UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Currículo de Trigonometria no Ensino Médio: Uma Análise nos Documentos Oficiais, Pnld e Enem

Airtonelton Magalhães de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho

Campina Grande - PB
Agosto / 2020

S725c Sousa, Airtonelton Magalhães de.
Currículo de trigonometria no ensino médio: uma análise nos documentos oficiais, PNDL e ENEN / Airtonelton Magalhães de Sousa. - Campina Grande, 2020.
130f. : il. Color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho".
Referências.

1. Trigonometria. 2. Ensino Médio. 3. Currículo Trigonometria. I. Barbosa Sobrinho, Jaime Alves. II. Título.

CDU 514.116.2(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS CRB-15/93

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Currículo de Trigonometria no Ensino Médio: Uma Análise nos Documentos Oficiais, Pnld e Enem

por

Airtonelton Magalhães de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

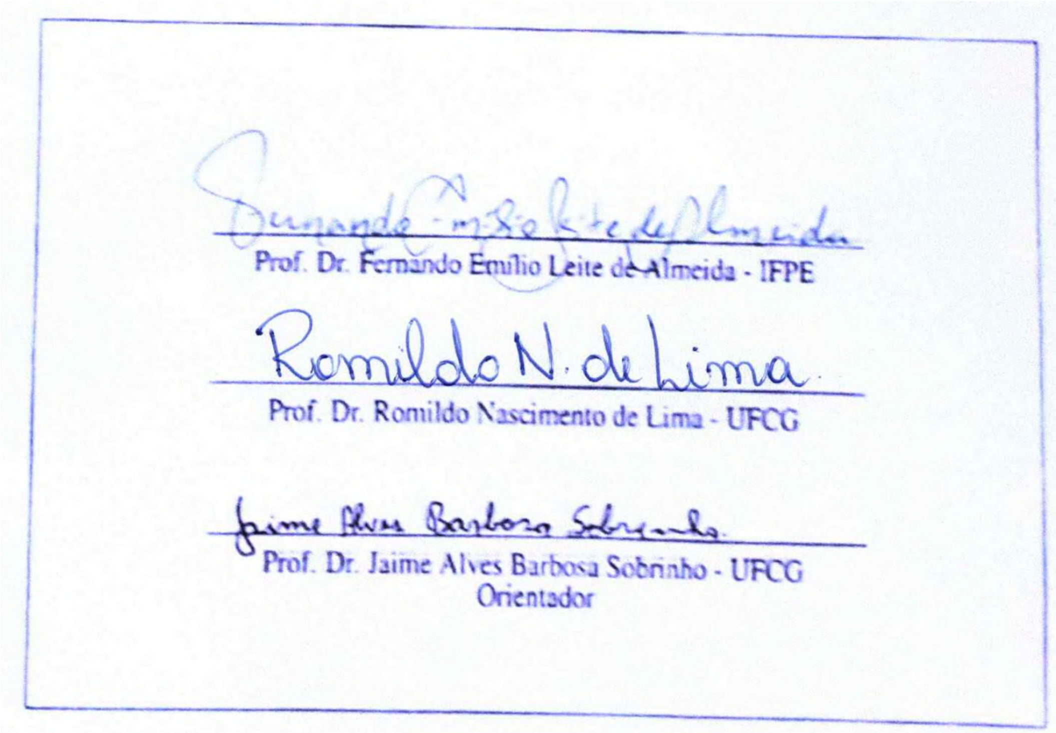
Currículo de Trigonometria no Ensino Médio: Uma Análise nos Documentos Oficiais, PNLD e ENEM

por

Airtonelton Magalhães de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto / 2020

Dedicatória

Sola Fide (Somente a Fé)
Sola Gratia (Somente a Graça)
Solus Christus (Somente Cristo)
Sola Scriptura (Somente as Escrituras)
Soli Deo Gloria (Somente a Deus a Glória).

Agradecimentos

Rendo graças ao Deus e Pai Eterno que por meio de Cristo Jesus, Seu Filho, no Santo Espírito tem abençoado com toda sorte de bênçãos espirituais a minha vida. Dentre tantas bênçãos Ele me propiciou uma família que muito amo, um trabalho e profissão repletos de pessoas de caráter exemplares, uma comunidade na fé de irmãos acolhedores e amigos leais com quem pude sempre contar.

Muitos foram os que torceram pela minha formação e conclusão do Mestrado em Matemática. Alguns são mencionados por nome a seguir. Cada com singular importância para minha vida.

Agradeço Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - IFPE, *Campus* Pesqueira, pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT. Com menções honrosas de gratidão à direção geral, departamento de ensino e coordenação do departamento de Matemática. Com muita alegria e estima cito meus sinceros agradecimentos aos colegas de profissão desse *campus*, que estiveram ao meu lado dando apoio e incentivo: Luciclaudio Barbosa e sua família, Tiago Souto e sua família, Marconni Freitas, Hélber Elias, Filipe Lucena, Daniel Paiva, Fernando Kleber, Olavo Nunes, Samara Sarmento, Eurlles Canuto, Carlos Bino, Carlos Eduardo e Kal-El Brito, dentre outros que me faltariam páginas para citar todos.

De uma maneira muito especial meu coração se alegra quando falo dos colegas de curso no mestrado. Minha gratidão ao sempre prestimoso Bruno Lopes, companheiro de profissão, colega de curso, por quem tenho elevada admiração; ao companheiro de viagens, discussões, de estudos e para todas as ocasiões Matheus Vinícius; também parceira nas viagens Lucielma Almeida, caros colegas Teófino Viturino, Wagner Albuquerque, Marília Sales, José Renato, Eduardo Lucena e Daniel Costa dentre outros que estiveram ao meu lado.

Sou extremamente grato aos docentes do Departamento de Matemática da UFCG, principalmente aos que estão vinculados ao PROFMAT, estimados Doutores Alexsandro Bezerra, Deise Mara, Denilson da Silva e Marcelo Carvalho. De maneira muito especial sou grato ao coordenador do curso Dr. Luiz Antônio, ao examinador interno da pesquisa da dissertação Dr. Romildo Nascimento e ao orientador da pesquisa da dissertação Dr. Jaime Alves.

Um brado de gratidão ao Dr. Fernando Emílio que foi um dos examinadores externos da pesquisa da dissertação, e que muito me contribuiu com suas ponderações e colocações.

Também tive a honra de tê-lo como colega de trabalho no IFPE - *Campus* Pesqueira, sendo ali meu coordenador de área, ocasião em que muito me ajudou, incentivou e trouxe contribuições profissionais para que eu pudesse estudar para as disciplinas do mestrado.

Sou grato aos amados irmãos na fé da *Igreja Presbiteriana Central de Campina Grande*, da *Igreja Presbiteriana do Alto Branco*, da *Igreja Presbiteriana do Monte Santo* e ainda dos irmãos que fazem parte da *Missão Federal* na UFCG. Estes muito me acolheram e estiveram ao meu lado enquanto residente na cidade de Campina Grande para cursar o mestrado.

Meus agradecimentos mais que especiais vão para meus familiares que muito estiveram ao meu lado torcendo, apoiando, compreendendo minha ausência. Faltariam páginas para expressar em gratidão o carinho por eles.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

A pesquisa analisa o currículo de Trigonometria no ensino médio sob a ótica dos documentos legais (PCNEM, OCEM e BNCC). Analisa, caracteriza mudanças em tópicos e organização do currículo de Trigonometria nos livros didáticos de matemática que compõem o Guia PNLD 2018 - Matemática. E ainda identifica a participação dos conteúdos de Trigonometria no novo ENEM. A abordagem é idealizada através de uma pesquisa de natureza qualitativa descritiva, fundamentada nas teorias sobre currículos. Os documentos legais apresentam sugestões para construção de um currículo de Trigonometria, os livros didáticos analisados contemplam tais sugestões e o ENEM tem dado pouca relevância aos conteúdos de Trigonometria. Assim, é papel docente entender toda conjuntura que fundamenta a construção de um currículo e com isso buscar implementar melhorias ao ensino.

Palavras Chaves: Currículo. Ensino Médio. Trigonometria.

Abstract

The research analyzes the Trigonometry curriculum in high school from the perspective of legal documents (PCN, OCEM and BNCC). Analyzes, characterizes changes in topics and organization of the Trigonometry curriculum in the mathematics textbooks that make up the PNLD Guide 2018 - Mathematics. It also identifies the participation of the contents of Trigonometry in the new ENEM. The approach is idealized through a qualitative, descriptive research, based on curriculum theories. The legal documents present suggestions for the construction of a Trigonometry curriculum, the textbooks analyzed include such suggestions and ENEM has given little relevance to the contents of Trigonometry. Thus, it is the teaching role to understand the whole situation that underlies the construction of a curriculum and thereby seek to implement improvements in teaching.

Keywords: Curriculum. High School. Trigonometry.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos 15 anos de experiência docente, lecionando a disciplina de Matemática tanto no âmbito do ensino médio como também no nível superior, não raro algumas indagações e reflexões surgiram a respeito dos conteúdos programáticos dispostos nos livros didáticos do respectivo nível de ensino.

Preocupação semelhante podemos encontrar nos escritos de Pais [27] que aponta como algo emergente atentar para questões de natureza reflexiva. Conforme aponta a autora Brito de Menezes [13] (p. 21), "existem alguns fenômenos didáticos que se instituem na sala de aula, e cuja investigação é fundamental para a análise da relação que se estabelece entre professor e aluno, mediada por um determinado saber a ser ensinado/aprendido". Há, portanto, uma pretensa necessidade de saberes na área da matemática necessitarem de uma transformação para tornar possível ser ensinados e, consequentemente, tomar seu lugar como parte dos conhecimentos dos alunos. Pois a obra do pensamento matemático teórico não é passível de uma comunicação direta com os alunos e esta muitas vezes é mediada através dos livros didáticos.

Dentre as demandas e tarefas engendradas ao trabalho docente, seja qual for a disciplina em questão, está a busca por um bom livro didático. Uma obra que contemple conteúdos programáticos, estrutura e tópicos considerados essenciais, e ainda, mesmo que minimamente, que cumpram com os objetivos propostos para um dado assunto a ser trabalhado em sala de aula.

Com uma dinâmica que outras áreas do conhecimento já vivenciam a mais tempo, o professor da disciplina de Matemática ao fazer algum levantamento bibliográfico de material para suas aulas pode se deparar com mudanças presentes nos conteúdos dos livros didáticos. Por exemplo, obras já omitem em sua estrutura curricular o ensino de Matrizes e Determinantes no ensino médio.

E por que não continuar essa análise em relação aos conteúdos dos livros didáticos em matemática do ensino médio, mais especificamente pondo um olhar sob os conteúdos da Trigonometria? Será que também a Trigonometria, assim como os conteúdos já citados Matrizes e Determinantes, tem sido alvo de significativas mudanças em sua abordagem de tópicos e aplicações que outrora foram tido como essenciais ao currículo? O currículo de Trigonometria se encontra, por assim dizer, mais enxuto?

Nesse âmbito, existem objetivos e competências julgadas necessárias aos alunos que cursam o ensino médio, com o intuito de que tais conteúdos de referência subsidiarem seu futuro, tanto em aspectos profissionais e principalmente no que tange a continuidade dos estudos com ingresso no ensino superior.

Deste modo, para se dar um maior embasamento às discussões em apontar a relevância dos conteúdos no currículo da Trigonometria, como também observar mudanças em seus tópicos e estruturação (organização), esta pesquisa será feita através do processo metodológico de forma qualitativa, em que fazemos uso da pesquisa bibliográfica como embasamento da fundamentação teórica. Na abordagem qualitativa faz-se uma análise textual discursiva sobre os documentos legais do governo federal que norteiam o currículo e por conseguinte o ensino da Trigonometria no ensino médio. Também analisamos como o currículo de Trigonometria é proposto nos livros didáticos a partir da observação do Guia PNLD 2018 - Matemática. Discorremos ainda sobre quais conteúdos de Trigonometria são abordados pela Matriz de Referência de Matemática e Suas Tecnologias do ENEM, caracterizando as competências e habilidades que destacam o currículo da Trigonometria, e por fim analisamos os tópicos de Trigonometria nas questões Novo ENEM entre 2009 e 2019.

1.1 Objetivos

A pesquisa intenta apontar os seguintes itens:

1.1.1 Objetivos Gerais

- Analisar o currículo de Trigonometria no ensino médio, sob o ponto de vista dos documentos oficiais (PCNEM, OCEM e BNCC), também na ótica do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e ainda na visão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

1.1.2 Objetivos Específicos

- Discutir como os Documentos Legais (PCNEM, OCEM e BNCC) estruturam no ensino médio os conteúdos que são parte do currículo da Trigonometria;

- Analisar os conteúdos de Trigonometria nas obras do Guia PNLD 2018 - Matemática;

- Identificar no Exame Nacional do Ensino Médio a participação do currículo de Trigonometria fazendo alusão aos Documentos Oficiais e o Programa Nacional do Livro Didático.

1.2 Organização

A partir de uma análise textual discursiva sobre os livros didáticos e documentos oficiais que norteiam o ensino da Trigonometria no ensino médio no país, abordaremos o tema através de uma pesquisa de natureza qualitativa descritiva.

A nossa pesquisa se inicia no capítulo 1 com a introdução.

Depois no capítulo 2 discorremos com a fundamentação teórica sobre currículos.

Posteriormente o capítulo 3 faz uma breve revisão histórica de como a Trigonometria percorre seu caminho enquanto ciência atrelada ao desenvolvimento do pensamento matemático e cunhado nas aplicações da geometria. Dividiu-se a síntese histórica da Trigonometria em três partes: primeiro com a história dos povos antigos (egípcios, babilônios e chineses); depois com a Idade Média e por fim a era Moderna.

No capítulo 4 busca-se perscrutar os documentos oficiais nos quais se balizam a abordagem dos conteúdos programáticos da matemática atrelados com a Trigonometria. Tal pesquisa fomenta uma abordagem que se inicia com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), perpassa pela Diretriz Curricular Nacional do Ensino Médio (DCNEM), e também se faz observar como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio, mais precisamente no que corresponde à área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias buscam organizar o conteúdos da Trigonometria. E finda-se com uma análise nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e ainda uma breve visita à Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Chegando ao capítulo 5, fazemos uma análise das coleções de livros didáticos da disciplina de Matemática que foram disponibilizados e aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), para o triênio 2015, 2016 e 2017 (Guia do PNLD 2018 - Matemática). Discorre-se com o tratamento que as 8 (oito) obras disponibilizadas fazem ao conteúdo da Trigonometria. Procura-se ainda elencar e apontar em que momento (série letiva) os assuntos de Trigonometria são sugeridos ou em que séries do ensino médio são omitidos em tais documentos oficiais.

Na etapa posterior, o capítulo 6 visa destacar os conteúdos relacionados à Trigonometria no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). São pesquisados a partir da Matriz de Referência ENEM em Matemática e suas Tecnologias, expondo como tais conteúdos se destacam nas 7 (sete) áreas de competência e nas 30 (trinta) habilidades requeridas ao discente do ensino médio. E findamos o capítulo analisando quais conteúdos de Trigonometria são abordados nas questões do exame.

Por fim, no capítulo 7, tecem-se algumas considerações finais a respeito de mudanças significativas observadas entre os conteúdos clássicos e as exigências de tais conteúdos por parte do documentos legais. E ainda comenta-se a relação que há entre os objetivos requeridos no ENEM e a adequação deles em tais obras de referência do Guia PNLD 2018 - Matemática.

E, após as referências bibliográficas, expomos um apêndice com os assuntos clássicos da Trigonometria.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Conceito de Currículo

Quando nos deslocamos para fazer uma determinada viagem, seja ela via transporte terrestre, marítimo ou aéreo percorremos uma trajetória, um caminho sobre o qual nos levará ao nosso destino final. Esse exemplo ilustra bem o que queremos evidenciar com a palavra currículo, que etimologicamente tem origem no latim *curriculum*, derivada do verbo *currere* e significa caminho ou percurso a ser seguido ou que já foi realizado.

De acordo com Sacristán [31] (p. 16), *currere* e *cursus* assumem dois sentidos: um designando a vida profissional de onde vem o uso da palavra *curriculum vitae* e o outro passando a constituir a carreira do estudante, mais precisamente no que diz respeito aos conteúdos e sua organização. Assim, podemos entender que há uma relação análoga entre o currículo e os conteúdos de uma determinada disciplina estudada na escola regular. Em certo sentido são termos sinônimos, pois são caracterizados como agentes reguladores do trabalho docente.

Para nossa pesquisa é importante entender as concepções sobre currículo que são abordadas por Nereide Saviani [32], que diz que "o currículo diz respeito a relação, sequenciação e dosagem de conteúdos da cultura a serem desenvolvidos em situações de ensino-aprendizagem". Ou seja, os saberes da sociedade que se apresentam no âmbito da escola de forma organizada e quantificada.

Segundo Demerval Saviani [33], o currículo tem relação com as disciplinas de um curso e se relaciona com os assuntos de uma disciplina. Mas numa perspectiva ampliada, ele comenta que o currículo compõe atividades destinadas a um dado fim. Diz respeito ao conteúdo da educação, muitas vezes convencionalmente chamado de grade curricular. Compreende aos atos educacionais que a escola promove.

Outra relevante definição para o currículo encontramos num dos documentos legais do governo federal que é parte das nossas análises mais a frente, as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica que em sua Resolução n^{o} 04/2010, no Artigo 13, definiu que,

> O currículo, assumindo como referência os princípios educacionais garantidos à educação, [...] configura-se como o conjunto de valores e práticas que proporcionam a produção, a socialização de significados no espaço social e contribuem intensamente para a construção de identidades socioculturais dos educandos. [7] (p. 66)

Mas o currículo não se restringe a apenas um documento escrito com um certo conteúdo programático, mas também de experiências compostas de sujeitos, que são propostas pela escola e gera impacto sobre os discentes. E sua finalidade é planejar de maneira científica as atividades pedagógicas da instituição de ensino, do docente e do livro didático e organizá-las com o intuito de atingir metas e objetivos pré-estabelecidos.

Dito isto, nossa investigação sobre como a Trigonometria acontece nos documentos legais do governo federal se torna relevante, visto ela ser um conteúdo importante dentro do currículo que os livros didáticos de Matemática no ensino médio propõem.

Com isso em mente, e visando tornar claro o enfoque aos conteúdos da Trigonometria discorremos de maneira sucinta a respeito das teorias sobre currículo que o autor Tomaz Silva [36] faz em sua obra *Documentos de Identidade: Uma Introdução às Teorias de Currículo*.

2.2 Teorias Sobre Currículos

Conforme explica Michael Young [37], a teoria do currículo tem suas origens com o americano Frederick Taylor, o pai da administração científica, em que seus princípios passaram a ser aplicados na escola de maneira que os docentes seriam norteados através do currículo. E o autor comenta que paralelamente na Inglaterra aflorava a educação liberal das elites que direcionava o que era ensinado nas escolas.

Assim, de acordo com Silva [36], as teorias curriculares são um conjunto de representações e reflexões que produzem e descreve o significado do próprio currículo. São os conceitos sobre os quais se baseiam a construção de um currículo. Conceitos de cunho social, idealista, moral, dogmático, materialista, para citar como exemplos.

Com isso, destacam-se as três principais correntes de teorias curriculares: as teorias curriculares acríticas ou não-críticas, balizada no tradicionalismo; as teorias curriculares críticas, baseada na transformação da sociedade; e as teorias curriculares pós-críticas, que atuam na forma como as pessoas enxergam a realidade.

2.2.1 Teoria Acrítica

Nesta modalidade de teoria curricular, o caráter conservador e tradicionalista se eleva na construção do currículo. Seus princípios advêm dos padrões estabelecidos pelas classes dominantes. Caracteriza-se por trazer no currículo aspectos mecânicos, voltados a compreensão de uma determinada tarefa atrelada ao mercado de trabalho.

Em suas concepções gerais o currículo acrítico pode ser dividido em quatro modalidades. A primeira delas é o modelo **tradicional** de currículo, que está atrelado à formação da elite, com uma formação humanística. A segunda modalidade é do currículo **escolanovista**, surgido dentro do movimento da escola Nova[1], que propõe colocar o aluno como um sujeito ativo no processo de aprendizagem, trazendo uma pedagogia mais ativa. A terceira modalidade é o currículo **tecnicista**, em que o currículo passa a ser voltado para atender as demandas de um mercado de trabalho. E a quarta modalidade é o currículo **neotecnicista**, em que a pedagogia proposta para os currículos são fundamentadas na construção de competências e habilidades, para que o sujeito passe a ter uma atuação mais efetiva.

Assim, o foco principal está no preparo do cidadão para cumprir um dado papel na sociedade, exercer uma profissão, atender uma necessidade de mão de obra com alguma especificidade. Contudo, isso se configura numa formação que não privilegia a reflexão, ela não propicia a atuação crítica do sujeito na sociedade. Como diz Silva [36], o currículo é visto como a especificação precisa de objetivos, procedimentos e métodos visando a obtenção de resultados que possam ser rigorosamente mensurados.

Nessa ótica a escola é apenas o agente que possibilita a transmissão do conhecimento que a humanidade produziu. Os conteúdos estão logicamente sequenciados e repassados de maneira descontextualizada. O professor é o único detentor do saber que vai avaliar se os alunos conseguem reproduzir os conhecimentos de acordo com o que foi ensinado.

2.2.2 Teoria Crítica

Nesta modalidade de teoria curricular, a elaboração do currículo é de natureza reflexiva. Está pautada no desenvolvimento da pedagogia histórico-crítica e crítico-social dos conteúdos. É caracterizada por uma busca em mostrar ao sujeito a realidade externa da sociedade, entendendo os diversos mecanismos da estrutura social com seus bens e serviços possibilitando uma modificação dessa realidade.

As concepções de currículo crítico estão pautadas nos conteúdos sócio-historicamente relevantes, em que um currículo nunca aparece neutro, carregando em si um aspecto ideológico, pois isto vai ser o crivo da seleção de alguns conteúdos em detrimentos de outros. Assim, não é fundamental saber qual método usado pelo docente para trabalhar um dado conteúdo e sim saber quais os fatores e motivos pelos quais tal conteúdo está sendo vivenciado.

De acordo com Silva [36], as teorias críticas colocam em questão os pressupostos sociais e educacionais. Ela desconfia, critica e muda de maneira radical o *status quo*, onde

[1] No Brasil, a partir da década de 30, ganha impulso o movimento para universalização da escola pública, laica e gratuita.

o importante é desenvolver os conceitos que possibilitem ao sujeito compreender o que o currículo faz. O currículo crítico visa a democratização do conhecimento objetivando uma mudança da realidade transformando a sociedade.

2.2.3 Teoria Pós-Crítica

E como derradeira modalidade de teoria curricular temos a teoria pós-crítica, não tendo necessariamente essa nomenclatura por ter surgido após as teorias críticas, contudo incorporam elementos dela. Sua égide está pautada no direcionamento dos currículos a partir de conhecimentos e identidades vinculadas a temas como raça, etnia, multiculturalismo, sexualidade entre outros.

As tendências de mercado, globalização e o neoliberalismo econômico permeiam as diversas facetas da sociedade. E a escola não fica de fora da influência desses elementos. E isso acarreta numa contaminação dos currículos.

Assim as teorias pós-críticas partem dos conhecimentos do cotidiano de um determinado grupo, ou seja, a partir dos conhecimentos prévios de sua própria cultura. Nesse sentido a escola passa a ser o espaço de vivências e ressignificação dos saberes. As verdades antes ensinadas como absolutas começam a ser questionadas, preconizando o convívio entre visões de mundos diferentes.

Com isso, as propostas curriculares e pedagógicas das escolas passam a ser inclusivas, visando a formação de um sujeito solidário, que atua de maneira a transformar a realidade do grupo social a qual faz parte.

2.3 Currículo e Trigonometria

Diante das teorias expostas sobre o currículo, fazemos nosso recorte em analisar, nos documentos oficiais do governo federal, como os conteúdos da Trigonometria são propostos.

O intuito é subsidiar o docente em sua tarefa de estruturar a disciplina de Matemática dentro de uma respectiva carga-horária e contemplar assim na grade curricular os conhecimentos sobre Trigonometria, principalmente os tópicos ou conteúdos que, eventualmente, são abordados no exame do Novo ENEM.

Capítulo 3

Breve Relato Histórico da Trigonometria

O intuito desse capítulo é observar a Trigonometria como elemento ou instrumento da linguagem matemática que foi construído, aprimorado e aplicado através do próprio desenvolvimento do homem e da sociedade. Está longe de ser uma exausta pesquisa de cada por menor a despeito do que venha a ser a Trigonometria e de como ela veio a ser apresentada até os dias de hoje. Outros autores o fazem com a devida competência, dentre os quais são parte do referencial teórico apresentado na bibliografia desta pesquisa.

Dito isto, o breve relato histórico apresentado é sintetizado em dois tópicos. Num primeiro momento compreende os relatos da Trigonometria na História Antiga e um segundo tópico abrange uma síntese histórica na era Moderna.

Os termos a.C. e d.C. significam antes de Cristo e depois de Cristo, respectivamente. Sendo que, a partir do ano mil abandonamos essa designação. Quando não citamos as fontes, as figuras são de autoria própria.

3.1 Síntese Histórica Antiga

De acordo com historiadores da literatura matemática, a Trigonometria tal como a estudamos hoje em dia não foi obra ou mérito de um único homem, nem muito menos de um só povo. Tal pensamento encontramos na obra de Aaboe [2]. E reportados aos primórdios das civilizações antigas vamos abordar o desenrolar histórico da Trigonometria a partir de sua forma engendrada com problemas relacionados a Astronomia, Agrimensura e Navegação.

No que diz respeito a etimologia da palavra *Trigonometria*, Silva [35], depois de mencionar as relações entre triângulos e a razão entre dois números, assim definiu o termo:

- **TRI** (três);
- **GONO** (ângulos);
- **METRIA** (medida).

Assim, o significado de *Trigonometria* abrange a medida dos três ângulos de um triângulo e ainda determina um ramo da matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

3.1.1 Povos Antigos

De acordo Nielce Costa [16], as raízes da Trigonometria são concomitantemente observadas na civilização Egípcia, Babilônica e Chinesa. Tais povos antigos deixaram um legado histórico significativo no que tange aos rudimentos de elementos matemáticos.

Egípcios

Temos como primeiro registro antigo conhecido da Trigonometria um documento chamado Papiro de Rhind. Atualmente exposto no acervo do Museu Britânico de Londres, este item foi primeiramente copiado por um escriba chamado Ahmes por volta do ano 1650 a.C.. Nele há apresentação de 84 problemas matemáticos, dentre os quais faz menção ao *seqt* de um ângulo.

Figura 3.1: Papiro de Rhind
Fonte: [26] (p. 22)

Para a construção das grandes pirâmides no Egito antigo, a necessidade de inclinação constante entre as faces propiciou surgir o conceito de *seqt*, representando uma razão entre afastamento horizontal e elevação vertical. Mas Ahmes não deixou claro como essa definição se dava, contudo as conclusões apontam que seja o equivalente à cotangente do ângulo $\widehat{OMV}$, ver [29].

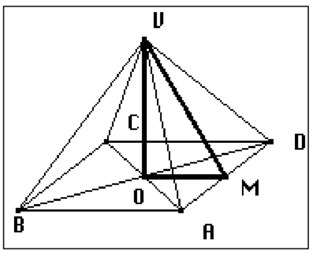


Figura 3.2: Seqt
$$seqt = \frac{\overline{OM}}{\overline{OV}}$$
Fonte: http://ligadamatematica.blogspot.com/2013/11/a-historia-da-trigonometria.html

Babilônicos

O interesse babilônico na Astronomia propiciou o cenário para observações de cunho matemático que se relacionam com rudimentos da Trigonometria.

Nesse contexto, destaca-se o que há registrado na tabela Plimpton 322. Tablete datado do período babilônico antigo (cerca de 1900-1600 a.C.), contendo ali inferências a elementos da Trigonometria.

Figura 3.3: Plimpton 322
Fonte: https://rcristo.com.br/2018/11/13/conheca-plimpton-322-um-tablete-de-argila-com-escrita-cuneiforme-babilonica-datado-em-3800-anos/

Chineses

Textos chineses que remontam a 1100 a.C. apontam vestígios de uma Trigonometria primitiva. Em que se mediam distâncias, comprimentos e profundidades usando triângulos retângulos.

Certa passagem chinesa foi traduzida: *"O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnomon"*, fazendo alusão de conhecimentos trigonométricos no segundo milênio a.C. [16].

Ilustrado a seguir, o *gnomon* já conhecido de egípcios por volta de 1500 a.C., chegou até os chineses através dos babilônicos.

Figura 3.4: Gnomon
Fonte: http://www.astronomiapratica.com.br/experimentos/medindo-direcoes-construindo-um-gnomon/

O *gnomon* consistia numa vareta cravada ao chão, formando ângulo de 90°, e o comprimento de sua sombra era observado ao meio dia. Atentando aos limites da sombra media-se a duração do ano, e, pelo movimento lateral diário permitia-se medir a duração do dia.

Seguindo uma ordem cronológica e crescente de linha do tempo, apresentam-se agora as contribuições helênicas para a Trigonometria.

3.1.2 Gregos

Conforme Mol [26], a evolução da matemática sofreu uma mudança de rumo na Grécia Antiga (a partir do século VIII a.C.). A matemática abandona seu caráter empírico e passa a ter formato de uma ciência organizada, posta de maneira sistemática e por elementos racionais. Assim, desempenha um papel significativo na construção da Trigonometria.

No que tange à elementos de conhecimento de Trigonometria os gregos faziam uso também do já mencionado *gnomon*, batizado por eles, segundo **Heródoto** (490-420 a.C.), como relógio de Sol.

