



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

# Dinâmica simbólica da ferradura de Smale

**Sávio Guilherme de Mello Cunha**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins**

Barra do Garças - MT

agosto de 2020

# Dinâmica simbólica da ferradura de Smale

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Sávio Guilherme de Mello Cunha e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 28 de agosto de 2020.

Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins  
Orientador

## Banca examinadora:

Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins  
Prof. Dr. Hudson Pina de Oliveira  
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

C972d Cunha, Sávio Guilherme de Mello.  
Dinâmica Simbólica da Ferradura de Smale / Sávio Guilherme  
de Mello Cunha. -- 2020  
xi, 53 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Tibério Bittencourt de Oliveira Martins.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de  
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de  
Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia,  
2020.  
Inclui bibliografia.

1. Sistemas dinâmicos discretos. 2. Dinâmica simbólica. 3.  
Caos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT  
UFMT/CUA/ICET - BARRA DO GARÇAS

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Dinâmica Simbólica da Ferradura de Smale

AUTOR: Mestrando Sávio Guilherme de Mello Cunha

Dissertação defendida e aprovada em 28 de agosto de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Tibério Bittencourt de Oliveira Martins (Presidente Banca / Orientador) - Universidade Federal de Mato Grosso
2. Doutor Hudson Pina de Oliveira (Membro Interno) - Universidade Federal de Mato Grosso
3. Doutor Romildo da Silva Pina (Membro Externo) - Universidade Federal de Goiás

Barra do Garças, 28/08/2020.



Documento assinado eletronicamente por TIBERIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 09/09/2020, às 20:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por Romildo da Silva Pina, Usuário Externo, em 11/09/2020, às 08:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por HUDSON PINA DE OLIVEIRA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 17/09/2020, às 13:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador 2821673 e o código CRC 34E7FDE7.

*A todos que me apoiaram durante esta  
jornada.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente e acima de todos a Deus que me guia e sempre abençoou em todos os momentos de minha vida.

Agradeço aos meus pais Walkiria Divina de Mello Cunha e Pedro Perreira da Cunha Primo que são as pessoas mais importantes de minha vida e sempre me incentivaram e deram todo o apoio para que conseguisse completar meus estudos.

Agradeço a meus colegas de mestrado em especial a Judson Cascaes Matos, Márcio Contini Santana e Ângela Maria Leobet por todos os sorrisos e lágrimas compartilhados nas horas de viagem e estudo.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins, por todo o apoio na dissertação e pela dedicação de me orientar até mesmo no final de semana em suas férias.

Por último agradeço a minha amada esposa que me apoiou em todo o mestrado, e sacrificou nossa lua de mel para que eu pudesse estudar para qualificação.

Sem vocês eu não teria conseguido. Muito obrigado a todos.

# Resumo

A ferradura de Smale é uma aplicação construída tomando um quadrado que é esticado em um retângulo fino e posteriormente dobrado em forma de ferradura. Esta ferradura é sobreposta ao quadrado original e o processo é repetido indefinidamente, fornecendo uma forma geométrica capaz de mostrar a presença da imprevisibilidade na dinâmica discreta a longo prazo. Este trabalho tem como objetivo geral compreender a dinâmica associada à ferradura e sua relação com a dinâmica simbólica. A cada iteração da aplicação ferradura, vários pontos são retirados do quadrado. Estes pontos apresentam uma dinâmica mais simples. Os pontos cujas órbitas permanecem no quadrado formam um conjunto do tipo Cantor e apresentam um comportamento caótico. A dinâmica da família de funções quadráticas  $F_\mu = \mu x(1 - x)$ , para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , em muito se assemelha à aplicação ferradura e também é desenvolvida nesse trabalho. Sua análise é feita através de uma conjugação topológica com a aplicação *shift* no espaço métrico das sequências infinitas de termos 0 e 1.

**Palavras chave:** Sistemas dinâmicos discretos, dinâmica simbólica, caos.

# Abstract

The Smale horseshoe is a map built by taking a square that is stretched in a rectangle on and then folded into a horseshoe shape. This horseshoe is overlapped the original square and the process is repeated indefinitely, providing a geometric shape capable of showing the presence of unpredictability in discrete dynamics. This work has as general objective to understand the dynamics associated with horseshoe and its relation with the symbolic dynamics. At each iteration of the horseshoe map, several points are removed from the square. These points have a simpler dynamic. The points whose orbits remain in the square form a Cantor like set and present a chaotic behavior. The dynamics of the family of quadratic functions  $F_\mu = \mu x(1 - x)$ , with  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , is very similar to the map horseshoe and is also developed in this work. Its analysis is done through a topological conjugation with the shift map in the metric space of the infinite sequences of terms 0 and 1.

**Keywords:** Discrete dynamical systems, symbolic dynamics, chaos



# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de figuras	x
Lista de tabelas	xi
Introdução	1
<b>1 Fundamentação teórica</b>	<b>4</b>
1.1 Noções topológicas em $\mathbb{R}$ . . . . .	4
1.2 Espaços métricos . . . . .	6
1.3 Órbitas . . . . .	9
1.4 Caos . . . . .	12
<b>2 O conjunto de Cantor</b>	<b>14</b>
2.1 A construção do conjunto de Cantor . . . . .	14
2.2 Propriedades do conjunto de Cantor . . . . .	16
<b>3 Dinâmica nas funções quadráticas <math>F_\mu</math></b>	<b>20</b>
3.1 A família de funções quadráticas. . . . .	20
3.2 Dinâmica simbólica . . . . .	29
3.3 Dinâmica simbólica de $F_\mu$ . . . . .	31
<b>4 A ferradura de Smale</b>	<b>36</b>
4.1 A ferradura de Smale . . . . .	36

4.2	Dinâmica simbólica da ferradura de Smale . . . . .	40
4.3	Aplicações ao ensino médio . . . . .	46
4.3.1	Conjunto de Cantor . . . . .	46
4.3.2	Funções quadráticas . . . . .	48
4.4	Considerações finais . . . . .	51
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Lista de Figuras

1	Gráfico e retrato de fase de uma aplicação $f$ . . . . .	2
1.1	Órbita de um ponto eventualmente fixo . . . . .	10
1.2	Iterações de $f$ quando $a : f'(p) = 0$ , $b : 0 < f'(p) < 1$ e $c : -1 < f'(p) < 0$ . . . . .	12
2.1	Construção do conjunto $C_1$ . . . . .	15
2.2	Construção do conjunto $C_2$ . . . . .	15
2.3	Construção do conjunto $C_3$ . . . . .	15
3.1	Gráfico de $F_\mu$ para $1 < \mu < 2$ . . . . .	21
3.2	Iterações de $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ quando a: $1 < \mu < 2$ b: $2 < \mu < 3$ . . . . .	22
3.3	$F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $2 < \mu < 3$ . . . . .	23
3.4	$F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $\mu > 4$ . . . . .	24
3.5	Gráfico de $F_\mu^2$ . . . . .	25
3.6	Extremidades dos intervalos $I_0$ e $I_1$ após uma iteração de $F_\mu$ . . . . .	27
4.1	O estádio D . . . . .	36
4.2	A ferradura de Smale . . . . .	37
4.3	O quadrado $Q$ . . . . .	37
4.4	Pré-imagem de $F(Q) \cap Q$ . . . . .	38
4.5	Transformação $F^2$ . . . . .	39
4.6	Representação simbólica das faixas horizontais em $F$ , $F^2$ e $F^3$ . . . . .	41
4.7	Representação simbólica ampliada das faixas horizontais em $F^3$ . . . . .	42
4.8	Representação simbólica das faixas verticais em $F^{-1}$ , $F^{-2}$ e $F^{-3}$ . . . . .	42
4.9	Representação simbólica dos quadrados em $F^{-2} \cap F^2$ . . . . .	43
4.10	Representação de $I/C_2$ . . . . .	46
4.11	Retrato de fase de $F_2 \circ F_2 \circ F_2(0, 85)$ . . . . .	49

# Lista de Tabelas

3.1	Comportamento da família de funções quadráticas com $1 < \mu < 2$ . . . . .	23
3.2	Comportamento da família de funções quadráticas com $2 < \mu < 3$ . . . . .	24

# Introdução

Segundo Ferreira (2007), na década de 60, Stephen Smale, um matemático estadunidense, explorou a teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos de Poincaré, contribuindo com novas ideias e uma conjectura falsa afirmando que os sistemas dinâmicos tendiam a atingir um comportamento não estranho, ou seja, afirmava que o caos não existia. Após se deparar com um contraexemplo de sua conjectura, Smale investigou o problema chegando a conclusão que de fato sua conjectura estava errada por meio da ferradura de Smale. Esta é uma transformação topológica cuja dinâmica ajuda no entendimento das propriedades dos sistemas dinâmicos. A ferradura em  $\mathbb{R}^2$  é construída tomando um quadrado, em seguida este é esticado em um retângulo e dobrado em forma de ferradura. Esta ferradura é sobreposta ao quadrado original e o processo é repetido infinitas vezes. Esta fornece uma forma geométrica capaz de mostrar a presença da imprevisibilidade da dinâmica a longo prazo em um sistema dinâmico.

Considere uma aplicação  $f : M \rightarrow M$ , onde  $M$  é um espaço métrico. Dado um ponto  $x \in M$ , podemos aplicar  $f$  a este ponto obtendo um novo ponto  $f(x) \in M$ . Se repetirmos o processo, obteremos mais um ponto  $f(f(x)) \in M$ . Continuando esse processo obtemos uma sequência infinita

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

de pontos em  $M$  chamada órbita de  $x$  pela aplicação  $f$ . Para simplificar a notação denotaremos

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x).$$

Analisar a dinâmica de uma aplicação  $f$  é estudar o comportamento de todos os pontos do domínio da aplicação após  $n$  iterações com  $n \in \mathbb{N}$ . Um sistema dinâmico

discreto é a evolução de uma aplicação  $f : M \rightarrow M$ , ao longo do tempo. O objetivo nos sistemas dinâmicos é entender a natureza de todas as órbitas, e identificar o conjunto de órbitas periódicas, eventualmente periódicas, assintóticas, conjunto atrator ou repulsor etc.

O comportamento das iterações de uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  pode ser compreendido de maneira geométrica, observando o gráfico da aplicação  $f$  e seu retrato de fase. O retrato de fase é uma figura, que representa o comportamento das órbitas dos pontos do domínio de  $f$  ao longo do tempo. Vamos construir o retrato de fase da aplicação  $f : M \rightarrow M$  para  $M = \mathbb{R}$ . Para construí-lo, junto do gráfico da aplicação  $f$  é traçado o gráfico da aplicação identidade. Em seguida, marca-se um seguimento de reta  $s_1$ , paralelo ao eixo  $y$ , que liga um ponto  $x \in M$ , no gráfico  $y = x$ , até sua imagem  $f(x)$ , no gráfico de  $f$ . Posteriormente é traçado um novo seguimento de reta  $s_2$ , paralelo ao eixo  $x$ , que liga a imagem  $f(x)$  no gráfico de  $f$ , com o ponto  $f(x)$  no gráfico  $y = x$ . Continuamos este processo para compreendermos o comportamento da órbita de  $x$ . O Retrato de fase é construído abaixo do gráfico de  $f$ , nele é marcado a trajetória dos pontos  $x, f(x), f^2(x), \dots$ , que foram ligados no gráfico de  $f$ , pelos seguimentos de reta  $s_1, s_2, \dots$ , conforme figura 1.

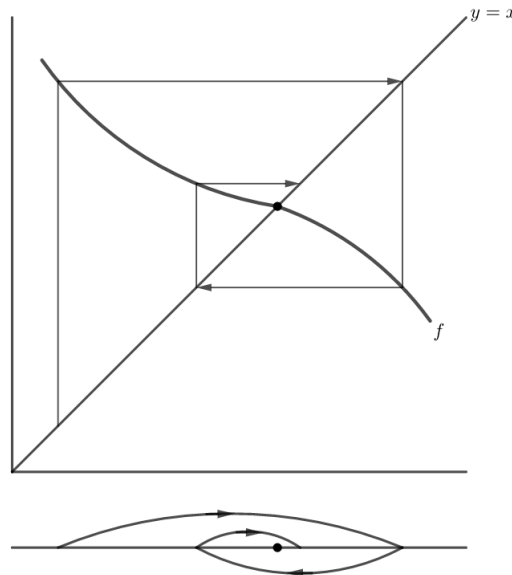


Figura 1: Gráfico e retrato de fase de uma aplicação  $f$

O conjunto de Cantor é o conjunto construído retirando-se os terços médios do intervalo  $[0, 1]$ . Ele é muito importante para o estudo da dinâmica na ferradura, de fato, a dinâmica mais interessante da função ferradura está limitada ao conjunto de Cantor. Nele a ferradura é caótica. Um sistema dinâmico é caótico em  $\mathbb{R}$  quando a órbita de dois

pontos arbitrariamente próximos se comportam de maneiras diferentes, isto é, pequenas mudanças nas condições iniciais de um sistema resulta em grandes diferenças após um número suficientemente grande de iterações.

Para construir as bases necessárias ao estudo da dinâmica discreta de uma função, o primeiro capítulo se dedica a: definir conceitos topológicos básicos em  $\mathbb{R}$ , ao estudo de espaços métricos, órbitas e do caos. Uma vez bem estabelecidos estes fundamentos, passamos ao estudo do conjunto mais importante deste trabalho, o conjunto de Cantor, o segundo capítulo tem como objetivo sua construção e a demonstração de suas principais propriedades. No terceiro capítulo, investigamos o comportamento da família de funções quadráticas e associamos sua dinâmica ao conjunto de sequências infinitas de 0's e 1's. No capítulo final é descrito o comportamento da função ferradura de Smale, é construída a sua dinâmica simbólica, e seu comportamento é associado por meio de um homeomorfismo com o espaço das sequências bi-infinitas.

# Capítulo 1

## Fundamentação teórica

### 1.1 Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Esta seção se dedica a definir uma lista de conceitos e propriedades topológicas elementares referentes a subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . São eles: ponto interior a um conjunto, conjunto aberto, ponto aderente e ponto acumulação, conjunto fechado, fecho, conjunto compacto, vizinhança de um ponto, interseção e união de conjuntos abertos e fechados, conjunto denso, cobertura e conjunto de medida nula (Lima, 2009a). Para isso, admite-se que as definições de intervalo aberto, intervalo fechado e de sequência em  $\mathbb{R}$  sejam conhecidas.

**Definição 1.** *Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , um ponto  $x \in A$  é dito **ponto interior** de  $A$  quando existe um número  $\epsilon > 0$ , tal que o intervalo aberto  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  está contido em  $A$ . O conjunto dos pontos  $x \in A$  interiores a  $A$  é representado por  $\text{int}(A)$  e é chamado o interior do conjunto  $A$  e intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  é dito ser uma **vizinhança** de  $a$ .*

**Definição 2.** *Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  chama-se **aberto** quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando  $A = \text{int}(A)$ .*

**Exemplo 1.** *Todo intervalo aberto é um conjunto aberto.*

Dizer que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é aberto é equivalente a dizer que todo ponto  $a \in A$  possui uma vizinhança contida em  $A$ .

**Definição 3.** *Diz-se que um ponto  $a$  é **aderente** a um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando  $a$  é limite de alguma sequência  $(x_n)$  de pontos  $x_n \in X$ . O conjunto formado por todos os pontos aderentes a  $X$  é dito o **fecho** de  $X$ .*



**Exemplo 2.** *Todo  $a \in X$  é um ponto aderente a  $X$ .*

**Exemplo 3.** *No intervalo aberto  $I = (0, 1)$ ,  $1 \notin I$ , mas é um ponto aderente a  $I$  já que a sequência  $(x_n)$ , com  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}/\{1\}$ , está contida em  $I$  e converge para 1. De forma análoga, 0 também é um ponto aderente a  $I$ . O intervalo fechado  $[0, 1]$  é o fecho de  $I$ .*

**Definição 4.** *Diz-se que um ponto  $a$  é um ponto de **acumulação** de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando  $a$  é limite de alguma sequência  $(x_n)$  de pontos  $x_n \in X$ , com  $x_n \neq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Exemplo 4.** *Todo ponto de acumulação de um conjunto é um ponto aderente.*

**Exemplo 5.** *O fecho de  $X$  é a união dos pontos de  $X$  com seus pontos de acumulação.*

**Exemplo 6.** *No conjunto  $X = (0, 1) \cup \{2\}$ , todos os pontos do intervalo aberto  $(0, 1)$  são pontos de acumulação e, portanto, aderentes. Os pontos extremos  $0, 1 \notin X$  também são de acumulação. Porém o ponto 2 é aderente mas não é de acumulação.*

**Definição 5.** *Um subconjunto  $F \subset \mathbb{R}$  é dito **fechado** quando todo ponto aderente a  $F$  pertence a  $F$ .*

De forma equivalente,  $F \subset \mathbb{R}$  é fechado se, e somente se, todos os pontos de acumulação de  $F$  pertencem a  $F$ . Em particular, o fecho de um conjunto é um conjunto fechado. Um intervalo fechado é um subconjunto fechado. Um intervalo aberto não é um subconjunto fechado, já que os extremos são pontos de acumulação mas não pertencem ao intervalo.

