UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Análise e uso do conceito de função e de função bijetiva em livros do Ensino Médio - uma contribuição reflexiva para a formação do professor

Wagner Negromonte de Albuquerque Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2020

S586a Silva, Wagner Negromonte de Albuquerque.
Análise e uso do conceito de função e de função bijetiva em livros do ensino médio - uma contribuição reflexiva para a formação do professor / Wagner Negromonte de Albuquerque Silva. - Campina Grande, 2020.
174f. : il. Color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais".
Referências.

1. Ensino Médio. 2. Licenciatura em Matemática. 3. Funções Bijetivas. 4. Funções. I. Morais, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 373.5:51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS CRB-15/93

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Análise e uso do conceito de função e de função bijetiva em livros do Ensino Médio - uma contribuição reflexiva para a formação do professor

por

Wagner Negromonte de Albuquerque Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Análise e uso do conceito de função e de função bijetiva em livros do Ensino Médio - uma contribuição reflexiva para a formação do professor

por

Wagner Negromonte de Albuquerque Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Romildo N. de Lima

Prof. Dr. Romildo Nascimento Lima - UFCG

Prof. Dra. Rubia Gonçalves Nascimento - UFPA

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto / 2020

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, senhor de toda a criação e do universo.

Agradeço a meus pais, Maria Edjane e José Almeida, que conseguiram guiar a mim e meus irmãos, através de uma criação exemplar a trilhar um caminho de decência e integridade, persistindo sempre no caminho da humildade e da decência, além se estarem sempre conosco nas alegrias, mas também nas dificuldades da vida.

Aproveito também para agradecer aos amigos do PROFMAT, Matheus, Bruno, Renato, Lucielma, Sandra, Teófilo, Márcio, Marília, Railton, Geraldo, Rejane, Eduardo, Airtonelton, Daniel, Hydayane... além de tantos outros amigos, em que durante esses dois anos e meio tive o prazer de conhecê-los, pessoas extremamente exemplares, em que conseguimos estabelecer um laço forte de companheirismo e amizade, em que guardarei vocês para sempre em meu coração; portanto, sintam-se abraçados e vamos comemorar essa grande vitória.

Agradeço também a todo o corpo docente do PROFMAT, representado pelo coordenador Professor Romildo Lima, que durante esse período nos auxiliou com toda sua dedicação e empenho para que nós, possamos nos dedicar mais ao estudo e Ensino da Matemática, de modo que nós, como professores, busquemos aprimorar a nossa forma de estudar e aprender de modo mais crítico, fazendo-nos enxergar com uma outra visão detalhes que, até pouco tempo, não víamos do modo como deveria.

Agradeço ao meu Orientador Prof. Daniel Cordeiro, que durante esse período apesar das dificuldades, me ajudou bastante na construção desse trabalho, que mesmo sendo árdua, temos certeza de que contribuirá de modo significativo aos amigos professores que o lerem.

Agradeço também ao amigo Rodrigo Marques Faustino, que também me auxiliou de forma bastante significativa na construção desse trabalho.

Agradeço à SBM e à UFCG pelo oferecimento do curso.

Resumo

Nesse trabalho, faremos uma análise sobre o conceito de função, de função bijetiva e a apresentação desses conceitos em livros do Ensino Médio. Nossa análise foca-se no uso e necessidade desses conceitos para se entender conceitos posteriores, como funções inversas, em particular, a função exponencial e a função logarítmica. Apesar dos conceitos serem corriqueiros, traremos discussões e reflexões sobre esses conceitos que surgem quando se faz uma análise mais profunda do assunto, transcendendo a exposição encontrada na literatura em livros do Ensino Médio, muitas vezes despercebida por professores e alunos. Essas análises são feitas, levando-se em conta a importância dos conceitos básicos de função e de suas classificações em outros assuntos curriculares da Matemática, o domínio do professor sobre o tema, e sua exposição em sala de aula, tudo focando a ampliação do conhecimento docente sobre a matéria.

Palavras chave: Função. Função bijetiva. Licenciatura em Matemática. Ensino Médio.

Abstract

In this work, we will analyze the concept of function, of bijective function and the presentation of these concepts in high school books. Our analysis focuses on the use and need of these concepts to understand later concepts, such as inverse functions, in particular, the exponential function and the logarithmic function. Although the concepts are commonplace, we will bring discussions and reflections on these concepts that arise when a deeper analysis of the subject is made, transcending the exposure found in the literature in high school books, often unnoticed by teachers and students. These analyzes are made, taking into account the importance of the basic concepts of function and their classifications in other Mathematical curricular subjects, the teacher's mastery over the theme, and his exposure in the classroom, all focusing on the expansion of knowledge teacher on the subject.

Keywords: Function. Bijective function. Degree in Mathematics. High school.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Na Matemática, o estudo de funções é algo de suma importância, pois se trata de um conceito primordial que se faz presente em outros campos da Matemática, como a Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística, etc. Mas também, faz ponte com outros campos da ciência, como a Física, Química, Biologia, etc. Por se tratar de um conceito importante, os currículos educacionais de Ensino Médio fazem menção a esse conceito, ressaltando a importância de se trabalhar esse tema nessa etapa de escolaridade. Inclusive o PCE-PE (2012) [14] faz a seguinte colocação:

> “ O estudo das funções é essencial nesta etapa de escolaridade, principalmente por seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social.” (PCE-PE,2012,p.129)

Conforme o PCE-PE (2012) [14] coloca, o estudo de funções têm o papel de relacionar grandezas e associá-las, com isso, é importante que o professor aborde adequadamente esse conceito em sala de aula, e nós, nos Capítulos 2 e 3 discutimos sobre o conceito de função e os elementos que a compõem, buscando orientar ao professor sobre como ele deve abordar esse conceito em sala de aula.

Já nos Capítulos 4 e 5, abordamos os conceitos de função injetiva e sobrejetiva, que geralmente os autores abordam nos livros de Ensino Médio mas, em grande parte das vezes, os autores abordam pouco essa temática, fazendo uso de poucos exemplos, o que acaba ocultando informações que poderiam ser úteis ao aluno, auxiliando-o a compreender melhor o conceito de função inversa, que abordamos no Capítulo 7.

No Capítulo 7, abordamos o conceito de função inversa, bastante requisitado nos livros de Ensino Médio, permite ao aluno compreender melhor a relação existente entre algumas funções e como elas podem ser trabalhadas como, por exemplo, entender a relação existente entre as funções logarítmica e exponencial. Uma outra observação que fazemos é quanto à simetria existente entre o gráfico de uma função e de sua inversa, que sendo trabalhada em sala de aula adequadamente, auxilia o aluno a compreender melhor como devem ser esboçados os gráficos de algumas funções, por exemplo, o gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da exponencial.

Por fim, no Capítulo 8 abordamos o estudo das funções logarítmica e exponencial, que estão presentes nos currículos brasileiros de Ensino Médio, seja a BNCC (2017) [10] ou nos currículos estaduais. Inclusive, a BNCC (2017) [10] coloca as seguintes competências a serem desenvolvidas pelos alunos, no tocante ao estudo dessas funções:

> - "(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros;
> - (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira entre outros." (BNCC,2017,p.536)

O PCE-PE (2012) [14] descreve as seguintes competências quanto ao estudo da função exponencial:

> - " Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma função exponencial associando-a ao seu padrão de crescimento;
> - Diferenciar o modelo de crescimento/decrescimento da função exponencial em relação às funções lineares e quadráticas. " (PCE-PE,2012,p.131)

Conforme podemos notar, a importância do estudo das funções inversas no Ensino Médio é justamente favorecer ao aluno compreender melhor como trabalhar adequadamente o conceito de função logarítmica, que é bem requisitado nos currículos educacionais e bastante explorado pelos livro didáticos, em que cabe ao professor abordar adequadamente esse conceito de modo que o aluno entenda-o de modo claro, e como deve utilizá-lo na resolução de situações-problema.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

- Explorar o conceito de função e ressaltar a importância do estudo das funções injetivas e sobrejetivas, discutindo como esses conceitos devem ser trabalhados em sala de aula.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar as definições de função e discuti-las, auxiliando ao professor sobre como abordar o conceito de função da melhor forma em sala de aula;
- Apresentar os elementos que compõem uma função e discutir sobre sua importância, além de observar a relação entre domínio e contradomínio de uma função com os conceitos de injetividade e sobrejetividade, respectivamente;
- Abordar o conceito de função inversa e discuti-lo, além de aplicá-lo à definição de função logarítmica, a partir da função exponencial;
- Fazer algumas observações sobre como os livros didáticos exploram os conceitos abordados nesse trabalho.

1.2 Organização

O nosso trabalho ficou dividido em sete capítulos, assim distribuídos:

- Capítulo 2: A definição de função;
- Capítulo 3: Elementos de uma função;
- Capítulo 4: Injetividade de Funções;
- Capítulo 5: Sobrejetividade de Funções;
- Capítulo 6: Como os livros didáticos abordam os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade?

- Capítulo 7: Funções Inversas;

- Capítulo 8: Funções exponencial e logarítmica: explorando o conceito de função inversa.

Capítulo 2

A definição de Função

Nesta seção, apresentamos duas definições de função, a definição como subconjunto de uma relação binária, descrita por Marmo(1969) [13] e a definição por Lei de Formação, descrita por Lima (2005) [2]. Ambas as definições estão corretas mas, é necessário que o professor compreenda que antes de trabalhar as demais funções, é necessário que ele tenha em mente qual a definição mais adequada a se trabalhar em sala de aula. Para isso, apresentaremos as definições e, posteriormente, faremos uma análise sobre qual definição seria a mais adequada para se trabalhar em classe, segundo os documentos oficiais e alguns autores e, por fim, faremos uma breve análise sobre o conceito de função segundo os professores.

2.1 Definição de função por relação

Marmo(1969) [13] define produto cartesiano e relação binária do seguinte modo:

Definição 2.1 (Produto Cartesiano) *" Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, chamaremos de Produto Cartesiano de A por B o conjunto de pares ordenados (a,b), onde $a \in A$, $b \in B$. Podemos afirmar $A \times B$ por meio da linguagem de conjunto da seguinte maneira:"*

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$$

Exemplo 1 *Tome, por exemplo os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,5\}$. O produto cartesiano $A \times B$ é dado por:*

$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(4,2),(4,3),(4,5)\}$$

Definição 2.2 (Relação Binária) *" Uma relação R de A para B é um subconjunto de $A \times B$."*

Exemplo 2 *Tomando o conjunto* $S = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,5)\}$*, segundo o Exemplo 1, temos que* $S \subset A \times B$*, logo* S *é relação de* $A \times B$*.*

Observando os Exemplos 1 e 2, temos que as definições de produto cartesiano e relação binária geralmente apresentam exemplos de simples resolução e, em tempos passados eram tão recorrentes de serem utilizadas e, inclusive no Exemplo 3 temos uma questão de vestibular da UFPB, realizado no ano de 1995.

Exemplo 3 *(UFPB,1995) "Se* $A = \{-1,0,1\}$ *e* $B = \{(x,y) \in A \times A; x+y \in A\}$*, então o número de elementos de* B *é igual a:*

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

Resposta: *Por hipótese, temos que*

$$A \times A = \{(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2)\} \tag{2.1}$$

Em (2.1), sendo $B \subset A \times A$*, por hipótese os pares ordenados que compõem o conjunto* B *são:*

$$B = \{(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0)\} \tag{2.2}$$

Por (2.2), temos que B *contém 7 pares ordenados, consequentemente a alternativa d é a correta.*

Posteriormente, Marmo(1969) [13] define função do seguinte modo:

Definição 2.3 (Função) *"Uma função f de A em B é todo subconjunto de* $A \times B$ *no qual a cada* $a \in A$ *aparece como primeiro elemento em somente um par ordenado de f. Como podemos observar, a função f é uma relação particular de A para B."*

O conceito de definição por relação, é bastante comum a ser abordado nos livros didáticos brasileiros, inclusive há autores que abordam o conceito de função por esse método, que inclusive, encontramos essa definição em dois livros didáticos distintos, que denotaremos por Livros B e C:

Sejam os conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B é uma função quando associa a cada elemento x, do conjunto A, um único elemento y, de B. Essa função pode ser indicada por:

$f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se "função f de A em B")

O conjunto A é denominado **domínio** ($D(f)$) e o conjunto B, **contradomínio** ($CD(f)$) da função f. Cada elemento y de B que possui correspondente x em A é chamado **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens é denominado **imagem da função** ($Im(f)$).

Figura 2.1: Definição de função por relação - Livro B

Considerando dois conjuntos, A e B, não-vazios e uma relação binária de A em B, dizemos que essa relação é função de A em B se, e somente se, a cada elemento x do conjunto A corresponder um único elemento y do conjunto B.

$f: A \rightarrow B$ **lê-se: f é função de A em B.**

Ou, no caso de ser possível escrever uma lei de correspondência através de uma expressão matemática:

$y = f(x)$ **lê-se: y é função de x, com $x \in A$ e $y \in B$.**

Figura 2.2: Definição de função por relação - Livro C

Embora utilizada com certa frequência, a definição por relação apresenta alguns problemas em sua abordagem, que citaremos nesse capítulo mas, isso não quer dizer que ela seja uma definição errada, porém, se trata de um conceito estático, que apresenta algumas lacunas e, a nosso ponto de vista, não seria adequado a se trabalhar em sala de aula.

Observe o Exemplo 4:

Exemplo 4 *Tome os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 5, 10, \pi, e\}$$

Sendo $R = \{(1,3), (2,5), (3,10), (4,\pi), (5,e)\}$, *R é função de A em B?*

Resposta: *Segundo a definição 2.3, é função pois a cada* $a \in A$ *está associado um único* $b \in B$. *Logo, R é função de A em B.*

Observando o Exemplo 4, vimos que R é função de A em B. Mas, tomando $R = \{(1,10),(2,e),(3,\pi),(4,3),(5,5)\}$ ou $R = \{(1,10),(2,\pi),(3,5),(4,e),(5,3)\}$, também são funções de A em B, pois segundo a definição 2.3, para que se caracterize a existência de uma função, basta apenas obter os pares ordenados, independentemente do modo que se coloquem. Além disso, tomando f apenas como subconjunto de $A \times B$, poderia se definir f de inúmeros modos, em que não existe um sentido claro quanto à expressão $f : A \to B$, dificultando uma compreensão adequada sobre o que vem a ser função.

Exemplo 5 *Agora, seja a seguinte função:*

$$f(x) = \begin{cases} 0; & se \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1; & se \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

A função definida logo acima, é chamada ***Função de Dirichlet****.*

Sejam $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sequências de modo que $\mathbb{R} = (x_n) \cup (y_n)$. Tomando a função descrita no Exemplo 5, os pares ordenados definidos pela função $f = \{a, f(a); a \in \mathbb{R}\}$ serão da forma $(x_i, 1)$ e $(y_j, 0)$ e, sendo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ conjuntos infinitos, é impossível determinar todos os pares ordenados da forma $(a, f(a))$, logo podemos afirmar que definir função desse modo não viria a ser adequado do ponto de vista matemático.

2.1.1 O que os autores e documentos oficiais colocam sobre a definição de função por relação?

Conforme fora colocado anteriormente, nota-se que a definição por relação é correta, porém estática, pecando ao não dar um sentido claro à expressão $f : A \to B$. Conforme vimos no Exemplo 4, os pares ordenados podem ser obtidos de inúmeros modos, sem que haja uma “ regra” de associação para obter os pares ordenados. Já no Exemplo 5, sendo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ conjuntos infinitos, é impossível determinar todos os pares ordenados definidos em f, reforçando a ideia de que essa definição não é interessante do ponto de vista Matemático. Inclusive, o PCE-PE(2012) [14] deixa claro que:

> “ Em particular, a definição de função baseada na ideia de produto cartesiano de dois conjuntos aparece como bastante desaconselhável, tanto do ponto de vista matemático, como do ponto de vista didático.” (PCE-PE, 2012, p.129)

Além disso, Lima (2001) [7] afirma que:

> “ Essa opção não é das mais indicadas, pois não enfatiza a noção básica, usada em aplicações, de lei de correspondência, de dependência entre duas variáveis, substituindo-a por um tratamento teórico-formal, correto sem dúvida, mas que não é motivado por aplicações relevantes.” (Lima, 2001, p.319)

Ou seja, sendo a definição por relação estática, e sem dar ênfase à noção básica de correspondência, ela também não passa a ser interessante do ponto de vista didático, o que dificulta a compreensão por parte do aluno em sala de aula. Logo, podemos afirmar que não é adequado ao professor trabalhar esse conceito de função em turmas de Ensino Médio.

2.1.2 Definição de função por relação e o conceito de gráfico

O conceito de função por relação, colocado na definição 2.3, conforme concluímos na seção 2.1.1 não é o mais adequado a se trabalhar em turmas de Ensino Médio, mas é um conceito que não deve ser desprezado pois, contém informações relevantes como, por exemplo, para definir o gráfico de uma função.

Lima (2005) [2] define o gráfico de uma função do seguinte modo:

Definição 2.4 (Gráfico) *“ O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x,y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim,*

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Conforme podemos observar a definição 2.4, o gráfico de uma função é definido como subconjunto de um produto cartesiano, em que a cada $x \in X$ existe somente um $y \in Y$ de modo que $(x,y) \in G(f)$. Por outro lado, a definição 2.3 define a função como subconjunto de um produto cartesiano, assim como o conceito de gráfico, colocado na definição 2.4. Assim, podemos afirmar que a antiga definição por relação, hoje é semelhante à definição do gráfico de uma função.

Inclusive, Lima (2005) [2] reforça essa ideia, ao fazer a seguinte colocação:

> “ Se definimos uma função $f : X \to Y$ como um subconjunto particular do produto cartesiano $X \times Y$, qual seria a definição matemática do gráfico de uma função?” (Lima, 2005,p.82)

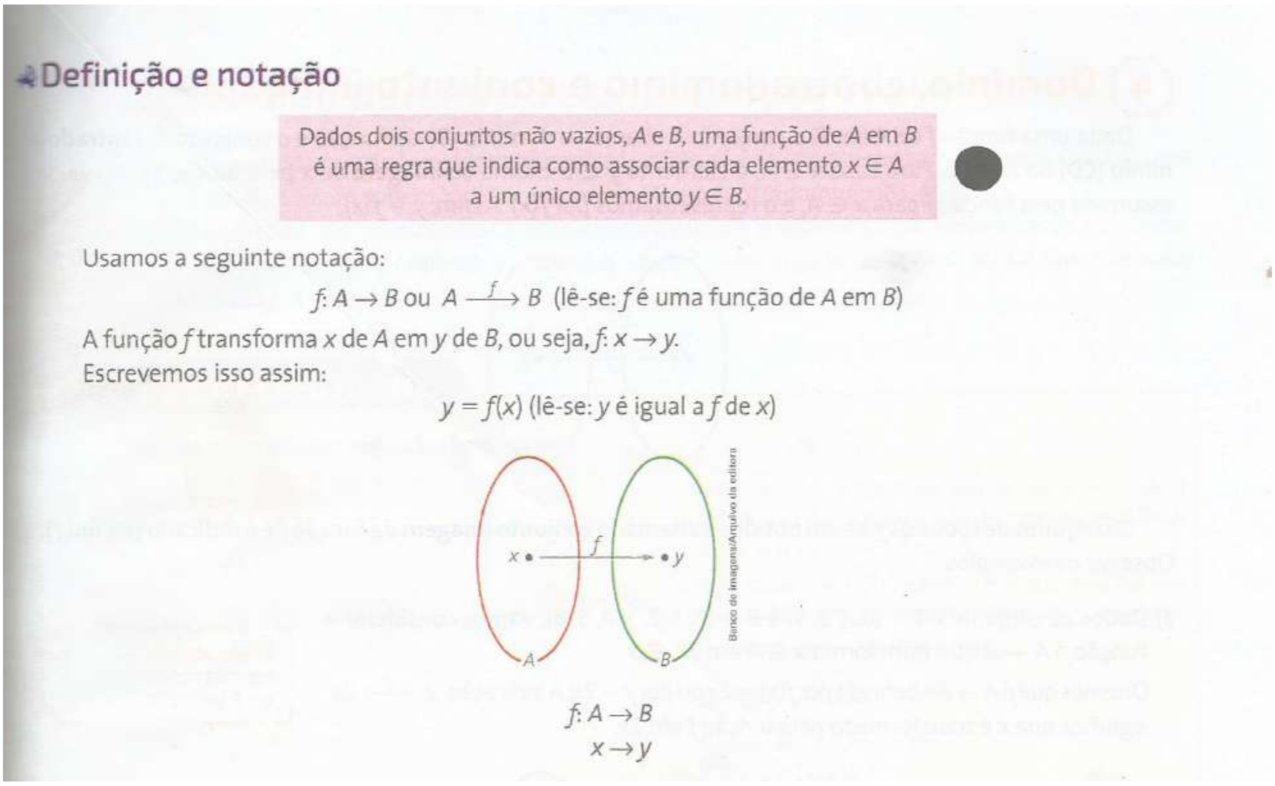
Ou seja, definir função por relação não nos parece algo adequado e, segundo Lima (2005) [2], definindo função por relação é praticamente inviável definir o gráfico de uma função, o que não seria interessante do ponto de vista matemático. Além disso, ao abordar o estudo de funções, o conceito de gráfico pra ser bem definido, têm como fundamento as definições 2.1 e 2.2, que são justamente os conceitos de produto cartesiano e relação binária pois, conforme podemos observar, o gráfico de uma função é definido como um conjunto de pontos contido em $\mathbb{R}^2$.

2.2 Definição de função por lei de formação

Lima (2005) [2] define função do seguinte modo:

Definição 2.5 (Função) *"Dados os conjuntos X,Y, uma função $f : X \to Y$ é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y o contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x)."*

Assim como a definição 2.3, a definição por lei de formação também é comum a ser utilizada nos livros didáticos e, inclusive, selecionamos dois livros que definem função desse modo, que são os Livros A e D:


Definição e notação

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Usamos a seguinte notação:

$f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B)

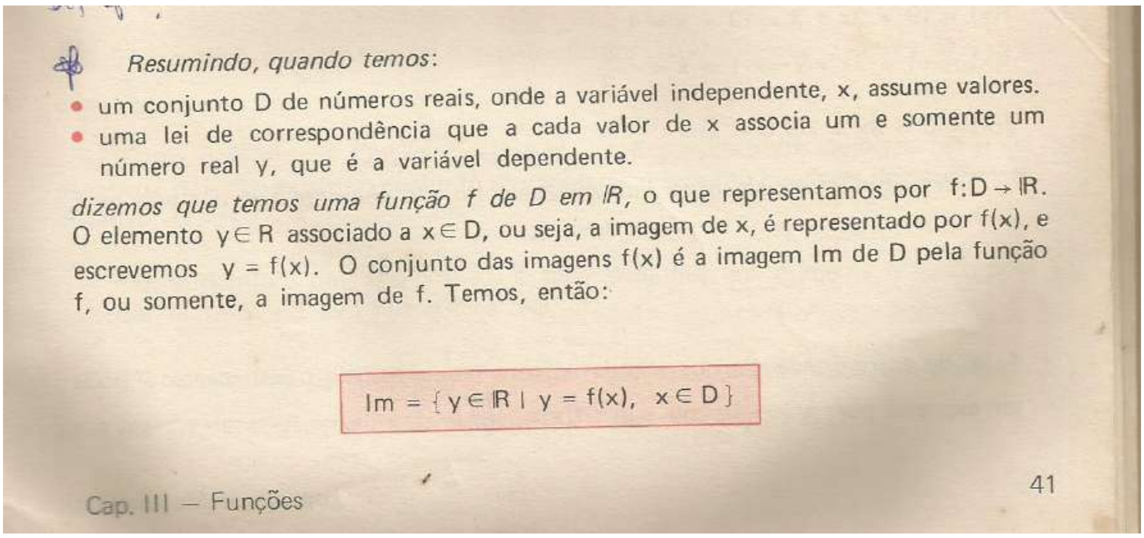
A função f transforma x de A em y de B, ou seja, $f: x \to y$.

Escrevemos isso assim:

$y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x)

$f: A \to B$
$x \to y$

Figura 2.3: Definição de Função - Livro A


Resumindo, quando temos:

- um conjunto D de números reais, onde a variável independente, x, assume valores.
- uma lei de correspondência que a cada valor de x associa um e somente um número real y, que é a variável dependente.

dizemos que temos uma função f de D em $\mathbb{R}$, o que representamos por $f: D \to \mathbb{R}$. O elemento $y \in \mathbb{R}$ associado a $x \in D$, ou seja, a imagem de x, é representado por $f(x)$, e escrevemos $y = f(x)$. O conjunto das imagens $f(x)$ é a imagem Im de D pela função f, ou somente, a imagem de f. Temos, então:

$$\boxed{Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x),\ x \in D \}}$$

Cap. III — Funções 41

Figura 2.4: Definição de Função - Livro D

Conforme podemos notar, essa definição também tem boa aceitação por meio dos autores e, a nosso ponto de vista, é a mais adequada a se trabalhar em sala de aula, pois enfatiza a noção de correspondência, em que Lima (2001) [7] afirma que a ideia de correspondência é essencial para que se defina função corretamente.

Observe o Exemplo 6:

Exemplo 6 *Observe a seguinte função:*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow Y \subset \mathbb{N}$$

$$x \mapsto f(x) = 2^x$$

Definida a função colocada no Exemplo 6, a cada $n \in \mathbb{N}$ está associado um valor $y = 2^n \in Y \subset \mathbb{N}$, ou seja, há uma associação clara entre os elementos de X e Y por meio de f. A definição 2.5, dá um significado claro à existência de f, pois é a lei de formação que define como se deve associar os elementos de A e B, diferentemente da definição 2.3, em que os pares ordenados da forma $(a, f(a))$ podem ser obtidos de modo arbitrário, que a única regra é relacionar a cada elemento de A um único elemento de B, conforme vimos no Exemplo 4. Porém, nem toda função é definida necessariamente por meio de uma expressão matemática, basta a existência de dois conjuntos e uma lei de formação que indique como devemos associar seus elementos. Na função colocada no Exemplo 5, temos que a cada número racional é associado o valor 1 e, a cada irracional o valor 0, que em relação à definição 2.3 é bem mais prático, em relação a definir infinitos pares ordenados da forma $(x, 1)$ e $(y, 0)$, com $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Agora, observe o Exemplo 7:

Exemplo 7 *Tome A um conjunto de n pessoas e, seja B um conjunto contendo os meses do ano. Podemos definir uma função $g : A \rightarrow B$ que associa cada pessoa ao seu mês de aniversário, pois cada pessoa nasce em um único mês do ano. Logo, temos que:*

- *$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$; em que a_i representa uma pessoa, de modo que $1 \leq i \leq n$;*
- *$B = \{Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez\}$, que são os meses do ano;*
- *$g : A \rightarrow B$, em que g associa a cada pessoa o seu mês de aniversário.*

Conforme vimos no Exemplo 7, temos uma função que além de não ser definida por meio de uma expressão matemática, também não é definida por conjuntos numéricos, mas não deixa de ser função, pois existe uma correspondência clara entre os elementos de A e B, atendendo à definição 2.5.

2.2.1 O que os autores e documentos oficiais colocam sobre a definição por lei de formação?

A definição por lei de formação, inicialmente, enfatiza a ideia básica de correspondência e de dependência entre variáveis, que segundo Lima (2001) [7] é um conceito essencial pra qeu se defina função corretamente. Além disso, Stewart (2006) [15] faz a seguinte colocação:

> “ Uma função f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento $f(x)$ em um conjunto B.” (Stewart,2006,p.12)

Lima (2001) [7] reforça essa ideia, ao afirmar:

> “ Uma função consta de três ingredientes: domínio, contradomínio e correspondência. Não se pode falar em função sem mencionar os três.” (Lima,2001,p.352)

Conforme Lima (2001) [7] e Stewart (2006) [15] colocaram acima, é impossível falar de função sem estabelecer a ideia de correspondência, que não é enfatizada na definição 2.3, e que é fundamental pra definir função adequadamente. E a BNCC(2017) [10] reforça que os estudantes têm a oportunidade de identificar relações entre grandezas e comunicá-las, e a definição de função por lei de formação contempla essa ideia, diferentemente da definição por relação que coloca f apenas como subconjunto de um produto cartesiano. Por fim, podemos afirmar que essa definição é mais adequada a se trabalhar em turmas de Ensino Médio.

2.3 Definição de função segundo os professores

Conforme apresentamos as definições 2.3 e 2.5, colocadas por Marmo(1969) [13] e por Lima (2005) [2], essas definições geralmente são as mais trabalhadas no Ensino Médio e, a nosso ponto de vista, a definição por lei de formação é o modo mais adequado a se trabalhar em sala de aula. Entretanto, reescrevemos a definição de função de quatro modos distintos e consultamos uma amostra de 20 professores, onde cada professor teria direito a escolher mais de uma alternativa, cujas definições apresentamos do seguinte modo:

a) Dados dois conjuntos não-vazios X e Y, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$, um único elemento $y \in Y$. Representamos $y = f(x)$.

b) Dados dois conjuntos X e Y, uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$, um único elemento $y \in Y$. Representamos $y = f(x)$.

c) Dados dois conjuntos não-vazios X e Y, uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$, um elemento $y \in Y$. Representamos $y = f(x)$.

d) Dados dois conjuntos X e Y, uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$, um elemento $y \in Y$. Representamos $y = f(x)$.

Conforme podemos notar nas definições a,b,c e d, escritas de modo bem semelhante, porém o que as diferencia é a colocação das palavras *único* e *não-vazios* e, embora as definições estejam colocadas corretamente, o uso dessas palavras pode acarretar em alguns problemas de interpretação, que confundem boa parte dos professores e alunos, ao definir função em sala de aula.

Os resultados obtidos da pesquisa estão distribuídos na tabela abaixo:

Definição de Função	N° de professores
A	10
B	9
C	5
D	0

Tabela 2.1: Definição de função segundo os professores

Segundo a tabela 2.1, podemos notar que as definições a, b e c tiveram aceitação entre os professores, enquanto a definição d não houve aceitação alguma. As quatro definições, estão colocadas corretamente, porém, a alternativa d não explora nenhuma das duas palavras em sua definição. Quanto ao uso da palavra **não-vazios**, nota-se que soa com uma certa redundância, pois não é possível definir função sem correspondência entre elementos, conforme afirmam Stewart(2006) [15] e Lima (2001) [7], na seção 2.2, logo, dados domínio e contradomínio da função, se ao menos um desses conjuntos for vazio, é impossível que haja correspondência entre elementos, logo, para que exista uma função, os conjuntos obrigatoriamente devem ser não-vazios.

Quanto ao uso da palavra **único**, observe as definições 2.6 e 2.7:

Definição 2.6 (Função) *Dados dois conjuntos X e Y, uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$ um* ***único*** *elemento $y \in Y$.*

Definição 2.7 (Função Injetiva) *Uma função $f : X \to Y$ é injetiva quando, a cada $y \in Im(f) \subset Y$, existe um* ***único*** *$x \in X$ de modo que $y = f(x)$.*

O uso da palavra único, conforme colocado na definição 2.6, se dá pela associação de que a cada elemento do domínio, está associado um único elemento no contradomínio, mas isso não quer dizer que a cada elemento da imagem deva estar associado um único elemento no domínio. Já o uso da palavra único na definição 2.7 se coloca de modo reverso, em que a cada elemento da imagem está associado um único elemento no domínio, assim, elementos distintos no domínio obrigatoriamente têm imagens distintas e, na definição de função, não há essa obrigatoriedade e, se não observados esses detalhes, um professor pode provocar nos alunos uma concepção errada do conceito de função. Mas antes, definiremos o que vem a ser **raiz quadrada**, para que o leitor compreenda de modo mais claro o que colocamos nos Exemplos 9 e 10.

Definição 2.8 (Raiz quadrada) *Dados dois números $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+$ de modo que $a^2 = b$, dizemos que a é a* ***raiz quadrada*** *de b.*

Um detalhe pertinente à definição de raiz quadrada, que o leitor deve estar atento é que, todo número real positivo admite duas raízes reais: uma positiva e outra negativa.

Observe o Exemplo 8:

Exemplo 8 *Quais são as raízes quadradas reais de 9?*

Resposta: *As raízes quadradas reais de 9 são 3 e -3. Pois,* $3^2 = (-3)^2 = 9$.

Agora, observe os Exemplos 9 e 10:

Exemplo 9

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

A expressão acima, definida no Exemplo 9, conforme podemos notar não é função, pois tomando $1 \in \mathbb{N}$, temos $f(1) = 1 \in \mathbb{R}$, mas também $f(1) = -1 \in \mathbb{R}$. Assim, nota-se que existe um elemento no domínio associado a dois elementos no contradomínio, contradizendo a definição 2.6 e com isso, a expressão colocada não pode ser função pois, embora existam dois conjuntos não-vazios e uma lei de formação que associa os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ aos elementos do conjunto $\mathbb{R}$, existe um elemento no no domínio associado a dois no contradomínio.

Exemplo 10

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = x^2$$

Dada a expressão definida no Exemplo 10 é função, em que a cada $x \in \mathbb{R}$ é associado um único $y = f(x) \in \mathbb{R}$, mas não é injetiva, pois tomando $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, temos $g(-1) = g(1) = 1^2 = 1$, negando o conceito de função injetiva, que abordaremos de modo mais claro no Capítulo 4. Contudo, vemos que o uso da palavra único pode confundir o aluno na exploração de tais definições, em que pra isso, é importante que o professor esteja atento a esse detalhe pra que os alunos não confundam as definições colocadas acima.

Capítulo 3

Elementos de uma função

Uma função, conforme vimos na seção 2.2, é composta por três elementos: domínio, contradomínio e uma lei de formação que associa os elementos do domínio com os elementos do contradomínio e, tais funções podem ser definidas por meio de uma expressão matemática ou não, pois o importante é a existência dos elementos dos conjuntos e de uma regra que os associe. Lima (1976) [6] afirma que a igualdade entre funções ocorre apenas quando elas apresentam mesmo domínio, mesmo contradomínio e mesma lei de formação e, é importante fazer esta observação pois é bastante comum nas salas de aula o professor apresentar modelos de funções semelhantes e, que muitas vezes o aluno imagina que elas sejam iguais. Logo, é importante que o professor tenha cuidado ao abordar o estudo de funções em sala de aula, buscando abordá-lo de modo claro e sucinto, pois se trata de um conceito Matemático importante não apenas no decorrer do Ensino Médio, mas também em estudos posteriores como, por exemplo, no âmbito acadêmico.

3.1 Lei de formação da função

Definida uma função $f : X \to Y$, a Lei de formação, conforme observamos, é o termo que define como será a associação entre os elementos dos conjuntos X e Y, ou seja, é quem faz a "ponte" entre os elementos do domínio com os elementos do contradomínio. Conforme vimos no Exemplo 7, a lei de formação nem sempre é definida por meio de uma expressão matemática, basta que ela associe a cada elemento do domínio um único elemento no contradomínio, conforme fora colocado na definição 2.6.

Mas será que duas funções que apresentam mesma lei de formação são iguais? Observe os Exemplos 11 e 12:

Exemplo 11 *Seja* $X = \{1,2,3,4,5\}$ *e* $f(x) = x^2 - 1$. *Sendo* $f : X \to \mathbb{R}$, *os elementos de* X

no contradomínio $\mathbb{R}$ são definidos pelo conjunto $Y = \{0,3,8,15,24\}$.

Exemplo 12 *Seja $X = \{1,3,5,7,9\}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Sendo $g : X \to \mathbb{R}$, os elementos de X no contradomínio $\mathbb{R}$ são definidos pelo conjunto $Y = \{0,8,24,48,80\}$.*

Embora os Exemplos 11 e 12 nos pareçam exemplos simples, podemos observar que, embora as funções f,g apresentem mesma lei de formação, sendo os domínios distintos as imagens também serão, pois embora as funções f e g tenham mesma lei de formação, a associação entre os elementos de domínio e contradomínio se coloca de modo diferente. Logo, podemos afirmar que duas funções embora apresentem mesma lei de formação, dados domínios diferentes, as funções f e g serão também diferentes.

Agora, para que exista uma função, é necessário que haja uma lei de formação que faça a correspondência entre os elementos do domínio com os elementos do contradomínio. Porém, apenas a existência da lei é insuficiente, pois para que uma função esteja bem definida, é importante observar o modo como domínio e contradomínio estão colocados.

Observe os Exemplos 13 e 14:

Exemplo 13 *A expressão*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

define uma função?

Resposta: *Inicialmente, seja $0 \in \mathbb{R}$. Observe que, $f(0) = \sqrt{0^2 - 1} = \sqrt{-1}$, que admite dois possíveis valores: $f(0) = i \notin \mathbb{R}$ e, $f(0) = -i \notin \mathbb{R}$, ou seja, existe um valor real no domínio que não admite valores reais no contradomínio. Por outro lado, seja $2 \in \mathbb{R}$ e consequentemente, $f(2) = \sqrt{2^2 - 1}$, daí, note que $f(2) = \sqrt{3}$ ou $f(2) = -\sqrt{3}$, pois $(\sqrt{3})^2 = (-\sqrt{3})^2 = 3$. Ou seja, existe um elemento no domínio associado a dois elementos no contradomínio $\mathbb{R}$, contradizendo a definição 2.6. Logo, f não é função.*

Exemplo 14 *A expressão*

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

define uma função?

Resposta: *Inicialmente, observe que pra existir uma função $f : X \to Y$, nesse caso, devemos ter que:*

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$x \geq 1 \quad ou \quad x \leq -1. \tag{3.1}$$

Mas, se $x \in \mathbb{N}$, satisfaz (3.1) e, nesse caso é conveniente tomar $\mathbb{N}$ como domínio de g. Porém, para cada número natural, existem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa mas, observe que o contradomínio dado é o conjunto $\mathbb{R}_+$, em que consideramos apenas valores positivos na imagem, logo, podemos afirmar que a cada elemento do domínio está associado um único elemento no contradomínio, satisfazendo a definição 2.6 e, consequentemente, g é função.

Observando os Exemplos 13 e 14, existem duas expressões com mesma lei de formação, em que uma define a existência de uma função, enquanto a outra não define. Com isso, é importante frisar que a existência da lei de formação é importante, mas ela por si só não define a existência de uma função, logo, é importante que o professor esteja atento a esse detalhe, pois conforme Lima (2005) [2] reforça, não é possível falar de função sem mencionar a ideia de correspondência, mas essa correspondência deve ir de acordo ao modo como domínio e contradomínio são colocados.

3.2 Domínio de uma função

Dada uma função $f : X \to Y$, o domínio de uma função ($D(f)$), é o conjunto que contém os elementos a serem associados ao contradomínio por meio da sua lei de formação. Conforme vimos nos Exemplos 11 e 12, se duas funções apresentam domínios distintos e mesma lei de formação, consequentemente, serão duas funções distintas, pois os elementos obtidos no contradomínio obtidos por meio de f serão distintos.

Mas, caso o domínio da função seja indefinido, sendo colocada apenas sua lei de formação por meio de uma expressão matemática, é possível definir seu domínio? Muniz Neto (2013) [11] afirma nesse caso, que:

> " De outro modo tomamos X como igual ao maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual as expressões matemáticas que definem a expressão $f(x)$ têm sentido. Diremos então, que X é o **domínio maximal de definição**, ou simplesmente **domínio maximal** de f." (Muniz Neto, 2013,p.8)

Nesse caso, o domínio maximal de uma função é colocado como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ pra que as expressões colocadas sejam definidas, e os livros didáticos A, B e D também fazem menção a essa definição, colocando-as do seguinte modo:

5 Estudo do domínio de uma função real

Estudamos que toda função tem domínio, contradomínio e lei de correspondência. Quando é citada uma função *f* de *A* em *B*, já ficam subentendidos o domínio (*A*) e o contradomínio (*B*).

Às vezes, é apresentada apenas a lei da função *f*, sem que *A* e *B* sejam citados. Nesses casos, consideramos o contradomínio $B = \mathbb{R}$ e o domínio *A* como o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) tal que a lei dada defina uma função $f: A \to \mathbb{R}$.

Figura 3.1: Definição do domínio de uma função - Livro A

Estudo do domínio de uma função

Estudamos que uma função *f* de *A* em *B* é uma relação que apresenta um domínio (A) e um contradomínio (B). Na função *f* de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, definida por $f(x)=2x-10$, por exemplo, temos que o domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o contradomínio é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, ou seja, $D(f)=\mathbb{N}$ e $CD(f)=\mathbb{Z}$.

Porém, em algumas situações, o domínio e o contradomínio de uma função não estão explícitos, sendo apresentada apenas a lei de formação. Nesses casos, consideramos que o domínio seja o maior subconjunto possível dos números reais ($D\subset\mathbb{R}$) para o qual a lei de formação faz sentido, e o contradomínio, o próprio conjunto dos números reais ($CD=\mathbb{R}$).

Figura 3.2: Definição do domínio de uma função - Livro B

Determinação do Domínio

Já vimos que para termos uma função $f: D \to \mathbb{R}$ devemos ter

a) um conjunto D, subconjunto de $\mathbb{R}$

b) uma lei de correspondência que associa a cada elemento x de D um único número real $f(x)$.

Entretanto, é comum falarmos da função $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 3x + 7$ ou $f(x) = \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \sqrt{x}$, citando apenas a lei de correspondência. Nestes casos, *quando o domínio não for fornecido, convencionaremos que ele terá como elementos todos os números reais que podemos substituir no lugar de x na lei* $y = f(x)$, *obtendo, após os cálculos efetuados, um número real.* Assim, por exemplo, temos:

Figura 3.3: Definição do domínio de uma função - Livro D

Conforme podemos observar nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3, vemos que a definição de domínio maximal é comum a ser colocada nos livros didáticos, por se tratar de um conceito fundamental no estudo de funções. Mas para garantir a existência de uma função o domínio já é definido porém, nos casos em que o domínio não é explícito, o autor poderia adotar a expressão “determine o domínio maximal da função”. Mas também, conforme citamos na seção 3.1, nem toda função é definida por meio de uma expressão matemática e, quando o Livro D adota na sua definição de domínio a expressão “convencionaremos que ele terá como elementos todos os números reais...”, o leitor imagina que toda função é definida por meio de uma expressão matemática, o que a nosso ponto de vista, é um equívoco. Por fim, o conceito de domínio maximal, além de ser importante a se trabalhar em sala de aula, é bastante comum a ser abordado em questões de vestibulares, em que nos Exemplos 15 e 16, trazemos duas questões de vestibulares da UFPB, realizados durante a década de 1990.

Exemplo 15 *(UFPB-1994) Determine todos os possíveis valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais está definida a função cuja regra é $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(x) \in \mathbb{R}$.*

Resposta: *Observando a lei de formação da função, inicialmente temos que:*

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftarrow x^2 \leq 1. \tag{3.2}$$

Em (3.2), temos que $x^2 \leq 1$, logo:

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \tag{3.4}$$

Por (3.4), concluímos que o domínio de f se dá por $D(f) = [-1,1]$.

Exemplo 16 *(UFPB-1997) O domínio máximo D da função definida por*

$$f(x) = \sqrt{log_2(x^2-3)}$$

é:

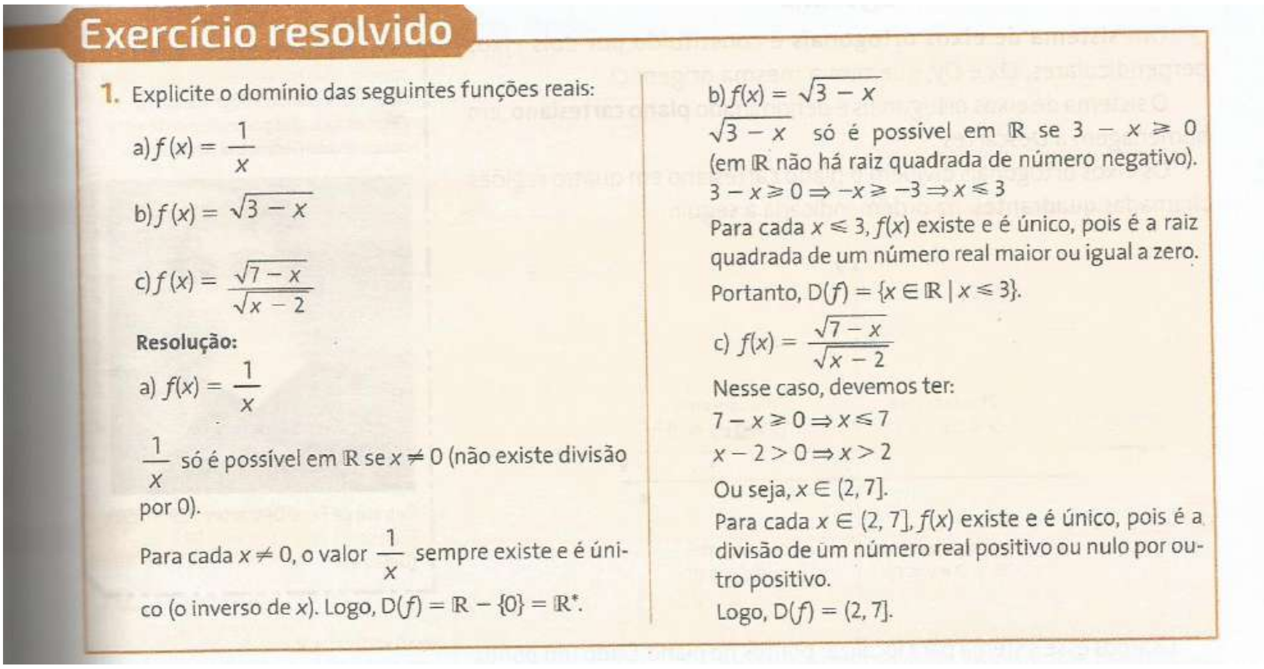
Resposta: *Conforme podemos notar, o radical é definido para valores maiores ou iguais a 0, porém, o logaritmo é definido para valores maiores que 0. Assim, devemos ter* *que:*

$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \quad ou \quad x > \sqrt{3}. \tag{3.5}$$

Por(3.5), concluímos que o domínio D da função f se dá por:

$$D = D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x < -\sqrt{3} \quad ou \quad x > \sqrt{3}\}$$

Mas também os livros didáticos abordam a determinação do domínio, abordando-a do seguinte modo:



Exercício resolvido

1. Explicite o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7 - x}}{\sqrt{x - 2}}$

Resolução:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $x \neq 0$ (não existe divisão por 0).

Para cada $x \neq 0$, o valor $\dfrac{1}{x}$ sempre existe e é único (o inverso de x). Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.

b) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

$\sqrt{3 - x}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $3 - x \geqslant 0$ (em $\mathbb{R}$ não há raiz quadrada de número negativo).

$3 - x \geqslant 0 \Rightarrow -x \geqslant -3 \Rightarrow x \leqslant 3$

Para cada $x \leqslant 3$, $f(x)$ existe e é único, pois é a raiz quadrada de um número real maior ou igual a zero.

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$.

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7 - x}}{\sqrt{x - 2}}$

Nesse caso, devemos ter:

$7 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 7$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Ou seja, $x \in (2, 7]$.

Para cada $x \in (2, 7]$, $f(x)$ existe e é único, pois é a divisão de um número real positivo ou nulo por outro positivo.

Logo, $D(f) = (2, 7]$.

Figura 3.4: "Determinação" do domínio de uma função - Livro A

Atividades resolvidas

R5. Qual o domínio da função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-3}, \text{ se } x<0\\ \sqrt{2x-3}, \text{ se } x\geq 0\end{cases}$?

Resolução

Para determinar o domínio da função, estudamos dois casos:

- se $x<0$, temos $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, então:

  $x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$

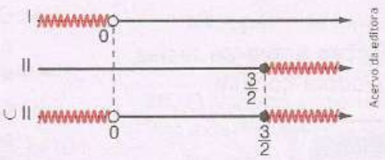
  Como $x<0 \Rightarrow x\neq 3$, temos $x<0$ (I).

- se $x\geq 0$, temos $f(x)=\sqrt{2x-3}$, então:

  $2x-3\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 3 \Rightarrow x\geq \dfrac{3}{2}$

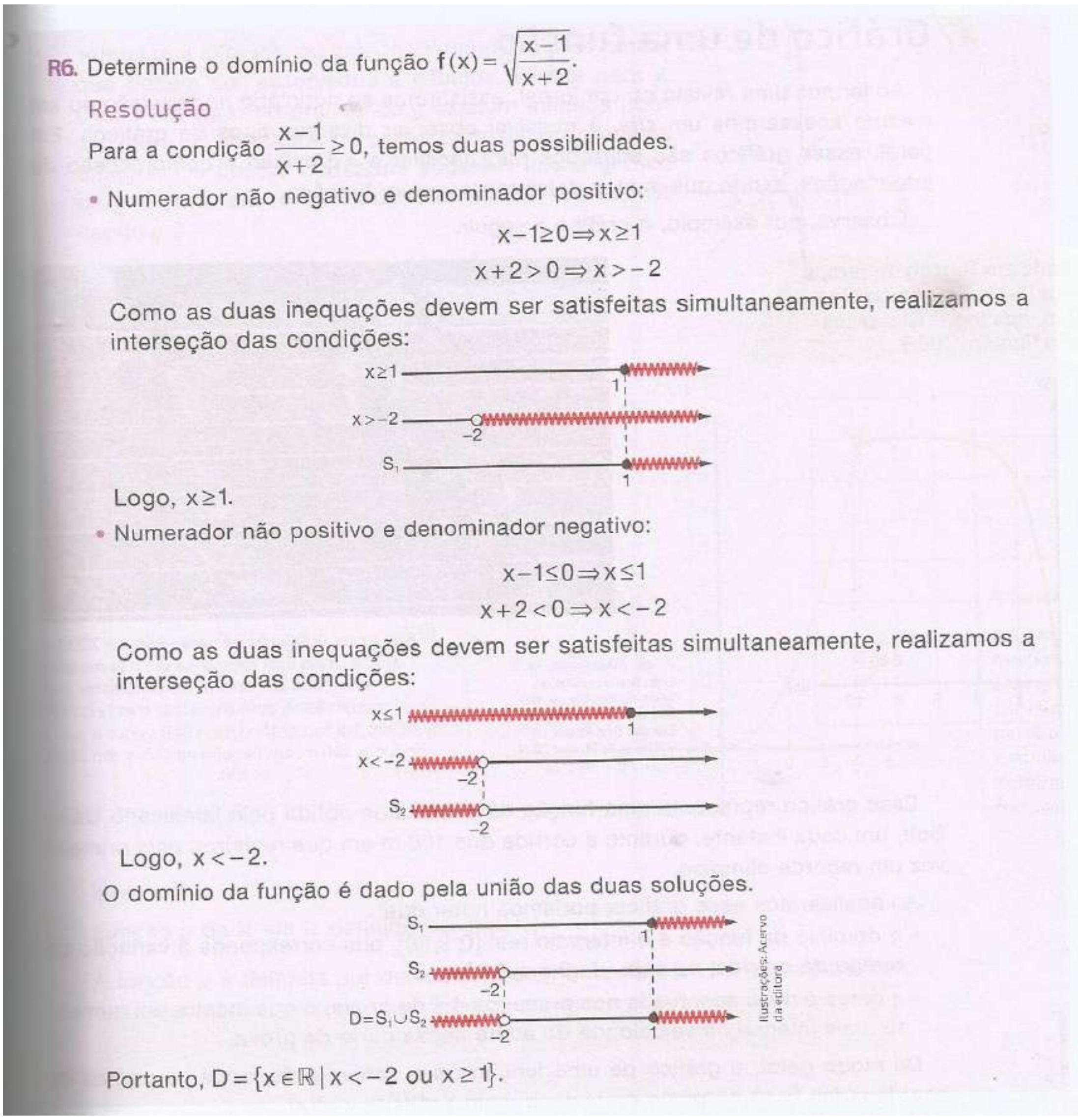
  Como $x\geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow x\geq 0$, temos $x\geq \dfrac{3}{2}$ (II).

A solução é dada pela união das condições I e II:



Assim, $D(f)=]-\infty, 0[\ \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ ou $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<0 \text{ ou } x\geq\dfrac{3}{2}\right\}$.