A Grécia foi um celeiro de grandes pensadores. Dentre os quais elencamos **Thales de Mileto** (625-546 a.C.), contribuindo com estudos sobre semelhanças; **Pitágoras** (570-495 a.C.) com o teorema famoso que leva seu nome; e daí a escola *Pitagórica* (século V a.C.) desenvolvendo estudos sobre o som; **Hipsícles** (180 a.C.) divide o zodíaco em 360 partes; **Eratóstenes de Cirene** (276-196 a.C.), contemporâneo de **Arquimedes** (287-212 a.C.) e **Aristarco** (310-230 a.C.) usaram a Trigonometria para o cálculo da circunferência da Terra (o que mostra uma relação direta com a Astronomia).

Um expoente em sua época (século III a.C.) foi **Euclides**, com a obra *Os Elementos*. O texto que mais influenciou a matemática e a ciência até o século XIX, e que de acordo Mol [26] teve a contribuição de outros matemáticos sob a coordenação de Euclides. Decerto que ali se pavimentava o caminho para o tratamento da Trigonometria advinda na esteira da Geometria.

Figura 3.5: Os Elementos
Primeira edição em língua inglesa, de 1570.
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Os_Elementos

Destaca-se no período helênico, com sua abordagem de conteúdos trigonométricos, **Hiparco de Nicéia** (180-125 a.C.). Este dividiu a circunferência em 360 partes, construiu a primeira *tabela trigonométrica* e observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°. Seria este um resultado moderno para a expressão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$ [1]

Assim, Hiparco ganhou o nome de *Pai da Trigonometria*.

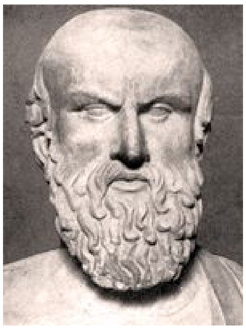


Figura 3.6: Hiparco
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/619315386230645945/

A obra *Almagesto* ganha destaque na Astronomia da antiguidade. Em árabe significa “A Maior”, escrita por **Cláudio Ptolomeu** (90-168 d.C.), em que ele compila os resultados matemáticos preliminares de Hiparco indispensáveis à época.

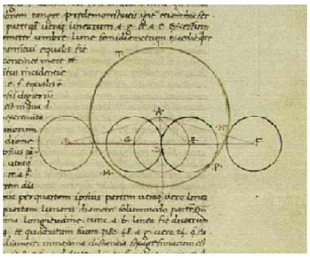


Figura 3.7: Tradução do Almagesto
Texto em latim, de 1451. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Almagesto

O Almagesto é um marco no modelo de Astronomia e perdurou como referência até **Nicolau Copérnico**, no século XVI [16].

Por volta de 100 d.C. surge **Menelau de Alexandria** com uma obra intitulada, a *Sphaerica*. Nesse texto aparece o *“Teorema de Menelau”* como parte da trigonometria esférica ou trigonometria de cordas num círculo [26].

[1] Limite Trigonométrico Fundamental.

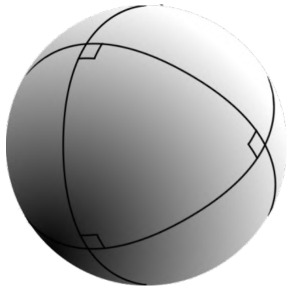


Figura 3.8: Triângulo Esférico
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria_esferica

Com isso, segundo Mol [26] (p. 63), "Os polos de criação matemática se deslocaram na direção do Oriente. A matemática ganhou contribuições vindas da Índia e, sobretudo, do Império Árabe, que deixaram consequências importantes em sua estrutura."

3.2 Síntese Histórica Oriental

Descrita uma breve passagem sobre o período clássico, adentramos na perspectiva que a matemática e alguns aspectos que permeiam a Trigonometria toma em direção ao Oriente.

Segundo escreve Costa [16], houve um deslocamento do celeiro cultural da Europa Ocidental em direção à Índia devido às invasões bárbaras germânicas e queda do Império Romano a partir do século IV.

3.2.1 Hindus

A maior contribuição dos hindus para matemática está no desenvolvimento do sistema de numeração decimal, posicional e o uso do zero.

A Trigonometria aparece num conjunto de textos denominados *Siddhanta*, que significa sistemas de astronomia. E o texto que chegou até nós é chamado **Surya Siddhanta** (Sistemas do Sol), datado por volta do século IV de nossa era, exposto através de versos e em língua sânscrita.

Os textos da **Surya** trazia o conceito trigonométrico denominado *jiva*, correspondendo a relação existente entre a metade da corda e a metade do ângulo central, possibilitando assim observar um triângulo retângulo na circunferência. Ou seja, um conceito para o *seno* de um ângulo. Vejamos a ilustração.

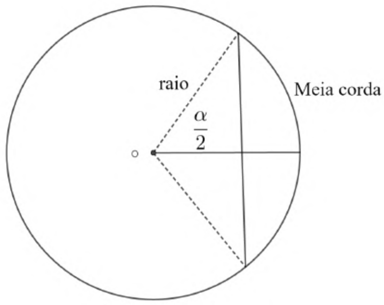


Figura 3.9: “Jiva” hindu

O matemático hindu **Aryabhata** (cerca de 500 d.C.) já calculava semi-cordas e usava também o sistema decimal. Em **Varahamihira** (cerca de 505 d.C.) encontra-se algo semelhante a identidade trigonométrica fundamental $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Assim, Silva [35] comenta que toda a Trigonometria que estudamos hoje foi baseada no *seno* dos hindus.

Posteriormente à contribuição hindu para a Trigonometria se encontram as contribuições dos povos árabes e persas.

3.2.2 Árabes e Persas

Arábia

No intuito de preservar todo o conhecimento até então disseminado nos escritos de línguas grega e latina, os árabes deixaram sua parcela de contribuição ao desenvolvimento da matemática. Fizeram isso se valendo dos firmes alicerces da matemática hindu, com os quais tiveram intenso intercâmbio.

De acordo com a fala de Costa [16], a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, tendo o príncipe da Síria **Mohamed-ben-Geber** como seu expoente, conhecido como **Al-Battani** (cerca de 850 a 929 d.C.), ou **Albategnius** em latim, apelidado de o *Ptolomeu dos árabes*.

Em seus estudos, **Al-Battani**, a partir das obras do *Almagesto* e *Siddhanta*, introduziu o *círculo de raio unitário*. Demonstrou que a razão *jiva* vale para triângulos retângulos.

Observe a ilustração na figura abaixo.

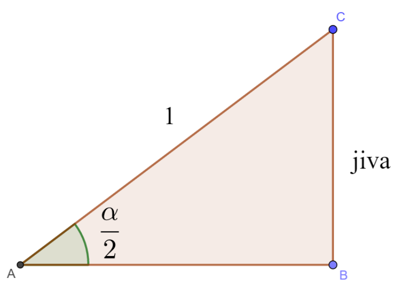


Figura 3.10: Raio unitário de Al-Battani

Da figura acima, temos que:

$$jiva = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{1} \Longrightarrow \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{BC}}{1}$$

Dentre os árabes também merece destaque o matemático **Abû'l Wêfa** que em 980 d.C. elaborou uma sistematização de provas e teoremas de trigonometria.

Pérsia

Destacamos da Pérsia o astrônomo **Nasîr ed-dên al-Tûsî**, que a partir de suas pesquisas, em 1250, desvincula a Astronomia da Trigonometria. Logo depois citamos **Al-Kashi** (cerca de 1380-1429), um matemático e astrônomo de origem persa que obteve, em seu *Tratado da Circunferência*, uma aproximação de 2π com 16 casas decimais exatas.

No mais, as produções matemáticas da época focaram na Álgebra e na Aritmética.

Nesse ínterim, a Escola de Bagdad entrou em declínio, e o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa, na Península Ibérica. Com isso, os estudos da Trigonometria também tomam estes rumos.

Figura 3.11: Árabes e Persas
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/105412447500642052/

3.3 Síntese Histórica Ocidental

Avançamos ao período da história que compreende a queda do Império Romano do Ocidente em 476[2] até a tomada de Constantinopla (capital do Império Bizantino) em 1453.

Nos séculos XII e XIII foram fundadas as primeiras universidades. A instrução era dada em quatro artes matemáticas do *quadrivium*[3]: aritmética, geometria, música e astronomia.

[2]Note que as datas a partir de agora correspondem todas a nossa Era Comum, e, portanto, não fazemos mais menção a Depois de Cristo (d.C.).

[3]Formação mais complexa que a formação *trivium*, que deu origem à palavra "trivial".

3.3.1 Idade Média

Os astrônomos árabes migraram até a Espanha para trabalhar e passaram a difundir seu saber. Destacamos **Ibrâhîm ibn Yahyâ al Naqqâsh**, (conhecido nas traduções latinas como Arzachel) que viveu em Córdoba e produziu um conjunto de tábuas trigonométricas em 1050; e ainda citamos **Jabir ibn Aflah**, que viveu em Sevilha, cujos estudos permeavam a área da astronomia.

Na fala de Mol [26], **Leonardo de Pisa** (cerca de 1170-1250), conhecido como Fibonacci, é considerado o mais importante matemático da Europa Medieval. A obra *"Practica Geometriae"*, de sua autoria em 1220, é uma aplicação da trigonometria árabe na Agrimensura.

Um documento importante usado na navegação foram *As Tábuas Afonsinas* (uma modernização das tábuas trigonométricas), produzidas por estudiosos em 1254, na cidade de Toledo na Espanha, a partir da tradução de textos árabes a mando do rei Alfonso X de Castela.

No século XIV, **Purbach**, na Inglaterra, retomou a obra do grego Ptolomeu e calculou uma nova tábua de senos. Seu discípulo **Regiomontanus** (1436-1475) tem destaque com seu *De Triangulis Omnimodus* escrito em 1464, e o posterior *Tabulae Directionum*, que incluía a função tangente.

Feito este breve relato a respeito dos expoentes e as principais obras da que foram alicerces da Trigonometria, passamos à última fase histórica com o período Renascentista[4], e indo até a Idade Moderna.

3.3.2 Modernidade

Após estar imersa em conflitos entre nações e problemas sociais tais como fomes e doenças[5], de acordo com Mol [26], a Europa vivenciou um redespertar das atividades criativas, assistindo ao florescimento de diversas áreas, entre as quais a literatura, a arte e a ciência.

A invenção da prensa com o alemão **Johannes Gutemberg** (1398-1468) propiciou o cenário para a difusão do conhecimento e com isso a atividade matemática desloca-se repetidamente para diversos países.

Com o trabalho de **Joachim Rhaeticuspela** em Leipzig (1551), *"Canon14 DoctrinaeTtriangulorum"* as funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões.

Os textos de **Rhaeticus** (1514-1576) retomou o trabalho sobre as tábuas de *Regiomontanus* de 1464, com maior rigor nos cálculos.

[4] *Renascimento*, *Renascença* ou *Renascentismo* são termos usados para identificar o período da história da Europa entre meados do século XIV e o fim do século XVI.

[5] Citamos a Peste Negra que assolou a Europa, Ásia e África. Levando à morte de cerca de 50 milhões de pessoas, 60 % da população europeia na época

Em 1580, o bacharel em Direito, e francês **François Viète** (1540-1603), desenvolveu estudos com um tratamento analítico para Trigonometria, pois até então era essencialmente geométrica. Foi ele quem aplicou as transformações algébricas à Trigonometria.

Figura 3.12: François Viète
Fonte: https://www.britishmuseum.org/collection/object/P_1865-0114-135

O matemático dinamarquês **Thomas Fincke**, no seu livro *"Geometria Rotundi"*, em Basel na Suíça, no ano de 1583, publica uma expressão matemática equivalente às leis da tangente: $\dfrac{\mathrm{tg}(A+B)}{\mathrm{tg}(A-B)} = \dfrac{a+b}{a-b}$. Contudo, de acordo com Costa [16], já haviam tais resultados nos textos de Viète em *"Variorum de rebus mathematicis"*.

Um expoente do renascentismo foi o polonês **Nicolau Copérnico** (1473-1543). Que em sua obra *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes* confrontou o modelo ptolomaico (geocêntrico) e defendeu a ideia de que a Terra gira em torno do Sol (heliocêntrico).

De acordo com Reis [30], no ano de 1595, **Bartholomaus Pitiscus** (1561-1613) publica a primeira obra trazendo a palavra *Trigonometria* em seu título.

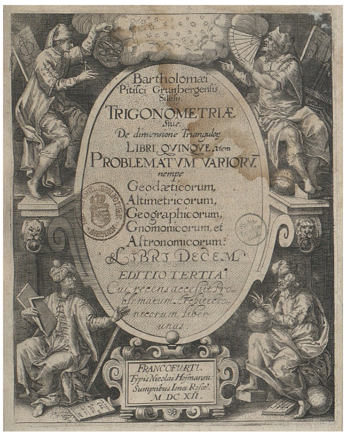


Figura 3.13: Livro de Pitiscus
Fonte: Wikipédia

E avançando nos séculos XVI e XVII, citamos **John Napier** (1550-1617), matemático escocês que escreveu duas fórmulas trigonométricas para resolver triângulos esféricos e encontrou expressões exponenciais para funções trigonométricas. E ainda ano de 1626, Pereira [29] comenta que **Albert Girard** (1595-1632) publicou a obra mais antiga com o uso das abreviações *sin*, *tan* e *sec* para seno, tangente e secante.

No contexto britânico, dentre os principais expoentes com publicações sobre a Trigonometria destacamos **Oughtred**, que em 1657, usou símbolos para desenvolver suas abordagens. **John Newton** (1622-1678) publicou em 1658 o tratado *"Trigonometria Britannica"*, o livro mais amplo sobre o tema à época. **John Wallis** (1616-1703) expressou fórmulas usando equações em vez de proporções. **Isaac Newton** (1642-1727) contribuiu com estudos sobre cálculos infinitesimais, expandindo o uso $\operatorname{arc\,sen}(x)$[6].

A partir dos estudos de Newton, o matemático alemão **Gottfried Leibniz** (1646-1716) contribui no estudo da trigonometria pavimentando o caminho da abordagem para o $\operatorname{sen}(x)$ e o $\cos(x)$ surgirem como números e não como grandezas. Após isso, **Thomas-Fanten** de Lagny (França), em 1710, foi o primeiro matemático a evidenciar a *periodicidade* das funções trigonométricas. E por fim, **Kastner**, (1719-1800) em 1759, foi o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Em nossa breve abordagem histórica sobre pensadores e obras que trataram de uma forma mais rudimentar ou até mais profunda a Trigonometria mencionamos com o suíço **Leonhard Euler** (1707-1783), maior matemático do século XVIII, influenciando a matemática moderna. Com uma vasta obra composta de 560 livros e artigos, podendo chegar até 800 manuscritos publicados após sua morte.

Figura 3.14: Leonhard Euler
Pintura de 1753 - Kunstmuseum Basel, Suíça.
Fonte: [26] (p. 118)

Na obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748, Euler elabora o tratamento analítico da trigonometria, introduzindo as notações $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $f(x)$ para funções e relacionou tais funções dos ângulos com o círculo unitário.

[6]Arco seno de x, corresponde ao seno inverso de um ângulo, representado também por $\operatorname{sen}^{-1}(x)$.

Todo o processo histórico da gênese, aperfeiçoamento e aplicações da Trigonometria, se apresenta subjacente ao processo de desenvolvimento da matemática e da geometria como instrumentos para compreensão de atividades sociais de civilizações antigas como também enquanto ciência nesta era moderna com seu tratamento analítico.

Portanto, um macro entendimento desse caráter histórico da Trigonometria pode nos dar bases para apontar o rumo para o qual essa relevante área do conhecimento nos ajudará a discutir questões atuais, tanto no âmbito acadêmico nas escolas regulares quanto nas abordagens e aplicações práticas que um conhecimento científico proporciona.

Capítulo 4

Currículo de Trigonometria nos Documentos Oficiais

Os documentos legais que norteiam as propostas curriculares para o ensino médio no Brasil são analisados neste capítulo. Nesta perspectiva, comentamos de maneira sucinta a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM). E em seguida, destacamos com mais ênfase os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Visa-se assim caracterizar, no que concerne a área das Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias, no que diz respeito aos conteúdos da Trigonometria, como estes marcos reguladores norteiam o ensino da matemática e consequentemente o ensino e propostas curriculares para Trigonometria.

4.1 Bases Legais

4.1.1 LDB

O ensino no Brasil teve um marco regulador que traz influência às atividades de ensino nos dias de hoje a partir da implementação da Lei n^{o} 9.394/96, aprovada em 1996, chamada de **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)**. A LDB regulamenta os sistemas de ensino, dividindo em Educação Básica e Educação Superior. As disposições para a Educação Básica compõe sua subdivisão em Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. E obrigatoriamente dispõe que nos currículos de tais níveis de ensino deve abranger a seguinte área do conhecimento: Matemática e Suas Tecnologias.

Posteriormente foram sendo implementados decretos, resoluções, pareceres e diretrizes no intuito de tratar de forma mais analítica os conteúdos das disciplinas. Por isso, elaboramos um panorama geral, tendo em vista compreender como o ensino médio, dentro do âmbito da matemática trata a Trigonometria.

4.1.2 DCNEM

No decorrer do ano de 1998, o Conselho Nacional de Educação (CNE), junto com a Câmara de Educação Básica (CEB) emitem o Parecer CEB nº 15/98 e a Resolução CEB nº 3/98, propondo então a instrução ao texto das **Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM)**, documento que fundamenta e orienta até então a nova reforma do Ensino Médio.

Segundo a Resolução o DCNEM [9] (p. 1),

> [...] se constituem num conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização pedagógica e curricular de cada unidade escolar integrante dos diversos sistemas de ensino, em atendimento ao que se manda a lei, tendo em vista vincular a educação com o mundo do trabalho e a prática social, consolidando a preparação para o exercício da cidadania e propiciando preparação básica para o trabalho.

Com isso, é fomentada uma estruturação para as disciplinas e currículos, visando um melhor ensino da teoria ancorado na prática. E ainda, como ponto importante da estruturação proposta no documento, em seu Artigo 10, inciso II, ele estabelece que:

> A base nacional comum dos currículos do ensino médio será organizada em áreas de conhecimento, a saber:
> ⋮
> II - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, objetivando a constituição de habilidades e competências que permitam ao educando:
> ⋮
> h) Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.
> ⋮
> m) Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas. [9] (p. 4, 5)

Conforme observado na revisão dos aspectos históricos da Trigonometria, muitas vezes esta surgiu e se desenvolveu na esteira dos estudos relacionados a Geometria. Entendendo isso, os DCNEM destacam as alíneas h) e m) que permeiam o conhecimento geométrico e as estratégias matemáticas que são a base para o tratamento da Trigonometria no ensino médio.

4.2 PCNEM

4.2.1 Marco Inicial

O documento legal que vem na sequência e que instrumentaliza o ensino no Brasil são os **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Constituindo um referencial de qualidade que, a partir de um conjuntos de proposições visam organizar os currículos e promover melhorias em todo sistema educacional do país.

Com isso, mais um elemento de reforma é apresentado: os **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**, focando em orientações complementares em relação aos PCN's, voltado especificamente para o ensino médio.

Nesse documento, no que diz respeito à Matemática observamos que:

> Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante. [6] (p. 4)

Tal documento foi dividido em quatro partes, cada uma delas se preocupando em discorrer sobre quatro grandes áreas do conhecimento, a saber:

(I) Bases Legais;

(II) Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;

(III) Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;

(IV) Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Uma vez que expressamente a matemática está destacada numa das grandes áreas do conhecimento acima, fazemos nossas observações dentro da área das **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Da qual o referido texto faz a seguinte afirmação:

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. [6] (p. 9)

A partir desse embasamento, o ensino médio tem um papel importante na ampliação, aprofundamento e organização do conhecimento matemático. Dentro desta perspectiva, busca-se destacar o papel que é dado ao estudo da Trigonometria.

Exemplificando a importância da aprendizagem matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências (cerne das teorias pós-críticas sobre currículos), o próprio texto propõe como a Trigonometria deve ser encarada, de maneira que:

> [...] seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. [6] (p. 44)

Dentro das observações nos documentos legais que norteiam o ensino e propostas curriculares para o ensino médio temos acima a primeira citação direta aos conteúdos de Trigonometria, foco da pesquisa.

Contudo, esta menção não se apresenta através de uma estrutura curricular organizada, e sim por meio de uma "sugestão" ou proposta geral de como abordar de maneira mais profunda ou mais superficial um dado conteúdo da Trigonometria. Mais a frente destacamos como os livros didáticos e as questões do ENEM concebem esta proposta.

4.2.2 Comentários à Proposta do PCN

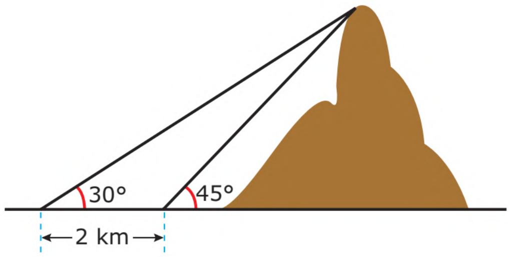
Procura-se nesta seção traçar elos entre as sugestões do PCN de Matemática atrelado ao currículo da Trigonometria através de observações em questões de exames e vestibulares para exemplificar tal relação, comentando no final quais conteúdos programáticos clássicos da Trigonometria foram abordados. No apêndice desta pesquisa fizemos uma aparato de tais tópicos.

Segundo Cunha [17], a importância da matemática se dá pela sua difusão nos diversos segmentos da vida cotidiana. Com isso, tópicos do currículo matemático (dentre eles a Trigonometria) carecem de uma abordagem por parte do professor de modo que privilegie a ligação destes conteúdos com aplicações para vida prática.

De acordo com Elon L. Lima [24] as aplicações mais usuais são as relações trigonométricas no triângulo retângulo, a lei dos cossenos e a lei dos senos. Para isso, vamos mostrar alguns exemplos em que cada um destes conteúdos de Trigonometria podem ser usados de maneira prática.

Exemplo: razões trigonométricas no triângulo retângulo

Exemplo 1 *(UFJF-MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura. Ele mediu um ângulo de* 30° *na direção do seu cume, como indicado na figura. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de* 45°*. Então, usando* $\sqrt{3} = 1,73$*, o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha, em quilômetros, é:*

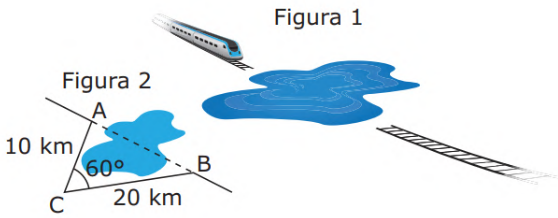


a) *2,1* *b)* *2,2* *c)* *2,5* *d)* *2,7* *e)* *3,0*

Para desenvolver a resolução de questões desse tipo é necessário o conhecimento das razões trigonométricas no triângulo retângulo, sendo elas o seno, o cosseno e a tangente, bem como se apropriar dos valores numéricos dos ângulos notáveis de 30° e 45° sob os quais são construídos os enunciados.

Exemplo: lei dos cossenos

Exemplo 2 *(Editora Bernoulli - Matemática: Volume 4) Uma empresa ao construir uma linha férrea acaba por deparar-se com uma nascente de água e seu curso será alterado para garantir um custo menor de construção, figuras 1 e 2. Sabe-se que o aumento do custo de construção depende da diferença entre a distância efetiva de construção (soma das distâncias dos segmentos AC e BC) e a distância inicialmente planejada (medida do segmento AB). O valor encontrado pela construtora nessa diferença de percurso, em km, é:*



a) $5(\sqrt{3}-1)$ *b)* $5(2-\sqrt{3})$ *c)* $10(\sqrt{3}-1)$ *d)* $10(2-\sqrt{3})$ *e)* $10(3-\sqrt{3})$

O entendimento e uso da Lei dos Cossenos é uma ferramenta para traçar a resolução da questão enunciada acima. Com isso, essa aplicação cumpre com a proposta do PCN em privilegiar cálculos da Trigonometria que envolvam medidas para situações reais.

Exemplo: lei dos senos

Exemplo 3 *(Adaptado de [24] (p. 72)) No dia do solstício de verão, Erastóstenes verificou que, ao meio-dia, o sol brilhava diretamente dentro de um poço profundo em Assuã e, em Alexandria, a 5000 estádios ao norte de Assuã, alguém mediu o ângulo que os raios solares faziam com a vertical, encontrando* $\frac{1}{50}$ *do círculo. Com base nestes dados, calcule o raio da Terra.*

Para construir a resolução desse tipo de questão, a ferramenta do conteúdo da Trigonometria utilizada é a Lei dos Senos. Uma vez que, a partir da proposta do PCN, a Trigonometria subsidie a medição para os cálculos de distâncias inacessíveis, temos neste tópico uma importante ferramenta prática da matemática.

4.2.3 Áreas Estruturadas para Trigonometria

O documento legal que vem a seguir é o **PCN+ (Ensino Médio): Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, e nos interessa o que diz respeito a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Com o intuito de facilitar a apresentação dos objetivos educacionais que organizam o aprendizado nas escolas a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias foi divida de modo a contemplarem três competências a serem perseguidas durante o ensino médio: a primeira é a *representação e comunicação*, em que o foco se dá para a leitura, interpretação e produção de textos; a segunda é a *investigação e compreensão*, focada na resolução de situações-problemas e por último temos a *contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural*, que foca a análise crítica das ideias de modo a promover o pensar social.

Busca-se assim sintetizar, nas tabelas a seguir, os conteúdos e propostas que de maneira mais direta permeiam a Trigonometria, separadas por cada uma das três competências acima citadas. Logo em seguida tecemos alguns comentários que fazem a ponte entre a proposta do PCN+ em sua respectiva competência e os conteúdos de Trigonometria, e assim como no tópico anterior exemplificamos tal conteúdo a partir de uma questão de aplicação.

Representação e Comunicação

Representação e Comunicação	
Na Área	Em Matemática
Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia	
Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica.	Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos.

Tabela 4.1: PCN+: Representação e Comunicação
Fonte: [8] (p. 114)

Nota-se que na primeira competência requerida sobre *representação e comunicação* em matemática há um destaque para o estudo da identificação e transformação entre as unidades de ângulos em graus e radianos. E como trazemos no apêndice, destacamos que o ângulo pode ser medido em graus, radiano ou grado. Podemos então observar que uma das representações para medir o ângulo, a saber o grado, foi deixada de lado na proposta curricular para o estudo da Trigonometria no ensino médio.

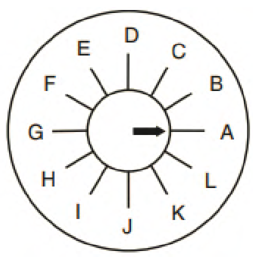
Para o Sistema Internacional de Unidades (SI)[1], a grandeza ângulo no plano é medida em radianos, representada por *rad*. Contudo, em nossas observações a respeito de como amplamente o ângulo é medido, ele se apresenta com a unidade medida em graus. Isto visto, carece que o professor privilegie o estudo das transformações entre ângulos em graus e radianos e vice-versa.

Além do SI, o estudo das funções trigonométricas e a construção de gráficos de movimentos periódicos se dão a partir do uso da medida radiano. Por isso há de se frisar a importância de entender a relação entre estas unidades de medidas mais clássicas.

Citamos uma ilustração da transformação entre essas unidades a partir dos exemplos abaixo.

Exemplo: transformação para graus

Exemplo 4 *(Unifor-CE) O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura abaixo, onde as 12 letras A, B, ..., L estão igualmente espaçadas (o ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo) e a posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada.*



Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor (onde a seta está gravada), de acordo com as seguintes instruções, a partir da posição indicada:

1) $\frac{2\pi}{3}$ *no sentido anti-horário.*

2) $\frac{3\pi}{2}$ *no sentido horário.*

3) $\frac{3\pi}{4}$ *no sentido anti-horário.*

[1]Do francês Système international d'unités

Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver:

a) no ponto médio entre L e A.

b) na posição B.

c) na posição K.

d) em algum ponto entre J e K.

e) na posição H

No desenvolvimento da resolução desta modalidade de questão, é importante compreender as relações existentes entre as medidas angulares do radiano e do grau. Portanto, é mister o docente trabalhar tais conceitos sugeridos pelo PCN+.

Exemplo: transformação para radianos

Exemplo 5 *(Adaptado de [20] (p. 14)) Determinar em radianos as medidas, no sistema circular, os ângulos internos dos polígonos regulares convexos de 3, 4, 5 e 6 lados.*

Como já citado na pesquisa, ha uma íntima relação entre o estudo da Geometria e da Trigonometria. Nesse sentido, é fundamental o docente se apropriar das várias nuances que a transformação entre as unidades de medida de graus para radianos propicia. Sendo assim, para o cálculo dos valores dos ângulos internos das figuras acima, temos de destacar os ângulos de 30°, 90°, 108° e 120° e fazer as devidas conversões em radianos.

Investigação e Compreensão

Investigação e Compreensão	
Na Área	Em Matemática
Estratégias para enfrentamento de situações-problema	
Identificar em dada situação problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.	Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-lá diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.
Interações, relações e funções; invariantes e transformações	
Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.	Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas	
Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.	Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.

Tabela 4.2: PCN+: Investigação e Compreensão

Fonte: [8] (p. 115-117)

Esta área da *investigação e compreensão* tem como destaque identificar e resolver situações-problemas a partir do uso das propriedades trigonométricas. Ela foi subdividida em três perspectivas, sejam elas: (a) estratégias para enfrentar resoluções; (b) interações, relações e funções, invariantes e transformações; (c) e medidas, quantificações, grandezas e escalas.

Nesse intuito, para a divisão da parte (a), o docente pode cumprir tal proposta do PCN+ ao se trabalhar os questões de uso prático do Teorema de Pitágoras. Também pode-se incluir os tópicos da Trigonometria já citados na competência anterior (razões trigonométricas no triângulo retângulo, lei dos senos e lei dos cossenos).