**Definição 6.** *Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é **limitado** se existe um número  $K > 0$  tal que  $|a| < K$ , para todo  $a \in X$ .*

**Definição 7.** *Um subconjunto  $F \subset \mathbb{R}$  chama-se **compacto** quando é limitado e fechado.*

**Definição 8.** *Sejam  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  com  $Y \subset X$ . Diz-se que  $Y$  é **denso** em  $X$  quando todo ponto  $a \in X$  é aderente a  $Y$ . De forma equivalente,  $Y$  é denso em  $X$  se  $X$  está contido no fecho de  $Y$ .*

**Proposição 1.** *Sobre conjuntos abertos e fechados valem as seguintes propriedades (Lima, 2011a):*

- i) Se  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$  são conjuntos abertos então a interseção  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  é um conjunto aberto, ou seja, a interseção finita de abertos é aberta.
- ii) Se  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família de conjuntos abertos, então o conjunto  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é aberto, ou seja, a união de uma família qualquer de abertos é aberta.
- iii) Se  $F_1, \dots, F_n \subset \mathbb{R}$  são conjuntos fechados então a união  $F_1 \cup \dots \cup F_n$  é um conjunto fechado, ou seja, a união finita de fechados é fechada.
- iv) Se  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família de conjuntos fechados, então o conjunto  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  é um conjunto fechado, ou seja, a interseção de uma família qualquer de fechados é fechada.

**Definição 9.** Uma **cobertura** de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é uma família  $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de conjuntos  $C_\lambda \subset \mathbb{R}$  cuja união contém  $X$ .

**Definição 10.** Dizemos que um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  tem **medida nula** se, para todo  $\epsilon > 0$ , for possível obter uma coleção enumerável de intervalos abertos  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  tais que  $X \subset \bigcup_{k \in L} I_k$  e  $\sum_{k \in L} |I_k| < \epsilon$ , onde  $|I_k|$  é o comprimento do intervalo  $I_k$ .

## 1.2 Espaços métricos

O estudo dos espaços métricos é essencial no desenvolvimento deste trabalho, esta seção destaca as principais propriedades destes espaços. Para definirmos um espaço métrico precisamos do conceito de métrica, de acordo com Lima uma métrica num conjunto  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

- i)  $d(x, x) = 0$ ;
- ii) Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;
- iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- iv)  $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$ .

Os dois primeiros itens dizem que a distância de  $x$  a  $y$  é maior ou igual a zero se, e somente se,  $x$  for igual a  $y$ . O terceiro item nos diz que a distância de  $x$  a  $y$  é uma função simétrica. O quarto item é chamado de desigualdade triangular (Lima, 2011c). Vejamos alguns exemplos de métricas.

**Exemplo 7.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , sejam  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  elementos de  $\mathbb{R}^2$ .

i)  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  é chamada métrica euclidiana;

ii)  $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  é chamada métrica da soma;

iii)  $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$  é chamada métrica do máximo.

Observe que  $d, d', d''$  satisfazem todos os itens da definição de métrica. Em particular a métrica  $d$  é a métrica usual do  $\mathbb{R}^2$  e fornece a distância entre dois pontos no plano.

**Definição 11.** Um **espaço métrico** é um par  $(M, d)$ , onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $M$ .

Quando não houver ambiguidade na métrica de  $M$ , dizemos que  $M$  é um espaço métrico ao invés do par  $(M, d)$ . Os elementos de um espaço métrico podem ser números, pontos, conjuntos, funções, etc.

**Exemplo 8.** Um conjunto qualquer  $A$  torna-se um espaço métrico definindo a métrica  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , pondo  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ . Vamos verificar que  $d$  é uma métrica em  $A$ . Pela definição 7 precisamos provar os quatro itens. Observe que as condições (i) e (ii) são imediatamente verificadas pela definição de  $d$ . Como  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, x) = 1$  para todo  $x \neq y$  temos  $d(x, y) = d(y, x)$  o que verifica a terceira condição. Para provar o item 4 observe que para todo  $x \neq y \neq z$ ,  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 1$ , logo  $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$ . Esta métrica é chamada de métrica "zero-um".

**Definição 12.** Seja  $a$  um ponto no espaço métrico  $M \subset \mathbb{R}$ . Dado um número real  $r > 0$ , definimos a **bola aberta** de centro  $a$  e raio  $r$  como sendo o conjunto  $B(a; r)$  dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ , ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}.$$

**Definição 13.** *Sejam  $(M, d_M)$ ,  $(N, d_N)$  espaços métricos. A função  $f : M \rightarrow N$  é **contínua no ponto  $a \in M$**  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, é possível obter  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in M$  com  $d_M(x, a) < \delta$ , tem-se  $d_N(f(x), f(a)) < \epsilon$ . A função  $f : M \rightarrow N$  é contínua quando ela é contínua em todos os pontos  $a \in M$  (Lima, 2011c, 29).*

De forma equivalente, podemos definir uma função contínua em um ponto  $a \in M$  em termos de bolas abertas: A função  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  quando, dada qualquer bola  $B_N = B(f(a); \epsilon)$ , pode-se encontrar uma bola  $B_M(a; \delta)$  tal que  $f(B_M) \subset B_N$ .

Na topologia existem funções contínuas bijetivas com inversa descontínua.

**Exemplo 9.** *Seja  $M$  o conjunto  $\mathbb{R}$  com métrica zero-um e  $N$  o conjunto  $\mathbb{R}$  com a métrica euclidiana. A função identidade  $i : M \rightarrow N$  definida como  $i(x) = x$  é uma bijeção e é contínua, mas sua inversa  $j : N \rightarrow M$ , que também é a identidade, é descontínua em todo ponto. Vamos mostrar que  $i$  é contínua em um ponto  $a \in \mathbb{R}$  qualquer. Dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = 1/2$  e então, se  $x \in M$  e  $d_M(x, a) < 1/2$  tem-se obrigatoriamente  $x = a$ , pois para  $x \neq a$ ,  $d_M(x, a) = 1$ . Então  $d_N(i(x), i(a)) = d_N(x, a) = d_N(a, a) = 0 < \epsilon$ . Portanto  $i$  é contínua.*

*A inversa  $j : N \rightarrow M$  não é contínua para nenhum  $b \in \mathbb{R}$ , pois dado  $\epsilon = 1/2$ , para todo  $\delta > 0$  tem-se que se  $x \neq b$  e  $d_N(x, b) < \delta$  então  $d_M(j(x), j(b)) = d_M(x, b) = 1 > \epsilon$ . Portanto  $j$  é descontínua.*

Para o caso em que a inversa de uma bijeção contínua seja também contínua, definimos o conceito de homeomorfismo. Este e conceito de conjugação topológica são fundamentais no estudo dos sistemas dinâmicos.

**Definição 14.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Um **homeomorfismo** de  $M$  sobre  $N$  é uma bijeção contínua  $f : M \rightarrow N$  cuja inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  também é contínua. Neste caso, diz-se que  $M$  e  $N$  são homeomorfos (Lima, 2011c, p. 38).*

**Definição 15.** *Sejam  $f : A \rightarrow A$  e  $g : B \rightarrow B$  duas funções, dizemos que  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas se existir um homeomorfismo  $h : A \rightarrow B$  tal que,  $h \circ f = g \circ h$ . O homeomorfismo  $h$  é chamado uma **conjugação topológica**.*

Do ponto de vista topológico duas funções topologicamente conjugadas tem a mesma dinâmica ou seja o comportamento da sequência  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^n(a), \dots)$  no

conjunto  $A$  tem as mesmas propriedades que a sequência  $(b, g(b), g^2(b), \dots, g^n(b), \dots)$  em  $B$ , onde  $b = h(a)$ .

## 1.3 Órbitas

Nesta seção vamos estudar o processo de iteração de uma aplicação real  $f$ . Em um processo discreto de iteração de uma aplicação, buscamos entender o comportamento dos pontos  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$  para grandes valores de  $n$ . Nosso objetivo nesta seção é entender o comportamento das órbitas de uma aplicação, algumas órbitas são especialmente simples e desempenham um papel fundamental na compreensão do comportamento da aplicação.

**Definição 16.** A **órbita positiva** de  $x$  é o conjunto de pontos  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$  denotados por  $O^+(x)$ . Caso  $f$  seja um homeomorfismo, define-se a **órbita negativa** de  $x$ ,  $O^-(x)$ , como o conjunto dos pontos  $\{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots\}$  e a **órbita** de  $x$ ,  $O(x)$ , como o conjunto de pontos  $\{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$  (Devaney, 1985).

**Definição 17.** O ponto  $x$  é chamado de **ponto fixo** se  $f(x) = x$ . O ponto  $x$  é um **ponto periódico** de período  $n$  se  $f^n(x) = x$ . O menor valor positivo de  $n$  para o qual  $f^n(x) = x$  é chamado de período primal de  $x$ . Denotamos por  $Per_n(f)$  o conjunto dos pontos periódicos de período  $n$  (não necessariamente primal) da aplicação  $f$ . O conjunto de todas as iterações de um ponto periódico forma uma órbita periódica. O conjunto de todos os pontos periódicos é denotado por  $Per(f)$ .

Cabem aqui dois comentários: pela definição de período, este não é necessariamente o menor natural tal que  $f^n(x) = x$ , por exemplo, um ponto de período 3 também é um ponto de período 6, logo  $Per_3(f) \subset Per_6(f)$ . Por fim, caso  $f$  não seja inversível e nem haja ambiguidade, denominaremos a órbita positiva de cada ponto apenas por órbita.

**Exemplo 10.** A função  $g(x) = x^3$  tem  $0, 1$  e  $-1$  como pontos fixos e nenhum ponto periódico. Na função  $f(x) = x^2 - x - 1$  os pontos  $1$  e  $-1$  são periódicos e de período 2, pois  $f(f(1)) = f(-1) = 1$  e de maneira análoga  $f(f(-1)) = -1$ . Se a função  $f$  possuir algum ponto fixo  $k$ , então  $f(k) = k$ , ou seja, para determinar os pontos fixos de  $f$  devemos resolver a equação polinomial  $k^2 - k - 1 = k \Rightarrow k^2 - 2k - 1 = 0$ , logo  $1 \pm \sqrt{2}$  são os pontos fixos de  $f$ .

**Definição 18.** Um ponto  $x$  é **eventualmente periódico** de período  $n$  se  $x$  não for periódico mas existir  $m > 0$  tal que  $f^{n+i}(x) = f^i(x)$  para todo  $i \geq m$ . Isto é, o iterado  $f^i(x)$  é periódico para  $i \geq m$ . Em particular dizemos que um ponto  $x$  é **eventualmente fixo** se existir  $m > 0$  tal que  $f^m(x) = b$  e  $b$  for um ponto fixo.

**Exemplo 11.** Seja  $f$  uma aplicação e  $x$  um ponto com a órbita definida pela figura 1.1.

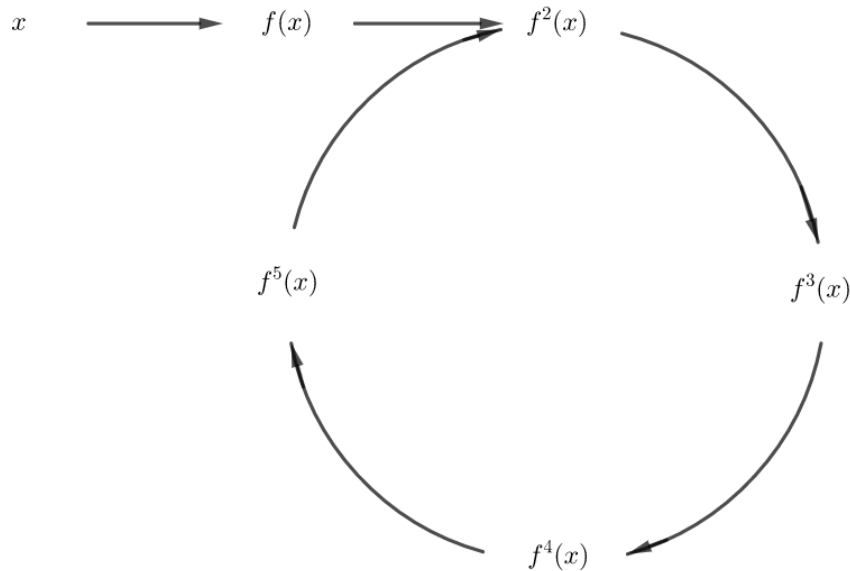


Figura 1.1: Órbita de um ponto eventualmente fixo

Neste caso  $x$  é um ponto eventualmente periódico de período 4, pois na definição 18 temos  $f^{4+i}(x) = f^i(x)$  para  $i \geq m = 2$ .

**Exemplo 12.** Seja  $f(x) = x^2 - x - 1$  o ponto  $x = 2$  é eventualmente periódico pois  $f(2) = 2^2 - 2 - 1 = 1$  e o ponto  $x = 1$  é periódico como visto no exemplo 10.

**Exemplo 13.** Seja  $f(x) = x^2$ , temos que 1 é um ponto fixo pois  $f^n(1) = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado,  $f(-1) = 1$ , logo  $-1$  é eventualmente fixo.

**Definição 19.** Sejam  $p$  um ponto periódico de período  $i$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Um ponto  $x$  é dito **assintótico** a  $p$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f)^{in}(x) = p$ . O conjunto de todos os pontos assintóticos a  $p$  é chamado de **conjunto estável** de  $p$  e denotado por  $W^s(p)$  (Devaney, 1985, p. 19). Em particular se  $i = 1$  então  $p$  é um ponto fixo.

Se  $p$  for não periódico, definimos o conjunto assintótico como o conjunto de pontos  $x$  tal que  $|f^n(x) - f^n(p)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $f$  for inversível, podemos considerar pontos assintóticos inversos deixando  $n \rightarrow -\infty$  na definição acima. O conjunto de pontos assintóticos inversos de  $p$  é chamado de conjunto instável de  $p$  e denotado por  $W^u(p)$ .

**Exemplo 14.** Seja  $f(x) = x^3$ . Então  $W^s(0)$  são todos os pontos tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f)^n(x) = 0$ , logo  $W^s(0)$  é o intervalo aberto  $-1 < x < 1$ . Como  $f$  é inversível e  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  então se  $x \in (0, 1)$ , a órbita de  $f$  será uma sequência crescente e limitada, portanto convergente, e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ . Portanto  $|f^{-n}(x) - f^{-n}(1)| \rightarrow 0$ . Se  $x \in [1, +\infty)$  a órbita de  $f$  será uma sequência decrescente e limitada, portanto convergente, e também teremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ . Logo  $|f^{-n}(x) - f^{-n}(1)| \rightarrow 0$  para todo  $x \in (0, +\infty)$ . Então  $W^u(1)$  é o eixo real positivo.

A derivada da iterada  $f^n$  em um ponto  $p$  é representada por  $(f^n)'(p)$ . Pela regra da cadeia,

$$(f^n)'(p) = f'(f^{n-1}(p))f'(f^{n-2}(p)) \cdots f'(f(p))f'(p).$$

**Definição 20.** Seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$ . O ponto  $p$  é dito **hiperbólico** se  $|(f^n)'(p)| \neq 1$ . O número  $(f^n)'(p)$  é chamado de multiplicidade do ponto periódico.

**Proposição 2.** Sejam  $f$  de classe  $C^1$  e  $p$  um ponto fixo hiperbólico com  $|f'(p)| < 1$ . Então existe um intervalo aberto  $U$  de centro  $p$  tal que se  $x \in U$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f)^n(x) = p.$$

**Demonstração.** Como  $f$  é de classe  $C^1$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f'(x)| < c < 1$  para  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ , ou seja  $f$  é lipschitziana. Pelo teorema do valor médio (Lima, 2009a, p. 272)  $f(x) - f(p) = f'(c)(x - p)$ , onde  $c$  está entre  $x$  e  $p$ .

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq c|x - p| \Rightarrow |x - p| \leq c \cdot \epsilon_1 \leq \epsilon.$$

Portanto  $|f(x) - p| \leq \epsilon$  ou seja  $f(x)$  está contido no intervalo  $[p - \epsilon, p + \epsilon]$ . Como  $|f(x) - p| < \epsilon$ , então vale o Teorema do Valor médio, com a mesma constante, para o ponto  $f(x)$ , logo

$$|f^n(x) - p| = |f(f(x)) - p| \leq c|f(x) - p| \leq c \cdot c|x - p| = c^2|x - p|.$$

Indutivamente,

$$|f^2(x) - p| \leq c^n|x - p|,$$

Como  $0 < c < 1$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ , portanto  $f^n(p) \rightarrow p$ . ■

**Definição 21.** Seja  $p$  um ponto periódico hiperbólico de período  $n$  com  $|(f^n)'(p)| < 1$ . O ponto  $p$  é chamado **ponto periódico atrator**.

Se  $p$  é um ponto periódico atrator, então existe um conjunto  $A$  com  $p \in A$ , tal que  $f^n(A) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . A vizinhança de um ponto periódico atrator com período  $n$  é chamada conjunto localmente estável. Em particular, para  $n = 1$ , pontos fixos atratores podem ser de três tipos, a saber, aqueles em que  $f'(p) = 0$ ,  $0 < f'(p) < 1$  e  $-1 < f'(p) < 0$ . O comportamento próximo a esses tipos de pontos fixos é ilustrado na figura 1.2.