Figura 3.5: “Determinação” do domínio de uma função - Livro B



R6. Determine o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

Resolução

Para a condição $\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$, temos duas possibilidades.

- Numerador não negativo e denominador positivo:

$$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$
$$x+2>0 \Rightarrow x>-2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:

Logo, $x\geq 1$.

- Numerador não positivo e denominador negativo:

$$x-1\leq 0 \Rightarrow x\leq 1$$
$$x+2<0 \Rightarrow x<-2$$

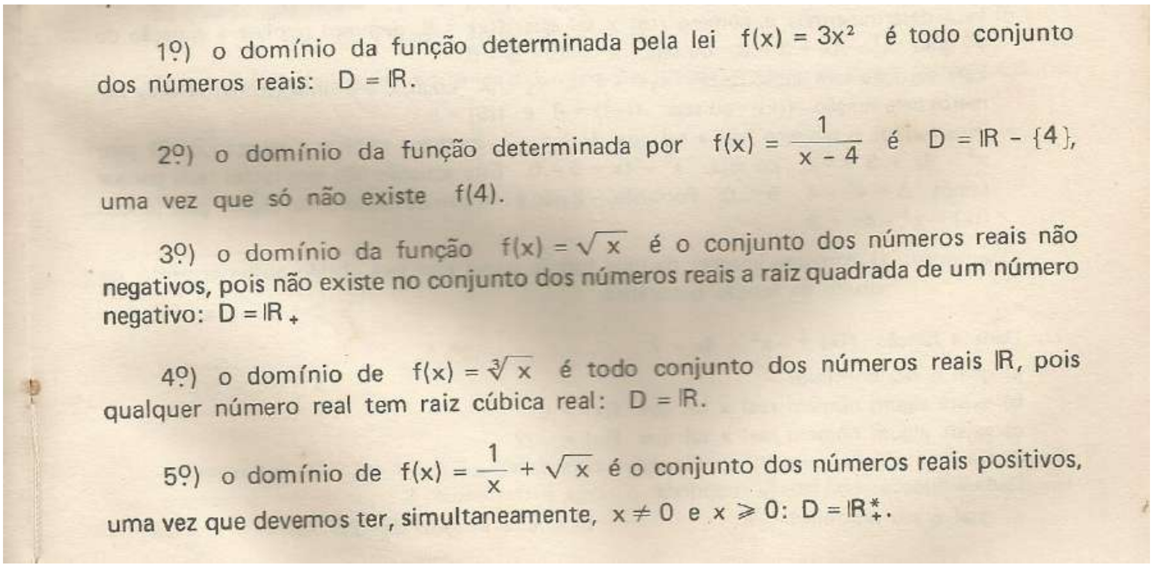
Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:

Logo, $x<-2$.

O domínio da função é dado pela união das duas soluções.

Portanto, $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2 \text{ ou } x\geq 1\}$.

Figura 3.6: Determinação do domínio de uma função - Livro B



1º) o domínio da função determinada pela lei $f(x) = 3x^2$ é todo conjunto dos números reais: $D = \mathbb{R}$.

2º) o domínio da função determinada por $f(x) = \frac{1}{x-4}$ é $D = \mathbb{R} - \{4\}$, uma vez que só não existe $f(4)$.

3º) o domínio da função $f(x) = \sqrt{x}$ é o conjunto dos números reais não negativos, pois não existe no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo: $D = \mathbb{R}_+$

4º) o domínio de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é todo conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, pois qualquer número real tem raiz cúbica real: $D = \mathbb{R}$.

5º) o domínio de $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ é o conjunto dos números reais positivos, uma vez que devemos ter, simultaneamente, $x \neq 0$ e $x \geqslant 0$: $D = \mathbb{R}_+^*$.

Figura 3.7: "Determinação" do domínio de uma função - Livro D

Conforme podemos observar, os livros didáticos não fazem referência apenas à definição, mas também exemplificando como se deve determinar o domínio maximal de uma função, embora a expressão "determinar domínio" não nos pareça adequada pois, conforme citamos anteriormente, para que exista uma função, seu domínio já deve estar definido. Mas, em outros casos, é importante que o autor tenha em mente como a lei de formação da função se coloca, pois seu domínio pode ser definido em um conjunto bem mais restrito do que se intui.

Observe o Exemplo 17:

Exemplo 17 (Soma dos termos de uma P.G. infinita) *Tome $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que*

$$x \mapsto g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i ; x \in \mathbb{R}; i \in \mathbb{N}$$

Qual seria o domínio $A \subset \mathbb{R}$ de g?

Resposta: *Primeiramente, veremos em quais valores de x a função g(x) não está definida, para isso, dividiremos a solução desse problema em quatro casos:*

- *x=1*

  Para $x = 1$, temos $x^n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
g(1) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 1^i \Rightarrow \\
g(1) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{1+1+...+1}_{n \quad parcelas} \Rightarrow \\
g(1) &= \lim_{n\to\infty} n = +\infty. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Logo, $g(1)$ diverge e, g não está definida para x=1.

x>1

Para $x > 1$, temos $x^n > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i \Rightarrow \qquad (3.7)$$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i > \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 1^i > 1 \Rightarrow \qquad (3.8)$$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i > \lim_{n\to\infty} n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x) = +\infty. \qquad (3.9)$$

Logo, para $x > 1$, temos que $g(x)$ diverge.

Observe que g pode ser escrita como soma dos termos de uma Progressão Geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão x, com isso, observe que a soma dos termos de uma P.G. se dá por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \qquad (3.10)$$

$$S_n = \frac{1\cdot(1-x^n)}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x} \Rightarrow \qquad (3.11)$$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}. \qquad (3.12)$$

x=-1

Para $x = -1$, mostraremos que a sequência $a_n = \frac{1-x^n}{1-x}$ possui duas subsequências que convergem para valores distintos e assim, concluiremos que a sequência diverge, com isso, dividimos essse caso em dois outros casos:

- *n par*

  Sendo n par, temos $n = 2q, \quad q \in \mathbb{N}$. *Assim, temos que* $x^{2q} = 1$. *Logo, por (3.12), temos:*

$$g(-1) = \lim_{q\to\infty} \frac{1-x^{2q}}{1-x} = \frac{1-1}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0. \tag{3.13}$$

- *n ímpar*

  Sendo n ímpar, temos $n = 2q+1, \quad q \in \mathbb{N}$. *Assim, temos que* $x^{2q+1} = -1$. *Logo, por (3.12), temos:*

$$g(-1) = \lim_{q\to\infty} \frac{1-x^{2q+1}}{1-x} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1. \tag{3.14}$$

Por (3.13) e (3.14), concluímos que as duas subsequências a_n *convergem para limites distintos, logo, g não está definida para* $x = -1$.

x<-1

Agora, tome $x < -1$ *e, assim como o caso anterior, mostraremos que a sequência* a_n *possui duas subsequências que convergem para limites distintos. Inicialmente, temos que*

$$x < -1 \Rightarrow \tag{3.15}$$
$$-x > 1 \Rightarrow \tag{3.16}$$
$$1-x > 2 \Rightarrow \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{1-x} < \frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

Do mesmo modo, observe que há dois possíveis casos para n, que colocaremos abaixo:

- *n par*

Sendo n par, temos $n = 2q$ *e* $x^{2q} > 1$. *Daí,* $\lim\limits_{q \to +\infty} -x^{2q} = -\infty$. *Assim, temos*

$$x^{2q} > 1 \Rightarrow \tag{3.19}$$

$$-x^{2q} < -1 \Rightarrow \tag{3.20}$$

$$1 - x^{2q} < 0. \tag{3.21}$$

Por (3.18) e (3.21), multiplicando membro a membro, temos:

$$(1 - x^{2q}) \cdot \frac{1}{1-x} < 0 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \tag{3.22}$$

$$\frac{1 - x^{2q}}{1-x} < 0 \Rightarrow \tag{3.23}$$

$$\lim_{q \to +\infty} a_{2q} < 0. \tag{3.24}$$

Por (3.24), temos $\lim\limits_{q \to \infty} a_{2q} < 0$.

- *n ímpar*

Para n ímpar, temos $n = 2q + 1, \quad q \in \mathbb{N}$ *e,* $x^n < -1$. *Assim, temos:*

$$x^n < -1 \Rightarrow 1 < -x^n \Rightarrow 0 < 2 < 1 - x^n. \tag{3.25}$$

Por (3.25), temos que $0 < 1 - x^n$. *Mas também, observe que:*

$$x < -1 \Rightarrow \tag{3.26}$$

$$-x > 1 \Rightarrow \tag{3.27}$$

$$0 < 1 - x \Rightarrow \tag{3.28}$$

$$0 < \frac{1}{1-x}. \tag{3.29}$$

Por (3.29) em (3.25), multiplicando membro a membro por $\frac{1}{1-x}$, temos:

$$2 < 1 - x^n \Rightarrow \tag{3.30}$$
$$2 \cdot \frac{1}{1-x} < 1 - x^n \cdot \frac{1}{1-x} \Rightarrow \tag{3.31}$$
$$0 < \frac{2}{1-x} < \frac{1-x^n}{1-x} \Rightarrow \tag{3.32}$$
$$\lim_{q \to +\infty} a_{2q+1} = +\infty. \tag{3.33}$$

Por (3.33), temos que $\lim\limits_{q \to +\infty} a_{2q+1} = +\infty$.

Segundo (3.24) e (3.33), há duas subsequências de somas parciais s_n divergindo. Logo, para $x < -1$, $g(x)$ diverge.

Para concluir, resta o caso em que $-1 < x < 1$ e, nesse caso, usaremos que $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$. Por (3.12), temos:

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \tag{3.34}$$

Assim, concluímos que o domínio maximal de g é $D(g) = (-1, 1)$.

Conforme o Exemplo 17 e a equação (3.12), supõe-se que a função g estaria definida para todos os números reais, exceto $x = 1$ mas, conforme vimos ao final, nota-se que o domínio obtido da função é um intervalo bem mais restrito do que se intui, com isso, é importante que professor e aluno prestem bastante atenção ao observar a lei de formação da função, para que seu domínio maximal seja determinado corretamente.

Mas também, é possível determinar funções cujo domínio é definido por um único elemento, porém, antes de abordar o Exemplo 18, citaremos o Teorema do Sanduíche, extraído de Lima (2006) [5] e que será utilizado como suporte.

Teorema 3.1 (Teorema do Sanduíche) *Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração. *“ Dado arbitrariamente* $\varepsilon > 0$*, existem* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tais que* $n > n_1 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ *e* $n > n_2 \Rightarrow a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$ *. Seja* $n_0 = n_1 n_2$*. Então* $n > n_0 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon \Rightarrow z_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$*, logo* $\lim z_n = a$*.* ■

Agora, trazendo ao texto uma outra discussão, colocamos anteriormente que não existem funções de domínio vazio e nem toda expressão matemática define uma função. Para observar esse detalhe com maior clareza, observe o Exemplo 18:

Exemplo 18 *Dada a função*

$$g : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \lim_{r\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{v=0}^{m}\left(1-\cos\left(\frac{(v!)^r\pi}{x}\right)\right)^{2n}\right)\right)\right)$$

qual seria seu domínio X?

Resposta: *Observe inicialmente que:*

$$|\cos\left(\frac{(v!)^r\pi}{x}\right)| \le 1 \Rightarrow \tag{3.35}$$

$$\frac{(v!)^r\pi}{x} \in [2s\pi, 2(s+1)\pi] \Rightarrow \tag{3.36}$$

$$2s\pi \le \frac{(v!)^r\pi}{x} \le 2(s+1)\pi; \quad s \in \mathbb{Z} \quad \textit{fixo}. \tag{3.37}$$

Em (3.37), multiplicando membro a membro por $\frac{1}{2\pi\cdot(v!)^r}$*, temos:*

$$2s\pi\cdot\frac{1}{2\pi\cdot(v!)^r} \le \frac{(v!)^r\pi}{x}\cdot\frac{1}{2\pi\cdot(v!)^r} \le 2(s+1)\pi\cdot\frac{1}{2\pi\cdot(v!)^r} \Rightarrow \tag{3.38}$$

$$\frac{s}{(v!)^r} \le \frac{1}{2x} \le \frac{s+1}{(v!)^r}. \tag{3.39}$$

Por hipótese, temos que $r \to +\infty$ *e* $m \to +\infty$ *e, sendo* $0 \le v \le m$*, temos que* $v \to +\infty$*. Assim, em (3.39) aplicando o limite membro a membro, temos:*

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{s}{(v!)^r}\right] \le \lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{1}{2x}\right] \le \lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{s+1}{(v!)^r}\right]. \tag{3.40}$$

Inicialmente, dados $r, v \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{1}{(v!)^r} > 0$. Agora, fixando $r_0, v_0 \in \mathbb{N}$, devemos calcular a diferença $\Delta(v_0)$, pra saber se a sequência $x_r = \frac{1}{(v!)^r}$ é crescente ou decrescente. Com isso, temos:

$$\Delta(v_0) = \frac{1}{((v_0+1)!)^{r_0+1}} - \frac{1}{(v_0!)^{r_0}} \Rightarrow \tag{3.41}$$

$$\Delta(v_0) = \frac{1-(v_0)^{r_0}\cdot[(v_0+1)!]}{[(v_0+1)!]^{r_0+1}}. \tag{3.42}$$

Em (3.42), temos que:

$$v_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_0)^{r_0} \geq 1 \in \mathbb{N} \tag{3.43}$$

$$v_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow (v_0)! \in \mathbb{N} \Rightarrow \tag{3.44}$$

$$(v_0+1)! \geq 1 \in \mathbb{N}. \tag{3.45}$$

Por (3.45), se $v_0, r_0 \geq 1$, temos que $(v_0)^{r_0} \geq 1$ e $(v_0+1)! \geq 1$. Assim podemos afirmar que $(v_0)^{r_0}\cdot(v_0+1)! \geq 1$. Assim, temos que:

$$(v_0)^{r_0}\cdot(v_0+1)! \geq 1 \Rightarrow \tag{3.46}$$

$$-(v_0)^{r_0}\cdot(v_0+1)! \leq -1 \Rightarrow \tag{3.47}$$

$$1-(v_0)^{r_0}\cdot(v_0+1)! \leq 0. \tag{3.48}$$

Por (3.48) em (3.42), concluímos que $\Delta(v_0) \leq 0$ e, $x_{r+1} < x_r$ para todo $r \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, a sequência $x_r = \frac{1}{(v!)^r}$ é decrescente e, como $x_r > 0$ para todo r, podemos concluir que $\lim\limits_{v\to+\infty}(\lim\limits_{r\to+\infty})\frac{1}{(v!)^r} = 0$. Em (3.40), fixado $s \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{s}{(v!)^r}\right]\leq\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{1}{2x}\right]\leq\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{s+1}{(v!)^r}\right]\Rightarrow \tag{3.49}$$

$$s\cdot\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{1}{(v!)^r}\right]\leq\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{1}{2x}\right]\leq(s+1)\cdot\lim_{r\to+\infty}\left[\lim_{v\to+\infty}\frac{1}{(v!)^r}\right]\Rightarrow \tag{3.50}$$

$$s\cdot 0\leq\frac{1}{2x}\leq(s+1)\cdot 0\Rightarrow \tag{3.51}$$

$$0\leq\frac{1}{2x}\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2x}=0. \tag{3.52}$$

Em (3.52), não existem números reais que satisfaçam tal condição, consequentemente, afirmamos que:

$$X=D(g)=\emptyset.$$

Observando o Exemplo 18, temos uma função de "domínio vazio." Mas, conforme Lima (2001) [7] coloca e segundo citamos na Seção 2.3, é impossível que exista função sem correspondência e, nesse caso, sendo o domínio um conjunto vazio, não é possível associar elementos do domínio ao contradomínio, logo, g não é função.

3.3 Contradomínio e imagem de uma função

Anteriormente, conforme colocamos na seção 2.2, vimos que uma função $f : X \to Y$ é composta por três elementos: domínio, lei de formação e contradomínio. O contradomínio de uma função, é o subconjunto Y de $\mathbb{R}$ que contém os elementos associados a X por meio de f, componente essencial na definição de função. Conforme podemos observar, é bastante comum que haja uma confusão entre contradomínio e imagem. Embora sendo dois termos distintos, são bastante semelhantes e, é bastante comum confundi-los pois, o contradomínio contém os elementos associados à X por meio de f e, a imagem é o conjunto que contém exclusivamente os elementos associados a X por meio de f. Logo, é importante que o professor tenha cuidado ao trabalhar esses conceitos em sala de aula, de modo que os alunos do Ensino Médio consigam diferenciar esses termos sem confusões.

Muniz Neto (2013) [11] define a imagem de uma função do seguinte modo:

Definição 3.1 *" Mais geralmente, dada uma função $f : X \to Y$, o conjunto imagem, ou simplesmente a imagem da função f é o conjunto $Im(f)$, cujos elementos são as imagens $f(x) \in Y$ dos elementos $x \in X$:*

$$Im(f) = \{f(x) \in Y; x \in X\}$$

Em particular, temos sempre $Im(f) \subset Y$, e a discussão acima mostra que pode ocorrer $Im(f) \neq Y$."

Conforme citamos, o contradomínio de uma função contém os elementos associados ao domínio por meio de f, enquanto a imagem reúne exclusivamente os elementos associados ao domínio por meio de f, ou seja, o contradomínio contém os elementos associados, porém, pode conter também elementos não-associados, diferentemente da imagem e, além disso, se o contradomínio de uma função coincide com a imagem, dizemos que a função é sobrejetiva, conceito que abordaremos de modo mais detalhado na Seção 5. Observe o Exemplo 19, mencionado logo abaixo:

Exemplo 19 *Dada a função*

$$\begin{aligned} f: X &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}}{\log(1-x^2)} + \frac{\sqrt{\frac{1}{16} - x^4}}{x + \frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Determine seu domínio maximal e sua imagem.

Resposta: *Inicialmente, observe que para determinar o domínio da função, devemos estar atentos ao conjunto de valores os quais a função está definida. Para isso, devemos estar atentos a quatro sentenças, em que o subconjunto $\mathbb{R}$ que estiver definido nessas sentenças simultaneamente, será o domínio da função f. Vamos aos casos:*

- *Caso 1:* $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \in \mathbb{R}$*:*

  Para este caso, temos que

$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \tag{3.54}$$

$$x^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \tag{3.55}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad ou \quad x \leq -\frac{1}{2}. \tag{3.56}$$

- *Caso 2:* $\log(1-x^2) \in \mathbb{R}$*:*

  Para que isso ocorra, devemos ter que

$$1-x^2 > 0 \Rightarrow \tag{3.57}$$
$$x^2 < 1 \Rightarrow \tag{3.58}$$
$$-1 < x < 1. \tag{3.59}$$

- *Caso 3:* $\sqrt{\frac{1}{16}-x^4} \in \mathbb{R}$*:*

  Neste caso, devemos ter que

$$\frac{1}{16} - x^4 \geq 0 \Rightarrow \tag{3.60}$$
$$x^4 \leq \frac{1}{16} \Rightarrow \tag{3.61}$$
$$-\frac{1}{4} < 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \tag{3.62}$$
$$0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \tag{3.63}$$

- *Caso 4:* $x + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$*:*

  Por fim, para que isso ocorra devemos ter que

$$x + \frac{1}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}. \tag{3.64}$$

Observando as sentenças colocadas em (3.56), (3.59, (3.63) e (3.64), o único valor que satisfaz as sentenças colocadas é $\frac{1}{2}$ logo, o domínio maximal dessa função é definido por $X = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Consequentemente, a imagem de f é definida por $Im(f) = \{f(\frac{1}{2})\}$, cujo valor é:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}}{\log(1-(\frac{1}{2})^2)} + \frac{\sqrt{\frac{1}{16} - (\frac{1}{2})^4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \Rightarrow \tag{3.65}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}}}{\log(1-\frac{1}{4})} + \frac{\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{16}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \Rightarrow \tag{3.66}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{\frac{3}{4}} + \frac{0}{1} \Rightarrow \tag{3.67}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{3.68}$$

Sendo $f(\frac{1}{2}) = 0$, conforme vimos no Exemplo 19, a sentença posta em (3.53) define uma função, pois preserva a correspondência entre elementos do domínio e do contradomínio por meio de f. Além disso, a imagem da função coincide com o contradomínio, diferentemente da função colocada no Exemplo 19. Logo abaixo, reescrevemos a função do seguinte modo:

$$g : \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{N} - \{0\}$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}}{\log(1-x^2)} + \frac{\sqrt{\frac{1}{16} - x^4}}{x+\frac{1}{2}} \tag{3.69}$$

Em (3.69), temos $g(\frac{1}{2}) = 0$, mas $0 \notin \mathbb{N} - \{0\}$, ou seja, não existem elementos no contradomínio associados ao domínio por meio de g. Assim, a sentença (3.69) não descreve uma função.

Conforme podemos observar a função descrita no Exemplo 19, reescrita em (3.56) e (3.69), dependendo do contradomínio tomado, pode se definir uma função ou não, em que pra ela estar bem definida, deve se prestar atenção não só ao domínio e à lei de formação, mas também ao modo como o contradomínio é definido, preservando a ideia de associação.

Agora, vamos buscar apresentar um outro questionamento: será que duas funções de mesmo domínio e mesma lei de formação, mas com contradomínios distintos, seriam iguais? Observe os Exemplos 20 e 21:

Exemplo 20 *A expressão*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x} \end{aligned} \tag{3.70}$$

caracteriza uma função?

Resposta: *Conforme podemos notar, todo número natural admite duas raízes, uma positiva e outra negativa. Sendo $\mathbb{R}_+$ como contradomínio, nesse caso a cada natural é associada apenas a sua raiz positiva que é única, caracterizando assim a existência da função f segundo a definição 2.6.*

Exemplo 21 *A expressão*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}_- \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x} \end{aligned} \tag{3.71}$$

define uma função?

Resposta: *Conforme já sabemos, todo número natural admite duas raízes, uma positiva e outra negativa. Sendo $\mathbb{R}_-$ como contradomínio, nesse caso a cada natural é associada a sua raiz negativa que é única, caracterizando também a existência da função g, segundo a definição 2.6.*

Conforme observamos nos Exemplos 20 e 21, duas funções, embora tenham mesmo domínio e lei de formação, mas caso os contradomínios sejam distintos, consequentemente as funções também serão distintas, logo, é importante que o professor esteja atento a esse detalhe. Agora, observe o Exemplo 22:

Exemplo 22 *Dada a função*

$$h : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(cos(x\cdot m!\cdot\pi)^{2n}))$$

Determine seu conjunto imagem.

Solução: *Para resolver esse problema, o dividiremos em dois casos: o caso em que x é racional, e o caso em que x é irracional.*

- *Caso 1: $x \in \mathbb{Q}$:*

  Seja $x = \frac{p}{q}$; com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Note que para $m \geq q$, segue que $q|m!$ assim, $m! = k_m.q$; com $k_m \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$x.m! = (\frac{p}{q}.k_m.q) \Rightarrow$$
$$x.m! = p.k_m \in \mathbb{N}.$$

  Note que se $m! = p.k_m \in \mathbb{N}$, temos $\cos(p.k_m) = 1$ ou $\cos(p.k_m) = -1$ e, em ambos os casos, temos $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}(cos(x \cdot m! \cdot \pi)^{2n})) = 1$.

- *Caso 2: $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$:*

  Observe que $-1 < \cos y < 1$ para todo $y \neq k\pi$; com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se $x \notin \mathbb{Q}$, teremos $x.m! \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e:

$$m!.x.\pi \neq k.\pi; \quad para\ todo \quad k \in \mathbb{Z}.$$

  Logo, $-1 < \cos(x.m!\pi) < 1$. Mas como $n \to +\infty$ e, conforme convencionamos no Exemplo 17, podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}(cos(x \cdot m! \cdot \pi)^{2n})) = 0$.

  Por fim, concluímos que a imagem dessa função é o conjunto $Im(h) = \{0, 1\}$.

Conforme podemos observar no Exemplo mencionado acima, embora as leis de formação apresentadas nos Exemplos 5 e 22 pareçam distintas, representam a *Função de Dirichlet* escrita de dois modos distintos, logo, tomando o conjunto $Im(h) = \{0, 1\}$ como contradomínio, se tratam de duas funções iguais. Com isso, é importante que o professor esteja atento e tenha cuidado ao trabalhar o conceito de função em sala de aula, de modo que não faça colocações inadequadas na abordagem desse conceito.

Capítulo 4

Injetividade de funções

Neste Capítulo, abordaremos o conceito de injetividade, fundamental ao se trabalhar no Ensino Médio quanto à abordagem das funções inversas, auxiliando os alunos a compreender algumas propriedades das funções, por exemplo, como se define a função logarítmica, que é inversa da função exponencial porém, sabemos que alunos de Ensino Médio apresentam dificuldades ao abordar temas como esse, pois, muitas vezes, essa temática não é explorada adequadamente em sala de aula.

4.1 Definição

Inicialmente, note que para uma função ser injetiva, cada elemento da imagem deve estar associado a um único elemento do seu domínio, ou seja, a ideia de injetividade é associar elementos distintos do domínio a imagens distintas no contradomínio, ideia que podemos definir de três modos distintos:

Definição 4.1 *Uma função $f : X \to Y$ é injetiva se, dados $x, x' \in X$, tivermos:*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição 4.2 *Uma função $f : X \to Y$ é injetiva se, dados $x, x' \in X$, tivermos:*

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Definição 4.3 *Uma função $f : X \to Y$ é injetiva se:*

$$\forall y \in Im(f), \quad \exists! x \in D(f); \quad y = f(x).$$

Vamos provar que as definições acima são equivalentes, ou seja, $(4.1) \Rightarrow (4.2) \Rightarrow (4.3) \Rightarrow (4.1)$. Podemos escrever a mesma definição de três modos distintos, mas pelo fato de serem equivalentes, tomando qualquer uma das definições acima, as três serão sempre satisfeitas.

Teorema 4.1 *As definições (4.1), (4.2) e (4.3) são equivalentes.*
Demonstração.

- $(4.1) \Rightarrow (4.2)$

  Dados $x, x' \in X$ de modo que $f(x) = f(x')$, explorando a forma contrapositiva da definição, temos que $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, logo (4.1) $\Rightarrow$ (4.2).

- $(4.2) \Rightarrow (4.3)$

  Por hipótese, se $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, caso existisse $y \in Y$ de modo que existam $x, x' \in X$ com $y = f(x) = f(x')$, caso $x \neq x'$ teríamos um absurdo. Logo $(4.2) \Rightarrow (4.3)$.

- $(4.3) \Rightarrow (4.1)$

  Se a cada $y \in Im(f)$ existe um único $x \in D(f)$ de modo que $y = f(x)$, tomando $x, x' \in D(f)$ de forma que $f(x) = f(x')$, por unicidade temos $x = x'$. Daí, (4.3) $\Rightarrow$ (4.1).

■

Segundo o Teorema 4.1, o conceito de função injetiva pode ser escrito de três modos distintos e equivalentes, em que dada uma definição qualquer entre as três, as definições (4.1), (4.2) e (4.3) serão sempre satisfeitas. Segundo nosso ponto de vista, para mostrar a injetividade de uma função, a definição 4.2 geralmente é mais explorada nos livros didáticos, mas também alguns mencionam a definição 4.1, que a nosso ponto de vista, facilita a compreensão por parte dl leitor, conforme citaremos com maior clareza mais adiante. Mas também podemos identificar a injetividade de uma função por meio de seu gráfico, conforme colocaremos na definição 4.5.

Exemplo 23 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^3$$

é injetiva?

Resposta: *Nesse caso, responderemos à pergunta utilizando dois métodos distintos de resolução, com o intuito de favorecer a melhor compreensão desses métodos por parte do leitor.*

Método 1: *Utilizando a Definição 4.1, sejam $x, x' \in \mathbb{R}$ de modo que $x^3 = (x')^3$ e, tome $k \in \mathbb{R}$ tal que $x' = x + k$. Se k=0, configura-se a igualdade entre x e x', encerrando a demonstração. Mas, supondo $k \neq 0$, observemos que:*

$$x^3 = (x')^3 \Rightarrow \tag{4.1}$$
$$x^3 = (x+k)^3 \Rightarrow \tag{4.2}$$
$$x^3 = x^3 + 3x^2k + 3xk^2 + k^3 \Rightarrow \tag{4.3}$$
$$0 = 3x^2k + 3xk^2 + k^3 \Rightarrow \tag{4.4}$$

$$k(3x^2 + 3xk + k^2) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3xk + k^2 = 0 \tag{4.5}$$

Em (4.5), devemos ter que $3x^2 + 3xk + k^2 = 0$. Sendo assim, obtemos uma equação de 2° grau definida com valores de x em função de k, calculando o valor de Δ, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (3k^2) - 4.3.k^2 \Rightarrow \Delta = 9k^2 - 12k^2 = -3k^2 < 0. \tag{4.6}$$

Por (4.6), a equação não admite raízes reais para valores de x determinados em função de k. Logo, devemos ter $k \neq 0$ e $x = x'$. Portanto, f é injetiva.

Em nosso ponto de vista, o método de resolução definido anteriormente pode não parecer acessível aos alunos, pois exige uma compreensão maior de conceitos por parte deles. Então, optamos por resolver o mesmo problema apresentando um método alternativo de resolução mais simples, descrito logo abaixo:

Método 2: *Sejam $x, x' \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = f(x')$. Com isso, temos:*

$$x^3 = (x')^3 \Rightarrow \tag{4.7}$$
$$x^3 - (x')^3 = 0 \Rightarrow \tag{4.8}$$

$$[x - x'][x^2 + x \cdot x' + (x')^2] = 0. \tag{4.9}$$

Na equação (4.9), se $x - x' = 0$ *temos* $x = x'$, *com isso f é injetiva. Supondo* $x - x' \neq 0$, *temos:*

$$x^2 + x \cdot x' + (x')^2 = 0. \tag{4.10}$$

Somando $x.x'$ *membro a membro em (4.10), deve se ter que*

$$x^2 + x \cdot x' + (x')^2 = 0 \Rightarrow \tag{4.11}$$
$$x^2 + x \cdot x' + (x')^2 + x \cdot x' = 0 + x \cdot x' \Rightarrow \tag{4.12}$$
$$(x + x')^2 = x \cdot x' \geq 0. \tag{4.13}$$

Com isso, dividimos a resolução em dois casos: no caso em $x.x' = 0$, *deve se ter que x=0 ou x'=0, consequentemente, por (4.13) temos x=x'=0, contradizendo o fato de que* $x - x' \neq 0$. *No caso em que* $x, x' > 0$, *os números x e x' têm mesmo sinal. Assim, temos*

$$(x + x')^2 > 0; \quad \forall x, x' \neq 0. \tag{4.14}$$

Assim, por (4.14) temos que $x - x' \neq 0$ *e, consequentemente, f é injetiva.*

O conceito de injetividade de uma função requer muita atenção ao ser estudado, pois é importante que se tenha atenção não só com a sua lei de formação, mas também com domínio e contradomínio. Dadas duas funções distintas, embora possuam mesma lei de formação, tendo domínios distintos, uma delas pode ser injetiva, enquanto a outra não .

Observe os Exemplos 24 e 25:

Exemplo 24 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^4 + 1$$

é injetiva?

Resposta: *Basta tomar $x' = 1$ e $x'' = -1$, com isso, $f(-1) = f(1) = 2$, logo f não é injetiva.*

Exemplo 25 *A função*

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$x \to g(x) = x^4 + 1$$

é injetiva?

Resposta: *Tome $x, x' \in \mathbb{N}$, com $x \leq x'$. Daí, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de forma que x'=x+k. Assim,*

$$x^4 + 1 = (x')^4 + 1 \Rightarrow \tag{4.15}$$

$$x^4 + 1 = (x+k)^4 + 1 \Rightarrow \tag{4.16}$$

$$x^4 + 1 = x^4 + 4x^3k + 6x^2k^2 + 4xk^3 + k^4 + 1 \Rightarrow \tag{4.17}$$

$$4x^3k + 6x^2k^2 + 4xk^3 + k^4 = 0 \Rightarrow \tag{4.18}$$

$$k \cdot (4x^3 + 6x^2k + 4xk^2 + k^3) = 0. \tag{4.19}$$

Supondo $k \neq 0$, temos x,k números naturais, em que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x^n > 0$ e $k^n > 0$, daí, em (4.19) temos $4x^3 + 6x^2k + 4xk^2 + k^3 > 0$, absurdo. Logo, devemos ter k=0 e daí, concluímos que g é injetiva.

Conforme vimos nos Exemplos 24 e 25, alterando o domínio da função, temos duas funções distintas, em que uma é injetiva e a outra não é. Logo, é importante que o professor deixe claro ao aluno que a injetividade da função não se define apenas por sua lei de formação, mas de acordo como se colocam a lei de formação, o domínio e o contradomínio.

4.2 Injetividade e operações entre funções

As funções injetivas conforme vimos anteriormente, podem ser definidas de três modos distintos, conforme colocamos nas definições (4.1), (4.2) e (4.3), são equivalentes. As funções injetivas podem ser identificadas de outras maneiras, desde que atendam às definições apresentadas, diferentes das que usamos nos Exemplos 23, 24 e 25. Observe o Exemplo 26:

Exemplo 26 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

é injetiva?

Resposta: *Dado o polinômio acima, em um primeiro momento não é algo simples identificar sua injetividade, porém, escrevendo-o de modo sintético, podemos identificar a injetividade da função de modo mais prático. Observe que:*

$$f(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 \Rightarrow \tag{4.20}$$
$$f(x) = 9x^2[3x - 6] + 4[9x - 2] \Rightarrow \tag{4.21}$$
$$f(x) = 9x^2 \cdot [(3x - 2) - 4] + 4 \cdot [6x + (3x - 2)] \Rightarrow \tag{4.22}$$
$$f(x) = [3x - 2] \cdot [9x^2 + 4] + [24x - 36x^2] \Rightarrow \tag{4.23}$$
$$f(x) = [3x - 2] \cdot [9x^2 + 4] + [3x - 2] \cdot [-12x] \Rightarrow \tag{4.24}$$
$$f(x) = (3x - 2) \cdot [9x^2 - 12x + 4] \Rightarrow \tag{4.25}$$
$$f(x) = (3x - 2) \cdot [3x \cdot (3x - 4) + 4] \Rightarrow \tag{4.26}$$
$$f(x) = (3x - 2) \cdot [3x \cdot (3x - 2 - 2) + 4] \Rightarrow \tag{4.27}$$
$$f(x) = (3x - 2) \cdot [3x \cdot (3x - 2) + 4 - 6x] \Rightarrow \tag{4.28}$$
$$f(x) = (3x - 2) \cdot [3x \cdot (3x - 2) + (3x - 2) \cdot (-2)] \Rightarrow \tag{4.29}$$
$$f(x) = (3x - 2) \cdot (3x - 2) \cdot (3x - 2) \Rightarrow f(x) = (3x - 2)^3. \tag{4.30}$$

Observando a primeira expressão da função apresentada no Exemplo 26, a princípio, não sabemos se ela é injetiva ou não, mas observe que em (4.30), a função f foi escrita como composição e, para identificar essa eventual injetividade, utilizaremos o Teorema 4.2 a seguir como suporte, que aborda a injetividade da composição de funções.

Inicialmente, Lima (2013) [8] define função composta do seguinte modo:

Definição 4.4 *" Sejam $f : X \to Y$ e $g : U \to V$ duas funções, com $Y \subset U$. A função composta de g com f é a função denotada por $(g \circ f)(x)$, com domínio em X e contradomínio em V, que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$. Isto é:"*

$$\begin{aligned} g \circ f : X \to Y \subset U \to V \\ x \to f(x) \to g(f(x)) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Ou seja, dadas duas funções f, g conforme temos acima, a função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ associa os elementos do domínio de f ao contradomínio de g, cuja composição entre funções pode resultar, obviamente, em uma nova função. Agora, quanto à composição entre funções injetivas, observe o Teorema 4.2:

Teorema 4.2 *A composição entre funções injetivas resulta em uma função injetiva.*

Demonstração. *Sejam f,g funções injetivas, que atendem a definição 4.4, ou seja, com $Y \subset U$. Dados $x_1, x_2 \in X$, pela definição 4.1 temos:*

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \in V \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \in Y \Rightarrow x_1 = x_2 \in X. \tag{4.32}$$

■

Segundo o Teorema 4.2, a composição entre funções injetivas resulta em uma função injetiva e, tomando a função do Exemplo 26, definida por $f(x) = (3x-2)^3$, escrevendo-a da forma $f(x) = (h \circ g)(x)$, sendo $g(x) = 3x - 2$ e $h(x) = x^3$, temos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \tag{4.33}$$

$$(3x_1 - 2)^3 = (3x_2 - 2)^3 \Rightarrow \tag{4.34}$$

Agora tome $u, v \in \mathbb{R}$ de modo que $u = 3x_1 - 2$ e $v = 3x_2 - 2$. Pelo Exemplo 23, se temos $u^3 = v^3 \Rightarrow u = v$. Logo, temos que:

$$u = v \Rightarrow \tag{4.35}$$
$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow \tag{4.36}$$
$$3x_1 = 3x_2 \Rightarrow \tag{4.37}$$
$$3(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \tag{4.38}$$

Em (4.38), segundo a Definição 4.2, concluímos que g é injetiva. Mas também, segundo o Exemplo 23, temos que h é injetiva. Por fim, sendo g e h funções injetivas, segundo o Teorema 4.2, concluímos que a função colocada no Exemplo 26 definida por $f(x) = (h \circ g)(x)$ é injetiva.

Conforme observamos no Exemplo 26, por meio da composição, observa-se que a composição de funções auxilia a compreensão por parte do aluno, quanto à identificação da injetividade de uma função. Posteriormente, observe que o conceito de composição é de suma relevância para o estudo das funções inversas.

Exemplo 27 *Aplicando as operações de soma e produto entre funções injetivas, será que resultam em novas funções injetivas? Observe o Exemplo 27:*

- *A soma entre duas funções injetivas é injetiva?*

  Por exemplo, tome $f(x) = x$ e $g(x) = -x+2$, com $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somando f e g, temos que $f(x) + g(x) = x + (-x+2) = 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a soma entre funções injetivas nem sempre é injetiva.

- *A diferença entre duas funções injetivas é injetiva?*

  Do mesmo modo, tome $f(x) = x$ e $g(x) = x-2$, com $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somando f e g, temos que $f(x) - g(x) = x - (x-2) = 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a diferença entre funções injetivas nem sempre é injetiva.

- *O produto entre duas funções injetivas é injetiva?*

  Basta tomar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = g(x) = x$. Note que $f(x) \cdot g(x) = x^2$ e, tomando $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, temos $f(-1)g(-1) = f(1)g(1) = 1$, logo $f \cdot g$ nem sempre é injetiva.

- *O quociente entre duas funções injetivas é injetiva?*

  Por fim, sejam $f, g : \mathbb{R}|\{0\} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$. Note que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x^2$ e, tomando $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, temos $\dfrac{f(-1)}{g(-1)} = \dfrac{f(1)}{g(1)} = 1$, logo $\dfrac{f}{g}$ nem sempre é injetiva.

Conforme observamos no Exemplo 27, as operações de soma e produto entre funções injetivas nem sempre resultam em funções injetivas, e a única operação entre funções injetivas que resulta em uma nova função injetiva é a composição, que o Teorema 4.2 garante isso. Logo, fica a dica para os professores: é importante deixar isso bem claro em sala de aula, para que os alunos tenham essa compreensão e não tirem conclusões equivocadas quanto à injetividade de uma função.

4.3 Injetividade gráfica de uma função

Um outro modo de identificar a injetividade de uma função é por meio de seu gráfico, em que definimos a injetividade gráfica do seguinte modo:

Definição 4.5 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ é injetiva se, para toda função constante $g(x) = c$ contida em Y, a interseção dos gráficos de f e g se dá no máximo, em um ponto.*

Teorema 4.3 *As definições (4.3) e (4.5) são equivalentes.*

Demonstração.

- *(4.3) $\Rightarrow$ (4.5)*

  Seja $c \in \mathbb{R}$ constante e a função $g(x) = c$, e considere $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$. Como pra cada $y = f(x)$ existe um único $x \in X$ tal que g(x)=f(x), a coordenada x do ponto $(x, c) \in G(f)$ é única.
  Logo, (4.3) $\Rightarrow$ (4.5).

- *(4.5) $\Rightarrow$ (4.3)*

  Considere $x, x' \in X$ de forma que $y = f(x) = f(x') = c$. Porém, se existe uma única coordenada x de modo que $(x, c) \in G(f)$. Por unicidade, temos $x = x'$.
  Assim, (4.5) $\Rightarrow$ (4.3).

■

Segundo o Teorema 4.3, as definições 4.3 e 4.5 são equivalentes e, sendo a definição 4.3 equivalente às definições 4.1 e 4.2, consequentemente, a definição 4.5 também será equivalente a essas definições. Com isso, a cada função constante dada, caso sua interseção com o gráfico da função se dê no máximo em um único ponto, significa afirmar que a cada valor da imagem existe um único valor associado ao domínio, logo, a função f é injetiva.

Inclusive, apresentamos alguns exemplos de funções injetivas e não-injetivas logo abaixo, produzidas no software GeoGebra e utilizando exemplos do Livro A, com o intuito de mostrar ao leitor como identificar a injetividade de uma função por meio de seu gráfico.

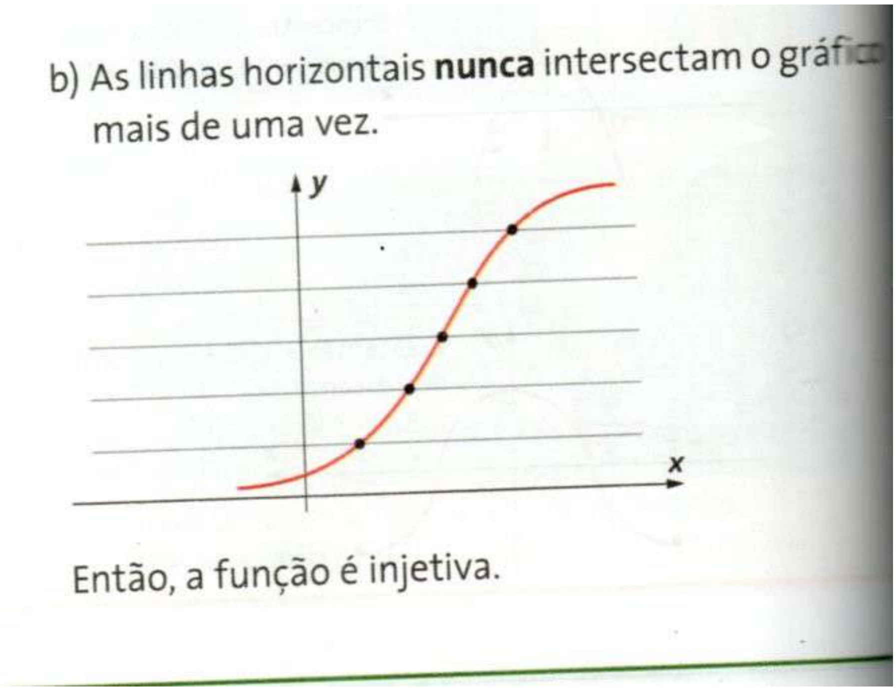


Figura 4.1: Exemplo de Função Injetiva - Livro A

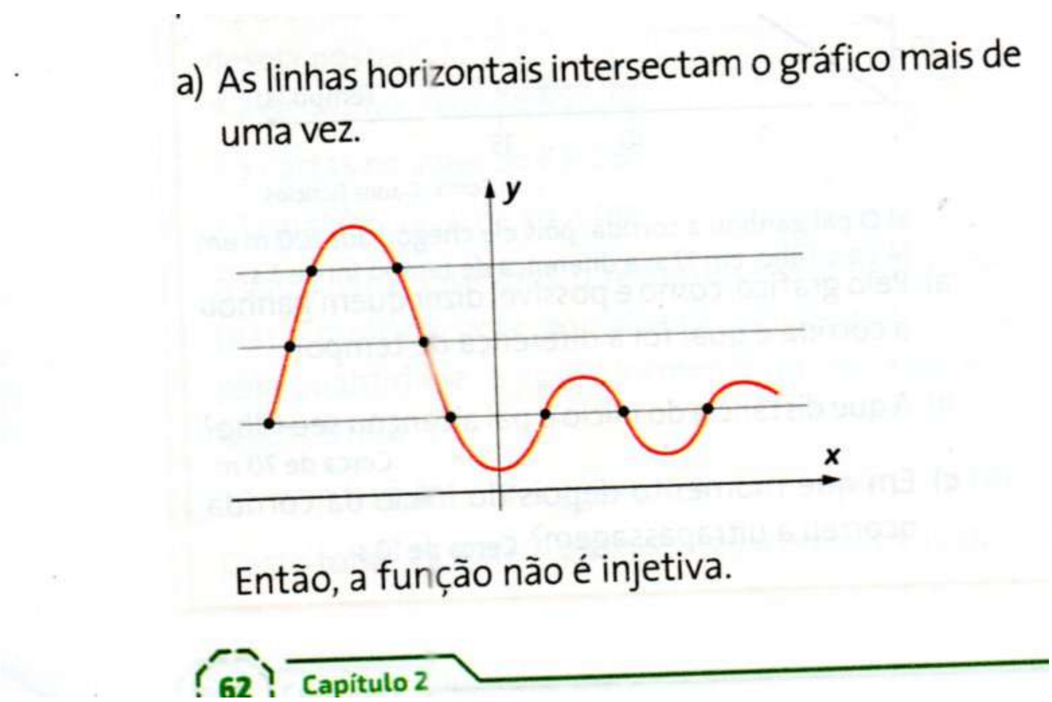


Figura 4.2: Exemplo de Função Não-injetiva - Livro A

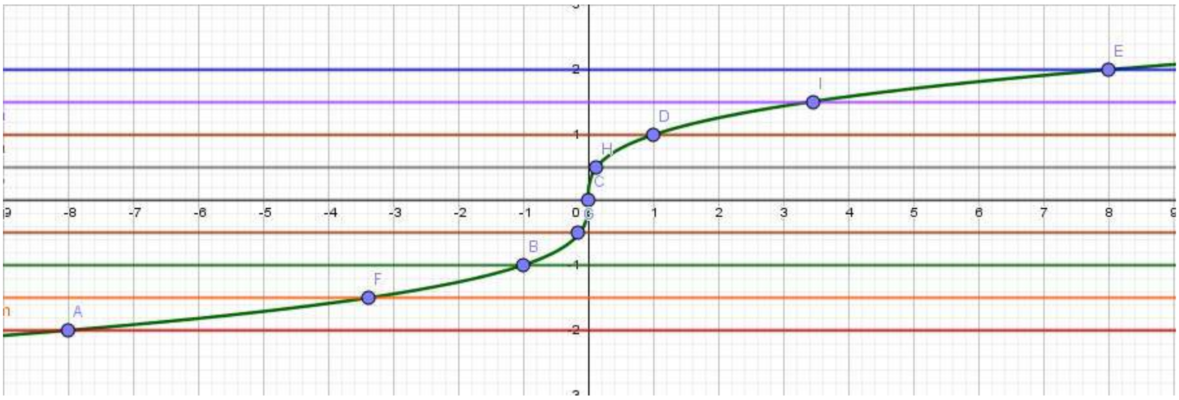


Figura 4.3: Exemplo de Função Injetiva - Figura produzida pelo autor utilizando GeoGebra

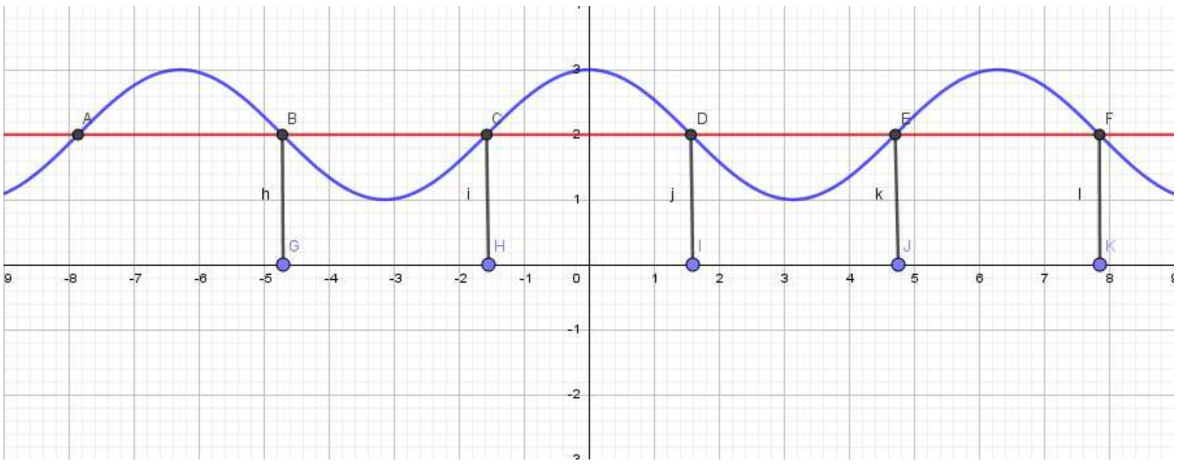


Figura 4.4: Exemplo de Função Não-injetiva - Figura produzida pelo autor utilizando GeoGebra

Conforme notamos nas figuras 4.2 e 4.4, é fácil identificar quando a função não é injetiva, pois traçando uma reta paralela ao eixo x de modo que a interseção com o gráfico da função se dê em no mínimo dois pontos, existem dois valores distintos no domínio com mesma imagem, garantindo a negação da injetividade da função. Mas conforme vemos nas figuras 4.1 e 4.3, podemos notar que identificar a injetividade de uma função por meio do gráfico parece algo simples a se notar, pois, visualizando o gráfico da função, ao "traçar" retas paralelas ao eixo x, se elas "tocam" o gráfico da função em no máximo um ponto e, segundo a definição 4.5, afirma-se que a função é injetiva.

Observe o Exemplo 28:

Exemplo 28 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^5 - 3x^2 + 8$$

é injetiva?

Resposta: *Inicialmente, ao fazer uma pergunta dessa ao aluno de Ensino Médio, não parece fácil respondê-la, pois se trata de um estilo de função que não é comum a ser trabalhado em sala de aula. Porém, observe que* $8 \in \mathbb{R}$*. Assim, podemos encontrar valores de x de modo que* $x^5 - 3x^2 + 8 = 8$*. Observe:*

$$x^5 - 3x^2 + 8 = 8 \Rightarrow \tag{4.39}$$
$$x^5 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \tag{4.40}$$
$$x^2 \cdot (x^3 - 3) = 0 \Rightarrow \tag{4.41}$$
$$x = 0 \quad ou \quad x = \sqrt[3]{3}. \tag{4.42}$$

Por (4.42), temos dois possíveis valores de x tais que $g(x) = 8$*, logo, podemos afirmar que g não é injetiva. Agora, observe o gráfico de f:*

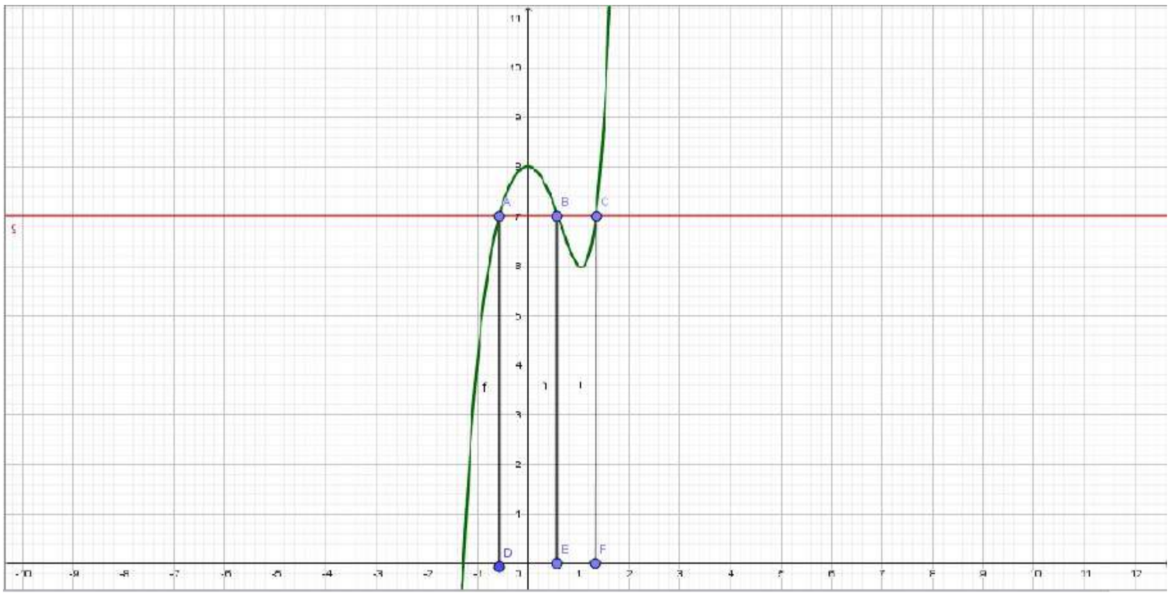


Figura 4.5: Gráfico da função $f(x) = x^5 - 3x^2 + 8$ - Figura produzida pelo autor usando GeoGebra

Sendo $8 \in [6,8]$, note que a constante $y = 8$ "toca" o gráfico de f em três pontos, ou seja, existem três valores reais x, y, z tais que $f(x) = f(y) = f(z) = 8$. Mas, por (4.42), identificamos apenas duas porém, de qualquer modo, f não é injetiva.