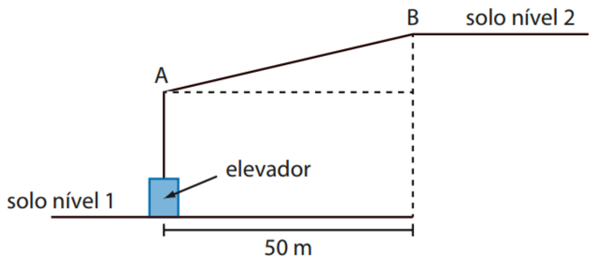
No que tange a parte (b), o professor de matemática pode relacionar a proposta do PCN+ com os seguintes conteúdos da Trigonometria: comprimento de um arco e relação trigonométrica fundamental (contemplados no apêndice).

E na parte (c), além da trabalhar com os conteúdos já citados sobre medida de ângulos, o docente poderia propor um estudo sobre construções geométricas, fazendo uso de equipamentos de medição tais como régua, compasso, transferidor e esquadros.

Dito isto, vejamos alguns exemplos que podem se encaixar nas propostas (a), (b) e (c) dos PCN+ e assim contemplarem os conteúdos da Trigonometria.

Exemplo: teorema de Pitágoras

Exemplo 6 *([23] (v.1, p. 212)) Para vencer um desnível de 9 m entre dois pisos de um shopping foi construído um elevador e uma rampa suave para possibilitar o acesso de cadeirantes ou pessoas com mobilidade reduzida, como mostra a figura:*



O elevador sobe verticalmente 5 m, chegando ao ponto A. De A inicia-se o percurso sobre a rampa de baixa inclinação até se chegar ao ponto B, no outro nível. Use uma calculadora para determinar o comprimento aproximado da rampa (por excesso), com erro inferior a 0,01.

Temos no Teorema de Pitágoras uma das ferramentas mais clássicas com a qual o docente pode utilizar na resolução de situações-problemas. Esse é o destaque dado pelo PCN+ nesta divisão da qual o docente pode fazer vasto uso, e acima pudemos exemplificá-lo.

Exemplo: comprimento da circunferência

Exemplo 7 *([23] (v.2, p. 12)) Um automóvel percorre* $157\,m$ *em uma pista circular, descrevendo um arco de* 72°. *Determine a medida do raio da curva. Use* $\pi \cong 3,14$.

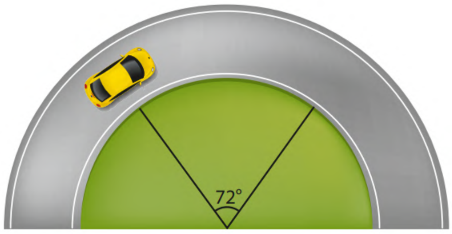


Figura 4.1: Exemplo
Fonte: [23] (p. 12)
Elementos sem proporção entre si.

Para este tipo de questão, o professor tem de se apropriar ainda mais da relação existente entre grau e radiano, uma vez que o cálculo de medidas angulares é uma conseguinte extensão para se determinar o comprimento de uma medida curvilínea.

Exemplo: construção geométrica

Exemplo 8 *Usando régua e compasso, construir um triângulo equilátero com* $3\,cm$ *de lado.*

Em sua parte (c) os PCN+ propõem ao docente o uso de instrumentos de medição que visem discriminar comprimentos e distâncias. Para tanto o professor pode se valer do uso de teodolitos (também disponíveis em aplicativos para celulares), de sistemas de *gps* e, de acordo com o enunciado do exemplo, através de instrumentos simples como régua e compasso. Tais abordagens podem enriquecer o estudo da Trigonometria com aplicações mais práticas e manipulação de materiais.

Contextualização Sócio-Cultural

Contextualização sócio-cultural	
Na Área	Em Matemática
Ciência e tecnologia na história	
Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.	Compreender o desenvolvimento da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas.

Tabela 4.3: PCN+: Contextualização Sócio-Cultural
Fonte: [8] (p. 117, 118)

Nesta derradeira área, a saber *contextualização sócio-cultural*, a proposta do PCN+ consiste em observar o uso das razões trigonométricas a partir de resultados dos avanços tecnológicos. Nesse sentido, a postura do docente, visando atingir os objetivos desta proposta, pode ser traduzido em se trabalhar os aspectos históricos no processo de desenvolvimento do pensamento matemático em torno da Trigonometria. Isto pode ser feito através pesquisas extracurriculares em revistas especializadas, também assistindo a filmes e documentários que retratem o surgimento da Trigonometria decorrer da história através das grandes navegações, e ainda relacionar aspectos da Astronomia com a Trigonometria.

No capítulo 3 desta pesquisa, discorremos com um breve relato histórico a respeito de pensadores que foram expoentes no estudo da Trigonometria. Portanto, ao docente fica a sugestão de um estudo da biografia destes, evidenciando uma contextualização na construção de dado conhecimento científico como um elemento da história.

Assim, em seus pressupostos normativos, os PCN+ tratam das diretrizes de como a Trigonometria pode ser abordada no currículo escolar, e tecemos comentários e exemplificamos como de modo mais geral estes conteúdos podem ser parte das ministrações de aulas dos docentes.

4.2.4 Trigonometria nas Áreas Estruturantes do PCN+

Os PCN+ propõem uma sistematização para o ensino da matemática, chamado de **Temas Estruturadores do Ensino de Matemática**, isto se dá por meio de três eixos a serem desenvolvidos, os quais são:

I. Álgebra: números e funções;

II. Geometria e medidas;

III. Análise de dados.

Tal divisão visa com que o aluno adquira as competências das três áreas estruturadas mencionadas anteriormente.

Na perspectiva deste trabalho, o eixo norteador que engloba a Trigonometria é a *Álgebra: números e funções*. A partir dele são propostas duas unidades temáticas. Sejam elas: Variação de Grandezas e Trigonometria. Com isso, destacamos como o PCN+ trata a unidade temática de nossa pesquisa:

> Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.
>
> - Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
>
> - Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais. [8] (p. 123)

Observa-se que a ênfase sugerida está no estudo de tópicos elementares da Trigonometria, tais como triângulo retângulo e triângulo qualquer. E posteriormente fica inferido que o PCN+ sugere tratar apenas da primeira volta no ciclo trigonométrico, não abarcando o estudo das equações trigonométricas.

Na seção anterior abordamos e exemplificamos como o docente pode organizar o currículo para o preparo de aulas de acordo com as sugestões do PCN+.

Vejamos como os PCN+ reiteram e propõem o ensino da Trigonometria no ensino médio:

> [...] o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. [8] (p. 121, 122)

Este importante documento legal para o currículo faz uma crítica ao modelo tecnicista com o qual o conteúdo da Trigonometria em muitas situações pode ser vivenciado em sala da aula, característica esta dos modelos tradicionais de currículo. Assim, o PCN+ não sugere o estudo quando não há aplicabilidade de um conteúdo, principalmente no que diz respeito ao estudo das identidades trigonométricas em detrimento de um aprofundamento nos estudos das funções trigonométricas e na interpretação gráfica delas. Ou seja, o papel docente concerne em não "perder tempo" com assuntos demasiados formais, com uso de fórmulas e sim "gastar as energias" com a parte mais aplicável da Trigonometria com gráficos.

Portanto, o PCN+ sugere ao docente que privilegie um currículo com ênfase das aplicações do seno, cosseno e tangente, deixando de lado suas relações trigonométricas derivadas, bem como sugere enfatizar os estudos da Trigonometria sob uma perspectiva histórica das aplicações dessas relações trigonométricas.

4.2.5 Sequência nas Séries

Nesta seção sintetizamos, nas tabelas abaixo, como os PCN+ propõem ser feita a escolha da série em que o conteúdo da Trigonometria é abordado:

1ª série	**2ª série**	**3ª série**
1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 2. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	*Não há proposta de conteúdo.*

Tabela 4.4: PCN+: Organização do Trabalho Escolar
Fonte: [8] (p. 128)

O documento ainda sugere, para se obter a finalidade proposta no ensino da Trigonometria, a seguinte organização de conteúdo:

Exemplo de uma possível programação		
1ª série	*2ª série*	*3ª série*
Matemática		
Funções e trigonometria do triângulo retângulo	Trigonometria	*Não há proposta de conteúdos*

Tabela 4.5: PCN+: Possível Programação
Fonte: [8] (p. 134)

O que se pode observar, a partir da sugestão do PCN+, é que o estudo da Trigonometria está condensado no primeiro e no segundo ano do ensino médio. Sendo a primeira série desse nível de ensino tratando de conteúdos introdutórios como a Trigonometria no triângulo retângulo e a segunda série abordando as partes mais complexas englobando as funções seno, cosseno e tangente. Já para o terceiro ano do ensino médio o PCN+ não elabora uma proposta de conteúdos.

Este é um aspecto delicado com o qual o docente não raro vai se deparar. Como veremos mais adiante, alguns poucos livros didáticos trazem conteúdos de Trigonometria para serem trabalhados no terceiro ano do ensino médio. Nesse sentido, entendemos que esta forma de dispor os conteúdos pode gerar algum impacto no estudo da Trigonometria. Cabe portanto ao professor estar a par das necessidades regionais de uma comunidade escolar e a partir dos objetivos da coletividade discutir o currículo que melhor se adéqua à realidade local e assim escolher um livro ou obra de referência. Não seguir uma proposta que é amplamente adotada pela comunidade escolar pode acarretar em alguma defasagem no aprendizado, visto que o currículo, nesse sentido se apresenta mais enxuto. É fundamental o docente também se ater ao um currículo que tenha pretensa aplicabilidade às questões da sua região.

4.3 OCEM

Visando a construção de uma unidade da organização escolar para o ensino médio, a Secretaria de Educação Básica (SEB) apresenta um conjunto de orientações e reflexões para nortear as atividades da escola e do docente.

Assim, em 2006, o Ministério da Educação publica as **Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)**. Documento do qual vamos nos ater ao seu volume 2, que trata das *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, e com mais acuidade sintetizar o tratamento dado ao currículo da Trigonometria nesse importante documento.

"Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular." [4] (p. 69)

Sendo assim, discorreremos, no que tange à Trigonometria, sobre os aspectos relacionados aos conteúdos, pois os demais aspectos da OCEM não focam apenas no tópico cerne desta pesquisa, mas tem um caráter mais geral de organização e de propostas pedagógicas em matemática.

4.3.1 Escolha de Conteúdos

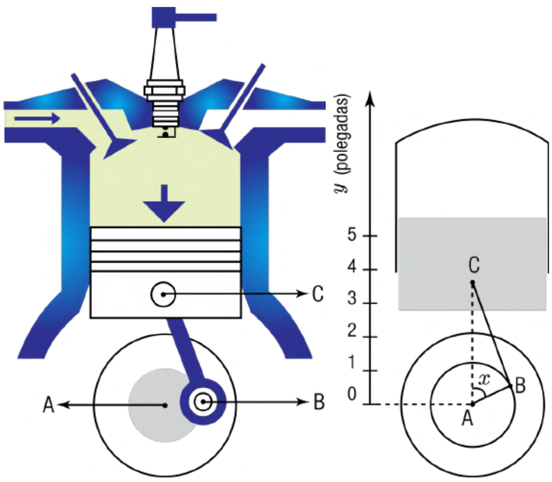
O referido documento faz uma inter-junção do estudo da Trigonometria como sendo uma progressão no estudo das funções, levando a encarar o conteúdo das funções trigonométricas com mais ênfase, uma vez que propõe:

> [...] (no) estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno. [4] (p. 73)

Um importante conteúdo da Trigonometria que aparece aqui com destaque é o estudo das leis dos senos e cossenos. Dada sua ampla aplicação em questões mais práticas e de cunho tecnológico as OCEM colocam tais assuntos como prioritários. Nos tópicos anteriores já vimos exemplos que englobam as Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, no entanto vamos destacar, a partir de um outro exemplo, como o estudo da Trigonometria se relaciona como uma continuidade no desenvolvimento e compreensão do estudo das funções. Veja:

Exemplo: função seno e cosseno

Exemplo 9 *(UERJ/2010) Observe abaixo a ilustração de um pistão e seu esquema no plano.*



O pistão é ligado, por meio da haste BC, a um disco que gira em torno do centro A. Considere que:

- *o raio AB e a haste BC medem, respectivamente, 1 polegada e 4 polegadas;*

- *à medida que o disco gira, o pistão move-se verticalmente para cima ou para baixo, variando a distância AC e o ângulo $B\widehat{A}C$.*

Se a medida do ângulo $B\widehat{A}C$ é dada por x radianos, a distância entre A e C, em polegadas, pode ser obtida pela seguinte equação:

(a) $y = 4 + \operatorname{sen}(x)$

(b) $y = 4 + \cos(x)$

(c) $y = \operatorname{sen}(x) + \sqrt{16 - \cos^2(x)}$

(d) $y = \cos(x) + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2(x)}$

A seguir, no que diz respeito ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo vemos a seguinte orientação da OCEM:

> [...] (nas) razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90°, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180°. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e co-seno relativos aos ângulos de medida 30°, 45° e 60°. [4] (p. 73)

Nesta porção temos uma nítida sugestão da OCEM para incluir o estudo das razões trigonométricas dos ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°. Ou seja, estar a par dos valores numéricos correspondentes a cada ângulo notável, sua respectiva razão trigonométrica e compreender exatamente qual delas serão usadas para uma dada resolução. Vejamos um exemplo de como seu uso pode ocorrer:

Exemplo: ângulos notáveis

Exemplo 10 *(UDESC SC/2011) No dia primeiro de janeiro de 2011, ocorrerá a cerimônia de posse do(a) novo(a) Presidente(a) da República. Um dos atos solenes desta cerimônia é a subida da rampa do Palácio do Planalto, sede do governo brasileiro que pode ser vista na figura abaixo.*

Figura 4.2: Palácio do Planalto
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Palacio_do_Planalto.JPG

Suponha que essa rampa possua uma elevação de 15° *em relação à sua base e uma altura de* $3\sqrt{2}m$*. Então o(a) novo(a) Chefe de Estado, ao subir toda a rampa presidencial, percorrerá uma distância de:*

(a) $6\sqrt{3}-1\,m$

(b) $8\sqrt{3}+8\,m$

(c) $6\sqrt{3}-2\,m$

(d) $6\sqrt{3}+6\,m$

(e) $4\sqrt{3}-2\,m$

Temos ainda uma outra importante abordagem trigonométrica sendo orientada para o currículo do ensino médio, seja ela: [...] "leis dos senos e dos co-senos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. [...] recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância." [4] (p. 73)

O conteúdo aqui em voga são as razões trigonométricas que usam a tangente, a Leis do Senos e a Lei dos Cossenos. Nos tópicos anteriores exemplificamos como o docente pode abordar o estudo das Leis dos Senos e Cossenos. Assim, podemos citar um exemplo para o estudo da razão tangente trigonométrica, tendo em vista sua importância e aplicação em situações cotidianas. Vejamos:

Exemplo: tangente trigonométrica

Exemplo 11 *(UNIFOR CE/2011) O Edifício Joelma tornou-se conhecido nacional e internacionalmente quando, em fevereiro de 1974, um incêndio provocou a morte de 188 pessoas. Foi inaugurado em 1.971 e continha vinte e cinco andares, sendo dez de garagens. Hoje é denominado Edifício Praça da Bandeira. Suponha que cada andar tem 2 metros de altura* *e um carro de bombeiro tenha se posicionado em frente ao prédio incendiado. Se a inclinação máxima da escada é* 30° *e o seu tamanho máximo é 60 m, qual será o último andar alcançado pela escada?*

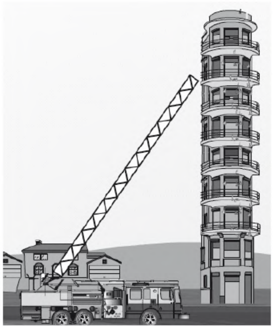


Figura 4.3: Ilustração do edifícil
Fonte: www.rived.mec.gov.br

(a) 5º andar

(b) 7º andar

(c) 8º andar

(d) 10º andar

(e) 15º andar

Nota-se a seguir uma sugestão de dispensa de conteúdo, bem como uma crítica pontual, nos seguintes termos aos conteúdos de Trigonometria propostos pelas OCEM: "tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para $\text{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas." [4] (p. 74)

De acordo com Megid e Fracalanza [25] (p. 40)

> [...] o livro didático é utilizado como apoio às atividades de ensino-aprendizagem, seja no magistério em sala de aula, seja em atividades extra-escolares, visando especialmente a leitura de textos, a realização de exercícios e de outras atividades ou, ainda, como fonte de imagens para os estudos escolares, aproveitando fotos, desenhos, mapas e gráficos existentes nos livros.

Dito isto, o livro didático se configura na prática escolar, como um material de consulta e apoio pedagógico. Assim, tais autores atribuem ao livro didático uma importância considerável à prática pedagógica. Dada a sua relevância, os documentos legais influenciam diretamente como e quais os conteúdos serão apresentados nos livros didáticos. Por assim dizer, estruturam o currículo que os docentes podem vir a usar em suas aulas, sendo parte importante do processo de formação do estudante.

Por isso, entendemos que quando as OCEM sugerem a dispensa do tópico de conteúdo de outras razões trigonométricas, exemplificada pelas operações de soma com arcos duplos de seno e cosseno, isto faz com que os livros didáticos deixem de privilegiar tal assunto, e não raro omitem e sequer apontam que existe o estudo de tal tópico da Trigonometria como veremos mais a frente na análise dos livros didáticos do Guia PNLD 2018 - Matemática.

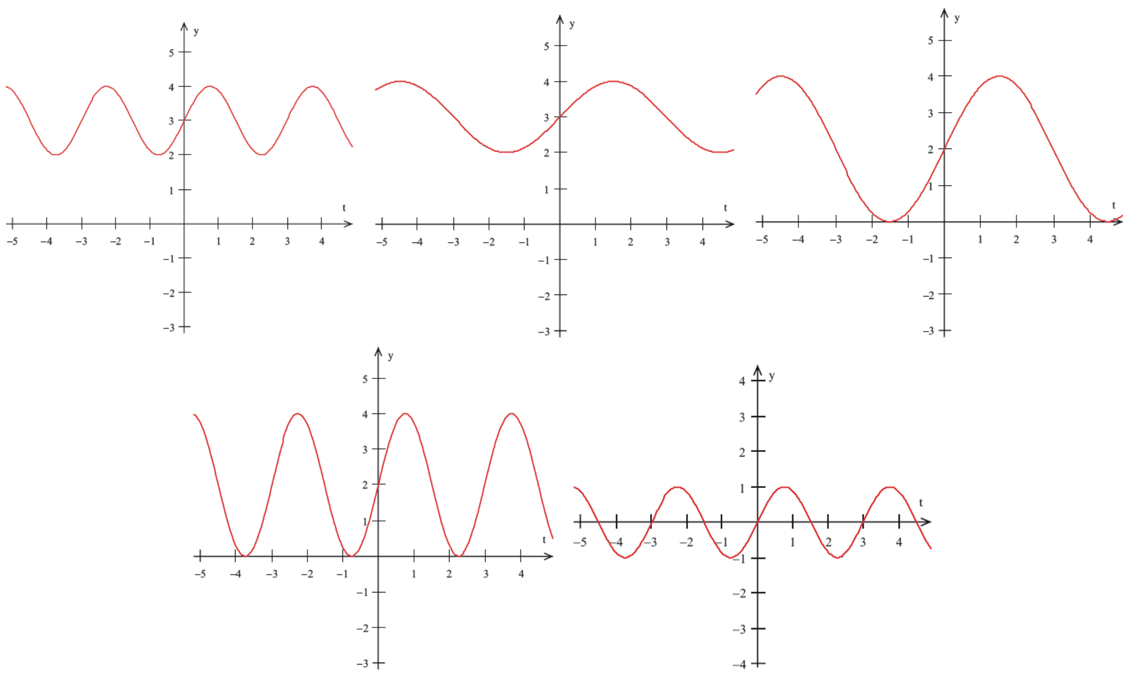
E por fim, este documento oficial trás uma proposta de conteúdos que tratam das funções trigonométricas. As sugestões são mencionadas abaixo nos seguintes termos:

> [...] seno e o co-seno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0° e 180°. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas. [4] (p. 74)

Um destaque neste trecho das OCEM é dado ao estudo dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno, sem nada mencionar a respeito das funções trigonométricas inversas e nem do gráfico da função tangente. Podemos exemplificar sua abordagem na questão a seguir:

Exemplo: gráfico de função trigonométrica

Exemplo 12 *(UNIFOR CE/2011) Uma pessoa inspira e espira a cada 3 segundos. O volume de ar nos pulmões de uma pessoa varia entre um número mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. A função* $f(t) = 3 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ *representa o volume de ar, nos pulmões da pessoa, em função do tempo t. Qual o gráfico que melhor representa essa função?*



Em face do que observamos até aqui nas OCEM, notou-se que há uma ampla orientação da qual o docente pode balizar seu organograma de conteúdos para esse importante assunto da Matemática. Há bases para a construção de um currículo que privilegie a formação crítica do aluno. Assim as OCEM se mostram alinhadas com os conceitos das teorias críticas e pós-críticas dos currículos.

4.4 BNCC

Como derradeiro marco legal para a construção do currículo no ensino médio, em sua última versão publicada no final do ano de 2017, temos a **Base Nacional Curricular Comum (BNCC)**. Definida nos seguintes termos:

> [...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. [3] (p. 07)

Com isso, fazemos um recorte do que é proposto na BNCC no que diz respeito ao estudo da área de *Matemática e suas Tecnologias*. De acordo com o documento, o objetivo é ampliar e aprofundar a matemática estudada no ensino fundamental. Isto é feito considerando pressupostos que garantam *competências específicas*, as quais foram divididas em 5 (cinco) e são indicadas através de *habilidades* a serem desenvolvidas para essa etapa.

No que concerne ao tema da Trigonometria destacamos as competências específicas 3, 4 e 5. Estas tratam de maneira mais direta daquilo que o docente pode se valer como base para construção dos objetivos a serem alcançados com o currículo no estudo da Trigonometria.

4.4.1 Competência Específica 3

> **Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.** [3] (p. 527)

Em nossa observação, as competências específicas a serem perseguidas nesta terceira divisão abrangem o estudo da Trigonometria no ensino médio. Como já visto anteriormente, os estudos da Trigonometria se apresentam historicamente como um elemento do desenvolvimento da Geometria. Também aparecem imbuídas no estudo da Álgebra com as funções. Assim, conteúdos tais como funções trigonométricas podem subsidiar o trabalho docente visando auferir tais competências. E ainda, já mostramos no tópico anterior, como o entendimento das grandezas e medidas são exemplificadas para se converter as unidades de medida dos ângulos.

Dito isto, dentre as *dezesseis habilidades* presentes nesta competência, vejamos o destaque que damos a *duas habilidades* que permeiam a Trigonometria na competência específica 3 mencionada acima:

HABILIDADES
Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

Tabela 4.6: Competência Específica 3
Fonte: [3] (p. 527)

Dentro da competência específica 3, delineamos duas habilidades que englobam assuntos da Trigonometria. Ambas apontam para a habilidade de resolver e elaborar problemas. Assim, julgamos que o trabalho do docente pode ser norteado a partir de tais habilidades.

De acordo com a primeira habilidade a ser buscada, o entendimento a respeito do estudo de movimentos periódicos e cíclicos cabe muito bem ao estudo das funções trigonométricas circulares, dada a sua relação com o ciclo trigonométrico e representação através do gráfico cartesiano. E, um exemplo de como o docente pode atingir tal objetivo é através do uso de *softwares* livres que tratem da geometria, tal como o Geogebra[2]. Por ele, o professor tem um facilitador na sua maneira de mostrar o comportamento gráfico das funções trigonométricas estudadas e discutir assim, de uma maneira mais lúdica, as propriedades que tais funções possuem.

Como exemplo, podemos mostrar o comportamento gráfico da função trigonométrica seno e como se dá a translação que sua representação gráfica adquire à medida que se modificam alguma variável da função circular. Vejamos:

Exemplo 13 *Com a ajuda do Geogebra, observar o comportamento gráfico das funções* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = sen(x) + 2$ *e* $h(x) = sen(x) - 2$, *e em seguida discutir as diversas translações observadas.*

[2]Disponível em: https://www.geogebra.org/download

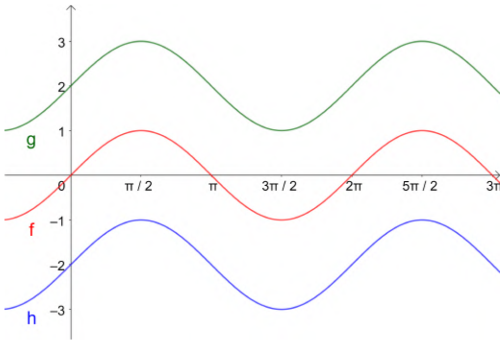
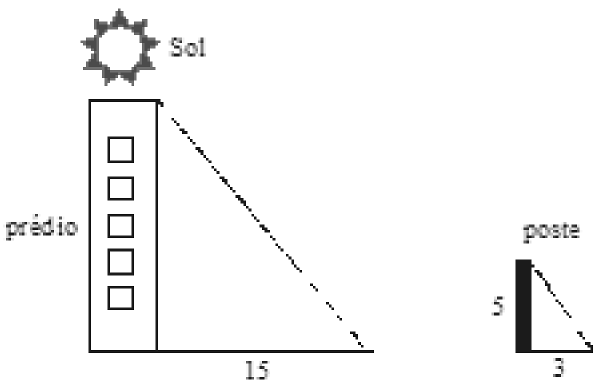


Figura 4.4: Translação da Função Seno

E para a segunda habilidade que esta competência busca propiciar ao aluno, o professor tem como base o estudo dos triângulos (relações métricas, semelhança e congruência), dentre os quais estão incluídos conteúdos da Trigonometria como o Teorema de Pitágoras. Veja abaixo um exemplo que engloba estes tópicos.

Exemplo 14 *(UNESP SP/2002) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m.*



A altura do prédio, em metros, é:

(a) 25

(b) 29

(c) 30

(d) 45

(e) 70

4.4.2 Competência Específica 4

> **Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.** [3] (p. 530)

Um dos grandes pilares pelo qual os documentos legais articulam todo o estudo da matemática no ensino médio se dá pela capacidade que a disciplina tem em organizar ideias e construir modelos que se traduzam numa melhor compreensão dos fenômenos cotidianos.

Temos, portanto, mais uma contundente abordagem de como o estudo da Trigonometria deve ser vivenciado, uma vez que este é parte importante para o uso do raciocínio matemático.

Com este intuito, dentre as *nove habilidades* a serem desenvolvidas pelo discente nesta competência específica 4, destacamos *uma habilidade* dentre elas a que permeia conteúdo de Trigonometria. Observe:

HABILIDADES
Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Tabela 4.7: Competência Específica 4
Fonte: [3] (p. 531)

Como visto acima, a ênfase está no estudo das funções seno, cosseno a partir da compreensão do ciclo trigonométrico. E citamos mais uma vez que o docente pode fazer o uso de tecnologia digital com o *software* Geogebra como ferramenta que vise ilustrar uma representação gráfica de uma função. A seguir exemplificamos a função cosseno e seu período. Vejamos:

Exemplo 15 *Fazer um esboço do gráfico de* $f(x) = \cos(x)$*, destacando o seu período.*

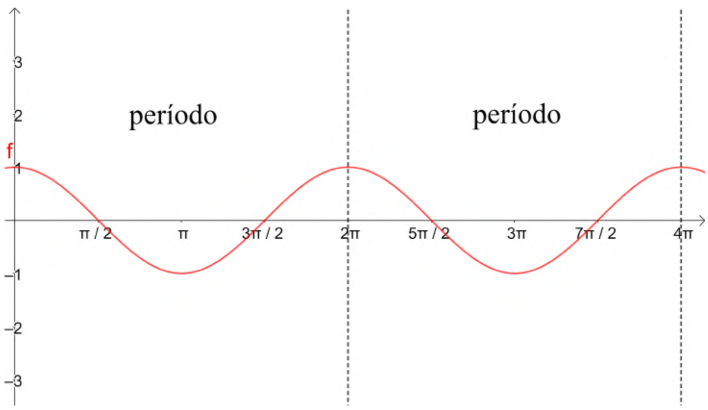


Figura 4.5: Período da Função Cosseno

4.4.3 Competência Específica 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. [3] (p. 532)

Nesta competência específica 5 entendemos que a Trigonometria também ganha destaque, uma vez que esta pode ser estudada empregando recursos de tecnologias digitais (*softwares*), como expostas nos exemplos imediatamente anteriores. E visando um aprofundamento para ingresso no ensino superior, o docente pode trabalhar tópicos da Trigonometria que privilegiem demonstrações formais, tais como as relações trigonométricas fundamentais e as relações trigonométricas derivadas, como também abordar validações de teoremas no estudo dos triângulos.

Dentre as *doze habilidades* a serem buscadas nesta competência específica 5, elencamos *uma habilidade* que dá destaque à Trigonometria. Seja ela:

HABILIDADES
Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Tabela 4.8: Competência Específica 5
Fonte: [3] (p. 533)

A habilidade que confere esta competência pode ser exemplificada através de questões voltadas a vestibulares que privilegiem o ingresso no ensino superior em áreas das ciências exatas. Vejamos um exemplo de como uma demonstração de uma identidade trigonométrica pode ser trabalhada pelo docente:

Exemplo 16 *(UDESC SC/2010) A expressão*

$$\frac{\cos(2x) - \operatorname{sen}^3(x)\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\operatorname{cotg}^4(x)}{\operatorname{cossec}^4(x)}\right) - 2\cdot\cos(x)\cdot\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1}$$

é equivalente a:

(a) $\operatorname{cotg}^4(x)$

(b) $\operatorname{tg}^4(x)$

(c) $\operatorname{cossec}^2(x)$

(d) $2\cdot\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}^2(x)$

(e) $\operatorname{tg}^2(x)$

Desta feita, se valendo de princípios que envolvem adquirir competências como raciocínio, fazer representações, melhorar a comunicação e discorrer argumentos, mencionamos acima como tais pressupostos aparecem na BNCC, destacando-se o viés dado ao estudo da Trigonometria.