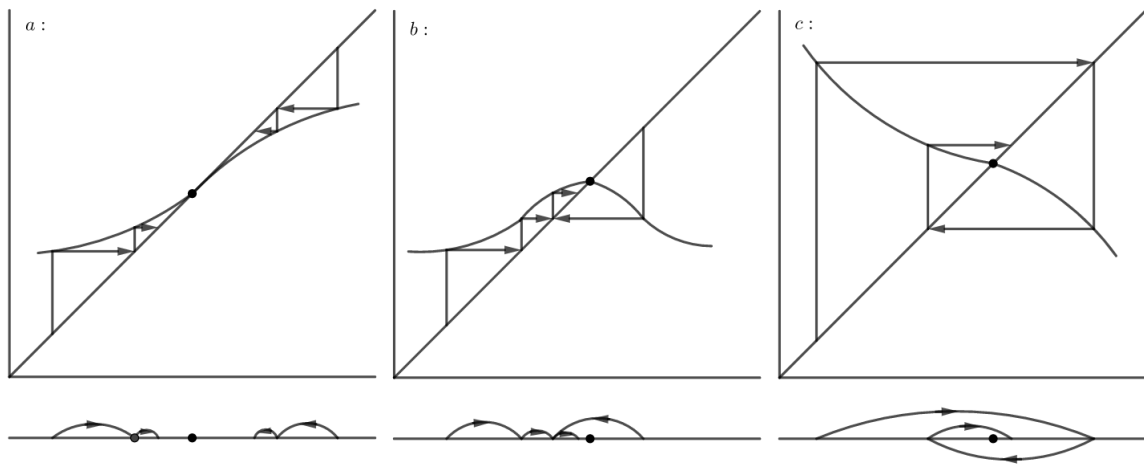


Figura 1.2: Iterações de  $f$  quando  $a : f'(p) = 0$ ,  $b : 0 < f'(p) < 1$  e  $c : -1 < f'(p) < 0$

**Exemplo 15.** Seja  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com  $\mu > 1$ .  $F_\mu$  tem dois pontos fixos, a saber,  $0$  e  $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$ . Observe que  $F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$  e portanto  $F'_\mu(0) = \mu$  e  $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$ , logo  $0$  é um ponto repulsor para  $\mu > 1$  e  $p_\mu$  é um ponto atrator para  $1 < \mu < 3$ .

## 1.4 Caos

Para compreender a aleatoriedade das órbitas em um sistema dinâmico precisamos definir o caos. Esta seção possui esta finalidade.

**Definição 22.** Uma aplicação  $f : J \rightarrow J$  é dita **topologicamente transitiva** se para qualquer par de conjuntos abertos  $U, V \subset J$  existe  $k > 0$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Em outras palavras, uma aplicação  $f$  é topologicamente transitiva se tem a seguinte propriedade: tome dois abertos  $A, B$  quaisquer em  $J$ . Existem pontos em  $A$  que



eventualmente se movem, através de alguma iteração, até  $B$ . De maneira que o sistema dinâmico não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos disjuntos que são invariantes segundo  $f$ . Um conjunto  $X$  diz-se invariante por uma aplicação  $f$  quando  $f(X) \subseteq X$ . Em particular, a existência de uma órbita densa em  $J$  implica em  $f$  ser topologicamente transitiva.

**Definição 23.**  $f : J \rightarrow J$  é **sensível às condições iniciais** se existir  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in J$  e toda vizinhança  $V$  de  $x$ , existir  $y \in V$  e  $n \geq 0$  tal que  $d(f^n(x) - f^n(y)) > \delta$ .

Uma aplicação é sensível às condições iniciais se pontos arbitrariamente próximos de  $x$  se distanciam de  $x$  pelo menos  $\delta$  pelas iterações de  $f$ . É importante observar que nem todos os pontos próximos de  $x$  precisam se distanciar de  $x$  em alguma iteração, mas deve haver pelo menos um ponto desses em cada vizinhança de  $x$ . Isto significa que pequenos erros em sistemas sensíveis às condições iniciais, como por exemplo arredondamentos numéricos, podem ser ampliados a cada iteração. Segundo (Devaney, 1985, p. 50), um sistema dinâmico caótico é da seguinte forma:

**Definição 24.** Seja  $V$  um conjunto.  $f : V \rightarrow V$  é **caótica** se:

- i)  $f$  é sensível as condições iniciais.
- ii)  $f$  é topologicamente transitivo.
- iii) Pontos periódicos são densos em  $V$ .

Uma aplicação caótica é imprevisível, não pode ser decomposta em subconjuntos abertos invariantes e possui um elemento de regularidade. Um sistema caótico é imprevisível por causa da dependência às condições iniciais, não pode ser decomposto em dois subsistemas que não interagem sob  $f$  devido à transitividade topológica, e apesar deste comportamento aleatório, os pontos periódicos são densos.

**Exemplo 16.** A função quadrática  $F(x) = 4x(1 - x)$  é caótica no intervalo  $I = [0, 1]$ , este exemplo é estudado com mais detalhes no capítulo 3.

# Capítulo 2

## O conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 3 de março de 1845. Começou a estudar matemática no Instituto Politécnico em Zurique, e foi transferido para prestigiada Universidade de Berlim. Se destacou na teoria dos números, foi o primeiro a descobrir que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades ao provar que não pode haver uma correspondência biunívoca entre os naturais e o conjunto dos números reais. Sua demonstração hoje leva o nome de Processo de diagonalização de Cantor (Lima, 2013). Dentre as várias contribuições de Cantor para a matemática na teoria dos conjuntos, destaca-se o conjunto que leva seu nome, o conjunto de Cantor. A construção deste estranho conjunto, nos leva a pensar que seja um conjunto vazio, porém é um conjunto infinito e não enumerável. Passemos a construção do conjunto de Cantor.

### 2.1 A construção do conjunto de Cantor

Consideremos o intervalo  $I = [0, 1]$  da reta real, retirando o intervalo aberto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , conhecido como o terço médio de  $I$ , obtemos o conjunto

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

ou seja,  $C_1$  é o conjunto dos pontos restantes de  $I$ .



Figura 2.1: Construção do conjunto  $C_1$

Continuando o processo para obtermos o conjunto de Cantor, remove-se o terço médio aberto dos intervalos fechados de  $C_1$ , isto é  $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  e  $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ . Logo o conjunto  $C_2$  formado pelos pontos restantes de  $C_1$  é da forma

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

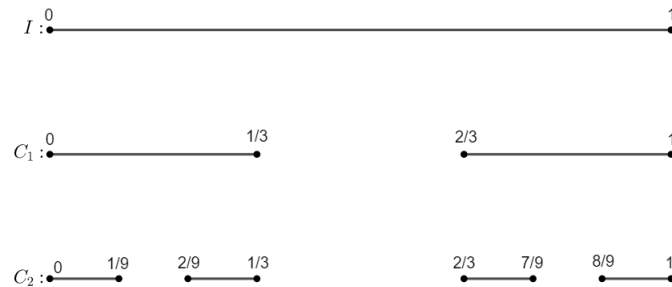


Figura 2.2: Construção do conjunto  $C_2$

Analogamente obtemos

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

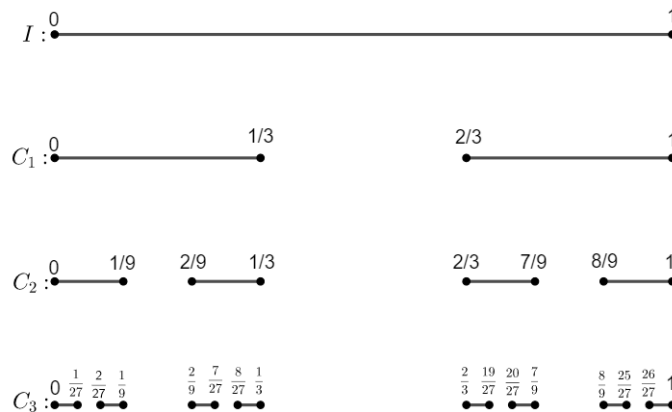


Figura 2.3: Construção do conjunto  $C_3$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos a sequência de conjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  com  $I \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_{n-1} \supset C_n \dots$ .

Note que  $C_1$  é a união de dois intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{3}$ ,  $C_2$  a união de 4 intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{9}$ ,  $C_3$  a união de 8 intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{27}$ . Por indução obtemos que  $C_n$  consiste em  $2^n$  intervalos fechados, disjuntos e de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ . O conjunto de Cantor é a união de todos os pontos restantes após aplicarmos esse processo para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 25** (Conjunto de Cantor). *O conjunto de Cantor  $C$  é a interseção dos conjuntos  $C_n$ , obtidos através da remoção sucessiva dos terços médios do intervalo  $I = [0, 1]$ , ou seja,  $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_n$ .*

Observe que o conjunto de Cantor não é vazio, pois os pontos extremos dos intervalos omitidos, tais como  $0, 1/3, 2/3, 1$  de  $C_1$ , pertencem ao conjunto. Em geral, em cada etapa da construção do conjunto de Cantor são retirados apenas pontos interiores nos intervalos da etapa anterior, portanto os pontos extremos de todas as etapas pertencem a  $C$ . A seguir vamos estudar as propriedades deste conjunto.

## 2.2 Propriedades do conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor apresenta uma série de características interessantes. É um conjunto fechado, não enumerável, de interior vazio, de medida nula e sem pontos isolados.

**Proposição 3.** *O conjunto de Cantor é um conjunto fechado.*

**Demonstração.** *Sejam  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  os intervalos abertos retirados durante a construção do conjunto de Cantor. Temos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$  é um conjunto aberto (Lima, 2009a), então seu complementar é um conjunto fechado, como  $C = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)^c \cap [0, 1]$  e a interseção de fechados é fechado concluímos que  $C$  é fechado.*

Pela proposição 3,  $C$  é fechado. O intervalo  $I = [0, 1]$  é limitado e  $C \subset I$ , logo  $C$  também é limitado, portanto segue a proposição 4.

**Proposição 4.**  $C$  é um conjunto compacto.

**Proposição 5.** Os elementos do conjunto  $C$  de Cantor possuem representação ternária usando apenas os dígitos 0 e 2, isto é,

$$C = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \text{ para } i_n = 0 \text{ ou } i_n = 2\}.$$

**Demonstração.** No primeiro passo da construção do conjunto de Cantor, ao retirarmos o intervalo aberto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , excluimos os valores de  $x$  do intervalo  $[0, 1]$  cuja representação ternária,  $x = (0, x_1x_2x_3\dots)_3$ , tem  $x_1 = 1$ , com a única exceção de  $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$  que permanece.

No segundo passo, excluimos os números reais dos intervalos  $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  e  $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ , ou seja, aqueles da forma  $(0, 01x_3x_4\dots)$  ou da forma  $(0, 21x_3x_4\dots)$ , com exceção de dos números  $\frac{1}{9} = (0, 01)_3$  e  $\frac{7}{9} = (0, 21)_3$  que permanecem.

Este processo continua indutivamente. De modo geral, fica garantido que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo  $I = [0, 1]$  cuja representação ternária  $x = (0, x_1x_2\dots)_3$  só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que possuem um único algarismo igual a 1 como o algarismo significativo final. Como em  $\frac{25}{27} = (0, 221)_3 = (0, 220222\dots)_3$ , sempre poderemos substituir o algarismo final 1 pela sequência 222... . Com esta convenção podemos afirmar, sem exceções, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo  $I = [0, 1]$  cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2 (Moura, 2017). ■

**Proposição 6.**  $C$  é um conjunto não enumerável.

**Demonstração.** A demonstração será feita por absurdo. Suponha que  $C$  seja enumerável, usando representações ternárias podemos escrever todos os elementos de  $C$  da seguinte maneira

$$1^{\text{o}} : 0, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, \dots$$

$$2^{\text{o}} : 0, c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3}, \dots$$

$$3^{\text{o}} : 0, c_{3,1}, c_{3,2}, c_{3,3}, \dots$$

⋮

usando apenas os dígitos 0 e 2. Agora construiremos o seguinte elemento do conjunto  $C$

$$0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

onde  $a_i$  é um algarismo diferente de  $c_{i,j}$  e de 1. Portanto  $a_i$  é um elemento do conjunto de Cantor que não foi listado, logo o conjunto de  $C$  de Cantor não é enumerável. Este processo de demonstração é conhecido como diagonalização de Cantor. ■

**Proposição 7.** O conjunto de Cantor possui interior vazio.

**Demonstração.** Suponha por absurdo que  $\text{int}(C) \neq \emptyset$  e  $c \in \text{int}(C)$ . Então pela definição de interior existe  $\delta > 0$  tal que

$$(c - \delta, c + \delta) \subset C$$

Logo  $(c - \delta, c + \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} C_n$ , ou seja para todo  $n \in \mathbb{N}$  o intervalo  $(c - \delta, c + \delta) \subset C_n$ .

Como  $C_n$  é a união de  $2^n$  intervalos fechados disjuntos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ , o intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  deve estar contido em algum intervalo de  $C_n$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^{n_0}} < \delta$ . Mas o intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  tem comprimento  $2\delta > \delta > \frac{1}{3^{n_0}}$ . Portanto o intervalo  $(c - \delta, c + \delta) \not\subset C_{n_1}$  um absurdo, logo  $\text{int}(C) = \emptyset$ . ■

**Proposição 8.** O conjunto de Cantor possui medida nula.

**Demonstração.** Na construção do conjunto de Cantor no  $n$ -ésimo passo temos que  $C$  está contido na união dos  $2^n$  intervalos de  $C_n$ , onde cada intervalo tem comprimento  $\frac{1}{3^n}$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$ . Ou seja existe uma cobertura finita de intervalos abertos  $C_n$  sobre  $C$  tal que  $\sum_{n \in L} C_n < \epsilon$ , logo  $C$  possui medida nula. ■

**Proposição 9.** O conjunto de Cantor não possui pontos isolados.

**Demonstração.** Precisamos provar que todo ponto do conjunto de Cantor é de acumulação. Suponha que um ponto  $a$  seja extremidade de algum dos intervalos abertos retirados de  $[0, 1]$  para formar o conjunto de Cantor, digamos  $(a, b)$ . Quando  $(a, b)$  foi retirado, restou um certo intervalo  $[c, a]$ . Nas etapas seguintes da construção do conjunto de Cantor, sempre restam os terços finais de intervalos do tipo  $[c_n, a]$ , de comprimento  $1/3^n$ . Portanto o comprimento da sequência de intervalos  $[c_n, a]$ , tende a zero quando

$n \rightarrow \infty$ , logo  $c_n \rightarrow a$ , conseqüentemente  $a$  é um ponto de acumulação. Consideremos agora o caso onde  $a$  é um ponto do conjunto de Cantor mas não é um ponto dos extremos dos intervalos retirados. Neste caso para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a$  pertence ao interior de um intervalo  $[x_n, y_n]$  que resta depois da  $n$ -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor. Portanto  $x_n < a < y_n$  com  $x_n, y_n$  pertencentes ao conjunto de Cantor e  $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ . Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c_1$ , logo pelo teorema do Confronto,  $a = c_1$  e é um ponto de acumulação. ■

# Capítulo 3

## Dinâmica nas funções quadráticas $F_\mu$

### 3.1 A família de funções quadráticas.

Nesta seção nos dedicamos ao estudo da família quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ . O comportamento das órbitas em  $F_\mu$  nos ajuda a compreender vários fenômenos que ocorrem nos sistemas dinâmicos.

**Teorema 1.** *Seja  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , então*

$$i) F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0 \text{ e } F_\mu(p_\mu) = p_\mu, \text{ quando } p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}.$$

$$ii) 0 < p_\mu < 1 \text{ se } \mu > 1.$$

**Demonstração.** *Seja  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , então temos  $F(0) = \mu \cdot 0 \cdot (1-0) = 0$  e  $F(1) = \mu \cdot 1 \cdot (1-1) = 0$ . Pela definição de  $p_\mu$  no enunciado,  $p_\mu$  é ponto fixo pois  $F(p_\mu) = \mu \cdot \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu}\right) = (\mu-1) \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\mu-1}{\mu}$ . Isto demonstra (i).*

*Se  $\mu > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\mu} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{\mu} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\mu}{\mu} - \frac{1}{\mu} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\mu-1}{\mu} < 1$ , isto demonstra (ii). ■*

**Teorema 2.** *Suponha  $\mu > 1$ . Se  $x < 0$ , então  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Da mesma forma, se  $x > 1$ , então  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração.** *Se  $x < 0$ , então  $(1-x) > 1$ . Multiplicando ambos os lados da desigualdade por  $x$ , obtemos  $x(1-x) < x$ . Como  $\mu > 1$ , então  $\mu x(1-x) < x$ , daí  $F_\mu(x) < x < 0$ . Por indução,  $F_\mu^n(x) < F_\mu^{n-1}(x) < \dots < F_\mu(x) < x < 0$ . Consequentemente  $F_\mu^n(x)$  é uma sequência decrescente. Esta sequência não pode convergir. De fato, se convergisse para um*



ponto  $p$ , teríamos  $p < 0$ . Podemos afirmar ainda que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p < 0$ . Mas da continuidade de  $F_\mu$ ,

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(F_\mu^n(x)) = F_\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x)) = F_\mu(p)$$

Um absurdo, pois  $p < 0$ , logo deveríamos ter  $F_\mu(p) < p$ . Consequentemente  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ . Se  $x > 1$ , então  $\mu x(1-x) < 0 \Rightarrow F_\mu(x) < 0$ , portanto  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ . ■

Como consequência desta proposição, todas as dinâmicas interessantes da família quadrática ocorrem no intervalo unitário  $I = [0, 1]$ .

**Teorema 3.** *Seja  $1 < \mu < 3$ .*

i)  $F_\mu$  tem um ponto fixo atrator em  $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$  e um ponto fixo repulsor em 0.

ii) Se  $0 < x < 1$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu.$$

**Demonstração.** O item (i) está provado no exemplo 15. Vamos dividir a demonstração do item (ii). Primeiramente façamos o caso  $1 < \mu < 2$ . Se  $x \in (0, 1/2]$ , pela análise gráfica de  $F_\mu$ , observa-se que  $F_\mu(x)$  está mais próximo de  $p_\mu$  do que  $x$ , conforme a figura 3.1.