Observando o Exemplo 28, por (4.42) concluímos que f não é injetiva. Porém, observando o gráfico da função f, é simples identificar a negação dessa injetividade, pois basta encontrar uma reta que intersecte o gráfico da função em no mínimo dois pontos. Conhecer o gráfico de uma função pode auxiliar para que se negue sua injetividade, porém, não é comum a ser abordado o estudo do gráfico de funções não-elementares no Ensino Médio. Logo, dada uma função qualquer, não é simples negar sua injetividade sem que seu gráfico seja apresentado, devido à infinidade de funções e gráficos, além da dificuldade para construí-los sem o auxílio de um software computacional.

Observe o Exemplo 29:

Exemplo 29 *A função*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} - \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) &= \frac{1}{x^5 + x} + \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

é injetiva?

Resposta: *Segundo a Definição 4.1, pra que uma função seja injetiva, dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $a \neq b$ devemos obter $g(a) \neq g(b)$. Tome $a < b$ de modo que a e b sejam ambos números positivos, ou ambos números negativos e, o outro caso será analisado no final. Observe que:*

$$b^5 - a^5 = (b - a) \cdot (a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4) \Rightarrow$$

$$b^5 - a^5 = (b - a) \cdot [(a^4 + a^2 b^2 + b^4) + ab(a^2 + b^2)]. \tag{4.43}$$

Mas também, temos:

$$\begin{gathered} (b - a)^2 > 0 \Rightarrow \\ b^2 - 2ab + a^2 > 0 \Rightarrow 2ab < a^2 + b^2. \end{gathered} \tag{4.44}$$

Agora, por (4.44) em (4.43), temos:

$$
\begin{aligned}
b^5 - a^5 = (b-a)\cdot[(a^4+a^2b^2+b^4)+ab(a^2+b^2)] \Rightarrow && (4.45)\\
b^5 - a^5 > (b-a)\cdot[(a^4+a^2b^2+b^4)+ab\cdot 2ab] \Rightarrow && (4.46)\\
b^5 - a^5 > (b-a)\cdot[(a^4+a^2b^2+b^4)+2a^2b^2] \Rightarrow && (4.47)
\end{aligned}
$$

$$b^5 - a^5 > (b-a)\cdot[(a^4+b^4)+3a^2b^2]. \tag{4.48}$$

Por hipótese, temos que $b-a>0$ e, por (4.48), temos $a^4+b^4+3a^2b^2>0$, logo, concluímos que $b^5-a^5>0 \Rightarrow a^5<b^5$. Por outro lado, como a e b têm mesmo sinal, temos:

$$
\begin{aligned}
a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a} \Rightarrow \\
\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0 \Leftrightarrow ab>0.
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

Agora:

$$b^3-a^3=(b-a)\cdot(b^2+ab+a^2). \tag{4.50}$$

Em (4.50), por hipótese, temos que $b-a>0$ e, por (4.49), temos $ab>0$, logo $b^2+ab+a^2>0$ e, consequentemente, $b^3-a^3>0 \Rightarrow a^3<b^3$.

Para concluir, tome $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1<x_2$ e mesmos sinais. Sendo assim, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1<x_2 \Rightarrow x_1^5<x_2^5 \Rightarrow \\
x_1^5+x_1<x_2^5+x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2^5+x_2}<\frac{1}{x_1^5+x_1}.
\end{aligned} \tag{4.51}
$$

Por outro lado, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow \\
x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow \frac{1}{x_2^3} < \frac{1}{x_1^3}.
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

Somando membro a membro (4.51) e (4.52), temos:

$$
x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2^5 + x_2} + \frac{1}{x_2^3} < \frac{1}{x_1^5 + x_1} + \frac{1}{x_1^3} \Rightarrow
$$

$$
x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \tag{4.53}
$$

Por (4.53), temos que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$ *e, no caso em que* $x_1 < 0 < x_2$*, obtemos* $g(x_1) < 0 < g(x_2)$ *e, em ambos os casos, segundo a definição 4.1, concluímos que g é injetiva.*

Agora, observe o gráfico da função $g(x)$*:*

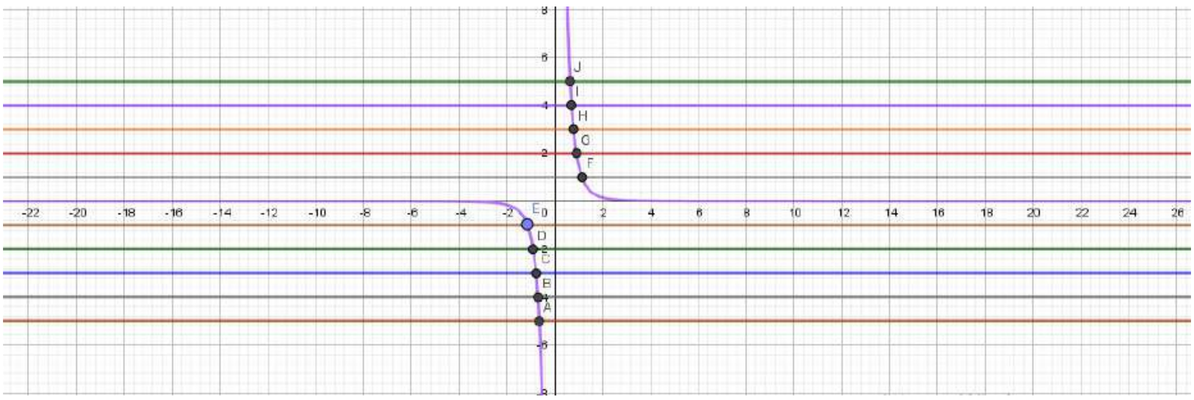


Figura 4.6: Gráfico da função $g(x) = \dfrac{1}{x^5 + x} + \dfrac{1}{x^3}$ - Figura produzida pelo autor usando GeoGebra

Conforme podemos observar no Exemplo 29, vimos que a função g é uma função injetiva, segundo a Definição 4.1. Porém, ao ver seu gráfico, nota-se que quanto mais distante for o valor de x na origem, o valor de $f(x)$ tende a ficar próximo de 0, causando a impressão que o gráfico “toca” o 0 e que a função dada não seja injetiva. Com isso, o método de injetividade gráfica para definir funções injetivas pode acabar confundindo em alguns casos, caso o método de recursos computacionais visuais não seja trabalhado adequadamente.

4.4 Como saber se uma função não é injetiva?

A negação do conceito de injetividade também tem sua importância ao se trabalhar em sala de aula, para que os alunos consigam identificar ou negar de modo mais claro a injetividade de uma função. Para negar a injetividade de uma função, basta que se negue o conceito de injetividade colocado na seção 4, cuja negação apresentamos de quatro modos distintos. Para isso, considerando uma função $f : X \to Y$, dizemos que ela não é injetiva se:

- (Negação da Definição 4.1): Existem ao menos dois elementos $x, x' \in X$ de modo que $x \neq x'$ e $f(x) = f(x')$;
- (Negação da Definição 4.2): Existem $x, x' \in X$ tais que $x \neq x'$, mas $f(x) = f(x')$;
- (Negação da Definição 4.3): $\exists y \in Im(f) \subset Y; \exists x, x' \in X, x \neq x' \quad com \quad f(x) = f(x')$;
- (Negação da Definição 4.5): Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ não é injetiva se, existe ao menos uma função constante $g(x) = c \in Y$ tal que, dados $x, x' \in X$ com $x \neq x'$, temos $f(x) = f(x') = c$.

Observe o Exemplo 30:

Exemplo 30 *A função*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = x^5 + 3x^2 + 8$$

é injetiva?

Resposta: *Inicialmente, suponha a existência de valores reais de modo que $g(x) = 8$. Assim, temos que*

$$x^5 + 3x^2 + 8 = 8 \Rightarrow \tag{4.54}$$
$$x^5 + 3x^2 + 8 = 8 \Rightarrow \tag{4.55}$$
$$x^5 + 3x^2 = 0 \Rightarrow \tag{4.56}$$
$$x^2(x^3 + 3) = 0. \tag{4.57}$$

Em (4.57), temos dois possíveis valores de x, que denotamos por x_1 e x_2, de modo que $x_1 = 0$ e $x_2 = -\sqrt[3]{3}$, negando a definição 4.2. Logo, h não é injetiva. Graficamente:

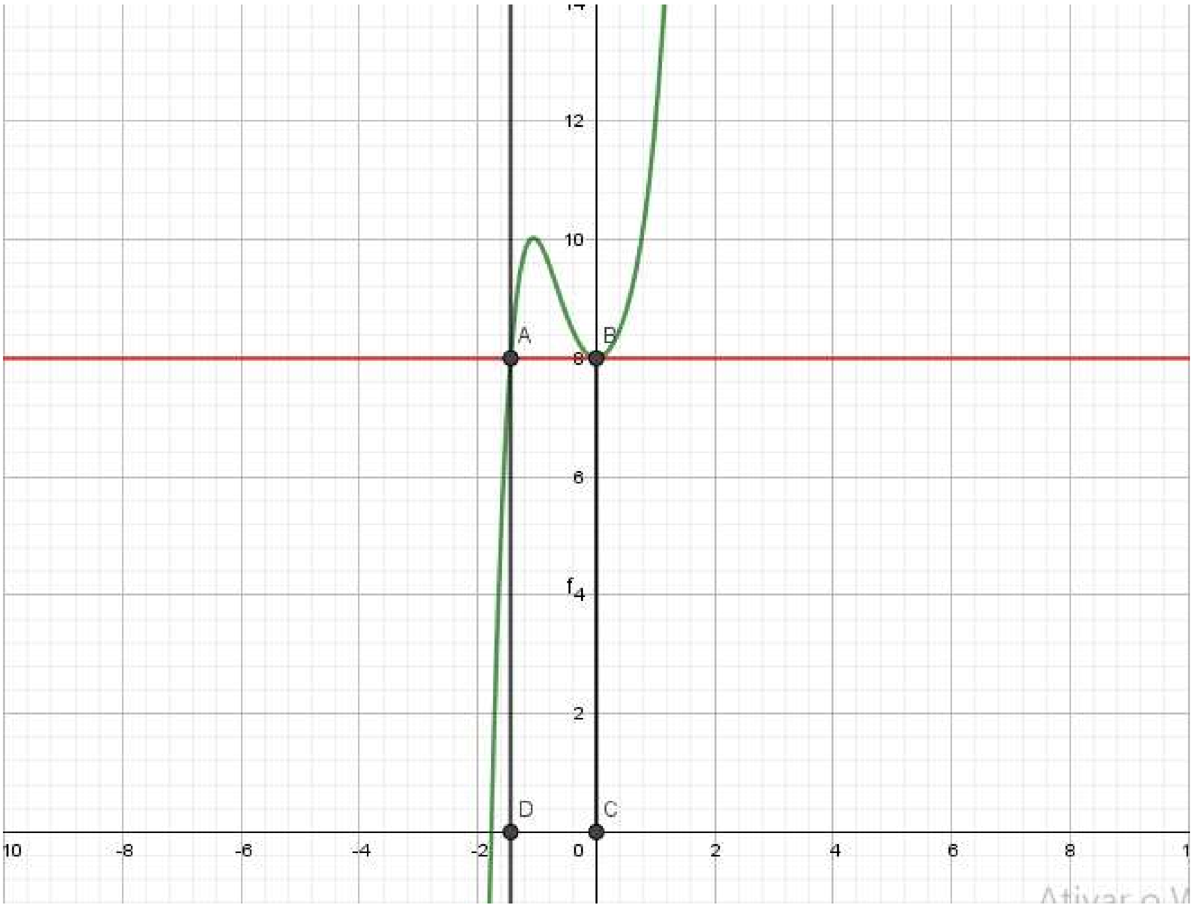


Figura 4.7: Gráfico da função $g(x) = x^5 + 3x^2 + 8$, feito pelo autor usando GeoGebra

Observe agora o Exemplo 31, que é apenas uma pequena modificação do exemplo anterior:

Exemplo 31 *Verifique se a função*

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = x^5 + 3x^2 + x + 8$$

é injetiva.

Solução: *Em relação à lei de formação da função do Exemplo 30, observe que há o acréscimo da variável x em relação à função g, caracterizando a existência de uma nova função. Para identificar a injetividade dessa função, devemos adotar um outro procedimento. Inicialmente, observe que a função h é contínua, informação essa que nos será bastante útil.*

Por hipótese, observe que:

$$h(0) = 0^5 - 3.0^2 + 0 + 8 = 8. \tag{4.58}$$

Agora, observe que:

$$h(-2) = (-2)^5 - 3.(-2)^2 + (-2) + 8 = -14 \tag{4.59}$$
$$h(-1) = (-1)^5 - 3.(-1)^2 + (-1) + 8 = 9 \tag{4.60}$$

Sendo $-14 < 8 < 9$, o Teorema 4.5, mencionado posteriormente na seção 4.6, garante a existência de um $c \in (-2,-1)$ tal que $h(c) = 8$, mas $c \neq 0$. Logo, como $h(c) = h(0) = 8$, concluímos que a função h não é injetiva.

Observando o gráfico de h, temos:

Figura 4.8: Gráfico da função $h(x) = x^5 + 3x^2 + x + 8$, produzido pelo autor utilizando GeoGebra

Observando as funções colocadas nos Exemplos 30 e 31, para negar a injetividade de uma função sem o auxílio do gráfico, não é algo simples, pois muitas vezes os argumentos matemáticos desenvolvidos pra negar a injetividade de uma função são de certo modo elaborados e, não são de fácil compreensão por parte do aluno de Ensino Médio. Porém, observe que ao fim das soluções algorítmicas, é colocado o desenho gráfico de cada uma dessas funções, onde em ambos os gráficos, traçando uma reta paralela ao eixo x, encontramos regiões do gráfico cuja reta "toca" o gráfico em mais de um ponto. Pro aluno de Ensino Médio esse raciocínio é bem mais simples e de fácil compreensão, facilitando a compreensão dessa negação por parte do aluno.

4.5 Paridade e funções periódicas

Uma outra forma de verificar se uma função não é injetiva, é justamente identificar sua paridade ou periodicidade, pois caso a função atenda a ao menos uma das condições exibidas a seguir citadas, consequentemente, ela não será injetiva.

A definição de função par, deve se deixar claro que é definida apenas para domínios simétricos, de modo que $x \in D \quad implica \quad -x \in D$. Define-se função par do seguinte modo:

Definição 4.6 (Função Par) *" Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com D um domínio simétrico. Uma função f é uma* ***função par*** *se $f(x) = f(-x); \quad \forall x \in D$."*

Por definição, caso uma função seja par em seu domínio, consequentemente não poderá ser injetiva, pois o único valor de $x \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = f(-x)$, é $x = 0$. Agora, observe o Exemplo 32:

Exemplo 32 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^{2k}; \quad k \in \mathbb{N}$$

não é injetiva.

Solução: *Inicialmente, observe que $(-x)^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, temos:*

$$f(-x) = (-x)^{2k} = [(-x)^2]^k = [x^2]^k = x^{2k} = f(x). \tag{4.61}$$

Por (4.61), concluímos que a função f para n par, não é injetiva e, para que isso se verifique, basta tomar $x \neq 0$.

Conforme podemos notar, segundo o Exemplo 32, vemos que dada a função $f(x) = x^n$, com n par, não é injetiva. Mas para n ímpar, seria a função g injetiva? Observe o Exemplo 33:

Exemplo 33 *Seja*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = x^{2k+1}; \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Mostre que g é injetiva.

Demonstração. *Inicialmente, tome $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que $a^{2k+1} = b^{2k+1}$. Assim, temos:*

$$a^{2k+1} = b^{2k+1} \Rightarrow \tag{4.62}$$
$$a^{2k+1} - b^{2k+1} = 0 \Rightarrow \tag{4.63}$$
$$(a-b) \cdot (a^{2k} + a^{2k-1}b + ... + ab^{2k-1} + b^{2k}) = 0 \Rightarrow \tag{4.64}$$
$$(a-b) \cdot [\sum_{i=0}^{2k} a^i \cdot b^{2k-i}] = 0. \tag{4.65}$$

Por (4.65), há duas possibilidades: se $a - b = 0 \Rightarrow a = b$, com isso o problema está resolvido. Agora, suponha $a - b \neq 0$. Com isso, devemos ter que $\sum_{i=0}^{2k} a^i \cdot b^{2k-i} = 0$ e, para isso, dividiremos o binômio acima como soma de dois binômios, sendo um soma de monômios com expoentes pares e outro como soma de expoentes ímpares. Para isso, observe os seguintes casos:

- *Caso 1: i par*

  Para i par, temos $i = 2q_i$, com $q_i \in \mathbb{N}$. Assim, temos que

$$a^{2q_i} \cdot b^{2k-2q_i} = [a^{q_i} \cdot b^{k-q_i}]^2 > 0 \Rightarrow \sum_{q_i=0}^{k} a^{2q_i} \cdot b^{2k-2q_i} > 0. \tag{4.66}$$

- *Caso 2: i ímpar*

Supondo i ímpar, temos $i = 2q_i - 1; q_i \in \mathbb{N}$*. Com isso, temos que:*

$$a^i \cdot b^{2k-i} = a^{2q_i-1} \cdot b^{2k-2q_i+1} \Rightarrow \tag{4.67}$$

$$[a^{q_i} \cdot b^{k-q_i}]^2 \cdot (a^{-1} \cdot b). \tag{4.68}$$

Mas por hipótese, note que $a^{2k+1} = b^{2k+1}$*. Assim, multiplicando membro a membro por* $b^{-2k} \cdot a^{-1}$*, temos:*

$$a^{2k+1} = b^{2k+1} \Rightarrow \tag{4.69}$$

$$a^{2k} \cdot a = b^{2k} \cdot b \Rightarrow \tag{4.70}$$

$$a^{2k} \cdot a \cdot (b^{-2k} \cdot a^{-1}) = b^{2k} \cdot b \cdot (b^{-2k} \cdot a^{-1}) \Rightarrow \tag{4.71}$$

$$a^{2k} \cdot b^{-2k} = a^{-1} \cdot b \Rightarrow \tag{4.72}$$

$$a^{-1} \cdot b = (a^k \cdot b^{-k})^2 > 0. \tag{4.73}$$

Em (4.73), temos que $a^{-1} \cdot b > 0$ *e, em (4.68), temos que* $[a^{q_i} \cdot b^{k-q_i}]^2 > 0$*, daí*

$$[a^{q_i} \cdot b^{k-q_i}]^2 \cdot (a^{-1} \cdot b) > 0 \Rightarrow \sum_{q_i=1}^{k} a^{2q_i-1} \cdot b^{2k-2q_i+1} > 0. \tag{4.74}$$

Por (4.74), temos que $\sum_{q_i=1}^{k} a^{2q_i-1} \cdot b^{2k-2q_i+1} > 0$*, para todo i ímpar. Logo, por (4.66) e (4.74) conclui-se que:*

$$\sum_{i=0}^{2k} a^i \cdot b^{2k-i} = \sum_{q_i=0}^{k} a^{2q_i} \cdot b^{2k-2q_i} + \sum_{q_i=1}^{k} a^{2q_i-1} \cdot b^{2k-2q_i+1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{2k} a^i \cdot b^{2k-i} > 0.$$

Sendo assim, devemos ter $a - b = 0 \Rightarrow a = b$*, caracterizando a injetividade de g.*

■

Segundo o Exemplo 33, sendo o expoente da potência colocada na função f par, vimos que f não é injetiva. Porém, sendo o expoente da potência de x^n ímpar, passa a ser uma função injetiva, mas isso não garante que tomando um polinômio $p(x)$ escrito como soma de funções descritas no Exemplo 33 de expoente ímpar, a função polinomial obtida deverá ser injetiva, pois nem sempre a soma de funções injetivas resulta em outra função injetiva, conforme mencionamos na seção 4.2. Pra verificar essa afirmação, observe os Exemplos 34 e 35:

Exemplo 34 *A função*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^5 - x^3 \end{aligned}$$

é injetiva?

Resposta: *Observe que:*

$$f(-1) = (-1)^5 - (-1)^3 = -1 + 1 = 0 \tag{4.75}$$
$$f(0) = 0^5 - 0^3 = 0 - 0 = 0. \tag{4.76}$$
$$f(1) = 1^5 - 1^3 = 1 - 1 = 0. \tag{4.77}$$

Como $f(-1) = f(0) = f(1)$, conclui-se que f não é injetiva.

Exemplo 35 *A função*

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = x^5 + x + 8 \end{aligned}$$

é injetiva?

Resposta: *Segundo a equação (4.48), dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, sem perda de generalidade, tome $x_1 < x_2$. Segundo o Exemplo 29, temos $x_1^5 < x_2^5$. Daí:*

$$x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow \tag{4.78}$$
$$x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2 \Rightarrow \tag{4.79}$$
$$x_1^5 + x_1 + 8 < x_2^5 + x_2 + 8 \Rightarrow \tag{4.80}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2); \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.81}$$

Por (4.81), temos que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$, logo, concluímos que a função g é injetiva, segundo a definição 4.1. Agora, observe o gráfico da função g:

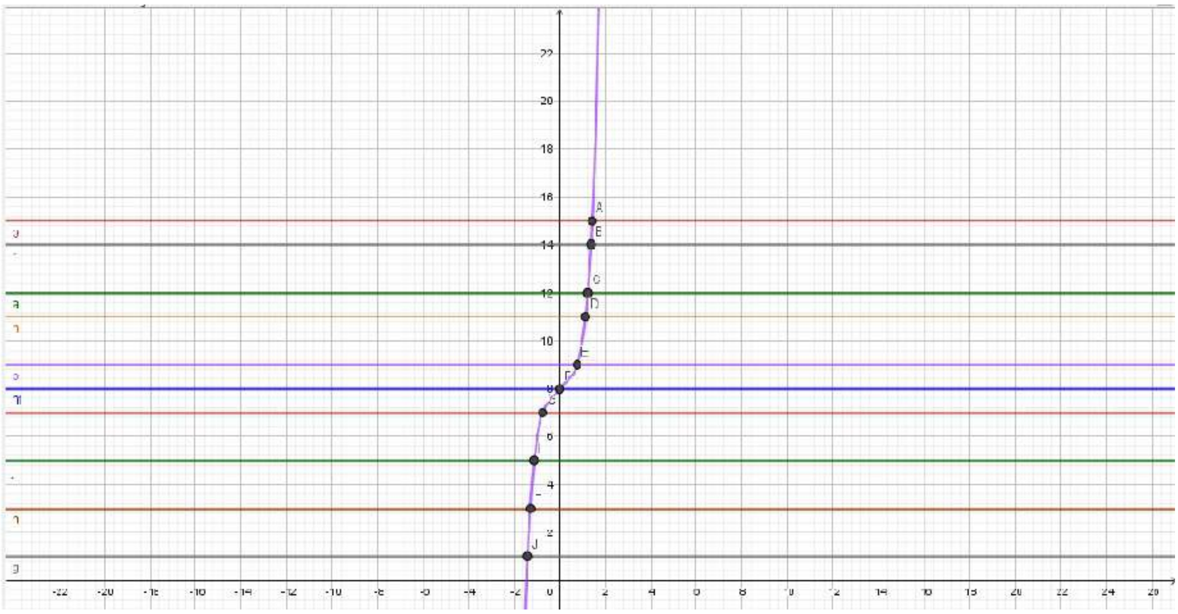


Figura 4.9: Gráfico da função $g(x) = x^5 + x + 8$ - produzido pelo autor no GeoGebra

Segundo a definição 4.5, como a interseção de toda e qualquer função constante se dá no máximo em um ponto,mas também, segundo a equação (4.81), podemos afirmar que g é injetiva.

Observando os Exemplos 34 e 35, vemos que funções polinomiais escritas como soma de monômios com potências ímpares pode resultar em uma função injetiva ou não e, segundo o Exemplo 27, a soma de funções injetivas pode resultar em uma função que não seja injetiva. Portanto, é importante que o professor deixe claro que nem sempre uma função polinomial escrita como soma de monômios com expoente ímpar será injetiva.

Um outro modo de negar a injetividade de uma função, é identificando se ela é ou não periódica, mas antes disso, definimos o que vem a ser o período de uma função:

Definição 4.7 (Período) *O **período** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o menor valor possível de $T \in \mathbb{R}_+$ de modo que $f(x+T) = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, caso exista.*

Logo após citar a definição de período, citaremos a definição de **função periódica**, extraída de Lima (2013) [8] e mencionada logo abaixo:

Definição 4.8 (Função Periódica) *“ Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **periódica** quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(x+kT) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Uma função periódica, por definição, tomando domínio $\mathbb{R}$, não pode ser injetiva. Mas, sendo o domínio da função com comprimento igual ou inferior ao período, onde se determinar a existência de uma função injetiva, em que pra isso, basta observar como a função é definida. Observe os Exemplos 36 e 37:

Exemplo 36 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = cos(x)$$

é injetiva?

Resposta: *A função f é periódica de período 2π, ou seja, $f(x+2\pi) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, não pode ser injetiva. Graficamente:*

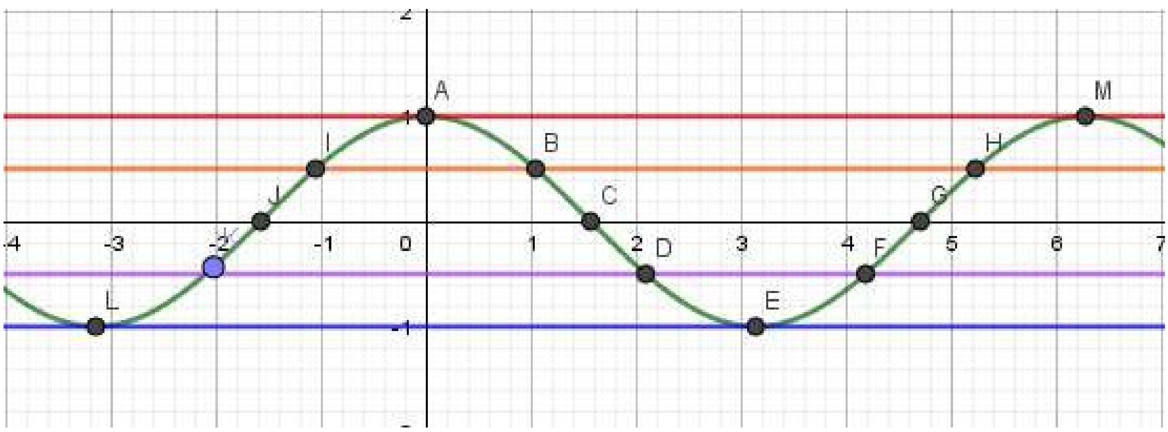


Figura 4.10: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$, produzido pelo autor usando GeoGebra

Conforme podemos observar no gráfico acima, traçando retas paralelas ao eixo x no intervalo $[-1,1] \in Cd(f)$, essas retas tocam o gráfico da função em mais de um ponto, negando a definição 4.5.

Exemplo 37 *Mostre que a função*

$$g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto g(x)=cos(x)$$

é injetiva.

Demonstração. *Sejam $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$ e, sem perda de generalidade, tome $x<y$. Assim, seja $y=x+h$, com $h>0$. Sendo assim, temos:*

$$\cos(x+h)=\cos x\Rightarrow \tag{4.82}$$

$$\cos x.\cos h-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} h=\cos x\Rightarrow \tag{4.83}$$

$$\cos x.\cos h-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} h-\cos x=0\Rightarrow \tag{4.84}$$

$$\cos x.(\cos h-1)-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} h=0. \tag{4.85}$$

Como $h,x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$, segue que $\cos x,\cos h,\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h$ são valores positivos entre 0 e 1. Com isso, temos que:

$$senx.\operatorname{sen} h>0\Rightarrow$$

$$-senx.\operatorname{sen} h<0. \tag{4.86}$$

Por outro lado, temos:

$$0<\cos h<1\Rightarrow$$

$$-1<\cos h-1<0. \tag{4.87}$$

Consequentemente, como $\cos h-1<0$ por (4.87) e, sendo $\cos x>0$, podemos afirmar que

$$\cos x.(\cos h-1<0). \tag{4.88}$$

Somando membro a membro (4.86) e (4.88), concluímos que

$$\cos x.(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} h < 0. \tag{4.89}$$

absurdo, pois (4.89) contradiz (4.85). Assim, devemos ter $h = 0$ e, consequentemente, g injetiva. ■

Por fim, observe o Exemplo 38:

Exemplo 38 *A função*

$$h : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = \cos x$$

é injetiva?

Resposta: *Não, pois* $\frac{-\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$*, mas* $\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$*. Logo, h não é injetiva.*

Conforme podemos observar no Exemplo 36, a função cosseno é uma função periódica de período 2π, logo não é injetiva. Mas analisando os Exemplos 37 e 38, temos duas funções trigonométricas de domínio com comprimento inferior à 2π, que uma é injetiva e a outra não. Com isso, podemos afirmar que em relação às funções trigonométricas, caso o comprimento do domínio seja inferior ao período, a função pode ser injetiva ou não,dependendo do modo como o domínio é colocado.

4.6 Injetividade e Continuidade

Nesta seção, faremos algumas colocações sobre a injetividade das funções contínuas, em que podemos associá-la à sua monotonicidade, auxiliando ao leitor a identificar a injetividade de forma mais simples e prática, associando-a diretamente a seu crescimento (decrescimento) e, transparecendo com maior clareza sua identificação por parte do aluno de Ensino Médio. A ideia de continuidade para os alunos de Ensino Médio se remete ao "desenhar" o gráfico, quando se tem acesso à construção do gráfico, é permitido ao aluno "grifar" a curva sem interrupção alguma, pois a função é definida para todos os seus pontos mas, também é visível ao aluno notar se a função é injetiva ou não para domínio e contradomínio limitados. Caso domínio e contradomínio sejam infinitos, é viável ao aluno identificar a injetividade a partir do seu crescimento (decrescimento), mas não se pode garantir sua injetividade sem o domínio de uma argumentação matemática consistente e, o conceito de continuidade abordaremos com maiores detalhes na definição 8.6, contida na seção 8.2.

Inicialmente, definimos função estritamente crescente e estritamente decrescente do seguinte modo:

Definição 4.9 (Função estritamente crescente) *Uma função $f: X \to Y$ é estritamente crescente se, dados $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definição 4.10 (Função estritamente decrescente) *Uma função $g: X \to Y$ é estritamente decrescente se, dados $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$, temos $g(x_1) > g(x_2)$.*

Definidos os conceitos de função estritamente crescente e decrescente, colocamos os Teoremas 4.4 e 4.5 como suporte para demonstrar o Teorema 4.6, que mostra a associação entre crescimento(decrescimento) e injetividade. Muniz Neto (2013) [11] enuncia o **Teorema de Bolzano** do seguinte modo:

Teorema 4.4 (Bolzano) *" Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a).f(b) < 0$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$."*

Demonstração. *Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e seja*

$$A = \{X \in [a,b]; f \text{ é negativa no intervalo} [a,x]\}.$$

Como $a \in A$ por hipótese, temos $A \neq \emptyset$. Por outro lado, A é limitado (uma vez que $A \subset [a,b]$) e, portanto, existe $c = \sup A$.

Note inicialmente que $c > a$, pelo lema de permanência do sinal. De fato, se fosse $f(a) < 0$, teríamos, de acordo com aquele resultado, a existência de $0 < \delta < b - a$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in [a, a+\delta)$ e, daí, $c \geq a + \delta$.

Agora, afirmamos que $f(c) = 0$. Por contradição, suponha primeiro que $f(c) < 0$. Então $c < b$ (uma vez que $f(b) > 0$) e, novamente, pelo lema de permanência do sinal, existiria $0 < \delta < b - c$ tal que f seria negativa em $(c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$. Mas, como $c = \sup A$, podemos tomar $d \in (c-\delta, c) \cap A$, de sorte que $f < 0$ em $[a, c_1]$; portanto, teríamos $f < 0$ em $[a,d] \cup (c-\delta, c+\frac{\delta}{2}] = [a, c+\frac{\delta}{2}]$, contradizendo o fato de ser $c = \sup A$. Por outro lado, se $f(c) > 0$, existiria $\delta > 0$ tal que f seria positiva em $(c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$; em particular, $A \cap (c-\delta, c] = \emptyset$ e, daí, teríamos $\sup A \leq c - \delta$, uma nova contradição. Logo, a única possibilidade é termos $f(c) = 0$. ■

Exemplo 39 *Mostre que a função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 3^x - 4x^2 + 1$$

possui uma raiz no intervalo $(3,4)$ *e, conclua que ela não é injetiva.*

Solução: *Inicialmente, observe que* $f(1) = 3^1 - 4.1^2 + 1 = 0$ *e, posteriormente, observe que:*

$$f(3) = 3^3 - 4.3^2 + 1 = -8 \tag{4.90}$$
$$f(4) = 3^4 - 4.4^2 + 1 = 18. \tag{4.91}$$

Note que $f(3).f(4) = (-8).18 = -144 < 0$*. Assim, o Teorema 4.4 garante a existência de um* $c \in (3,4)$ *de forma que* $f(c) = 0$*, mas* $c \neq 1$*. Portanto, concluímos que a função* f *com domínio* $\mathbb{R}$ *não pode ser injetiva.*

A demonstração do Teorema 4.4 foi extraída do livro de Muniz Neto (2013) [11] e, servirá de suporte para demonstração do Teorema 4.5, que é de suma importância em relação ao que será abordado nessa seção. Posteriormente, Ávila (1999) [1] cita o **Teorema do Valor Intermediário**, importantíssimo e bastante requisitado no estudo de funções contínuas.

Teorema 4.5 (Valor Intermediário) *Seja* f *uma função contínua num intervalo* $I = [a,b]$*, com* $f(a) \neq f(b)$*. Então, qualquer número* d *compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = d$*. Em outras palavras, f(x) assume todos os valores compreendidos entre f(a) e f(b), com x variando em (a,b).*

Demonstração. *Suponhamos, para fixar as ideias, que f(a) < d < f(b). Considere o conjunto*

$$X = \{x \in I : f(t) < d \quad \text{em} \quad a \leq t < x\}.$$

Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ *tal que* $a \leq x < a + \varepsilon \Rightarrow f(x) < d$*; logo, o conjunto X é não-vazio; e como é limitado superiormente, possui supremo, que denotaremos por c. É claro que a<c. É claro também que c<b, pois, numa vizinhança de b,* $f(x) > d$*.*

Vamos provar que $f(c) = d$*. Se f(c) < d, existiria* $\varepsilon > 0$ *tal que* $x \in V_\varepsilon(c) \Rightarrow f(x) < d$*: então, o supremo de X seria maior do que c, absurdo. Do mesmo modo, se f(c) > d, existiria*

$\varepsilon > 0$ tal que $x \in V_\varepsilon(c) \Rightarrow f(x) > d$; e o supremo de X teria de ser menor do que c, outro absurdo. Concluímos, pois, que f(c)=d, como queríamos provar.

A demonstração é análoga no caso $f(a) > d > f(b)$.

Observação 4.1 *A notação $V_\varepsilon(c)$ utilizada se refere à vizinhança do ponto c contida em (a,b).*

■

Exemplo 40 *A função*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = x^5 - 3x^2 - 5x + 8$$

é injetiva?

Resposta: *Inicialmente, note que $f(0) = 0^5 - 3.0^2 + 0 + 8 = 8$. Mas também, temos:*

$$f(1) = 1^5 - 3.1^2 - 5.1 + 8 = 1 \tag{4.92}$$
$$f(2) = 2^5 - 3.2^2 - 5.2 + 8 = 18 \tag{4.93}$$

Segundo o Teorema 4.5, existe um $c \in (1,2)$ de forma que $f(c) = 8$, com $c \neq 0$. Logo, podemos afirmar que a função g com domínio $\mathbb{R}$ não pode ser injetiva.

Conforme podemos observar, o Teorema 4.5 é importante para o estudo de funções contínuas, que nos Exemplos 39 e 40 utilizamos para negar a injetividade de algumas funções. Mas, a utilidade dos Teoremas 4.4 e 4.5 não se restringem apenas a isso, em que os utilizaremos como suporte para demonstrar o Teorema 4.6, em que uma função contínua é injetiva se e somente se é estritamente monótona, associando diretamente injetividade e crescimento (decrescimento).

Teorema 4.6 *Uma função contínua é injetiva se, e somente se, é estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Demonstração. *Seja f injetiva. Sem perda de generalidade, sejam $x_1, x_2 \in X$ números reais com mesmo sinal de forma que $f(x_1) < f(x_2)$. Agora, suponha a existência de $x_3 \in X$ tal que $f(x_2) \geq f(x_3)$, seja $k = \max\{f(x_1), f(x_3)\}$. Se $k = f(x_1)$, o Teorema 4.5 garante a existência* *de $c \in (x_2, x_3)$ de modo que $f(c) = k$, absurdo. Por outro lado se $k = f(x_3)$, analogamente, o Teorema 4.5 garante a existência de $d \in (x_1, x_2)$ tal que $f(d) = k$, contradição. Logo, sendo f injetiva, deve se ter que:*

$$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x_3).$$

e, f é estritamente crescente.

Supondo f estritamente decrescente, basta supor a existência de $x_3 \in X$ de modo que $f(x_2) \leq f(x_3)$ e $k = \min\{f(x_1), f(x_3)\}$. Logo, tomando $k = f(x_1)$ ou $k = f(x_3)$, o método de demonstração é análogo.

Por fim, sendo f estritamente crescente ou estritamente decrescente, em ambos os casos temos que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e, segundo a Definição 4.1, f é injetiva. ■

O Teorema 4.6 assegura que, uma função contínua será injetiva se, e somente se, for estritamente crescente ou estritamente decrescente, reforçando o que já citamos, que a injetividade das funções contínuas está diretamente associada à sua monotonicidade. Um exemplo de função injetiva bastante explorado é o da **função afim**, cuja injetividade é simples de ser notada e é uma função bastante comum a se trabalhar no Ensino Médio.

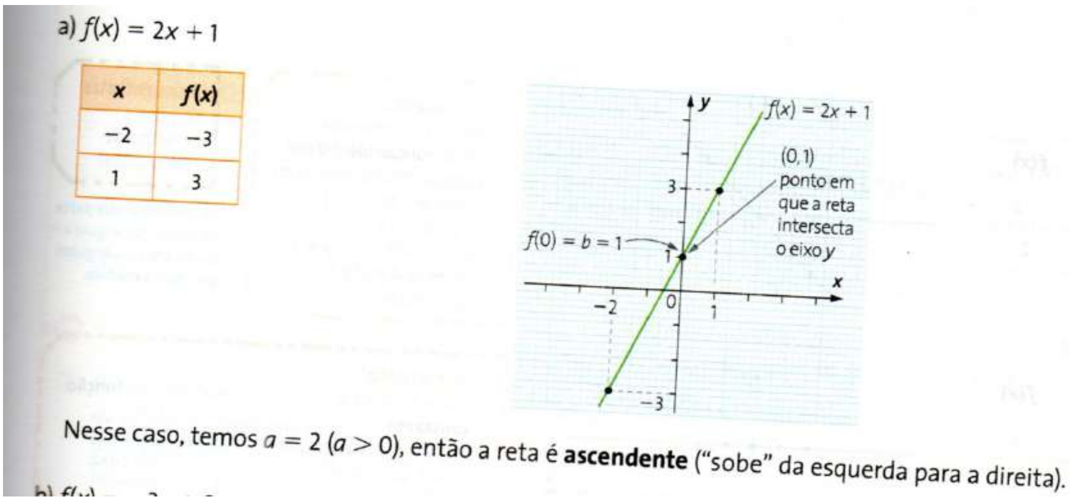


Figura 4.11: Exemplo de Função Afim - Livro A

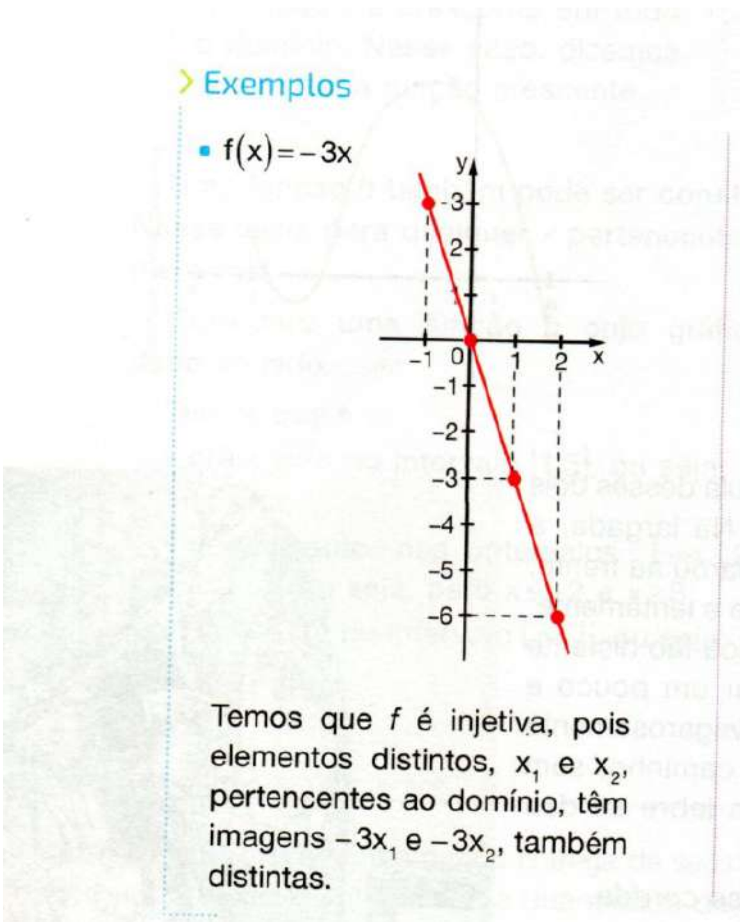


Figura 4.12: Exemplo de Função Afim - Livro B

As funções afins, são relativamente fáceis de identificar sua injetividade e, devido à sua continuidade, fica bem mais simples reconhecê-la em um primeiro momento, em que ao abordar o conceito de injetividade, é interessante ao professor abordar exemplos como esse pois, o aluno vai construindo inicialmente uma ideia de como associar injetividade e crescimento (decrescimento). Porém, a ideia de injetividade contínua não deve se restringir apenas a isso, cuja ideia pode ser explorada também no estudo de funções que abordem um grau de dificuldade maior, onde o aluno, já ciente sobre como explorar essa associação, não sentiria maiores dificuldades para identificar a injetividade de outras funções.

Observe os Exemplos 41 e 42:

Exemplo 41 *Mostre que a função*

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = sen(x^2) + 3$$

é injetiva.

Solução: *Tomando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, observe que a função $g(x) = x^2$ é estritamente crescente e, segundo o Teorema 4.6 é injetiva. Por outro lado, a função $h(x) = \operatorname{sen} x$ é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e, consequentemente, h é injetiva. Por fim, o Teorema 4.2 garante que a composição $(h \circ g)(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ é injetiva em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e, consequentemente, $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) + 3$ é injetiva.*

Exemplo 42 *Mostre que a função*

$$g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x + \frac{1}{x}$$

é injetiva.

Solução: *Sem perda de generalidade, tome $x_1, x_2 > 1$ com $x_1 < x_2$ e, suponha que $x_1 + \frac{1}{x_1} \geq x_2 + \frac{1}{x_2}$. Com isso, temos:*

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \geq x_2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \tag{4.94}$$

$$x_1 - x_2 \geq \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow \tag{4.95}$$

$$-(x_2 - x_1) \geq -(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}) \Rightarrow \tag{4.96}$$

$$x_2 - x_1 \leq \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \Rightarrow \tag{4.97}$$

$$x_2 - x_1 \leq \frac{x_2 - x_1}{x_1.x_2} \Rightarrow \tag{4.98}$$

$$1 \leq \frac{1}{x_1.x_2} \Rightarrow x_1.x_2 \leq 1. \tag{4.99}$$

Por hipótese, temos $x_1.x_2 > 1$ mas, em (4.99) temos $x_1.x_2 \leq 1$, contradição. Sendo assim, devemos ter que $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ e, segundo o Teorema 4.6, g é injetiva.

Conforme observamos nos Exemplos 41 e 42, a princípio, as funções f e g não são simples de determinar a sua injetividade mas, como são contínuas, podemos associar a sua injetividade a seu crescimento(decrescimento), o que facilita bastante a identificar sua injetividade. Com isso, é importante deixar claro ao professor que caso uma função seja contínua, podemos associar sua injetividade ao seu crescimento (decrescimento), permitindo ao aluno identificar a injetividade de uma função de modo mais simples e claro.

Capítulo 5

Sobrejetividade de funções

Assim como o conceito de função injetiva, a definição de função sobrejetiva tem sua importância quanto ao estudo das funções inversas, auxiliando de modo significativo a compreensão das propriedades de algumas funções como, por exemplo, o caso das funções trigonométricas inversas. E, pra que uma função seja sobrejetiva, a imagem da função deve ser igual ao contradomínio definido.

5.1 Definição

O conceito de função sobrejetiva é colocado do seguinte modo:

Definição 5.1 *Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetiva se, para todo $y \in Y$, existe ao menos um $x \in X$ de forma que $y = f(x)$. Consequentemente, $Cd(f) = Im(f)$.*

Observe o Exemplo 43:

Exemplo 43 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 + 4$$

é sobrejetiva?

Resposta: *Seja $y = x^3 + 4$. Logo, temos:*

$$y = x^3 + 4 \Rightarrow \tag{5.1}$$
$$y - 4 = x^3 \Rightarrow \tag{5.2}$$
$$x = \sqrt[3]{y-4}. \tag{5.3}$$

Por (5.3), temos que $\sqrt[3]{y-4}$ é definida para todo $y \in \mathbb{R}$, logo, a função f é sobrejetiva.

Assim como o conceito de injetividade, o conceito de sobrejetividade requer bastante atenção ao ser abordado pois, embora duas funções distintas embora possuam mesma lei de formação e mesmo domínio, uma pode ser sobrejetiva enquanto a outra não é, caracterizando a existência de duas funções distintas.

Observe os Exemplos 44 e 45:

Exemplo 44 *A função*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2 - 2x + 4$$

é sobrejetiva?

Resposta: *Seja $y = -1$ por exemplo. Daí, note que:*

$$x^2 - 2x + 4 = -1 \Rightarrow \tag{5.4}$$

$$x^2 - 2x + 4 - 3 = -1 - 3 \Rightarrow \tag{5.5}$$

$$x^2 - 2x + 1 = -4 \Rightarrow \tag{5.6}$$

$$(x-1)^2 = -4 \Rightarrow \tag{5.7}$$

$$x = 1 \pm 2i. \tag{5.8}$$

Em (5.8), há dois possíveis valores de x que atendem $y = -1$, são eles: $x = 1 + 2i$ e $x = 1 - 2i$, e ambos não são números reais. Logo, a função g não é sobrejetiva.

Exemplo 45 *Mostre que a função*

$$h : \mathbb{R} \to [4, +\infty)$$

$$x \mapsto h(x) = x^2 - 2x + 4$$

é sobrejetiva.

Demonstração. *Considerando $y \geq 4$, observe que:*

$$y = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow \tag{5.9}$$

$$y - 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \tag{5.10}$$

$$y - 3 = (x-1)^2 \Rightarrow \tag{5.11}$$

$$x-1=\pm\sqrt{y-3} \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{y-3}. \quad (5.12)$$

Por (5.12), como $y \geq 4$, temos $x=1\pm\sqrt{y-3} \in \mathbb{R}$ logo, a expressão está definida para o contradomínio $Y=[4,+\infty)$ e, segundo a definição 5.1, a função h é sobrejetiva. ■

Conforme observamos nos Exemplos 44 e 45, duas funções, embora possuam mesma lei de formação e mesmo domínio porém, com contradomínios distintos, uma função pode ser sobrejetiva, enquanto a outra não é e, caracteriza-se uma diferença entre as funções f e g apresentadas. Com isso, fazemos aqui uma primeira observação, em que pra identificar a sobrejetividade de uma função, é importante estar atento não só à sua lei de formação, mas ao modo como seu contradomínio é definido.

5.2 Sobrejetividade e operações entre funções

Quanto as operações entre funções, consideramos as operações de soma, produto e composição, que são geralmente as mais utilizadas. Porém, será que as operações de soma e produto entre funções sobrejetivas resulta em uma nova função sobrejetiva?

Observe o Exemplo 46:

Exemplo 46 *a) A soma entre duas funções sobrejetivas resulta em uma nova função sobrejetiva?*

Resposta: *Considerando as funções f,g com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$, sejam $f(x)=x$ e $g(x)=-x$. Sendo assim, temos que $(f+g)(x)=0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a soma entre funções sobrejetivas nem sempre resulta em uma nova função sobrejetiva.*

b) A diferença entre duas funções sobrejetivas resulta em uma nova função sobrejetiva?

Resposta: *Considerando as funções f,g com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$, sejam $f(x)=x$ e $g(x)=x-2$. Sendo assim, temos que $(f-g)(x)=x-(x-2)=2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo, a diferença entre funções sobrejetivas nem sempre resulta em uma nova função sobrejetiva.*

c) O produto entre duas funções sobrejetivas resulta em uma função sobrejetiva?

Resposta: *Considerando as funções $f(x)=x$ e $g(x)=x$ com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$, considerando a função definida pelo produto, temos $(fg)(x)=x\cdot x=x^2$ e, dado*

$x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 \geq 0$, logo, a função (fg) não é definida para valores menores que 0 e, consequentemente, não é sobrejetiva.

d) O quociente entre duas funções sobrejetivas resulta em uma função sobrejetiva?

Resposta: *Considerando as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x$ com domínio e contradomínio $\mathbb{R} - \{0\}$, considerando a função definida pelo quociente, temos $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{x} = 1$, logo, a função $(\frac{f}{g})$ não é definida para valores diferentes de 1 e, consequentemente, não é sobrejetiva.*

Conforme observamos no Exemplo 46, as operações de soma e produto entre funções sobrejetivas nem sempre resulta em uma nova função sobrejetiva e, é importante que o professor esteja atento a esse detalhe e alerte seus alunos quanto a isso em sala de aula. Porém, a composição entre funções sobrejetivas resulta em uma nova função sobrejetiva, e com isso, observe o Teorema 5.1:

Teorema 5.1 *Dadas duas funções sobrejetivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ quaisquer, mostre que a composição $(g \circ f)(x) : X \to Z$ também é sobrejetiva.*

Demonstração. *Por hipótese, sendo g sobrejetiva, para todo $z \in Z$, existe ao menos um $y \in Y$ de modo que $z = g(y)$. Mas também, para todo $y \in Y$, existe ao menos um $x \in X$ de forma que $y = f(x)$. Consequentemente, para todo $z \in Z$, existe ao menos um $x \in X$ de modo que $z = g(f(x))$. Logo, $(g \circ f)(x)$ é sobrejetiva.* ■

Conforme observamos no Teorema 5.1, diferentemente das operações de soma e produto, a composição entre funções sobrejetivas resulta em uma nova função sobrejetiva, logo, o método de composição é bastante útil para determinar a sobrejetividade de algumas funções e, é muito importante que professor e aluno estejam atentos a isso.