A partir de nossas observações, os conteúdos de Trigonometria começam a sofrer um alteração significativa com a nova proposta da BNCC. As propostas dos PCN+ e das OCEM contemplavam conteúdos tais como o radiano, ciclo trigonométrico e equações trigonométricas. Contudo, a BNCC não aponta que o docente aborde em suas aulas tais conteúdos mais analíticos que compõem o ciclo trigonométrico. Como foi visto nos exemplos, apenas os assuntos sobre funções trigonométricas e trigonometria no triângulo retângulo ganham destaque no currículo.

As mudanças no âmbito educacional tendem a serem conservadoras. E a estruturação daquilo que é ensinado pelo docente gradativamente sofre influência de várias vertentes, sejam elas sociais, econômicas, políticas ou pedagógicas. E este tipo de mudança tende a aparecer nos livros didáticos. Sendo assim, conteúdos de Trigonometria outrora presentes nos livros de matemática do ensino médio podem ser futuramente parte de uma galeria de obras mais específicas e apenas vivenciados no âmbito do ensino superior.

Capítulo 5

Currículo de Trigonometria no Guia PNLD 2018 - Matemática

De acordo com Cecília Cassiano [15] (p. 34),

> [...] o livro didático um elemento prescritivo chave do currículo, [...] seu uso, que se concretiza na prática da sala de aula, dá-se com sujeitos específicos, em dadas condições sócio históricas e ao lado de outros recursos (a lousa e o giz, por exemplo), tendo então esse uso a potência de subverter o prescrito, mas o faz valendo-se do próprio material, isto é, de uma condição objetiva que está dada [...]

A autora frisa que o livro didático é uma ferramenta necessária à estruturação do currículo escolar. Sendo assim, entendemos o livro como um instrumento uniformizador para a prática docente, servindo ele de elo entre a ciência e a sociedade. Um fator de transversalidade que o educador pode ter como auxílio à execução de suas atividades. Assim, o livro didático é um catalisador sobre o saber a ser estudado e responsável pela estruturação e organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade.

No nosso país, a partir de 1985, coube ao **Plano Nacional do Livro Didático (PNLD)** configurar qualidade às obras. O Ministério da Educação publica então o Guia de Livros Didáticos para Matemática - PNLD, elencando ali as diversas competências e capacidades que os livros didáticos utilizados nos níveis de ensino básico deveriam propiciar.

O documento divide a matemática em quatro partes, sejam elas: (a) números e operações; (b) funções; (c) geometria; (d) análise de dados e probabilidade. Conforme vimos no PCN, a Trigonometria encontra-se concatenada em assuntos relacionados a geometria e também relacionados com os estudos das funções.

Dito isto, chegamos a este capítulo com a tarefa de verificar as propostas para o currículo e ensino da Trigonometria nos livros didáticos que são disponibilizados no Guia PNLD 2018 - Matemática. Estes contemplam o triênio 2019, 2020 e 2021.

Em suma, no Guia PNLD 2018 [10] (p. 8):

> [...] estão presentes as resenhas das oito coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas para o Ensino Médio. Essas resenhas possuem estrutura uniforme: contêm tanto a descrição e o sumário de cada uma das obras, como a avaliação das principais características delas.

A partir da resenha de cada livro didático de matemática disponibilizados no Guia PNLD 2018 - Matemática fazemos nosso levantamento sobre os conteúdos de Trigonometria que ali são abordados. Dando destaque a observações com respeito as séries do ensino médio que o PNLD propõe para o estudo da Trigonometria, em que bimestre pode ser trabalhado e ainda pontuamos o quão denso os conteúdos estão presentes em tais obras de referência.

5.1 Livro 1

A obra considerada aqui é **MATEMÁTICA - CONTEXTO E APLICAÇÕES**, 3ª edição, do autor Luiz Roberto Dante, publicada pela editora Ática em 2016.

Na obra, trabalham-se os conteúdos de Trigonometria da seguinte maneira:

1º Ano	
Capítulo	***Unidade 4***
8	Trigonometria no triângulo retângulo: semelhança, teorema de Tales, relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.
2º Ano	
Capítulo	***Unidade 1***
1	Trigonometria em triângulos quaisquer: seno, cosseno, lei dos senos, lei dos cossenos.
2	Conceitos trigonométricos básicos: arcos e ângulos, circunferência trigonométrica, arcos côngruos.
3	Funções trigonométricas: ideias de seno, cosseno e tangente; redução ao 1º quadrante, noção geométrica de tangente; função seno; função cosseno; senoide.
3º Ano	
Capítulo	***Unidade 4***
10	Relações e equações trigonométricas: identidades, fórmulas de adição, do arco duplo e do arco metade, equações trigonométricas.

Tabela 5.1: Livro 1: Matemática - Contexto e Aplicações
Fonte: [10] (p. 44-46)

A partir do sumário desta obra, nota-se uma ampla abordagem da Trigonometria. Esta coleção contém três volumes (cada qual para uma respectiva série do ensino médio), eles estão divididos em quatro unidades bimestrais, e em todos os bimestres contemplam assuntos relacionados a Trigonometria.

Observa-se que no primeiro ano do ensino médio (volume 1) a obra de Dante propõe que seja trabalhada na 4^{o} unidade bimestral um capítulo com os conceitos introdutórios da Trigonometria. Em seguida, de acordo com a obra, nota-se que uma maior gama de conteúdos referentes a Trigonometria são abordados no segundo ano do ensino médio (volume 2). Possuindo um total de três capítulos, em que a Trigonometria é proposta para o estudo de toda a primeira unidade bimestral. E por fim, numa das raras ocorrências, *Matemática - Contexto e Aplicações*, propõe um aprofundamento do estudo da Trigonometria ao trazer no terceiro ano do ensino médio (volume 3), na 4^{a} unidade bimestral, um capítulo sobre identidades e equações trigonométricas.

A abordagem dos conteúdos de Trigonometria, de acordo com o Guia PNLD menciona que: "As funções seno e cosseno, por sua vez, são sistematizadas e apresentadas como modelos aproximados de fenômenos periódicos, o que contribui para a atribuição de significados a ambas." [10] (p. 47)

De acordo com nossa observação desta obra, entendemos que ela se destaca no quesito do estudo da Trigonometria. Fazendo com que o conteúdo seja abordado durante todo o ensino médio (três séries regulares), além de privilegiar, a partir de seu sumário, todos os tópicos que levantamos no apêndice deste texto.

Se atentarmos à proposta das OCEM vemos que Dante vai além e contempla um currículo de Trigonometria mais extenso. O autor traz em sua obra os conteúdos das fórmulas de adição e do arco duplo e do arco da metade, sendo que as OCEM sugerem que o docente não trabalhe tal conteúdo [4] (p. 74).

5.2 Livro 2

A obra considerada agora é **QUADRANTE - MATEMÁTICA**, 1^{a} edição, dos autores Diego Prestes e Eduardo Chavant, publicada pela editora SM, em 2016.

Nesta obra os conteúdos de Trigonometria são assim trabalhados:

1º Ano	
Capítulo	***Unidade 4***
10	Teorema de Tales – trigonometria: relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo; seno, cosseno, tangente: definições, inter-relações, valores, de ângulos notáveis; relações trigonométricas em um triângulo qualquer: Lei dos senos, Lei dos cossenos; área de um triângulo; tamanho aparente dos astros; Curva de Koch.
2º Ano	
Capítulo	***Unidade 1***
1	Circunferência: medida e comprimento de um arco de circunferência; circunferência trigonométrica: arcos congruentes, 1ª determinação positiva; seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico; ângulos notáveis; redução ao 1º quadrante; funções trigonométricas: seno, cosseno, dos tipos $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$; equações trigonométricas; ondas sonoras.

Tabela 5.2: Livro 2: Quadrante - Matemática
Fonte: [10] (p. 53)

A referida coleção possui três volumes (um para cada série no ensino médio), ela se dividem em 4 unidades bimestrais. Sendo que o volume 3 não apresenta conteúdos relacionados a Trigonometria.

É observado nesta obra que o primeiro ano do ensino médio (volume 1) dedica num único capítulo ao que consideramos uma vasta abordagem do estudo da Trigonometria em sua 4ª unidade bimestral. E no segundo ano do ensino médio (volume 2), o livro *Quadrante - Matemática* dedica toda a primeira unidade bimestral para complementação do estudo da Trigonometria.

No guia PNLD, a análise dessa obra cita que:

> Na obra, são focalizadas apenas as funções trigonométricas seno e cosseno. Mas, no Manual do Professor, indica-se a possibilidade de exploração das demais funções trigonométricas. Tal abordagem permite tratar, de modo adequado, as funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ e do efeito da variação dos parâmetros nos gráficos dessas funções. [10] (p. 56)

Em nossa análise desta obra, observa-se que o professor tende a trabalhar a Trigonometria nos momentos finais do primeiro ano de ensino médio e nos momentos iniciais no segundo ano do ensino médio. Ela se alinha com a proposta da OCEM ao contemplar apenas os conteúdos de função seno e cosseno no estudo dos gráficos. A abordagem ocorre maneira sucinta, mas contemplando os tópicos clássicos no estudo da Trigonometria quando comparado ao que é apresentado no apêndice desta pesquisa.

5.3 Livro 3

Pontuamos a seguir a obra **MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES**, 9ª edição, dos autores: David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo. Publicada pela editora Saraiva Educação, em 2016.

Os conteúdos de Trigonometria são trabalhados da seguinte maneira:

1º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
11	Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente, ângulos notáveis.
2º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
1	Circunferência: arcos e ângulos, medida de comprimento de arco, unidades de medidas de arcos e de ângulos, circunferência trigonométrica; simetria.
2	Razões na circunferência trigonométrica: seno, cosseno, tangente; relações entre seno, cosseno e tangente, arcos complementares.
3	Trigonometria em triângulos quaisquer: lei dos senos, lei dos cossenos.
4	Funções trigonométricas: arcos côngruos, funções periódicas, função seno, função cosseno.

Tabela 5.3: Livro 3: Matemática: Ciências e Aplicações
Fonte: [10] (p. 61)

Verifica-se que este compêndio possui três volumes, um para cada série do ensino médio. Do qual os volumes 1 e 2 abordam conteúdos relacionados a Trigonometria e o volume 3 não traz conteúdo nesse sentido. Pontuamos que nele não há divisões em unidades bimestrais.

Para o primeiro ano do ensino médio (volume 1) é proposto num dos capítulos finais o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, bem como todas as proposições mais gerais e básicas. Já no segundo ano do ensino médio (volume 2), os primeiros quatro capítulos (que podem muito bem compreender uma unidade bimestral) de *Matemática: Ciências e Aplicações* aborda os demais conteúdos que seus autores julgam ser necessários ao estudo da Trigonometria.

A relação entre docente e livro didático pode dirimir a postura pedagógica em frente a um conteúdo. Nesta obra não temos a divisão por unidades bimestrais, o que sugere autonomia por parte do professor em trabalhar de maneira mais livre os conteúdos da Trigonometria, visando otimizar o tempo escolar e quem sabe assim maximizar o processo de ensino e aprendizagem.

5.4 Livro 4

Consideramos agora a obra **MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO**, 1ª edição, das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, publicada pela editora Saraiva Educação, em 2016.

Nesta obra, trabalham-se os conteúdos de Trigonometria da seguinte maneira:

1º Ano	
Capítulo	***Unidade 4***
10	Trigonometria do triângulo retângulo: teoremas de Pitágoras e de Tales; seno, cosseno e tangente.
11	Leis dos senos e dos cossenos.
2º Ano	
Capítulo	***Unidade 1***
1	Trigonometria: ângulos e arcos de circunferência, ângulo central, medida de arcos, círculo trigonométrico.
2	Funções seno, cosseno e tangente: variação, gráfico, conjunto imagem; relações trigonométricas.
3	Equações e inequações trigonométricas; funções trigonométricas: soma e diferença de arcos, arco duplo.
3º Ano	
Capítulo	***Unidade 4***
11	Funções trigonométricas: história, círculo trigonométrico, redução ao 1º quadrante, arcos complementares e suplementares.

Tabela 5.4: Livro 4: Matemática Para Compreender o Mundo
Fonte: [10] (p. 68, 69)

Nota-se uma relevante abordagem da Trigonometria por parte das autoras desta obra. Apresenta-se em três volumes, cada qual dividido em quatro unidades bimestrais. E em todas as séries do ensino médio há capítulos abordando conteúdo da Trigonometria.

Para o primeiro ano (volume 1), a 4ª unidade bimestral é condensada com o estudo dos conceitos básicos e introdutórios da Trigonometria. Seguindo com o volume 2 (segundo ano), a primeira unidade é toda consagrada ao estudo da Trigonometria, o que complementa os tópicos do ano anterior. E finalizando, temos no terceiro ano (volume 3) uma retomada de Trigonometria na 4ª unidade bimestral, aprofundando a abordagem com o estudo das identidades e equações trigonométricas.

O Guia PNLD 2018 analisa que *Matemática Para Compreender o Mundo* propõe:

> Com base em situações não convencionais, utilizam-se tabelas e propriedades das curvas que representam cada tipo de função, o que enriquece a atribuição de significados a esse conceito matemático. Particularmente no caso das funções trigonométricas, destacam-se as representações gráficas de inequações, com apoio no círculo trigonométrico. [10] (p. 71)

Sendo assim, esta obra procura privilegiar as propostas que os PCN+ trazem, no que tange a estudo da Trigonometria em seus aspectos mais práticos e cotidianos, relacionando-os com a compreensão e interpretação gráfica das funções trigonométricas.

5.5 Livro 5

Seguimos agora para a obra **MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA**, 2ª edição, de 2016, do autor Rodrigo Balestri, com publicação pela editora Leya.

Os conteúdos de Trigonometria desta obra são a seguir discorridos:

1º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
8	Trigonometria: Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo; distância entre dois pontos no plano; relações trigonométricas: seno, cosseno, tangente, identidades, tabela trigonométricas, ângulos notáveis; Lei dos Senos; Lei dos Cossenos – área de um triângulo.
2º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
1	Circunferência trigonométrica: conceitos básicos, comprimento de arco, medida angular de um arco, seno e cosseno, redução ao 1º quadrante, tangente.
2	Função seno: gráfico, funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$; função cosseno: gráfico; seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de arcos; identidades trigonométricas; equações trigonométricas.

Tabela 5.5: Livro 5: Matemática: Interação e Tecnologia
Fonte: [10] (p. 75)

Neste livro, o autor divide sua obra em três volumes, cada qual para um respectivo ano do ensino médio. As unidades bimestrais estão ausentes e o volume concernente ao terceiro ano do ensino médio (volume 3) não possui conteúdos relacionados com a Trigonometria.

Assim, no primeiro ano do ensino médio (volume 1), em seu capítulo final, a obra aborda todos os tópicos básicos e também mais clássicos sobre Trigonometria. Esta perspectiva sugere que seja na quarta unidade bimestral que o docente trabalhe este capítulo. E no segundo ano do ensino médio (volume 2), os capítulos iniciais privilegiam o assunto da Trigonometria, o que lança a sugestão de vivenciar tais conteúdos na primeira unidade bimestral.

Em nossa análise consideramos a proposta curricular desta obra satisfatória no que tange aos assuntos da Trigonometria, pois cumpre bem aos anseios das propostas dos PCN+ e das OCEM.

5.6 Livro 6

Adentramos na obra **#CONTATO MATEMÁTICA**, 1ª edição, de 2016, dos autores Joamir Souza e Jacqueline Garcia, publicado pela editora FTD.

Os conteúdos de Trigonometria aparecem de acordo coma tabela a seguir:

<table>
<tr><th colspan="2">1º Ano</th></tr>
<tr><th>Capítulo</th><th>Não há divisão em unidades bimestrais</th></tr>
<tr><td>9</td><td>Teorema de Tales; teorema de Pitágoras; trigonometria no triângulo retângulo;
seno, cosseno e tangente, ângulos notáveis, tabela trigonométrica;
lei dos senos, lei dos cossenos, área de um triângulo.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2º Ano</th></tr>
<tr><th>Capítulo</th><th>Não há divisão em unidades bimestrais</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Trigonometria na circunferência: arcos, medidas de arco, circunferência
trigonométrica, ângulos côngruos; redução ao primeiro quadrante;
funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, transformações;
relações e equações trigonométricas.</td></tr>
</table>

Tabela 5.6: Livro 6: #Contato Matemática
Fonte: [10] (p. 82, 83)

Observando-se o sumário, bem como os tópicos apresentados acima, temos aqui uma das obras mais sucintas do Guia PNLD 2018 - Matemática no que diz respeito ao trato da Trigonometria com a qual o docente vai se deparar em termos de sugestões em como subsidiar seu trabalho em sala de aula.

#Contato Matemática está compreendida em três volumes (um para cada ano do ensino médio), sem dividir os capítulos em unidades bimestrais. Nota-se que o capítulo final no livro do primeiro ano (volume 1) aborda os conceitos iniciais da Trigonometria, sugerindo sua abordagem no quarto bimestre letivo e que no livro do segundo ano (volume 2), em seu capítulo inicial, o que sugere ser vivenciado no primeiro bimestre letivo, busca-se estruturar os demais tópicos relacionados a Trigonometria. Observa-se que não há uma proposta de estudo de Trigonometria no volume 3 desta coleção (terceiro ano do ensino médio).

5.7 Livro 7

Seguimos com a obra **MATEMÁTICA - PAIVA**, 3ª edição, 2016, de Manoel Paiva, publicado pela editora Moderna. Os conteúdos de Trigonometria aparecem na tabela abaixo:

1º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
3	Geometria: notas históricas; polígono: definição, convexo, regular; triângulo: classificação, elementos, ângulos, propriedades; segmentos proporcionais; Teorema de Tales; semelhança de figuras planas; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo.
4	Circunferência e círculo: arcos e cordas; posições relativas: entre reta e circunferência; entre duas circunferências. Circunferência: ângulos, perímetro; área: unidades, retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, hexágono regular, trapézio, losango, círculo, setor e coroa circular.
2º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
2	Trigonometria no triângulo retângulo: fatos históricos, razões trigonométricas, relações entre seno, cosseno e tangente, ângulos notáveis.
3	Circunferência trigonométrica: radiano, transformações de unidade, arcos trigonométricos, arcos côngruos, relação com os números reais; simetrias, seno e cosseno de um arco trigonométrico, variação de sinal do seno e cosseno, redução ao 1º quadrante, relação fundamental da trigonometria, equações trigonométricas
4	Tangente de um arco trigonométrico: definição, variação, como razão do seno pelo cosseno, redução ao 1º quadrante; equações trigonométricas; secante, cossecante, cotangente: seno, cosseno e tangente: da soma de arcos, do arco duplo.
5	Funções trigonométricas: definições, gráfico do seno e do cosseno, período; movimentos periódicos: definição, relação com as funções trigonométricas; movimento circular e movimento periódico – resolução de triângulos; Lei dos senos e dos cossenos; área de um triângulo.

Tabela 5.7: Livro 7: Matemática - Paiva
Fonte: [10] (p. 89, 90)

Nesta obra de Manoel Paiva, no que diz respeito a conteúdos de Trigonometria, bem como nos seus assuntos co-relatos tais como geometria e funções, temos uma das maiores abordagens dos livros que compõem as coleções do Guia do PNLD - Matemática 2018.

O compêndio é estruturado em três volumes, cada qual relacionado com uma série letiva do ensino médio regular. Volume dos quais em sua terceira parte não contempla conteúdos da Trigonometria. E ainda, observa-se que não há divisão em unidades bimestrais.

Assim, o primeiro volume, que trata da primeira série do ensino médio dedica dois capítulos para o estudo da Trigonometria, ambos abordando conceitos inicias da Trigonometria, interrelacionando-os com a geometria plana. Já o volume 2, para o segundo ano do ensino médio, discorre com quatro capítulos e com isso abrangem a maior gama de conteúdos da Trigonometria.

Vejamos o comentário do Guia PNLD 2018 sobre esta coleção:

> [...] a trigonometria é abordada em excesso. Além disso, ao trabalhar-se a trigonometria no triângulo retângulo, as situações, mesmo as que envolvem contextos sociais e matemáticos, se reduzem ao cálculo de distâncias e de comprimento de segmentos desconhecidos, o que não é pertinente. [10] (p. 92)

Como o próprio documento comenta, há um excesso de conteúdos neste livro. Isto não significa necessariamente que seja algo ruim. Mas vai merecer um cuidado especial por parte do docente, visto que muitos assuntos podem se apresentar de maneira desconexa de aplicações mais voltadas as realidades cotidianas do aluno. Em contra partida, permite ao docente visitar conteúdos mais densos e trabalhar uma Trigonometria mais voltada ao aluno que intente ingressar no curso superior de áreas das ciências exatas como em cursos de engenharia.

5.8 Livro 8

E findamos nossa exposição dos conteúdos de Trigonometria nas obras do Guia PNLD 2018 com o livro **CONEXÕES COM A MATEMÁTICA**, 3ª edição, do autor Fábio Martins de Leonardo, publicado pela editora Moderna em 2016.

Sejam seus conteúdos de Trigonometria observados na tabela a seguir:

1º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
11	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente; relação fundamental da trigonometria; seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis; tabela trigonométrica.
2º Ano	
Capítulo	***Não há divisão em unidades bimestrais***
1	Arcos de circunferência: comprimento, medida angular, grau e radiano; ciclo trigonométrico; seno, cosseno e tangente; relação fundamental da trigonometria; equações trigonométricas.
2	Funções periódicas; ciclo trigonométrico; função seno; função cosseno; função tangente; construção de gráficos.
3	Trigonometria em um triângulo qualquer: lei dos senos, lei dos cossenos; secante, cosseno e cotangente; equações trigonométricas; adição de arcos.

Tabela 5.8: Livro 8: Conexões Com a Matemática
Fonte: [10] (p. 96, 97)

Esta derradeira coleção analisada possui três volumes, cada qual destinada para uma série do ensino médio. Na obra não apresenta divisões em unidades bimestrais. E em seu volume 3 não contempla assuntos relacionados à Trigonometria.

De acordo com o sumário apresentado acima, no primeiro ano letivo do ensino médio (volume 1) a obra é finalizada com um capítulo sobre o estudo dos conceitos básicos e iniciais da Trigonometria. Isto sugere que tais conteúdos sejam trabalhados na última unidade bimestral. Já no segundo volume, concernente ao segundo ano do ensino médio, de acordo com nossa estruturação de tópicos no apêndice desta pesquisa, a obra contempla, nos três capítulos iniciais, toda gama de conteúdos que estão relacionados com a Trigonometria, o que sugere que sejam vivenciados no bimestre inicial do ano letivo.

Em linhas gerais, *Conexões Com a Matemática* propõe que:

> O estudo das noções e representações das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmicas e trigonométricas, assim como o das sequências numéricas e da matemática financeira, são desenvolvidos de modo equilibrado. Em geral, os conteúdos matemáticos são articulados entre si, com situações práticas e com outras áreas do conhecimento. [10] (p. 100)

Desta feita, elencamos como cada obra do Guia PNLD 2018 - Matemática aborda o currículo concernente à Trigonometria, bem como também destacamos as séries letivas em que estes tópicos são propostos para a desenvolvimento do trabalho docente. E ainda sugerimos como alguns livros organizam a unidade bimestral para um dado assunto.

E tendo em vista todo o levantamento feito neste capítulo e comparando com as sugestões e propostas curriculares contidas nos documentos oficiais citados no capítulo anterior, julgamos que todas as obras do Guia PNLD 2018 - Matemática cumprem de maneira satisfatória com um currículo básico de Trigonometria.

Capítulo 6

Trigonometria nas Diretrizes do Novo ENEM

6.1 Objetivo do ENEM

Conforme relatado pelo **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)**, no ano de 1998, mais precisamente no dia 20 de agosto, 115.575 participantes estiveram na primeira edição do **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**, criado no intuito de avaliar o desempenho dos estudantes ao final do ensino básico e direcionar políticas de melhorias na Educação Básica.

Após 10 anos, acompanhados de uma vasta expansão no que diz respeito a acessibilidade e abrangência no território brasileiro, o ENEM passa a ter relevância na estrutura do ensino. "Se tornaria o processo nacional de seleção para ingresso na educação superior e certificação do ensino médio" [11].

Universidades atrelam a nota do exame como porta de entrada aos seus cursos a partir da criação do **Sistema de Seleção Unificada (SISU)**. Assim o ENEM muda o formato e induz uma reestruturação dos currículos de ensino médio.

Para cumprir tal objetivo, o MEC/INEP publica a **Matriz de Referência ENEM**. Documento que contém os *Eixos Cognitivos* que são comuns a todas as áreas do conhecimento, a saber:

I. Dominar linguagens (DL);

II. Compreender fenômenos (CF);

III. Enfrentar situações-problema (SP);

IV. Construir argumentação (CA);

V. Elaborar propostas (EP).

Assim, nesta seção destacamos aquelas áreas de competências e habilidades que o novo ENEM adota a partir de sua *Matriz de Referência - Matemática e Suas Tecnologias* que vão influenciar de alguma maneira o currículo da Trigonometria. Posteriormente fazemos uma relação entre os conteúdos clássicos e as questões de Trigonometria que caíram nos exames do novo ENEM entre 2009 e 2019, buscando refletir sobre quais conteúdos estão sendo privilegiados e quais conteúdos não estejam, porventura, sendo contemplados nesta importante prova nacional.

6.2 Áreas de Competências e Habilidades

6.2.1 Introdução

A partir das áreas de conhecimento acima discriminadas, a Matriz de Referência do ENEM delimita *Áreas de Competência* e *Habilidades* a serem adquiridas pelo estudante ao término do ensino médio. Aborda-se agora a *Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias*, que está dividida em 7 (sete) competências de áreas e 30 (trinta) habilidades, sendo que as habilidades H1, H2, H3, H4 e H5 compõem a competência de área 1; as habilidades seguintes H6, H7, H8 e H9 compõem a competência de área 2; as habilidades H10, H11, H12, H13 e H14 compõem a competência de área 3; as habilidades H15, H16, H17 e H18 compõem a competência de área 4; as habilidades H18, H19, H20, H21, H22 e H23 compõem a competência de área 5; as habilidades H24, H25 e H26 compõem a competência de área 6; e, as habilidades H27, H28, H29 e H30 compõem a competência de área 7.

No recorte que fazemos dando destaque à Trigonometria, discorre-se em pontuar todas as sete áreas de competência e mensurar algumas habilidades que julgamos relevantes, de forma direta ou por inferência, na contribuição da construção do currículo de Trigonometria. Devido às fortes relações com que se apresentaram, a competência de área 3 e competência de área 4 são abordadas em conjunto, pois nota-se que tais competências estão atreladas ao estudo da geometria e da álgebra. Do mesmo modo, as competência de área 5 e competência de área 6, são englobadas numa única seção, tendo em vista que ambas tratam da manipulação e modelagem para um conteúdo matemático. Fazemos assim, pois julgamos não haver dicotomia na abordagem que o professor pode dar em ambos os casos.

E, visando um melhor esclarecimento, apresentamos alguns exemplos de questões que podem ser base para se atingir as competências de áreas sugeridas pela *Matriz de Referência - Matemática e Suas Tecnologias* do ENEM.

6.2.2 Competência de Área 1

Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

$\vdots$

H4: Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos. [12]

Nesta primeira área de competência, o docente pode observar que o ensino da Trigonometria vem atrelado à construção de significados para os números, uma vez que, os valores numéricos das razões trigonométricas (principalmente o valores mais clássicos dos ângulos notáveis) estão atrelados ao entendimento de números reais e seus subconjuntos.

Por exemplo, ao se calcular o valor do seno do ângulo de 90°, temos como resposta 1, que é um número *natural*; e seguindo no ciclo trigonométrico, o seno do ângulo de 270° vale -1, ou seja, é um número *inteiro*; o seno do ângulo de 30° é numericamente igual a $\frac{1}{2}$, que é um número *racional*; e ainda o valor do seno de 60° vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$, portanto um número *irracional*. Logo, no estudo da Trigonometria, em seus diversos tópicos sobre as razões trigonométricas do ângulos notáveis e suas aplicações, cumprem a proposta de subsidiar o docente em trabalhar os conjuntos numéricos.

Com isso, as habilidades destacadas de reconhecer contextos e significados de tais números, bem como a habilidade de avaliar os resultados e propor intervenções são caminhos inerentes no estudo de importantes tópicos da Trigonometria.

6.2.3 Competência de Área 2

Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. [12]

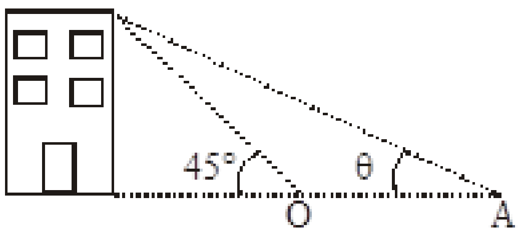
Tem-se na competência de área 2, uma proposta para que o estudo da Trigonometria ocorra engendrado ao ensino da Geometria. Como sugestão para trabalhar esta relação, o docente pode abordar a construção da representação gráfica cartesiana presente nas funções trigonométricas - ilustramos nos exemplos 13 e 15 do capítulo 4 algumas dessas representações -, nestas representações gráficas podem ser também observadas os fenômenos ondulatórios e de expressões relacionadas a movimentos de natureza harmônica mais simples, uma vez que as habilidades de interpretação e representação são amplamente estudadas na abordagem do ciclo trigonométrico.

E ainda como exemplo, o docente pode se valer do uso das figuras geométricas planas regulares, tais como triângulo equilátero e quadrado, na intenção de demonstrar os valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis como se exemplifica no apêndice deste texto.