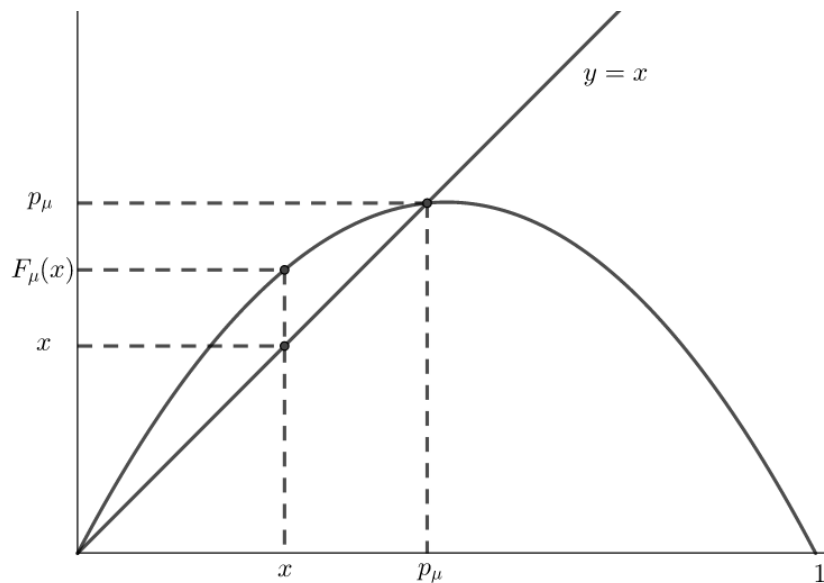


Figura 3.1: Gráfico de  $F_\mu$  para  $1 < \mu < 2$

Ou seja, quando  $x \neq p_\mu$  tem-se  $p_\mu > F_\mu(x) > x \Rightarrow |F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$ . Analiticamente podemos chegar neste resultado calculando para quais valores de  $x$  a função  $F_\mu$  é maior que a função  $y = x$ , isto é calcula-se  $\mu x(1 - x) > x \Rightarrow x(-\mu x + \mu - 1)$ , logo  $0 < x < \frac{\mu - 1}{\mu} = p_\mu$ , novamente para  $x \in (0, 1/2]$ , tem-se  $p_\mu > F_\mu(x) > x$  implicando  $|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$ , conseqüentemente,  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Se  $x \in (1/2, 1)$  e  $0 < \mu < 2$  então

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x(1 - x) < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \mu x(1 - x) < \frac{1}{2},$$

ou seja,  $0 < F_\mu(x) < 1/2$ , então se  $x \in (1/2, 1) \Rightarrow F_\mu(x) \in (0, 1/2) \Rightarrow F_\mu^{n-1}(F_\mu(x)) \rightarrow p_\mu$  e portanto  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

O caso  $2 < \mu < 3$  é mais delicado pois  $\frac{1}{2} < p_\mu < 1$  e portanto  $-1 < F'_\mu(p_\mu) < 0$ , as diferenças de comportamento nas iterações de  $F_\mu$  para  $x \in (0, 1)$  podem ser vistas na figura 3.2.

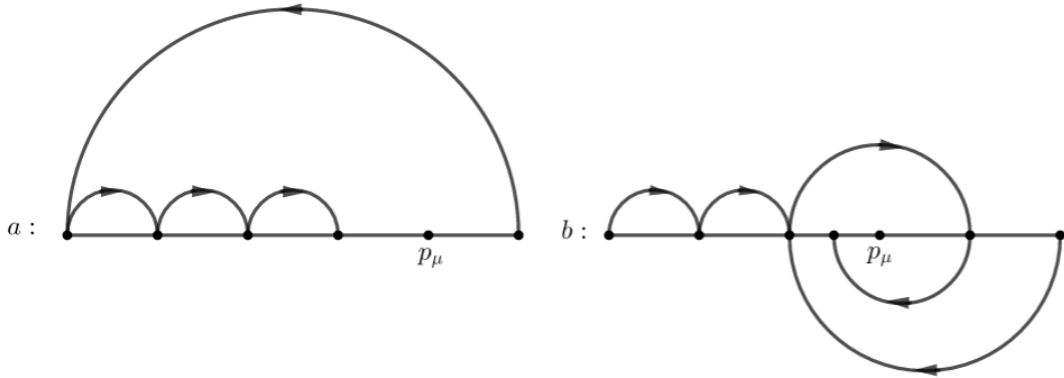


Figura 3.2: Iterações de  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  quando a:  $1 < \mu < 2$  b:  $2 < \mu < 3$

Vamos provar o caso  $2 < \mu < 3$ . Seja  $\hat{p}_\mu$  o único ponto do intervalo  $(0, 1/2)$  tal que  $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$ . Pelo gráfico 3.3 podemos observar que  $F_\mu([\hat{p}_\mu, p_\mu]) = [p_\mu, \mu/4]$  e  $f[p_\mu, \mu/4] = [f_\mu(\mu/4), p_\mu]$ .

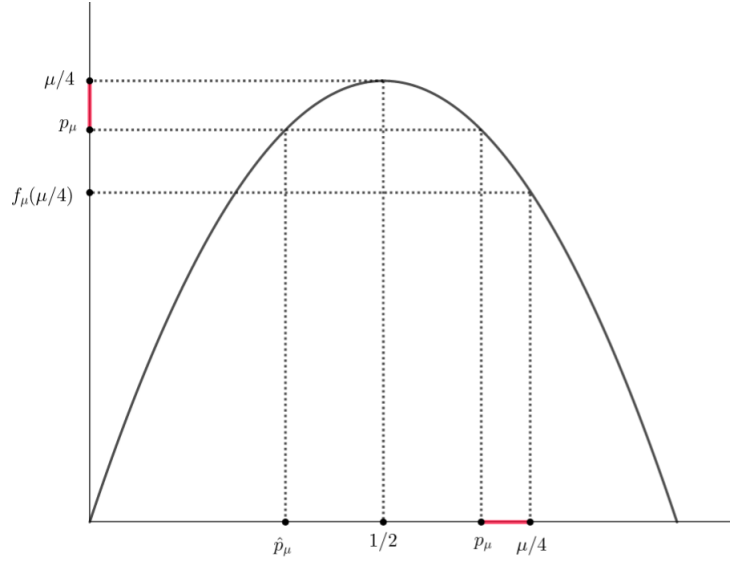


Figura 3.3:  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com  $2 < \mu < 3$

Ou seja  $F_\mu^2 \in [1/2, p_\mu]$ , logo  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ . Se  $x < \hat{p}_\mu$ . A análise gráfica nos mostra que existe  $k > 0$  tal que  $F_\mu^k(x) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ , daí  $F_\mu^{k+n}(x) \rightarrow p_\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Por ultimo pelo gráfico 3.3 podemos observar que  $F_\mu(p_\mu, 1) \in (0, p_\mu)$  e portanto pelo caso anterior  $F_\mu^n \rightarrow p_\mu$ . Como o intervalo  $(0, 1)$  é a união disjunta  $(0, \hat{p}_\mu) \cup [\hat{p}_\mu, p_\mu] \cup (p_\mu, 1)$ , então  $F_\mu^n(x) \rightarrow \infty$  para todo  $x \in (0, 1)$ . No caso intermediário  $\mu = 2$   $F_2(x)$  é crescente e limitado no intervalo  $[0, 1/2]$  portanto  $F_2^n(x) \rightarrow 1/2$  se  $x \in [1/2, 1]$  então  $F_2[1/2, 1] \in [0, 1/2]$  novamente  $F_2^n(x) \rightarrow 1/2$ . ■

Portanto o comportamento de  $F_\mu^n(x)$  para  $1 < \mu < 2$  para  $n \rightarrow \infty$  é descrito pela Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Comportamento da família de funções quadráticas com  $1 < \mu < 2$

x	$F_\mu(x)$	Monotocidade de $F_\mu^n(x)$ , $n > 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x)$
$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	Decrescente	$-\infty$
0	0	Constante	0
$(0, p_\mu)$	$(0, p_\mu)$	Crescente	$p_\mu$
$p_\mu$	$p_\mu$	Constante	$p_\mu$
$(p_\mu, 1)$	$(0, p_\mu)$	Crescente	$p_\mu$
1	0	Constante	0
$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	Decrescente	$-\infty$

Se  $2 < \mu < 3$  a função  $F_\mu^n$  não é monótona em  $(0, p_\mu)$ ,  $(p_\mu, 1)$  mas  $F_\mu^n \rightarrow p_\mu$  para todo  $x \in (0, 1)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo podemos estabelecer o comportamento das órbitas em  $F_\mu^n(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$  para  $2 < \mu < 3$  pela tabela 3.2.

Tabela 3.2: Comportamento da família de funções quadráticas com  $2 < \mu < 3$

x	$F_\mu(x)$	Monotocidade de $F_\mu^n(x)$ , $n > 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x)$
$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	Decrescente	$-\infty$
0	0	Constante	0
$(0, p_\mu)$	$(0, \mu/4)$	Não monótona	$p_\mu$
$p_\mu$	$p_\mu$	Constante	$p_\mu$
$(p_\mu, 1)$	$(0, \mu/4)$	Não monótona	$p_\mu$
1	0	Constante	0
$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	Decrescente	$-\infty$

Vamos verificar o comportamento de  $F_\mu^n(x)$  para  $\mu > 4$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Todos os pontos fora do intervalo  $I = [0, 1]$  são divergentes assim como nas órbitas já estudadas para  $0 < \mu < 3$ . Observe que  $F_\mu$  é uma função quadrática e portanto atinge seu valor máximo em  $y_v = \frac{\mu}{4}$ , isto significa que para  $\mu > 4$  existem valores  $F_\mu(x) > 1$ , conseqüentemente alguns pontos deixam o intervalo  $I$  após uma iteração de  $F_\mu$ , vamos chamar o conjunto formado por estes pontos de  $A_0$ . O conjunto  $A_0$  é aberto e de centro  $1/2$ , pois  $x_v = 1/2$ ,  $I - A_0$  consiste de dois intervalos fechados,  $I_0$  na esquerda e  $I_1$  na direita como pode ser observado na figura 3.4.

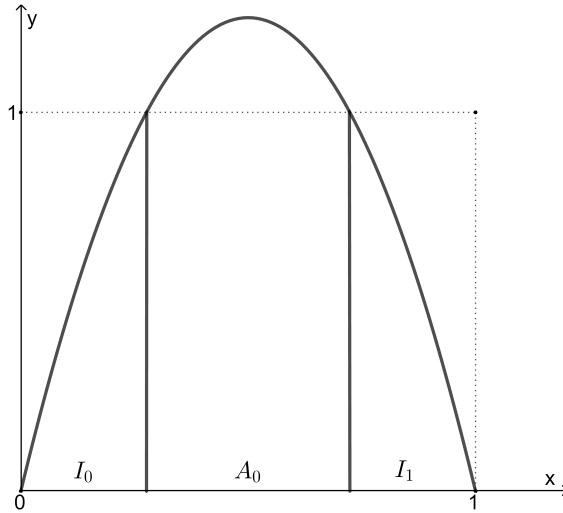


Figura 3.4:  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com  $\mu > 4$

Se  $x \in A_0$  então  $F_\mu(x) > 1$ , daí como já estudado no teorema 2  $F_\mu^2(x) < 0$  e  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ .  $A_0$  é o conjunto de pontos  $x$  tal que  $F_\mu(x) \notin I$ , todos os outros pontos de  $I$  permanecem em  $I$  após uma iteração de  $F_\mu$ .

Seja  $A_1 = \{x \in I | F_\mu(x) \in A_0\}$ . Se  $x \in A_1$  então  $F_\mu^2(x) > 1$  logo pelo teorema 2  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ . Por indução  $A_n = \{x \in I | F_\mu^n(x) \in A_0\}$ , assim  $A_n = \{x \in I | F_\mu^i(x) \in I\}$

para  $i \leq n$  mas  $F_\mu^{n+1}(x) \notin I$ , isto quer dizer que  $A_n$  consiste de todos os pontos que escapam de  $I$  na iteração  $n + 1$ . Se  $x$  pertence a  $A_n$  significa que sua órbita tende para  $-\infty$ . Como já sabemos o comportamento da órbita dos pontos em  $A_n$  resta analisar o comportamento daqueles pontos que nunca escapam de  $I$ , ou seja, o conjunto

$$I - \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

Vamos chamar este conjunto de  $\Lambda$ . Para entender qual é este conjunto de pontos vamos descrever cuidadosamente a sua construção.

Como  $A_0$  consiste de dois intervalos fechados,  $I_0$  na esquerda e  $I_1$  na direita, observe que  $F_\mu$  é crescente em  $I_0$ , decrescente em  $I_1$  e  $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) = [0, 1] = I$ . Logo existe um par de intervalos abertos, um em  $I_0$  e outro em  $I_1$  que são levados para  $A_0$  por  $F_\mu$ . Portanto este par de intervalos é o conjunto  $A_1$ .

Considere agora  $I - (A_0 \cup A_1)$ , este conjunto consiste em 4 intervalos fechados transformados monotonamente por  $F_\mu$  em um dos conjuntos  $I_0$  e  $I_1$ . Consequentemente  $F_\mu^2$  transforma cada um deles em  $I$ . Portanto cada um dos quatro intervalos  $I - (A_0 \cup A_1)$  contem subintervalos abertos que são transformados por  $F_\mu^2$  em  $A_0$ . Logo estes pontos saem do intervalo  $I$  na terceira iteração de  $F_\mu$  e este conjunto será chamado de  $A_2$ .

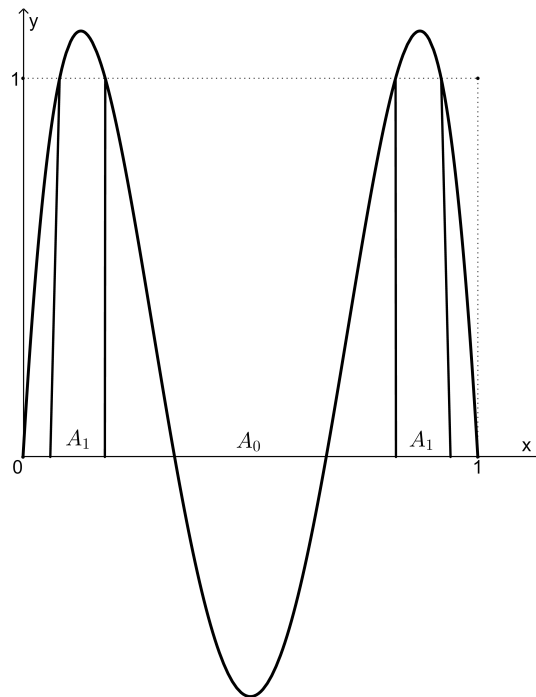


Figura 3.5: Gráfico de  $F_\mu^2$

No gráfico 3.5 o conjunto  $I_0$  é a união dos dois intervalos fechados a esquerda de  $A_0$  assim como o conjunto  $I_1$  é a união dos dois intervalos fechados a direita de  $A_0$ , a imagem de cada um destes intervalos é igual a  $I$ , logo muitos destes pontos são levados a  $A_0$ . O conjunto  $A_0$  é um intervalo aberto, pois é formado pelos pontos  $F_\mu^n(x) > 1$ , o conjunto  $A_1$  é a união de dois conjuntos abertos formados pelos pontos  $x \in (I_0 \cup I_1)$  tais que  $F_\mu(x) \in A_0$ , o conjunto  $A_2$  são os pontos  $x \in (I_0 \cup I_1)$  tais que  $F_\mu^2(x) \in A_0$ , portanto pelo gráfico 3.5 este conjunto é a união de 4 conjuntos abertos.

Continuando desta maneira podemos notar que  $A_n$  consiste em  $2^n$  intervalos abertos disjuntos, ou seja  $I - (A_0 \cup \dots \cup A_n)$  consiste em  $2^{n+1}$  intervalos fechados, pois o número de intervalos em  $(A_0 \cup \dots \cup A_n)$  é

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 1 + 2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Além disso observamos que  $F_\mu^{n+1}$  é uma função monótona em cada um destes intervalos de  $I$ , De fato o gráfico de  $F_\mu^{n+1}$  se alterna em crescente e decrescente nestes intervalos. Assim o gráfico de  $F_\mu^{n+1}$  tem  $2^n$  pontos de máximo local em  $I$  e portanto  $F_\mu^n$  atravessa a reta  $y = x$  ao menos  $2^n$  vezes. Isto implica que cada  $F_\mu^n$  tem  $2^n$  pontos fixos.

A construção de  $\Lambda$  se assemelha a construção do conjunto de Cantor; obtido removendo terços médios de conjuntos fechados, isto induz a próxima definição.

**Definição 26.** *Um conjunto  $C$  é um conjunto de Cantor se for fechado, totalmente desconexo e perfeito contido em  $I = [0, 1]$ . Um conjunto é totalmente desconexo se não possui nenhum intervalo e perfeito se cada ponto for um ponto de acumulação (Devaney, 1985, p. 37).*

Vamos provar que  $\Lambda$  é um conjunto de cantor, esta demonstração é dividida nos lemas a seguir. O primeiro lema diz respeito ao módulo da derivada de  $F_\mu$ . Ele é essencial para garantir que  $\Lambda$  seja desconexo.