Observe o Exemplo 47:

Exemplo 47 *Verifique se a função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$$

é sobrejetiva.

Resposta: *A princípio, dada uma função polinomial f, não nos parece simples determinar sua sobrejetividade, pois o modo como ela está colocada talvez não seja simples de percebê-la. Porém, observe que:*

$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 27x^3 - 9x^2 - 18x^2 + 6x + 3x - 1 \Rightarrow \tag{5.13}$$
$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 9x^2(3x-1) + -6x(3x-1) + 1.(3x-1) \Rightarrow \tag{5.14}$$
$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1).(9x^2 - 6x + 1) \Rightarrow \tag{5.15}$$
$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1).(9x^2 - 3x - 3x + 1) \Rightarrow \tag{5.16}$$
$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1).[3x(3x-1) - 1.(3x-1)] \Rightarrow \tag{5.17}$$
$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1).(3x-1).(3x-1) = (3x-1)^3. \tag{5.18}$$

Por (5.18), podemos reescrever a função $f(x) = (3x-1)^3$ e, sejam $g(x) = 3x - 1$ e $h(x) = x^3$, com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$. Observe que:

$$y = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3}; com \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{5.19}$$
$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}; com \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{5.20}$$

Por (5.19) e (5.20), temos que as funções g e h são sobrejetivas pois, para todo y existe um x de forma que $f(x) = y$, e segundo o Teorema 5.1, a função $f(x) = (h \circ g)(x)$ é sobrejetiva.

Conforme colocamos nos Exemplos 46 e 47, definidas apenas as operações entre funções sobrejetivas, apenas a composição entre funções resulta em uma função sobrejetiva, e o Teorema 5.1 justifica isso. Portanto, é importante que o professor aborde essa informação em sala de aula pois, se trata de algo preciso que pode auxiliá-los a compreender melhor esse conceito.

5.3 Sobrejetividade e funções polinomiais

O estudo dos polinômios, geralmente é mencionado nos currículos de Ensino Fundamental e Médio e, consequentemente, deve ser abordado adequadamente em sala de aula, para que os alunos consigam identificar de modo claro e objetivo como se caracteriza a existência de um polinômio e suas propriedades. Usamos o conceito de polinômio anteriormente, mas, para tornar o texto mais completo, vamos fazer uma breve exposição, mais formal sobre polinômios, cuja definição apresentamos do seguinte modo:

Definição 5.2 (Polinômio de uma variável) *Um **polinômio** $p(x)$ é o nome dado a uma sentença matemática composta como soma finita de monômios e expressa do seguinte modo:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i; \quad com \quad a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$$

Chamamos a cada a_i de coeficiente do monômio e a cada x^i, de parte literal.

Definido polinômio, definiremos seu **grau** e o **coeficiente líder**, que são itens de grande importância para determinar o estudo da sobrejetividade dessas funções, cuja definição de grau foi extraída de Muniz Neto (2013) [12].

Definição 5.3 (Grau) *Se $f(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + \dots + a_nX^n \in K(X) - \{0\}$, com $a_n \neq 0$, dizemos que o inteiro não negativo n é o **grau** de f, e denotamos $\partial f = n$ (lê-se " o grau de f é igual a n").*

Definição 5.4 (Coeficiente líder) *Se $f(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + \dots + a_nX^n \in K(X) - \{0\}$, com $a_n \neq 0$ uma função polinomial com $\partial f = n$, dizemos que o número real a_n é o **coeficiente líder** de f.*

As funções polinomiais quando estudadas, podem ser sobrejetivas ou não, desde que se esteja atento ao modo como o contradomínio é definido e, conforme observamos nos Exemplos 44, 45 e 47, não é tão simples identificar a sobrejetividade de uma função polinomial por mudança de variáveis em alguns casos, não é viável identificar a sobrejetividade da função por esse modo.

Porém, para determinar a sobrejetividade de uma função polinomial, utilizaremos as Proposições 5.2, 5.3, 5.4 e 5.6, que serão de grande utilidade para discutir melhor sobre isso mas, para demonstração das proposições 5.2 e 5.3, utilizaremos as Definições 5.5 e 5.6 como suporte.

Definição 5.5 (Limites Infinitos no Infinito Divergentes) *Definimos os limites no infinito de quatro modos distintos, os quais colocamos da seguinte forma:*

- ***Definição 1**: Sejam $x \subset \mathbb{R}$ ilimitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, quando dado M>0, existe A>0 tal que*

$$x > A \Rightarrow f(x) > M.$$

- ***Definição 2**: Sejam $x \subset \mathbb{R}$ ilimitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, quando dado M>0, existe A<0 tal que*

$$x < A \Rightarrow f(x) > M.$$

- ***Definição 3**: Sejam $x \subset \mathbb{R}$ ilimitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, quando dado M<0, existe A>0 tal que*

$$x > A \Rightarrow f(x) < M.$$

- ***Definição 4**: Sejam $x \subset \mathbb{R}$ ilimitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, quando dado M<0, existe A<0 tal que*

$$x < A \Rightarrow f(x) < M.$$

Os limites no infinito, sejam convergentes ou divergentes, são de grande importância para determinar domínio e contradomínio de funções polinomiais pois, sendo essas funções contínuas, algumas dessas funções têm $\mathbb{R}$ como contradomínio, mas também, no caso das funções de coeficiente par, para determinar o contradomínio, basta determinar o valor mínimo ou máximo da função.

Observe as proposições 5.2, 5.3, 5.4 e 5.6:

Proposição 5.2 *Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2k} = \lim_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty; \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Demonstração. *Dado M>0, tome $A = M^{\frac{1}{2k}} > 0$ e observe que*

$$x > M^{\frac{1}{2k}} \Rightarrow x^{2k} > M \Rightarrow f(x) > M.$$

Pela definição 5.5, temos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por outro lado, dado $M > 0$, tome $A = M^{\frac{1}{2k}} > 0$ e, consequentemente, temos $A = -M^{\frac{1}{2k}} < 0$. Daí, observe que

$$x < -M^{\frac{1}{2k}} \Rightarrow x^{2k} > M \Rightarrow f(x) > M.$$

Pela definição 5.5, temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

■

Proposição 5.3 *Mostre que*

$$\lim_{x \to +\infty} x^{2k+1} = +\infty$$

e que

$$\lim_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty; \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Demonstração. *Para o caso de $x \to +\infty$, dado $M > 0$, tome $A = M^{\frac{1}{2k+1}}$. Assim, observe que*

$$x > M^{\frac{1}{2k+1}} \Rightarrow x^{2k+1} > M \Rightarrow f(x) > M.$$

Segundo a definição 5.5, concluímos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo, dado M<0, tome $A = M^{\frac{1}{2k+1}}$. Assim, observe que

$$x < M^{\frac{1}{2k+1}} \Rightarrow x^{2k+1} < M \Rightarrow f(x) < M.$$

Segundo a definição 5.5, concluímos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

■

As proposições mencionadas nesta seção serão de grande importância para definir corretamente o contradomínio de uma função de forma que ela seja sobrejetiva, mas para que se tenha um entendimento mais claro destas definições, Muniz Neto (2013) [11] define também uma outra forma de determinar limites infinitos, mas agora no caso em que o limite converge, que servirá de suporte para demonstração da proposição 5.4. Observe:

Definição 5.6 (Limites no Infinito Convergentes) *Se existe $a > 0$ tal que $(a, +\infty) \subset X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função dada, escrevemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que*

$$x \in X \quad e \quad x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

No caso em que $x \to -\infty$, basta tomar $X = (-\infty, -a)$ e $x < -A$, e o método de definição é análogo.

Proposição 5.4 *Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0;\quad x\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$$

Demonstração. *Para demonstração desse teorema, dividiremos sua resolução em dois casos:*

- *Caso 1:* $x\to+\infty$

  Dado $\varepsilon>0$, *tome* $A=(\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}>0$ *e observe que*

$$x>(\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}>0\Rightarrow \tag{5.21}$$
$$x^k>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow \tag{5.22}$$
$$\frac{1}{x^k}<\varepsilon\Rightarrow \tag{5.23}$$
$$|\frac{1}{x^k}-0|<\varepsilon\Rightarrow \tag{5.24}$$
$$|f(x)-0|<\varepsilon. \tag{5.25}$$

- *Caso 2:* $x\to-\infty$

  Dado $\varepsilon>0$, *tome* $A=-(\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}>0$ *e observe que*

$$x<-(\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}<0\Rightarrow \tag{5.26}$$
$$-x>(\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}>0\Rightarrow \tag{5.27}$$
$$(-x)^k>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow \tag{5.28}$$
$$\frac{1}{(-x)^k}<\varepsilon\Rightarrow \tag{5.29}$$
$$|\frac{1}{x^k}-0|<\varepsilon\Rightarrow \tag{5.30}$$
$$|f(x)-0|<\varepsilon. \tag{5.31}$$

$\blacksquare$

A proposição 5.4, conforme fora demonstrada acima, assim como a proposição 5.5 mencionada logo abaixo, servirá de suporte para mostrar a proposição 5.6, que será de fundamental importância para discutir sobre a sobrejetividade de funções polinomiais.

Proposição 5.5 *Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty} a.x^{2k} = +\infty; \quad para \quad a>0 \quad e \quad k\in\mathbb{N}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} a.x^{2k} = -\infty; \quad para \quad a<0 \quad e \quad k\in\mathbb{N}$$

Demonstração. *Para demonstração dessa proposição, dividiremos em dois casos:*

- *Caso 1: $a>0$*

  Dado $M>0$, temos $\frac{M}{a}>0$. Assim, como $\lim_{x\to\pm\infty} x^{2k} = +\infty$, existe A>0 tal que para $x>A$ ou $x<-A$, temos

$$x^{2k} > \frac{M}{a} \Rightarrow a.x^{2k} > M.$$

  Portanto, pela definição 5.5, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^{2k} = +\infty.$$

- *Caso 2: $a<0$*

  Dado $M<0$, temos $\frac{M}{a}>0$. Assim, como $\lim_{x\to\pm\infty} x^{2k} = +\infty$, existe A>0 tal que para $x>A$ ou $x<-A$, temos

$$x^{2k} > \frac{M}{a} \Rightarrow a.x^{2k} < M.$$

  Portanto, pela definição 5.5, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^{2k} = -\infty.$$

Nos casos em que $a > 0$, temos $\lim_{x \to +\infty} ax^{2k+1} = +\infty$; para $a > 0$ e $\lim_{x \to -\infty} ax^{2k+1} = +\infty$. Já para $a < 0$, temos $\lim_{x \to +\infty} ax^{2k+1} = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} ax^{2k+1} = +\infty$. ■

Proposição 5.6 *Dado um polinômio $p(x)$ qualquer, mostre que*

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n.x^n; \quad x \in \mathbb{R}$$

Demonstração. *Inicialmente, podemos escrever o polinômio $p(x)$ do seguinte modo:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \Rightarrow \tag{5.32}$$

$$p(x) = a_n x^n [1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}.\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}.\frac{1}{x^n}] \Rightarrow \tag{5.33}$$

$$p(x) = a_n x^n.[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n}.\frac{1}{x^i}]. \tag{5.34}$$

Aplicando a Proposição 5.4 em (5.34), temos que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n}.\frac{1}{x^i}] \Rightarrow \tag{5.35}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n. \lim_{x \to \pm\infty} [1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n}.\frac{1}{x^i}] \Rightarrow \tag{5.36}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n}.0] \Rightarrow \tag{5.37}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n. \tag{5.38}$$

como queríamos demonstrar. ■

Conforme fora colocado na proposição 5.6, definida uma função polinomial com domínio em $\mathbb{R}$, para definir o contradomínio, é importante estar atento ao seu coeficiente líder, pois é a partir dele que podemos observar como seu contradomínio é definido e, consequentemente, podemos identificar sua sobrejetividade de forma mais clara.

Exemplo 48 *Determine o contradomínio Y de forma que a função*

$$f : \mathbb{R} \to Y$$

$$x \mapsto f(x) = -3x^5 + 4x^2 - 3x + 8$$

seja sobrejetiva.

Resposta: *Inicialmente, note que -3 < 0 e, segundo a proposição 5.6, temos que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad e \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Assim, concluímos que $Y = \mathbb{R}$.

Quando passamos a observar o coeficiente líder da função, essa sobrejetividade acaba se tornando mais simples a se identificar, facilitando bastante a compreensão por parte do aluno e, esse método é válido devido á continuidade das funções polinomiais. Porém, caso o grau da função seja ímpar, independentemente da função ser crescente ou decrescente, o contradomínio sempre será o conjunto $\mathbb{R}$. Mas, caso o grau da função seja par, como fazer a determinar seu contradomínio? Observe o Exemplo 49:

Exemplo 49 *Determine o contradomínio Y de forma que a função*

$$g : \mathbb{R} \to Y$$

$$x \mapsto g(x) = x^4 - 32x + 48$$

seja sobrejetiva.

Resposta: *Inicialmente, Lima (2006) [5] afirma que sendo uma função $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $a \in X$ e possui um máximo ou mínimo em a, então $f'(a) = 0$. Com isso, note que*

$$f'(x) = (x^4 - 32x + 25)' \Rightarrow \tag{5.39}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 32 = 0 \Rightarrow \tag{5.40}$$

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow \tag{5.41}$$

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2. \tag{5.42}$$

Como 1>0 e f'(2)=0, segundo a proposição 5.5 afirmamos que o valor mínimo de f é $f(2) = 2^4 - 32.2 + 25 = -23$. *Logo,* $Y = [-23, +\infty)$.

No caso das funções polinomiais de grau par, basta observar seu coeficiente líder e o seu valor mínimo, com isso, afirmamos que no caso das funções polinomiais se torna bem simples determinar sua imagem desse modo, facilitando a compreensão por parte do aluno.

5.4 Sobrejetividade gráfica de uma função

Uma outra forma de identificar a sobrejetividade de uma função é por meio de seu gráfico, que definimos do seguinte modo:

Definição 5.7 *Uma função* $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ *é sobrejetiva se, dada uma função constante qualquer com* $c \in Y$*, a interseção da função* $y = c$ *com o gráfico de* f *se dá, no mínimo, em um ponto.*

A definição 5.7 nos permite identificar a sobrejetividade de uma função a partir da sua visualização, em que pra função ser sobrejetiva, basta desenhar retas paralelas ao eixo x na parte do contradomínio da função, de modo que elas "toquem" o gráfico da função.

Teorema 5.7 *As definições (5.1) e (5.7) são equivalentes.*

Demonstração.

- $(5.1) \Rightarrow (5.7)$

  Sendo f *sobrejetiva, dado* $c \in Y$*, existe* $x \in X$ *de modo que* $f(x) = c$*. Logo,* $(x, c) \in G(f)$ *e, como* $c \in Y$ *é uma constante qualquer contida em* Y*, temos que* $(5.1) \Rightarrow (5.7)$.

- $(5.7) \Rightarrow (5.1)$

  Tomando $g(x) = c$ *uma constante qualquer em* Y *de forma que* $(x, c) \in G(f)$*, podemos afirmar que* $f(x) = c$*. Assim, sendo* $c \in Y$ *qualquer, temos que* $(5.7) \Rightarrow (5.1)$.

■

Segundo o Teorema 5.7, temos que as definições 5.1 e 5.7 são equivalentes, logo, dada uma função g constante, sendo a interseção com o gráfico da função f não-vazia, a função f será sobrejetiva.

Inclusive, apresentamos alguns exemplos de funções sobrejetivas logo abaixo, segundo os livros didáticos e, na figura 5.1, temos um exemplo de gráfico feito no GeoGebra pelo autor.

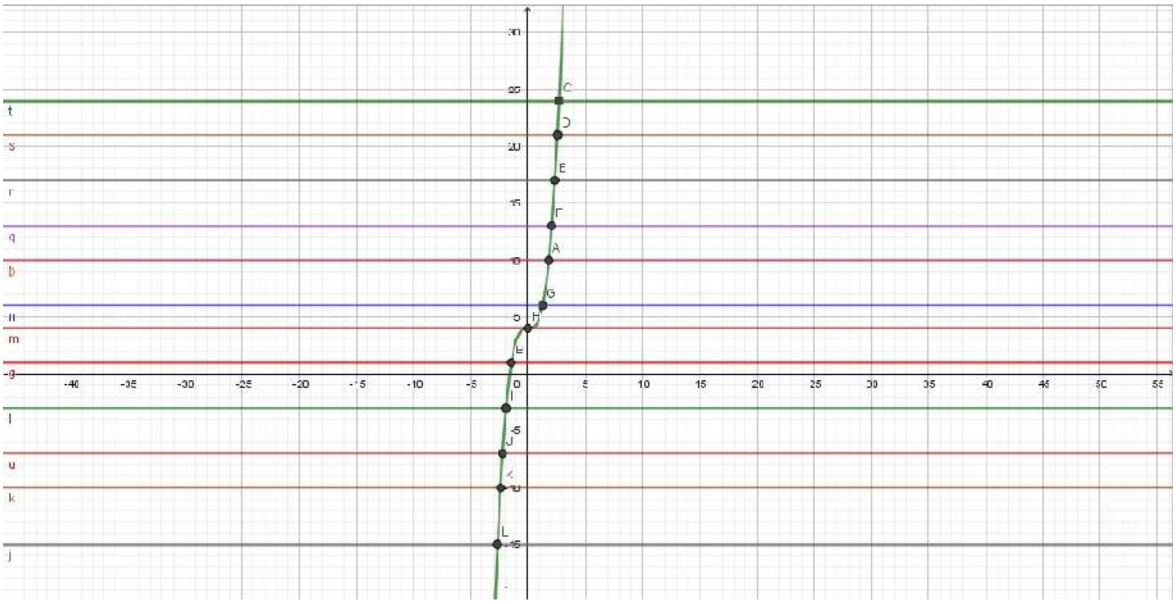
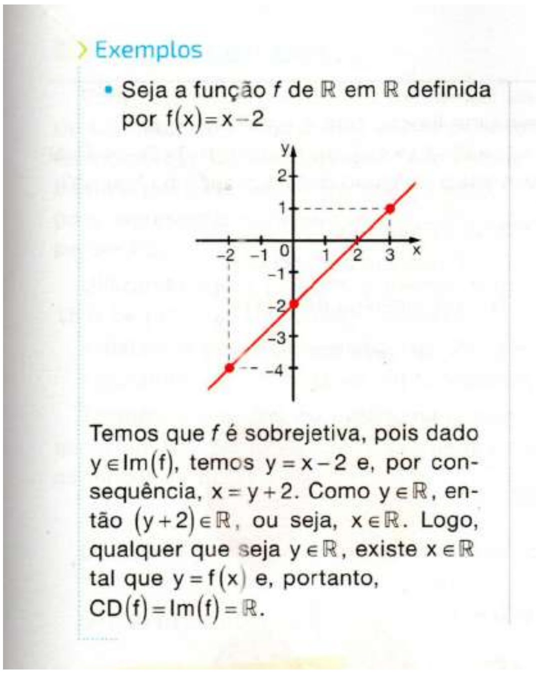


Figura 5.1: Gráfico da função descrita no Exemplo 46 - Produzida pelo autor utilizando GeoGebra

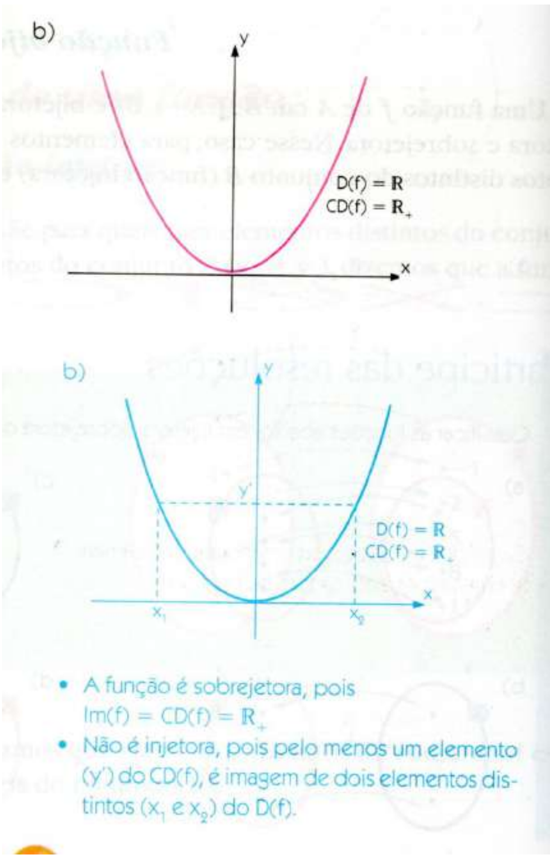


> Exemplos

- Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2$

Temos que f é sobrejetiva, pois dado $y \in Im(f)$, temos $y = x - 2$ e, por consequência, $x = y + 2$. Como $y \in \mathbb{R}$, então $(y+2) \in \mathbb{R}$, ou seja, $x \in \mathbb{R}$. Logo, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ e, portanto, $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.

Figura 5.2: Exemplo de função sobrejetiva - Livro B



- A função é sobrejetora, pois $Im(f) = CD(f) = \mathbf{R}_+$
- Não é injetora, pois pelo menos um elemento (y') do CD(f), é imagem de dois elementos distintos (x_1 e x_2) do D(f).

Figura 5.3: Exemplo de função sobrejetiva - Livro C

Conforme podemos observar nos Exemplos acima, na figura 5.2, o autor justifica a sobrejetividade da função dada e, na figura 5.1, segundo o Exemplo 43, temos que f é sobrejetiva. Mas, a princípio, é importante estar atento a um detalhe: os desenhos dos gráficos, ao serem expostos nas imagens, são limitados e, pra justificar a sobrejetividade dessas funções, é necessário explorar uma argumentação matemática que permita ao leitor compreender porque as funções colocadas são sobrejetivas. Quanto à figura 5.3, vemos que no eixo y, tomando o contradomínio $\mathbb{R}_+$, a função dada é sobrejetiva mas, o que garante a sua sobrejetividade é justamente que, para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$, ou seja, o recurso gráfico nos parece insuficiente para identificar a sobrejetividade de uma função.

Agora, observe o Exemplo 50:

Exemplo 50 *A função*

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

é sobrejetiva?

Resposta: *Dado $y \in \mathbb{R}^+$ de forma que $y = \frac{1}{x}$, temos que $xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$, ou seja, para todo $y \neq 0$, existe um $x \in D(f)$ de forma que $y = f(x)$. Logo, f é sobrejetiva no contradomínio $\mathbb{R}^+$. Graficamente:*

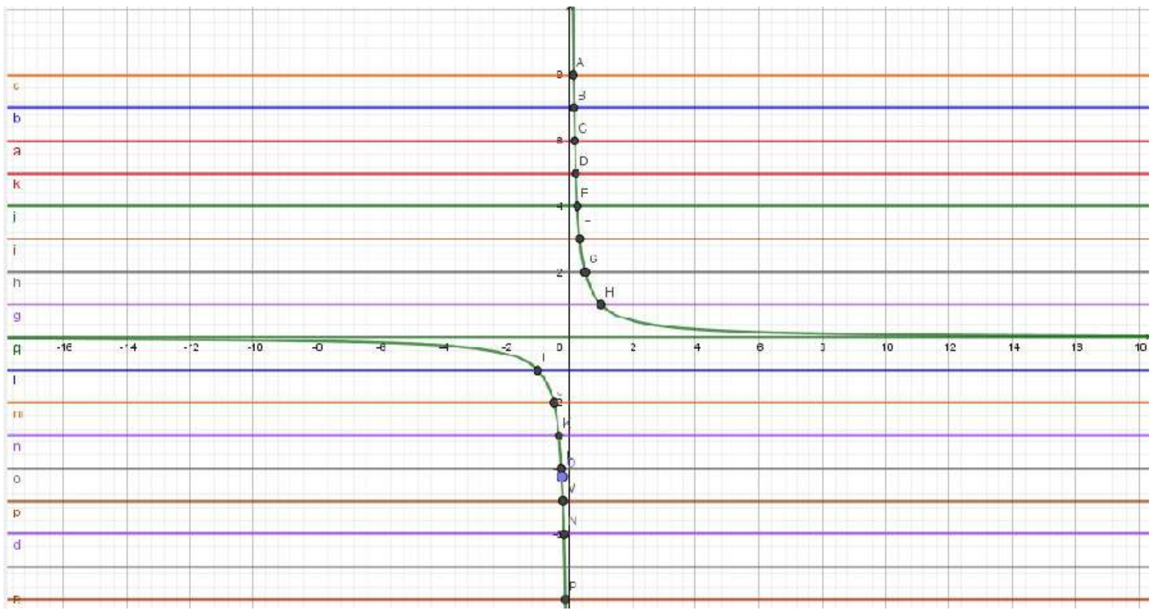


Figura 5.4: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, feito pelo autor utilizando GeoGebra

Conforme vimos no Exemplo 50, a função f é sobrejetiva para todos os reais não-nulos. Porém, para $y = 0$ não é possível definir valores reais de x que satisfaçam tal condição. Observando a figura 5.4, quando os valores de x se distanciam do 0, se tem a impressão de que o gráfico “toca” o eixo x para $y = 0$, e isso pode confundir o aluno pois, ao observar o gráfico, temos a impressão de que existem valores reais de x de modo que $f(x) = 0$, o que é um equívoco. Logo, podemos afirmar que a definição de sobrejetividade gráfica é pouco precisa por si só é insuficiente para determinar a sobrejetividade de uma função.

5.5 Como negar a sobrejetividade de uma função?

Assim como a negação da injetividade, a negação da sobrejetividade também têm a sua importância em sala de aula e, podemos fazê-la de dois modos distintos:

- (**Negação da definição 5.1**): Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ não é injetiva se, existir ao menos um $y \in Y$ que não admita $x \in X$ qualquer tal que $y = f(x)$.
- (**Negação da definição 5.7**): Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$, existe ao menos uma função constante $g(x) = c$, com $c \in Y$ de modo que os gráficos de f e de g não se intersectam.

Observe os Exemplos 51 e 52:

Exemplo 51 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 - 7x + 10$$

é sobrejetiva?

Resposta: *Inicialmente, tome $y = -3$. Assim devemos encontrar $x \in \mathbb{R}$ de forma que $f(x) = -3$. Observe que:*

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \Rightarrow \tag{5.43}$$
$$-3 = x^2 - 7x + 10 \Rightarrow \tag{5.44}$$

$$x^2 - 7x + 13 = 0. \tag{5.45}$$

Para que a função f seja sobrejetiva, a equação definida em (5.45) deve admitir raízes reais. Com isso, calculando Δ, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4.1.13 = 49 - 52 = -3 < 0. \tag{5.46}$$

Por (5.46), temos $\Delta < 0$ e, consequentemente, a função f não admite $x \in \mathbb{R}$ de forma que $f(x) = -3$. Logo, f não é sobrejetiva. Graficamente:

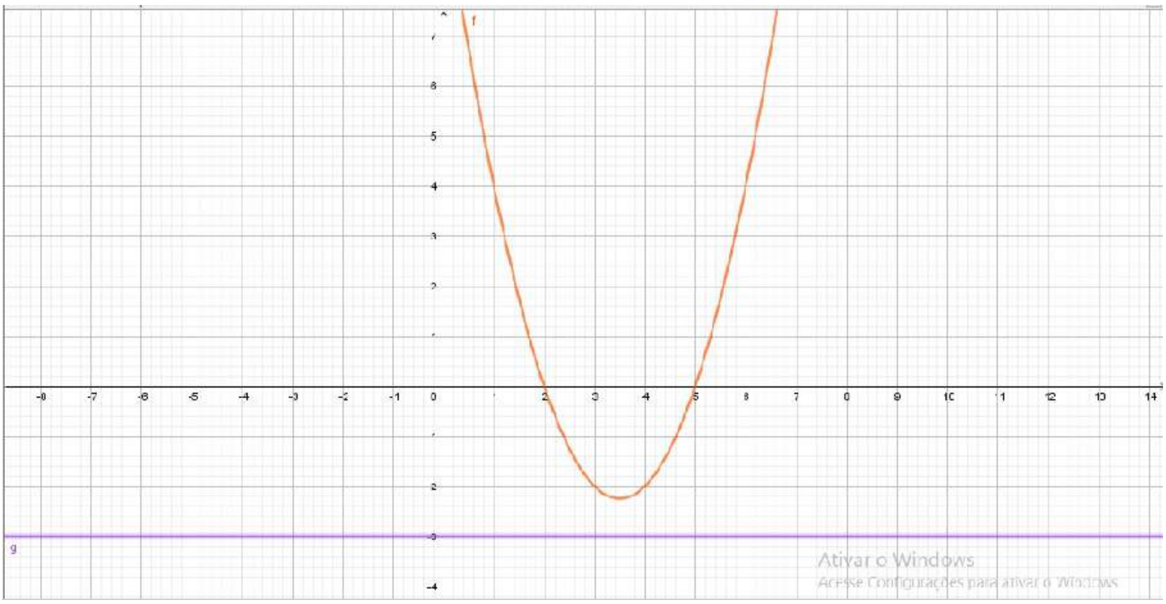


Figura 5.5: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, feito pelo autor utilizando GeoGebra

Traçando a reta $g(x) = -3$, vemos que ela não "toca" o gráfico de f em nenhum ponto, negando a definição 5.7.

Exemplo 52 *A função*

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x^2 + x}$$

é sobrejetiva?

Resposta: *Suponha que exista $x \in \mathbb{R}^+$ de modo que $g(x) = -2$. Assim, temos:*

$$\frac{1}{x^2+x} = -2 \Rightarrow \tag{5.47}$$
$$x^2 + x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \tag{5.48}$$
$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \tag{5.49}$$
$$(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow \tag{5.50}$$
$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{-1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm i}{2}. \tag{5.51}$$

Por (5.51), os dois possíveis valores de x são $x_1 = \dfrac{-1+i}{2}$ e $x_2 = \dfrac{-1-i}{2}$, e nenhum dos dois valores é real. Com isso, concluímos que g não é sobrejetiva. Graficamente:

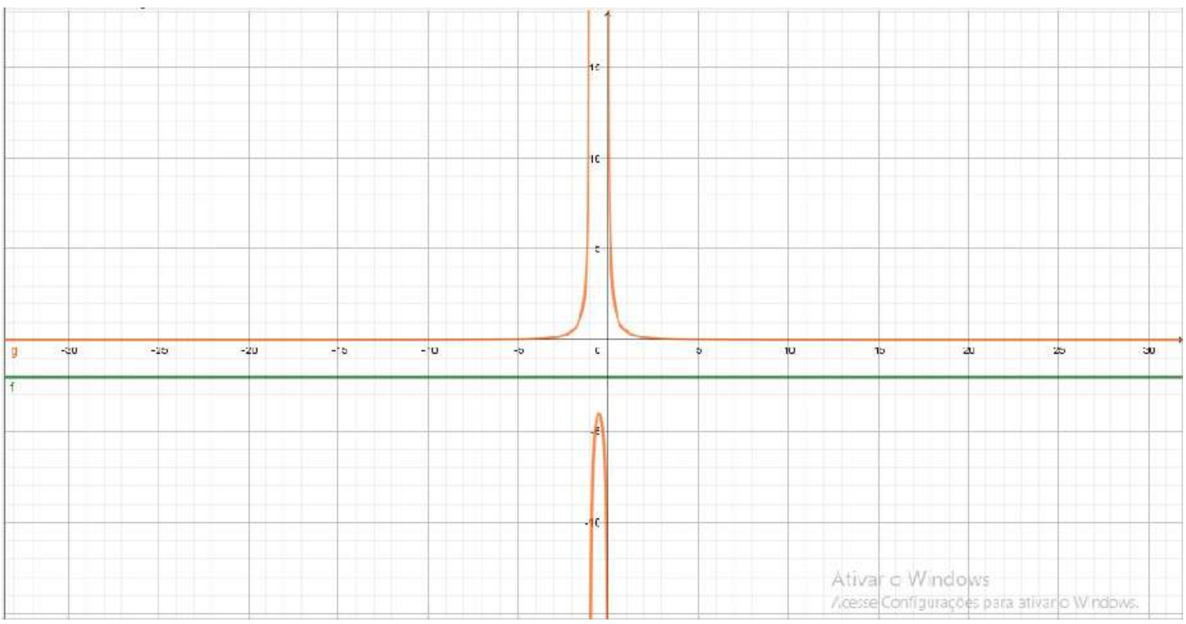


Figura 5.6: Gráfico da função $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$, feito pelo autor utilizando GeoGebra

Traçando a reta $y = -2$, vemos nitidamente que ela não "toca" o gráfico de g em ponto algum, negando a definição 5.7.

Conforme podemos observar os Exemplos 51 e 52, pra negar a sobrejetividade de uma função basta encontrar um possível valor de $y = f(x)$ tal que $f(x) \notin \mathbb{R}$. Porém, analisando o gráfico, basta encontrar ao menos uma reta $y = c$ de modo que ela não "toque" o gráfico de g em ponto algum. Observando o desenho do gráfico, vemos que é muito mais simples ao aluno de Ensino Médio negar a sobrejetividade desse modo, invés de encontrar possíveis valores de y que não admitem valores reais e, para negar a existência de tais valores, talvez seja necessário realizar cálculos muitas vezes extensos e de raciocínio complexo, muitas vezes de difícil compreensão por parte do aluno.

5.6 Sobrejetividade e Funções Trigonométricas

Abordando as funções trigonométricas, nessa seção discutimos as três mais trabalhadas no Ensino Médio, que são justamente as funções seno, cosseno e tangente, cuja motivação é justamente esclarecer algumas dúvidas a respeito da injetividade e da sobrejetividade das funções trigonométricas elementares.

Inicialmente, observe os Exemplos 53 e 54:

Exemplo 53 *A função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = cos(x)$$

é sobrejetiva?

Resposta: *Conforme podemos observar, temos que $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq cos(x) \leq 1$ e, tomando $y = 2$, não existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que $cos(x) = 2$. Logo, f não é sobrejetiva. Graficamente:*

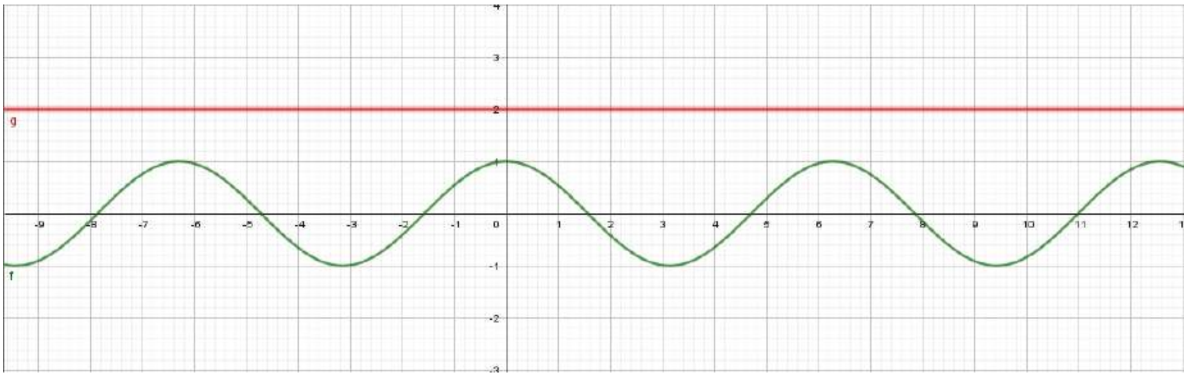


Figura 5.7: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$, feito pelo autor utilizando GeoGebra

Conforme podemos observar, a reta $y = 2$ não toca o gráfico de f em ponto nenhum, negando a definição 5.7.

Exemplo 54 *Mostre que a função*

$$g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$x \mapsto g(x) = cos(x)$$

é sobrejetiva.

Demonstração. *Por definição da função cosseno, temos que $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e, sendo $Y = [-1, 1]$ o contradomínio dessa função, podemos afirmar que ela é sobrejetiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Graficamente:*

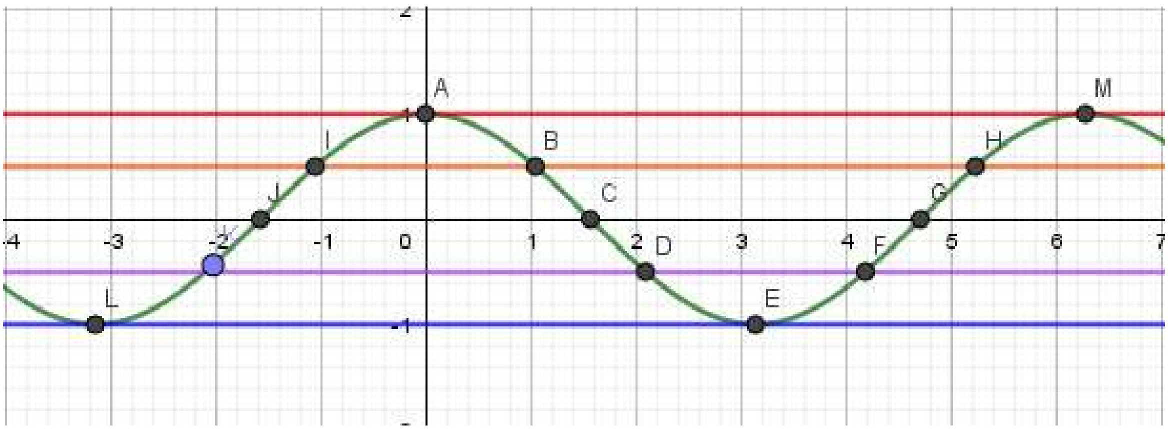


Figura 5.8: Gráfico da função $g(x) = cos(x)$, feito pelo autor utilizando GeoGebra

Conforme podemos observar, toda reta paralela ao eixo x de modo que $-1 \leq y \leq 1$, "toca" o gráfico de g em ao menos um ponto e, segundo a definição 5.7, g é sobrejetiva. ∎

Observando os Exemplos 53 e 54, note que embora as funções colocadas acima sejam parecidas, a partir do instante em que se altera o seu contradomínio, temos uma função sobrejetiva enquanto a outra não é, com isso, é importante que professor e aluno estejam atentos a esse detalhe, para que não pensem que funções como essas são iguais.

Agora, observe o Exemplo 55:

Exemplo 55 *Mostre que a função*

$$f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = tg(x)$$

é sobrejetiva.

Demonstração. *Seja* $y \in \mathbb{R}$ *de modo que* $y = tg(x)$. *Sendo assim, temos que* $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ *e, consequentemente, temos:*

$$y = tg(x) \Leftrightarrow \tag{5.52}$$

$$y = \frac{sen(x)}{cos(x)} \Leftrightarrow \tag{5.53}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - cos^2(x)}}{cos(x)} \Leftrightarrow \tag{5.54}$$

$$y^2.cos^2(x) = 1 - cos^2(x) \Leftrightarrow \tag{5.55}$$

$$cos^2(x)(y^2+1) = 1 \Leftrightarrow cos^2(x) = \frac{1}{y^2+1}. \tag{5.56}$$

Em (5.56), sendo $y \in \mathbb{R}$ *um número real arbitrário, temos que* $y^2 \geq 0$. *Consequentemente, temos que* $y^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{y^2+1} \leq 1$, *para todo* $y \in \mathbb{R}$. *Sendo a função cosseno sobrejetiva em* $Y = [-1, 1]$, *podemos afirmar que* $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$ *para todo* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *logo, podemos afirmar que para todo* $y \in \mathbb{R}$ *existe* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *de modo que* $\cos^2(x) = \frac{1}{y^2+1}$ *e, consequentemente, temos f sobrejetiva. Graficamente:*

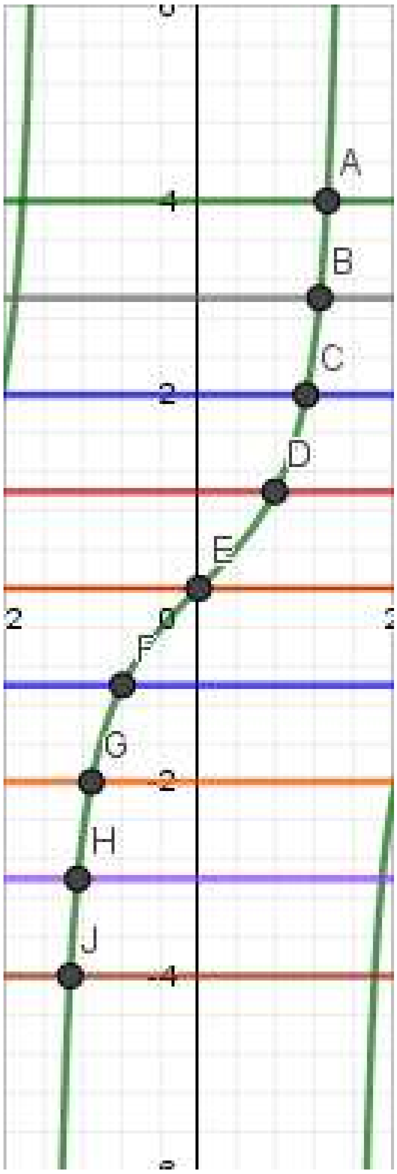


Figura 5.9: Gráfico da função $f(x) = tg(x)$, feito pelo autor utilizando GeoGebra

Conforme podemos visualizar graficamente, traçando retas paralelas quaisquer ao eixo x, elas "tocam" o gráfico de f ao menos em um ponto e, de acordo com a definição 5.7, f é sobrejetiva. ■

Observando os Exemplos 53 e 55, temos as funções cos x e tg x, em que uma é sobrejetiva e a outra não e, com isso, as funções trigonométricas nem sempre têm contradomínio limitado, embora no Exemplo 54 a função cosseno seja sobrejetiva tomando como contradomínio o intervalo $[-1,1]$. No caso das funções trigonométricas, devemos estar atentos ao modo como seu contradomínio é definido, além da sua lei de formação, e é importante o professor estar atento a isso, para que a sobrejetividade das funções trigonométricas seja abordada adequadamente em sala de aula.

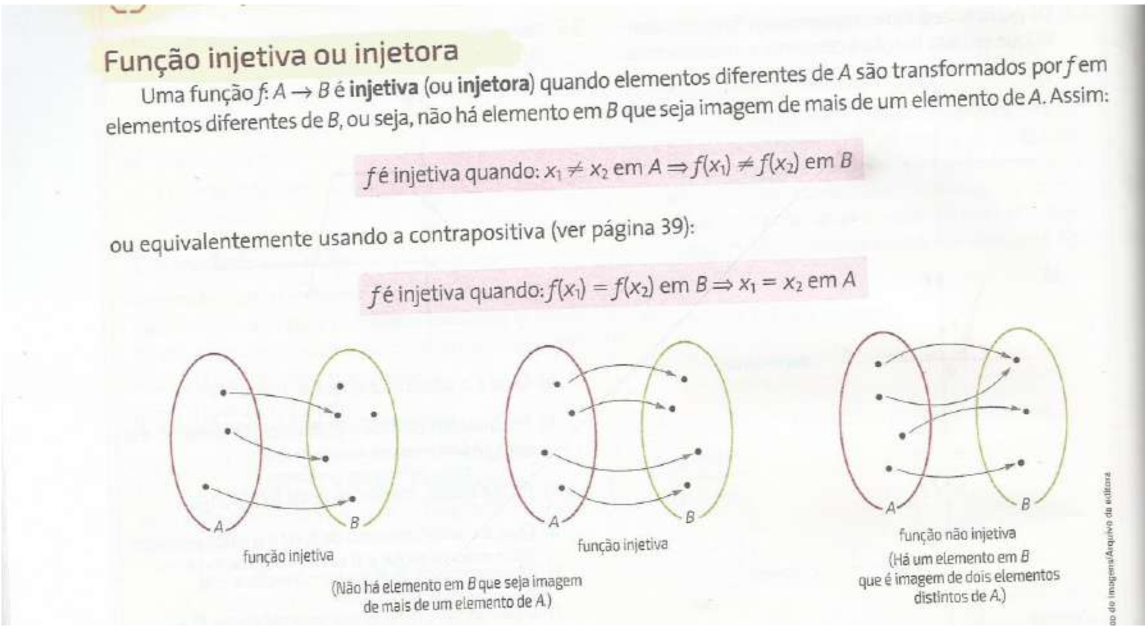
Capítulo 6

Como os livros didáticos trabalham os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade?

Nessa seção, para analisar os Livros Didáticos, levamos em consideração inicialmente o modo como os autores dos Livros 1, 2 e 3 definem funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, e como apresentam os Exemplos. E nós, aproveitamos para fazer algumas colocações e sugestões quanto à abordagem dos livros, com o intuito de auxiliar o professor a trabalhar melhor esses conceitos em sala de aula.

6.1 Análise do Livro 1

O Livro 1 aborda o conceito de função injetiva do seguinte modo:



Função injetiva ou injetora

Uma função $f: A \to B$ é **injetiva** (ou **injetora**) quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim:

f é injetiva quando: $x_1 \neq x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em B

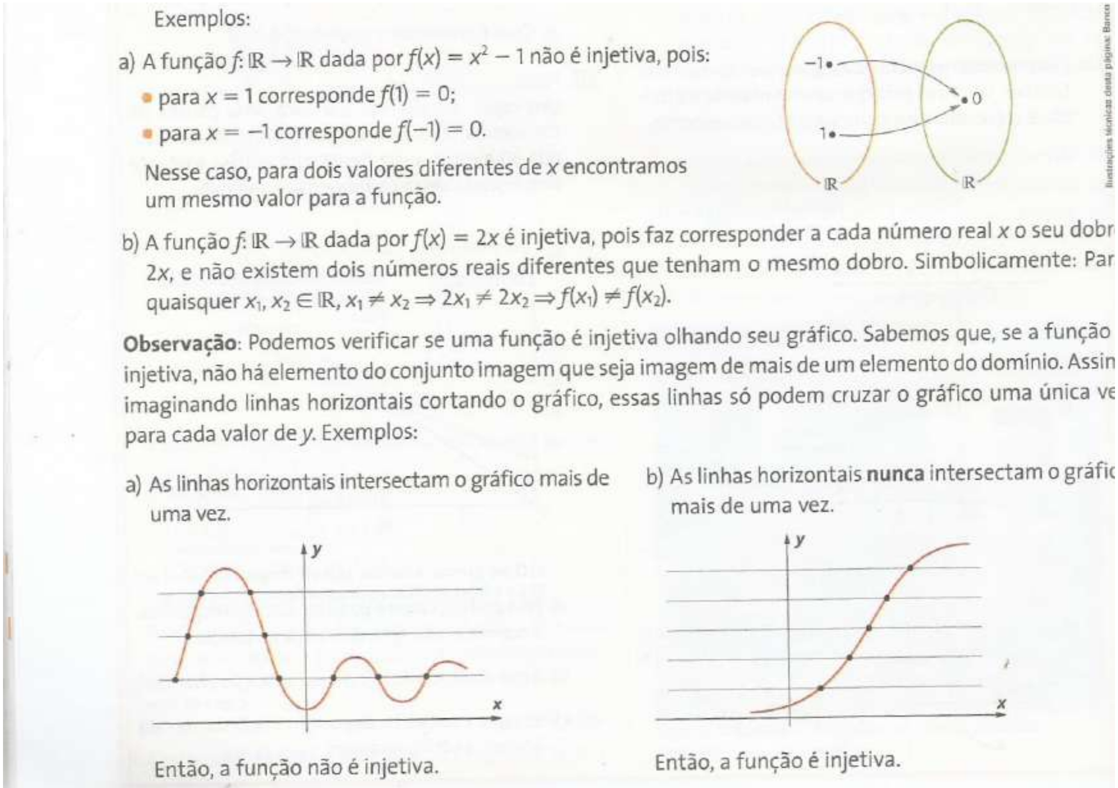
ou equivalentemente usando a contrapositiva (ver página 39):

f é injetiva quando: $f(x_1) = f(x_2)$ em $B \Rightarrow x_1 = x_2$ em A

Figura 6.1: Definição de Função Injetiva - Livro 1

Conforme podemos notar, o livro aborda corretamente o conceito de injetividade, explorando as Definições 4.1 e 4.2 e logo abaixo, utiliza alguns diagramas, induzindo o aluno a ter uma noção intuitiva do que seja tal conceito.

Posteriormente, ele coloca os seguintes exemplos:



Exemplos:

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetiva, pois:

- para $x = 1$ corresponde $f(1) = 0$;
- para $x = -1$ corresponde $f(-1) = 0$.

Nesse caso, para dois valores diferentes de x encontramos um mesmo valor para a função.

b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ é injetiva, pois faz corresponder a cada número real x o seu dobr 2x, e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro. Simbolicamente: Par quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observação: Podemos verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico. Sabemos que, se a função injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assin imaginando linhas horizontais cortando o gráfico, essas linhas só podem cruzar o gráfico uma única ve para cada valor de y. Exemplos:

a) As linhas horizontais intersectam o gráfico mais de uma vez.

Então, a função não é injetiva.

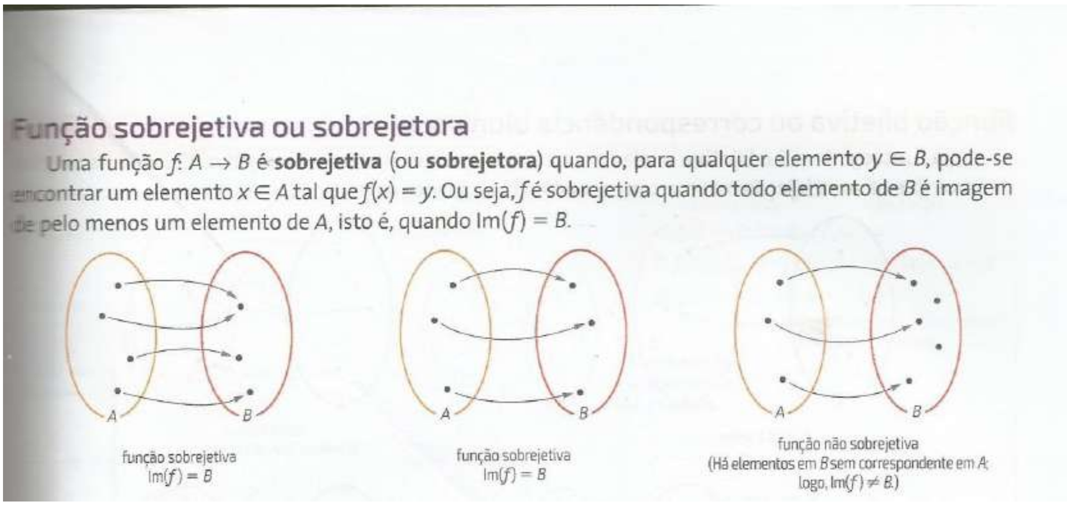
b) As linhas horizontais **nunca** intersectam o gráfic mais de uma vez.

Então, a função é injetiva.

Figura 6.2: Exemplos de Funções Injetivas - Livro 1

Os Exemplos a e b mencionados logo acima, são relativamente simples e de fácil percepção por parte do aluno, de forma que no primeiro exemplo, o autor mostra que a função f não é injetiva, em que ela nega a definição 4.2. Por outro lado, no item b, o autor mostra a injetividade da função explorando a definição 4.2, o que auxilia a compreensão por parte do aluno pois, permite a ele identificar injetividade de dois modos distintos. Por fim, faz menção à ideia de injetividade gráfica, citada na 4.5 e, que é de grande valia para identificar quando a função não é injetiva ou, para identificar injetividade caso a função tenha domínio e contradomínio limitados.