De acordo com a *Matriz de Referência - Matemática e Suas Tecnologias* do ENEM, o uso do conhecimento trigonométrico deve ser uma ferramenta do trabalho docente que serve como ponte entre a compreensão da realidade e as abstrações com a qual o pensamento matemático exigem. Nesse sentido deve ser algo que o docente provoque em seus alunos, modelando o conhecimento e propiciando aprendizado.

Vejamos um exemplo simples em que essa relação pode aparecer:

Exemplo 17 *(UNIFOR CE/2000) Na figura abaixo tem-se um observador O, que vê o topo de um prédio sob um ângulo de* 45°. *A partir desse ponto, afastando-se do prédio 8 metros, ele atinge o ponto A, de onde passa a ver o topo do mesmo prédio sob um ângulo* θ *tal que* $\operatorname{cotg}(\theta) = \frac{7}{6}$.



A altura do prédio, em metros, é:

(a) $30\sqrt{3}$

(b) 48

(c) $20\sqrt{3}$

(d) 24

(e) $10\sqrt{3}$

6.2.4 Competência de Área 3 e Competência de Área 4

> **Competência de área 3:** Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
>
> **H10:** Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
>
> ⋮
>
> **H14:** Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas. [12]

Nota-se aqui que os conceitos de medida de ângulo devem ser observados pelo docente nesta competência de área 3. Pois, as transformações entre as unidades de medida de ângulos (de graus para radianos, e vice-versa) podem estar inclusas no trabalho do professor com o objetivo de mediar a compreensão do aluno a respeito de realidades cotidianas, bem como solucionar problemas. Esse tipo de proposta já foi referendada e exemplificada em nossa abordagem sobre o PCN+ no capítulo 4, quando comentamos sobre as áreas estruturadas para Trigonometria na seção sobre representação e comunicação.

> **Competência de área 4:** Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
>
> **H15:** Identificar a relação de dependência entre grandezas. [12]
>
> ⋮

Tem-se nessa competência de área 4 algo semelhante ao que foi comentado no item anterior, mais precisamente no que diz respeito à manipulação das transformações trigonométricas. Contudo, a noção a ser destacada pelo docente em sua abordagem tem a ver com o tratamento dado a noção de *variação* entre as grandezas, enquanto que a outra perspectiva comentada era construir o *entendimento da grandeza* em si. Estas transformações englobam identificar as variações de grandezas e entender a relação de dependência que as funções trigonométricas possuem.

Assim, as habilidades de se identificar tais grandezas e avaliar sua aplicabilidade para intervir em realidades concretas são objetivos de se ter no currículo os estudos da Trigonometria.

6.2.5 Competência de Área 5 e Competência de Área 6

> **Competência de área 5:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
>
> **H20:** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
>
> ⋮
>
> **H22:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. [12]
>
> ⋮

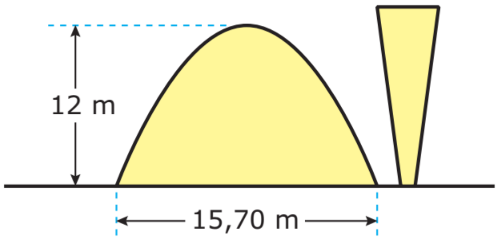
Para esta competência de área 5, o destaque que a matriz de referência propõe é para que o docente construa, a partir de situações cotidianas, habilidades de modelagem matemática. Ou seja, traduzir em forma de representações e símbolos algébricos e também através de construções gráficas, questões das situações científicas e sociais. Dada a relação existente entre o plano cartesiano e a circunferência, que dão origem ao ciclo trigonométrico, pontuamos a importância de ser trabalhado pelo professor esta competência no que tange as representações algébricas através do estudo das diversas funções circulares (seno, cosseno e tangente), algumas delas exemplificadas no capítulo 4 desta pesquisa.

> **Competência de área 6:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
>
> **H24:** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
>
> ⋮
>
> **H26:** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. [12]

Aborda-se nesta competência de área 6 algo muito próximo ao que já foi mencionado no item antecedente, pois também visa auferir uma análise interpretativa de gráficos construídos a partir de plano cartesiano. Com isso, a habilidade de analisar as informações no estudo dos gráficos de funções trigonométricas pode ser destacada no trato docente com o conteúdo.

Vejamos um exemplo em que o professor pode usar a modelagem em sua resolução:

Exemplo 18 *(FJP-MG–2.010) Observe a seguinte figura que lembra um dos mais bonitos cartões postais de Belo Horizonte.*



Parece que o arquiteto Oscar Niemeyer se inspirou no arco de uma senoide para fazer a fachada da Igreja da Pampulha. Se assim foi, das funções a seguir, a que mais se aproxima da função que o inspirou é:

(a) $f(x) = 12 \cdot \text{sen}(5x)$

(b) $f(x) = 12 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x}{5}\right)$

(c) $f(x) = 12 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{15,70x}{\pi}\right)$

(d) $f(x) = 12 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{15,70x}{12}\right)$

6.2.6 Competência de Área 7

Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

⋮

H30: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade. [12]

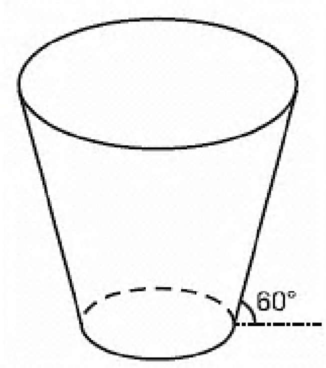
Nesta derradeira competência, temos a única área que, de acordo com a explanação da *Matriz de Referência - Matemática e Suas Tecnologias* do ENEM, não propõe para o docente uma abordagem ou relação com algum conteúdo específico da Trigonometria. Esta área preconiza a Análise Combinatória e Probabilidades.

6.3 Trigonometria nas Questões do Novo ENEM

Com o objetivo de apontar para o docente a relevância do currículo de Trigonometria no novo ENEM e quais os conteúdos dela que estão sendo abordados nas questões do exame em seu formato atual entre 2009 e 2019, fazemos aqui uma análise de tais quesitos. Apresentamos seus enunciados, destacamos uma solução para tal item e fazemos uma classificação (fácil, média ou difícil) quanto ao nível de complexidade da questão, usando como critério a quantidade de conteúdos abordados para se chegar na resposta.

6.3.1 Questões

1. (ENEM - 2009) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.



Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}\,m$ e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo. Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de:

(a) $12\pi m^2$

(b) $108\pi m^2$

(c) $(12\pi + 2\sqrt{3})^2\pi m^2$

(d) $300\pi m^2$

(e) $(24\pi + 2\sqrt{3})^2\pi m^2$

Uma solução:

(i) Vamos idealizar uma divisão deste reservatório da seguinte maneira:
- Dividimos a base em duas, cada parte medindo $2\sqrt{3}\,m$;
- Sobra então duas partes na circunferência de cima, que chamaremos de x cada uma;

(ii) Ligando a extremidade da circunferência de cima com a extremidade da base, formamos um triângulo retângulo, de altura 12 m (cateto adjacente);

(iii) Se o ângulo de 60^{o} está em relação ao solo, temos que o ângulo oposto ao cateto x é 30^{o};

(iv) Calculamos então:
$\text{tg}(30^{\text{o}}) = \dfrac{x}{12} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{12} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$;

(v) Temos que o raio da circunferência é dado por:
$r = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \Rightarrow r = 6\sqrt{3}\,m$;

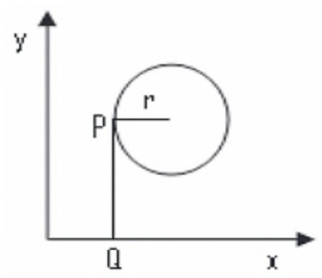
(vi) Assim, a área da circunferência é expressa por:
$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow r = 108\pi m^2$. Logo a alternativa assinalada é a B.

Comentário:

Na presente resolução, o destaque que o docente vai dar à Trigonometria está no tópico das razões trigonométricas e também no tópico de ângulos notáveis, atrelados ao estudo da geometria euclidiana plana no cálculo das áreas. Como são usados dois tópicos da Trigonometria neste item, classificamo-lo como nível médio.

---

2. (ENEM - 2009) Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

(a) $r \cdot \left(1 - \operatorname{sen} \frac{d}{r}\right)$

(b) $r \cdot \left(1 - \cos \frac{d}{r}\right)$

(c) $r \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{d}{r}\right)$

(d) $r \cdot \operatorname{sen} \frac{d}{r}$

(e) $r \cdot \cos \frac{d}{r}$

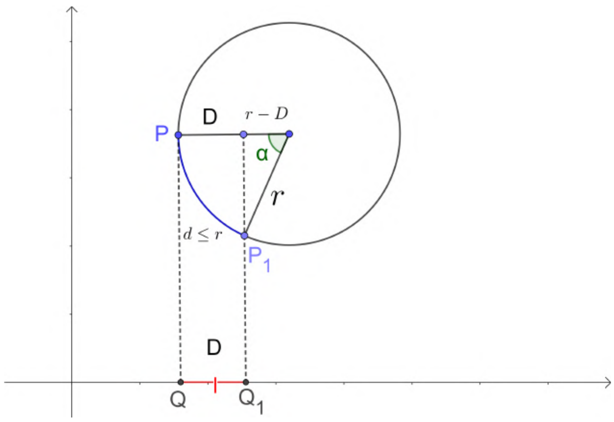
Uma solução:

(i) O ângulo, em radianos, é definido como a razão entre a medida do comprimento do arco e o raio da circunferência;

(ii) Se o ponto P percorre uma distância $d \leq r$, o ângulo será menor que 1 radiano, portanto menor que 60°, menor que a quarta parte da volta;

(iii) Marcando qualquer ponto na circunferência abaixo da posição inicial de P, antes de completar a quarta parte da volta, tem-se que a sua projeção no eixo x é igual à diferença do raio com o produto do raio pelo cosseno do ângulo central;

(iv) Este ângulo tem seu valor expresso em radianos por $\alpha = \dfrac{d}{r}$;



(v) No triângulo retângulo então formado, temos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{r-D}{r} \Rightarrow r\cdot\cos(\alpha) = r-D \Rightarrow D = r - r\cdot\cos(\alpha) \Rightarrow D = r\cdot(1-\cos(\alpha))$$

(vi) Substituindo $\alpha = \dfrac{d}{r}$ em (iii) a distância percorrida pelo ponto P no eixo x é de $r - r\cdot\cos\left(\dfrac{d}{r}\right)$ ou $r\left(1-\cos\dfrac{d}{r}\right)$. Assim, marca-se a letra B.

Comentário:

Nesta resolução, o docente pode identificar os tópicos de comprimento do arco, transformação entre as unidades de medida graus e radianos, as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Devido a complexidade em concatenar todos estes assuntos da Trigonometria classificamos esta questão como difícil.

---

3. (ENEM - 2010) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5.865}{1+0,15\times\cos(0,06\cdot t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

(a) $12.765\,km$.
(b) $12.000\,km$.
(c) $11.730\,km$.
(d) $10.965\,km$.
(e) $5.865\,km$.

Um solução:

(i) Note que o valor do cosseno pertence ao intervalo $-1 \leq \cos(0,06 \cdot t) \leq 1$;

(ii) O valor máximo ou apogeu é para o menor valor possível do cosseno, ou seja, para $\cos(0,06 \cdot t) = -1$, logo teremos: $r(t) = \dfrac{5.865}{1+0,15\cdot(-1)} = \dfrac{5.865}{0,85} = 6.900$;

(iii) O valor mínimo ou perigeu é para o maior valor possível do cosseno, ou seja, para $\cos(0,06 \cdot t) = 1$, logo teremos: $r(t) = \dfrac{5.865}{1+0,15\cdot(1)} = \dfrac{5.865}{1,85} = 5.100$;

(iv) Logo, o valor da soma S é dado por: $6.900 + 5.100 = 12.000\,km$. Assim, marca-se a letra B.

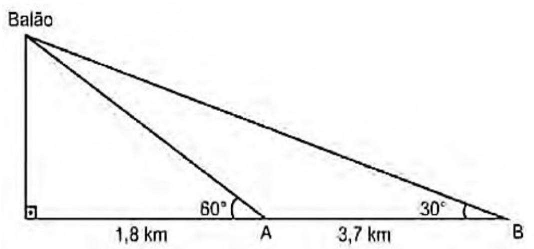
Comentário:

Na resolução desta questão o professor vai abordar um conceito importante da função trigonométrica que é o intervalo da imagem da função cosseno compreendida no intervalo $[-1,1]$. Como é usado apenas um tópico da Trigonometria classificamos esse quesito como uma questão fácil.

---

4. (ENEM - 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

   Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a $1,8\,km$ da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de $60°$; a outra estava a $5,5\,km$ da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de $30°$.



   Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

   (a) $1,8\,km$
   (b) $1,9\,km$
   (c) $3,1\,km$
   (d) $3,7\,km$
   (e) $5,5\,km$

Um solução:

(i) Seja x a altura do solo até o balão;

(ii) Pelo ponto A, temos a seguinte razão trigonométrica: $\text{tg}(60°) = \dfrac{x}{1,8}$;

(iii) Como $\text{tg}(60°) = \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} \cong 1,7$, temos que: $x = 1,8 \cdot \sqrt{3} = 1,8 \cdot 1,7 = 3,06$;

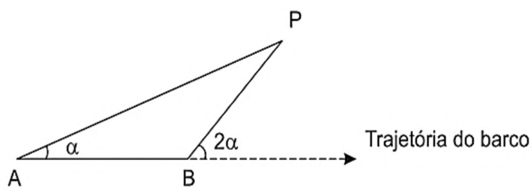
(iv) Logo, aproximadamente, a altura é a $3,1\,km$. Assim, marca-se a letra C.

Comentário:

Nesta resolução o docente vai explorar o uso das razões trigonométricas no triângulo retângulo, no caso a razão tangente. E ainda, o docente vai explicitar a importância de dominar os ângulos notáveis e seus valores numéricos. Então, por abordar dois tópicos da Trigonometria classificamos esta questão como de nível médio.

---

5. (ENEM - 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2.000\,m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

(a) $1.000\,m$.

(b) $1.000\sqrt{3}\,m$.

(c) $2.000\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,m$.

(d) $2.000\,m$.

(e) $2.000\sqrt{3}\,m$.

Uma solução:

(i) De acordo com a figura, traçamos uma perpendicular a AB, passando por P, determinando assim x;

(ii) Como $\alpha = 30°$, logo $2 \cdot \alpha = 2 \cdot 30° = 60°$. Logo o ângulo $A\widehat{B}P = 120°$, pois é suplementar;

(iii) Com isso, pela soma dos ângulos internos do triângulo o ângulo $A\widehat{P}B = 30°$, o que caracteriza o triângulo ABP como isósceles de base AP, logo $BP = 2.000\,m$;

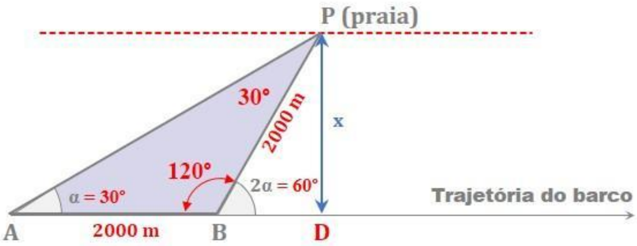


Figura 6.1: Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/10918460

(iv) No triângulo BPD, temos:
$\text{sen}(60^\circ) = \dfrac{x}{BP} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{2.000} \Rightarrow x = 2.000 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, portanto, $x = 1.000\sqrt{3}\,m$.
Marca-se a letra B.

Comentário:

Na resolução deste item, o docente pode observar que os conteúdos de Trigonometria aqui abordados foram as razões trigonométricas no triângulo e os ângulos notáveis. Classificamos tal questão como sendo de nível médio, pois é usado dois assuntos importantes do currículo de Trigonometria.

---

6. (ENEM - 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de $114\,m$ (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando $0,26$ como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

(a) menor que $100m^2$.

(b) entre $100m^2$ e $300m^2$.

(c) entre $300m^2$ e $500m^2$.

(d) entre $500m^2$ e $700m^2$.

(e) maior que $700m^2$

Uma solução:

(i) Como a base do prédio é um quadrado de lado x, logo sua área é dada por $A = x^2$;

(ii) Notamos que, para o cálculo de x, o ângulo de 15^o feito pelo lado AB e a aresta oblíqua do prisma tem como cateto oposto um dos lados do quadrado da base (x) e como cateto adjacente o lado AB, se for considerado o triângulo retângulo ABC, sendo C o vértice da base inferior que se encontra na mesma face de A;

(iii) Sendo a tangente do ângulo a razão entre o cateto oposto e o adjacente desse ângulo, tem-se que: $\text{tg}(15^o) = \dfrac{x}{114} \Rightarrow x = 0,26 \cdot 114 \Rightarrow x = 29,64m$;

(iv) Assim, a área é expressa por: $A = (29,64)^2 \Rightarrow A = 878,5296m^2$. Logo, a área é maior que $700m^2$. Marca-se então a letra E.

Comentário:

Na resolução desta questão o professor de matemática vai se deparar com o conteúdo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de ferramentas de geometria plana. Um exemplo claro de que no estudo da Trigonometria o docente pode muito bem atrelá-lo com a geometria. Como abordou apenas um tópico da Trigonometria, classificamos essa questão como sendo de nível fácil.

---

7. (ENEM - 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

   A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função:

$$P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

   Onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

   Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

(a) janeiro. (b) abril. (c) junho. (d) julho. (e) outubro.

Uma solução:

(i) A produção máxima ocorre quando o preço é mais baixo;

(ii) Além disso, sabemos que o cosseno de um ângulo varia dentro do intervalo $[-1,1]$;

(iii) Note que o argumento (ângulo) é dado em radianos, então o preço mínimo possível se dá para o menor valor do cosseno, pois é a variável da expressão;

(iv) Observando a variável na expressão temos: $\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right) = -1$. Como $\cos(\pi) = -1$, então resolvemos a equação trigonométrica;

(v) Igualando as expressões temos: $\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right) = \cos\pi \Rightarrow \frac{\pi x-\pi}{6} = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{6}(x-1) = \pi \Rightarrow x-1 = 6 \Rightarrow x = 7$;

(vi) Logo, $x = 7$ equivale ao mês de julho. Marca-se então a letra D.

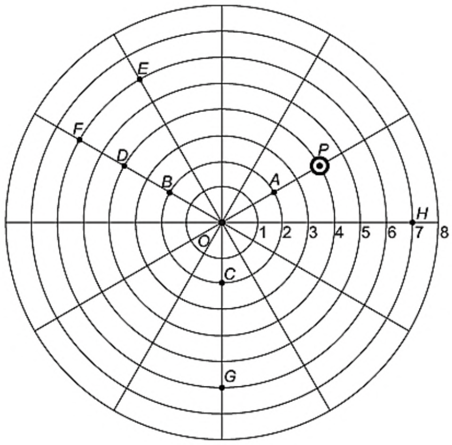
Comentário:

Nesta resolução o docente vai se deparar com os tópicos de funções trigonométricas, interpretando em qual intervalo ocorre a imagem da função dada, também é trabalhado o conceito de mudança de grandezas de graus para radianos e ainda o tópico de equações trigonométricas está presente. Como abordaram três tópicos extensos da Trigonometria, classificamos tal quesito como difícil.

---

8. (ENEM - 2015) No jogo mostrado na figura, uma bolinha descola-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8.

   Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto:

(a) B (b) D (c) E (d) F (e) G

Uma solução:

(i) Começamos no ponto P, andando duas unidades para fora do círculo (de 4 para 6);

(ii) Em seguida percorre-se 4 arcos de 30^{o} para que forme 120^{o}, pois é como a circunferência está divida;

(iii) Assim, o movimento vai parar no ponto F. Logo a alternativa marcada é a D.

Comentário:

De acordo com essa resolução, o professor pode observar que se trabalhou os conceitos inicias da Trigonometria, tais como sentido do ângulo. Por ter apenas um tópico da Trigonometria, classificamos essa questão como fácil.

---

9. (ENEM - 2015) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função:

$$T(h) = A + B \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot (h - 12)\right),$$

sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0 \leq h < 24)$ e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26^{o}C, a mínima 18^{o}C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

(a) $A = 18$ e $B = 8$ (c) $A = 2$ e $B = 4$ (e) $A = 26$ e $B = 8$

(b) $A = 22$ e $B = -4$ (d) $A = 26$ e $B = -8$

Uma solução:

(i) Para que tenhamos a temperatura máxima, temos que o seno deve ser igual a 1 e para mínima, seno igual a -1;

(ii) Para temperatura máxima, temos que: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\cdot(h-12)\right) = 1$, e $T(h) = 26$. Logo, $T(h) = A + B\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\cdot(h-12)\right) \Rightarrow 26 = A + B$;

(iii) E, para temperatura mínima, temos que: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\cdot(h-12)\right) = -1$ e $T(h) = 18$. Logo, $T(h) = A + B\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\cdot(h-12)\right) \Rightarrow 18 = A - B$;

(iv) Resolvendo o sistema, temos:
$\begin{cases} A + B = 26 \\ A - B = 18 \end{cases} \Rightarrow 2A = 44 \Rightarrow A = 22$ e $B = 4$;

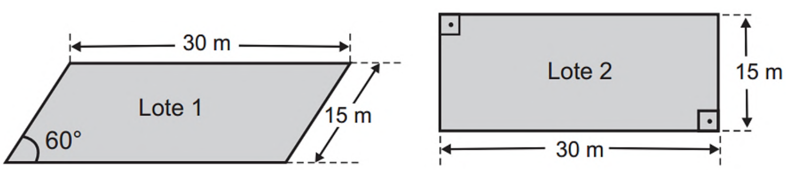
(v) Assim, com $B = 4$, teríamos o período da tarde sendo mais quente. Como queremos o período da manhã sendo mais quente, então $B = -4$. Marca-se então a letra B.

Comentário:

De acordo com a resolução apresentada, podemos pontuar que o docente se deparará com o tópico das equações trigonométricas, atrelada ao estudo da álgebra na resolução de sistemas de equações. Como temos dois tópicos que exigem atenção em sua resolução, classificamos esta questão como nível médio.

---

10. (ENEM - 2016) Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa, que esta família tem em mente, irão necessitar de uma área de pelo menos $400\,m^2$. Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são $R\$100.000,00$ e $R\$150.000,00$, respectivamente.



Use $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $1,7$ como aproximações, respectivamente, para $\operatorname{sen}(60°)$, $\cos(60°)$ e $\sqrt{3}$. Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

Pai: devemos comprar o Lote 1, pois como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

Mãe: Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto, pois tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

Filho 1: Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

Filho 2: Devemos comprar o Lote 1, pois como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

Corretor: Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno foi o(a):

(a) Pai. (b) Mãe. (c) Filho 1. (d) Filho 2. (e) Corretor.

Uma solução:

(i) Temos que calcular a área de cada lote.

(ii) Lote 1: calculamos sua altura usando o seno de 60º.
$\text{sen}(60^o) = \dfrac{h}{15} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{15} \Rightarrow h = 7,5 \cdot 1,7 \Rightarrow h = 12,75.$
Assim, sua área é dada por: $A = B \cdot h \Rightarrow A = 30 \cdot 12,75 \Rightarrow A = 382,5m^2$;

(iii) Lote 2: a área é dada por: $A = B \cdot h \Rightarrow A = 30 \cdot 15 \Rightarrow A = 450m^2$;

(iv) Portanto, o lote 2 tem maior área e é maior que $400m^2$, área suficiente para a execução do projeto. Marca-se a alternativa C.

Comentário:

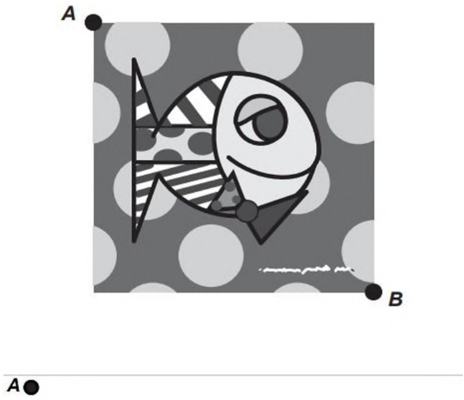
Na resolução apresentada nesta questão, o docente pode atentar para o uso da razão trigonométrica no triângulo retângulo e também ainda atentar para o tópico dos ângulos notáveis, atrelado ao estudo das aplicações da geometria com cálculo de áreas. Para este item, classificamos como nível médio, pois engloba dois tópicos da Trigonometria.

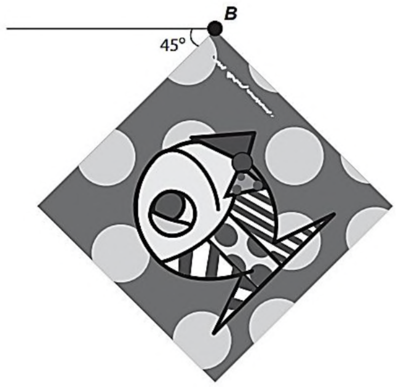
---

11. (ENEM 2017) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O Peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede.

Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.





Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°.

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

(a) 90^{o} no sentido horário.

(b) 135^{o} no sentido horário.

(c) 180^{o} no sentido anti-horário.

(d) 270^{o} no sentido anti-horário.

(e) 315^{o} no sentido horário.

Uma solução:

(i) Observando a figura, para que ela retorne à posição original devemos girá-la no sentido horário;

(ii) E, de acordo com a figura, o ângulo percorrido será de:
$45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$. Logo marca-se a letra B.

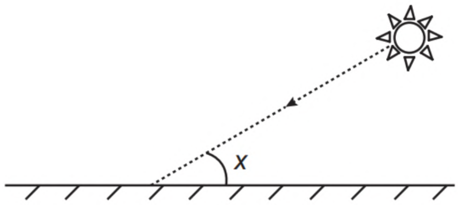
Comentário:

Nesta resolução, o docente vai apenas pontuar um conceito inicial de Trigonometria relacionado com a rotação de ângulo e sua soma algébrica. Por usar um único tópico de Trigonometria a classificamos como nível fácil.

---

12. (ENEM - 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que x esta entre 0^{o} e 90^{o}.



Quando $x = 30^\circ$ a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

(a) 33 % (b) 50 % (c) 57 % (d) 70 % (e) 86 %

Uma solução:

(i) O valor máximo será quando $x = 90^{\text{o}}$, e note que $\text{sen}(90^{\text{o}}) = 1$.
Então $I(x) = k \cdot \text{sen}(90^{\text{o}}) \Rightarrow I(x) = k \cdot 1 \Rightarrow I(x) = k$;

(ii) Agora quando $x = 30^{\text{o}}$, e sabendo que $\text{sen}(30^{\text{o}}) = \frac{1}{2}$, temos:
$I(x) = k \cdot \text{sen}(x) = k \cdot \text{sen}(30^{\text{o}}) = k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$;

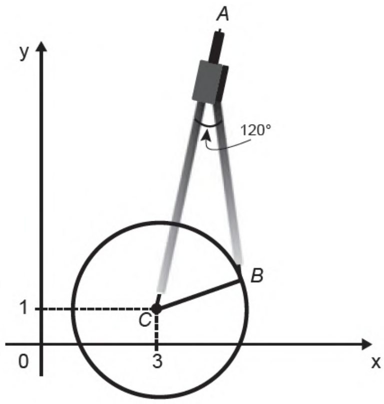
(iii) Assim, a variação será de 50 %. Marca-se a alternativa B.

Comentário:

De acordo com a resolução exposta, o professor de matemática vai abordar o tópico sobre ângulos notáveis, atrelada ao estudo da álgebra com o cálculo de percentuais. Por ter apenas um tópico de Trigonometria, classificamos essa questão como nível fácil.

---

13. (ENEM - 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de $10\,cm$, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere $1,7$ como aproximação para a raiz de 3.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

(a) I (b) II (c) III (d) IV (e) V

Uma solução:

(i) De acordo com a tabela, o tamanho do raio da tampa é o que determina o tipo de material a ser usado;

(ii) Seja o raio $r = BC$ e consideramos o triângulo ABC, de lados $AC = AB = 10\,cm$;

(iii) Utilizando lei dos cossenos no triângulo ABC da figura temos:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(120^o)$

(iv) Fazendo uma redução primeiro quadrante do ângulo de 120^o, temos que:
$\cos(120^o) = \cos(60^o)$. Note que: $\cos(60^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(v) Assim, fazendo as devidas substituições temos:
$r^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r^2 = 100 + 100 - 100 \cdot 1,7 \Rightarrow r^2 = 200 + 170$
$r^2 = 370 \Rightarrow r = \sqrt{370} \Rightarrow r \cong 19,23\,cm$;

(vi) Logo, o raio está, de acordo com a tabela, no intervalo $15 < r \leq 21$, portanto vai usar o material de tipo IV. Marca-se assim a letra D.

Comentário:

Para esta resolução comentada acima, nota-se que o docente vai trabalhar com o conteúdo da lei dos cossenos, e ainda usar o tópico de redução ao primeiro quadrante e calcular o valor numérico de ângulo notável. Tudo isso atrelado ao estudo da geometria. Por usar três tópicos da Trigonometria, classificamos esta questão com nível de difícil.