**Lema 1.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $|F_\mu'(x)| > 1$ , para todo  $x \in I_0 \cup I_1$ .*

**Demonstração.** *Vamos determinar as extremidades dos conjuntos  $I_0$  e  $I_1$  para uma iteração de  $F_\mu$ . Por definição  $I_0 \cup I_1 = I - A_0$ , então devemos determinar quais valores  $x$  tais que  $F_\mu(x) > 1$ .*

$$\mu x(1 - x) = 1$$

$$x' = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu} \text{ ou } x'' = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}, \text{ para todo } \mu > 4.$$

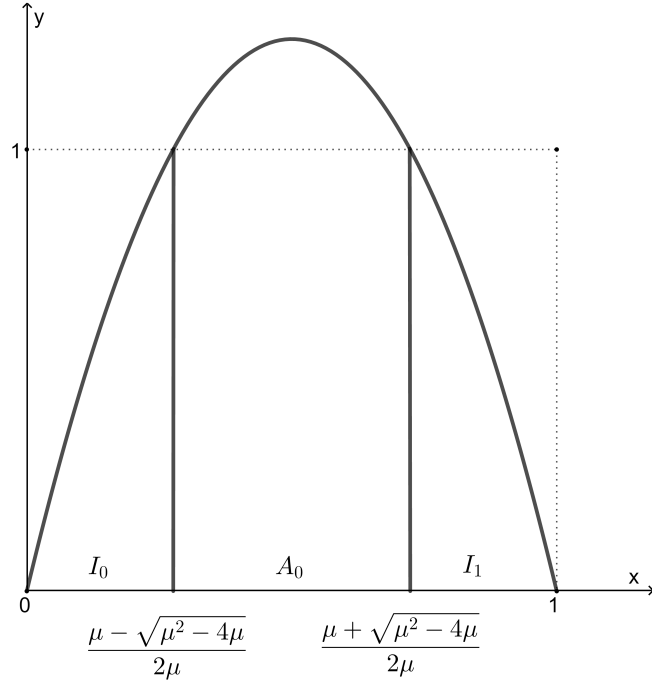


Figura 3.6: Extremidades dos intervalos  $I_0$  e  $I_1$  após uma iteração de  $F_\mu$

Pelo o gráfico 3.6,  $I_0 = \left[ 0, \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu} \right]$  e  $I_1 = \left[ \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}, 1 \right]$ , para todo  $\mu > 4$ . Os intervalos  $I_0$  e  $I_1$  são simétricos em relação ao eixo da parábola do gráfico de  $F_\mu$ , portanto a análise feita sobre  $I_0$  também se aplica a  $I_1$ . No intervalo  $I_0$ , a função  $F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x) = \mu - 2\mu x$  é decrescente, e atinge seu mínimo no extremo da direita. Vamos calcular  $F'_\mu\left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right)$ .

$$\begin{aligned} F'_\mu\left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right) &= \mu - 2\mu\left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right) \\ F'_\mu\left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right) &= \sqrt{\mu^2 - 4\mu}. \end{aligned}$$

Como  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  implica  $\mu^2 - 4\mu > 1$ , temos que se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  então  $|F'_\mu(x)| > 1$ .

**Lema 2.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto totalmente desconexo.

**Demonstração.** Suponha que existam  $x, y \in \Lambda$  com  $x \neq y$  próximos o suficiente para que  $[x, y] \in \Lambda$ . Para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'_\mu(\alpha)| > \lambda$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ , pela regra da

cadeia temos  $|(F_\mu^n)'(a)| > \lambda^n$  para todo  $a \in [x, y]$ , podemos escolher  $n$  grande o suficiente para  $\lambda^n|x - y| > 1$ . Pelo teorema do valor médio  $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| = F_\mu^n'(a)|x - y|$  e portanto  $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| \geq \lambda^n|x - y|$  logo  $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > 1$ , isto significa que a distância entre  $F_\mu^n(x)$  e  $F_\mu^n(y)$  é maior que 1 e portanto pelo menos um deles não pertence ao intervalo  $I$  o que contradiz  $[x, y] \in \Lambda$ . Logo  $\Lambda$  é totalmente desconexo. ■

**Lema 3.**  $\Lambda$  é um conjunto fechado.

**Demonstração.** Como  $\Lambda$  é a interseção de conjuntos fechados,  $\Lambda$  é fechado.

**Lema 4.**  $\Lambda$  é um conjunto perfeito.

**Demonstração.** Dado um ponto  $x \in \Lambda$  e um número  $\epsilon > 0$ , precisamos mostrar que existe um ponto  $y \in \Lambda$  tal que  $x \neq y$  e  $|x - y| < \epsilon$ . Isso é equivalente a mostrar que  $x$  é um ponto de acumulação em  $\Lambda$ . Então seja  $A_k$  um intervalo no qual  $x$  pertence. Pela regra da cadeia, dentro deste intervalo,  $|(F_\mu^n)'(x)| > \lambda^n$ . Usando o teorema do valor médio para um ponto  $y \neq x$  pertencente ao mesmo intervalo, temos que

$$|F^n(x) - F^n(y)| > \lambda^n|x - y|.$$

Como  $|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1$ , a desigualdade acima garante que

$$|x - y| < \frac{1}{\lambda^n}.$$

Vamos tomar  $y$  como um dos dois intervalos de  $A_k$ , lembrando os extremos de todos os intervalos  $A_k$  pertencem a  $\Lambda$ . Agora basta tomar o valor  $n$  de modo que

$$\frac{1}{\lambda^n} < \epsilon.$$

■

**Teorema 4.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor

Pelos Lemas 2, 3, 4, é satisfeita a definição 26, de conjunto de Cantor. Logo  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.



## 3.2 Dinâmica simbólica

Nesta seção vamos fornecer um modelo para a estrutura dinâmica da função quadrática  $F_\mu$  no conjunto de Cantor  $\Lambda$ . Para isto, precisamos de um espaço onde a função atuará. Neste espaço os pontos serão sequências infinitas de 0's e 1's.

**Definição 27.** *O conjunto de todas as sequências infinitas contendo apenas 0's e 1's é definido por*

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0s_1s_2\dots) \mid s_j = 0 \text{ ou } 1\}.$$

São exemplos de elementos de  $\Sigma_2$  as sequências infinitas (000000...), (1001101...) e (010101...). Não estamos interessados em convergência de alguma delas. Vamos introduzir uma métrica em  $\Sigma_2$  de modo a transformá-lo em espaço métrico. Sejam  $s = (s_0s_1s_2\dots)$  e  $t = (t_0t_1t_2\dots)$  duas sequências, definimos a distância entre eles como

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Como  $|s_i - t_i|$  é 0 ou 1, essa série positiva infinita é limitada superiormente pela série geométrica

$$d[s, t] \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

que é convergente, logo  $d$  é bem definida.

**Teorema 5.**  *$d$  é uma métrica em  $\Sigma_2$ .*

**Demonstração.** *Claramente  $d[s, t] \geq 0$  para todo  $s, t \in \Sigma_2$ .  $d[s, t] = 0$  se e somente se  $s_i = t_i$  para todo  $i$ . Como  $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ ,  $d[s, t] = d[t, s]$ . Se  $r, s$  e  $t \in \Sigma_2$ , então  $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$  daí obtemos  $d[r, s] + d[s, t] \geq d[r, t]$ . ■*

**Teorema 6.** *Sejam  $s, t \in \Sigma_2$  e suponha  $s_i = t_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Então  $d[s, t] \leq 1/2^n$ . Inversamente, se  $d[s, t] < 1/2^n$ , então  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ .*

**Demonstração.** *Se  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ , então*

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^n \frac{s_i - t_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{2^i}$$

$$d[s, t] \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Por outro lado se  $s_j \neq t_j$  para algum  $j \leq n$ , então nós teremos

$$d[s, t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n},$$

consequentemente, se  $d[s, t] < 1/2^n$ , então  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$  (Devaney, 1985, p. 41). ■

Este resultado nos garante que duas sequências em  $\Sigma_2$  são próximas desde que seus primeiros termos sejam iguais.

A aplicação *shift* elimina o primeiro termo da sequência e move todos os outros termos uma casa para esquerda.

**Definição 28.** A aplicação **shift**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  é definida como  $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$ .

**Teorema 7.**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  é contínua.

**Demonstração.** Seja  $\epsilon > 0$  e  $s = (s_0s_1s_2\dots)$ . Escolha  $n$  tal que  $1/2^n < \epsilon$  e seja  $\delta = 1/2^{n+1}$ . Se  $t = (t_0t_1t_2\dots)$  satisfaz  $d[s, t] < \delta$ , então pelo teorema 6, temos  $s_i = t_i$  para  $i \leq n + 1$ . Portanto a  $i$ -ésima entrada de  $\sigma(s)$  e de  $\sigma(t)$  são iguais para  $i \leq n$ . Consequentemente  $d[\sigma(s)\sigma(t)] \leq 1/2^n < \epsilon$  (Devaney, 1985, p. 41). ■

A dinâmica de  $\sigma$  é simples de ser entendida, pontos periódicos de período  $n$ , por exemplo, são sequências formadas por repetição de blocos com  $n$  termos, ou seja, sequências da forma  $s = (s_0 \dots s_{n-1} | s_0 \dots s_{n-1} | s_0 \dots s_{n-1} | \dots)$ . Relembrando que o período considerado não é, necessariamente, o primal.

**Teorema 8.** A cardinalidade  $Per_n(\sigma)$  é  $2^n$ .

**Demonstração.** Existem duas sequências em  $\Sigma_2$  formadas por repetição de blocos com apenas um termo, a saber, as sequências  $(0|0|0|0|\dots)$  e  $(1|1|1|1|\dots)$  (é claro que pontos periódicos de período 1 são também pontos fixos). Quatro sequências formadas por repetição de blocos com dois termos, são elas,  $(00|00|00|\dots)$ ,  $(01|01|01|\dots)$ ,  $(10|10|10|\dots)$  e  $(11|11|11|\dots)$ . Como existem duas possibilidades para cada termo de uma sequência de  $\Sigma_2$ , existem  $2^n$  possibilidades de blocos com  $n$  termos. ■

**Teorema 9.**  $Per(\sigma)$  é denso em  $\Sigma_2$ , ou seja, o fecho de  $Per(\sigma)$  é todo o espaço  $\Sigma_2$ .

**Demonstração.** Considere um ponto  $s = (s_0s_1s_2\dots) \in \Sigma_2$  dado. Precisamos exibir uma sequência de pontos periódicos  $\tau^n = (\tau_0^n \tau_1^n \tau_2^n \dots) \in \Sigma_2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , que convirja para  $s$ . Seja

$\tau^n = (s_0 \dots s_{n-1} | s_0 \dots s_{n-1} | \dots)$  a sequência periódica cujos termos são os mesmos da sequência  $s$  até o  $n$ -ésimo termo, pelo teorema 6, temos  $d[\tau^n, s] \leq 1/2^n$ , então  $\tau^n \rightarrow s$ . ■

**Teorema 10.** *Existe ao menos um ponto  $s^*$  cuja órbita sob ação de  $\sigma$  é densa em  $\Sigma_2$ .*

**Demonstração.** *Considere a sequência  $s^* \in \Sigma_2$  tal que*

$$s^* = (\underbrace{01}_{\text{bloco 1}} | \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{bloco 2}} | \underbrace{000\ 001\ 010\ 011\ \dots}_{\text{bloco 3}} | \underbrace{0000\ 0001\ \dots}_{\text{bloco 4}} | \dots).$$

*O primeiro bloco de  $s^*$  é composto por todos sub-blocos de tamanho 1. O segundo bloco é composto por todos os sub-blocos de tamanho dois, e assim por diante. Portanto alguma iteração de  $\sigma$  aplicada em  $s^*$  produz uma sequência que é igual a qualquer sequência dada independente da quantidade de números.* ■

Conforme a definição 22, uma aplicação com órbita densa é também topologicamente transitiva.

### 3.3 Dinâmica simbólica de $F_\mu$

Nesta seção vamos provar que a dinâmica de  $\sigma$  estudada na seção anterior é equivalente à dinâmica de  $F_\mu$  e que  $F_\mu$  é caótica.

**Definição 29.** *O itinerário de  $x \in \Lambda$  é a sequência  $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$  com  $s_j = 0$  se  $F_\mu^j(x) \in I_0$  ou  $s_j = 1$  se  $F_\mu^j(x) \in I_1$ .*

**Teorema 11.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  é um homeomorfismo.*

**Demonstração.** *Primeiro vamos provar que  $S$  é injetiva. Seja  $x, y \in \Lambda$  com  $x \neq y$ , e suponha  $S(x) = S(y)$ . Então para todo  $n$ ,  $F(x)_\mu^n$  e  $F(y)_\mu^n$  pertencem ao mesmo lado da reta  $x = 1/2$ . Isto implica que  $F_\mu$  é monótona no intervalo entre  $F(x)_\mu^n$  e  $F(y)_\mu^n$ . Consequentemente, todos os pontos neste intervalo pertencem a  $I_0 \cup I_1$ , pois é um intervalo monótono com extremos  $F(x)_\mu^n, F(y)_\mu^n \in \Lambda$ . Mas se isto ocorrer, o intervalo  $[F(x)_\mu^n, F(y)_\mu^n] \in \Lambda$ , um absurdo, pois  $\Lambda$  é desconexo (Devaney, 1985, p. 44).*

*Vamos provar agora a sobrejetividade. Seja  $J \subset I$  um intervalo fechado, defini-*

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I | F_\mu^n(x) \in J\}.$$

A função  $F_\mu^{-1}$  é a pré-imagem de  $J$ , observe que se  $J \subset I$  é um intervalo fechado então  $F_\mu^{-1}$  consiste de dois subintervalos, um em  $I_0$  e outro em  $I_1$ .

Dada  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ , precisamos de um  $x \in \Lambda$  com  $S(x) = s$ , ou seja, precisamos de um ponto  $x \in \Lambda$ , tal que, seu itinerário seja igual a sequência  $s$ . Para isso, vamos definir o seguinte conjunto

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\}$$

como o conjunto de pontos  $x \in I$ , que seguem o itinerário  $s$ . Em particular, precisamos mostrar que este conjunto é não-vazio para garantir a sobrejetividade de  $S$ .

Como  $F_\mu^i(x) \in I_{s_i} \iff x \in F_\mu^{-i}(I_{s_i})$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos que

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Afirmamos que  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  é a interseção de uma sequência de intervalos encaixados fechados não vazios quando  $n \rightarrow \infty$ . Note que

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap F_\mu^{-2}(I_{s_2}) \cap F_\mu^{-3}(I_{s_3}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1} \left( I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap F_\mu^{-2}(I_{s_3}) \cap \dots \cap F_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n}) \right) \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}). \end{aligned}$$

A última passagem se justifica pois a interseção das pré-imagens de dois conjuntos é a pré-imagem da interseção (Lima, 2009a, p.16). Por indução podemos assumir que  $I_{s_1 \dots s_n}$  é um subintervalo não vazio, de modo que pela observação acima  $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$  consiste de dois intervalos, um em  $I_0$  e outro em  $I_1$ . Portanto  $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$  é um único intervalo não vazio. Estes intervalos são encaixados pois

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}.$$

Pelo teorema dos intervalos encaixados, concluímos que  $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$  é não vazio (Lima, 2009a, p.145). Se  $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ , então  $x \in I_{s_0}$ ,  $F_\mu(x) \in I_{s_1}$ ,  $F_\mu^2(x) \in I_{s_2}$  e assim por diante. Portanto  $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ . Isto prova a sobrejetividade de  $S$ . É importante

observar que  $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$  é um único ponto. Isto segue do fato de  $S$  ser injetiva, já provado anteriormente.

Vamos demonstrar a continuidade da aplicação  $S$  em um ponto  $x \in \Lambda$  dado, tal que  $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ . Seja  $\epsilon > 0$ , escolha  $n$  tal que  $1/2^{n+1} < \epsilon$ . Considere os subintervalos fechados  $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$  definidos para todas as combinações possíveis  $t_0 t_1 \dots t_n$ . Esses subintervalos são todos disjuntos e  $\Lambda$  está contido em sua união. Existem  $2^{n+1}$  destes intervalos e  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  é um deles. Portanto podemos escolher  $\delta > 0$  de modo a garantir que o intervalo  $(x - \delta, x + \delta)$  intercepte apenas  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ . Então se tomamos  $y \in \Lambda$  qualquer com  $|x - y| < \delta$ , temos  $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ . Logo  $S(y)$  é igual  $S(x)$  nos primeiros  $n + 1$  termos. Segue do Teorema 6 que

$$d[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon.$$

Isto prova a continuidade de  $S$ . De maneira análoga, prova-se que  $S^{-1}$  também é contínua. Portanto  $S$  é um homeomorfismo (Devaney, 1985). ■

Este teorema nos mostra que, do ponto de vista da topologia, os conjuntos  $\Lambda$  e  $\Sigma_2$  são iguais. O teorema a seguir prova que  $\Lambda$  e  $\Sigma_2$  são topologicamente conjugados pela aplicação  $S$ .

