz, de tal forma que tenha pelos menos um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro. Como são ao todo 2, 3 e 4, respectivamente, de cada um, pelo princípio multiplicativo da contagem obteremos $(x + x^2)(x^2 + x^3)(x^3 + x^4) = x^6 + 3x^7 + 3x^8 + x^9$, exatamente o produto que aparece na letra (a), tornado a resposta para essa pergunta positiva. Já para a pergunta (b), teremos 3 maneiras de montarmos a cesta com 7 quilos de alimentos pois 3 é o coeficiente de x^7 na expressão encontrada. Uma sugestão de discussão após essa atividade é perguntar ao aluno qual é o peso máximo e o peso mínimo da cesta, e o que significaria a soma de todos os coeficientes no problema. Também poderíamos discutir se a ordem foi ou não considerada não só para o Problema 2, como para os três sugeridos. Note que a questão dos subconjuntos é a mais fácil de mostrar para o aluno que a ordem não está sendo observada, pois o subconjunto $\{1,2\} = \{2,1\}$ e, portanto, foi contado uma vez só. Isso pode nos auxiliar para mostrarmos ao aluno que a ordem não está sendo considerada. "Comprar um bombom de morango, um de abacaxi e um de coco" é equivalente a "comprar um bombom de abacaxi, um de coco e um de morango", ambos querem dizer "comprar um de cada sabor", não importando a ordem.

Problema 3

E finalmente teremos o Problema 3, o que impulsionou o presente trabalho. Perceba que para a proposta didática foi retirada as alternativas da questão para que o aluno não tente resolvê-lo inicialmente por combinação, queremos que use o que foi proposto. Possivelmente aparecerão mais de um tipo de polinômio, porém todos eles levarão ao mesmo resultado. Por exemplo, se um aluno pensar que cada cor tem que ser usada pelo menos uma vez e que pode pintar de 1 a 10 carrinhos, teremos como polinômio resultante o produto $(x + x^2 + x^3 + ... + x^{10})^4$, cuja expansão está apresentada na Figura 5, após ser calculado na calculadora online *EasyCalculation.com* (ver [8]).

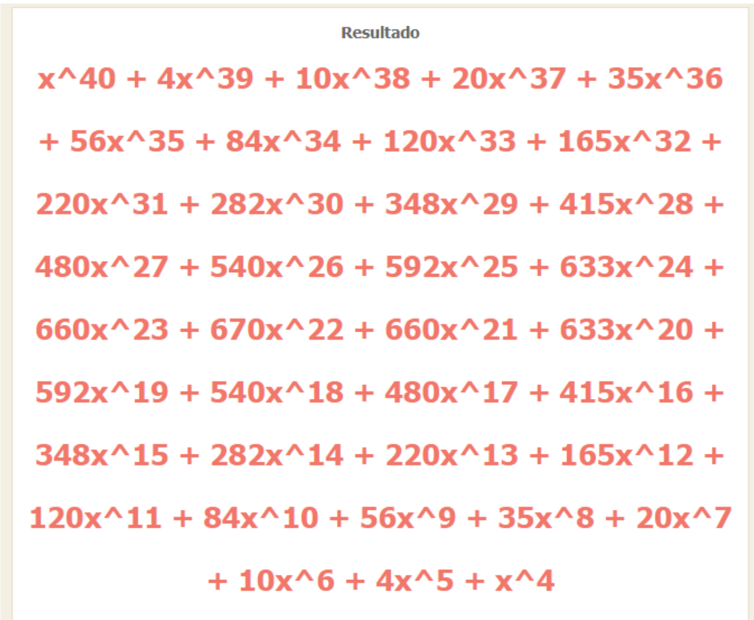

Figura 5: Expansão do produto na calculadora EasyCalculation.com

Note que, como são 10 carrinhos ao todo, a resposta será o coeficiente de x^{10} que vale 84.