---

14. (ENEM - 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cdot \cos(k \cdot t)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

(a) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi \cdot t)$

(b) $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(3\pi \cdot t)$

(c) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(2\pi \cdot t)$

(d) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(t)$

(e) $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(t)$

Uma solução:

(i) Observe que o mínimo e o máximo de uma função cosseno está no intervalo $[-1, 1]$;

(ii) Assim, a pressão mínima $P(t) = 78$ ocorre quando o cosseno $\cos(k \cdot t)$ é mínimo, ou seja, $\cos(k \cdot t) = -1$. Logo, $P(t) = A + B \cdot (-1) \Rightarrow 78 = A - B$;

(iii) Note que, a pressão máxima $P(t) = 120$ ocorre quando o cosseno $\cos(k \cdot t)$ é máximo, ou seja, $\cos(k \cdot t) = 1$. Logo, $P(t) = A + B \cdot (1) \Rightarrow 120 = A + B$;

(iv) Resolvendo o sistema montado acima, temos:
$\begin{cases} A - B = 78 \\ A + B = 120 \end{cases} \Rightarrow 2A = 198 \Rightarrow A = 99$ e, portanto $B = 21$;

(v) Para o cálculo da variável t, em segundos, temos que considerar os 90 batimentos por minutos usando a regra de três: $t = \frac{60}{90} \Rightarrow t = \frac{2}{3}\,s$;

(vi) Assim, o valor da variável k, que completa um ciclo (ou uma volta completa no ciclo trigonométrico) para o valor $2\pi\,rad$ é dado por:
$k \cdot t = 2\pi \Rightarrow k \cdot \frac{2}{3} = 2\pi \Rightarrow k = 3\pi$;

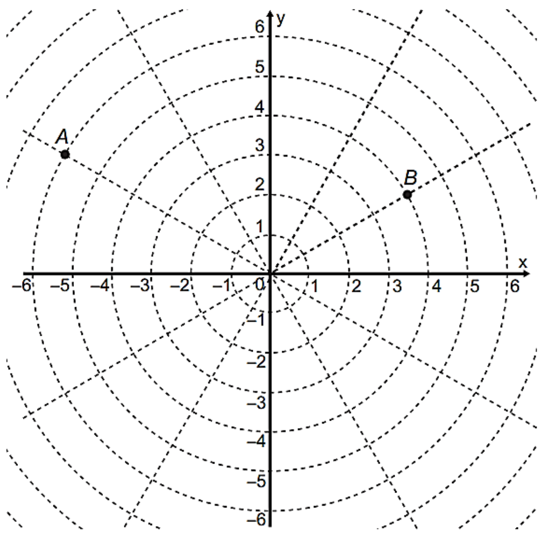
(vii) Logo, o formato da função procurada é: $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi \cdot t)$. Marca-se a letra A.

Comentário:

Nesta resolução, foi apresentado para o docente trabalhar a Trigonometria nos tópicos de função trigonométricas, atrelada a cálculos algébricos. Embora aborde um tópico da Trigonometria, classificamos esta questão como difícil, dada a sua complexidade e atenção para se valer da propriedades trigonométricas que a resolvem.

---

15. (ENEM - 2018) Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}\,rad$, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem $(0;0)$.

Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a:

(a) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8$ (c) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4$ (e) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 5}{3}+2$

(b) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 2}{3}+6$ (d) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 4}{3}+2$

Uma solução:

(i) O trajeto inicial, de acordo com a figura, ocorre do ponto B, em linha reta, 3 unidades até o sentido do menor raio para o arco de $\dfrac{\pi}{6}\,rad$;

(ii) O trajeto seguinte corresponde ao deslocamento de $4\times\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\pi}{3}$ pelo arco até o ponto que está sobre a linha do ponto A;

(iii) E, por fim, segue em linha reta, 5 unidades, até o ponto A;

(iv) Logo, somamos os deslocamentos D: $D=3+\dfrac{2\pi r}{3}+5$. Como $r=1$, temos: $D=\dfrac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8$. Marca-se a letra A.

Comentário:

Nesta resolução, o docente vai trabalhar o conceito de medida de ângulo em radiano. Como temos um único tópico da Trigonometria, classificamos este item como fácil.

---

16. (ENEM - 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135º no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60º no sentido horário;
- 3ª mudança: 45º no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

(a) 75º no sentido horário.

(b) 105º no sentido anti-horário.

(c) 120º no sentido anti-horário.

(d) 135º no sentido anti-horário.

(e) 165º no sentido horário.

Uma solução:

(i) De acordo com figura, o círculo está dividido em 8 partes, ou seja, cada parte tem: $\frac{360}{8} = 45^o$;

(ii) Assim, após a primeira mudança, a câmera parou em SE;

(iii) Na segunda mudança, a câmera ficou a 15º de S no sentido anti-horário;

(iv) Por último, a câmera parou 30º no sentido anti-horário;

(v) Logo, ela está a 165º do NO no sentido anti-horário, e , 295º no sentido horário;

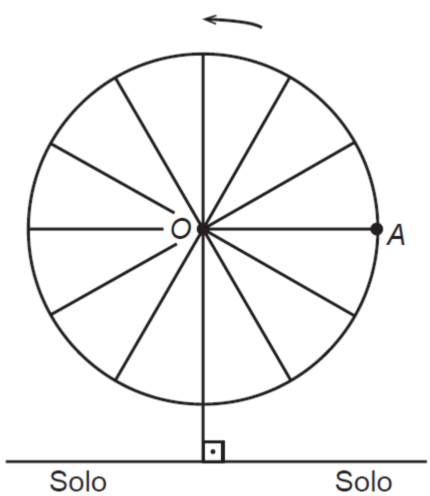
(vi) Como se requer a menor amplitude possível, temos que 165º no sentido anti-horário responte a questão. Marca-se a letra E.

Comentário:

Nesta resolução, foi apresentado ao professor que ele pode trabalhar os conceitos de medidas de ângulos e atrelada ao sentido do movimento angular. Classificamos como uma questão de nível fácil, pois abarda um único tópico elementar da Trigonometria.

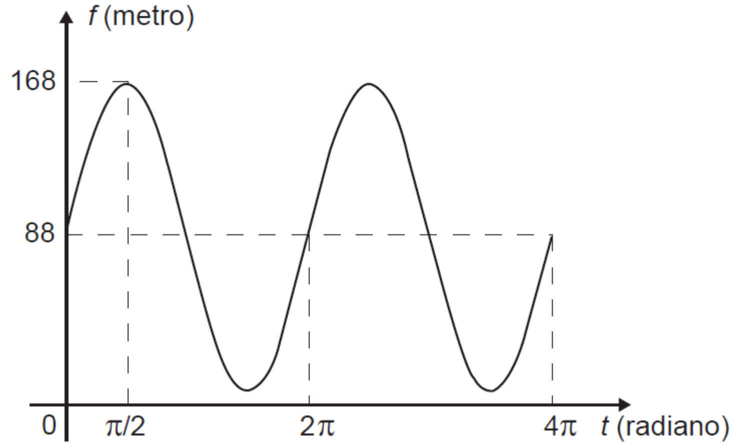
---

17. (ENEM - 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

(a) $f(t) = 80 \cdot \text{sen}(t) + 88$

(b) $f(t) = 80 \cdot \cos(t) + 88$

(c) $f(t) = 88 \cdot \cos(t) + 168$

(d) $f(t) = 168 \cdot \text{sen}(t) + 88 \cdot \cos(t)$

(e) $f(t) = 88 \cdot \text{sen}(t) + 168 \cdot \cos(t)$

Uma solução:

(i) De acordo com o gráfico, temos que f é uma função seno, pois tem o comportamento crescente no intervalo de domínio $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

(ii) O período de f é $p = 2\pi$, e escreve-se na forma: $f(t) = A + B \cdot \text{sen}(t)$;

(iii) Substituindo os pontos do gráfico na expressão acima, temos:

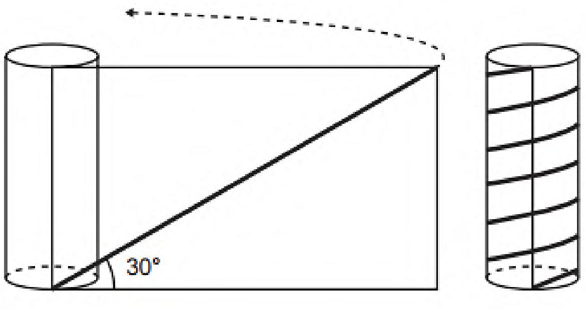
- $f(0) = 88$, logo $f(0) = A + B \cdot \text{sen}(0^o) \Rightarrow 88 = A + B \cdot 0 \Rightarrow A = 88$;
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 168$, logo $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 88 + B \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Note que: $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;
- Então, $88 + B \cdot (1) = 168 \Rightarrow B = 168 - 88 \Rightarrow B = 80$.

(iv) Relacionando a expressão da função seno com as variáveis encontradas, temos: $f(t) = 88 + 80 \cdot \text{sen}(t)$. Marca-se então a letra A.

Comentário:

No desenvolvimento desta resolução, o docente trabalha os conceitos das funções trigonométricas e suas representações gráficas. Pode também observar que se buscou fazer um modelo matemático para uma situação real. Assim, pela complexidade em concatenar esses tópicos da Trigonometria, classificamos essa questão como de nível difícil.

18. (ENEM - 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30^o com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é:

(a) $36\sqrt{3}$ (b) $24\sqrt{3}$ (c) $4\sqrt{3}$ (d) 36 (e) 72

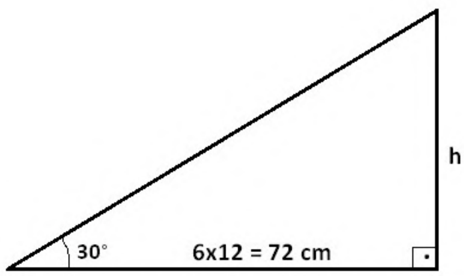
Uma solução:

(i) Para o cálculo da altura do cilindro, precisamos da medida do comprimento da circunferência da base;

(ii) Como o raio mede $\frac{6}{\pi}$ cm, o comprimento é dado por:
$c = 2\pi r \Rightarrow c = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} \Rightarrow c = 2 \cdot 6 \Rightarrow c = 12\,cm$;

(iii) Pela figura, podemos perceber que essa faixa percorre 6 vezes o cilindro. Então, o comprimento dessa faixa mede 6 vezes o comprimento da circunferência:
$c = 6 \cdot 12 \Rightarrow c = 72\,cm$;

(iv) E, utilizando a relação tangente no triângulo, temos:



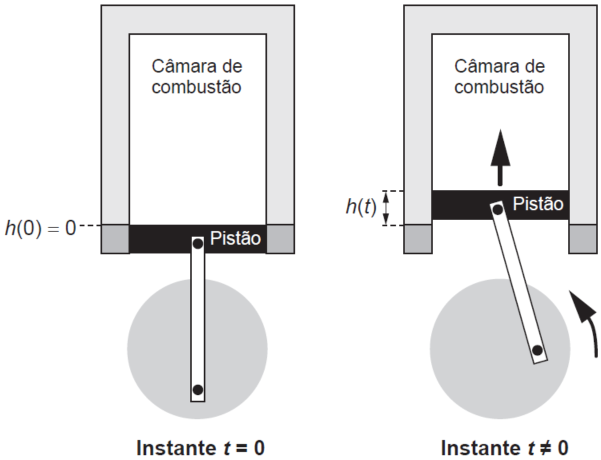
$\text{tg}(30^o) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{72} \Rightarrow h = 24\sqrt{3}\,cm.$
Logo, marca-se a alternativa B.

Comentário:

Nesta resolução, podemos apontar que o docente vai trabalhar a razão trigonométrica no triângulo retângulo e ângulos notáveis, isto atrelado ao estudo da geometria nos cálculos de medida de comprimentos. Dito isto, classificamos essa questão como sendo de nível médio, pois trabalham dois tópicos da Trigonometria.

---

19. (ENEM - 2019) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$, definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de $6\,cm$. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π. O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

(a) 1. (b) 2. (c) 4. (d) 5. (e) 8.

Uma solução:

(i) A altura pedida no enunciado é $h(t) = 6\,cm$.
Como $h(t) = 4 + 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$, temos que: $6 = 4 + 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$
$2 = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

(ii) Como $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}$, então $\beta = \frac{\pi}{6}$ rad, $\beta = \frac{5\pi}{6}$ rad ou $\beta = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ rad, pois são os valores para o seno em que, nas três vezes em que atinge $\frac{1}{2}$;

(iii) Assim, na terceira volta, temos a equação trigonométrica:
$\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, em que $\pi \cong 3$;

(iv) Resolvendo a equação trigonométrica e substituindo o valor de π, temos:
$\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot 3 + \frac{3}{6} \Rightarrow \beta \cdot t - 3 = 13 \Rightarrow \beta \cdot t = 16$;

(v) Como $t < 4$ s, e $\beta \cdot t = 16 \Rightarrow t = \frac{16}{\beta}$, então $\frac{16}{\beta} < 4 \Rightarrow \beta > \frac{16}{4} \Rightarrow \beta > 4$;

(vi) Como o menor valor inteiro tem que ser maior que 4, logo concluímos que $\beta = 5$. Marca-se a letra D.

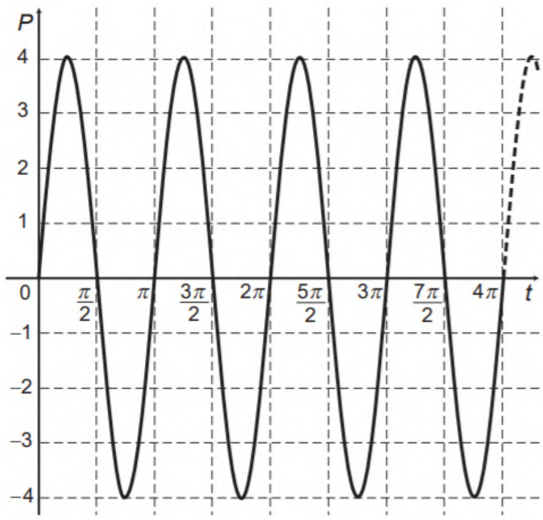
Comentário:

De acordo com a resolução desta questão, o professor vai trabalhar os conteúdos de equações trigonométricas, ângulos notáveis e funções trigonométricas, todas atreladas ao uso da álgebra. Classificamos este quesito como sendo de nível difícil, pois abordam três conteúdos do estudo da Trigonometria.

---

20. (ENEM - 2019) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A \cdot \text{sen}(w \cdot t + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t é

(a) $P(t) = 4 \cdot \text{sen}(2t)$

(b) $P(t) = -4 \cdot \text{sen}(2t)$

(c) $P(t) = -4 \cdot \text{sen}(4t)$

(d) $P(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(e) $P(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(4t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Uma solução:

(i) Para $P(t) = \pm A \cdot \text{sen}(w \cdot t + \theta)$ temos que A representa a amplitude do gráfico. Como, de acordo com a figura a imagem está no intervalo $[-4, 4]$, sua amplitude é $A = 4$;

(ii) O período T, como observado na figura é $T = \pi$. Logo a frequência w, é expressa por $w = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow w = \dfrac{2\pi}{\pi} \Rightarrow w = 2$;

(iii) Como o gráfico é de uma função seno e se inicia na origem, então não temos nenhum deslocamento θ para ela e seu sinal é positivo. Logo, $\theta = 0$;

(iv) Assim, substituindo os valores na expressão dada, temos que:
$P(t) = 4 \cdot \text{sen}(2t)$. Marca-se a letra A.

Comentário: De acordo com a resolução apresentada, o docente vai se deparar com uma questão de funções trigonométricas. Usando vários elementos das representações gráficas presentes nas funções, como amplitude, período, e comportamento. Logo classificamos esta questão como de nível difícil.

Capítulo 7

Considerações Finais

Neste trabalho buscou-se perfazer os caminhos que a Trigonometria, enquanto conteúdo matemático atrelado ao desenvolvimento da geometria e também da álgebra, trilhou sob a perspectiva dos documentos oficiais que regem a educação básica em nosso país. Iniciamos a jornada atrelando a Trigonometria com desenvolvimento histórico de civilizações e povos da antiguidade a partir de suas atividades mais básicas da vida, e indo até a era moderna, momento em que o uso científico e rigor formal do texto matemático passou a ser parte dominante do discurso científico através das demonstrações.

Na nossa ótica, é parte do trabalho do professor compreender, mesmo que seja a partir de uma macro perspectiva, as transformações que a Trigonometria sofreu ao longo da história. Portanto, torna-se fundamental estar a par dos momentos históricos e obras mais importantes no que diz respeito ao conteúdo da Trigonometria, como também se torna relevante conhecer os vários pesquisadores e expoentes, tais como Pitágoras, Euclides, Copérnico, Al-Battani, Napier, Euler, dentre outros que contribuíram com seus estudos para este importante ramo da matemática.

Deixamos como sugestão uma abordagem clássica dos tópicos e conteúdos das principais noções matemáticas no estudo da Trigonometria para o ensino médio que estão nos livros didáticos no apêndice desta pesquisa. Entendemos que uma boa compreensão de tais conteúdos se constitui num pilar para o fazer docente, visto que o professor necessita organizar e estruturar o ano letivo, a unidade didática e também a própria aula dentro de uma carga horária específica, e isto muitas vezes se constitui num desafio a ser enfrentado. Ocorrendo assim que, muitas vezes, o aprofundamento em determinado assunto fica comprometido em face da pouca carga horária, quando não raro até mesmo se omitem e excluem do currículo da matemática um dado conteúdo de Trigonometria.

Para citar como exemplo de recortes que o ensino médio, a partir das observações que pontuamos nos documentos legais, tais como os PCN+ e os conteúdos dos livros didáticos no Guia PNLD 2018, aplicou ao currículo da Trigonometria citamos a retirada do tópico sobre a unidade de medida do grado. Em nossa análise, não há em nenhum dos textos legais proponentes ao estudo da Trigonometria a menção de tal conteúdo. O uso das unidades de medidas para ângulo amplamente usadas são o grau e o radiano. O ENEM quando fala em medida de ângulo, de acordo com a nossa pesquisa, aborda apenas estas duas unidades de medida.

A prática pedagógica docente é enriquecida quando ferramentas de apoio são utilizadas para um dado conteúdo da aula, e estas ferramentas não são compostas apenas de materiais lúdicos, computadores e seus *softwares*, mas também quando o docente propõe analogias e comparações de conteúdos com outras áreas do saber. Nesse contexto, podemos citar uma analogia que o docente pode aplicar ao estudo das unidades de medidas para ângulos ao compará-las com as unidades de medida para uma escala termométrica.

Sabe-se da Física que no estudo da termodinâmica a temperatura em países de língua latina é tradicionalmente medida em graus *Celsius*, já em países de língua anglo-saxônica a escala termométrica usada é a *Fahrenheit*, e no Sistema Internacional de Unidades se usa a escala *Kelvin*. Mas estas convenções entre as escalas e suas divisões é algo que foi se consolidando no decorrer do tempo, não é algo hermeticamente fechado. É tanto que em muitos experimentos e em questões de exames vestibulares aparecem escalas termométricas arbitrárias, da qual exige do aluno uma compreensão mais geral de como essa medida é feita e não apenas seus correspondentes valores das escalas clássicas citadas.

De semelhante modo podemos fazer uma analogia para as unidades de medida que são adotadas para o ângulo. Nesse ínterim, o docente não vai simplesmente usar o que tradicionalmente está estabelecido nas unidades de medida do grau e do radiano, mas por exemplo ampliar a compreensão agregando a unidade de medida do grado, que outrora presente nos livros didáticos, todavia em desuso. E ainda o professor pode propor uma unidade de medida arbitrária para os arcos ou ângulos, criando um sistema diferente dos convencionais, pois esta grandeza, assim como as escalas termométricas, não são vivenciadas de maneiras herméticas.

Dentre as atividades pertinentes ao fazer docente, entendemos que a diversificação na compreensão dos conteúdos que estão expostos no livros didáticos são fundamentais. Não só no que diz respeito ao conhecimento de fórmulas, proposições e teoremas da Trigonometria, mas também em ampliar o leque de possibilidades no preparo de aulas com alguns conteúdos mais práticos. A diversificação pode ser melhor explorada no ensino médio, dado que os alunos tendem a atingir certa maturidade nesse nível de ensino, o que permite ao docente ampliar seus horizontes didáticos. Com isso em mente, e observando a ausência de tópicos específicos que contemplem as construções geométricas, propomos que o docente explore de maneira intencional o ensino da Trigonometria a partir de recursos materiais como régua, compasso, transferidor, esquadro, teodolito e *softwares* para manipular e instrumentalizar a didática.

De acordo com as observações que tenho feito durante 15 anos de experiência docente, os livros didáticos de matemática do ensino médio não possuem algum tópico específico que trabalhe as construções geométricas. Contudo, em nossa pesquisa pontuamos que os PCN+

nas áreas estruturadas para a Trigonometria, mais precisamente na área da investigação e compreensão, expõe que as medidas, quantificações, grandezas e escalas sejam trabalhadas pelo docente a partir do uso adequado réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. Assim, a atuação do docente não pode estar limitada ao trabalho em paralelo aos conteúdos das obras de referência, mas também numa busca em expandir seu repertório didático buscando novos recursos.

Algo que julgamos importante frisar nessas considerações finais está na proposta dos PCN+ para a escolha da série em que o conteúdo da Trigonometria é abordado. Ele sugere que o primeiro ano e o segundo ano do ensino médio regular contemplem todo o estudo da Trigonometria, não sugerindo ali uma abordagem para o terceiro ano do ensino médio. Contudo, quando observamos as propostas destacadas na análise do Guia PNLD 2018 - Matemática de nossa pesquisa, que analisou 8 (oito) obras, os conteúdos de Trigonometria no ensino médio estão presentes no primeiro e segundo ano em 6 (seis) livros didáticos (livro 2, livro 3, livro 5, livro 6, livro 7 e livro 8), enquanto duas obras (livro 1 e livro 4) propuseram que o estudo da Trigonometria seja também visto no terceiro ano do ensino médio.

Tendo vista que a maioria das obras condensam o estudo da Trigonometria nos dois anos iniciais do ensino médio, entendo que a proposta de se trabalhar Trigonometria no terceiro ano do ensino médio seja algo um tanto quanto inédito. Tal postura com estes conteúdos permitiria ao docente diluir por mais tempo sua didática, privilegiando ao ano inicial do ensino médio as bases e fundamentos da Trigonometria e quem sabe ainda atrelar o estudo das construções geométricas propostas anteriormente. Deixa-se então os dois anos finais do ensino médio para um aprofundamento da Trigonometria, ministrando conteúdos como funções trigonométricas inversas e identidades trigonométricas junto com resoluções de problemas e questões mais voltadas ao preparo de vestibulares e ENEM.

A importância do ENEM se eleva à medida que, a partir de 2009, passa a ser um dos principais meios de acesso ao ensino superior no Brasil. Em nossa forma de enxergar e da análise feita nos capítulos anteriores, isso acarretou numa forte influência sobre os currículos dos livros didáticos, como também passou exercer uma significativa influência sobre o que os professores irão ou deixarão de ensinar de determinado conteúdo. E esse olhar ocorre com a Trigonometria.

Fizemos uma abordagem das questões sobre Trigonometria que apareceram no ENEM entre 2009 e 2019, e no levantamento feito, vimos que 20 questões contemplaram em suas resoluções algum assunto relacionado aos tópicos clássicos de Trigonometria resumidos no apêndice desta pesquisa. Classificamos estas questões em níveis de dificuldade, sendo que 7 (sete) delas se apresentaram com nível considerado fácil, 6 (seis) se apresentaram com nível considerado médio e, 7 (sete) foram consideradas com nível difícil. Ou seja, se compararmos o quantitativo de questões de matemática que o ENEM possui, e quais delas se relacionam com o currículo da Trigonometria, temos um valor próximo de 4% apenas. Muito pouco para uma conteúdo vasto e importante. E notamos ainda que nos anos de 2012 e 2014 não caíram questões que se relacionassem com o currículo da Trigonometria.

Em face disso, entendemos que a Trigonometria tem sido relegada a um papel de menor expressão diante desse importante termômetro relacionado ao currículo que é o ENEM. Conteúdos relevantes que são propostos nas orientações curriculares, tais como Leis dos Senos e dos Cossenos, Redução ao Primeiro Quadrante e a Relação Fundamental da Trigonometria quase não encontramos como parte das resoluções das questões. O foco maior do ENEM para a Trigonometria tem sido em questões que abordam os ângulos notáveis com as principais razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e ainda a representação gráfica dessas funções periódicas.

A Trigonometria é um conteúdo importante do currículo dos conhecimentos de matemática? No meu entender ela é relevante, todavia a forma como os livros didáticos do ensino médio, bem como o exame de avaliação mais importante do nosso país a trata, relega a patamares cada vez mais baixos. Acredito que os docentes são os responsáveis por não deixar que a Trigonometria se resuma a pequenas noções sobre ângulo e representações gráficas. Por isso um currículo de matemática que permeie a Trigonometria necessita ser parte da preocupação da comunidade docente.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. trad. de J.B. Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

[2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[3] BRASIL. *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: MEC/SEB, 2017.

[4] _____. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v. 2, Brasília: SE/MEC, 2006.

[5] _____. Ministério da Educação. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *LDB*: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

[6] _____. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

[7] _____. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

[8] _____. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)*. Ciências da Natureza e Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

[9] _____. Resolução CNE/CEB nº 3, de 26 de junho de 1998. *Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf. Acesso em: 05 maio 2020.

[10] _____. *Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2018*: Matemática - Guia de Livros Didáticos - Ensino Médio. Brasília: SEB/MEC, 2017.

[11] _____. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira/INEP.* Disponível em: http://portal.inep.gov.br. Acesso em: 06 maio 2020.

[12] _____. *Matriz de Referência.* INEP, 2017. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em: 15 maio 2020.

[13] BRITO, A. P. A. B. *Contrato Didático e Transposição Didática*: Interrelações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental. 2006. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação, Recife, 2006. p. 20-28.

[14] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria - Números Complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[15] CASSIANO, C. C. F. Aspectos Políticos e Econômicos da Circulação do Livro Didático de História e Suas Implicações Curriculares. *História (São Paulo)*, Franca, v. 23, n. 1-2, p. 33-48, 2004. DOI: https://doi.org/10.1590/S0101-90742004000200003. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttextpid=S0101-90742004000200003lng=pttlng=pt. Acesso em: 14 jul. 2020.

[16] COSTA, N. M. L. *A História da Trigonometria*. São Paulo, PUCSP, 1997. Disponível em: http://www.amma.com.pt/cm/af33/trf1/histtrigon.pdf. Acesso em: 23 mar. de 2020.

[17] CUNHA, C. P. A Importância da Matemática no Cotidiano. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*. 4. ed. Ano 02, v. 01, p. 641-650, 2017. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/wp-content/uploads/artigo-cientifico/pdf/matematica-no-cotidiano.pdf. Acesso em: 02 jun. 2020.

[18] DANTE, L. R. *Matemática*: Contexto e Aplicações - Ensino Médio, v. 2, 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

[19] DOLCE, O. POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*: Geometria Plana. v. 9, 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[20] FILHO, E. A. *Trigonometria Plana* 6. ed. São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1964.

[21] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar*: Trigonometria. v. 3, 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[22] IEZZI, G. MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*: Conjuntos - Funções. v. 2, 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[23] IEZZI, G. *et al*. *Matemática*: Ciências e Aplicações - Ensino Médio, v. 2, 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[24] LIMA, E. L. *et al*. *Temas e Problemas*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[25] MEGID, J. N.; FRACALANZA, H. O Livro Didático de Ciências: Problemas e Soluções. *Ciências e Educação*, Bauru, v. 9, n. 2, p. 147-157, 2003.

[26] MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[27] PAIS, L. *Didática da Matemática*: Uma Análise da Influência Francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

[28] PAIVA, M. *Matemática - Manoel Paiva*. v. 1, 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[29] PEREIRA, R. *Enriquecendo o Ensino Médio*: Uma Trigonometria para Além do Ensino Básico. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto Federal de São Paulo, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, São Paulo, 2019.

[30] REIS, F. *Uma Visão Geral da Trigonometria*: História, Conceito e Aplicações. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ponta Grossa, 2016.

[31] SACRISTÁN, J. G. *Saberes e Incertezas Sobre o Currículo.* Tradução: Alexandre Salvaterra, revisão técnica: Miguel González Arroyo. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 10-16.

[32] SAVIANI, N. A Conversão do Conhecimento Científico em Saber Escolar: Uma Luta Inglória? *Revista de Educação*. São Paulo, n. 16, p. 35-38, 2003.

[33] SAVIANI, D. Educação Escolar, Currículo e Sociedade: O Problema da Base Nacional Comum Curricular. *Movimento - Revista de Educação*. Rio de Janeiro, n. 3, p. 54-84, 2016. DOI: https://doi.org/10.22409/mov.v0i4.296. Disponível em: https://periodicos.uff.br/revistamovimento/article/view/32575. Acesso em: 14 jul. 2020.

[34] SILVA, P. E. L. *Problemas Combinatórios Condicionais*: Um Olhar para o Livro Didático do Ensino Médio. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2015. p. 18-24.

[35] SILVA, R. C. T. Z. *Trigonometria*: História e Aplicações no Contexto Escolar. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Bauru, 2019.

[36] SILVA, T. T. *Documentos de Identidade*: Uma Introdução às Teorias de Currículo. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2010.

[37] YOUNG, M. Teoria do Currículo: O Que é e Por Que é Importante. *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, v. 44, n. 151, p.190-202, 2014. DOI: https://doi.org/10.1590/198053142851. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/cp/v44n151/10.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.

Apêndice A

Trigonometria: Conceitos Básicos

Esta seção traz um breve aparato das formalizações clássicas da Trigonometria desenvolvidas no decorrer da história e que nos dias de hoje são abordadas nos livros didáticos das escolas de nosso país. Tal abordagem visa estabelecer uma base de comparação entre os conteúdos de Trigonometria que estão presentes nas propostas curriculares dos documentos legais que norteiam o ensino desse ramo da matemática com os conteúdos dos livros didáticos do Guia PNLD 2018 - Matemática e posteriormente lançar um olhar sobre os conteúdos de Trigonometria que são contemplados no novo ENEM, a partir da análise sobre sua Matriz de Referência.