**Teorema 12.**  $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$ .

**Demonstração.** Um ponto  $x$  em  $\Lambda$  é definido unicamente pela sequência de intervalos encaixados

$$x = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

determinada pelo itinerário  $S(x)$ . Como a função  $F_\mu|_{I_{s_0}}$  é injetiva, a imagem da interseção de conjuntos é a interseção das imagens (Lima, 2009a, p.15), portanto podemos aplicar  $F_\mu$  ao conjunto  $I_{s_0 \dots s_n}$  abaixo, já que este é subconjunto de  $I_{s_0}$ ,

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}),$$

obtendo

$$F_\mu(I_{s_0 \dots s_n}) = I_{s_0} \cap I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \dots s_n}.$$

Como

$$S(F_\mu(x)) = S \left( F_\mu \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n} \right) \right)$$

$$S(F_\mu(x)) = S \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n} \right)$$

$$S(F_\mu(x)) = s_1 s_2 \dots = \sigma(S(x)) \text{ (Devaney, 1985, p.47).}$$

■

Vamos olhar a órbita dos pontos  $x \in \Lambda$ , a saber,  $\{x, F_\mu(x), F_\mu^2(x), \dots, F_\mu^n(x), \dots\}$  e a órbita das sequências  $S(x) \in \Sigma_2$ , a saber,  $\{S(x), \sigma(S(x)), \sigma^2(S(x)), \dots, \sigma^n(S(x)), \dots\}$ . Quando a aplicação  $S$  é aplicada na órbita de  $x \in \Lambda$  a imagem de cada ponto da órbita é um ponto de  $\Sigma_2$ , ou seja, uma sequência:

$$(S(x), S(F_\mu(x)), S(F_\mu^2(x)), \dots, S(F_\mu^n(x)), \dots).$$

O segundo termo da órbita de  $x \in \Lambda$  é  $F_\mu(x)$ , e o segundo termo da órbita de  $S(x) \in \Sigma_2$  é  $\sigma(S(x))$ . Pelo Teorema 12,  $\sigma(S(x)) = S(F_\mu(x))$ , portanto podemos calcular o segundo termo da órbita de  $x \in \Lambda$ , de duas maneiras. Na primeira calcula-se  $\sigma(S(x))$ , aplicando a aplicação shift uma vez na sequência  $S(x)$ , na segunda, calcula-se o segundo termo da órbita de  $x \in \Lambda$ , que é  $F_\mu(x)$ , e depois, usa-se o homeomorfismo  $S$  para levar o valor  $F_\mu(x)$  para  $\Sigma_2$ , ou seja, calcula-se  $S(F_\mu(x))$ . Podemos fazer o mesmo para os próximos termos da órbita de  $x \in \Lambda$ . O terceiro termo  $\sigma^2(S(x))$  da órbita de  $\Sigma_2$ , por exemplo, é obtido calculando-se o terceiro termo da órbita de  $x \in \Lambda$ , que é  $F_\mu^2(x)$ , e depois a imagem desse número pelo homeomorfismo  $S$ , ou seja,  $S(F_\mu^2(x))$ . Para obter este resultado vamos chamar  $F_\mu(x)$  de  $y$ , então

$$S(F_\mu^2(x)) = S(F_\mu(F_\mu(x))) = S(F_\mu(y)),$$

pela conjugação topológica,

$$S(F_\mu^2(x)) = \sigma(S(y)) = \sigma(S(F_\mu(x))) = \sigma(\sigma(S(x))) = \sigma^2(S(x)).$$

Indutivamente este resultado segue para os outros termos da órbita de  $x \in \Lambda$ , ou seja, a aplicação  $S$  leva o  $n$ -ésimo termo  $F_\mu^n(x)$  no  $n$ -ésimo termo  $\sigma^n(S(x))$ .

A conjugação topológica tem como consequência a preservação das características dinâmicas: o número de pontos fixos, de órbitas periódicas, se é atrator ou repulsor, se é denso ou não, se é sensível às condições iniciais, etc. Portanto a dinâmica de  $\sigma$  em  $\Sigma_2$  é basicamente a mesma de  $F_\mu$  em  $\Lambda$ . Pelos resultados já provados sobre *shift*, em  $\Sigma_2$  temos:

**Teorema 13.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então:*

*i) A cardinalidade  $Per_n(F_\mu)$  é  $2^n$ .*

*ii)  $Per(F_\mu)$  é denso em  $\Lambda$ .*

*iii) Existe uma órbita densa de  $F_\mu$  em  $\Lambda$  e, portanto,  $F_\mu$  é topologicamente transitiva.*

**Lema 5.** *A função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , com  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , é sensível às condições iniciais em  $\Lambda$ . Ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in \Lambda$  e toda vizinhança  $V$  de  $x$ , existem  $y \in V$  e  $n \geq 0$ , tal que  $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta$ .*

**Demonstração.** *Escolhendo  $\delta$  menor que o diâmetro de  $A_0$ , sejam  $x, y \in \Lambda$ . Se  $x \neq y$ , então  $S_1(x) \neq S_1(y)$ , então o itinerário de  $x$  e de  $y$  devem ser diferentes ao menos em um ponto, digamos o  $n$ -ésimo, mas isto significa que  $F_\mu^n(x)$  e  $F_\mu^n(y)$  pertencem a lados oposto de  $A_0$ , ou seja*

$$|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta.$$

■

**Teorema 14.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ ,  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  é caótica.*

**Demonstração.** *Pelo teorema 12,  $\sigma$  e  $F_\mu$  são topologicamente conjugadas, portanto a conclusão segue da definição 24, do Teorema 13 e do Lema 5.*

**Corolário 15.**  *$\sigma$  é caótica.*

A conclusão do teorema 14 e seu corolário traduz o poder da dinâmica simbólica para investigar os sistemas dinâmicos discretos. O comportamento caótico na família de funções quadráticas quer dizer que dados dois pontos arbitrariamente próximos  $x_0$  e  $x_1$  em  $\Lambda$ , suas órbitas podem visitar intervalos diferentes, isto é, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_\mu^n(x_0) \in I_k$  e  $F_\mu^n(x_1) \in I_j$ , com  $k \neq j$ . Enquanto  $x_0$  é levado para  $I_0$  em alguma iteração de  $F_\mu$ ,  $x_1$  pode ser levado para  $I_1$ , na mesma iteração. Portanto uma pequena alteração na escolha do ponto inicial pode resultar em órbitas diferentes a partir de alguma iteração.

# Capítulo 4

## A ferradura de Smale

### 4.1 A ferradura de Smale

Vamos estudar a aplicação ferradura de Smale definida em  $\mathbb{R}^2$  e que se assemelha em vários aspectos com a função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , definida em  $\mathbb{R}$ . Para isto vamos compreender a dinâmica simbólica da ferradura.

Consideremos a região  $D$ , chamada de estádio, que consiste de três componentes: um quadrado central  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  de lado 1 e dois semicírculos de raio 1,  $D_1$  à esquerda de  $Q$  e  $D_2$  à direita, logo  $D = Q \cup D_1 \cup D_2$  conforme figura abaixo.

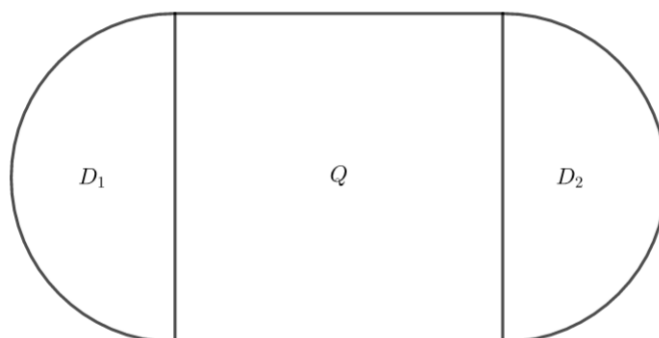


Figura 4.1: O estádio  $D$

A aplicação ferradura de Smale  $F$  transforma  $D$  dentro de si mesmo de acordo com a descrição a seguir. Primeiro,  $D$  é contraído linearmente na direção vertical por um fator  $\delta < 1/2$  e expandido na direção horizontal pelo fator  $1/\delta$  para que  $Q$  seja um retângulo longo e fino. Posteriormente  $Q$  é dobrado e colocado de volta em  $D$  em formato de ferradura.



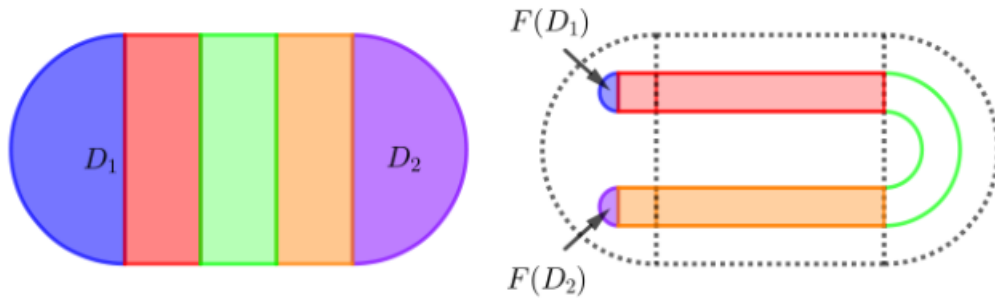


Figura 4.2: A ferradura de Smale

As regiões semicirculares  $D_1$  e  $D_2$  são contraídas e aplicadas dentro de  $D_1$ , o centro de  $Q$  é aplicado em  $D_2$ . Portanto  $F(D) \subset D$  como pretendíamos e esse  $F$  é injetivo. Entretanto como  $F$  não é sobrejetiva,  $F^{-1}$  não é globalmente definida. Este capítulo tem como objetivo estudar a dinâmica de  $F$  em  $Q$ .

Sejam  $H_j$ , para  $j \in \{0, 1\}$ , duas faixas horizontais disjuntas,

$$H_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y_1^j \leq y \leq y_2^j\},$$

com  $0 \leq y_1^0 < y_2^0 < y_1^1 < y_2^1 \leq 1$ , e sejam  $V_j$ , para  $j \in \{0, 1\}$  duas faixas verticais disjuntas,

$$V_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1^j \leq x \leq x_2^j, 0 \leq y \leq 1\}$$

com  $0 \leq x_1^0 < x_2^0 < x_1^1 < x_2^1 \leq 1$  (Ferreira, 2007).

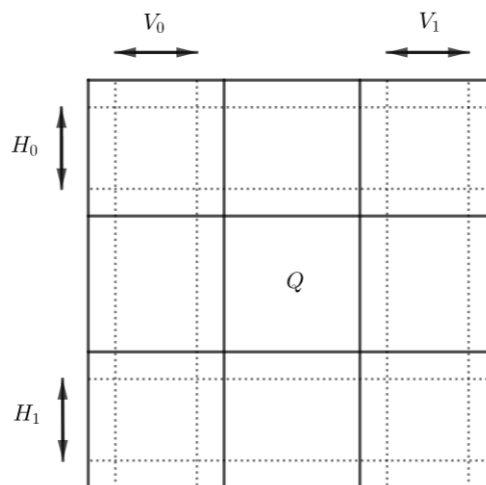


Figura 4.3: O quadrado  $Q$

A largura de  $V_0$  e  $V_1$  é  $\delta$  assim como a altura de  $H_0$  e  $H_1$ . Note que a pré-imagem

de  $F(Q) \cap Q$  consiste nos segmentos verticais  $V_0$  e  $V_1$  que são aplicados linearmente em  $H_0$  e  $H_1$  conforme figura 4.4.

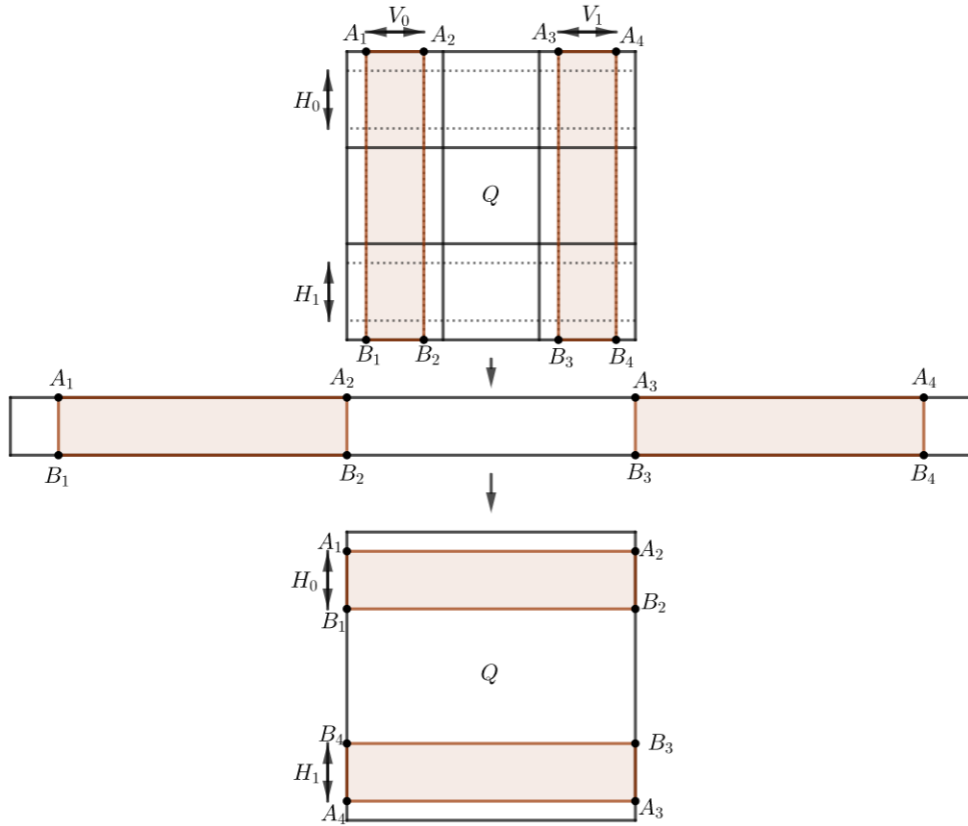


Figura 4.4: Pré-imagem de  $F(Q) \cap Q$

Pela linearidade de  $F : V_0 \rightarrow H_0$  e  $F : V_1 \rightarrow H_1$  segue-se que  $F$  preserva linhas horizontais e verticais em  $Q$ , ou seja, se  $H$  for um segmento horizontal em  $Q$ , cuja imagem esteja em  $Q$ , então o comprimento  $f(H)$  é o produto de  $1/\delta$  pelo comprimento de  $H$ . Se  $V$  for um segmento vertical em  $Q$  então o comprimento  $f(V) \subset Q$  é o produto de  $\delta$  pelo comprimento de  $V$ .

**Teorema 16** (Teorema da contração). *Seja  $F : B^2 \rightarrow B^2$ , onde  $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ . Suponha  $|F(x_1) - F(x_2)| < \lambda|x_1 - x_2|$  para todos os vetores  $x_i \in B^2$  e algum  $\lambda < 1$ . Então existe um único ponto fixo  $x_* \in B^2$ . Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = x_*$  (Devaney, 1985, p.172).*

A dinâmica de  $F$  é muito parecida com a da função quadrática  $F_\mu$  estudada em 3.1. Como  $F$  é uma contração de  $D_1$ , pelo teorema da contração,  $D_1$  possui um único ponto fixo  $p$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(q) = p$  para todo  $q \in D_1$ . Como  $F(D_2) \subset D_1$ , todas as órbitas futuras de  $D_2$  possuem o mesmo comportamento das órbitas de  $D_1$ . De maneira similar se  $q \in Q$  mas  $F^k(q) \notin Q$  para algum  $k > 0$ , então  $F^k(q) \in D_1 \cup D_2$ , daí  $F^n(q) \rightarrow p$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente para entender a órbita de  $F$  é suficiente considerar o conjunto de pontos cujas órbitas sempre permanecem em  $Q$ . Portanto vamos estudar o conjunto:

$$\Lambda = \{q \in Q \mid F^k(q) \in Q \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Para começar este processo recursivo observe que  $F(D) \subset D$ , logo na segunda iteração  $F^2(D) \subset F(D) \subset D$ . Para obtermos  $F^2(D)$  a região  $F(D)$  é contraída verticalmente e expandida horizontalmente em seguida é dobrada no meio e a região obtida é colocada dentro de  $f(D)$  conforme é representado na figura 4.5.

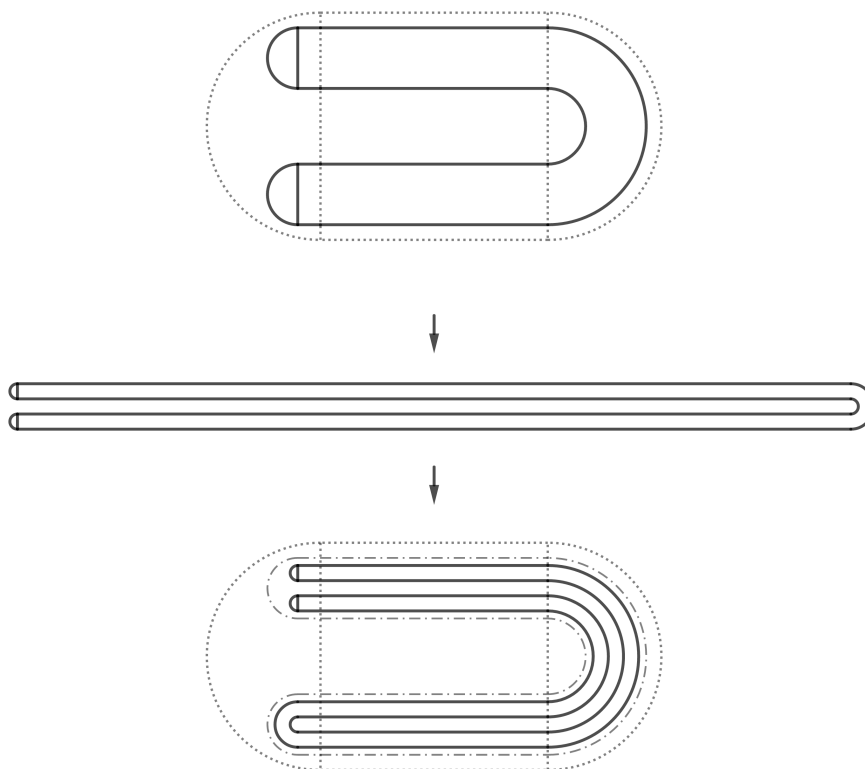


Figura 4.5: Transformação  $F^2$

Portanto  $F^2(D) \cap Q$  é formado por quatro faixas horizontais de largura  $\delta^2$ . Analogamente  $F^3(D) \cap Q$  consiste em oito faixas horizontais de largura  $\delta^3$ . Prosseguindo esta construção indutiva, obtemos o conjunto

$$\Lambda_+ = \{q \mid F^k(q) \in Q \text{ para } k \in \mathbb{N}\}.$$

que é o produto de um conjunto de Cantor por um conjunto de segmentos horizontais

(Devaney, 1985, p. 184).