Posteriormente, ele apresenta o conceito de sobrejetividade da seguinte forma:

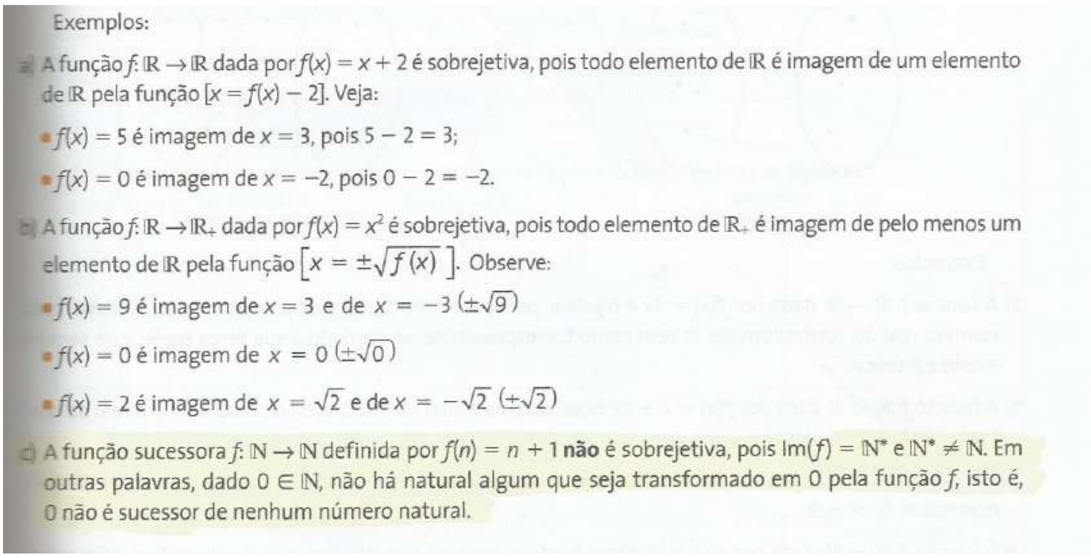


Função sobrejetiva ou sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, isto é, quando $\text{Im}(f) = B$.

Figura 6.3: Definição de Função Sobrejetiva - Livro 1

Assim como o conceito de injetividade, o autor define sobrejetividade corretamente, cuja definição vai de acordo com a definição 5.1, de modo claro e sucinto. Por outro lado, apresenta aos alunos exemplos por meio de diagramas, que a princípio auxiliam o aluno a intuir adequadamente esse conceito, porém, pra que o aluno tenha uma visão mais consistente desse conceito, exemplos como esse são meramente simples e triviais, em que se faz necessário explorar exemplos mais elaborados, como o autor apresenta na figura 6.4:



Exemplos:

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 2$ é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}$ é imagem de um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $[x = f(x) - 2]$. Veja:

- $f(x) = 5$ é imagem de $x = 3$, pois $5 - 2 = 3$;
- $f(x) = 0$ é imagem de $x = -2$, pois $0 - 2 = -2$.

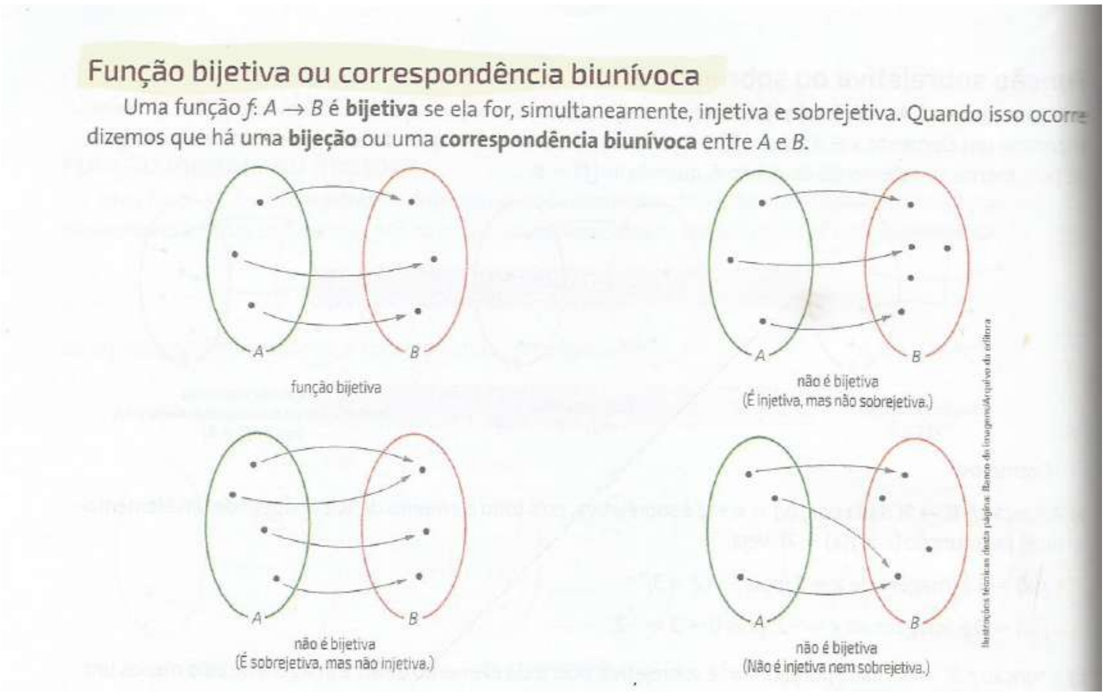
b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}_+$ é imagem de pelo menos um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $\left[x = \pm\sqrt{f(x)}\right]$. Observe:

- $f(x) = 9$ é imagem de $x = 3$ e de $x = -3$ $(\pm\sqrt{9})$
- $f(x) = 0$ é imagem de $x = 0$ $(\pm\sqrt{0})$
- $f(x) = 2$ é imagem de $x = \sqrt{2}$ e de $x = -\sqrt{2}$ $(\pm\sqrt{2})$

c) A função sucessora $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$ **não** é sobrejetiva, pois $\text{Im}(f) = \mathbb{N}^*$ e $\mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}$. Em outras palavras, dado $0 \in \mathbb{N}$, não há natural algum que seja transformado em 0 pela função f, isto é, 0 não é sucessor de nenhum número natural.

Figura 6.4: Exemplos de Funções Sobrejetivas - Livro 1

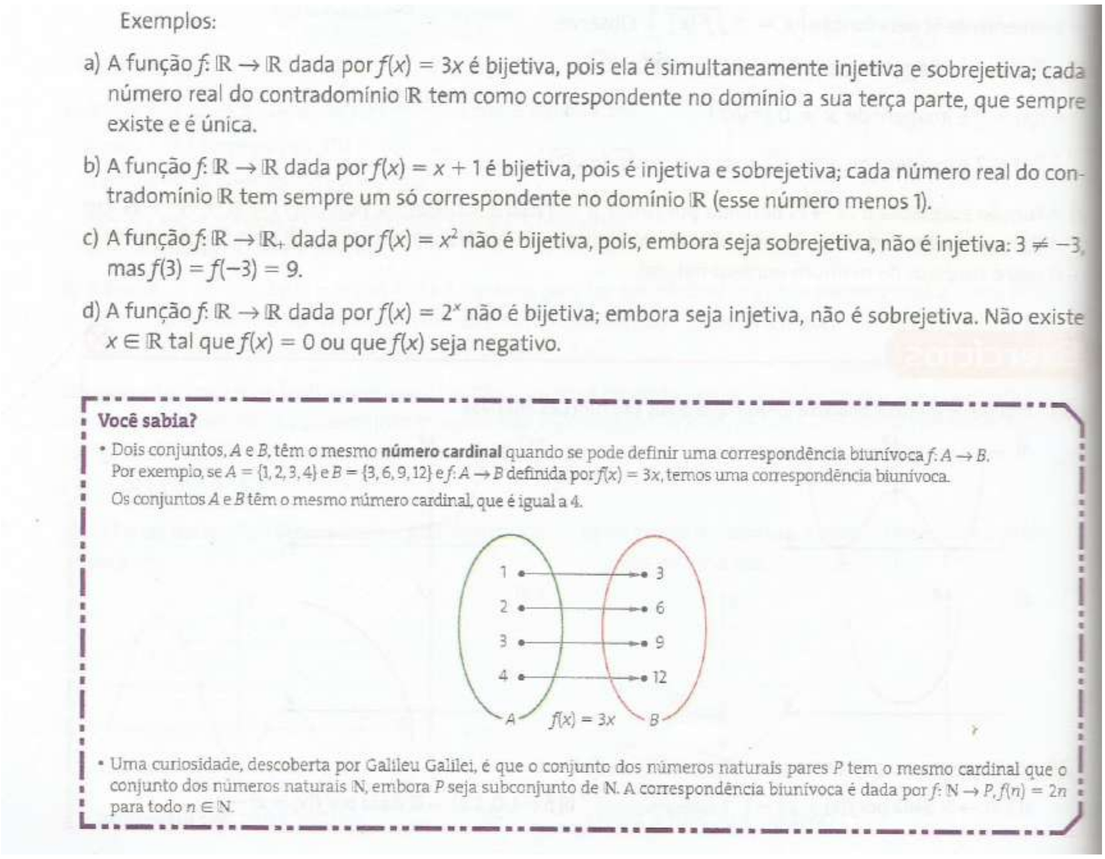
Por fim, define bijetividade e apresenta os seguintes exemplos, conforme colocado nas figuras 6.5 e 6.6:



Função bijetiva ou correspondência biunívoca

Uma função $f: A \to B$ é **bijetiva** se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre dizemos que há uma **bijeção** ou uma **correspondência biunívoca** entre A e B.

Figura 6.5: Definição de Função Bijetiva - Livro 1



Exemplos:

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é bijetiva, pois ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva; cada número real do contradomínio $\mathbb{R}$ tem como correspondente no domínio a sua terça parte, que sempre existe e é única.

b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva; cada número real do contradomínio $\mathbb{R}$ tem sempre um só correspondente no domínio $\mathbb{R}$ (esse número menos 1).

c) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ não é bijetiva, pois, embora seja sobrejetiva, não é injetiva: $3 \neq -3$, mas $f(3) = f(-3) = 9$.

d) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$ não é bijetiva; embora seja injetiva, não é sobrejetiva. Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ ou que $f(x)$ seja negativo.

Você sabia?

- Dois conjuntos, A e B, têm o mesmo **número cardinal** quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f: A \to B$. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12\}$ e $f: A \to B$ definida por $f(x) = 3x$, temos uma correspondência biunívoca. Os conjuntos A e B têm o mesmo número cardinal, que é igual a 4.

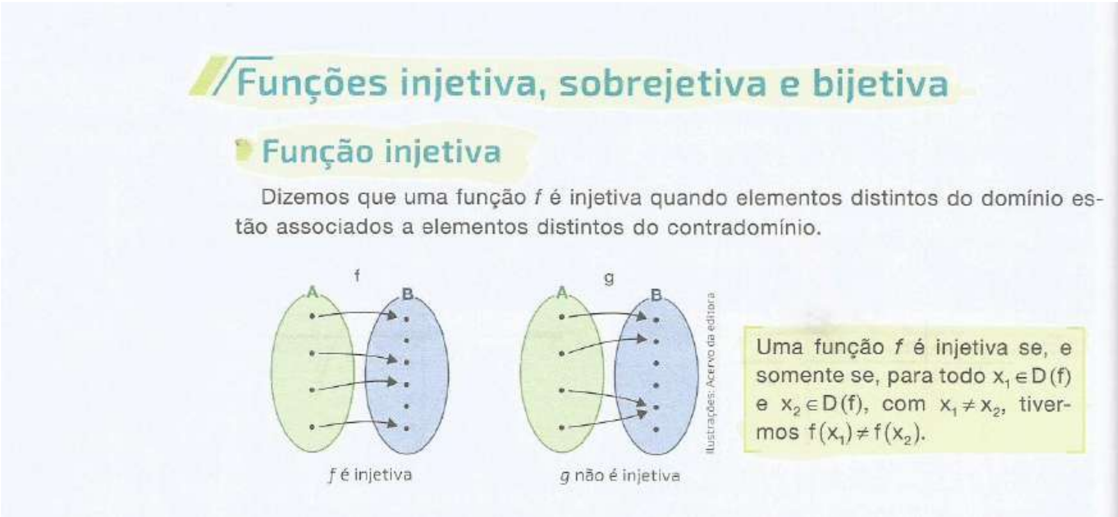
- Uma curiosidade, descoberta por Galileu Galilei, é que o conjunto dos números naturais pares P tem o mesmo cardinal que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, embora P seja subconjunto de $\mathbb{N}$. A correspondência biunívoca é dada por $f: \mathbb{N} \to P, f(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Figura 6.6: Exemplos de Funções Bijetivas - Livro 1

Conforme podemos observar na figura 6.5, nos Exemplos c e d, o autor exemplifica duas funções que não são bijetivas e justifica a causa, porém, poderia ao menos citar que, no item d, adotando $\mathbb{R}_+$ como contradomínio, a função f passa a ser uma bijeção, levando o aluno a ter uma percepção mais clara sobre bijetividade. Quanto aos Exemplos a e b, embora abordados corretamente, seguem a mesma lógica pois, se tratam meramente de duas funções afins que são funções relativamente simples, e de mesma característica, o que a nosso ponto de vista não parece interessante.

6.2 Análise do Livro 2

Inicialmente o Livro 2 define Função Injetiva do seguinte modo:


Funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Função injetiva

Dizemos que uma função f é injetiva quando elementos distintos do domínio estão associados a elementos distintos do contradomínio.

Uma função f é injetiva se, e somente se, para todo $x_1 \in D(f)$ e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Figura 6.7: Definição de Função Injetiva - Livro 2

O autor aborda a definição de função injetiva, de acordo com a definição 4.2, mas não a explora em sua forma contrapositiva, o que poderia ser útil por parte do aluno quanto a melhor compreensão desse conceito, o que fica como sugestão.

Posteriormente, o autor apresenta os seguintes exemplos, conforme podemos observar na figura 6.8:

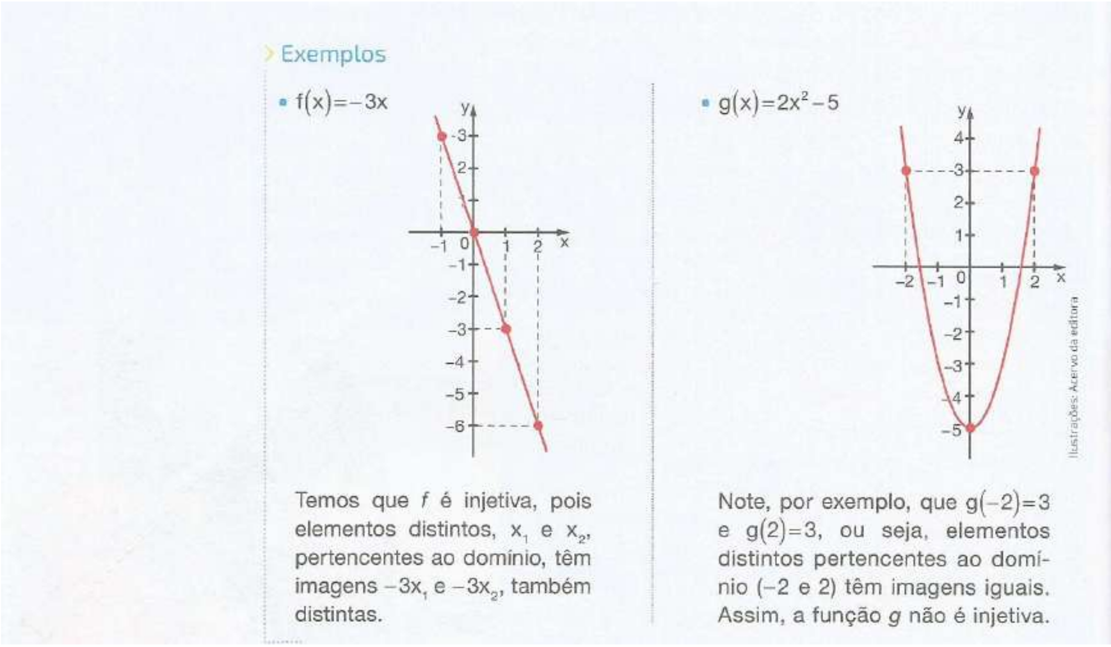


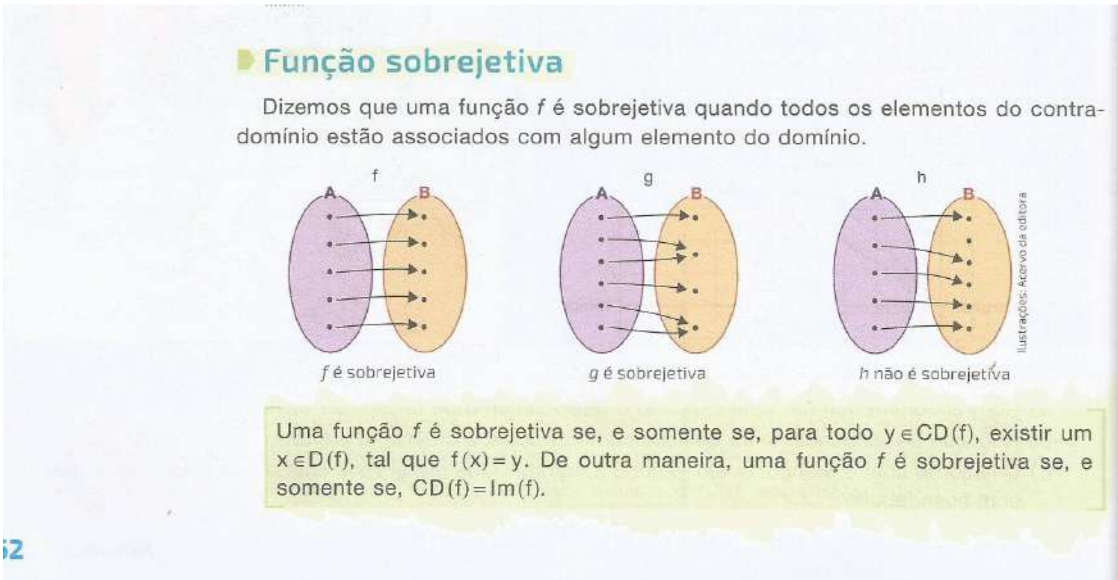
Figura 6.8: Exemplos de Funções Injetivas - Livro 2

Os exemplos colocados, um de função injetiva e outro de função não-injetiva, em que para abordar tal conceito, ele explora a noção de injetividade gráfica, mencionada na definição 4.5. Quanto ao Exemplo $f(x) = -3x$, assim como o Livro 1, o autor poderia utilizar a definição 4.1, explorando a seguinte argumentação para justificar sua injetividade:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (-3)(x_1) \neq (-3)(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Conforme podemos observar, trata-se de uma argumentação matemática simples que poderia auxiliar na aprendizagem do aluno, pois permitiria ao aluno, permitindo-o utilizar corretamente o conceito abordado.

Posteriormente, se define função sobrejetiva do seguinte modo:



Função sobrejetiva

Dizemos que uma função f é sobrejetiva quando todos os elementos do contradomínio estão associados com algum elemento do domínio.

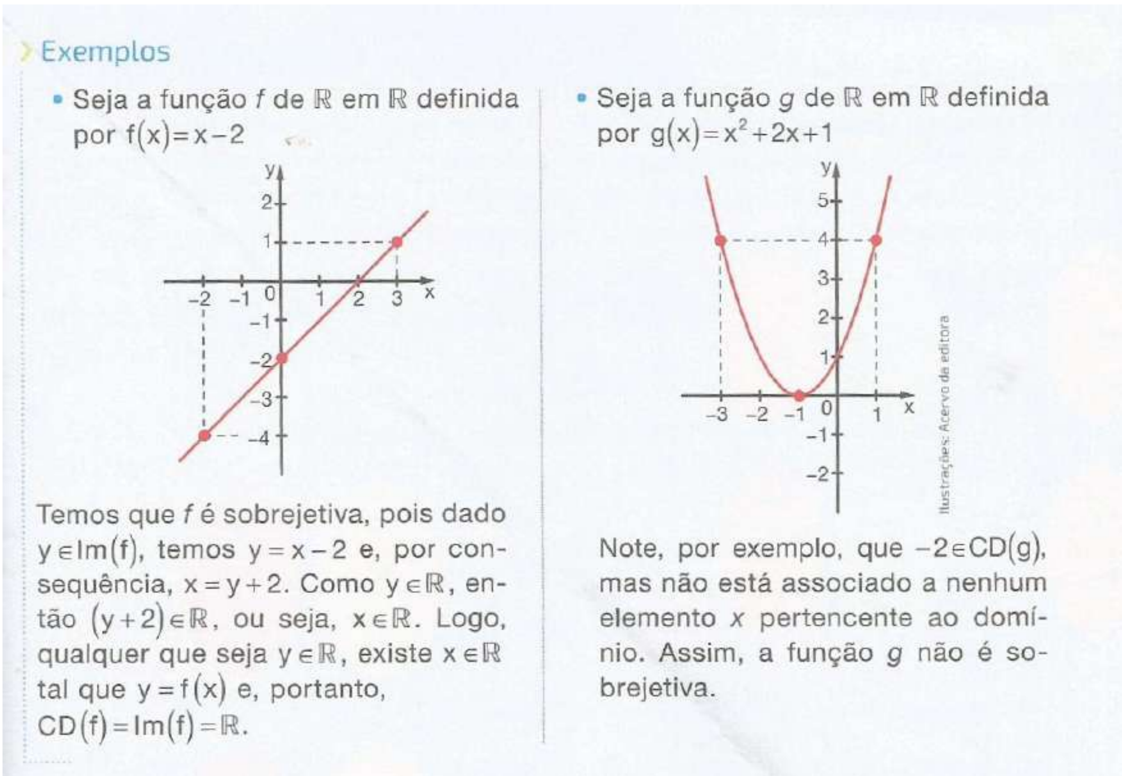
f é sobrejetiva $\quad$ g é sobrejetiva $\quad$ h não é sobrejetiva

Uma função f é sobrejetiva se, e somente se, para todo $y \in CD(f)$, existir um $x \in D(f)$, tal que $f(x) = y$. De outra maneira, uma função f é sobrejetiva se, e somente se, $CD(f) = Im(f)$.

62

Figura 6.9: Definição de Função Sobrejetiva - Livro 2

Conforme podemos observar, o conceito de sobrejetividade é abordado corretamente, de acordo com a definição 5.1 e, posteriormente, o autor coloca os seguintes exemplos:



Exemplos

- Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2$

Temos que f é sobrejetiva, pois dado $y \in Im(f)$, temos $y = x - 2$ e, por consequência, $x = y + 2$. Como $y \in \mathbb{R}$, então $(y+2) \in \mathbb{R}$, ou seja, $x \in \mathbb{R}$. Logo, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ e, portanto, $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.

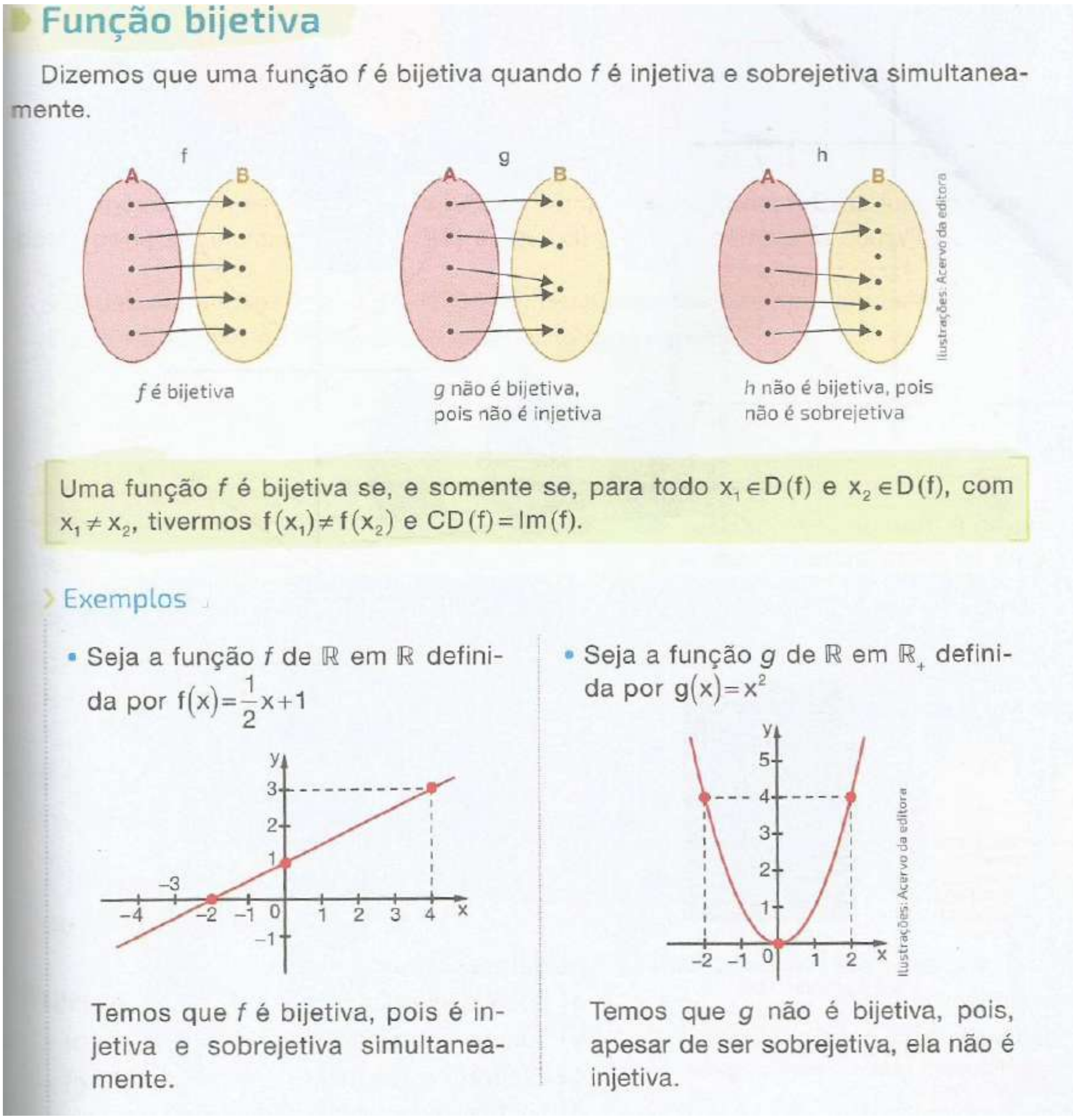
- Seja a função g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 2x + 1$

Note, por exemplo, que $-2 \in CD(g)$, mas não está associado a nenhum elemento x pertencente ao domínio. Assim, a função g não é sobrejetiva.

Figura 6.10: Exemplos sobre Função Sobrejetiva - Livro 2

Conforme podemos observar, o autor menciona adequadamente o conceito de sobrejetividade nos Exemplos colocados e no caso da função afim, justifica corretamente a razão da sobrejetividade de f. Mas, é uma pena que o autor tenha colocado apenas esses dois exemplos, assim como o Livro 1, poderia ter explorado um pouco mais, podendo oferecer uma consistência maior quanto à aprendizagem do aluno.

Por fim, ele define bijetividade do seguinte modo, e apresenta os seguintes exemplos:



Função bijetiva

Dizemos que uma função f é bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

f é bijetiva

g não é bijetiva, pois não é injetiva

h não é bijetiva, pois não é sobrejetiva

Uma função f é bijetiva se, e somente se, para todo $x_1 \in D(f)$ e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$ e $CD(f) = Im(f)$.

Exemplos

- Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Temos que f é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

- Seja a função g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$ definida por $g(x) = x^2$

Temos que g não é bijetiva, pois, apesar de ser sobrejetiva, ela não é injetiva.

Figura 6.11: Definição de Função Bijetiva - Livro 2

Coerentemente, o autor define bijetividade em decorrência dos conceitos de injetividade e sobrejetividade mas aqui, faremos algumas observações quanto aos Exemplos colocados, o que será de grande valia no decorrer dessa seção.

Observando o Exemplo f, é fácil observar que a função é injetiva e, ao mesmo tempo sobrejetiva, pois se trata de uma função afim estritamente crescente. Mas, fica como uma observação que o autor poderia justificar melhor, facilitando o entendimento do aluno por meio da exploração dos conceitos apresentados, utilizando uma justificativa coerente e de simples compreensão, conforme colocamos em (6.1) e (6.2):

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}.x_1 \neq \frac{1}{2}.x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}.x_1 + 1 \neq \frac{1}{2}.x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{6.1}$$

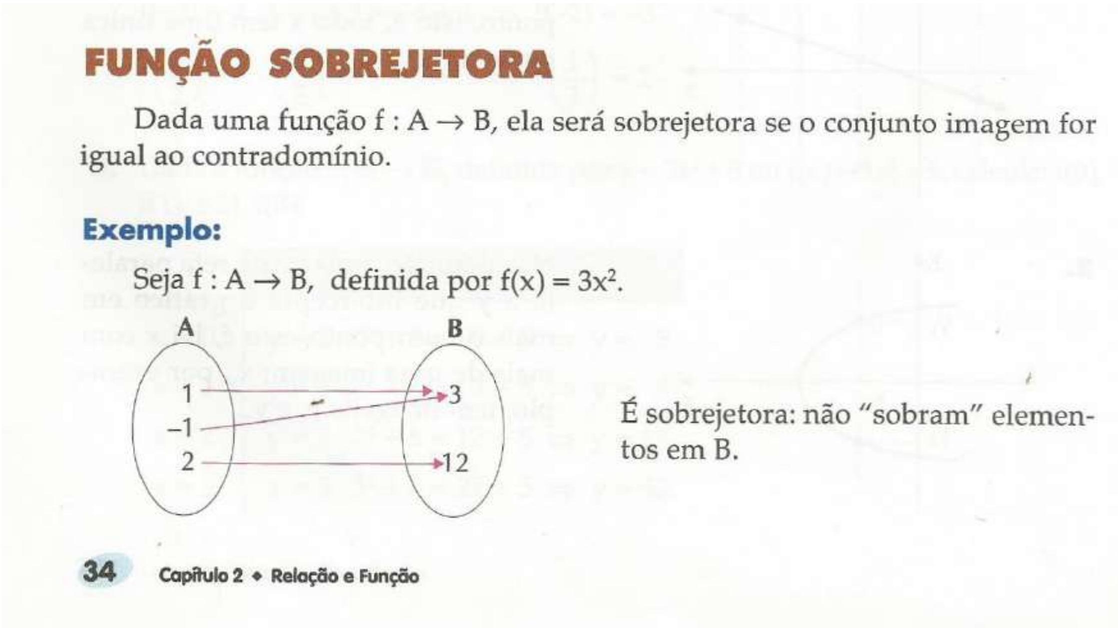
$$y = \frac{1}{2}.x + 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}.x \Rightarrow x = 2y - 2 \tag{6.2}$$

Em (6.1), perceba que a argumentação explorada vai de acordo com a definição 4.1, citada pelo autor e, conforme colocamos anteriormente, poderia ser utilizada a justificar sua injetividade. Já em (6.2), a argumentação matemática colocada poderia ser explorada para justificar sua sobrejetividade pois, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe x de forma que f é definida para todo o contradomínio $\mathbb{R}$ e, segundo a definição 5.1, f é sobrejetiva. Ou seja, são argumentações matemáticas simples mas, por estar de acordo com as definições apresentadas, permitiriam ao aluno identificar e justificar a bijetividade de f corretamente.

Agora observando a função g, sendo $\mathbb{R}_+$ seu contradomínio, ela passa a ser sobrejetiva, mas supondo $\mathbb{R}$ como contradomínio já não o é, logo, caberia ao autor alertar ao leitor sobre esse detalhe. Por outro lado, temos que $g(-2) = g(2) = 4$ e, conforme podemos observar no gráfico, essa função não é injetiva, o que é colocado corretamente por parte do autor mas, assim como na função f, o autor poderia ter utilizado essa argumentação matemática, de fácil entendimento por parte do aluno e, que auxilia de modo claro ao aluno pelo qual g é injetiva.

6.3 Análise do Livro 3

Diferentemente dos Livros 1 e 2, o Livro 3 aborda inicialmente o conceito de função sobrejetiva e coloca alguns exemplos, conforme vemos nas Figuras 6.12 e 6.13:


FUNÇÃO SOBREJETORA

Dada uma função $f : A \to B$, ela será sobrejetora se o conjunto imagem for igual ao contradomínio.

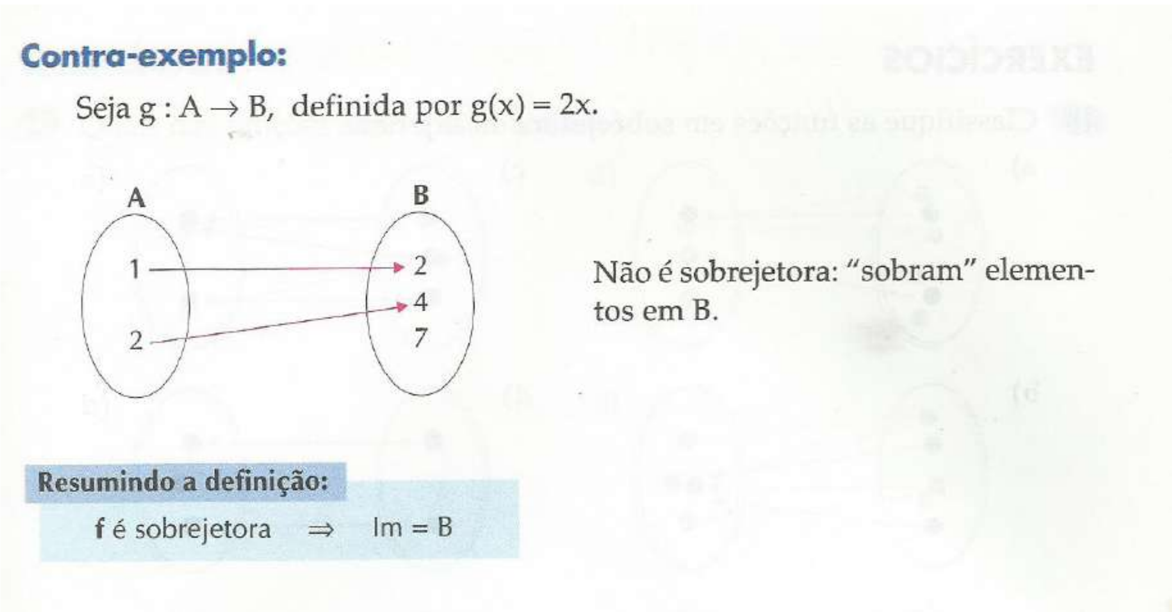
Exemplo:

Seja $f : A \to B$, definida por $f(x) = 3x^2$.

É sobrejetora: não "sobram" elementos em B.

34 Capítulo 2 • Relação e Função

Figura 6.12: Conceito e Exemplo de Função Sobrejetiva - Livro 3


Contra-exemplo:

Seja $g : A \to B$, definida por $g(x) = 2x$.

Não é sobrejetora: "sobram" elementos em B.

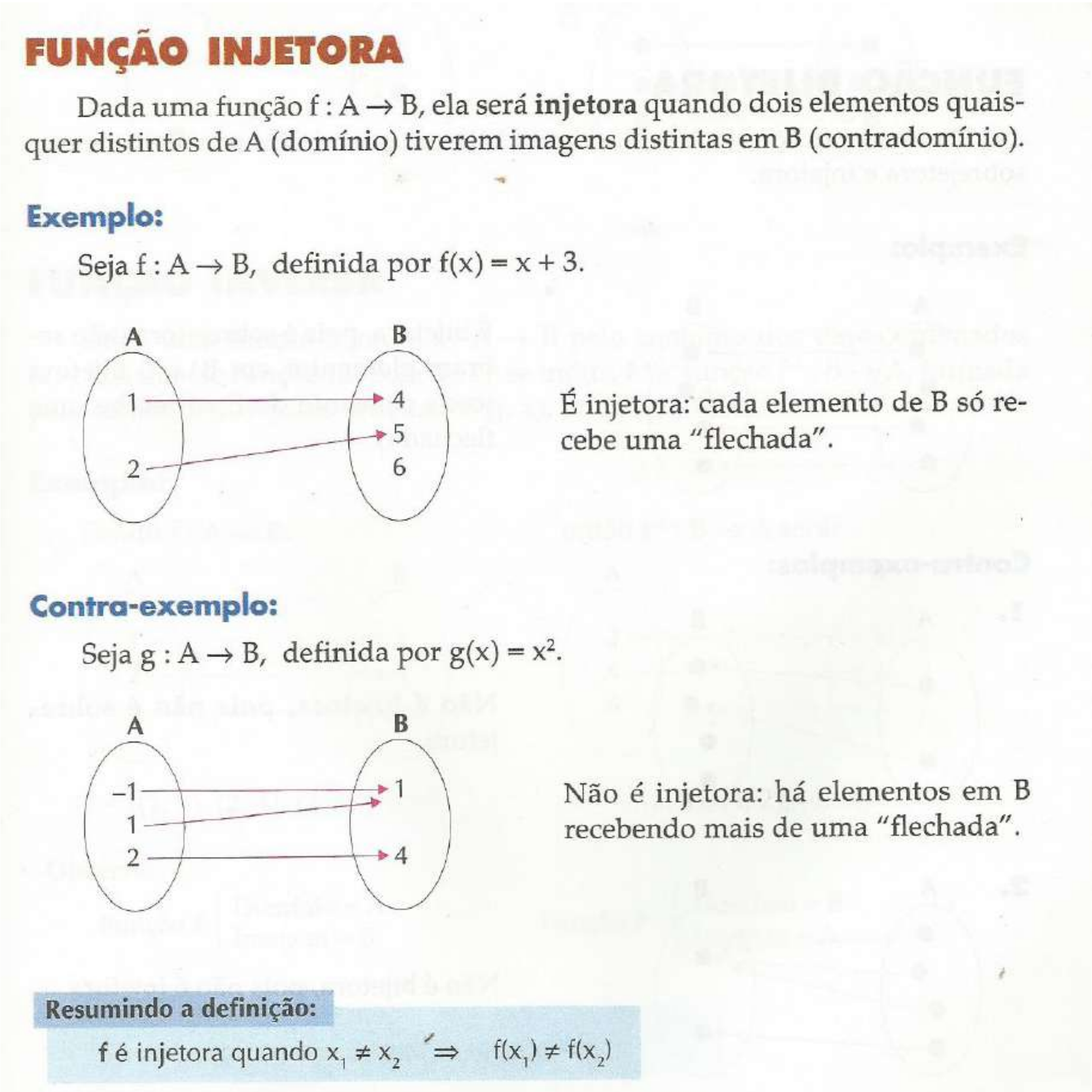
Resumindo a definição:

f é sobrejetora $\Rightarrow$ Im = B

Figura 6.13: Exemplo de Função Sobrejetiva - Livro 3

Conforme podemos observar nas figuras 6.12 e 6.13, a definição de sobrejetividade é correta pois, se $Cd(f) = Im(f)$, pra todo elemento no contradomínio existe ao menos um elemento no domínio e, de acordo com a Definição 5.1, f é sobrejetiva. Mas, os exemplos colocados pelo autor são de certo modo muito simples, apresentados apenas por meio de diagramas limitados e, explorando pouco a argumentação matemática, levando o aluno a ter uma percepção pouco clara desse conceito que é de suma importância no estudo de funções.

Por outro lado, o autor define injetividade do seguinte modo:



FUNÇÃO INJETORA

Dada uma função $f : A \to B$, ela será **injetora** quando dois elementos quaisquer distintos de A (domínio) tiverem imagens distintas em B (contradomínio).

Exemplo:

Seja $f : A \to B$, definida por $f(x) = x + 3$.

É injetora: cada elemento de B só recebe uma "flechada".

Contra-exemplo:

Seja $g : A \to B$, definida por $g(x) = x^2$.

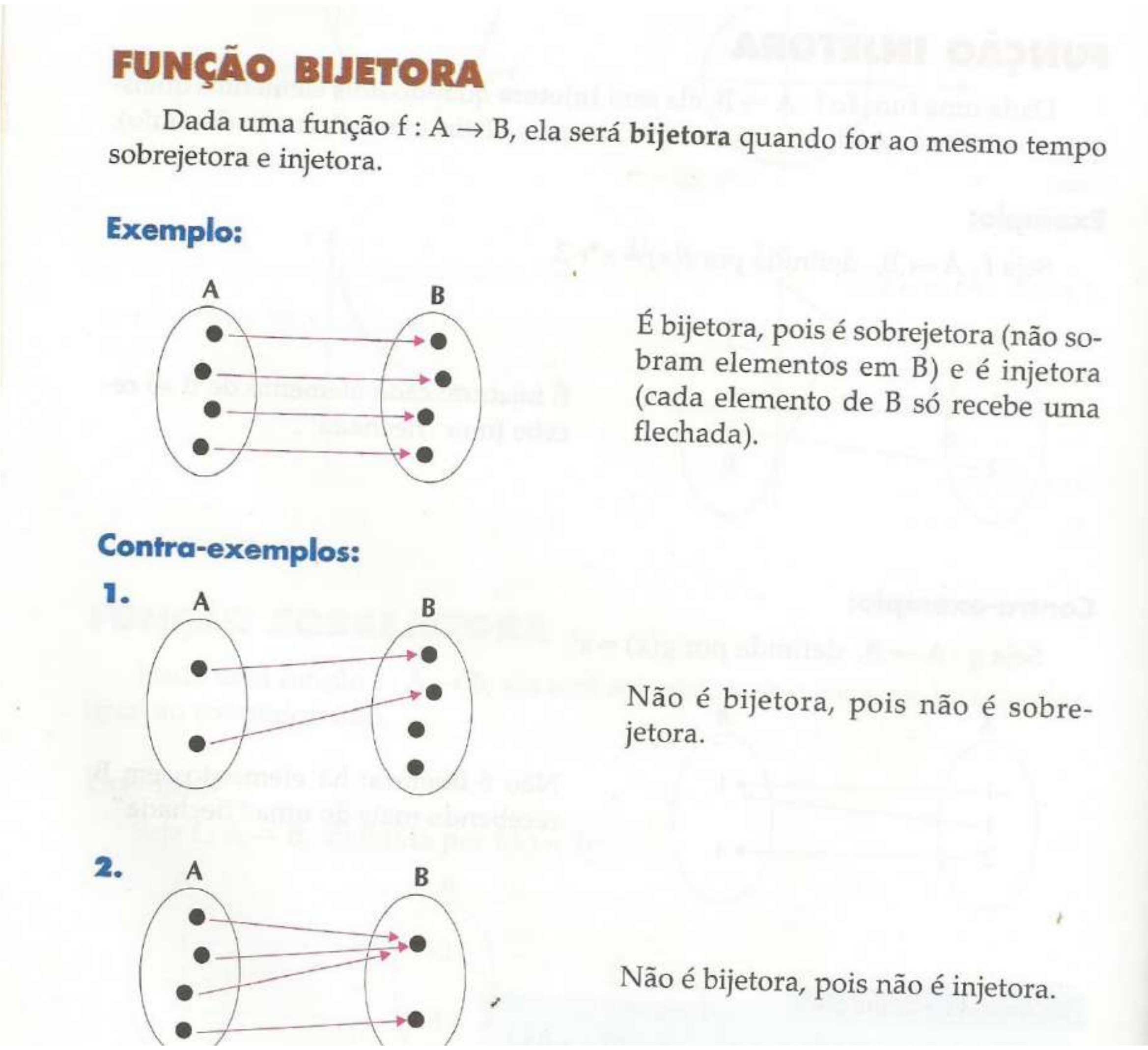
Não é injetora: há elementos em B recebendo mais de uma "flechada".

Resumindo a definição:

f é injetora quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Figura 6.14: Exemplo de Função Injetiva - Livro 3

Assim como o Livro 2, o Livro 3 não faz menção ao conceito de injetividade na sua forma contrapositiva, que seria de grande valia quanto a compreensão por parte do aluno. Novamente, podemos observar que os exemplos apresentados são rasos e triviais, explorando apenas “bolinhas” e “setinhas”, apenas com conjuntos limitados. Mas, caso o domínio da função seja ilimitado, de que modo o autor justificaria a sua injetividade por meio das leis de formação apresentadas? Aqui, nota-se que o autor poderia ter ido bem além, apresentando melhor os Exemplos, de modo que o aluno tenha uma compreensão melhor do conceito de injetividade, aplicando as definições apresentadas assim como o Livro 1 e, utilizando os exemplos apresentados relativamente simples, como por exemplo funções de domínio e contradomínio $\mathbb{R}$, o autor poderia argumentar sobre a injetividade dessas funções sem dificuldade alguma. Por fim, define bijetividade do seguinte modo e apresenta os seguintes exemplos:


FUNÇÃO BIJETORA

Dada uma função $f : A \to B$, ela será **bijetora** quando for ao mesmo tempo sobrejetora e injetora.

Exemplo:

É bijetora, pois é sobrejetora (não sobram elementos em B) e é injetora (cada elemento de B só recebe uma flechada).

Contra-exemplos:

Não é bijetora, pois não é sobrejetora.

Não é bijetora, pois não é injetora.

Figura 6.15: Definição de Função Bijetiva - Livro 3

Assim como os outros livros, o Livro 3 define bijetividade em decorrência das definições de função injetiva e sobrejetiva, o que é coerente e, de certo modo, elementar. Porém, voltamos a repetir uma crítica feita anteriormente: os Exemplos abordados pelo autor são de certo modo simples, e não favorecem a aprendizagem por parte do leitor pois, o mesmo não faz uso de uma argumentação matemática consistente para abordar o estudo das funções bijetivas. Inclusive, Lima (2001) [7] faz a seguinte colocação:

> "Infelizmente, a abordagem adotada deixa a desejar, uma vez que o texto procura utilizar sempre, provavelmente no intuito de facilitar a compreensão desses conceitos, os "esquemas" ou "diagramas" de flechas. Pensamos que, ao contrário de esclarecer as idéias envolvidas, o recurso constante a essas figuras pode prejudicar o entendimento." (Lima,2001,p.419 e 420)

Ou seja, recorrer apenas a exemplos por meio de "diagramas" é um procedimento simples, que podem ser utilizados com o intuito de favorecer o aluno a construir um raciocínio intuitivo, mas que não permite ao aluno em um âmbito geral, ter uma compreensão mais profunda quanto ao estudo das funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Logo, o autor poderia explorar exemplos que levem o aluno a compreender esses conceitos de modo adequado.

Capítulo 7

Funções Inversas

O conceito de função inversa, comum a ser abordado no Ensino Médio, é de suma importância a se trabalhar e, inclusive, Lima (2001) [7] afirma que esse conceito é bastante útil para determinar de modo claro a relação entre as funções logarítmica e exponencial, que faremos no Capítulo 8 com mais detalhes. A definição de função inversa não se resume apenas a isso, mas também permite ao aluno compreender melhor algumas propriedades das funções como, por exemplo, sua bijetividade, a simetria entre o gráfico de uma função e de sua inversa, em relação à bissetriz do primeiro quadrante.

7.1 Função inversa

Lima (2013) [8] define função invertível do seguinte modo:

Definição 7.1 (Função Invertível) *Uma função $f : X \to Y$ é invertível se existe uma função $g : Y \to X$ tal que:*

i) $(g \circ f)(x) = I_X$;

ii) $(f \circ g)(y) = I_Y$;

Em que I_A denota a identidade do conjunto A, ou seja:

$$x \to I_A(x) = x.$$

Neste caso, a função g é dita **função inversa** *de f e é denotada por $g = f^{-1}$.*

Segundo a definição 7.1, uma função é invertível se cumpre as condições $i)$ e $ii)$, ou seja, para definir corretamente função inversa, é importante fazer menção à ideia de composição entre funções, que mencionamos na Definição 4.4 e que será bastante útil no decorrer dessa seção. Inclusive Lima (2001) [7] afirma que:

> “ A melhor maneira de definir a inversa f^{-1} de f é por meio das igualdades $f^{-1} \circ f = Id_X$ e $f \circ f^{-1} = Id_Y$. Isto é útil, por exemplo, para estabelecer com clareza a conexão entre exponencial e logaritmo.”(Lima, 2001,p.49 e 50)

Ou seja, o conceito de função inversa por composição permite ao leitor observar conexões entre funções e suas inversas e, caso a inversa de uma função exista, ela é única.

Observe o Teorema 7.1:

Teorema 7.1 *Sendo uma função $f: X \to Y$ invertível, mostre que sua inversa é única.*

Demonstração. *Suponha que existam $g, h: Y \to X$ de modo que sejam inversas de f. Pelo item i), temos que:*

$$f(g(y)) = y; \forall y \in Y \tag{7.1}$$

$$f(h(y)) = y; \quad \forall y \in Y \Rightarrow \tag{7.2}$$

$$f(g(y)) - f(h(y)) = y - y = 0 \Leftrightarrow f(g(y)) = f(h(y)). \tag{7.3}$$

Por outro lado, sendo f bijetiva, temos $f(g(y)) = f(h(y)) \Rightarrow g(y) = h(y)$. Logo, temos $g = h$ e, caso a função inversa exista, é única. ■

Conforme podemos observar, a função inversa quando goza da propriedade da existência, mas também goza da propriedade da unicidade. Outro detalhe importante a se observar é que pra função ser invertível, é necessário que ela seja bijetiva, ou seja, deve ser injetiva e sobrejetiva, cuja justificativa é mencionada nos Teoremas 7.2 e 7.3, extraídos de Lima (2005) [2].

Teorema 7.2 *Prove que a função $f: X \to Y$ é injetiva se, e somente se, existe uma função $g: Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. *Se existir $g: Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = x_1 = g(f(x_2)) = x_2$, logo f é injetiva. Reciprocamente, se f é injetiva então definimos $f: X \to X$ assim: fixamos $x_0 \in X$. Dado $y \in Y$, se não existir $x \in X$ tal que $f(x) = y$, pomos $g(y) = x_0$. Se $y = f(x)$ para algum $x \in X$, este x é único e então pomos $g(y) = x$. A função $g: Y \to X$ cumpre $g(f(x)) = x$.* ■

Teorema 7.3 *Prove que a função $f: X \to Y$ é sobrejetiva se, e somente se, existe uma função $h: Y \to X$ tal que $f(h(y)) = y$, para todo $y \in Y$.*

Demonstração. *Se existir $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ então, para todo $y \in Y$ tem-se $y = f(x)$, com $x = g(y)$, logo f é sobrejetiva. Reciprocamente, se f é sobrejetiva então, para cada $y \in Y$ o conjunto $f^{-1}(y)$ é $\emptyset$. Escolhemos $x \in f^{-1}(y)$ e pomos $g(y) = x$. A função $g : X \to X$ cumpre $f(g(y)) = y$.* $\blacksquare$

Os Teoremas 7.2 e 7.3 e suas demonstrações, foram extraídos de Lima (2007) [4]. A partir dos teoremas acima colocados, temos que a condição pra uma função ser invertível é que ela seja uma bijeção, de acordo com a definição 7.1, em que é importante estar atento não só à lei de formação da função, mas também ao modo como seu domínio e contradomínio são definidos. Observe o Exemplo 56:

Exemplo 56 *Mostre que a função*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 125x^3 - 525x^2 + 735x - 343$$

é invertível e determine sua inversa.