Por outro lado, se o aluno pensar que dos dez carrinhos, quatro já foram pintados cada um por uma cor diferente disponível, sobrarão 6 carrinhos para serem pintados de tal forma que cada cor poderá ser usada de 0 a 6 vezes, e portanto, o novo produto encontrado será $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$. Novamente, usando [8], teremos a seguinte expansão:

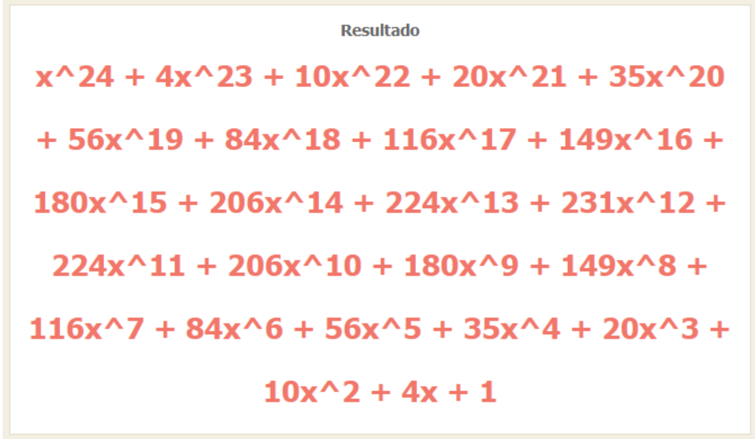

Figura 6: Expansão do novo produto na calculadora EasyCalculation.com

Para essa expansão o que gera o resultado do problema é o coeficiente de x^6, pois só estamos considerando os carrinhos que ainda não foram pintados. Mais uma vez nossa resposta foi 84. Note que durante esse trabalho foram apresentadas 4 maneiras distintas de se resolver a questão do caminhão-cegonha conforme apresentada no ENEM de 2017.

Para os professores que pretendem trabalhar combinações com repetição, essa proposta didática também é um excelente ponto de partida, porém, é importante que se apresente ao aluno na sequência o raciocínio usado no Capítulo 4, mostrando que resolver a questão do caminhão-cegonha usando $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$ é equivalente a resolver a equação $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ de soluções inteiras não negativas. Consequentemente, nesse caso será possível mostrar ao aluno todas as resoluções do Problema 3: os dois mostrados neste capítulo usando calculadora online, a resolução por equação de soluções inteiras não negativas e a por combinação com repetição.

Ressaltamos ainda que, caso seja necessário, para que o aluno não ache que todo e qualquer problema de combinatória possa ser resolvido por meio de uma função geradora ordinária, seja trabalhada ainda uma questão em que a ordem dos elementos seja considerada, como o próprio Exemplo 1.1, que pergunta quantas palavras existiam em uma civilização antiga, cujo alfabeto tinha apenas três letras e as palavras, de uma a quatro letras. Note que cada letra pode aparecer na palavra de 0 a 4 vezes, e, usando o raciocínio de função geradora, teríamos como polinômio controlador de cada letra $1+x+x^2+x^3+x^4$, como são 3 letras, pelo princípio multiplicativo, teríamos a função geradora:

$$\begin{aligned} f(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)^3 = & 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+18x^5+19x^6 \\ & +18x^7+15x^8+10x^9+6x^{10}+3x^{11}+x^{12}. \end{aligned}$$

Como as palavras têm de 1 a 4 letras, somaríamos os coeficientes de x, x^2, x^3 e x^4, que resultaria em 34 possibilidades, que é muito diferente de 120, a resposta correta. Isso acontece pois os coeficientes resultantes consideraram todos os anagramas de uma palavra como uma palavra só, por exemplo, se tivéssemos apenas as letras A, M e E, a palavra AME seria igual a palavra EMA nessa contagem. Para verificar a veracidade disso, calculemos de quantas maneiras posso escrever uma palavra com três letras podendo ou não repetir as três letras do alfabeto. Vimos no Capítulo 1, que esse resultado é $3^3 = 27$, que, novamente, é diferente de 10, coeficiente de x^3. Agora, se não considerássemos a ordem das letras, ou seja, se aceitássemos que AAE e EAA são a mesma palavra, aí sim teríamos as 10 possibilidades, já que temos 3 possibilidades da palavra ser formada pela mesma letra, 6 possibilidades da palavra ter duas letras iguais e uma diferente, e uma possibilidade de todas as letras serem diferentes, resultando em 10 possibilidades.