Também podemos estudar a órbita inversa de um ponto  $q \in D$ . Fazendo a construção indutiva obtemos que  $F^{-1}(Q) \cap Q$  é a união  $V_0 \cup V_1$ , de duas faixas verticais de largura  $\delta$ , o conjunto  $F^{-2}(Q) \cap Q$  é composto por quatro faixas verticais de largura  $\delta^2$ , continuando este processo obtemos que

$$\Lambda_- = \{q | F^{-k}(q) \in Q \text{ para } k \in \mathbb{N}\}$$

é o produto de um conjunto de Cantor por um conjunto de segmentos verticais. Finalmente,

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$$

é o conjunto invariante em  $Q$ , pois todo ponto em  $\Lambda_+$  ou  $\Lambda_-$  é transportado por  $F$  para algum ponto em  $\Lambda$ . Este conjunto é formado pelos pontos que após  $n$  aplicações ( $n \in \mathbb{N}$ ) da aplicação  $F$  permanecem em  $Q$ , todos os outros pontos saem do conjunto  $Q$  após alguma iteração. É importante ressaltar que  $\Lambda$  é do tipo Cantor pois é um conjunto fechado, é a interseção de dois conjuntos perfeitos, logo também é perfeito, e é desconexo pois o conjunto  $\bigcap_{k=-n+1}^n F^k(Q)$  é a união disjunta de  $2^{2n}$  quadrados de lado  $\delta^n$  e  $\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} F^k(Q)$ .

## 4.2 Dinâmica simbólica da ferradura de Smale

Para introduzirmos a dinâmica simbólica neste sistema, necessitamos considerar a aplicação *shift*  $\sigma$  definida no espaço de símbolos  $\Sigma_2$ , formado por sequências bi-infinitas, pois a determinação do conjunto de Cantor  $\Lambda$  envolve iteradas futuras e passadas da aplicação ferradura de Smale  $F$  (Ferreira, 2007).

Cada ponto do conjunto  $\Lambda$  pode ser representado de maneira única usando um bloco de símbolos, para isto, a cada faixa do conjunto  $F^n(D)$  faremos corresponder um 0 ou um 1. Considere as faixas verticais  $V_0$  e  $V_1$ , observe que  $F(D) \cap Q = F(V_0) \cup F(V_1)$ , com  $F(V_0) \cap F(V_1) = \emptyset$ ; da mesma maneira  $F^2(D) \cap Q = F^2(V_0) \cup F^2(V_1)$ , com a interseção  $F^2(V_0) \cap F^2(V_1) = \emptyset$ , de maneira indutiva para  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$F^n(D) \cap Q = F^n(V_0) \cup F^n(V_1)$$

com  $F^n(V_0) \cap F^n(V_1) = \emptyset$ , pois  $V_0$  e  $V_1$  são disjuntos e  $F$  é um difeomorfismo sobre

sua imagem. Portanto toda faixa horizontal do conjunto  $F^n(D) \cap Q$  está contida em  $F^n(V_0)$  ou  $F^n(V_1)$ , se  $F^n(D) \cap Q \subset F^n(V_0)$  atribuímos-lhe o símbolo 0, se  $F^n(D) \cap Q \subset F^n(V_1)$  atribuímos-lhe o símbolo 1. Observe que duas faixas de  $F^2(D) \cap Q$  têm o símbolo 0, mas uma está em  $F(V_0)$  e a outra em  $F(V_1)$ , para diferenciá-las as faixas em  $F^2(D) \cap Q$  são descritas de maneira única por dois números. O número da direita representa a faixa em  $F(D) \cap Q$  e o da esquerda representa a faixa em  $F^2(D) \cap Q$ . conforme a figura 4.6.

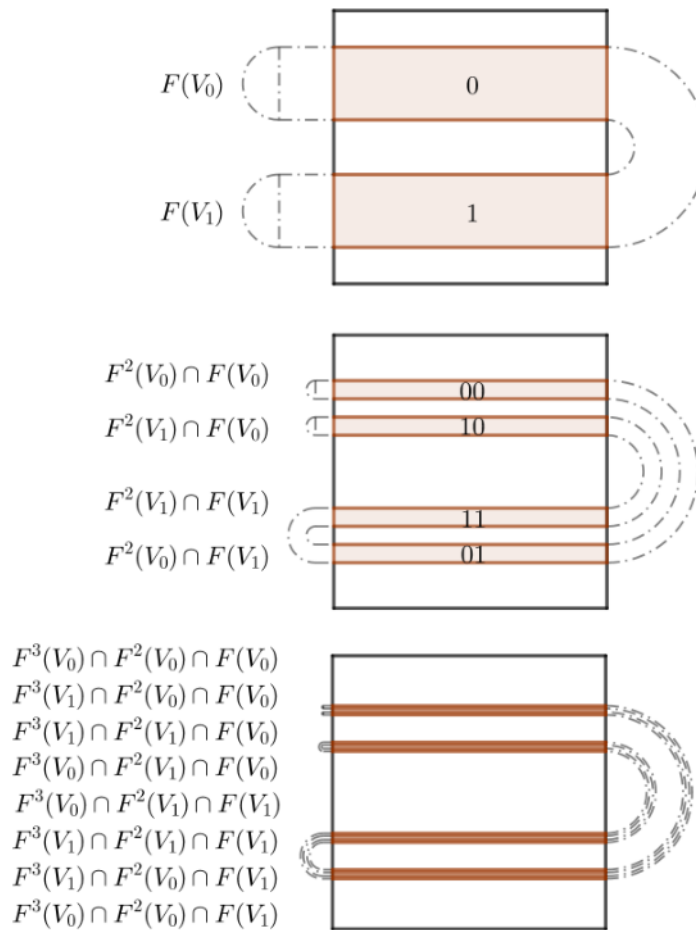


Figura 4.6: Representação simbólica das faixas horizontais em  $F$ ,  $F^2$  e  $F^3$

As faixas de  $F^3(D) \cap Q$  são representados de maneira única colocando a representação das faixas  $F^2(D) \cap Q$  e acrescentando a sua esquerda o símbolo correspondente a  $F^3(D) \cap Q$ . Na figura 4.7 podemos observar a representação simbólica ampliada das faixas horizontais em  $F^3$ .

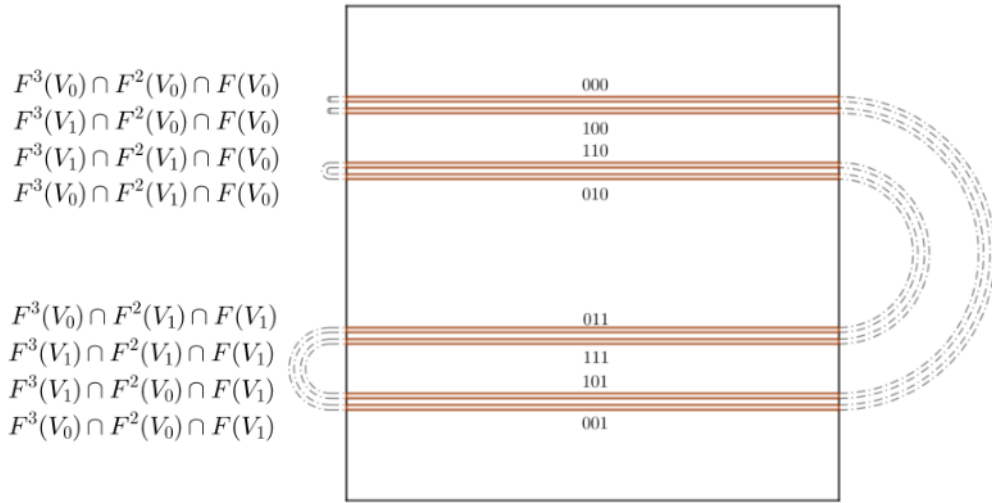


Figura 4.7: Representação simbólica ampliada das faixas horizontais em  $F^3$

Prosseguindo indutivamente obtemos que as faixas de  $F^n(D) \cap Q$  são univocamente determinadas por um bloco de  $n$  símbolos do conjunto  $\{0, 1\}$  (Ferreira, 2007, p. 194). De maneira análoga podemos associar os símbolos 0 e 1 as faixas verticais de  $F^{-n}(D) \cap Q$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Considerando as imagens de  $V_0$  e  $V_1$  pela aplicação  $F^{-1}$ , a cada faixa vertical de  $F^{-n}(D) \cap Q$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , atribuímos o símbolo  $i$ , se estiver contida em  $F^{-n}(V_i)$ , com  $i \in \{0, 1\}$ . Assim, para  $n \in \mathbb{N}$ , cada faixa  $F^{-n}(D) \cap Q$  se associa de maneira única a um símbolo e a sua direita coloca-se o símbolo correspondente a faixa  $F^{-(n-1)}(D) \cap Q$  conforme figura 4.8.

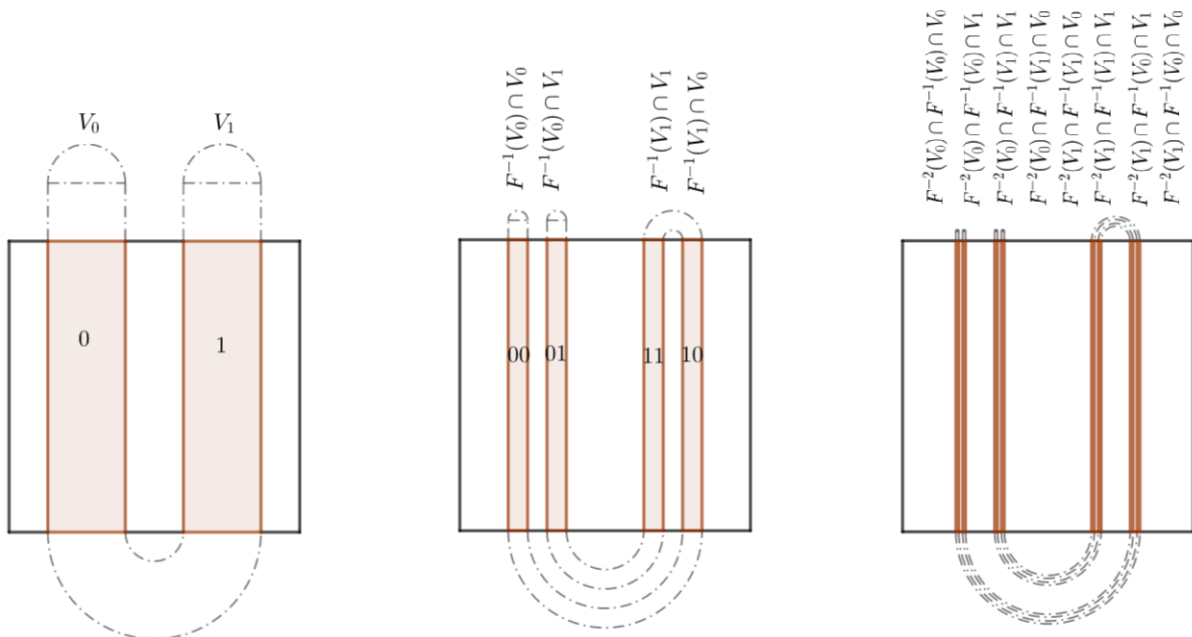


Figura 4.8: Representação simbólica das faixas verticais em  $F^{-1}$ ,  $F^{-2}$  e  $F^{-3}$

Conseqüentemente se  $p \in \Lambda_+ \cap \Lambda_-$  podemos associar um par de seqüências de 0 e 1 a  $p$ . Uma seqüência nos dá o caminho da órbita passada de  $p$ ; enquanto a outra descreve a órbita futura. Vamos juntar essas seqüências em uma seqüência bi-infinita de 0 e 1. Isto é, vamos definir o itinerário  $S(p)$  de um ponto  $p \in Q$ .

**Definição 30.** O itinerário de  $p \in Q$  é uma seqüência  $S(p) = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1 \dots)$  onde para todo  $j \geq 0$ ,  $s_j = k$  se e somente se  $F^j(p) \in H_k$  e para todo  $j < 0$ ,  $s_j = k$  se e somente se  $F^j(p) \in V_k$ .

Esta aplicação nos dá a dinâmica simbólica de  $\Lambda$ . Observe a representação simbólica dos quadrados de  $F^{-2} \cap F^2$  na figura 4.9.

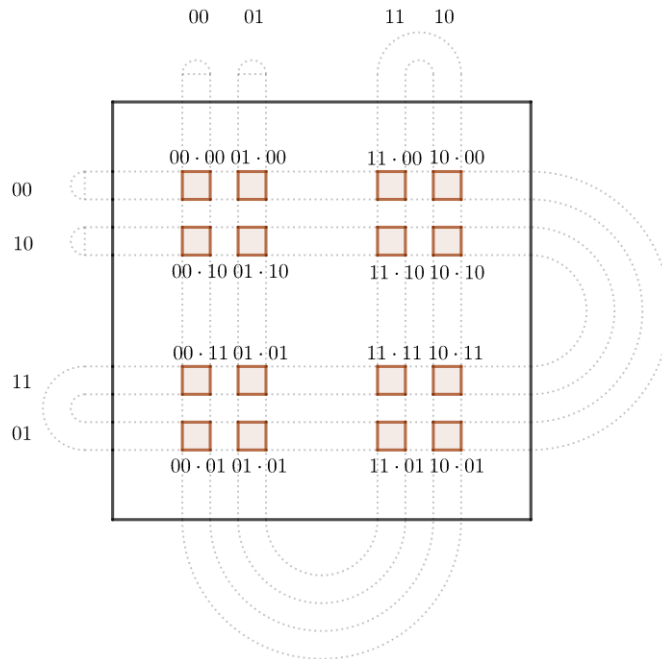


Figura 4.9: Representação simbólica dos quadrados em  $F^{-2} \cap F^2$

Seja  $\Sigma_2^2$  o conjunto de todas as seqüências bi-infinitas de 0 e 1:

$$\Sigma_2^2 = \{(s) = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \dots) \mid s_j = 0 \text{ ou } 1\}$$

impondo a métrica do Teorema 5 definimos a aplicação *shift* bilateral por

$$\sigma_2(\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \dots) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0 \cdot s_1s_2 \dots).$$

Ou seja  $\sigma_2$  desloca cada seqüência em  $\Sigma_2^2$  uma unidade para esquerda. Diferente da aplicação *shift* definida 28, esta possui inversa, que é determinada deslocando toda

a sequência uma unidade a direita. Quando não houver ambiguidade denominaremos as sequências bi-infinitas apenas por  $\Sigma_2$  e a aplicação  $\sigma_2$  por *shift*. A função  $S$  nos dá uma conjugação topológica entre  $F$  em  $\Lambda$  e  $\sigma$  em  $\Sigma_2$  como demonstrado no teorema abaixo.

**Teorema 17.** *Seja  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  a aplicação shift definida no espaço  $\Sigma_2$  de símbolos formado por sequências binárias bi-infinitas. A aplicação  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  definida acima é uma conjugação topológica entre as funções  $F|_\Lambda$  e  $\sigma$ .*

**Demonstração.** *Começemos provando que  $\sigma \circ S = S \circ F|_\Lambda$ . Seja  $q \in \Lambda$ , ponhamos  $S(q) = s$  e  $S(F(q)) = t$ . Então  $F^{j+i}(q) \in V_{s_{j+1}}$ . Por outro lado  $F^{j+1} = F^j(F(q)) \in V_{t_j}$ . Assim,  $s_{j+1} = t_j$  e  $\sigma(s) = t$ , isto é,  $\sigma(S(q)) = S(F(q))$ .*

*Provemos agora que  $S$  é contínua. Seja  $S(q) = s$ . Considere a vizinhança de  $s$*

$$N = \{t : t_j = s_j \text{ para } -n_0 \leq j \leq n_0\}.$$

*Para  $n_0$  fixo, a continuidade de  $F$  garante que existe  $\delta > 0$  tal que  $p \in \Lambda$  e  $|p - q| \leq \delta$ ,  $F^j(p) \in V_{s_j}$  para  $-n_0 \leq j \leq n_0$ . Assim, se  $t = S(p)$  e  $|p - q| \leq \delta$ , logo  $t \in N$ , portanto  $S$  é contínua.*

*Antes de provar a injetividade e a sobrejetividade vamos provar por indução que o conjunto  $\bigcap_{j=1}^n F^j(V_{s_{-j}})$  é uma faixa horizontal com largura  $\delta^n$ , para todo  $s \in \Sigma_2$ . Seja  $s \in \Sigma_2$ , para  $n = 1$ , temos que:*

$$F(V_{s_{-1}}) = H_{s_{-1}}$$

*Para  $n$ :*

$$\bigcap_{j=1}^n F^j(V_{s_{-j}}) = \bigcap_{j=2}^n F^j(V_{s_{-j}}) \cap F(V_{s_{-1}})$$

$$\bigcap_{j=1}^n F^j(V_{s_{-j}}) = F \left( \bigcap_{j=2}^n F^{j-1}(V_{s_{-j}}) \right) \cap F(V_{s_{-1}}).$$

*e, por hipótese de indução,  $\bigcap_{j=2}^n F^{j-1}(V_{s_{-j}})$  é uma faixa horizontal de comprimento  $\delta^{n-1}$ ,*

*resulta que  $\bigcap_{j=1}^n F^j(V_{s_{-j}})$  é uma faixa horizontal de comprimento  $\delta^n$ . Fazendo  $n$  tender*

*para  $+\infty$ , concluímos que  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} F^j(V_{s_{-j}})$  é um segmento de reta horizontal. Analogamente,*



$\bigcap_{j=-\infty}^0 F^j(V_{s_{-j}})$  é um segmento de reta vertical, e o conjunto  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} F^j(V_{s_{-j}})$  é formado por apenas um ponto (Ferreira, 2007, p. 197). Estes resultados serão usados na demonstração da injetividade e sobrejetividade de  $S$ .