Demonstração. *Inicialmente, identificar a bijetividade dessa função no modo como ela está colocada não nos parece simples, com isso, faremos algumas manipulações algébricas com o intuito de facilitar o entendimento por parte do leitor. Para mostrar que uma função é invertível, é necessário mostrar que ela deve ser bijetiva, ou seja, mostrar sua injetividade e sobrejetividade. Utilizando o Binômio de Newton, temos:*

$$(5x-7)^3 = \binom{3}{0}(5x)^3.7^0 - \binom{3}{1}(5x)^2.7^1 + \binom{3}{2}5x.7^2 - \binom{3}{3}(5x)^0.7^3 \Rightarrow \tag{7.4}$$

$$(5x-7)^3 = 1.125x^3.1 - 3.25x^2.7 + 3.5x.49 - 1.1.343 \Rightarrow \tag{7.5}$$

$$(5x-7)^3 = 125x^3 - 525x^2 + 735x - 343. \tag{7.6}$$

Por (7.6), podemos colocar $f(x) = (5x-7)^3$. Segundo o Exemplo 25, a função $h(x) = x^3$ é injetiva e, dada a função $g(x) = 5x - 7$, tome x_1 e x_2 de forma que $g(x_1) = g(x_2)$. Logo, temos:

$$5x_1 - 7 = 5x_2 - 7 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \tag{7.7}$$

Por (7.7), segundo a definição 4.1, temos que g é injetiva e, como $f(x) = (h \circ g)(x)$, pelo Teorema 4.2, concluímos que f é injetiva. Por outro lado, observando as funções g e h, temos $y = 5x - 7 \Rightarrow x = \dfrac{y+7}{5}$ e $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$, logo, as funções g e h são sobrejetivas, pois os valores de x estão definidos para todo e qualquer y real. Além disso, pelo Teorema 4.2, sendo $f(x) = (h \circ g)(x)$, conclui-se que f é sobrejetiva, logo, f é uma bijeção, consequentemente, invertível. Por outro lado, segundo a definição 7.1 a inversa de f se dá por:

$$f(g(y)) = y \Rightarrow \tag{7.8}$$

$$(5g(y) - 7)^3 = y \Rightarrow \tag{7.9}$$

$$5g(y) - 7 = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \tag{7.10}$$

$$g(y) = \frac{7 + \sqrt[3]{y}}{5}. \tag{7.11}$$

Por (7.11), a função $q(y)$ é uma possível inversa de f, pois cumpre a condição $ii)$ da definição 7.1. Porém, pra confirmar a existência dessa inversa, é necessário que ela cumpra a condição $i)$ da definição 7.1.

Observe:

$$q(f(x)) = \frac{7 + \sqrt[3]{f(x)}}{5} \Rightarrow \tag{7.12}$$

$$q(f(x)) = \frac{7 + \sqrt[3]{(5x-7)^3}}{5} \Rightarrow \tag{7.13}$$

$$q(f(x)) = \frac{7 + (5x-7)}{5} \Rightarrow q(f(x)) = x. \tag{7.14}$$

Por (7.14), temos que g cumpre a condição $i)$ e, consequentemente, g é inversa de f. $\blacksquare$

Conforme podemos observar no Exemplo 56, a função f embora seja um polinômio escrito como composição, determinar sua inversa não nos parece algo simples, muito pelo contrário, vemos que se trata de uma função que pra determinar sua inversa requer muita atenção por parte do aluno, explorando um raciocínio de certo modo elaborado. Mas também, há funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que não são invertíveis, mas dependendo do modo como se definem seu domínio e contradomínio, ela pode admitir inversa. Observe os Exemplos 57 e 58:

Exemplo 57 *Dada a função*

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$$
$$x \mapsto f(x) = sen(x^2)$$

mostre que ela é invertível e determine sua inversa.

Demonstração. *Inicialmente, temos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e, $x^2 \geq 0$, para todo x real. Sendo assim, para que f seja sobrejetiva, ela deve estar definida em um subconjunto de $\mathbb{R}$ que contenha todos os reais não-negativos menores ou iguais a 1, que nesse caso é o intervalo $[0,1]$ logo, é sobrejetiva.*

Por outro lado, observe que as funções $f(x) = x^2$ e $h(x) = \operatorname{sen} x$ sobrejetivas no intervalo $[0,1]$, segundo o Teorema 5.1, temos que $g(x) = h \circ f(x)$ é sobrejetiva.

Logo, a função f é bijetiva, portanto invertível.

*Antes de determinar a inversa de f, aqui citaremos o que vem a ser o arco-seno de um ângulo. Por exemplo: sabendo que $\operatorname{sen} 30^0 = \frac{1}{2}$, afirmamos que $arcsen\frac{1}{2} = 30^0$, ou seja, afirmamos que $arcsen(y) = x \Rightarrow \operatorname{sen} x = y$ e, que a função **arcoseno** é inversa da função **seno.** Com isso, para determinar a função inversa de f, que denotaremos por g, segundo a definição 7.1 ela deve cumprir as condições i) e ii). Observe:*

$$f(g(y)) = sen(g(y)^2) = y \Rightarrow \tag{7.15}$$
$$g(y)^2 = arcsen(y) \Rightarrow \tag{7.16}$$
$$g(y) = \pm\sqrt{arcsen(y)}. \tag{7.17}$$

Por (7.17), há duas possíveis inversas pra f, que no caso, são $g_1(y) = \sqrt{arcsen(y)}$ e $g_2(y) = -\sqrt{arcsen(y)}$. Agora, resta verificar qual das duas funções cumpre a outra condição, mas antes, como $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, temos $|x| = x$. Observe que:

$$g_1(f(x)) = \sqrt{arcsen(sen(x^2))} \Rightarrow$$
$$g_1(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x. \tag{7.18}$$

Por (7.18), nota-se que g_1 cumpre a segunda condição e, é inversa de f. Agora, observe que:

$$g_2(f(x)) = -\sqrt{arcsen(sen(x^2))} \Rightarrow$$
$$g_2(f(x)) = -\sqrt{x^2} = -|x| = -x. \tag{7.19}$$

Por (7.19), vemos que g_2 não cumpre a segunda condição de invertibilidade e, consequentemente, não é inversa de f. ■

Observando a função colocada no Exemplo 57, observando apenas sua lei de formação, poderíamos pressupor que ela não é invertível, pois dada a lei de formação $f(x) = sen(x^2)$, essa função é periódica com domínio $\mathbb{R}$ e consequentemente não seria injetiva, logo não seria invertível. Por outro lado, como $|sen(x^2)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, poderíamos pressupor que ela não é sobrejetiva, logo não poderia ser invertível. Com isso, devemos prestar atenção que para uma função ser invertível, é necessário estar atentos ao domínio e ao contradomínio colocados, não apenas à sua lei de formação.

Agora, será que duas funções com mesma lei de formação e mesmo contradomínio, porém com domínios distintos admitem mesma inversa? Observe os Exemplos 58 e 59:

Exemplo 58 *Mostre que a função*

$$g : (-\infty, \frac{7}{8}] \to [\frac{-1}{16}, +\infty)$$
$$x \mapsto g(x) = 4x^2 - 7x + 3$$

é invertível e determine sua inversa.

Solução: *Segundo sua lei de formação, a função g é quadrática e côncava pra cima, pois $4 > 0$. Tomando $a = 4, b = -7$ e $c = 3$, as coordenadas do vértice de g se dão por:*

$$(x_v, y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}) \Rightarrow \tag{7.20}$$

$$(x_v, y_v) = (\frac{-(-7)}{2.4}, \frac{4.4.3-7^2}{4.4}) \Rightarrow \tag{7.21}$$

$$(x_v, y_v) = (\frac{7}{8}, \frac{-1}{16}). \tag{7.22}$$

Em (7.22), o menor valor possível de y é $\frac{-1}{16}$ *e, para todo* $y \geq \frac{-1}{16}$*, a função g admite valores reais de x, caracterizando a sobrejetividade de g. Por outro lado, em* $X = (-\infty, \frac{7}{8}]$ *a função g é estritamente decrescente e, segundo o Teorema 4.6 é injetiva. Assim, podemos afirmar que g é uma bijeção, portanto invertível.*

Pra determinar a inversa de g, que denotaremos por h, com $i \in \{1,2\}$*, é necessário que ela atenda às condições i) e ii), da definição 7.1. Assim, temos:*

$$g(h(y)) = 4(h(y))^2 - 7h(y) + 3 = y. \tag{7.23}$$

Somando membro a membro $\frac{1}{16}$ *em (7.23), temos:*

$$4(h(y))^2 - 7h(y) + 3 + \frac{1}{16} = y + \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$[2h(y) - \frac{7}{4}]^2 = \frac{16y+1}{16} \Rightarrow$$

$$[2h(y) - \frac{7}{4}] = \frac{\pm\sqrt{16y+1}}{4} \Rightarrow$$

$$2h(y) = \frac{7 \pm \sqrt{16y+1}}{4} \Leftrightarrow h(y) = \frac{7 \pm \sqrt{16y+1}}{8}. \tag{7.24}$$

Por (7.24), há duas possíveis inversas pra f, que são:

1. $h_1(y) = \frac{7+\sqrt{16y+1}}{8}$

2. $h_2(y) = \dfrac{7-\sqrt{16y+1}}{8}$

Conforme podemos notar, as funções h_1 e h_2 cumprem a condição $ii)$ da definição 7.1 mas, pra determinar a função inversa, devemos observar qual função cumpre a condição $i)$, pra que se identifique a função inversa de f. Tomando h_1, temos:

$$
\begin{aligned}
h_1(g(x)) &= \frac{7+\sqrt{16.(4x^2-7x+3)+1}}{8} \Rightarrow \\
h_1(g(x)) &= \frac{7+\sqrt{64x^2-112x+49}}{8}. \qquad (7.25)
\end{aligned}
$$

Em (7.25), note que $64x^2-112x+49 = (8x-7)^2 \Rightarrow \sqrt{64x^2-112x+49} = |8x-7|$. Como $x < \dfrac{7}{8}$, considere $|8x-7| = 7-8x$. Logo, em (7.25), temos:

$$
\begin{aligned}
h_1(g(x)) &= \frac{7+\sqrt{64x^2-112x+49}}{8} = \frac{7+(7-8x)}{8} \Rightarrow \\
h_1(g(x)) &= \frac{7}{4} - x \neq x. \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

Por (7.26), temos que h_1 não cumpre a segunda condição e, consequentemente, não é a inversa de g. Agora, para h_2, temos:

$$
\begin{aligned}
h_2(g(x)) &= \frac{7-\sqrt{16.(4x^2-7x+3)+1}}{8} \Rightarrow \qquad (7.27) \\
h_2(g(x)) &= \frac{7-\sqrt{64x^2-112x+49}}{8} \Rightarrow \qquad (7.28) \\
h_2(g(x)) &= \frac{7-|8x-7|}{8}. \qquad (7.29)
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo, considere $|8x-7| = 7-8x$. Assim, temos:

$$
h_2(g(x)) = \frac{7-|8x-7|}{8} \Rightarrow
$$

$$h_2(g(x)) = \frac{7-(7-8x)}{8} = x. \tag{7.30}$$

Por (7.30), concluímos que h_2 é a inversa de g.

Exemplo 59 *Mostre que a função*

$$h : [\frac{7}{8}, +\infty) \to [\frac{-1}{16}, +\infty)$$

$$x \mapsto h(x) = 4x^2 - 7x + 3$$

é invertível e determine sua inversa.

Solução: *Assim como a função g do Exemplo 58, h também está definida para todo o contradomínio $Y = [\frac{-1}{16}, +\infty)$ e no domínio $D(h) = [\frac{7}{8}, +\infty)$, ela é estritamente crescente, segundo o Teorema 4.6 mencionado posteriormente, h é injetiva. Logo, h é bijetiva e, consequentemente, invertível.*

Para determinar a inversa de h, assim como a inversa de g,tome $j(x)$ inversa de h. Logo, temos por (7.24) que j cumpre $h(j(y)) = y$ e, suas possíveis inversas são:

1. $j_1(y) = \dfrac{7+\sqrt{16y+1}}{8}$;

2. $j_2(y) = \dfrac{7-\sqrt{16y+1}}{8}$

Pra que h seja inversível, é necessário que j_1 ou j_2 cumpra $j(h(x)) = x$. Iniciando por j_1, temos:

$$j_1(h(x)) = \frac{7+\sqrt{16.(4x^2-7x+3)+1}}{8} \Rightarrow \tag{7.31}$$

$$j_1(h(x)) = \frac{7+\sqrt{64x^2-112x+49}}{8} \Rightarrow \tag{7.32}$$

$$j_1(h(x)) = \frac{7+|8x-7|}{8}. \tag{7.33}$$

Em (7.33), considere $|8x-7| = 8x-7$, pois $x \geq \frac{7}{8}$. Daí, temos:

$$j_1(h(x)) = \frac{7+8x-7}{8} = \frac{8x}{8} = x. \tag{7.34}$$

Por (7.34), temos que j_1 é a inversa de h. Analisando a função j_2, temos:

$$j_2(h(x)) = \frac{7-\sqrt{16.(4x^2-7x+3)+1}}{8} \Rightarrow \tag{7.35}$$

$$j_2(h(x)) = \frac{7-\sqrt{64x^2-112x+49}}{8} \Rightarrow \tag{7.36}$$

$$j_2(h(x)) = \frac{7-|8x-7|}{8}. \tag{7.37}$$

Como $x \geq \frac{7}{8}$, temos $|8x-7| = 8x-7$. Logo, temos:

$$j_2(h(x)) = \frac{7-(8x-7)}{8} = \frac{7}{4} - x. \tag{7.38}$$

Por (7.38), temos que j_2 não é inversa de h.

Observando os Exemplos 58 e 59, as funções g e h possuem mesmo contradomínio e mesma lei de formação, porém possuem domínios distintos e, consequentemente terão inversas distintas. Assim, é importante estar atento a esse detalhe, em que ao trabalhar funções inversas em sala de aula, o professor deixe isso bem claro aos seus alunos, para que eles não compreendam o conceito de função inversa equivocadamente.

7.2 Funções inversas e simetria gráfica

Um outro ponto que colocamos nessa seção, é a simetria existente entre o gráfico de uma função e de sua inversa em relação ao gráfico da função identidade, que a nosso ponto de vista é importante a se trabalhar em sala de aula, pois induz o aluno a ter uma compreensão melhor sobre o esboço do gráfico de uma função inversa, mas antes, definiremos o conceito de simetria em relação a uma reta, que colocamos do seguinte modo:

Definição 7.2 (Simetria em relação à reta) *Dados dois pontos A e A' e uma reta r contida no plano, dizemos que os pontos A e A' são simétricos em relação à reta r se , dados dois pontos $B,C \in r$, os triângulos ABC e A'BC forem congruentes e, a reta que contém os pontos A e A' é perpendicular à r.*

Graficamente:

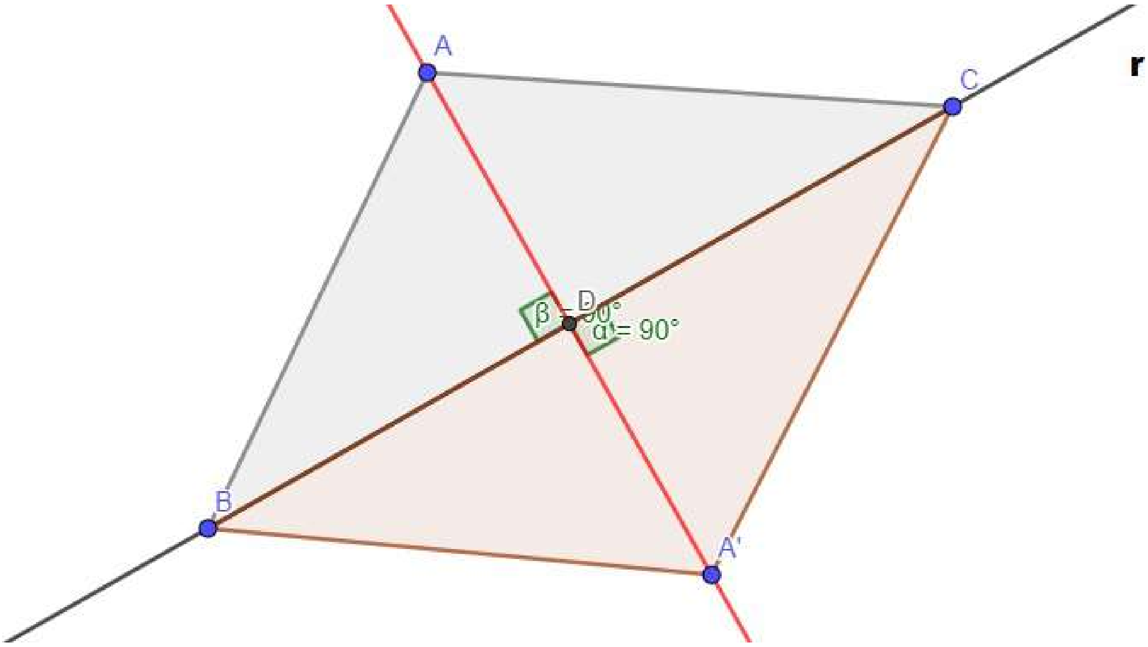


Figura 7.1: Simetria entre dois pontos em relação à r

Conforme podemos observar, o conceito de simetria é definido a partir de congruência entre triângulos e, por consequência, os pontos A e A' devem ser equidistantes em relação à reta r e, a reta que contém esses pontos deve ser perpendicular em relação à r, de modo que os pontos A e A' sejam equidistantes de r.

Antes de abordar a simetria, observe a proposição 7.4, que será de grande importância para mostrar a simetria entre os gráficos de f e de sua inversa.

Proposição 7.4 (Perpendicularidade entre duas retas) *Sejam $r : y = ax + b$ e $s : y = a'x + b'$ retas contidas no plano $\mathbb{R}^2$. Se $a \cdot a' = -1$, temos $r \perp s$.*

Demonstração. *Inicialmente, devemos lembrar que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares se $\{\vec{u}, \vec{v}\} = 0$. Observe agora as equações das retas r e s:*

$$r : y = ax + b \Rightarrow \tag{7.39}$$
$$r : ax - y + b = 0 \Rightarrow \tag{7.40}$$
$$\vec{v_n(r)} : (a, -1) \tag{7.41}$$

$$s : y = a'x + b' \Rightarrow \tag{7.42}$$
$$s : a'x - y + b' = 0 \Rightarrow \tag{7.43}$$
$$\vec{v_n(s)} : (a', -1). \tag{7.44}$$

Utilizamos a notação $\vec{v_n(k)}$ para representar o vetor normal da reta e, em (7.41) e (7.44) temos os vetores buscados. Por fim, calculamos seu produto interno:

$$\vec{v_n(r)}.\vec{v_n(s)} = (a, -1).(a', -1) \Rightarrow \tag{7.45}$$
$$\vec{v_n(r)}.\vec{v_n(s)} = a.a' + (-1).(-1) \Rightarrow \tag{7.46}$$
$$a.a' + 1 = 0 \Leftrightarrow a.a' = -1. \tag{7.47}$$

Por (7.47), temos $a.a' = -1$, como queríamos mostrar. ■

Agora, observe o Teorema 7.5:

Teorema 7.5 (Simetria gráfica das funções inversas) *Seja $f : A \to B$ uma função invertível e tome os pontos $P = (a,b) \in G(f)$ e $P' = (b,a)$, com $f^{-1} : B \to A$ função inversa de f. Mostre que $P' \in G(f^{-1})$ e, que P e P' são simétricos em relação à reta $y = x$.*

Demonstração. *Inicialmente, segundo a definição 7.1, temos que:*

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a \tag{7.48}$$

$$f(f^{-1}(b)) = f(a) = b. \tag{7.49}$$

Por (7.48) e (7.49), temos que $f^{-1}(b) = a$. Logo, $P' = (b,a) \in G(f^{-1})$.

Agora, as coordenadas do ponto médio M dos pontos P e P' são definidas por:

$$M = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow \tag{7.50}$$

$$M = \frac{(a,b)+(b,a)}{2} \Rightarrow \tag{7.51}$$

$$M = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}). \tag{7.52}$$

Por (7.52), temos que o ponto médio M pertence à reta $y = x$, logo, os pontos P e P' são equidistantes à reta $r : y = x$. Agora, seja s a reta que contém os pontos P e P'. o coeficiente angular de s se dá por:

$$a' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$a' = \frac{a-b}{b-a} = -1. \tag{7.53}$$

Por (7.53), temos que $a' = -1$, em que a' é coeficiente angular de s, mas $a = 1$, em que a é o coeficiente angular de r. Como $a.a' = -1$, temos pela proposição 7.4 que as retas r e s são perpendiculares. Tomando $A \in r$ ponto qualquer de forma que $A \neq M$, temos que os segmentos $\overline{PM}$ e $\overline{P'M}$ são congruentes, o lado $\overline{AM}$ é comum aos triângulos AMP e AMP' e, além disso, os ângulos $A\hat{M}P$ e $A\hat{M}P'$ são congruentes, logo os triângulos AMP e AMP' são congruentes e, segundo a definição 7.2, os pontos P e P' são simétricos. ■

Graficamente:

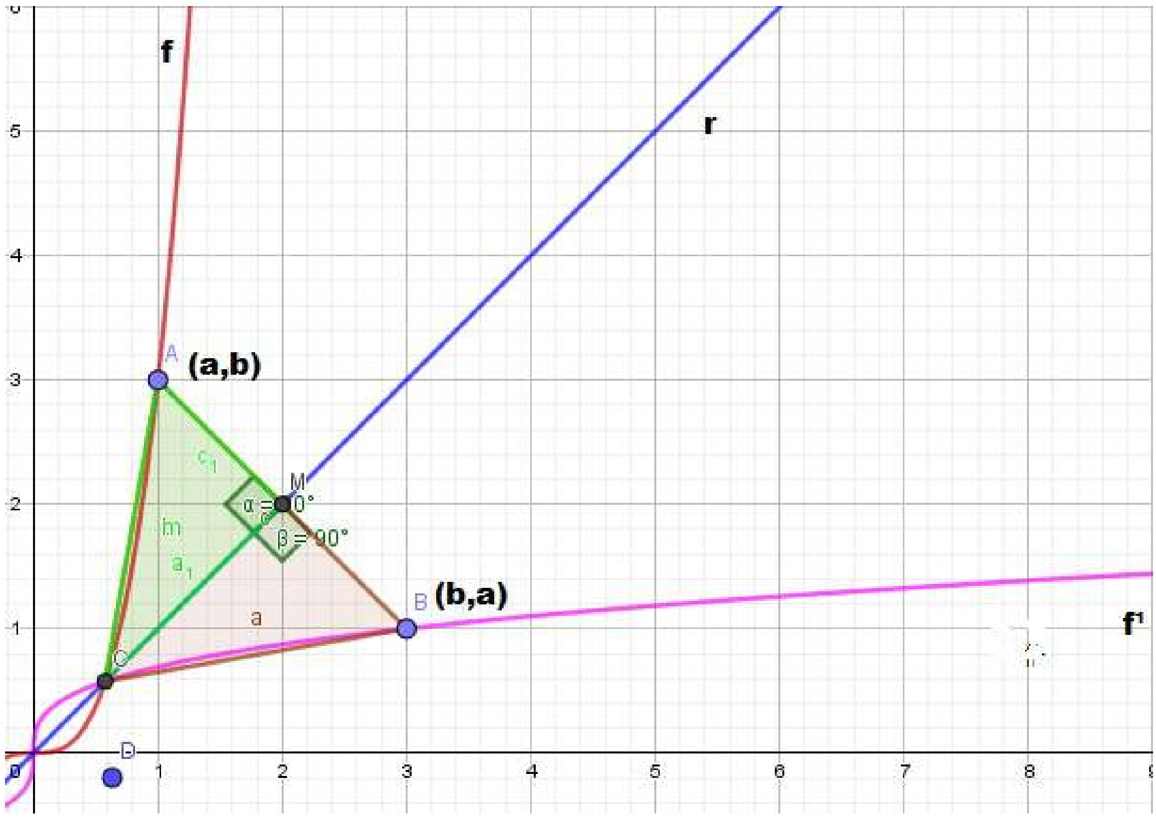


Figura 7.2: Simetria entre o gráfico de uma função e de sua inversa, feito pelo autor usando GeoGebra

Logo abaixo, observando os gráficos das funções colocadas no Exemplo 57, podemos perceber a simetria de modo mais claro.

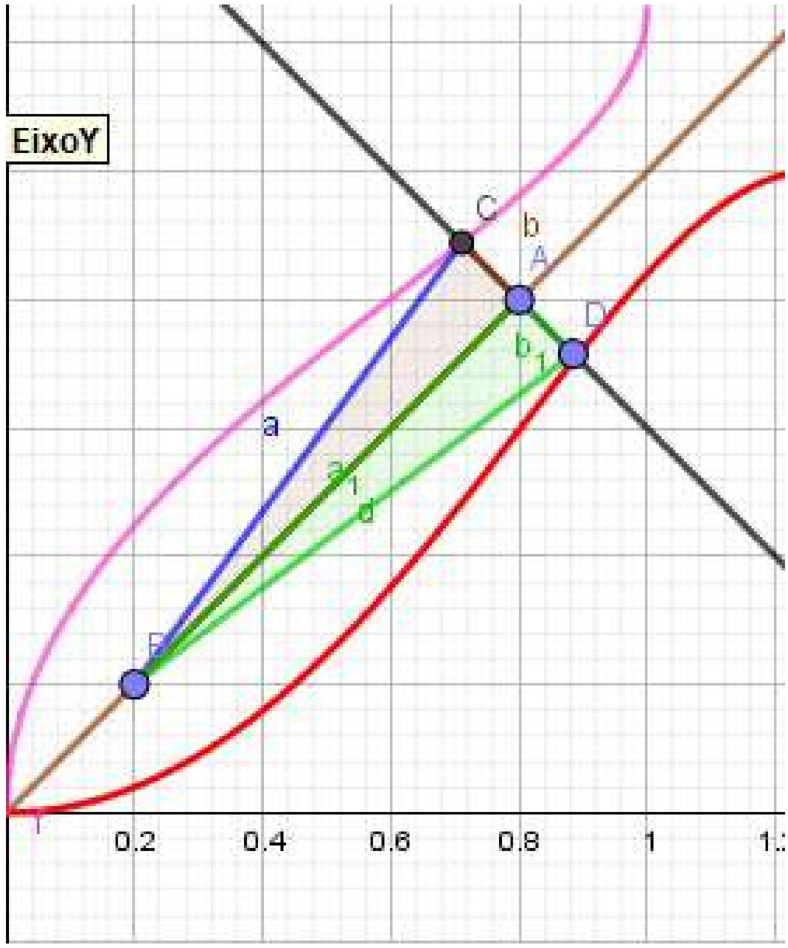


Figura 7.3: Simetria entre gráficos das funções do Exemplo 57, feito pelo autor usando GeoGebra

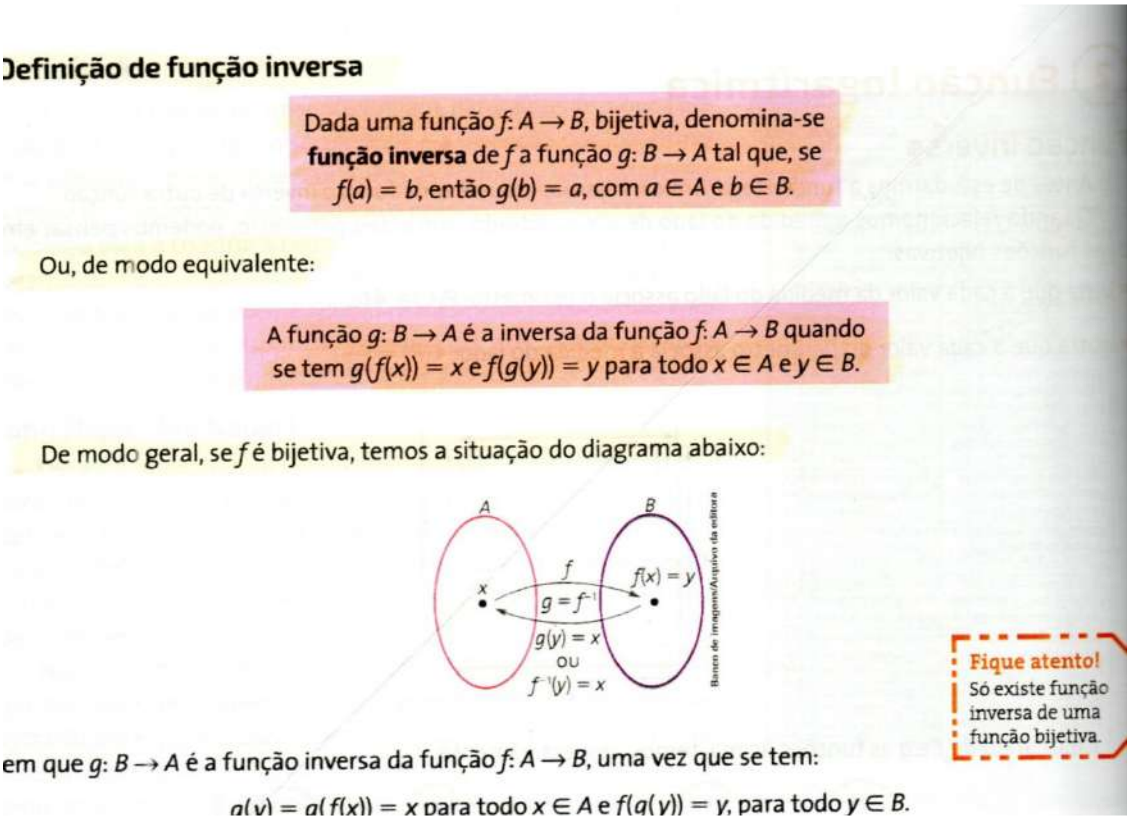
Conforme citamos anteriormente, a ideia de simetria gráfica entre duas funções é importante a ser abordada em sala de aula pois, permite ao aluno determinar o gráfico de uma função, ele pode determinar o gráfico de uma função inversa por meio de sua simetria, auxiliando claramente o aluno quanto ao esboço dos gráficos de funções.

7.3 Como os livros didáticos abordam o conceito de função inversa?

O conceito de função inversa, conforme colocamos, é de grande importância a se trabalhar no Ensino Médio e, o livro didático é uma ferramenta fundamental a se trabalhar em sala de aula, pois é ele quem traz a abordagem do conceito a ser trabalhado. Logo, é importante que ele apresente bem as definições além de bons exemplos, de modo que favoreça a compreensão por parte do aluno. Nesse caso, fazemos uma breve abordagem quanto aos livros 1, 2 e 3, fazendo algumas colocações e sugestões mediante o que os autores abordam.

7.3.1 Análise do Livro 1

Inicialmente, o Livro 1 define função inversa do seguinte modo:



Definição de função inversa

Dada uma função $f: A \to B$, bijetiva, denomina-se **função inversa** de f a função $g: B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Ou, de modo equivalente:

A função $g: B \to A$ é a inversa da função $f: A \to B$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

De modo geral, se f é bijetiva, temos a situação do diagrama abaixo:

Fique atento!
Só existe função inversa de uma função bijetiva.

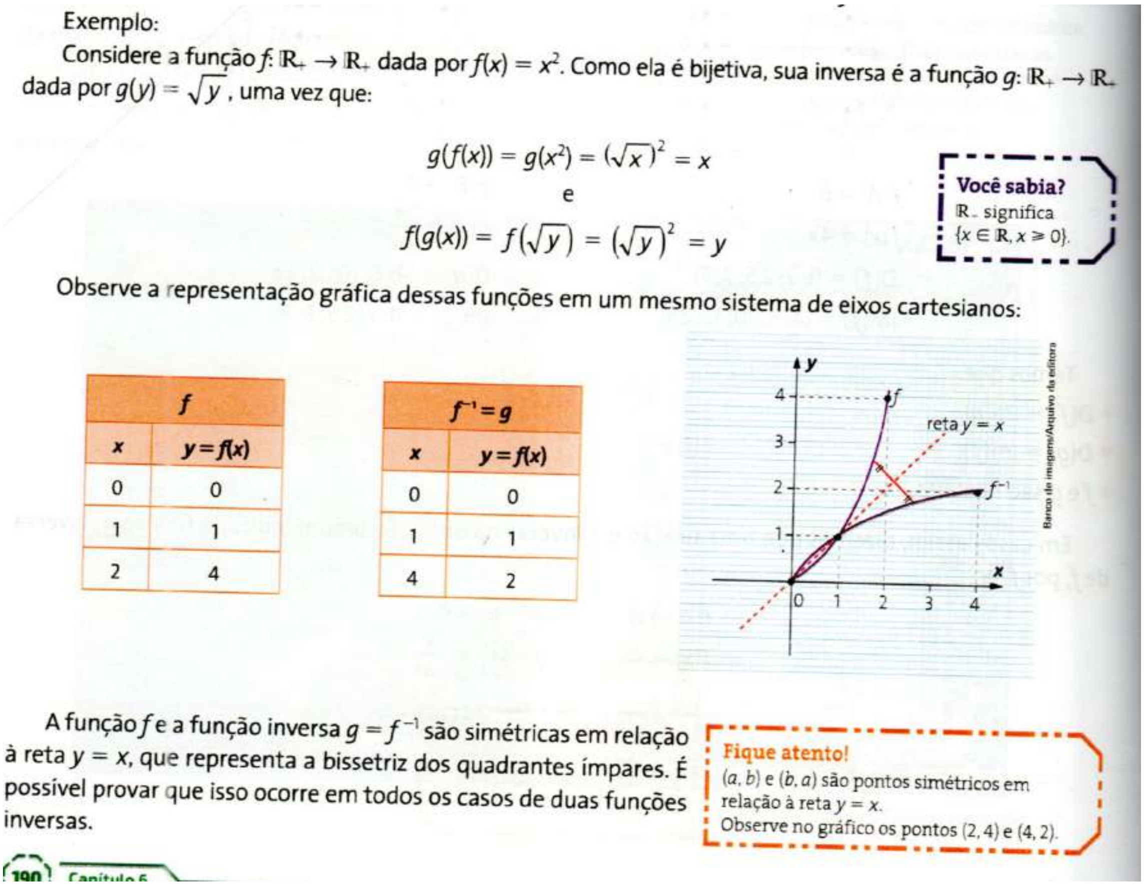
em que $g: B \to A$ é a função inversa da função $f: A \to B$, uma vez que se tem:

$g(y) = g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$, para todo $y \in B$.

Figura 7.4: Definição de Função Inversa - Livro 1

Na primeira definição, o autor deixa bem claro que pra uma função admitir inversa ela deve ser bijetiva, detalhe importante que o aluno deve estar atento, conforme fora colocado na Definição 7.1. Equivalentemente, ele reescreve a definição de modo que ela seja equivalente à primeira, pois se temos $f(a) = b \Rightarrow f(g(b)) = b$ e, analogamente, $g(b) \Rightarrow g(f(a)) = a$, trivial.

Por fim ele apresenta o seguinte Exemplo:



Exemplo:

Considere a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$. Como ela é bijetiva, sua inversa é a função $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $g(y) = \sqrt{y}$, uma vez que:

$$g(f(x)) = g(x^2) = (\sqrt{x})^2 = x$$

e

$$f(g(x)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

Você sabia?
$\mathbb{R}_+$ significa $\{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$.

Observe a representação gráfica dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos:

f	
x	*y* = *f*(*x*)
0	0
1	1
2	4

$f^{-1} = g$	
x	*y* = *f*(*x*)
0	0
1	1
4	2

A função f e a função inversa $g = f^{-1}$ são simétricas em relação à reta $y = x$, que representa a bissetriz dos quadrantes ímpares. É possível provar que isso ocorre em todos os casos de duas funções inversas.

Fique atento!
(a, b) e (b, a) são pontos simétricos em relação à reta $y = x$.
Observe no gráfico os pontos $(2, 4)$ e $(4, 2)$.

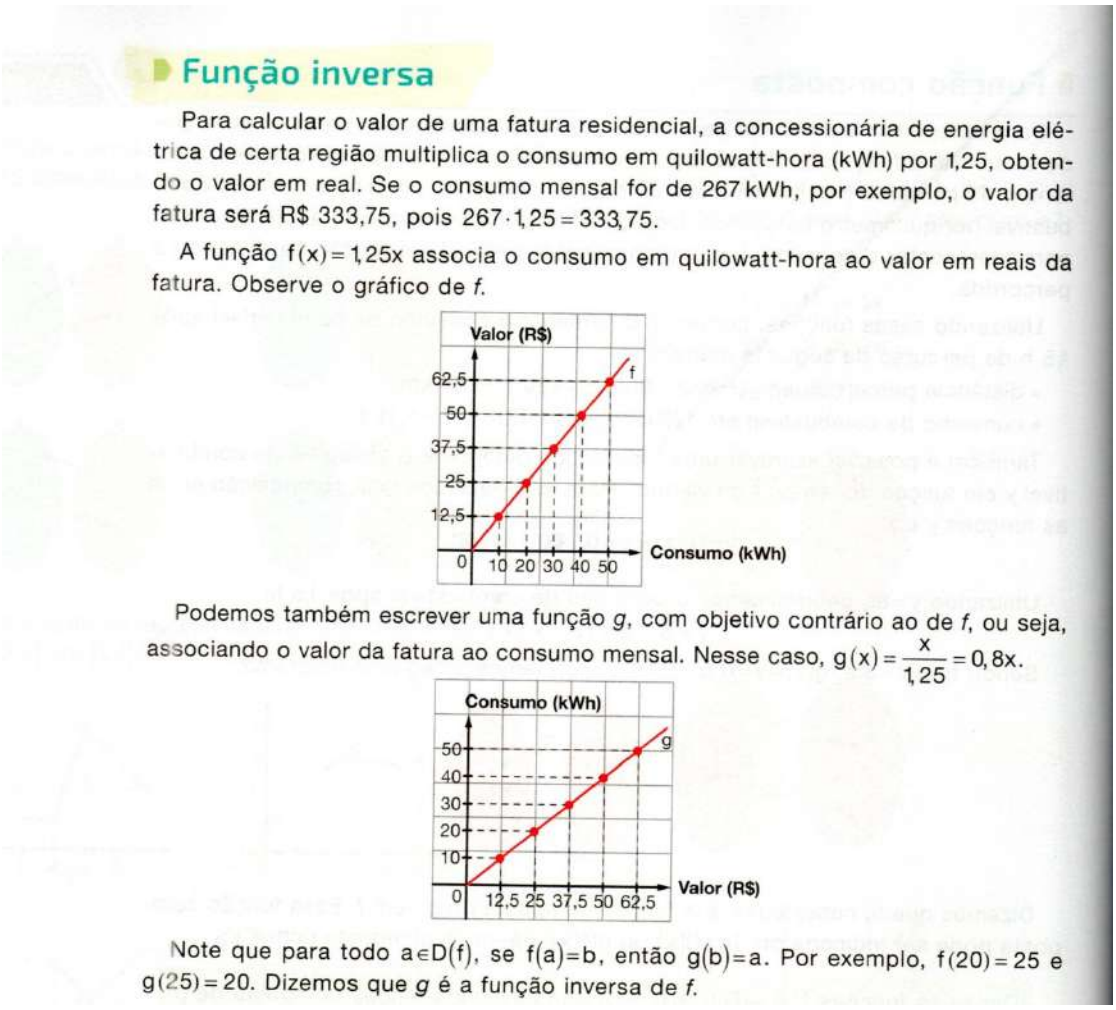
190 Capítulo 6

Figura 7.5: Exemplo de Função Inversa - Livro 1

Conforme podemos notar no Exemplo apresentado, o autor mostra pelo qual a função apresentada é bijetiva e, posteriormente determina sua inversa e justifica, explorando a definição 7.1. Isso é bom para o aluno pois, quando o autor explora corretamente o conceito de função inversa, permite ao aluno notar como se aplica a definição, o que a nosso ponto de vista é bastante útil. Mas, achamos que o autor poderia ter explorado mais exemplos e exemplos um pouco mais objetivos, abordando de modo mais detalhado os conceitos de função inversa, o que fica aqui como sugestão.

7.3.2 Análise do Livro 2

O Livro 2 inicia o estudo de funções inversas apresentando os seguintes exemplos:



Função inversa

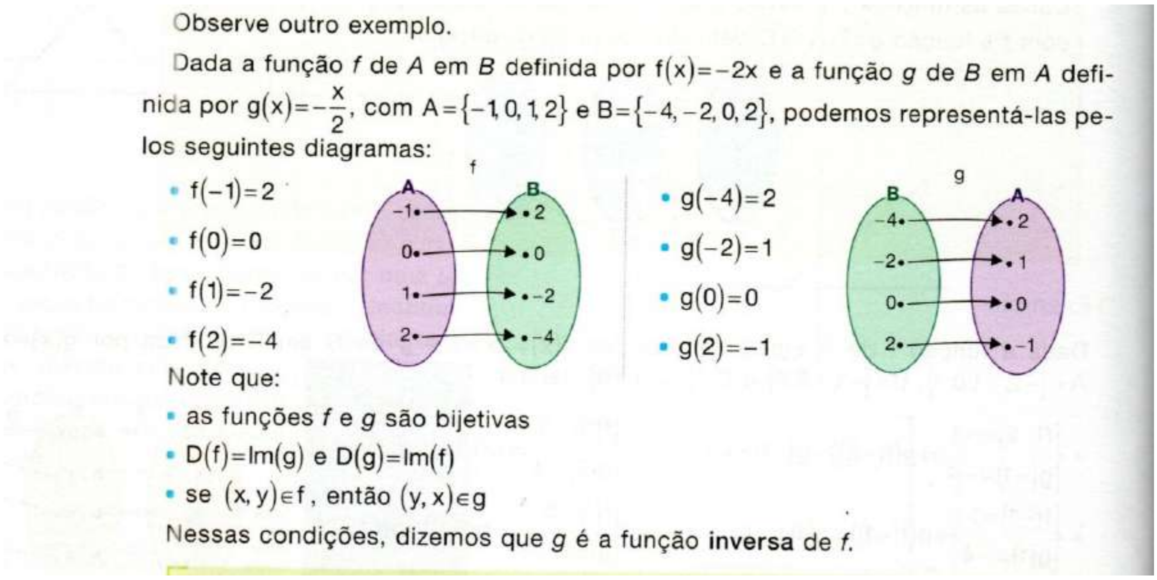
Para calcular o valor de uma fatura residencial, a concessionária de energia elétrica de certa região multiplica o consumo em quilowatt-hora (kWh) por 1,25, obtendo o valor em real. Se o consumo mensal for de 267 kWh, por exemplo, o valor da fatura será R$ 333,75, pois $267 \cdot 1{,}25 = 333{,}75$.

A função $f(x) = 1{,}25x$ associa o consumo em quilowatt-hora ao valor em reais da fatura. Observe o gráfico de *f*.

Podemos também escrever uma função *g*, com objetivo contrário ao de *f*, ou seja, associando o valor da fatura ao consumo mensal. Nesse caso, $g(x) = \dfrac{x}{1{,}25} = 0{,}8x$.

Note que para todo $a \in D(f)$, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$. Por exemplo, $f(20) = 25$ e $g(25) = 20$. Dizemos que *g* é a função inversa de *f*.

Figura 7.6: Exemplo sobre Função Inversa - Livro 2



Observe outro exemplo.

Dada a função f de A em B definida por $f(x)=-2x$ e a função g de B em A definida por $g(x)=-\frac{x}{2}$, com $A=\{-1, 0, 1, 2\}$ e $B=\{-4, -2, 0, 2\}$, podemos representá-las pelos seguintes diagramas:

- $f(-1)=2$
- $f(0)=0$
- $f(1)=-2$
- $f(2)=-4$

- $g(-4)=2$
- $g(-2)=1$
- $g(0)=0$
- $g(2)=-1$

Note que:

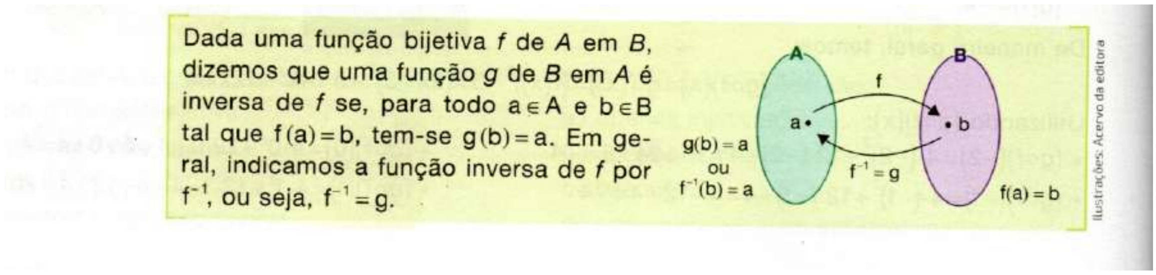
- as funções f e g são bijetivas
- $D(f)=Im(g)$ e $D(g)=Im(f)$
- se $(x, y)\in f$, então $(y, x)\in g$

Nessas condições, dizemos que g é a função **inversa** de f.

Figura 7.7: Exemplo sobre Função Inversa - Livro 2

Conforme podemos observar nas Figuras 7.6 e 7.7, o autor explora dois exemplos que abordam intuitivamente o que viria a ser função inversa, o primeiro por meio de aplicações práticas e o segundo, por meio de diagramas, o que nos parece interessante em um primeiro momento, pois favorece o aluno a intuir sobre esse conceito, mas não é interessante a se explorar diagramas numa abordagem mais profunda.

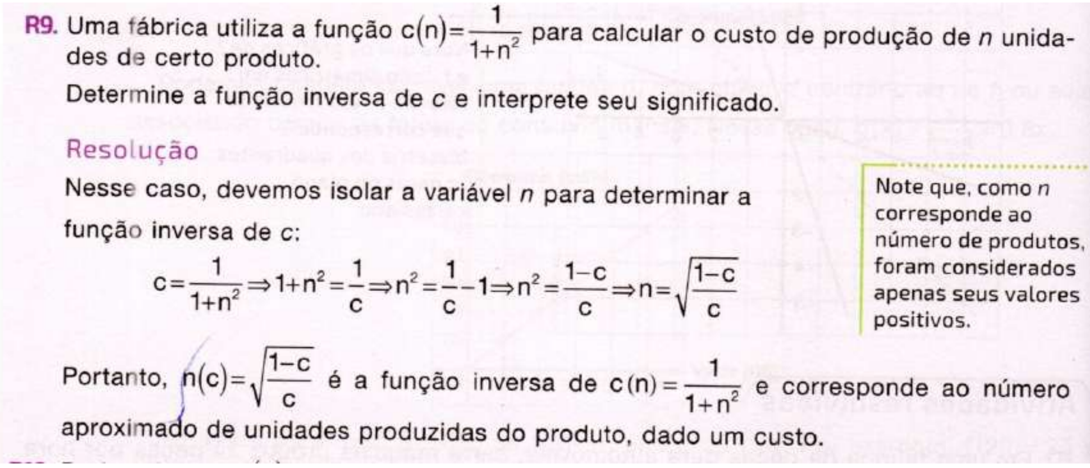
Posteriormente, ele define função inversa do seguinte modo:



Dada uma função bijetiva f de A em B, dizemos que uma função g de B em A é inversa de f se, para todo $a\in A$ e $b\in B$ tal que $f(a)=b$, tem-se $g(b)=a$. Em geral, indicamos a função inversa de f por f^{-1}, ou seja, $f^{-1}=g$.

Figura 7.8: Definição de Função Inversa - Livro 2

Quanto ao conceito de função inversa, o autor aborda-o corretamente, em que essa definição recai na definição 7.1, conforme citamos na subseção 7.1. Posteriormente, o autor apresenta os seguintes Exemplos:



R9. Uma fábrica utiliza a função $c(n)=\frac{1}{1+n^2}$ para calcular o custo de produção de *n* unidades de certo produto.
Determine a função inversa de *c* e interprete seu significado.

Resolução

Nesse caso, devemos isolar a variável *n* para determinar a função inversa de *c*:

$$c=\frac{1}{1+n^2}\Rightarrow 1+n^2=\frac{1}{c}\Rightarrow n^2=\frac{1}{c}-1\Rightarrow n^2=\frac{1-c}{c}\Rightarrow n=\sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

Note que, como *n* corresponde ao número de produtos, foram considerados apenas seus valores positivos.

Portanto, $n(c)=\sqrt{\frac{1-c}{c}}$ é a função inversa de $c(n)=\frac{1}{1+n^2}$ e corresponde ao número aproximado de unidades produzidas do produto, dado um custo.

Figura 7.9: Exemplo sobre Função Inversa - Livro 2

No Exemplo acima, observe inicialmente um primeiro detalhe: Custo e Unidades de produto, a princípio, tratam-se de valores reais e positivos. Com isso, façamos a seguinte pergunta: Caso o custo total da produção fosse $\mathbb{R}\$2,00$, quantas unidades teriam sido produzidas?(**Obs:** utilizar a função inversa mencionada no Exemplo.)

Solução: Utilizando a função inversa dada, temos que o número de unidades produzidas é:

$$n(2)=\sqrt{\frac{1-2}{2}}=\frac{i\sqrt{2}}{2}\notin\mathbb{R}. \tag{7.54}$$

Em (7.54), o custo obtido não é um valor real, em que o autor ao fazer simplesmente a mudança de variável acaba não observando em quais domínio e contradomínio é definida a função e, a nosso ponto de vista, o exemplo é inadequado. Posteriormente, ele aborda um outro exemplo:

R10. Dada a função $f(x)=5x+1$, esboce os gráficos de f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.

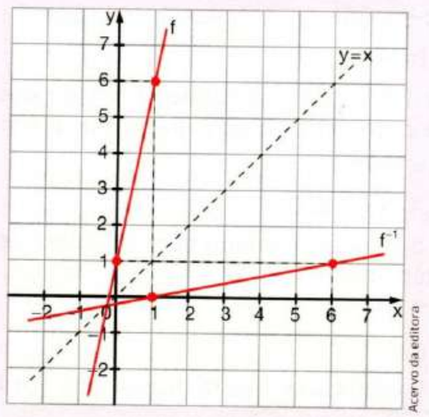
Resolução

Determinamos f^{-1} isolando x em $y=f(x)$.

$$y = 5x+1 \Rightarrow 5x = y-1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{5} \Rightarrow x = \frac{y}{5} - \frac{1}{5}$$

Permutando as variáveis x e y, temos $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{5}$.

Esboçando os gráficos de f e f^{-1} em um mesmo plano cartesiano, temos:



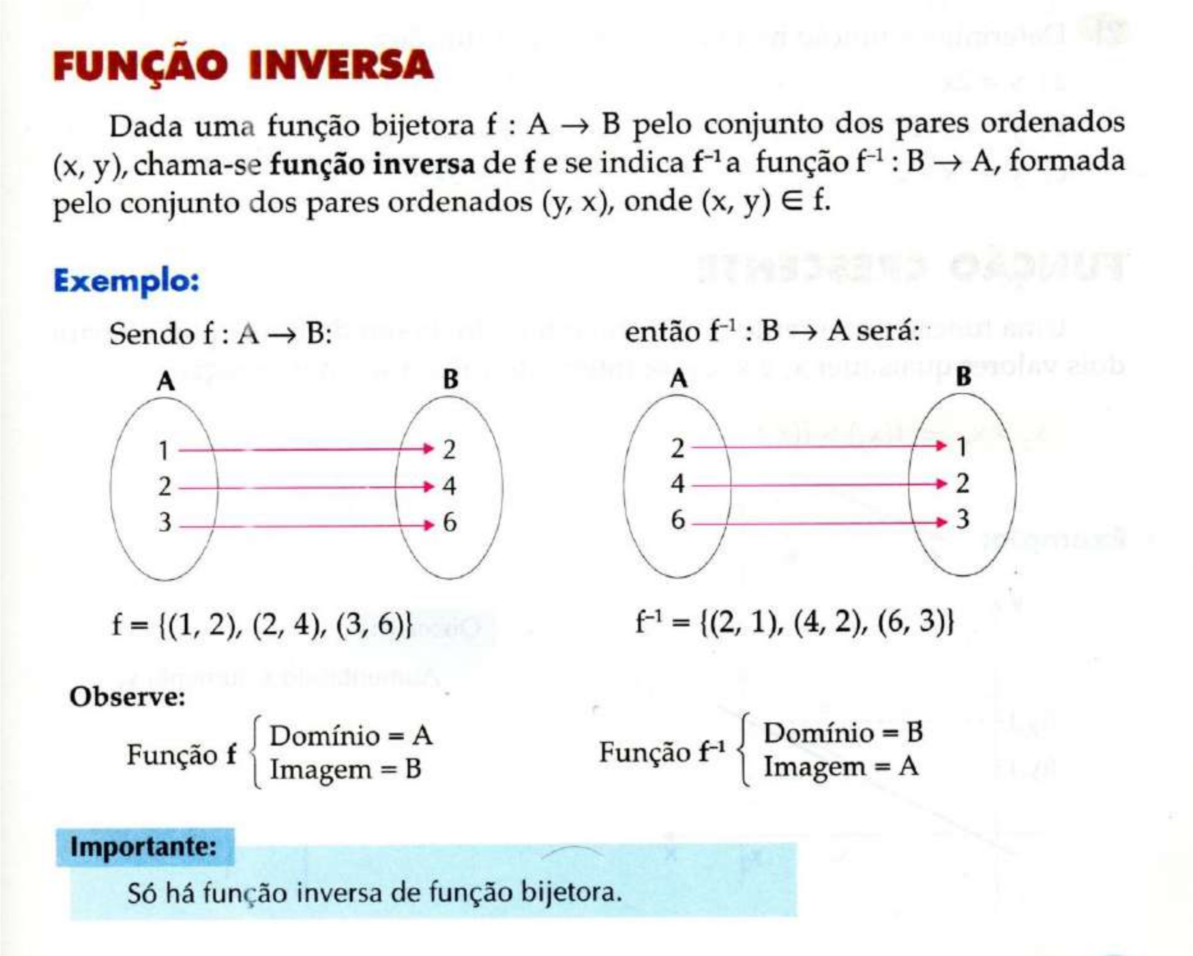
Em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de uma função f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à reta $y=x$.