Várias outras obras de referência abordam de maneira mais ampla os conteúdos de Trigonometria que aqui são apresentados, tanto em aspectos didáticos como também no que diz respeito às demonstrações formais que são pertinentes ao texto matemático. Por isso, deixamos a cargo do leitor buscar um aprofundamento maior sobre o tema.

Portanto, elencamos a seguir os tópicos da Trigonometria que julgamos relevantes para esta pesquisa, a saber, ângulo, triângulo retângulo, razões trigonométricas, circunferência trigonométrica, funções trigonométricas e outras razões trigonométricas.

As figuras representadas neste capítulo, quando não citadas suas fontes, são de elaboração própria.

A.1 Noções Gerais

A.1.1 Ângulo

Definição A.1 *O* ***ângulo*** *corresponde a grandeza reunida entre duas semirretas não-colineares com origem em um mesmo ponto do espaço euclidiano.*

A seguir, temos uma representação de um ângulo e a designação de seus elementos:

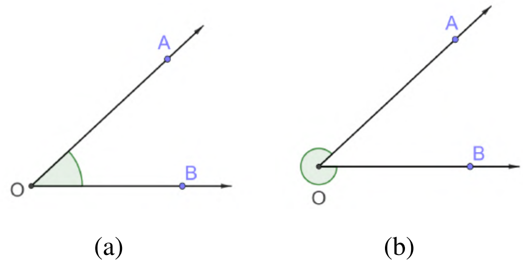


Figura A.1: Ângulo

- **Lados do ângulo:** $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (semirretas);
- **Vértice:** O (intersecção entre as semirretas);
- **Ângulo:** $\widehat{O}$, $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$ (abertura interna entre as semirretas).

A.1.2 Classificação de Ângulos

Ângulo Nulo

Quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, a partir da mesma origem O, possuem direção e sentido iguais, dizemos que este ângulo é **nulo**.

Ângulo Raso

Quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, a partir da mesma origem O, possuem direção e sentidos opostos, dizemos que este ângulo é **raso**.

Arco

Um **arco** geométrico é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos. Vejamos as ilustrações:

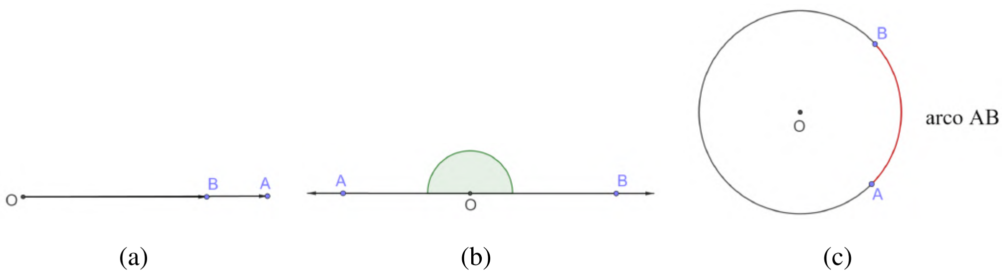


Figura A.2: Ângulo Nulo (a), Ângulo Raso (b) e Arco (c).

Ângulo Central

O **ângulo central** corresponde ao arco que este enxerga na circunferência. Possui vértice no próprio centro da circunferência e seus lados delimitados pelos segmentos que vão do centro da circunferência aos extremos do arco.

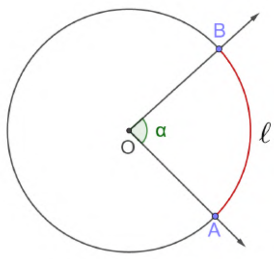


Figura A.3: Ângulo Central

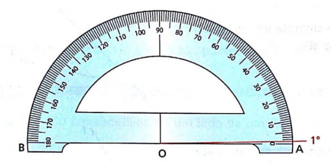
- **Arco:** $\widehat{AB}$. Medida de $\widehat{AB}$: α
- **Ângulo Central:** $\widehat{AOB}$. Medida de $\widehat{AOB}$: α
- **Comprimento do Arco:** ℓ

A.1.3 Unidades de Medida de um Ângulo

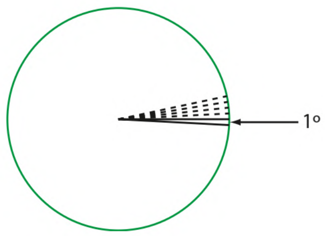
De acordo com Edgard A. Filho [20], as principais unidades de medida para os ângulos são: Grau, Radiano e o Grado[1].

Grau

Considerando um ângulo raso $\widehat{AOB}$, podemos dividi-lo em 180 partes. A figura A.4(a) mostra um transferidor graduado em *graus*.



(a)



(b)

Figura A.4: Transferidor (a) e Circunferência (b).
Fonte: [21] (p. 6) (a) e [23] (p. 8) (b)

Assim, chama-se de **ângulo de** 1° (um grau), o ângulo correspondente a $\dfrac{1}{180}$ do ângulo raso. De modo que percorrer o contorno de toda a circunferência perfaz um ângulo de 360°.[2]

[1] O *grado* não se encontra em uso nos atuais livros de referência de matemática.

[2] Essa divisão em 360 partes congruentes possivelmente se deu pela influência do sistema sexagesimal (sistema de base 60) e pela associação do movimento de translação da Terra, que dura aproximadamente 360 dias.

O grau possui **submúltiplos** importantes. Sejam eles:

(i) **Minuto**

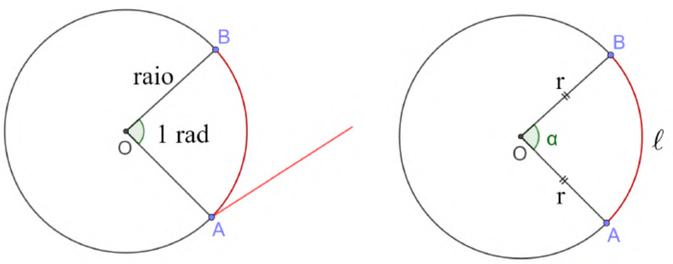
O *minuto*, em que sua unidade é representada por $1'$, e corresponde a $\dfrac{1}{60}$ da medida de 1° (um grau). De modo que subdivide 1° em $60'$.

(ii) **Segundo**

O *segundo*, em que sua unidade é representada por $1''$, e corresponde a $\dfrac{1}{60}$ da medida de $1'$ (um minuto). De modo que subdivide $1'$ em $60''$.

Radiano

Essa importante unidade do sistema denominado circular, corresponde ao ângulo central que intercepta um arco de círculo cujo comprimento é igual ao raio do mesmo círculo.



(a) (b)

Figura A.5: Radiano (a) e Comprimento do Arco (b).

Um ângulo de 1 *radiano*, representado por $1\,rad$, é um ângulo congruente ao ângulo central subtendido por um arco de 1 radiano. "Retificando ou esticando" o arco $\widehat{AB}$, a medida do segmento de reta obtido será igual à medida do raio da circunferência que a determina.

Notamos assim que há uma proporcionalidade entre o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ e o ângulo central α com o raio r da circunferência. De modo que: $\boxed{\alpha = \dfrac{\ell}{r}}$.

Grado

É uma unidade do sistema denominado *centesimal*, representado por $1\,gr$. E corresponde ao ângulo equivalente a $\dfrac{1}{100}$ do ângulo reto (90°) ou ainda o arco que corresponde a $\dfrac{1}{400}$ da circunferência.

Assim,

$$\boxed{\text{ângulo de um grado} = \frac{\text{ângulo reto}}{100}}.$$

Podemos destacar os seguintes **submúltiplos do grado**:

(i) **Decigrado:** $\boxed{1 \quad \text{dgr} = 0{,}1 \quad \text{gr}}$

(ii) **Centígrado:** $\boxed{1 \quad \text{cgr} = 0{,}01 \quad \text{gr}}$. Também chamado de *minuto de grado*.

(iii) **Miligrado:** $\boxed{1 \quad \text{mgr} = 0{,}001 \quad \text{gr}}$

(iv) **Decimiligrado:** $\boxed{1 \quad \text{dmgr} = 0{,}0001 \quad \text{gr}}$. Também chamado de *segundo de grado*.

A.1.4 Relação Entre Unidades

Assim sendo, podemos estabelecer uma relação entre as unidades apresentadas para se medir um ângulo. Temos que:

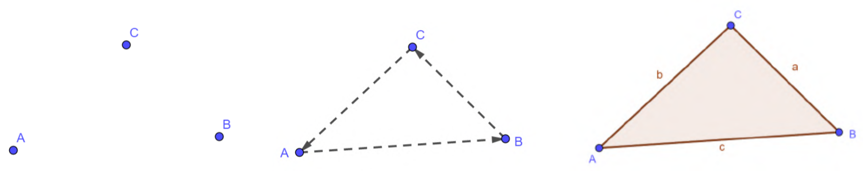
$$\boxed{2\,\pi\, rad = 360^\circ = 400\, gr}$$

Isto é, a medida de uma circunferência é 2π radianos, 360 graus ou 400 grados.

A.1.5 Triângulo

Usando como base as propriedades concernentes aos axiomas da Geometria Euclidiana Plana no que diz respeito aos conceitos de ponto, reta, plano e espaço damos seguimento com a definição de triângulo.

Definição A.2 *Sejam A, B e C pontos distintos e não colineares do espaço. Unindo os pontos dois a dois, temos os segmentos assim observados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. A região plana fechada que ficou por eles assim determinada chama-se **triângulo**.*



(a) (b) (c)

Figura A.6: Pontos (a), Segmentos (b) e Triângulo (c).

Em que representamos por ΔABC.

Elementos do Triângulo

- **Vértices:** os pontos A, B e C correspondem aos *vértices* do ΔABC.
- **Lados:** os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, de medidas a, b e c, respectivamente correspondem aos *lados* do ΔABC.
- **Ângulos:** as aberturas $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$, correspondem aos *ângulos internos* do ΔABC.

Classificação do Triângulo

Vamos apontar duas classificações clássicas para os triângulos. A primeira tem haver com a medida dos lados e a segunda tem que ver com a medida dos ângulos internos.

(I) Quanto aos Lados:

Observando a medida dos *lados* de um triângulo, podemos classificá-lo em:

(i) **Escaleno:** possui os três lados de medidas distintas.

(ii) **Isósceles:** possui dois lados com mesma medida.

(iii) **Equilátero:** possui todos os lados com mesma medida.

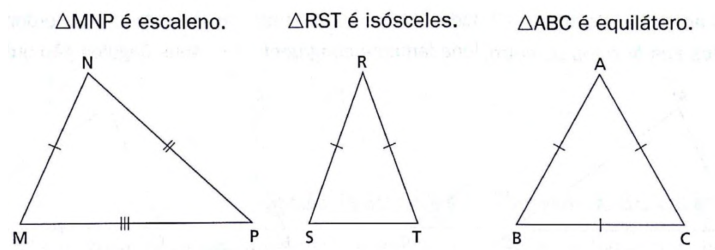


Figura A.7: Classificação de Triângulos - Lados
Fonte: [19] (p. 37)

(II) Quanto aos Ângulos:

Observando a medida dos *ângulos* de um triângulo, podemos classificá-lo em:

(i) **Obtusângulo:** possui um ângulo interno de medida *maior* que 90°.

(ii) **Acutângulo:** possui os três ângulos internos com medidas *menores* que 90°.

(iii) **Retângulo:** possui um ângulo interno com medida *igual* a 90°.

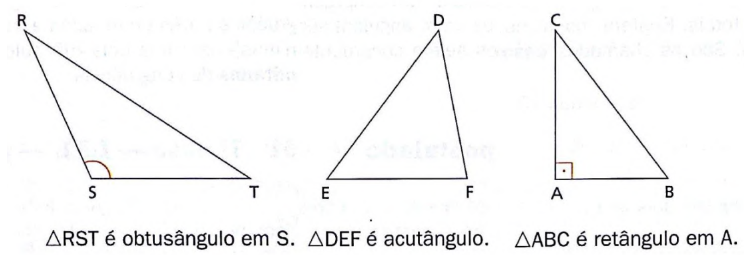


Figura A.8: Classificação de Triângulos - Ângulos
Fonte: [19] (p. 37)

A.2 Trigonometria no Triângulo Retângulo

A.2.1 Noções Gerais

Definição A.3 *A existência de um ângulo interno reto, ou seja, de medida* 90° *num triângulo, o caracteriza como* ***triângulo retângulo****.*

Este é ilustrado a seguir na figura A.9, com ângulo interno reto em $\widehat{BAC} = \alpha$.

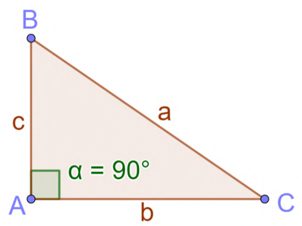


Figura A.9: Triângulo Retângulo

Elementos

Vamos elencar os elementos do triângulo ABC acima:

- **Lados:** $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. **Medida dos lados:** $a =$ medida de $\overline{BC}$, $b =$ medida de $\overline{AC}$ e $c =$ medida de $\overline{AB}$.
- **Ângulos:** $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$. **Medida dos ângulos:** $\widehat{A} =$ medida de $\widehat{BAC} = \alpha = 90^\circ$, $\widehat{B} =$ medida de $\widehat{ABC}$ e $\widehat{C} =$ medida de $\widehat{ACB}$.

Classificação dos Elementos

Os lados do triângulo retângulo possui a seguinte classificação:

(i) **Hipotenusa:** lado oposto ao ângulo reto, $\overline{BC} = a$.

(ii) **Catetos:** lados adjacentes ao ângulo reto, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$

A.2.2 Teorema de Pitágoras

Dentre os resultados mais aplicados para o triângulo retângulo está o *Teorema de Pitágoras*. Enunciado da seguinte forma:

Teorema A.1

A medida do quadrado da hipotenusa é igual soma da medida dos quadrados dos catetos.

Expresso algebricamente por:

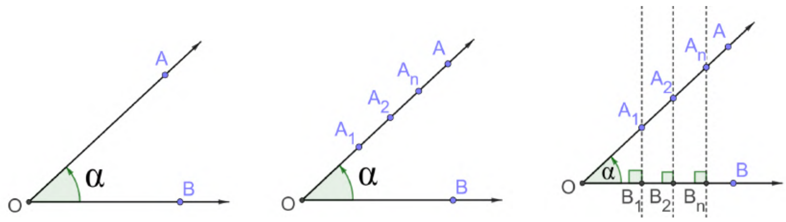
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

A.3 Razões Trigonométricas

Esta seção faz uma revisão das razões trigonométricas, a partir das relações existentes nos elementos de um triângulo retângulo ABC. Para tanto, fazemos isso a partir dos autores Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner e Manfredo P. Carmo [14].

A.3.1 Conceitos Introdutórios

Considere um ângulo $\widehat{AOB} = \alpha$, compreendido no intervalo $0 < \alpha < 90°$, pertencente às semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com vértice em O. Marcamos sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ os pontos $A_1, A_2, \cdots$,A$_n$. Em seguida, sobre a semirreta $\overrightarrow{OB}$, determinam-se os pés das perpendiculares dos pontos $A_1, A_2, \cdots$,A$_n$, marcando assim os pontos $B_1, B_2, \cdots$,B$_n$. Veja as ilustrações:



(a) (b) (c)

Figura A.10: Ângulos (a), Pontos (b) e Pés das Perpendiculares sobre as semirretas (c).

Os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, $\cdots$,OA$_nB_n$ são assim formados, e por terem todos os mesmos ângulos internos, caracterizam-se então como *semelhantes* entre si.

Da semelhança de triângulos, temos as seguintes relações entre os lados da figura A.16(c):

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = \cdots$$

Estas relações não dependem dos comprimentos dos lados dos triângulos, mas dependem exclusivamente do ângulo α.

Assim, dos triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, $\cdots$,OA$_nB_n$, decorrem as relações apresentados nos tópicos seguintes, todas elas constituídas como uma função de α, definidas no intervalo $0 < \alpha < 90°$.

Considere, portanto, o triângulo ABC, retângulo em $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, com o valor do ângulo em $\widehat{B}$ se mantendo constante:

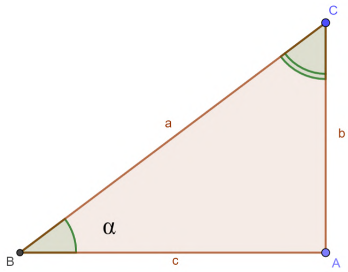


Figura A.11: Triângulo ABC, Retângulo em $\widehat{A}$

A.3.2 Seno

A razão em α assim constituída, e para o intervalo $0 < \alpha < 90^\circ$ é definida, de acordo com a figura A.16(c), por: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = \cdots$ (fixado α, o **cateto oposto** a α e a **hipotenusa** são *proporcionais*)

Assim, $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \text{sen}(\alpha)$, que se lê *seno de* α. Da figura A.11, fixando o ângulo agudo em $\widehat{B}$, temos que:

Seno do ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\boxed{\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{b}{a}} \tag{A.1}$$

A.3.3 Cosseno

A razão em α assim constituída, e para o intervalo $0 < \alpha < 90^\circ$ é definida, de acordo com a figura A.16(c), por: $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \cdots = \frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}} = \cdots$ (fixado α, o **cateto adjacente** a α e a **hipotenusa** são *proporcionais*)

Assim, $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \cos(\alpha)$, que se lê *cosseno de* α. Da figura A.11, fixando o ângulo agudo em $\widehat{B}$, temos que:

Cosseno do ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\boxed{\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}} \tag{A.2}$$

A.3.4 Tangente

A razão em α assim constituída, e para o intervalo $0 < \alpha < 90^\circ$ é definida, de acordo com a figura A.16(c), por: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}} = \cdots$ (fixado θ, o **cateto oposto** a α e o **cateto adjacente** são *proporcionais*)

Assim, $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \text{tg}(\alpha)$, que se lê *tangente de* α. Da figura A.11, fixando o ângulo agudo em $\widehat{B}$, temos que:

Tangente do ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

$$\boxed{\text{tg}\widehat{B} = \frac{b}{c}} \tag{A.3}$$

A.3.5 Cotangente

A razão em α assim constituída, e para o intervalo $0 < \alpha < 90^\circ$ é definida, de acordo com a figura A.16(c), por: $\dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \cdots = \dfrac{\overline{OB_n}}{\overline{A_nB_n}} = \cdots$ (fixado α, o **cateto adjacente** a α e o **cateto oposto** são *proporcionais*)

Assim, $\dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{A_1B_1}} = \text{cotg}(\alpha)$ que se lê *cotangente de* α. Da figura A.11, fixando o ângulo agudo em $\widehat{B}$, temos que:

Cotangente do ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto.

$$\boxed{\text{cotg}\widehat{B} = \frac{c}{b}} \tag{A.4}$$

A.3.6 Relação Trigonométrica Fundamental

Considerando a figura A.11, e as equações (3.1) e (3.2), elencadas anteriormente, podemos discorrer da seguinte forma:

(i)

$$\text{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \boxed{\text{b = a} \cdot \text{sen}\widehat{B}} \tag{A.5}$$

(ii)

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} \Longrightarrow \boxed{\text{c = a} \cdot \cos\widehat{B}} \tag{A.6}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{A.7}$$

Assim, substituindo as equações (3.5) e (3.6) em (3.7), temos:

$$a^2 = (a \cdot \text{sen}\widehat{B})^2 + (a \cdot \cos\widehat{B})^2$$

$$a^2 = (a^2) \cdot (\text{sen}\widehat{B})^2 + (a^2) \cdot (\cos\widehat{B})^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot \text{sen}^2\widehat{B} + a^2 \cdot \cos^2\widehat{B}, \text{dividindo a expressão por } a^2 \text{ temos:}$$

$$1 = \text{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}$$

Logo, para $\widehat{B} = \alpha$ temos:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1} \tag{A.8}$$

A.3.7 Consequências da Relação

(I) Considerando a figura A.11, tomamos a *equação (3.3)*: $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{b}{c}$,em que $\widehat{B} = \alpha$.

Note que, de (3.5) e de (3.6), podemos fazer:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{a \cdot \cos(\alpha)} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}} \tag{A.9}$$

(II) Considerando a figura A.11, tomamos a *equação (3.4)*: $\operatorname{cotg}(\alpha) = \dfrac{c}{b}$,em que $\widehat{B} = \alpha$.

Note que, de (3.5) e de (3.6), podemos fazer:

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{a \cdot \operatorname{sen}(\alpha)} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \tag{A.10}$$

(III) A cotangente de um ângulo corresponde ao *inverso* da tangente. Veja que:

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \Rightarrow \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} \Rightarrow \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{c}{b} \Rightarrow \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\frac{b}{c}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}} \tag{A.11}$$

A.3.8 Razões Trigonométricas de Ângulos Notáveis

Nesta seção vamos estabelecer, a partir do triângulo equilátero de lado ℓ e de um quadrado também de lado ℓ, os valores numéricos de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°.

Ângulo de 30°

Seja um triângulo equilátero de lado ℓ. E, de acordo com as propriedades da geometria plana[3], a *altura*, a *bissetriz* e a *mediana* no triângulo equilátero se *coincidem*.

[3]Mais precisamente no que diz respeito aos estudos das *cevianas* de um triângulo.

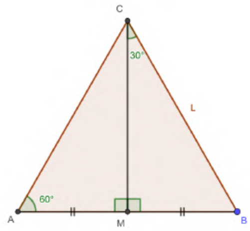


Figura A.12: Triângulo Equilátero

- $\overline{CM}$ é a altura h, então $\widehat{M} = 90°$;
- $\overline{CM}$ é a bissetriz, então $\widehat{C} = 30°$;
- $\overline{CM}$ é a mediana, então $\overline{AM} = \dfrac{\ell}{2}$.

Considerando o triângulo BCM, retângulo em $\widehat{M}$, da figura A.12 e pelo Teorema de Pitágoras calculamos a altura h do triângulo em função de ℓ:

$$(\overline{CB})^2 = (\overline{BM})^2 + (\overline{CM})^2 \Longrightarrow (\ell)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, podemos calcular os valores do seno, cosseno e tangente para o ângulo de $30°$.

(I) **Seno de** $30°$**:**

$$\operatorname{sen}(30°) = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Longrightarrow \operatorname{sen}(30°) = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}}$$

(II) **Cosseno de** $30°$**:**

$$\cos(30°) = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Longrightarrow \cos(30°) = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Longrightarrow \boxed{\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(III) **Tangente de** $30°$**:**

$$\operatorname{tg}(30°) = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow \operatorname{tg}(30°) = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}} \Longrightarrow \operatorname{tg}(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Ângulo de $45°$

Seja um quadrado de lado ℓ. E, de acordo com as propriedades da geometria, temos:

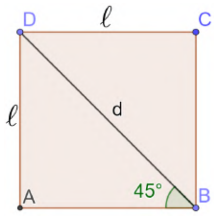


Figura A.13: Quadrado

Pelo Teorema de Pitágoras determinamos no triângulo ABD, retângulo em $\widehat{A}$, a medida da diagonal d do quadrado em função da medida ℓ do lado:

$(\overline{AD})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AD})^2$
$d^2 = (\ell)^2 + (\ell)^2$
$d^2 = 2 \cdot (\ell)^2$
$d = \sqrt{2 \cdot \ell^2} \Longrightarrow d = \ell \cdot \sqrt{2}$

Com isso, podemos calcular os valores do seno, cosseno e tangente para o ângulo de 45°.

(I) **Seno de** 45°**:**

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Longrightarrow \operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(II) **Cosseno de** 45°**:**

$$\cos(45^\circ) = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(III) **Tangente de** 45°**:**

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{\ell}{\ell} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}(45^\circ) = 1}$$

Ângulo de 60°

Considerando o triângulo AMC, retângulo em $\widehat{M}$, da figura A.12 e pelo Teorema de Pitágoras, podemos calcular os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo de 60°.

(I) **Seno de** 60°**:**

$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Longrightarrow \operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(II) **Cosseno de** 60°**:**

$$\cos(60^\circ) = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Longrightarrow \cos(60^\circ) = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Longrightarrow \boxed{\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}}$$

(III) **Tangente de** 60°**:**

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} \Longrightarrow \operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}}$$

Tabela de Ângulos Notáveis

Com os resultados apresentados anteriormente, podemos de maneira didática, montar uma tabela para consulta rápida desses valores para ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela A.1: Ângulos Notáveis

A.4 Circunferência Trigonométrica

Esta seção tem como foco caracterizar a relação existente entre o plano cartesiano ortogonal e a circunferência de raio unitário construída analiticamente sobre esse plano com centro na origem. Para construção de tal conceito trigonométrico levamos em consideração a abordagem sobre *ângulos* e *arcos* já apresentada no início do apêndice.

A.4.1 Sistema de Coordenadas no Plano

Representação Gráfica

Para uma representação gráfica de um ponto qualquer P, fixamos um ponto O, chamado *origem*, e por O traçamos duas retas x e y, perpendiculares, chamadas de *eixos coordenados*, determinando assim o plano α. Sobre estas retas escolhemos a unidade de medir e o sentido dos percursos.

Denominamos P_1 a intersecção de x com a reta horizontal y' e P_2 a intersecção com a reta vertical x'.

Desta forma, a cada ponto P do plano α corresponde um único par ordenado de números reais, representados por (x, y).

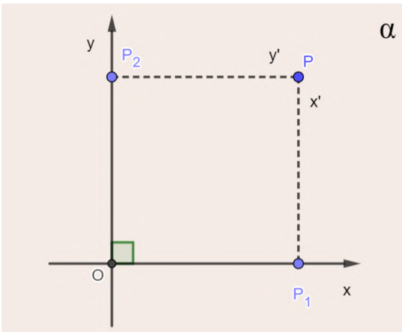


Figura A.14: Plano Cartesiano

Com essas condições podemos assim definir para o par (x, y) de coordenadas de P no *sistema xOy* da seguinte forma:

(i) **Origem:** o sistema inicia no ponto O;

(ii) **Abscissa:** é o número real x_P representado por P_1;

(iii) **Ordenada:** é o número real y_P representado por P_2;

(iv) **Coordenada:** são os números reais x_p e y_P, indicados pelo par ordenado (x_P, y_P);

(v) **Eixo das Abscissas:** corresponde ao eixo Ox;

(vi) **Eixo das Ordenadas:** corresponde ao eixo Oy;

(vii) **Sistema de Eixos Cartesiano Ortogonal:** é o sistema xOy, também chamado sistema *ortonormal* ou *retangular*;

(viii) **Plano Cartesiano:** é o plano α;

(ix) **Quadrante:** corresponde cada uma das quatro regiões do plano α, determinadas pelas retas x e y. Os sinais das coordenadas estão bem determinados e os quadrantes são denominados de 1^o, 2^o, 3^o e 4^o.

Exemplo 19 *Vejamos na figura A.15 a seguir como os elementos apresentados acima ficam dispostos no plano cartesiano ortogonal.*

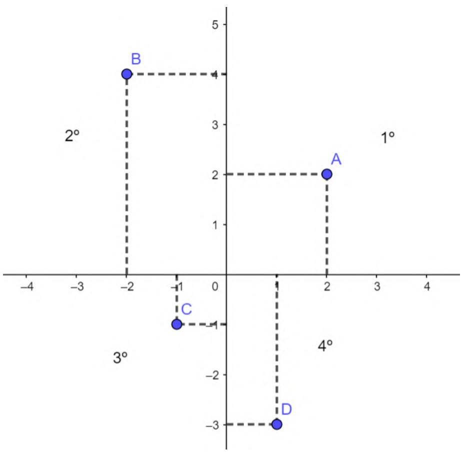


Figura A.15: Quadrantes

A.4.2 Ciclo Trigonométrico

De acordo com Carmo *et al* [14], a ideia de representar pontos de um plano cartesiano por pares coordenados é extremamente fértil. Pois, possibilita a observação gráfica e comportamento de determinado fenômeno.

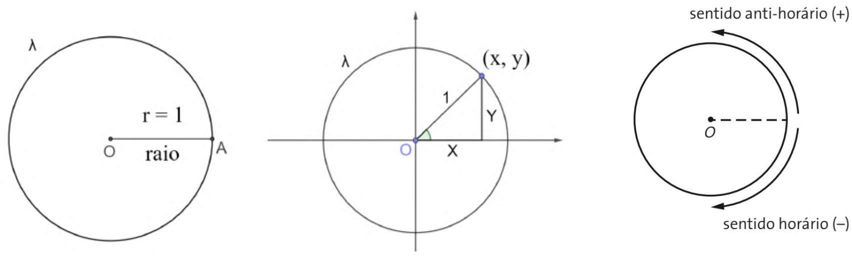
A *circunferência* é definida como o conjunto de pontos de um plano que estão a uma distância fixa (na nossa representação essa distância vale 1 unidade de medida) de um ponto fixo O do plano, representada por λ, com raio unitário e centro O. Também é chamado de *círculo unitário* do plano.

Definição A.4 *Consideramos sobre um plano um sistema ortonormal de eixos coordenados xOy, de origem em O, e* 1 *(uma) unidade igual ao raio r da circunferência* λ. *Assim, podemos associar em todo ponto de* λ *uma coordenada cartesiana* (x,y). *Então esta corresponde à representação do* ***ciclo*** *ou* ***circunferência trigonométrica****.*

Observe que, em todo ponto de λ decorre das coordenadas (x,y), que pelo Teorema de Pitágoras satisfazem a relação: $x^2 + y^2 = 1$.

Daí, uma vez que podemos representar os pontos de plano por pares de números, decorre que podemos representar uma circunferência pela relação acima apresentada.

Desta forma podemos expor a orientação que a circunferência adquire. Fixamos um ponto, e atribuímos um sentido de percurso. Tradicionalmente é estabelecido o sentido *positivo* como o *anti-horário* e o sentido *negativo* como *horário*.



(a) (b) (c)

Figura A.16: Circunferência (a), Ciclo Trigonométrico (b) e Sentidos (c).