Enfim, com a base de funções geradoras bem assimilada, será possível extrair do grupo de alunos uma rica discussão sobre contar via funções geradoras, mesmo sem se aprofundar na teoria apresentada neste trabalho, apenas usando sua essência, que é a mesma de toda a combinatória, os princípios aditivo e multiplicativo da contagem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação, a partir de uma questão do ENEM, buscou ampliar o conhecimento do professor de Matemática sobre Combinatória Enumerativa, explorando as funções geradoras, que como vimos, são uma ferramenta importante na resolução de problemas, principalmente os de contagem em que são permitidas repetições na escolha de objetos.

Mesmo não sendo explicitamente parte do currículo de Matemática na educação básica, é importante que o professor conheça a fundo este conteúdo para que os recortes trabalhados em sala de aula sejam de excelência. De acordo com [2], "individualmente ou em conjunto com os colegas, é ao professor que compete adequar aos seus alunos e ao contexto escolar as orientações curriculares, diagnosticando problemas, criando soluções, regulando a sua prática, criando cenários que muitas vezes se afastam das prescrições curriculares", porém, sem desconsiderar o currículo, cujo papel de legitimação é imprescindível. Ele deve ser seguido, porém, não está engessado, "cabe ao professor explorar as suas margens de autonomia, adequando-o às necessidades e condições dos seus alunos".

Para tanto, essa dissertação apresentou desde uma visão intuitiva para a função geradora, quanto uma mais aprofundada no âmbito de conjuntos ponderados e séries de potências formais, para que o professor possa ampliar seus horizontes em relação aos conhecimentos de combinatória e, consequentemente, se achar por bem passá-lo a diante, ter maior embasamento teórico ao levar essa ferramenta nova ao aluno. Para auxiliá-lo nesse propósito, uma proposta didática foi apresentada partindo do pressuposto que todo aluno do Ensino Médio um dia já usou a expressão "o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo" para resolver algo e, portanto, está apto a tentar entendê-la em um contexto de combinatória.

Para os professores que pretendem trabalhar combinações com repetição, esta dissertação também apresentou um caminho interessante no Capítulo 4 para fazê-lo, podendo a proposta didática apresentada ser uma excelente atividade introdutória.

Assim, seja para ampliar o repertório do professor enquanto estudioso de Matemática, ou para ser trabalhado com o aluno em sala de aula, em um curso preparatório para olimpíadas ou outros, esperamos que o presente trabalho possa contribuir para a formação do professor de Matemática que ao lê-lo, passe a entender o que é a ferramenta função geradora no âmbito da combinatória, quando é possível usá-la e como fazê-lo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brasil. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/.Acesso em: setembro de 2019.

[2] A.P. Canavarro, J.P.Ponte. O papel do professor no currículo de Matemática. In GTI, O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 63-89). Lisboa: APM. 2005.

[3] Garbi, G.G., A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática, Editora Livraria da Física, 2006.

[4] Loehr, N. A. Bijective Combinatorics, Discrete Mathematics and its applications, Series Editor Kenneth H. Rosen, 2011.

[5] Medeiros, K. A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. Educação Matemática em Revista, n14, ano 10. p.19-28, 2000.

[6] Meritt. Plataforma Mais Enem. Disponível em: https://maisenem.meritt.com.br/. Acesso em 11/09/19.

[7] A. C. Morgado e P. C. P. Carvalho, Matemática Discreta, 2ª edição, Coleção PROFMAT, SBM, 2015.

[8] Polinômios. Calculadora de Multiplicação de. Disponível em: https://www.easycalculation.com/pt/algebra/polynomial-multiplication.php. Acesso em 05/11/19.

[9] J. P. O. Santos, M. P. Mello, I. T. C. Murari, Introdução à Análise Combinatória, Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2007.

[10] São Paulo (Estado). Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo : SE, 2011.72 p. Disponível em: https://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf. Acesso em 10/12/19.

[11] SuperPro. Plataforma de Banco de Questões. Disponível em: https://www.sprweb.com.br/. Acesso em 30/10/19.

[12] Symbolab. Solucionador Matemático. Disponível em: https://pt.symbolab.com/solver/polynomial-equation-calculator/. Acesso em 02/06/20.