Figura 7.10: Exemplo sobre Função Inversa - Livro 2

Nesse caso, o autor aborda o método de mudança de variáveis para determinar a inversa de f que é uma função afim, nesse caso nos parece eficiente, pois tomando uma função afim qualquer de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, ela sempre será bijetiva. Já para outras funções, como a função colocada na Figura 7.9 e conforme abordaremos na subseção 7.3.3, esse método de mudança de variável não parece ser eficiente em caso algum.

7.3.3 Análise do Livro 3

O Livro 3 define função inversa do seguinte modo:



FUNÇÃO INVERSA

Dada uma função bijetora f : A → B pelo conjunto dos pares ordenados (x, y), chama-se **função inversa** de **f** e se indica f^{-1} a função f^{-1} : B → A, formada pelo conjunto dos pares ordenados (y, x), onde (x, y) ∈ f.

Exemplo:

Sendo f : A → B:

A: 1, 2, 3 → B: 2, 4, 6

f = {(1, 2), (2, 4), (3, 6)}

então f^{-1} : B → A será:

A: 2, 4, 6 → B: 1, 2, 3

f^{-1} = {(2, 1), (4, 2), (6, 3)}

Observe:

Função **f** $\begin{cases} \text{Domínio = A} \\ \text{Imagem = B} \end{cases}$

Função f^{-1} $\begin{cases} \text{Domínio = B} \\ \text{Imagem = A} \end{cases}$

Importante:

Só há função inversa de função bijetora.

Figura 7.11: Definição de Função Inversa - Livro 3

Segundo a Figura 7.11, perceba que o autor define função inversa por relação e, conforme citamos na Seção 2.1, definir função desse modo não é interessante, seja do ponto de vista Matemático quanto do ponto de vista didático. Por outro lado, vamos utilizar a função colocada no Exemplo 60, para determinar sua inversa.

Observe:

Exemplo 60 *Dada a função bijetiva*

$$f : [2, +\infty) \to [16, +\infty)$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 8$$

determine sua inversa g.

Solução: *Segundo a definição apresentada na Figura 7.11, seja o par ordenado $P = (x^2 - 4x + 8, x)$ pertencente a g. Tomando $y = x^2 - 4x + 8$, temos:*

$$y = x^2 - 4x + 8 \Rightarrow \tag{7.55}$$
$$y - 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \tag{7.56}$$
$$y - 4 = (x-2)^2 \Rightarrow \tag{7.57}$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{y-4} \Rightarrow \tag{7.58}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{y-4}. \tag{7.59}$$

Em (7.59), há duas possíveis inversas para f, que são $g_1 = 2 + \sqrt{y-4}$ e $g_2 = 2 - \sqrt{y-4}$. Agora, verifiquemos se g_1 e g_2 são inversas de f, em que a inversa de f deve cumprir as condições $i)$ e $ii)$ da definição 7.1. Mas conforme podemos observar nos itens $a)$ e $b)$, elas atendem o item $ii)$ da definição 7.1.

Observe:

a) $g_1(y) = 2 + \sqrt{y-4}$

$$f(g_1(y)) = f(2+\sqrt{y-4}) \Rightarrow \tag{7.60}$$
$$f(g_1(y)) = (2+\sqrt{y-4})^2 - 4.(2+\sqrt{y-4}) + 8 \Rightarrow \tag{7.61}$$
$$f(g_1(y)) = 4 + 4\sqrt{y-4} + (y-4) - 8 - 4\sqrt{y-4} + 8 = y. \tag{7.62}$$

b) $g_2(y) = 2 - \sqrt{y-4}$

$$f(g_2(y)) = f(2-\sqrt{y-4}) \Rightarrow \tag{7.63}$$
$$f(g_2(y)) = (2-\sqrt{y-4})^2 - 4.(2-\sqrt{y-4}) + 8 \Rightarrow \tag{7.64}$$
$$f(g_2(y)) = 4 - 4\sqrt{y-4} + (y-4) - 8 + 4\sqrt{y-4} + 8 = y. \tag{7.65}$$

Por (7.68) e (7.65), as funções g_1 e g_2 cumprem a condição $ii)$ da definição 7.1.

Por outro lado, resta saber agora qual das funções cumpre a condição $i)$ *da definição 7.1, logo, a função que cumprir essa condição será inversa de* f. *Observe:*

a) $g_1(x) = 2 + \sqrt{x-4}$

$$g_1(f(x)) = 2 + \sqrt{(x^2 - 4x + 8) - 4} \Rightarrow \tag{7.66}$$

$$g_1(f(x)) = 2 + \sqrt{(x^2 - 4x + 4} \Rightarrow \tag{7.67}$$

$$g_1(f(x)) = 2 + \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow g_1(f(x)) = 2 + |x-2|. \tag{7.68}$$

Em (7.68), como $x \in [2, +\infty)$, *considere* $|x-2| = x-2$. *Assim, conclui-se que* $g_1(f(x)) = 2 + |x-2| = g_1(f(x)) = 2 + x - 2 = x$ *e, como,* g_1 *cumpre a primeira condição, é inversa de* f.

Agora, resta saber se $g_2(x)$ *é inversa de* f, *que deverá cumprir a condição* $i)$ *da definição. Observe:*

b) $g_2(x) = 2 - \sqrt{x-4}$

$$g_2(f(x)) = g_2(x^2 - 4x + 8) \Rightarrow \tag{7.69}$$

$$g_2(f(x)) = 2 - \sqrt{(x^2 - 4x + 8) - 4} \Rightarrow \tag{7.70}$$

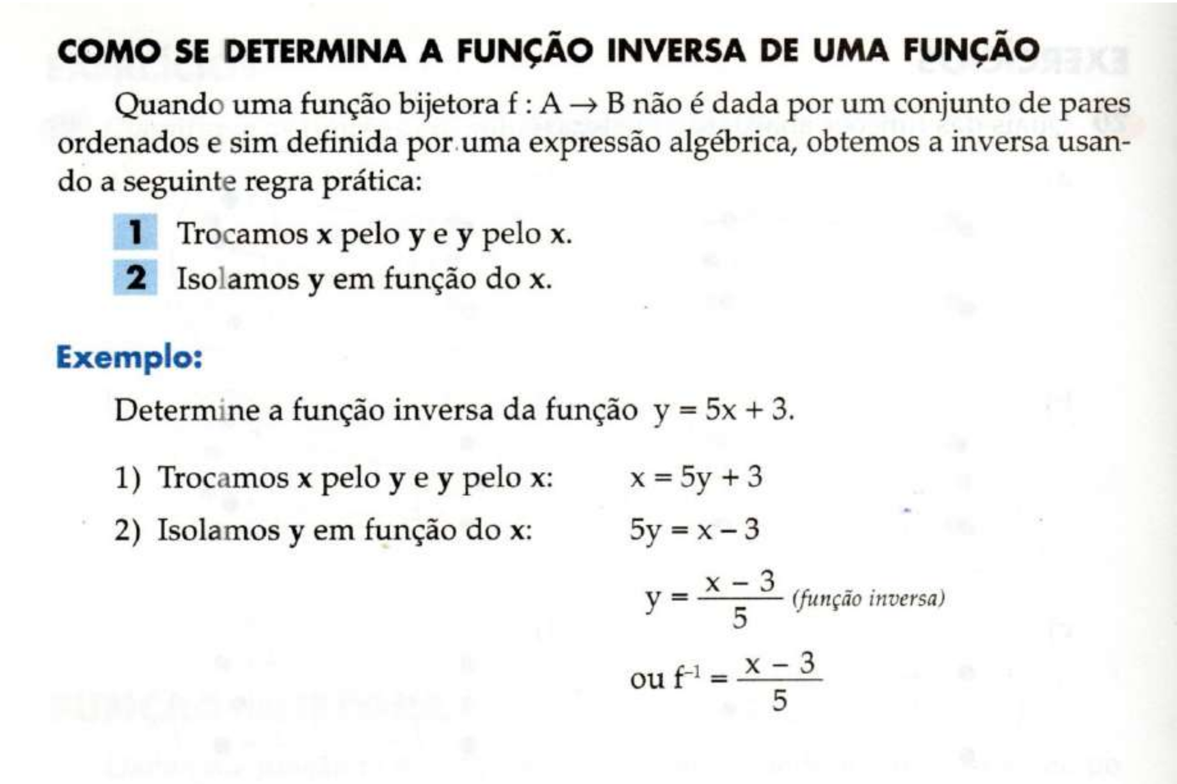
$$g_2(f(x)) = 2 - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \Rightarrow \tag{7.71}$$

$$g_2(f(x)) = 2 - \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow \tag{7.72}$$

$$g_2(f(x)) = 2 - |x-2| = 2 - (x-2) = 4 - x. \tag{7.73}$$

Por (7.73), temos que g_2 *não cumpre a condição* $i)$ *da definição 7.1 e, consequentemente, não é inversa de* f.

Conforme podemos observar no Exemplo 60, a definição colocada garante a existência de duas possíveis inversas, mas não garante sua unicidade, o que a nosso ponto de vista, é um grande problema. Com isso, podemos afirmar que definir a inversa de uma função por relação não é adequado a se trabalhar em sala de aula. Por fim, pra determinar funções inversas, o autor aborda o seguinte método:



COMO SE DETERMINA A FUNÇÃO INVERSA DE UMA FUNÇÃO

Quando uma função bijetora $f : A \to B$ não é dada por um conjunto de pares ordenados e sim definida por uma expressão algébrica, obtemos a inversa usando a seguinte regra prática:

1 Trocamos **x** pelo **y** e **y** pelo **x**.

2 Isolamos **y** em função do **x**.

Exemplo:

Determine a função inversa da função $y = 5x + 3$.

1) Trocamos **x** pelo **y** e **y** pelo **x**: $x = 5y + 3$

2) Isolamos **y** em função do **x**: $5y = x - 3$

$y = \frac{x-3}{5}$ *(função inversa)*

ou $f^{-1} = \frac{x-3}{5}$

Figura 7.12: Definição de Função Inversa - Livro 3

Para verificar a eficácia do método no tocante à determinação da função inversa, vamos tomar, por exemplo, a função colocada no Exemplo 57. Observe:

$$y = sen(x^2) \Rightarrow \tag{7.74}$$

$$x = sen(y^2) \Rightarrow \tag{7.75}$$

$$y^2 = arcsen(x) \Rightarrow \tag{7.76}$$

$$y = h(x) = \pm\sqrt{arcsen(x)}. \tag{7.77}$$

Conforme podemos observar, utilizando o método apresentado pelo autor para determinar funções inversas, há duas possíveis inversas para g, que são $h_1(x) = \sqrt{arcsen(x)}$ e $h_2(x) = -\sqrt{arcsen(x)}$. Mas, segundo o Exemplo 57, a inversa de g é única e definida por h_1.Logo, a nosos ponto de vista, não é recomendável determinar a inversa de uma função por esse método pois, nos parece pouco eficiente.

Capítulo 8

Funções exponencial e logarítmica: explorando o conceito de função inversa

Nesta seção, ao estudar as funções exponencial e logarítmica, abordamos uma aplicação do conceito de função inversa, que é estabelecer a definição dessas funções, bastante exploradas nos currículos de Ensino Médio e, de grande importância no estudo da Matemática de forma geral. A relação existente entre as funções exponencial e logaritmo é que uma é inversa da outra e, conforme colocamos no Capítulo 7 ambas são bijetivas, informações que serão de grande relevância não só quanto ao estudo dessa relação, mas também será de grande valia ao professor para que ele trabalhe corretamente os conceitos de função exponencial e logarítmica em sala de aula.

8.1 Potência de um número real

8.1.1 Potência de expoente racional

Nos currículos atuais do Ensino Básico Brasileiro, é bastante comum abordar o conceito de potência, de grande importância a ser trabalhado em sala de aula e, conforme estudamos na escola, a potência de um número real a é definida do seguinte modo:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.....a}_{n \text{ vezes}}; \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

De imediato, para $n = 1 \Rightarrow a^1 = a$ e, convencionamos que $a^0 = 1$. Lima (2013) [8] afirma que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, vale $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e, Marques (2019) [9] afirma que a propriedade $a^{mn} = (a^m)^n$, com $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$ é válida e pode ser utilizada para realizar operações com potências, em que essas propriedades serão de grande importância para definir corretamente potências de expoente real quaisquer.

Para definir potências de expoente inteiro, tome $m \in \mathbb{Z}, n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $m = -n_0$. Como $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, definiremos as potências de expoente em $\mathbb{Z}$ de modo que essa propriedade seja preservada. Observe:

$$
\begin{align}
a^{m+n_0} &= a^m.a^{n_0} \Rightarrow \tag{8.1}\\
a^{-n_0+n_0} &= a^{-n_0}.a^{n_0} \Rightarrow \tag{8.2}\\
a^0 &= a^{n_0}.a^{-n_0} \Rightarrow \tag{8.3}\\
1 &= a^{n_0}.a^{-n_0} \Rightarrow \tag{8.4}\\
a^{-n_0} &= \frac{1}{a^{n_0}}; n_0 \in \mathbb{N}. \tag{8.5}
\end{align}
$$

Com isso, estabelecemos a potência a^n, com $n \in \mathbb{Z}$.

No caso das potências de expoente racional, segundo Marques (2019) [9] basta tomar $r = \frac{q}{q}$, sendo q um valor positivo e diferente de 0. Para que sejam válidas as propriedades de potência para expoentes racionais, gostaríamos de que

$$
\begin{align}
a^{\frac{q}{q}} &= a^{\frac{\overbrace{1+1+...+1}^{q \quad fatores}}{q}} \Rightarrow \tag{8.6}\\
a^{\frac{q}{q}} &= \underbrace{a^{\frac{1}{q}}...a^{\frac{1}{q}}}_{q \quad fatores} \Rightarrow \tag{8.7}\\
a^1 &= (a^{\frac{1}{q}})^q. \tag{8.8}
\end{align}
$$

A expressão desejada anterior nos indica que a definição acertada é:

$$
a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}; \quad com \quad q \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad a > 0. \tag{8.9}
$$

Diante do que fora colocado em (8.9), podemos afirmar que sendo $s = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$:

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow \sqrt[q]{a^p}.$$

Dessa forma acabamos, portanto, de definir as potências de expoente racional, de forma que a definição conserva as propriedades de potências já conhecidas para números inteiros.

8.1.2 Potência de expoente irracional

O conceito de potência para expoentes irracionais, conforme abordaremos nesta seção, será definido a partir da ideia de convergência de sequências de potências racionais, que foram definidas na subseção 8.1.1. Inicialmente, para que se possa definir com maior clareza as potências de expoentes irracionais, utilizaremos a Desigualdade de Bernoulli, mencionada no Lema 8.1 e que será aplicada no Teorema 8.2 logo abaixo:

Lema 8.1 (Desigualdade de Bernoulli) *Dados $r \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, temos que $(1+t)^r \geq 1 + r.t$.*

Demonstração. *Para demonstrar a seguinte desigualdade, faremos por meio de indução sobre r. Para r=1, devemos ter que:*

$$\begin{aligned} (1+t)^1 \geq 1 + 1.t \Rightarrow \\ 1+t \geq 1+t. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Logo, para $r = 1$ o lema vale. Supondo que $(1+t)^r \geq 1 + r.t$ para r natural qualquer, note que

$$(1+t)^{r+1} = (1+t)^r.(1+t) \Rightarrow \tag{8.11}$$

$$(1+t)^{r+1} \geq (1+r.t).(1+t) \Rightarrow \tag{8.12}$$

$$(1+t)^{r+1} \geq 1 + t + r.t + t^2 \Rightarrow \tag{8.13}$$

$$(1+t)^{r+1} \geq 1 + (r+1).t. \tag{8.14}$$

Sendo $t^2 \geq 0$ para todo t real, podemos afirmar que o que foi colocado em (8.14) está correto e, para $r+1$ o lema vale, logo, segundo o Princípio de Indução Finita, o Lema é válido para todo $r \in \mathbb{N}$ e $t > 0$. ■

Teorema 8.2 *Para todo $a \in \mathbb{R}_+$ e q racional positivo, temos que:*

a) $a > 1 \Rightarrow a^q > 1$;

b) $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^q < 1$.

Demonstração.

Item a: *Sendo $a > 1$ e $q \in \mathbb{Q}_+$, sem perda de generalidade, seja $q = \frac{r}{s}$, com $r, s \in \mathbb{N}$ e seja $m = a^q \in \mathbb{Q}$. Além disso, tome $a = 1 + t$, com $t > 0$. Assim, temos:*

$$a^q = m = (1+t)^q \Rightarrow \tag{8.15}$$

$$a^{\frac{r}{s}} = m = (1+t)^{\frac{r}{s}} \Rightarrow \tag{8.16}$$

$$m = \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[s]{(1+t)^r}. \tag{8.17}$$

Conforme colocamos em (8.17), elevando membro a membro à potência de expoente s, temos que

$$m = \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[s]{(1+t)^r} \Rightarrow \tag{8.18}$$

$$m^s = (\sqrt[s]{a^r})^s = (\sqrt[s]{(1+t)^r})^s \Rightarrow \tag{8.19}$$

$$m^s = (1+t)^r \geq 1 + r.t; \tag{8.20}$$

segundo a Desigualdade de Bernoulli. Logo, $m^s > 1 \Rightarrow m = a^q > 1$, para todo $q > 0$.

Item b: *Como $0 < a < 1$, temos $\frac{1}{a} > 1$. Pelo item anterior, temos que*

$$\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow (\frac{1}{a})^q = \frac{1}{a^q} > 1$$

Consequentemente:

$$\frac{1}{a^q} > 1 \Leftrightarrow 0 < a^q < 1; \forall q \in \mathbb{Q}.$$

■

O Teorema 8.2 é importante para mostrar com clareza no caso das potências de expoente racional, que pra $a > 1 \Rightarrow a^q > 1$ e, para $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^q < 1$, com $q \in \mathbb{Q}$. Mas também devemos estar atentos a um outro detalhe das potências (a^r), com $r \in \mathbb{Q}$ que é justamente a sua monotonicidade, que será de grande relevância para definirmos com clareza potências de números reais. Observe o Teorema 8.3:

Teorema 8.3 *Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x < y$, temos:*

- $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, *com* $a > 1$
- $x < y \Rightarrow a^y < a^x$, *com* $0 < a < 1$.

Demonstração. *Tome* $x = \frac{m}{n}$ *e* $y = \frac{p}{q}$, *com* $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. *Como* $x < y$, *temos* $y - x = \frac{m.q - n.p}{n.q} > 0$. *Com isso, seja* $k = \frac{m.q - n.p}{n.q}$ *e, consequentemente, temos:*

$$\begin{aligned} a^y - a^x &= a^x.[a^{\frac{m.q-n.p}{n.q}} - 1] \Rightarrow \\ a^y - a^x &= a^x.[a^k - 1]. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Segundo o Teorema 8.2, temos que sendo $a > 1$, implica $a^k > 1$ para $k > 0$ e, consequentemente, temos em (8.21) que $a^y > a^x$. Para $0 < a < 1$, temos $a^k < 1$ para $k > 0$ e, em (8.21) temos que $a^y < a^x$; como queríamos mostrar. ■

Segundo o Teorema 8.3, sendo $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ uma sequência de números racionais monótona crescente, com $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que:

$$r_1 < r_2 < ... < r_n < ... \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2} < .... < a^{r_n} < ...; \quad \text{para} \quad a > 1.$$

$$r_1 < r_2 < ... < r_n < ... \Rightarrow a^{r_1} > a^{r_2} > .... > a^{r_n} > ...; \quad \text{para} \quad 0 < a < 1.$$

Conforme citamos anteriormente, a monotonicidade das potências e expoente racional é importante, pois é explorando a ideia de convergência que podemos definir corretamente as potências de expoente irracional. Lima (1976) [6] afirma que sendo K um corpo ordenado deve cumprir três condições, as quais ele menciona logo abaixo:

i) $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;

ii) Dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.a > b$;

iii) Dado qualquer $a > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

E, sendo válida no corpo K qualquer uma das condições apresentadas acima, Lima (1976) [6] afirma que o corpo é **arquimediano** e, sendo $\mathbb{R}$ um corpo ordenado completo, podemos afirmar que $\mathbb{R}$ é arquimediano.

No tocante à densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, a demonstração do Teorema 8.4 mencionado logo abaixo, foi extraída de Lima (1976) [6], mas antes, definimos densidade do seguinte modo:

Definição 8.1 (Densidade) *Um conjunto K é* ***denso*** *em $\mathbb{R}$ se, para todo intervalo $(a,b) \in \mathbb{R}$ com $a < b, (a,b) \cap K \neq \emptyset$.*

Teorema 8.4 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. *Seja (a,b) um intervalo qualquer em $\mathbb{R}$. Devemos mostrar que existem um número racional e um número irracional em (a,b). Como $b - a > 0$, existe um número natural p tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m}{p}, m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Como $\frac{1}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo (a,b), algum dos números $\frac{m}{p}$ deve cair dentro de (a,b). Esta é a ideia intuitiva da demonstração. Raciocinemos agora logicamente. Seja $A = \{m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{p} \geq b\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por b.p. Seja $m_0 \in A$ o menor elemento de A. Então $b \leq \frac{m_0}{p}$ mas, como $m_0 - 1 < m_0$, tem-se $\frac{m_0 - 1}{p} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0-1}{p} < b$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{m_0-1}{p} \leq a \leq b \leq \frac{m_0}{p}$. Isto acarretaria $b - a \leq \frac{m_0}{p} - \leq \frac{m_0-1}{p} = \frac{1}{p}$, uma* *contradição. Logo, o número racional* $\frac{m_0-1}{p}$ *pertence ao intervalo* (a,b). *Para obter um número irracional no intervalo* (a,b), *tomamos* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, *ou seja,* $\frac{\sqrt{2}}{p} < b-a$. *Os números da forma* $\frac{m\sqrt{2}}{p}$, *onde* $m \in \mathbb{Z}$ *são irracionais (salvo m=0) e dividem a reta* $\mathbb{R}$ *em intervalos de comprimento* $\frac{\sqrt{2}}{p}$. *Como* $\frac{\sqrt{2}}{p}$ *é menor que o comprimento b-a do intervalo* (a,b), *conclui-se que algum* $\frac{m\sqrt{2}}{p}$ *deve pertencer a* (a,b). *A demonstração formal se faz como no caso anterior,; se* m_0 *for o menor inteiro tal que* $b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$ *então o número irracional* $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ *pertence ao intervalo* (a,b). ■

Conforme podemos notar no Teorema 8.4, temos que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$ e, esse resultado é importante pois, permitirá compreender com uma clareza maior a demonstração dos Teoremas 8.6, 8.7 e 8.8, referentes à definição de potência de expoente irracional, cujas demonstrações foram extraídas de Marques(2019) [9]. Mas antes, devemos definir de modo claro o limite de uma sequência, que Muniz Neto (2013) [11] coloca do seguinte modo e, a seguir, acrescentamos a Proposição 8.5, cuja demonstração também foi extraída de Marques(2019) [9] e que será tomada como suporte para melhor compreensão do Teorema 8.6:

Definição 8.2 (Limite de sequência) *Dizemos que uma sequência* (a_n) *converge para um real L quando, uma vez prescrito um erro* $\varepsilon > 0$ *para o valor de L, existir um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n - L| < \varepsilon$, *para todo* $n > n_0$.
Alternativamente, se (a_n) *convergir para L, diremos que a sequência é convergente e que L é um limite da sequência, o que denotamos escrevendo*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$

Proposição 8.5 *Dados* $a \in \mathbb{R}$ *e* $r_1 \in \mathbb{Q}$, *existe* $r_2 \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a^{r_2} < 1 + r_1$ *e existe* $r_3 \in \mathbb{Q}$ *tal que* $1 - r_1 < a^{r_3}$.
Demonstração. *Para facilitar o raciocínio, vamos dividir a demonstração em dois casos:*

- *1° PARTE: Demonstração de que existe* $r_2 \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a^{r_2} < 1 + r_1$.

  - *1° caso :* $a > 1$

    Podemos escrever $a = 1 + h$, *para algum* $h > 0$ *e considerar* r_2 *na forma* $r_2 = \frac{1}{q}$, *para algum* $q \in \mathbb{N}$. *Assim, mostraremos que* $a < (1 + r_1)^q$, *para algum* $q \in \mathbb{N}$ *a ser escolhido posteriormente.*

Temos:

$$(1+r_1)^q = 1 + qr_1 + \frac{q(q-1)}{2}{r_1}^2 + ... + r_1^q > 1 + qr_1.$$

Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais, garantimos que existe $q_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $q_0 r_1 > h$. *Logo,* $(1+r_1)^{q_0} > 1 + q_0 r_1 > 1 + h = a$, *ou seja,* $1 + r_1 > a^{\frac{1}{q_0}} = a^{r_2}$.

– *2° caso:* $0 < a < 1$*:*

Nesse caso, pela monotonicidade das potências, basta tomarmos qualquer $r_2 \in \mathbb{N}$ *para termos*

$$a^{r_2} \leq a < 1 < 1 + r_1.$$

- *2° PARTE: Demonstração de que existe* $r_3 \in \mathbb{Q}$ *tal que* $1 - r_1 < a^{r_3}$

  – *1° caso:* $a > 1$*:*

  Nesse caso, pela monotonicidade das potências, para qualquer $r_3 \in \mathbb{N}$, *teremos* $a^{r_3} \geq a > 1 > 1 - r_1$.

  – *2° caso:* $0 < a < 1$*:*

  Primeiramente vamos mostrar que $a^{\frac{1}{n_0}} > \frac{1}{1+r_1}$, *para algum* $n_0 \in \mathbb{N}$. *A tese será uma consequência dessa desigualdade.*

  Vamos definir $r = \frac{1}{1+r_1}$. *Temos* $0 < r < 1$. *Assim,* $\frac{1}{r} > 1$, *ou seja,* $\frac{1}{r} = 1 + h$, *para algum* $h > 0$.

  Como $(\frac{1}{r})^n = (1+h)^n$, *temos :*

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n = 1+nh+...+h^n \tag{8.22}$$
$$> 1+nh \tag{8.23}$$
$$= 1+h+(n-1)h \tag{8.24}$$
$$= \frac{1}{r}+(n-1)h. \tag{8.25}$$

Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r}+(n_0-1)h > \frac{1}{a}$. Logo,

$$\frac{1}{r}+(n_0-1)h > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{\frac{1}{r}+(n_0-1)h}.$$

Da desigualdade (8.25), resulta $\frac{1}{\frac{1}{r}+(n_0-1)h} > \frac{1}{(\frac{1}{r})^{n_0}}$. Logo,

$$a > r^{n_0} = \left(\frac{1}{1+r_1}\right)^{n_0}.$$

Para finalizar, basta lembrar que $r_1 > 0$, por isso $(1+r_1)(1-r_1) = 1-(r_1)^2 < 1$. Logo, concluímos que

$$a^{\frac{1}{n_0}} > \frac{1}{1+r_1} > 1-r_1.$$

■

Teorema 8.6 *Seja (r_n) uma sequência de números racionais que converge para 0 e $a > 0$. A sequência (a^{r_n}) converge para 1.*

Demonstração. *Por hipótese, (r_n) converge para 0, ou seja, para todo $\delta > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $-\delta < r_n < \delta$.*

- *1° caso: $a = 1$*

Se $a = 1$, então $1^{r_n} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência 1^{r_n} é constante, com todos os termos iguais a 1. É imediato concluir que essa sequência converge para 1.

- *2°caso: $a > 1$*

Pela Proposição 8.5, garantimos que existe um racional $\delta_q > 0$ tal que $a^{\delta_q} < 1 + \varepsilon_q$. Consequentemente, $a^{-\delta_q} > \frac{1}{1+\varepsilon_q}$. Por fim, verificamos que $\frac{1}{1+\varepsilon_q} > 1 - \varepsilon_q$. De fato, $(1+\varepsilon_q)(1-\varepsilon_q) = 1 - (\varepsilon_q)^2 < 1$, o que implica que $1 - \varepsilon_q < \frac{1}{1+\varepsilon_q}$.

Além disso, como $a > 1$ pelo Teorema 8.3, temos $a^{-\delta_q} < a^{\delta_q}$. Logo, temos

$$1 - \varepsilon_q < a^{-\delta_q} < a^{\delta_q} < 1 + \varepsilon_q. \tag{8.26}$$

Além disso, sabendo que (r_n) converge para 0, para todo $n > n_0$ temos $-\delta_q < r_n < \delta_q$. Pela monotonicidade das potências, para todo $n > n_0$ temos

$$a^{-\delta_q} < a^{r_n} < a^{\delta_q}.$$

para qualquer $\delta_q > 0$ racional. Para ampliarmos a desigualdade para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, a densidade dos números racionais, citada no Teorema 8.4 garante que existe $\varepsilon_q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \varepsilon_q < \varepsilon$. Portanto, das equações (8.26) e (8.6) concluímos que, para todo $\varepsilon > 0$, existem dois números racionais $\delta_q > 0$ e ε_q e, associado a esse, um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon_q < a^{-\delta_q} < a^{r_n} < a^{\delta_q} < 1 + \varepsilon_q < 1 + \varepsilon$$

ou seja, para todo $n > n_0$, temos $|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$.

- *3° caso:* $0 < a < 1$

  Dado um $\varepsilon > 0$ *arbitrário, utilizando mais uma vez o Teorema 8.4 da densidade de* $\mathbb{Q}$*, garantimos a existência de* $\varepsilon_q \in \mathbb{Q}$ *tal que* $0 < \varepsilon_q < \varepsilon$*. Provaremos agora a existência de um número racional* $\delta_q > 0$ *tal que* $a^{-\delta_q} < 1 + \varepsilon_q$*. Inicialmente, temos* $a^{-\delta_q} = \frac{1}{a^{\delta_q}} < 1 + \varepsilon_q \Leftrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon_q} < a^{\delta_q}$*. Aplicando mais uma vez a desigualdade* $1 - \varepsilon_q < \frac{1}{1+\varepsilon_q}$*, concluímos também que*

$$1 - \varepsilon_q < a^{\delta_q}. \tag{8.27}$$

  Segundo o Teorema 8.4, seguindo raciocínio análogo ao 2° caso da 1° parte, basta tomarmos $r_1 = \varepsilon_q$ *e garantiremos a existência de um* $r_2\delta'_q$ *que satisfaça à desigualdade colocada em (8.27) (não repetimos os cálculos por serem muito similares, mas recomendamos que o leitor interessado em acompanhar os detalhes da demonstração releia os cálculos da referida proposição). Portanto, garantimos que existe* $\delta_q \in \mathbb{Q}$ *tal que*

$$a^{-\delta_q} < 1 + \varepsilon_q. \tag{8.28}$$

  Pela monotonicidade das potências, temos

$$a^{\delta_q} < a^{-\delta_q}. \tag{8.29}$$

  Por fim, pela hipótese inicial, para $n > n_0$*, temos* $-\delta_q < r_n < \delta_q$ *e, pela monotonicidade das potências, temos*

$$a^{\delta_q} < a^{r_n} < a^{-\delta_q}. \tag{8.30}$$

Assim, pelas equações (8.27), (8.28), (8.29) e (8.30) para todo $\varepsilon > 0$, existem um número racional $\delta_q > 0$ e um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$1-\varepsilon < 1-\varepsilon_q < a^{\delta_q} < a^{r_n} < a^{-\delta_q} < 1+\varepsilon_q < 1+\varepsilon \Rightarrow$$
$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a^{r_n} - 1| < \varepsilon.$$

Assim, para todo $a > 0$, se a sequência (r_n) converge para 0, então a sequência (a^{r_n}) converge para 1. ■

Segundo o Teorema 8.6, podemos afirmar que $\lim_{h \to 0} a^h = 1$, mas conforme colocamos nessa seção, esta informação será de suma relevância para compreender melhor as demonstrações dos Teoremas 8.7 e 8.8, cujas demonstrações foram extraídas de Marques (2019) [9], conforme citamos anteriormente.

Teorema 8.7 *Para todo número irracional x, existe uma sequência de números racionais que converge para x.*

Demonstração. *Dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Logo, para todo $n > n_0$, temos $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Consideremos agora uma sequência (ε_n), com $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ e os respectivos intervalos $(x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n)$. Segundo o Teorema 8.4, sabemos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, o que nos garante a existência de pelo menos um racional r_n em cada um desses intervalos. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < r_n - x < \frac{1}{n}$; quando $n > n_0(\varepsilon_n)$, teremos ainda*

$$|r_n - x| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

■

Segundo o Teorema 8.7, podemos afirmar que dado x um número irracional qualquer, sempre existirá uma sequência $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ de modo que $(r_n) \to x$. Mas, pra que o leitor tenha uma melhor compreensão da demonstração do Teorema 8.11, extraída de Marques (2019) [9], colocamos os Teoremas 8.8, 8.9 e o Teorema 8.10 como suporte, em que a demonstração do Teorema 8.9 foi extraída de Marques (2019, apud Morais Filho e Oliveira (2017)) [9] e a demonstração do Teorema 8.10 foi extraída de Muniz Neto (2013) [11].

Teorema 8.8 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. *De fato, sendo (x_n) uma sequência convergente, temos que tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ e sendo α o limite da sequência, temos:*

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

para todo $n > n_0$ e, como x_n possui $\alpha - \varepsilon$ como limite inferior e $\alpha + \varepsilon$ como limite superior, conclui-se que (x_n) é limitada. $\blacksquare$

Teorema 8.9 (Intervalos encaixantes) *Dada uma sequência*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

de intervalos fechados encaixantes cujos comprimentos tendem para zero, temos

$$\cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}, c \in \mathbb{R}$$

Demonstração. *Para $n \in \mathbb{R}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Podemos então escrever:*

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Considere $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto A é não-vazio e limitado superiormente, pois b_1 é uma cota superior de A. Sendo (a_n) um conjunto não-vazio e limitado superiormente, existe $c = \sup A$.

Evidentemente, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que c é uma cota superior de A. Por outro lado, como cada b_n é uma cota superior de A e c é a menor das cotas, então $c \leq b_n$, para *todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq c \leq b_n$, ou seja, $c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Além disso, no caso que os comprimentos dos intervalos tendem a zero, queremos mostrar que o ponto c é único.*

Sejam $c, d \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, com $c \neq d$. Podemos supor sem perda de generalidade que $c < d$. Daí $a_n \leq c \leq d \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica

$$b_n - a_n \geq d - c > 0.$$

Fazendo n crescer infinitamente, chegamos a uma contradição, pois quando n cresce infinitamente, o comprimento $b_n - a_n$ tende a zero. Portanto c=d. ■

Os Teoremas 8.8 e 8.9 nos permitem compreender um pouco melhor algumas propriedades a respeito das sequências de números reais mas, antes de citar as demonstrações do Teorema 8.10 e do Teorema 8.11, cuja demonstração foi extraída de Marques(2019) [9], é importante citar a definição de subsequência, com o intuito de favorecer a compreensão das demonstrações posteriores por parte do leitor.

Definição 8.3 (Subsequência) *Tomando a sequência (x_n), definimos como* ***subsequência*** *a restrição de (x_n) a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < ... < n_k\} \subset \mathbb{N}$ e, que denotamos por $(x_{n_k}) \subset (x_n)$.*

Teorema 8.10 *Toda sequência limitada admite uma subsequência convergente.*

Demonstração. *Seja $I_0 = [a_0, b_0]$ um intervalo fechado e limitado contendo a sequência limitada $(a_n)_{n\geq 1}$. Dentre os intervalos $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ e $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$, escolha um que contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, e denote tal intervalo por I_1. Proceda do mesmo modo com I_1, obtendo um intervalo fechado $I_2 \subset I_1$ tal que $|I_2| = \frac{1}{2}|I_1|$ e I_2 contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Prosseguindo indutivamente, construímos uma sequência $I_1, I_2, I_3, ...$ de intervalos fechados tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ e $|I_{n+1}| = \frac{|I_n|}{2}$, para todo $n \geq 1$. Portanto, pelo Teorema 8.9, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\cap_{k\geq 1} I_k = \{c\}$.*

Para terminar, escolha $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \in I_1$; em seguida, após ter escolhido $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_j} \in I_j$, tome $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ e $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ (isto é possível pela definição dos I_j). Por fim, um argumento análogo ao usado na prova do Teorema 8.9 dos Intervalos Encaixantes garante que $a_{n_j} \to c$. ■

Teorema 8.11 *Dados uma sequência de números racionais* (r_n) *que converge para um* $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *e um número* $a > 0$*, a sequência de potências* a^{r_n} *será convergente.*

Demonstração. *Inicialmente, como* (r_n) *é convergente, pelo Teorema 8.8 garantimos que* (r_n) *é limitada, ou seja, existe* $A \in \mathbb{R}$ *tal que* $|r_n| \leq A$*, para todo número n natural. Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais, garantimos que exista* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $N > A$*. Logo,* $-N < r_n < N$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Mostraremos agora que (a^{r_n}) *também será limitada:*

Como $N > r_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então podemos definir* $s_n = N - r_n$*, sendo* $s_n > 0$ *e* $s_n \in \mathbb{Q}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Logo,* $a^N = a^{r_n + s_n}$*, ou seja,* $a^N = a^{r_n}.a^{s_n}$*. A potência* a^{s_n} *está bem definida porque* $s_n \in \mathbb{Q}$*.*

De forma similar, como $r_n > -N$*, podemos definir* $t_n = r_n + N$*, com* $t_n > 0$ *e* $t_n \in \mathbb{Q}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Logo,* $a^{r_n} = a^{-N+t_n} = a^{-N}.a^{t_n}$*. Mais uma vez, a potência* a^{t_n} *encontrada está bem definida porque* $t_n \in \mathbb{Q}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

- *1° caso:* $a > 1$*:*

  Nesse caso, $a^{s_n} > 1$ *e* $a^{t_n} > 1$*, porque* $a > 1$*,* $s_n > 0$ *e* $t_n > 0$*. Dessa forma, concluímos que* $a^{-N} < a_{r_n} < a^N$ *quando* $a > 1$*.*

- *2° caso:* $0 < a < 1$*:*

  Agora, temos $0 < a^{s_n} < 1$ *e* $0 < a^{t_n} < 1$*, porque* $0 < a < 1$*,*$s_n > 0$ *e* $t_n > 0$*. Dessa forma, concluímos que* $a^{-N} > a_{r_n} > a^N$ *quando* $0 < a < 1$*.*

Pelo Teorema 8.10, a sequência limitada (a^{r_n}) *possui uma subsequência* $(a^{r'_n})$ *convergente. Denotemos por L o limite dessa subsequência. Note que todos os termos* r'_n *serão termos da sequência* (r_n)*; logo, a subsequência* (r'_n) *deve convergir para x.*

Suponhamos agora que (a^{r_n}) *não seja convergente. Logo, existe outra subsequência* $(a^{r''_n})$*, com* $(r''_n) \subset (r_n)$*, que não converge para L.*

Pela definição de subsequência, dizer que (a^{r_n}) *não converge para L significa dizer que existe um* ε_0 *tal que, para todo* $n' \in \mathbb{N}$*, existe* $n'' > n'$ *tal que* $|a^{r''_n} - L| > \varepsilon_0$*. Por outro lado, dizer que a subsequência* $(a^{r'_n})$ *converge para L equivale a dizer que, para todo*

$\varepsilon_1 > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $|a^{r'_n} - L| < \varepsilon_1$. Em particular, tomaremos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Pela Desigualdade Triangular, temos:

$$|a^{r''_n} - L| \leq |a^{r''_n} - a^{r'_n}| + |a^{r'_n} - L| \Rightarrow \tag{8.31}$$

$$\varepsilon_0 \leq |a^{r''_n} - a^{r'_n}| + \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow \tag{8.32}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leq |a^{r''_n} - a^{r'_n}| \tag{8.33}$$

Agora, mostraremos que essa última desigualdade não pode acontecer:

Vamos escrever $r''_n = r'_n + v_n$. Como (r'_n) e (r''_n) são subsequências da sequência convergente (r_n), concluímos que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Temos, então:

$$|a^{r''_n} - a^{r'_n}| = |a^{r'_n}.(a^{v_n} - 1)| = |a^{r'_n}|.|a^{v_n} - 1|.$$

Pelo Teorema 8.6 sabemos que $\lim_{n\to\infty} a^{v_n} = 1$. Logo, $\lim_{n\to\infty} |a^{r'_n}|.|a^{v_n} - 1| = 0$, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $|a^{r_n}|.|a^{v_n} - 1| < \varepsilon$. Dessa forma, para $n > n_0$,

$$|a^{r''_n} - a^{r'_n}| \leq |a^{r'_n}|.|a^{v_n} - 1| \leq \varepsilon$$

contradizendo a desigualdade (8.33). Assim, a hipótese que gerou a desigualdade (8.33) é falsa; ou seja, toa subsequência de (a^{r_n}) converge para L. Logo, concluímos que a sequência (a^{r_n}) é convergente.

Para finalizar, vamos demonstrar que a definição da potência a^x não depende da sequência (r_n) de números racionais escolhida:

Sejam (r_n) e (s_n) duas sequências distintas de números racionais, ambas convergentes, com $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} s_n = x$. Definamos ainda $t_n = r_n - s_n$.

É fácil concluir que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. *Suponhamos que* $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = R$ *e* $\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = S$. *Temos, então:*

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{t_n}. \lim_{n\to\infty} a^{s_n}.$$

Do Teorema 8.6, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = 1$. *Logo, concluímos que R=S, que denotaremos por* a^x. ■

Segundo os Teoremas 8.7 e 8.11, podemos definir as potências de expoente irracional por meio da convergência de potências com expoente racional, que para o estudante de Ensino Médio isso é importante pois, o estimula a trabalhar as ideias de aproximação e estimativa e, isso deve ser explorado por parte do professor pois, utilizando a ideia de estimativa, o aluno consegue identificar e explorar com maior clareza os valores de potências com expoente irracional. Por fim, definimos as potências de expoente irracional do seguinte modo:

Definição 8.4 *Potência de expoente irracional Seja* (r_n) *uma sequência monótona de números racionais de modo que* $\lim(r_n) = x$, *com* $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Definimos a potência* a^x, *com* $a > 0$ *e expoente irracional, do seguinte modo:*

$$a^x = \lim_{r_n \to x} a^{r_n}.$$

De acordo com a definição, apresentamos o Exemplo 61 mencionado a seguir, que se trata de uma situação-problema simples, mas se trata de uma aplicação prática a se trabalhar em sala de aula.

Exemplo 61 *Qual seria o valor aproximado da potência* 2^π*?*

Resposta: *Inicialmente, note que* $\pi \approxeq 3,1415...$ *e, para determinar um valor aproximado de* 2^π, *consideremos algumas aproximações de* π, *conforme citamos na Definição 8.4 e, estão colocadas na tabela a seguir:*

Aproximações de π	2^π
3	$2^3 = 8$
3,1	$2^{3,1} \approxeq 8,5741877...$
3,14	$2^{3,14} \approxeq 8,81524092...$
3,141	$2^{3,141} \approxeq 8,824977827...$
...	...
π	$2^\pi \approxeq 8,824977827...$

Tabela 8.1: Tabela referente às aproximações da potência 2^π

Conforme podemos notar no tocante às potências de expoente irracional, embora não seja possível determinar valores exatos para as mesmas é permitido ao aluno determinar aproximações e, a nosso ponto de vista, esse é um detalhe importante que o professor deve abordar quanto ao estudo de potência, seja ela de expoente racional ou irracional.

8.2 Função exponencial

A partir do conceito de potência, mencionado na seção 8.1, podemos definir a **função exponencial** da seguinte forma:

Definição 8.5 (Função exponencial) *A função exponencial é definida para* $0 < a \neq 1$*, e é colocada do seguinte modo:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto f(x) = a^x; \quad 0 < a \neq 1.$$

A função exponencial, como podemos observar, é uma função definida para todo e qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois conforme colocamos na seção 8.1, as potências da forma a^x são definidas e sempre positivas para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas também, é importante estar atento à injetividade e à sobrejetividade dessa função, que serão de grande importância para a determinação de sua inversa, em que citaremos com maior clareza na subseção 8.2.1.

8.2.1 Injetividade e sobrejetividade da função exponencial

Quanto ao estudo da função exponencial devemos estar atentos à sua injetividade e sobrejetividade de modo claro, pois essas condições são fundamentais pra que se defina corretamente a sua função inversa, que abordaremos com maior clareza na seção 8.3, mas antes, observe o Teorema 8.12:

Teorema 8.12 *A função exponencial é injetiva.*

Demonstração. *Explorando a definição 4.1, tome $x, y \in \mathbb{R}$ e tome $k \in \mathbb{R}$ de forma que $y = x + k$. Por definição de função exponencial, temos:*

$$a^y = a^x \Rightarrow \tag{8.34}$$

$$a^{x+k} = a^x \Rightarrow \tag{8.35}$$

$$a^x.a^k = a^x \Leftrightarrow a^k = 1. \tag{8.36}$$

Conforme colocamos na seção 8.1, temos que $a^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$, o que implica $x = y$ e, consequentemente, temos f injetiva. ■

A injetividade da função exponencial, conforme colocamos no Teorema 8.12, nos permite associá-la ao crescimento (decrescimento) estrito por conta da sua continuidade, propriedade que será de grande importância pra que possamos discutir sua sobrejetividade. Porém, devemos estar atentos ao Lema 8.13 e ao Teorema 8.14, cujas demonstrações foram extraídas de Lima (2013) [8] e, que serão de grande importância para definir a sobrejetividade da função exponencial.

Lema 8.13 *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não-degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. *Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais M e n tais que*

$$\alpha < \beta < a^M \quad e \quad 1 < a < (1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M})^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad e \quad 0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{m}{n} \leq M$, então

$$0 < a^m(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, ..., a^M.$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

Segundo o Lema 8.13, temos que em todo intervalo contido nos reais, sempre existe uma potência de expoente racional da forma a^x, cuja informação a nosso ponto de vista é de suma importância para que possamos definir corretamente continuidade e sobrejetividade da função exponencial. Quanto à continuidade, observe a Definição 8.6 e o Teorema 8.14, cuja demonstração foi extraída de Lima (2013) [8] e, Muniz Neto (2013) [11] define função contínua do seguinte modo:

Definição 8.6 (Função contínua) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

a função f é dita contínua se o for em todo $x_0 \in X$.

Teorema 8.14 *A função exponencial é contínua.*

Demonstração. *Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.*

Essa afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, pode-se mostrar que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos. Isto implica que $\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. ■

A continuidade da função exponencial associada à sua injetividade, segundo o Teorema 4.6 ela pode ser estritamente crescente ou estritamente decrescente. Como $a^0 = 1$ e $a^1 = a$, podemos afirmar com certeza que a função é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$. Um outro detalhe que devemos estar atentos é quanto à sobrejetividade da função exponencial, cuja demonstração colocada logo abaixo foi extraída de Lima (2013) [8]. Observe o Teorema 8.15:

Teorema 8.15 *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Demonstração. *Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a.) Para prová-la, usamos o lema 8.13 e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$. Portanto $\lim_{m \to \infty} a^{r_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que*

$$a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < s$. Assim, (r_n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{m \to \infty} r_n = x$. A função exponencial contínua garante que $a^x = \lim_{m \to \infty} a^{r_n} = b$ como queríamos demonstrar. ■

Sendo a função exponencial bijetiva em $\mathbb{R}_+$, conforme colocamos nos teoremas 7.2 e 7.3 ela é uma função invertível, cuja inversa trataremos com maiores detalhes na seção 8.3. Mas antes, na subseção 8.2.2, devemos deixar claro ao professor que esses temas devem ser abordados de forma que o aluno compreenda de modo claro a injetividade e a sobrejetividade da função exponencial, para que ele consiga compreender de modo claro como se dá o comportamento da função e de sua inversa.