A.4.3 Razões no Ciclo Trigonométrico

Vamos abordar a principais razões trigonométricas vistas no triângulo retângulo, a saber o seno, cosseno, tangente e cotangente, mas agora sob a perspectiva do ciclo trigonométrico.

Anteriormente, o estudo das razões trigonométricas se deu para os ângulos agudos, em que definimos seus $\text{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$ e $\text{cotg}(\alpha)$ a partir do triângulo retângulo com valores entre $0 < \alpha < 90°$. Buscamos, a partir de então, ampliar esse conceito para as razões trigonométricas para um ângulo α, com $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$ (em graus) ou $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (em radianos).

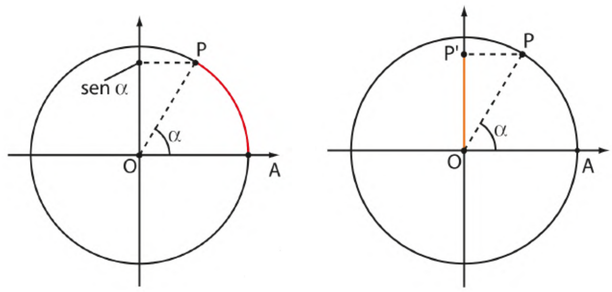
Sintetizamos a seguir como o autor Gelson Iezzi [21, 22] enuncia tais razões trigonométricas.

Seno

Para o estudo da razão *seno*, associa-se a este o eixo das *ordenadas*.

Seja então P um ponto no ciclo trigonométrico, imagem de um ângulo α, com medida entre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Portanto, temos o **seno de** α como a ordenada $\overline{OP'}$ do ponto P.



(a) (b)

Figura A.17: Seno no Ciclo Trigonométrico
Fonte: [23] (p. 20)

Assim, o *eixo vertical* corresponde ao *eixo dos senos*.

Exemplo 20 *Podemos representar os senos dos ângulos notáveis de* 30°*,* 45° *e* 60° *no ciclo trigonométrico, conforme figura a seguir:*

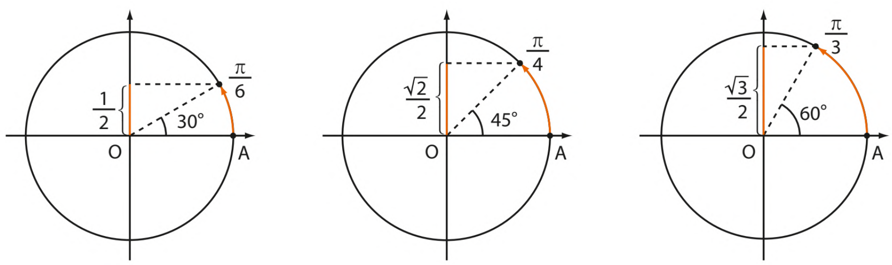


Figura A.18: Senos de Ângulos Notáveis
Fonte: [23] (p. 21)

Propriedade I: sinal

(i) Se P é um ponto do primeiro ou segundo quadrante, então o sinal do $\text{sen}(\alpha)$ é *positivo*.

(ii) Se P é um ponto do terceiro ou quarto quadrante, então o sinal do $\text{sen}(\alpha)$ é *negativo*.

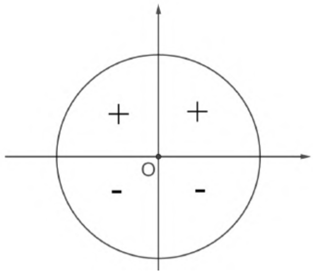


Figura A.19: Sinal do Seno

Propriedade II: comportamento

(i) Se P percorre o primeiro ou quarto quadrante, então o $\text{sen}(\alpha)$ é *crescente*.

(ii) Se P percorre segundo ou terceiro quadrante, então o $\text{sen}(\alpha)$ é *decrescente*.

Sintetizamos essa propriedade na tabela A.2 a seguir:

α	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\rightarrow$	2π
$\text{sen}(\alpha)$	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

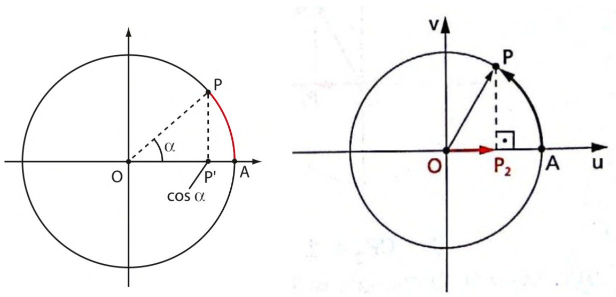
Tabela A.2: Comportamento do Seno

Cosseno

Para o estudo da razão *cosseno*, associas-se a este o eixo das *abscissas*.

Seja então P um ponto no ciclo trigonométrico, imagem de um ângulo α, com medida entre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Portanto, temos o **cosseno de** α como a abscissa $\overline{OP_2'}$ do ponto P.



(a) (b)

Figura A.20: Cosseno no Ciclo Trigonométrico
Fonte: [23] (p. 24) (a) e [21] (p. 45) (b)

Assim, o *eixo horizontal* corresponde ao *eixo dos cossenos*.

Exemplo 21 *Podemos representar os cossenos dos ângulos notáveis de* 30°, 45° *e* 60° *no ciclo trigonométrico, conforme figura a seguir:*

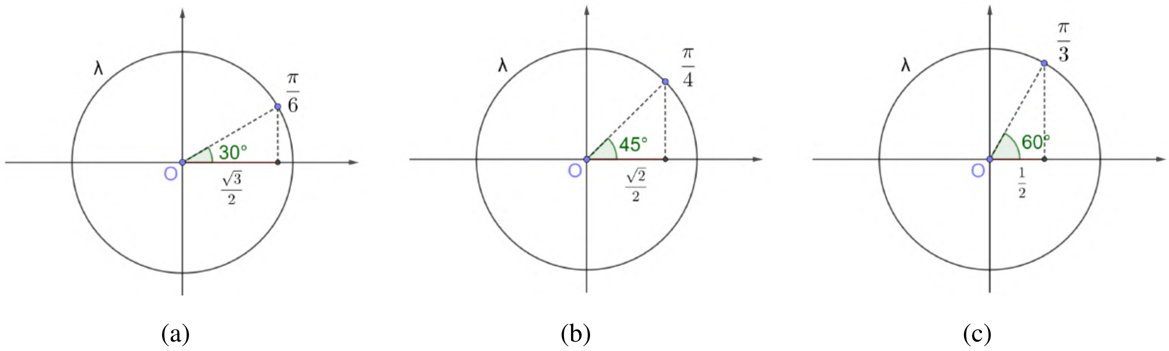


Figura A.21: Cossenos de Ângulos Notáveis

Propriedade I: sinal

(i) Se P é um ponto do primeiro ou quarto quadrante, então o sinal do $\cos(\alpha)$ é *positivo*.

(ii) Se P é um ponto do segundo ou terceiro quadrante, então o sinal do $\cos(\alpha)$ é *negativo*.

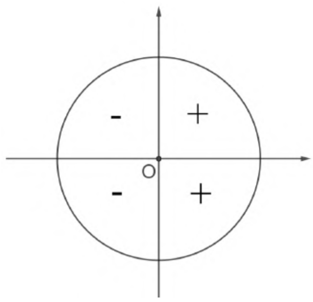


Figura A.22: Sinal do Cosseno

Propriedade II: comportamento

(i) Se P percorre o primeiro ou segundo quadrante, então o $\cos(\alpha)$ é *decrescente*.

(ii) Se P percorre terceiro ou quarto quadrante, então o $\cos(\alpha)$ é *crescente*.

Sintetizamos essa propriedade na tabela A.4 a seguir:

α	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\rightarrow$	2π
$\cos(\alpha)$	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Tabela A.3: Comportamento do Cosseno

Tangente

Para o estudo da razão *tangente*, associa-se um *eixo vertical*, tangenciando a circunferência trigonométrica em A.

Seja então P um ponto no ciclo trigonométrico, imagem de um ângulo α, com medida entre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Portanto, temos a **tangente de** α como a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ do ponto P.

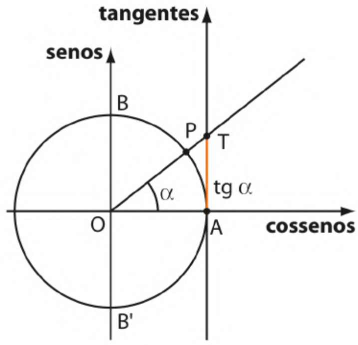


Figura A.23: Tangente no Ciclo Trigonométrico
Fonte: [23] (p. 30)

Nota-se que, para $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ *rad*, P está em B, e para $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ *rad*, P está em B'. Casos em que não ocorre T. Logo a tangente não existe para os ângulos de 90° e 270°.

Exemplo 22 *Podemos representar as tangentes dos ângulos notáveis de* 30°*,* 45° *e* 60° *no ciclo trigonométrico, conforme figura a seguir:*

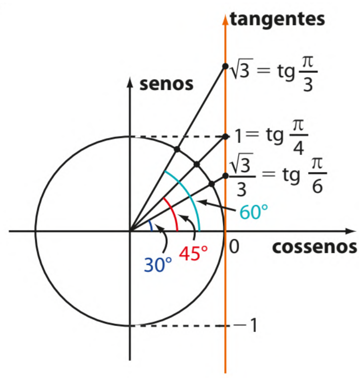


Figura A.24: Tangente de Ângulos Notáveis
Fonte: [23] (v. 2, p. 31)

Propriedade I: sinal

(i) Se P percorre o primeiro ou terceiro quadrante, então o sinal da $\text{tg}(\alpha)$ é *positivo*.

(ii) Se P percorre segundo ou quarto quadrante, então o sinal da $\text{tg}(\alpha)$ é *negativo*.

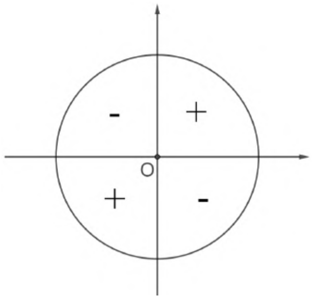


Figura A.25: Sinal da Tangente

Propriedade II: comportamento

(i) Se P percorre qualquer quadrante, então a $\text{tg}(\alpha)$ é sempre *crescente*.

Sintetizamos essa propriedade na tabela A.4 a seguir:

α	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\rightarrow$	2π
$\text{tg}(\alpha)$	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0

Tabela A.4: Comportamento da Tangente

Cotangente

Para o estudo da razão *cotangente*, associa-se um *eixo horizontal*, tangenciando a circunferência trigonométrica em B.

Seja então P um ponto no ciclo trigonométrico, imagem de um ângulo α, com medida entre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Portanto, temos a **cotangente de** α como a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$ do ponto P.

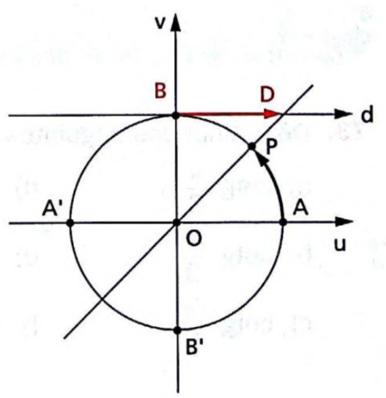


Figura A.26: Cotangente no Ciclo Trigonométrico
Fonte: [21] (p. 55)

Nota-se que, para $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = \pi\, rad$ ou $\alpha = 2\pi\, rad$, P está em A, ou P está em A'. Casos em que não ocorre D. Logo a cotangente não existe para os ângulos de 0°, 180° ou 360°.

Exemplo 23 *Podemos representar as cotangentes dos ângulos notáveis de* 30°, 45° *e* 60° *no ciclo trigonométrico, conforme figura a seguir:*

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{cotg}(30^\circ) = \sqrt{3}; \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}(45^\circ) = 1; \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{cotg}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

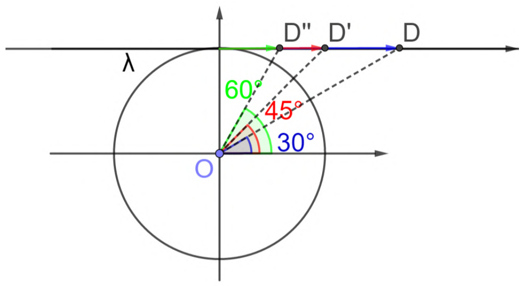


Figura A.27: Cotangente de Ângulos Notáveis

Propriedade I: sinal

(i) Se P percorre o primeiro ou terceiro quadrante, então o sinal da $\operatorname{cotg}(\alpha)$ é *positivo*.

(ii) Se P percorre segundo ou quarto quadrante, então o sinal da $\operatorname{cotg}(\alpha)$ é *negativo*.

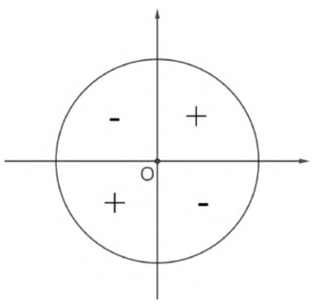


Figura A.28: Sinal da Cotangente

Propriedade II: comportamento

(i) Se P percorre qualquer quadrante, então a $\operatorname{cotg}(\alpha)$ é sempre *decrescente*.

Sintetizamos essa propriedade na tabela A.5 a seguir:

α	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\rightarrow$	2π
$\operatorname{cotg}(\alpha)$	$\nexists$	decresce	0	decresce	$\nexists$	decresce	0	decresce	$\nexists$

Tabela A.5: Comportamento da Cotangente

A.5 Funções Trigonométricas

Nesta seção, tendo como principal fonte os trabalhos do autor Iezzi [21], expomos as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente e cotangente.

A.5.1 Função Seno

Seja α um ângulo e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de **função trigonométrica seno** a aplicação que para cada valor real de α existe sempre um único valor real para $\text{sen}(\alpha)$. Ou seja, $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, de modo que $\alpha \longrightarrow f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$.

Exemplo 24 *De acordo com a primeira volta positiva de* $f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$*, observe o gráfico da função seno:*

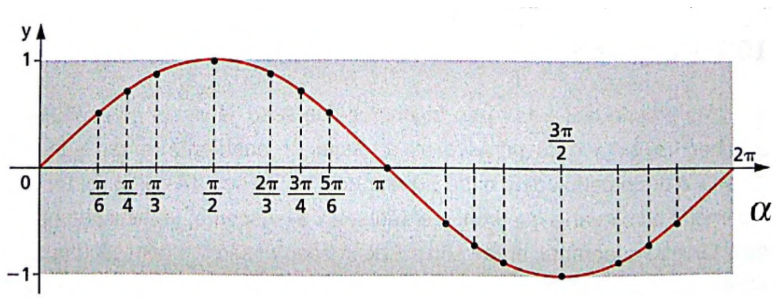


Figura A.29: Função $f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$
Fonte: [21] (p. 94)

Propriedades

(I) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, para todo α real;

(II) A função seno é periódica e seu período é 2π;

(III) O gráfico é *simétrico* em relação a origem;

(IV) A curva gráfica é chamada de *senoide*.

A.5.2 Função Cosseno

Seja α um ângulo e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de **função trigonométrica cosseno** a aplicação que para cada valor real de α existe sempre um único valor real para $\cos(\alpha)$. Ou seja, $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, de modo que $\alpha \longrightarrow f(\alpha) = \cos(\alpha)$.

Exemplo 25 *De acordo com a primeira volta positiva de* $f(\alpha) = \cos(\alpha)$*, observe o gráfico da função cosseno:*

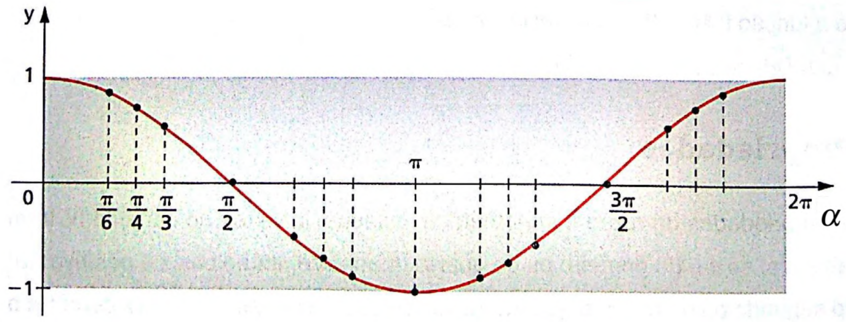


Figura A.30: Função $f(\alpha) = \cos(\alpha)$
Fonte: [21] (p. 104)

Propriedades

(I) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, para todo α real;

(II) A função cosseno é periódica e seu período é 2π;

(III) A curva gráfica é chamada de *cossenoide*.

A.5.3 Função Tangente

Seja α um ângulo, com medida entre $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de **função trigonométrica tangente** a função que para cada valor real de α, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$, existe sempre um único valor real para $\text{tg}(\alpha)$. Ou seja, $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $\alpha \longrightarrow f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$.

Exemplo 26 *De acordo com a primeira volta positiva de* $f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$*, observe o gráfico da função tangente:*

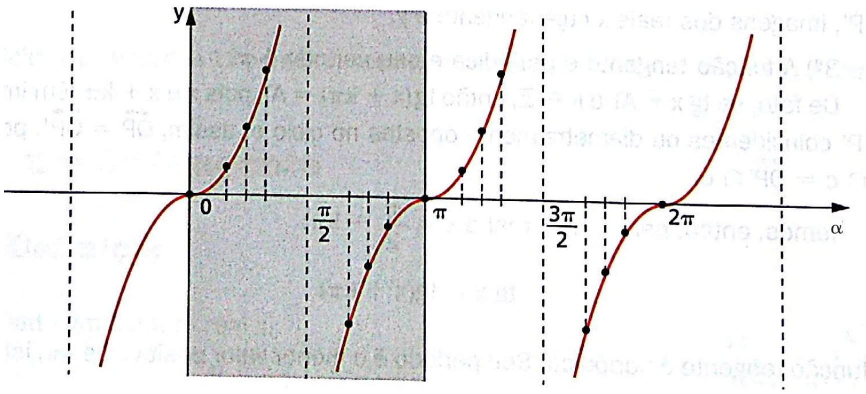


Figura A.31: Função $f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$
Fonte: [21] (p. 108)

Propriedades

(I) A imagem da função tangente são os reais $\mathbf{R}$, ou seja, para todo α real existe um y real tal que $f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$;

(II) O domínio de $f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$ é o conjunto $D = \left\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$;

(III) A função tangente é periódica e seu período é π;

(IV) A curva gráfica é chamada de *tangentoide*.

A.5.4 Função Cotangente

Seja α um ângulo, com medida entre $\alpha \neq k \cdot \pi$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de **função trigonométrica cotangente** a função que para cada valor real de α, com $\alpha \neq k \cdot \pi, k \in \mathbf{Z}$, existe sempre um único valor real para $\text{cotg}(\alpha)$. Ou seja, $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $\alpha \longrightarrow f(\alpha) = \text{cotg}(\alpha)$.

Exemplo 27 *De acordo com a primeira volta positiva de* $f(\alpha) = \text{cotg}(\alpha)$*, observe o gráfico da função cotangente:*

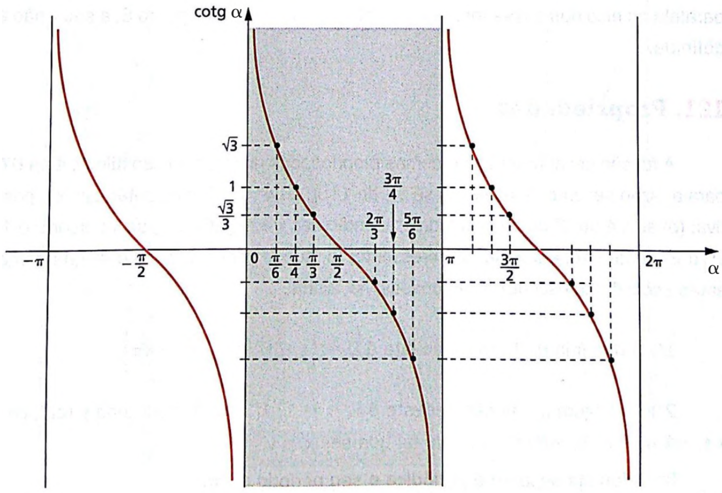


Figura A.32: Função $f(\alpha) = \text{cotg}(\alpha)$
Fonte: [21] (p. 111)

Propriedades

(I) A imagem da função cotangente são os reais $\mathbf{R}$, ou seja, para todo α real existe um y real tal que $f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$;

(II) O domínio de $f(\alpha) = \text{tg}(\alpha)$ é o conjunto $D = \{x \in \mathbf{R} | x \neq k \cdot \pi\}$;

(III) A função cotangente é periódica e seu período é π;

(IV) A curva gráfica é chamada de *cotangentoide*.

A.6 Outras Razões Trigonométricas

Este tópico tem o intuito de apontar, sem o rigor que a demonstração matemática exige, as relações que são *derivadas* das razões trigonométricas, a redução ao primeiro quadrante, as equações trigonométricas para seno, cosseno e tangente e as razões trigonométricas para triângulos quaisquer.

A.6.1 Relações Fundamentais

A Relação Fundamental da Trigonometria, já abordada nos tópicos anteriores, é a expressão gênese para chegar aos demais resultados.

Seja α um arco no ciclo trigonométrico, temos que:

(I) A soma dos quadrados do seno e do cosseno de um mesmo arco é igual à unidade.

$$\boxed{\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1} \tag{A.12}$$

(II) A **tangente** de um arco é a razão entre o seno e o cosseno desse arco.

$$\boxed{\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}} \tag{A.13}$$

(III) A **secante** de um arco é o inverso do cosseno desse arco.

$$\boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}} \tag{A.14}$$

(IV) A **cotangente** de um arco é a razão entre o cosseno e o seno desse arco.

$$\boxed{\text{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}} \tag{A.15}$$

(V) A **cossecante** de um arco é o inverso do seno desse arco.

$$\boxed{\text{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}} \tag{A.16}$$

A.6.2 Relações Derivadas

A partir das expressões fundamentais acima, podemos deduzir as seguintes relações *derivadas*:

Seja α um arco no ciclo trigonométrico, temos que:

(I) A **cotangente** de um arco é o inverso da tangente desse arco.

$$\boxed{\text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}} \tag{A.17}$$

(II) O quadrado da secante de um arco é igual à unidade mais o quadrado da tangente desse arco.

$$\boxed{\sec^2(\alpha) = 1 + \text{tg}^2(\alpha)} \tag{A.18}$$

(III) O quadrado da cossecante de um arco é igual à unidade mais o quadrado da cotangente desse arco.

$$\boxed{\text{cossec}^2(\alpha) = 1 + \text{cotg}^2(\alpha)} \tag{A.19}$$

A.6.3 Redução Ao 1º Quadrante

O autor José de A. Filho [20] enuncia que, dado um arco fora do intervalo entre 0° e 90°, pode ser achado um outro arco, e somente um, compreendido entre 0° e 90°, tal que as funções circulares sejam valores absolutos daquelas do mesmo arco dado. Essa pesquisa para um novo arco denomina-se *redução ao primeiro quadrante*.

Com essa operação de redução torna possível calcular todas as funções no ciclo trigonométrico a partir dos arcos situados no intervalo entre 0° e 90°.

Primeiro caso

O arco é positivo e menor que o arco de uma circunferência completa, $90^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Assim temos: $\begin{cases} 180^\circ - \alpha, & \text{se} \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ \\ \alpha - 180^\circ, & \text{se} \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ \\ 360^\circ - \alpha, & \text{se} \quad 270^\circ < \alpha < 360^\circ \end{cases}$

Segundo caso

O arco é positivo e maior que o arco de uma circunferência completa, $\alpha > 360^\circ$.

Neste caso, dividimos a medida do arco α dado por 360, obtendo um quociente q e um resto r, com $r < 360$, logo:

$$\alpha = 360^\circ \cdot q + r$$

Em que q corresponde aos arcos completos na circunferência, e o resto r determina o quadrante em que cai a extremidade.

Assim temos: $\begin{cases} \text{Se} \quad r < 90^\circ, & \text{então } r \text{ é o arco procurado;} \\ \text{Se} \quad r > 90^\circ, & \text{então usamos o caso 1.} \end{cases}$

Terceiro caso

O arco é negativo.

Observação A.1 *Neste caso aludimos a um dos dois casos anteriores mediante a consideração do arco simétrico do arco dado, que é positivo.*

A.6.4 Equações Trigonométricas

Tratamos nesse tópico das funções circulares que possuem expressões algébricas com incógnitas. Faremos os casos para seno, cosseno e tangente.

Sejam as funções trigonométricas $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$, com a variável $\alpha \in \mathbf{R}$ e com D_1 e D_2 os respectivos domínios de f e g.

Assim, denomina-se de **equação trigonométrica** as equações que possuem funções circulares de arcos incógnitos.

Equações Trigonométricas Elementares

De acordo com Gelson Iezzi [21], resolver tais equações consiste em achar as soluções, ou *raízes* com números ilimitados, mas que se reduz sempre à equações de uma das formas a abaixo:

(I) $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$

Toda resolução vai se reduzir a duas possibilidades:

(i) α e β são arcos *côngruos*. Isto é, possuem mesma imagem.

Logo, temos que: $\boxed{\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) \Longrightarrow \{\alpha = \beta + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

(ii) α e β são arcos *suplementares*. Isto é, são simétricos em relação ao eixo dos senos.

Logo, temos que: $\boxed{\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) \Longrightarrow \{\alpha = (\pi - \beta) + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

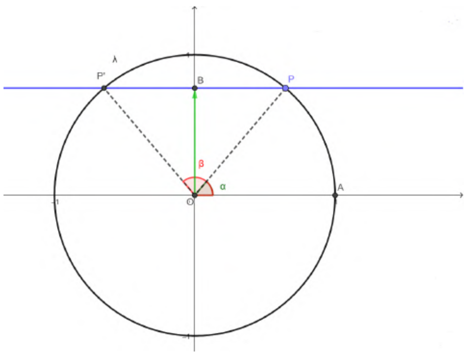


Figura A.33: Resolução do Seno

(II) $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$

Toda resolução vai se reduzir a duas possibilidades:

(i) α e β são arcos *côngruos*. Isto é, possuem mesma imagem.

Logo, temos que: $\boxed{\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Longrightarrow \{\alpha = \beta + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

(ii) α e β são arcos *replementares*. Isto é, são simétricos em relação ao eixo dos cossenos.

Logo, temos que: $\boxed{\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Longrightarrow \{\alpha = -\beta + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

Resumidamente: $\boxed{\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Longrightarrow \alpha = \pm\beta + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

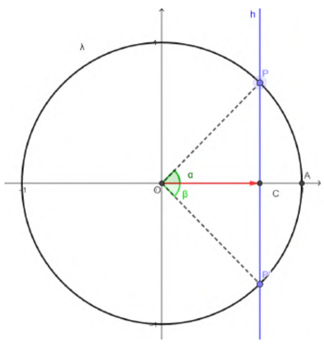


Figura A.34: Resolução do Cosseno

(III) $\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\beta)$

Toda resolução vai se reduzir a duas possibilidades:

(i) α e β são arcos *côngruos*. Isto é, possuem mesma imagem.

Logo, temos que: $\boxed{\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\beta) \Longrightarrow \{\alpha = \beta + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

(ii) α e β são arcos *explementares*. Isto é, são simétricos em relação ao eixo dos cossenos.

Logo, temos que: $\boxed{\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\beta) \Longrightarrow \{\alpha = (\pi + \beta) + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

Resumidamente: $\boxed{\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\beta) \Longrightarrow \alpha = \beta + k \cdot \pi}$, com $k \in \mathbf{Z}$.

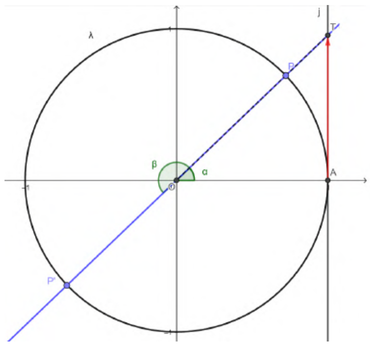


Figura A.35: Resolução da Tangente

A.6.5 Triângulos Quaisquer

Nesta seção, a partir do autor Luiz R. Dante [18], abordamos as expressões do estudo das Leis dos Senos e dos Cossenos.

Lei dos Senos

Teorema A.2 *Num triângulo qualquer, comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.*

Assim temos:

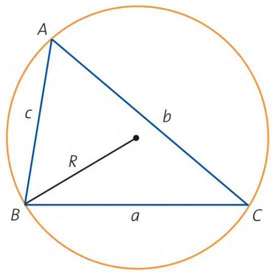


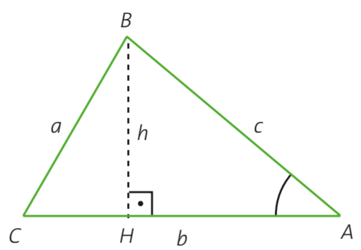
Figura A.36: Lei dos Senos
Fonte: [18] (p. 15)

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R} \tag{A.20}$$

Lei dos Cossenos

Teorema A.3 *Num triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, subtraído do dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.*

Para o triângulo ABC temos:



$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\widehat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\widehat{C}) \end{array}} \tag{A.21}$$

Figura A.37: Lei dos Cossenos
Fonte: [18] (p. 18)

Com isso encerramos este apêndice que fez um aparato geral das principais proposições e teoremas da Trigonometria que podem ser vistos nos livros didáticos do ensino médio. Seus diversos tópicos aqui listados podem servir como base de referência e comparação na consulta com os conteúdos de Trigonometria apresentados nas obras dos livros didáticos do Guia PNLD 2018 - Matemática e uma possibilidade para verificar, a partir desses conteúdos, o nível de dificuldade com que o docente pode abordar as questões de Trigonometria que caem no ENEM.