8.2.2 Análise gráfica do comportamento da função exponencial

Sem perda de generalidade, observemos o gráfico da função exponencial para $a > 1$, em que para $0 < a < 1$, o comportamento do gráfico ocorre de modo análogo. Graficamente:

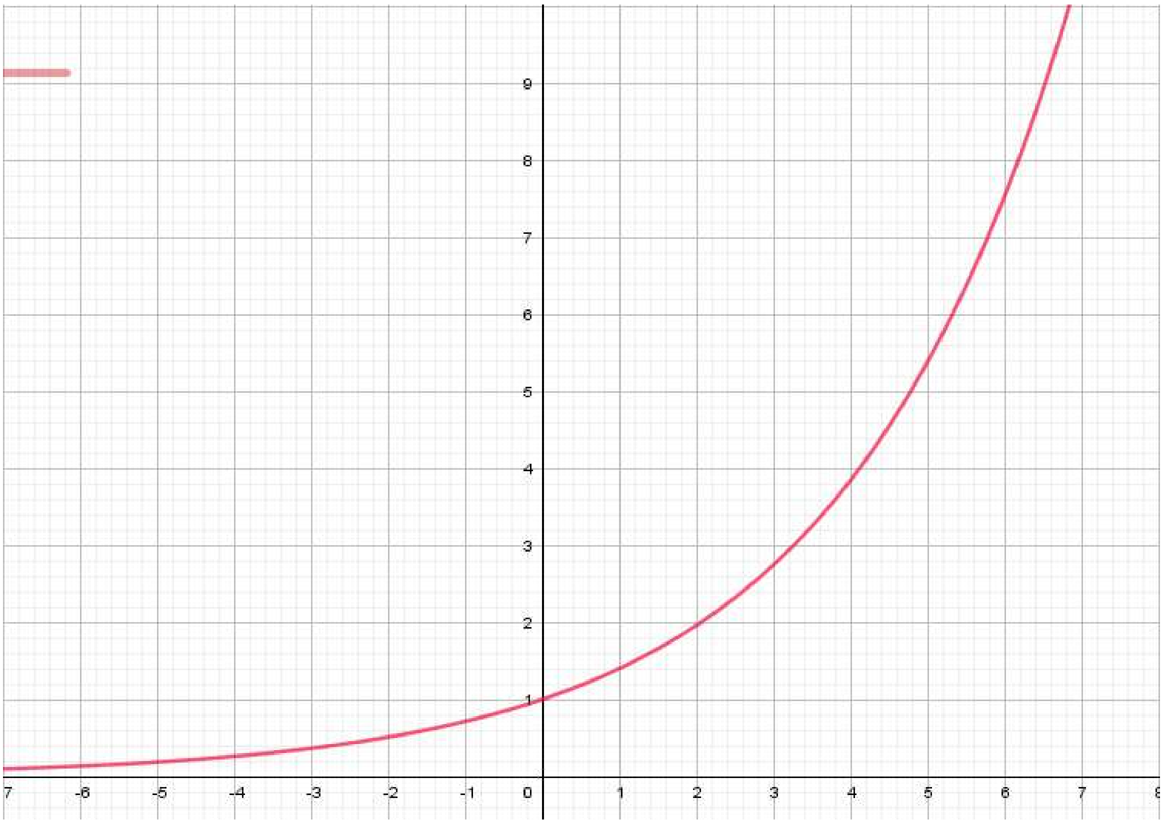


Figura 8.1: Gráfico de função exponencial crescente, feito pelo autor usando GeoGebra

Conforme podemos notar, caso o aluno "trace" o desenho do gráfico, ele pode desenhá-lo sem interrupção alguma, levando-o a intuir a ideia de continuidade, mencionada na definição 8.6. Agora, observe o gráfico da função exponencial de outra forma:

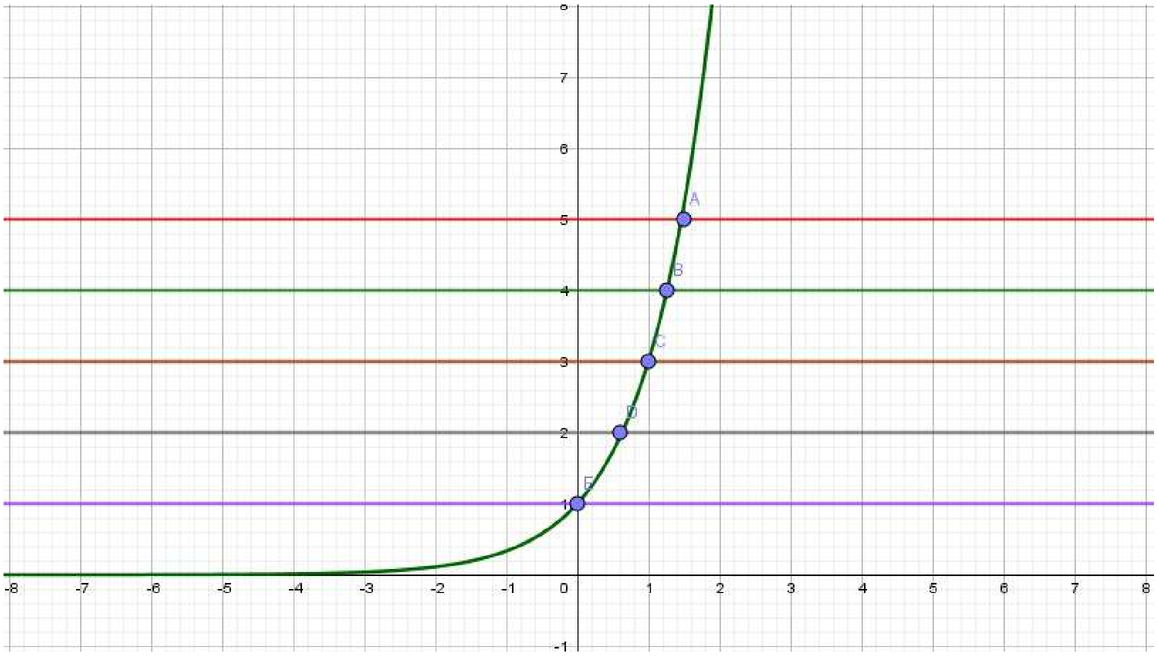


Figura 8.2: Gráfico de função exponencial com $a > 1$, feito pelo autor usando GeoGebra

Observando o gráfico acima, note que qualquer reta pertencente ao 1° e 2° quadrantes e paralela ao eixo x, "toca" o gráfico de f ao menos em um ponto, induzindo o aluno a identificar a sobrejetividade da função exponencial embora o desenho do gráfico seja limitado pois, se a interseção do gráfico com as retas constantes é não-vazia, segundo a definição 5.7 temos f sobrejetiva.

Por outro lado, note que as constantes que '´tocam" o gráfico, o tocam em um único ponto, que segundo a definição 4.5 temos f injetiva, logo a nosso ponto de vista, nos parece coerente que o gráfico da exponencial pode auxiliar de modo claro a identificar a bijetividade da função exponencial embora tenha seu gráfico limitado, em que identificar essa bijetividade é de suma importância para que possamos definir sua função inversa corretamente, a qual mencionamos na seção 8.3.

8.3 Função logaritmo

Inicialmente, para o professor e os alunos de Ensino Médio, é simples trabalhar equações com potências reais inteiras de expoente racional, que é relativamente simples ao aluno identificar a potência de modo como a base do logaritmo é definida. Agora, tome o seguinte caso particular: será que existe algum $c \in \mathbb{R}$ de forma que $3^c = 4$? Que argumentos o professor poderia explorar em sala de aula para resolver esse problema? Conforme podemos notar, trata-se de um problema simples que pode ser trabalhado em sala de aula, mas que a princípio não é de simples solução por parte dos alunos.

Conforme citamos na seção 8.2, a função exponencial é sobrejetiva em $[0,+\infty)$ e injetiva, logo, pra solucionar o problema colocado anteriormente, sendo $4>0$, existe c tal que $3^c=4$ e, esse $c\in\mathbb{R}$ é único, por conta da injetividade da função exponencial. Segundo a bijetividade da função exponencial, podemos notar que para todos os valores positivos $a,b>0$ de modo que $a\neq 1$, existe um único $c\in\mathbb{R}$ de forma que $a^c=b$, mas existem casos que não é simples determinar valores de c. Com isso, definimos o **logaritmo** de um número real do seguinte modo:

Definição 8.7 (Logaritmo) *O logaritmo de um número real x na base a, com $0<a\neq 1$, é definido do seguinte modo:*

$$\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x; \quad com \quad x\in\mathbb{R}.$$

O conceito de logaritmo assim definido, nos permite explorar potências reais de $\mathbb{R}$ além das racionais, em alguns casos, as potências racionais de a^x são de simples determinação. Porém, o conceito de logaritmo nos permite trabalhar com problemas mais elaborados, como por exemplo, determinar a solução da equação $3^x=4$.

Segundo o Exemplo apresentado na seção 8.3, temos que o valor buscado de x está definido devido ao conceito de logaritmo, mas caso o logaritmo não fosse definido, seria de difícil percepção ao aluno determinar qual seria esse valor, causando um "entrave" quanto à abordagem das potências a^x em sala de aula, dificultando a solução de problemas dessa natureza. Posteriormente na seção 8.3.1, definimos a função logarítmica, que é importante que o professor trabalhe-a de modo adequado, pra que o aluno possa ter uma compreensão melhor quanto ao estudo das potências a^x, com $x\in\mathbb{R}$.

8.3.1 Definição da função logarítmica

Segundo colocamos nos Teoremas 8.12 e 8.2, temos que a função exponencial é bijetiva e, consequentemente será invertível, conforme citamos na seção 7.1. Assim, segundo a definição 7.1, existe uma função $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de forma que:

a) $g(a^x)=x$; para todo $x\in\mathbb{R}_+$;

b) $a^{g(y)}=y$; para todo $y\in\mathbb{R}$.

A função que atende às condições a e b, é justamente a **função logarítmica**, que definimos do seguinte modo:

Definição 8.8 (Função logarítmica) *Seja* $a > 0$ *e diferente de 1. Definimos a* ***função logaritmo*** *de base a como sendo a inversa da função exponencial de base a. E, a simbolizamos da seguinte forma:*

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \log_a x; \quad com \quad x > 0; \quad 0 < a \neq 1$$

Essa função, é a inversa da função exponencial e, cumpre as condições a e b descritas na 7.1. Inclusive, é importante observar que:

$$\log_a a^x = u \in \mathbb{R} \Rightarrow a^u = a^x \Leftrightarrow u = x. \tag{8.37}$$

$$a^{\log_a x} = u \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \log_a x = \log_a u = v \Leftrightarrow a^v = u = x. \tag{8.38}$$

Logo, por (8.37) e (8.38), temos que a função g atende à definição 7.1 e, consequentemente, é inversa da função exponencial.

Assim como a função exponencial, a função logarítmica é contínua pois, sendo g inversa de f, implica que g deve estar definida em todo o domínio $\mathbb{R}_+$ e, assim como a função exponencial, a função logarítmica é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$. Observe o Teorema 8.16:

Teorema 8.16 *A função logarítmica é crescente para a* > 1 *e decrescente se* $0 < a < 1$.

Demonstração. *Tome* $u, v \in \mathbb{R}$ *e sejam* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ *de modo que* $u = \log_a x_1$ *e* $v = \log_a x_2$. *Com isso, dividimos o problema em dois casos:*

- $a > 1$

  Para $a > 1$, conforme vimos na subseção 8.2.1, se $x_1 < x_2$, temos que $a^u < a^v \Rightarrow u < v$, consequentemente, temos $\log_a x_1 < \log_a x_2$ e, g é estritamente crescente.

- $0 < a < 1$

  Por outro lado, tomando $0 < a < 1$, segundo a subseção 8.2.1, temos que $x_1 < x_2$, temos que $a^v < a^u \Rightarrow u < v$, ou seja, $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$ e, consequentemente, g é estritamente decrescente.

■

Conforme o Teorema 8.16, podemos afirmar que a função g, assim como a função f, é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$. Graficamente:

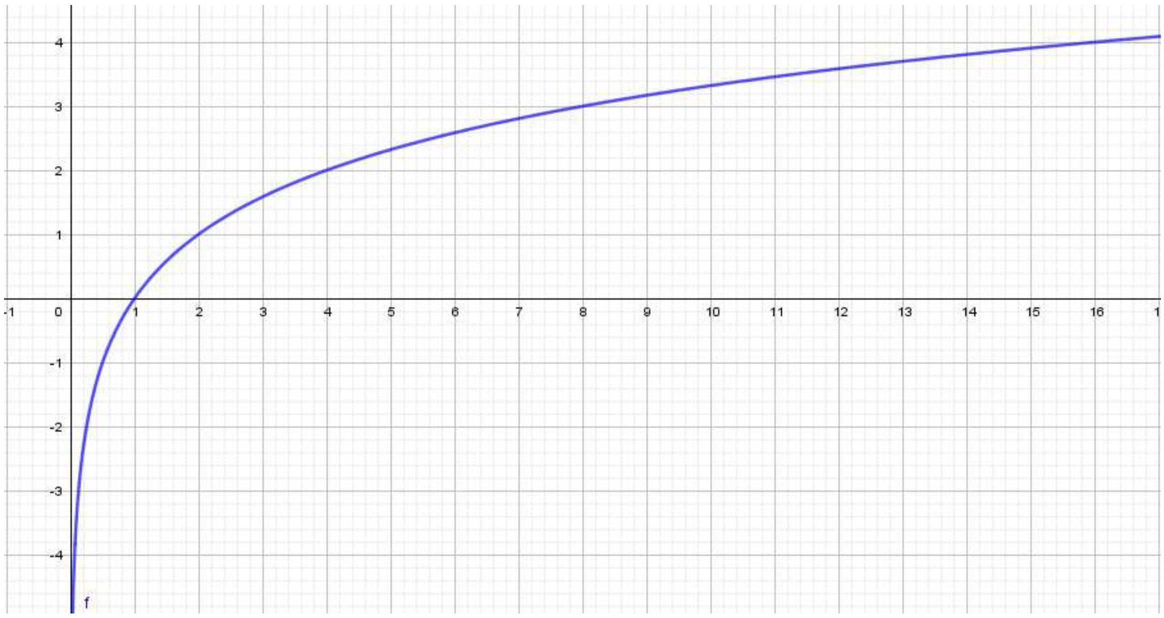


Figura 8.3: Gráfico da função logaritmo para $a > 1$, produzido pelo autor utilizando GeoGebra

Observando a figura 8.3, sem perda de generalidade vemos que o crescimento (decrescimento) da função são relativamente simples de se identificar por meio do gráfico, permitindo ao aluno compreender com clareza o crescimento (decrescimento) da função, em relação à identificação por meio de cálculos algorítmicos, que embora tenham uma consistência matemática mais firme, muitas vezes não são de fácil compreensão por parte do aluno.

Por fim, na seção 8.4, faremos uma breve análise sobre como os livros didáticos abordam o conceito de função exponencial logarítmica, abordando alguns pontos e fazendo sugestões sobre como os autores poderiam explanar esse assunto, com o intuito de auxiliar o professor a trabalhar adequadamente esse conceito em sala de aula.

8.3.2 Simetria entre os gráficos das funções logarítmica e exponencial

Nessa seção, discutiremos um pouco sobre a simetria entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica, em que sendo ambas as funções inversas uma da outra, seus gráficos também são simétricos em relação à reta $y = x$, conforme colocamos na seção 7.2 e, essa propriedade também pode ser explorada e discutida em sala de aula, auxiliando o aluno a compreender melhor a conexão existente entre as duas funções e, permitindo ao aluno compreender melhor como esboçar o gráfico de funções inversas.

Nas figuras 8.4 e 8.5, esboçamos os gráficos das funções exponencial e logaritmo para $a > 1$ e para $0 < a < 1$, em que é visível observar a simetria dos gráficos em relação à reta $y = x$. Observe:

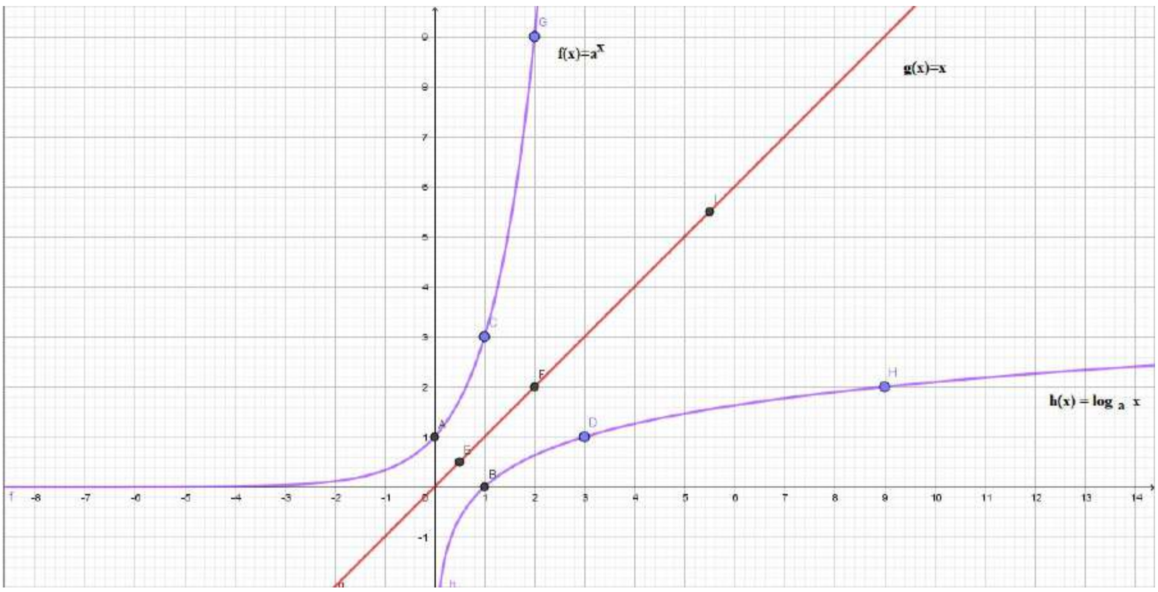


Figura 8.4: Simetria entre os gráficos das funções exponencial e logaritmo, para $a > 1$: Feito pelo autor usando GeoGebra

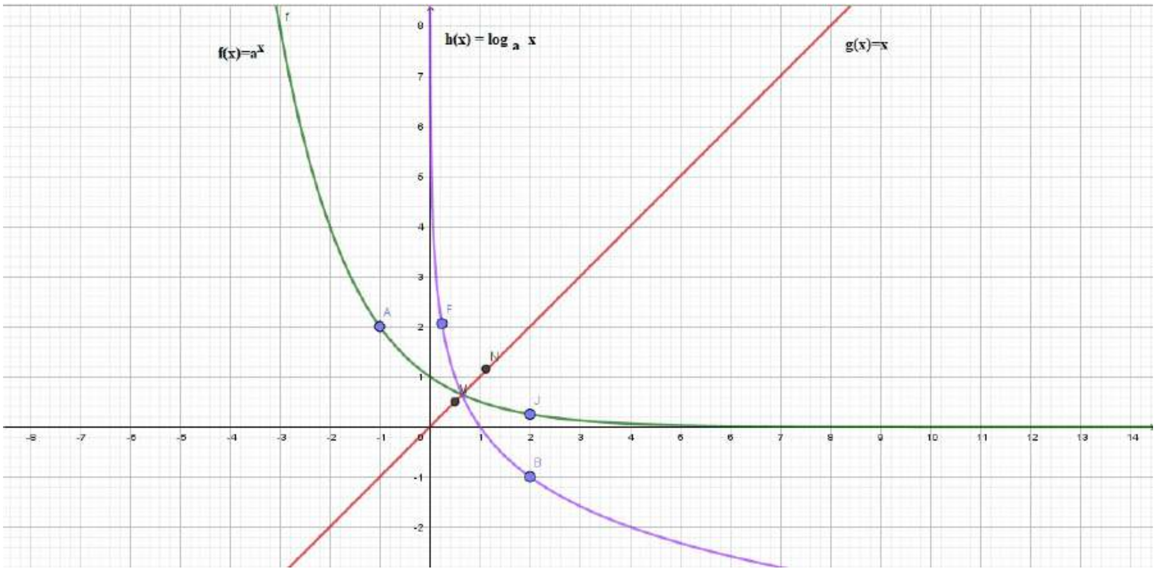


Figura 8.5: Simetria entre os gráficos das funções exponencial e logaritmo, para $0 < a < 1$: Feito pelo autor usando GeoGebra

A simetria entre os gráficos da exponencial e da função logarítmica, conforme citamos na seção 7.2, permite ao professor explorar essa simetria a trabalhar o esboço do gráfico da função logaritmo, a partir do gráfico da exponencial em que o aluno, ao explorar esse recurso gráfico, tende a compreender melhor como essas funções se comportam no plano $\mathbb{R}^2$ e, observar melhor a relação existente entre elas.

8.4 Como os livros didáticos trabalham os conceitos de função exponencial e logarítmica?

Nesta seção, faremos uma análise sobre como os livros didáticos abordam os conceitos de função exponencial e logarítmica, buscando fazer algumas observações sobre a forma como os autores abordam esses conceitos e, tomamos três livros como amostra, cuja nomenclatura colocamos por Livro 1, Livro 2 e Livro 3.

8.4.1 Análise do Livro 1

O Livro 1 define função exponencial da seguinte forma:

4 Função exponencial

Vamos agora estudar a **função exponencial** definida por $f(x) = a^x$.

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ representada por $f(x) = a^x$ para todo x real.

Fique atento!
$\mathbb{R}^*_+$ é o símbolo que indica o conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$

b) $y = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = (0,4)^x$

e) $f(x) = (\sqrt{2})^x$

f) $f(x) = 10^x$

Figura 8.6: Definição de função exponencial - Livro 1

Conforme podemos notar, a definição utilizada pelo autor é definida corretamente, de modo claro e de boa compreensão por parte do leitor, o que a nosso ponto de vista é de grande valia. Posteriormente, o autor faz menção às seguintes propriedades:

Observando essas tabelas e esses gráficos, concluímos que:

- o gráfico da função exponencial não toca o eixo das abscissas, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor zero (não existe x real tal que $f(x) = 0$) e intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1);
- o gráfico de $f(x) = a^x$ não tem pontos nos quadrantes III e IV;
- quando $a > 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um crescimento lento enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acentuado;
- a função exponencial é definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^*_+$, logo o seu domínio é $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}^*_+$. Como o conjunto imagem também é $\mathbb{R}^*_+$, a função exponencial é sobrejetiva [$CD(f) = Im(f)$]. Então, temos $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}^*_+$ e $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$;
- elementos diferentes do domínio de f têm imagens diferentes no contradomínio de f [$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$]. Logo, a função exponencial é injetiva;
- como a função exponencial é sobrejetiva e injetiva ela é bijetiva;
- por ser injetiva, $f(x_1) = f(x_2)$ somente se $x_1 = x_2$, isto é, se $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$;
- a função exponencial pode ser crescente ou decrescente;
- valem as seguintes propriedades para a função exponencial:

$f(1) = a^1 = a$

$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$, ou seja, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$f(nx) = a^{nx} = (a^x)^n = (f(x))^n$, ou seja, $f(nx) = (f(x))^n$

Figura 8.7: Propriedades da função exponencial - Livro 1

Entre as propriedades citadas logo acima, o autor coloca algumas que são pertinentes à bijetividade da função exponencial, que são importantes a se mencionar e, conforme vimos na figura 7.4, o autor associa a bijetividade de uma função ao conceito de função inversa, o que a nosso ponto de vista é adequado. Posteriormente, o autor aborda os conceitos de logaritmo e de função logarítmica do seguinte modo:

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo de b na base a**. Podemos representar esta definição em símbolos: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, com a e b positivos e $a \neq 1$.

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c \begin{cases} c\text{: logaritmo} \\ a\text{: base de logaritmo} \\ b\text{: logaritmando} \end{cases}$	$a^c = b \begin{cases} b\text{: potência} \\ a\text{: base da potência} \\ c\text{: expoente} \end{cases}$

Fique atento!
Quando dizemos **logaritmo**, estamos nos referindo a um número.

Veja mais alguns exemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$

d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Observações:

1ª) *Condições de existência do logaritmo*

Pela definição,

$$\log_a N \text{ existe quando e somente quando } \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

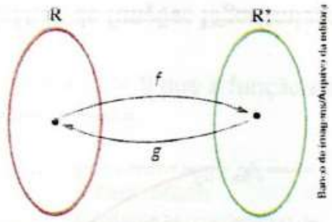
Figura 8.8: Definição de logaritmo - Livro 1

Definição da função logarítmica

> A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e $a \neq 1$.

Fique atento!
A função logarítmica é a inversa da função exponencial de mesma base.

Observe que $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, tem a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$. A sua inversa $g \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \log_a x$, tem a propriedade $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$.



Domínio da função logarítmica: $\mathbb{R}_+^*$
Imagem da função logarítmica: $\mathbb{R}$

Dadas as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, vimos que g é a inversa de f, pois:

- $f(g(x)) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x$
- $g(f(x)) = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x$

como estudamos na página anterior.

As funções logarítmicas mais usadas são aquelas cuja base a é maior do que 1. Particularmente, as de base 10 (logaritmos decimais), as de base 2 (logaritmos binários) e as de base **e** (logaritmos naturais).

São exemplos de função logarítmica as funções de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x) = \log_2 x$

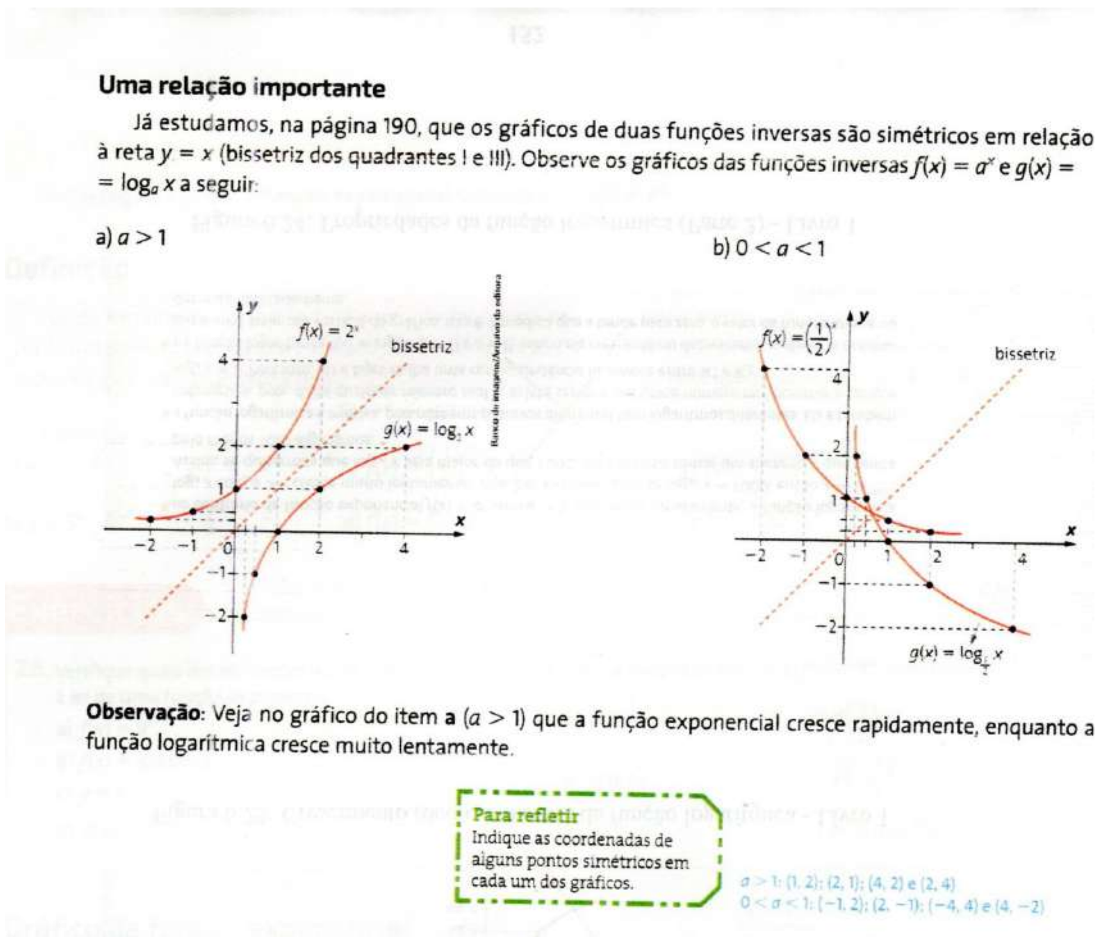
b) $g(x) = \log_{10} x = \log x$

c) $h(x) = \log_e x = \ln x$

d) $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Figura 8.9: Definição de função logarítmica - Livro 1

Conforme podemos observar logo acima, o autor define a função logarítmica como inversa da exponencial, mostrando a relação existente entre as funções exponencial e logarítmica, utilizando corretamente o conceito de função inversa, a qual mencionamos na seção 7.1. Por fim, o autor faz menção à simetria entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica do seguinte modo:



Uma relação importante

Já estudamos, na página 190, que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes I e III). Observe os gráficos das funções inversas $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ a seguir:

a) $a > 1$

b) $0 < a < 1$

Observação: Veja no gráfico do item a ($a > 1$) que a função exponencial cresce rapidamente, enquanto a função logarítmica cresce muito lentamente.

Para refletir
Indique as coordenadas de alguns pontos simétricos em cada um dos gráficos.

$a > 1$: (1, 2); (2, 1); (4, 2) e (2, 4)
$0 < a < 1$: (−1, 2); (2, −1); (−4, 4) e (4, −2)

Figura 8.10: Simetria entre os gráficos das funções exponencial e logaritmo - Livro 1

Aqui, pra concluir, vemos de modo bastante positivo a colocação por parte do autor citando a simetria entre os gráficos, que colocamos na subseção 8.3.2 como algo relevante a se abordar, auxiliando ao aluno quanto a seu esboço, em que isso é importante e o professor deve estar atento quanto a abordagem desse tema em sala de aula. Logo, a nosso ponto de vista, afirmamos que o autor trabalhou os conceitos de função exponencial e logarítmica adequadamente, embora pudesse definir o logaritmo com maior objetividade, auxiliando o aluno a compreender essa definição com maior clareza.

8.4.2 Análise do Livro 2

O Livro 2 inicialmente, define função exponencial da seguinte maneira:

Função exponencial

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x)=a^x$ ou $y=a^x$, com $a>0$ e $a \neq 1$, é denominada **função exponencial**.

As funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, definidas por $f(x)=b \cdot a^x + c$, com $a>0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$ podem ser denominadas do **tipo exponencial**.

Exemplos

- $f(x)=7^x$
- $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $h(x)=(\sqrt{6})^x$
- $m(x)=(0,5)^x$

Na definição, as restrições $a>0$ e $a \neq 1$ são necessárias, pois, caso contrário não seria possível caracterizar uma função exponencial.

- Se $a=1$, então $f(x)=a^x$ seria uma função constante.
  $f(x)=1^x=1$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- Se $a \leq 0$, então $f(x)=a^x$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$, como desejado. Exemplos:
  Para $a=-3$ e $x=\frac{1}{2}$, temos $f\left(\frac{1}{2}\right)=(-3)^{\frac{1}{2}}$ e $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.
  Para $a=0$ e $x=-7$, temos $f(-7)=0^{-7}$ e 0^{-7} não está definido em $\mathbb{R}$.

Figura 8.11: Definição de função exponencial - Livro 2

Assim como o Livro 1, o autor define função exponencial de modo claro e sucinto, sem que hajam confusões por parte do leitor mas, aqui cabe uma ressalva: por meio de alguns exemplos, o autor consegue mostrar com uma clareza maior porque a base da função exponencial deve ser positiva e diferente de 1, o que a nosso ponto de vista é importante para que essa função seja bem definida. Posteriormente, o autor cita as seguintes propriedades:

De maneira geral, temos que:

- uma função exponencial é **crescente** se $a>1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y aumentam, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$.
- uma função exponencial é **decrescente** se $0<a<1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$.
- o gráfico de uma função exponencial é denominado **curva exponencial**, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0,1)$ e não intersecta o eixo x, sendo definido acima desse eixo.

Figura 8.12: Crescimento e decrescimento da função exponencial - Livro 2

O autor ao definir função exponencial, determina seus intervalos de crescimento e decrescimento, mas não deixa claro ao leitor a bijetividade da função exponencial, em que mesmo a definindo com contradomínio $\mathbb{R}_+$, poderia justificar ao leitor por que a função é bijetiva, condição essencial para que se defina corretamente a função logarítmica. Posteriormente, o autor define logaritmo da seguinte maneira:

Definição

Antes de definirmos precisamente o que é logaritmo, resolveremos algumas equações exponenciais.

- $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

  Dizemos que 4 é o **logaritmo** de 81 na base 3, que pode ser indicado por $\log_3 81 = 4$.

- $5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

  Dizemos que -3 é o **logaritmo** de $\frac{1}{125}$ na base 5, que pode ser indicado por $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

Sejam os números reais positivos *a* e *b*, com $a \neq 1$. Denomina-se logaritmo de *b* na base *a* o expoente *c*, tal que $b = a^c$, isto é:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

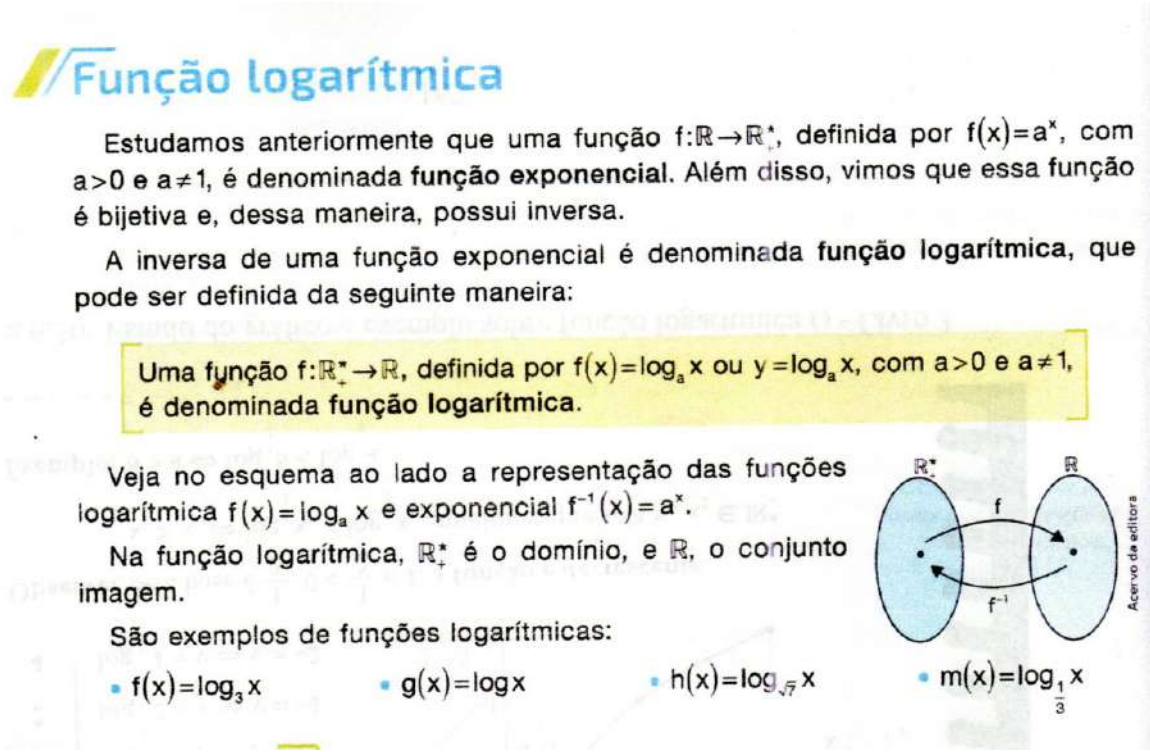
Nessa representação, *a* é a base do logaritmo, *b* é o logaritmando e *c* é o logaritmo.

Exemplos

- $\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$
- $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
- $\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$
- $\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1$

Figura 8.13: Definição de logaritmo - Livro 2

O Livro 2, cita de modo claro a existência do logaritmo, mas não relaciona a existência do logaritmo com a bijetividade da função exponencial e, conforme colocamos anteriormente, permitiria ao leitor compreender existência e unicidade do logaritmo com uma clareza maior. Posteriormente, o autor define a função logarítmica da seguinte maneira:



Função logarítmica

Estudamos anteriormente que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x)=a^x$, com $a>0$ e $a\neq 1$, é denominada **função exponencial**. Além disso, vimos que essa função é bijetiva e, dessa maneira, possui inversa.

A inversa de uma função exponencial é denominada **função logarítmica**, que pode ser definida da seguinte maneira:

Uma função $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\log_a x$ ou $y=\log_a x$, com $a>0$ e $a\neq 1$, é denominada **função logarítmica**.

Veja no esquema ao lado a representação das funções logarítmica $f(x)=\log_a x$ e exponencial $f^{-1}(x)=a^x$.

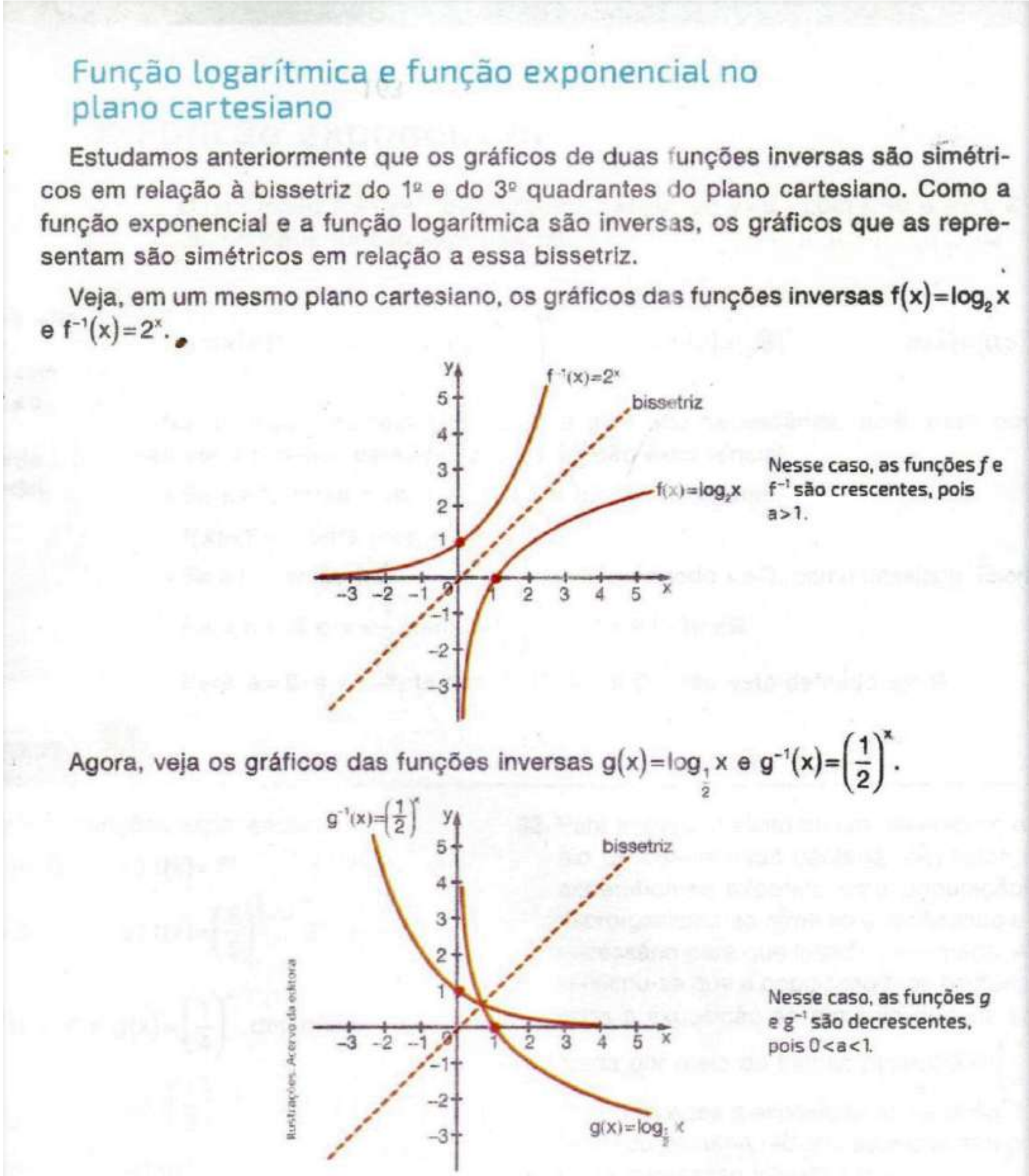
Na função logarítmica, $\mathbb{R}_+^*$ é o domínio, e $\mathbb{R}$, o conjunto imagem.

São exemplos de funções logarítmicas:

- $f(x)=\log_3 x$
- $g(x)=\log x$
- $h(x)=\log_{\sqrt{7}} x$
- $m(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

Figura 8.14: Definição de função logarítmica - Livro 2

Aqui o autor cita que a função exponencial é bijetiva e possui inversa, o que é correto mas, não foi mencionado anteriormente e, ao mencionar isso, o autor preferiu definir a função logarítmica desse modo, mas acaba não fazendo a conexão com o conceito de função inversa, que a nosso ponto de vista deveria ter sido explorado pois, permitiria ao aluno compreender com clareza o significado da expressão $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, decorrente da definição de função inversa, em que a função exponencial têm domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}_+$. Por fim, o autor aborda a simetria entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica da seguinte forma:



Função logarítmica e função exponencial no plano cartesiano

Estudamos anteriormente que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. Como a função exponencial e a função logarítmica são inversas, os gráficos que as representam são simétricos em relação a essa bissetriz.

Veja, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções inversas $f(x)=\log_2 x$ e $f^{-1}(x)=2^x$.

Nesse caso, as funções f e f^{-1} são crescentes, pois $a>1$.

Agora, veja os gráficos das funções inversas $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ e $g^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Nesse caso, as funções g e g^{-1} são decrescentes, pois $0<a<1$.

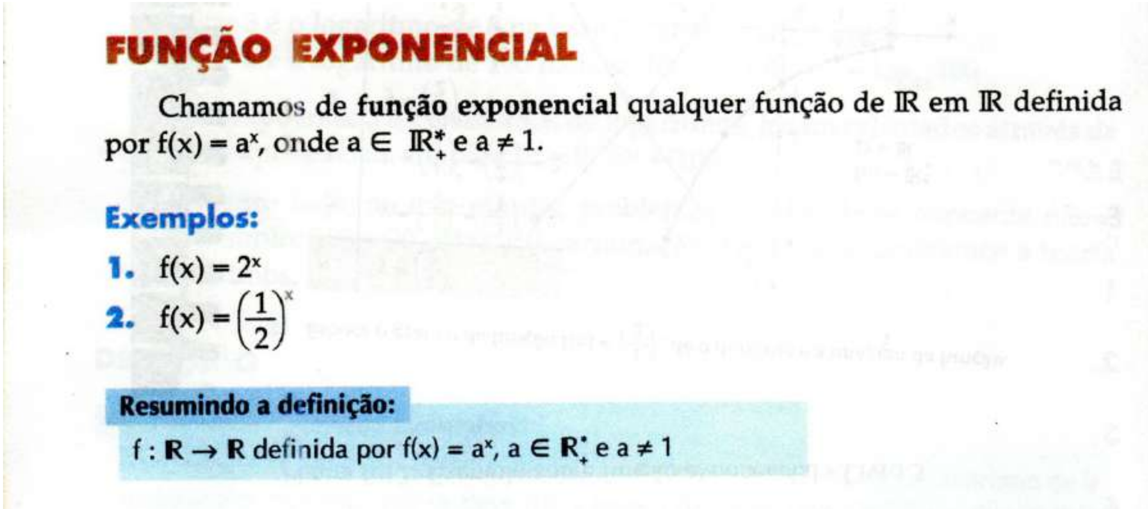
Ilustrações: Acervo da editora

Figura 8.15: Simetria entre os gráficos das funções logarítmica e exponencial - Livro 2

Por fim, nota-se que o autor faz clara menção como os gráficos das funções exponencial e logarítmica são simétricos em relação à reta $x = y$ e, conforme citamos anteriormente, é importante pra que o aluno compreenda adequadamente como construir o gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da exponencial, explorando a ideia de simetria, o que a nosso ponto de vista é de grande importância pois, permite ao aluno entender o comportamento e esboçar o gráfico da função logarítmica com maior facilidade.

8.4.3 Análise do Livro 3

O Livro 3, inicialmente define função exponencial da seguinte forma:



FUNÇÃO EXPONENCIAL

Chamamos de **função exponencial** qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

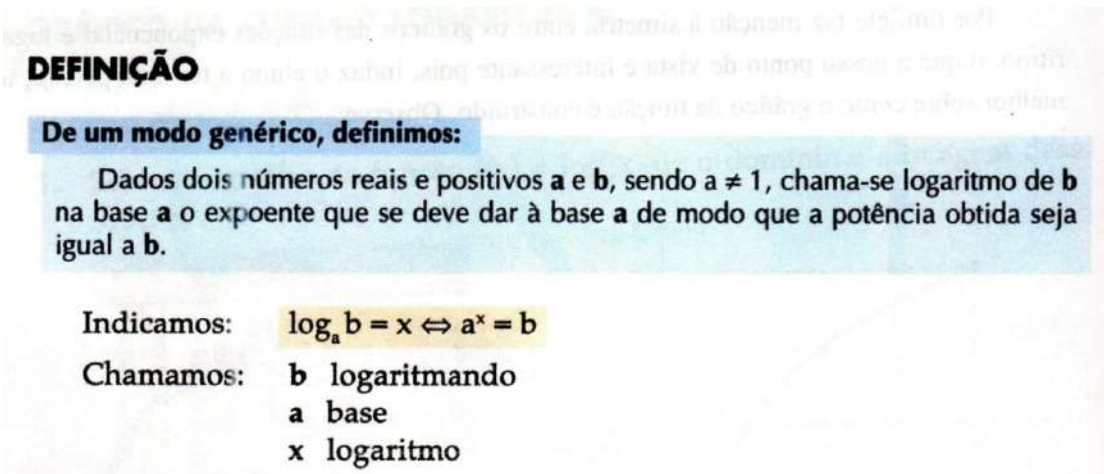
1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Resumindo a definição:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$

Figura 8.16: Definição de função exponencial - Livro 3

Observando a definição de função exponencial, o autor define-a corretamente, mas cabe aqui tecer um comentário: Tomando $\mathbb{R}$ como contradomínio, a função exponencial nesse caso não é sobrejetiva e, de que maneira o professor definiria a inversa da função exponencial sem mencionar sua bijetividade? Logo, a nosso ponto de vista não seria interessante definir função exponencial desse modo. Por outro lado, o autor define o logaritmo da seguinte forma:



DEFINIÇÃO

De um modo genérico, definimos:

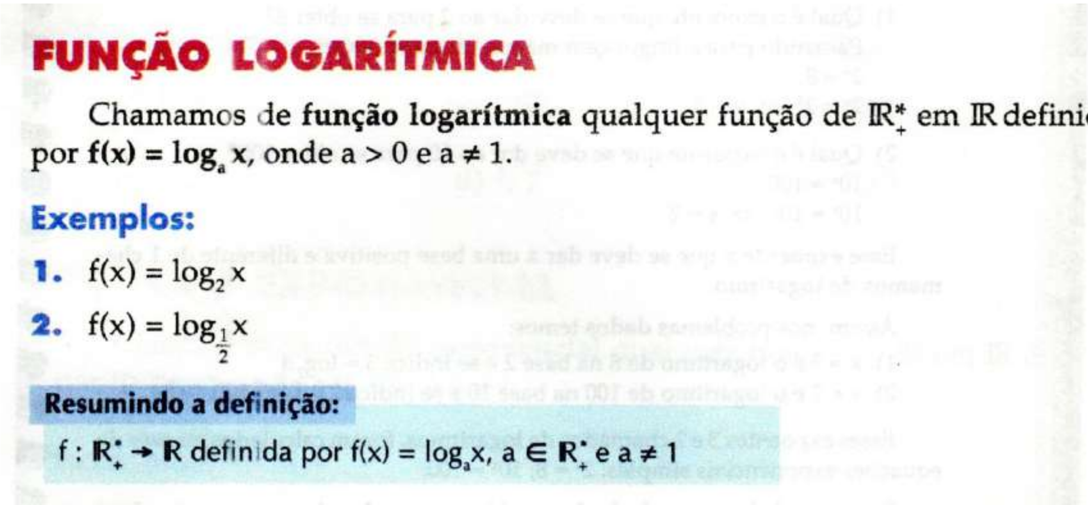
Dados dois números reais e positivos **a** e **b**, sendo $a \neq 1$, chama-se logaritmo de **b** na base **a** o expoente que se deve dar à base **a** de modo que a potência obtida seja igual a **b**.

Indicamos: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Chamamos: **b** logaritmando
a base
x logaritmo

Figura 8.17: Definição de logaritmo - Livro 3

Conforme podemos notar, o autor define o logaritmo como expoente, mas não associa sua existência à bijetividade da função exponencial, o que a nosso ponto de vista é inadequado pois, o leitor precisa saber de modo claro a razão da existência desse expoente, além da justificativa de sua unicidade. Por fim, o autor define a função logarítmica da seguinte forma:



FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Chamamos de **função logarítmica** qualquer função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

1. $f(x) = \log_2 x$

2. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Resumindo a definição:

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$

Figura 8.18: Definição de função logarítmica - Livro 3

Observando a definição colocada acima, vemos que o autor define função logarítmica de modo breve, sem associar o conceito de função logarítmica à definição de função inversa e, como o autor adotou $\mathbb{R}$ como contradomínio da função exponencial, o que a nosso ponto de vista é um problema, pois caso o autor tomasse $\mathbb{R}_+$ como domínio, ou seja, o autor não definiu a função com a clareza que poderia explorar.

Por fim, o autor não menciona a simetria existente entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica, o que a nosso ponto de vista é um problema pois, permitiria ao aluno observar e identificar o esboço do gráfico da função logarítmica com uma clareza maior.

Capítulo 9

Conclusões

Quanto ao estudo das funções, bastante requisitado nos currículos escolares Brasileiros, concluímos que o melhor modo de definir uma função é apresentando-a como um terno, composto por três elementos: domínio, contradomínio e lei de formação. Além da função ser definida por esses três elementos, o professor deve deixar claro que é importante estar atento ao modo como estão colocados, em que a lei de formação admite um papel importante, que é de fazer a "ponte" entre os elementos do domínio e do contradomínio e, caso essa ponte não esteja bem definida, não se pode definir adequadamente uma função.

No tocante às funções injetivas e sobrejetivas, observamos que se tratam de temas de raciocínio um pouco elaborado, "fugindo" da trivialidade apresentada pelos livros didáticos, em que estas funções podem ser identificadas de vários modos, permitindo ao aluno identificar essas características em exemplos de funções mais complexas, despertando a mente do mesmo para uma melhor compreensão dessas funções e, no Capítulo 7, vimos que uma função para ser invertível, obrigatoriamente deve ser bijetiva, ou seja, injetiva e sobrejetiva.

Além disso, vimos que para determinar corretamente a inversa de uma função, devemos estar atentos não só à lei de formação, mas também ao modo como domínio e contradomínio são definidos, em que duas funções embora possuam mesma lei de formação, mas caso domínio ou contradomínio sejam distintos, consequentemente suas inversas também serão distintas. Aqui, fazemos uma consideração quanto aos livros didáticos, em que muitos autores ao abordar o conceito de função inversa, enfatizam pouco o uso de exemplos e, quando os apresentam, "determinam" a inversa fazendo apenas mudança de variável, explorando a lei de formação de modo equivocado e, consequentemente, determinando as inversas de forma equivocada, sem prestar atenção ao modo como domínio e contradomínio estão definidos.

No Capítulo 8, ao abordar os estudos de função exponencial e logarítmica, é importante o professor observar que para definir logaritmos corretamente, é necessário explorar as definições de função inversa e função exponencial, pois o aluno tende a compreender com maior clareza o que vêm a ser logaritmo. No tocante aos livros didáticos, alguns autores abordam as definições corretamente, mas estabelecem poucas conexões entre os conteúdos abordados e, a nosso ponto de vista, é necessário que os autores estejam atentos a isso, além de apresentar melhor os exemplos pois, ao mostrar melhores exemplos, o aluno tende a compreender os temas de forma mais clara e, para que isso ocorra, o autor deve explorar da melhor forma essas conexões, favorecendo a compreensão por parte do aluno, apresentando um sentido mais claro quanto ao estudo das funções apresentadas neste trabalho.

Por fim, acreditamos que a escrita deste trabalho teve a intenção de contribuir no tocante ao Ensino da Matemática no Brasil, por explorar ensino e estudo de temas que talvez não sejam abordados de modo aprofundado na formação acadêmica do professor e, com a leitura desse texto por parte de alguns colegas professores, talvez possamos apresentar aos alunos uma Matemática menos "complicada" e mais "conectada", explorando as conexões existentes entre os temas abordados em sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G.; *Introdução à Análise Matemática*, 2 ed. São Paulo: EDGARD BLUCHER, 1999.

[2] LIMA,E.L. et al; *A Matemática do Ensino Médio*, Vol 1, 8 ed, SBM,2005.

[3] LIMA,E.L. et al; *A Matemática do Ensino Médio*, Vol 2, 5 ed, SBM,2004.

[4] LIMA,E.L. et al; *A Matemática do Ensino Médio*, Vol 4, 1 ed, SBM,2007.

[5] LIMA, E.L.; *Análise Real*, Vol.1, 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA,2006.

[6] LIMA, E.L.; *Curso de Análise - Projeto Euclides*, Vol 1, 7 ed. IMPA, 1976.

[7] LIMA, E.L. et al; *Exame de textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*, 1 ed. SBM,2001.

[8] LIMA,E.L.; *Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT*, 1 ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM,2013.

[9] MARQUES, C.P.; *A importância da Análise Real na Formação do Professor de Matemática do Ensino Médio: O Caso das Sequências Numéricas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - PROFMAT / UFCG. Campina Grande - PB, 2019.

[10] MEC; *Base Nacional Comum Curricular*, Brasil,2017.

[11] NETO, A.C.M.; *Tópicos de Matemática Elementar - Introdução à Análise*, Vol 3, 2 ed. Rio de Janeiro: SBM,2013.

[12] NETO, A.C.M.; *Tópicos de Matemática Elementar - Polinômios*, Vol 6, 2 ed. Rio de Janeiro: SBM,2013.

[13] OLIVEIRA,A.M., SILVA, A; *Biblioteca da Matemática Moderna*, Vol.2, 2 ed. São Paulo - SP: Editora LISA, 1969.

[14] SEE - PE; *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco*, 2012.

[15] STEWART,J.; *Cálculo*, Vol 1, 5 ed. Cengage Learning, 2006.