Para mostra que  $S$  é injetiva suponhamos  $h(p) = h(q) = s$ . Para todo  $j$ ,  $f^{-j}(p)$  e  $f^{-j}(q)$  pertencem a  $V_{s_{-j}}$ , então  $p, q \in F^j(V_{s_{-j}})$ . Como  $j$  é qualquer, temos que  $p, q$  pertencem a  $\bigcap_{j=-\infty}^0 F^j(V_{s_{-j}})$  e também a  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} F^j(V_{s_{-j}})$ , logo  $p, q \in \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} F^j(V_{s_{-j}})$  que é formado por apenas um ponto, portanto  $p = q$ .

Vamos mostrar que  $S$  é sobrejetiva, como já provamos que  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} F^j(V_{s_{-j}})$  é um ponto, digamos  $r$ , então não é vazio. Para este ponto  $S(r) = s$  e portanto  $S$  é sobrejetiva. Logo  $S$  é um homeomorfismo o que conclui a demonstração (Robinson, 1995, p.253). ■

Todas as propriedades da antiga aplicação *shift* unilateral da definição 28 se mantêm para nosso novo  $\sigma$ , e pela conjugação topológica as propriedades da dinâmica de  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  são mantidas em  $F|_{\Lambda}$ .

Para cada iteração de  $F$  existem  $2^n$  seqüências bi-infinitas diferentes que são periódicas. Cada uma dessas seqüências identifica um ponto periódico em  $\Lambda$  e o conjunto de todos os pontos periódicos de  $F$  é denso em  $\Lambda$ .

Um conjunto infinito não-enumerável de pontos em  $\Lambda$  não é periódico, a saber, são aqueles cujas seqüências simbólicas pertencentes a  $\Sigma_2$  e não são periódicas.

Existe pelo menos uma órbita densa de  $F$ , ou seja, para uma iterada suficientemente elevada da aplicação ferradura de Smale, a órbita de algum ponto em  $\Lambda$ , fica arbitrariamente próxima de qualquer outro ponto em  $\Lambda$ . Além disso a ferradura possui sensibilidade às condições iniciais, portanto dado um ponto  $x \in \Lambda$ , pontos arbitrariamente próximos de  $x$ , se distanciam de  $x$  pelas iterações de  $F$ . Por último a ferradura é topologicamente transitiva, logo não pode ser decomposta em dois conjuntos abertos disjuntos que são invariantes segundo  $F$ . Portanto, a função ferradura de Smale é caótica.

O comportamento caótico da ferradura de Smale pode ser entendido de forma similar ao da família de funções quadráticas. Dados dois pontos arbitrariamente próximos em  $\Lambda$ , as seqüências que representam suas órbitas podem ser diferentes, ou seja, os pontos  $x_0$  e  $x_1$  visitam quadrados diferentes após alguma iteração de  $F$ . Isto não necessariamente acontece com todos os pontos, mas ocorre com uma infinidade deles. Portanto uma pequena alteração na escolha do ponto inicial pode resultar em órbitas muito diferentes.

### 4.3 Aplicações ao ensino médio

Nesta seção vamos mostrar como vários dos conceitos utilizados neste trabalho podem ser aplicados no ensino médio.

#### 4.3.1 Conjunto de Cantor

A construção do conjunto de Cantor, feita no capítulo 2, utiliza diversos conceitos de conjuntos e pode ser utilizada no ensino fundamental para o ensino de operações de conjunto e intervalos.

**Exemplo 17.** Considerando os conjuntos  $I = [0, 1]$  e  $C_2$  da construção do conjunto de Cantor vista na seção 2.1, vamos determinar  $I/C_2$ .

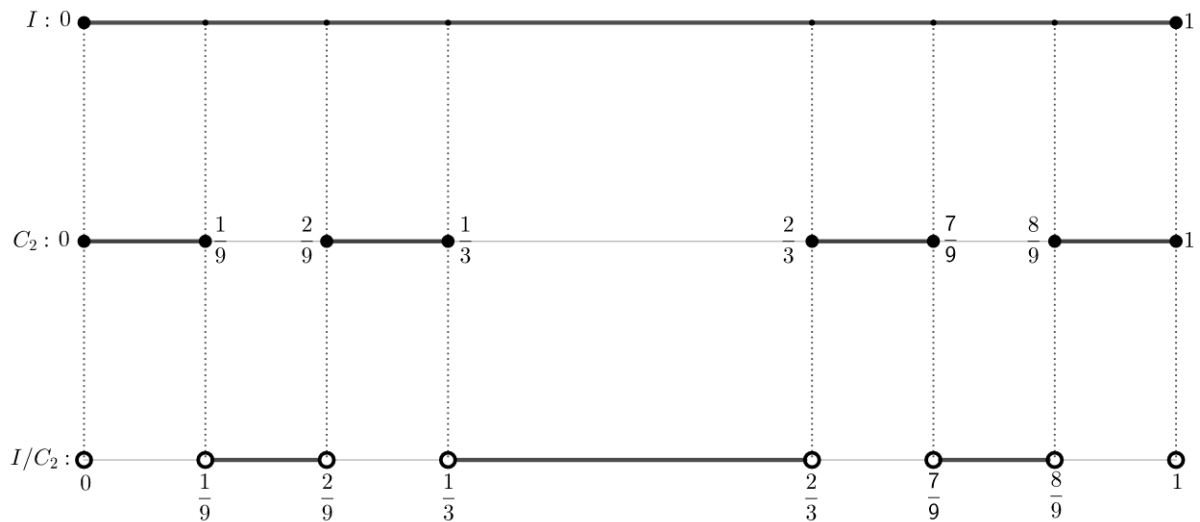


Figura 4.10: Representação de  $I/C_2$

$$\text{Portanto o conjunto } I/C_2 = \left[ \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right] \cup \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] \cup \left[ \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right].$$

Neste exemplo o conjunto de Cantor pode ser usado para explicar operações de conjuntos, conjunto aberto e fechado, de fato a cada passo da construção do conjunto de Cantor estes conceitos são aplicados.

**Exemplo 18.** A soma dos comprimentos dos intervalos removidos na construção do conjunto de Cantor, é um. De fato ao se construir o conjunto de Cantor, primeiro retira-se um intervalo de comprimento  $\frac{1}{3}$ , em seguida retira-se dois conjuntos de comprimento  $\frac{1}{9}$ , e assim por diante. Procedendo de maneira indutiva a soma dos comprimentos removidos

do intervalo  $I$  será:

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{81} + \dots$$

Portanto, é a soma infinita de uma progressão geométrica de razão  $q = \frac{2}{3}$ . Utilizando a fórmula  $T = \frac{a_1}{1 - q}$ , obtemos

$$T = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

A diferença entre o comprimento do intervalo  $I$  e a somatória  $T$  dos intervalos removidos é zero, portanto o conjunto de Cantor tem comprimento zero, mesmo com uma infinidade de elementos (Baccarin, 2013, p.75).

O conjunto de Cantor também é rico em exemplos sobre relação de pertinência e inclusão.

**Exemplo 19.** Considere o conjunto  $I/C_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Os pontos  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  não pertencem a  $I/C_1$ , mas qualquer ponto entre  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  pertence. Portanto

$$i) \frac{1,9}{3} \in I/C_1.$$

$$ii) \frac{1,99}{3} \in I/C_1.$$

$$iii) \frac{1,999999}{3} \in I/C_1.$$

Ou seja, se tivermos uma quantidade finita de nozes nas casas decimais do numerador um, o ponto pertence ao conjunto  $I/C_1$ . Vamos verificar o que ocorre quando temos uma quantidade infinita de nozes, em outros termos, vamos verificar se  $\frac{1,999\dots}{3} \in I/C_2$ . O termo  $1,999\dots$  pode ser escrito da forma

$$1,999\dots = 1 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$$

$$1,999\dots = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$$

Como  $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$  é uma progressão geométrica de razão  $q = \frac{1}{10}$ , temos

$$1,999\dots = 1 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$1,999\dots = 1 + 1$$

$$1,999\dots = 2.$$

Portanto o termo  $\frac{1,999\dots}{3} = \frac{2}{3} \notin I/C_1$ .

### 4.3.2 Funções quadráticas

A família de funções quadráticas do capítulo 3 pode ser utilizada no ensino fundamental tanto para o estudo de funções quadradas quanto para os conceitos de função crescente, decrescente e composta, ao se observar a órbita de um ponto.

**Exemplo 20.** *Seja  $F_2(x) = 2x(1 - x)$  uma função quadrática. Vamos determinar suas raízes, o intervalo onde a função é crescente, decrescente e seu ponto de máximo. Pelos estudos do capítulo 3, sabemos que  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ , são as raízes da família de funções  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  e  $y_v = \frac{\mu}{4}$  é seu vértice. Logo as coordenadas do vértice de  $F_2$  são  $x_v = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}$  e  $y_v = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Portanto  $x = \frac{1}{2}$  é um ponto fixo que divide a reta real em dois intervalos, a função  $F_2$  é crescente no intervalo  $(-\infty, \frac{1}{2})$  e decrescente em  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ .*

Para ressaltar as possíveis aplicações da família  $F_\mu$  no ensino fundamental, vamos calcular alguns valores da composta  $F_\mu \circ F_\mu$ .

**Exemplo 21.** *Seja  $F_2(x) = 2x(1 - x)$ .*

$$i) (F_2 \circ F_2)(0) = F_2(F_2(0)) = F_2(0) = 0$$

$$ii) (F_2 \circ F_2)(1) = F_2(F_2(1)) = F_2(0) = 0$$

$$iii) (F_2 \circ F_2 \circ F_2)(0,8) = F_2(F_2(F_2(0,8))) = F_2(F_2(0,32)) = F_2(0,4352) = 0.49160192$$

O resultado dos dois primeiros itens, são consequências diretas das raízes da família de funções quadráticas  $F_\mu$ . O terceiro item é muito abstrato para estudantes do ensino fundamental, mas pode ser usado para compreender o comportamento das iterações  $F_2^n$  por meio do retrato de fase conforme a figura 4.11.

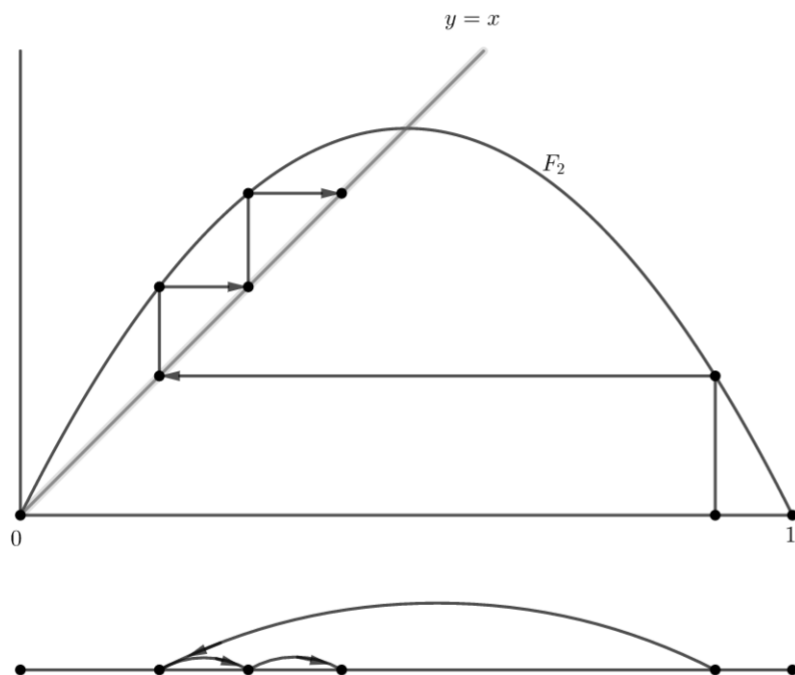


Figura 4.11: Retrato de fase de  $F_2 \circ F_2 \circ F_2(0, 85)$

O retrato de fase limitado ao intervalo  $[0, 1]$  nos dá a visão geométrica do comportamento de  $(F_2 \circ F_2 \circ F_2)(x)$ . É importante observar que o ponto  $x$  escolhido altera o comportamento do retrato de fase. De fato, se  $x > 1$  ou  $x < 0$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_2^n(x) = -\infty$ . O retrato de fase nos mostra este comportamento. A possibilidade de ver o comportamento das iterações de funções por meio de uma figura pode ser um instrumento poderoso de ensino.

A família de funções quadráticas  $F_\mu$  também pode ser utilizada para ensinar como o domínio de uma função determina a existência da função inversa.

**Exemplo 22.** Considere a função  $F_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, 1/2]$ , definida por  $F_2 = 2x(1-x)$ . Esta função não é injetiva, pois como  $x_v = 1/2$ , para todo  $a < 1/2$  existe um  $b > 1/2$  tal que  $F_2(a) = F_2(b)$ . logo  $F_2$  não possui inversa. Por outro lado as funções  $G : (-\infty, 1/2] \rightarrow (-\infty, 1/2]$  e  $H : (1/2, +\infty) \rightarrow (1/2, +\infty)$  são inversíveis. Vamos provar que  $G$  é inversível. Sejam  $x_1, x_2 \in (-\infty, 1/2]$ , se  $G(x_1) = G(x_2)$  então:

$$2x_1(1-x_1) = 2x_2(1-x_2)$$

$$x_1 - x_1^2 = x_2 - x_2^2$$

$$x_1^2 - x_1 = x_2^2 - x_2$$

complemento quadrados obtemos

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Como  $x_1 \in (-\infty, 1/2]$  então  $x_1 - \frac{1}{2} \leq 0$ , de maneira análoga  $x_2 - \frac{1}{2} \leq 0$ , daí

$$-\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) = -\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$x_1 - \frac{1}{2} = x_2 - \frac{1}{2}$$

$$x_1 = x_2.$$

Logo  $G$  é injetiva. Vamos provar agora a sobrejetividade. Dado  $y$  qualquer na imagem de  $G$ , precisamos provar que existe um  $x$  no domínio de  $G$  tal que  $G(x) = y$

$$2x(1-x) = y$$

$$2x - 2x^2 = y$$

$$x^2 - x = \frac{-y}{2}$$

completando quadrados obtemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-2y + 1}{4}.$$

Como  $x - \frac{1}{2} \leq 0$ , então

$$x - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{-2y + 1}{4}}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-2y + 1}}{2}.$$

Sabemos que  $y \leq \frac{1}{2}$ , portanto a raiz quadrada na última expressão é um número real.

Logo  $G$  é sobrejetiva. Concluimos, então, que  $G$  é bijetiva e, portanto, inversível.

## 4.4 Considerações finais

O conjunto de Cantor construído retirando-se os terços médios no intervalo  $I$ , apresenta diversas características incomuns a alunos do ensino médio. Sua construção pode ser utilizada para o ensino de união e interseção, e o estudo de suas características aprofunda o conhecimento de intervalos e conjuntos. Muitas ferramentas utilizadas neste trabalho, como intervalos abertos e fechados, função crescente e decrescente, função inversa, interseção de gráficos, conceito de distância e a análise da função do segundo grau destacando suas raízes, o vértice e a variação de seus coeficientes, podem ser aplicadas diretamente no ensino fundamental. Em particular, o retrato de fase que é utilizado na investigação das órbitas na função  $F_\mu$  é uma ferramenta extremamente eficiente na compreensão de funções compostas e é pouco conhecido no ensino fundamental.

As órbitas da família de funções quadráticas se alteram dependendo do valor de  $\mu$ . A dinâmica de  $F_\mu$  é simples de ser entendida quando  $1 < \mu < 3$ . Por outro lado, a dinâmica de  $F_\mu$ , no intervalo  $I$ , quando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  é bem mais complexa. Existem pontos que são retirados do intervalo  $I$  a cada iteração  $F_\mu$  e o conjunto de pontos invariantes no intervalo  $I$  segundo  $F_\mu$  é um conjunto de Cantor. Para entender o comportamento desses pontos utiliza-se a dinâmica da aplicação *shift* no espaço métrico  $\Sigma_2$ .

A dinâmica simbólica se mostra uma poderosa ferramenta de análise de sistemas dinâmicos discretos. O tempo gasto em sua construção é recompensado pela simplicidade e eficiência de sua aplicação. A dinâmica do conjunto  $\Sigma_2$  é de fácil compreensão, pontos fixos, periódicos, eventualmente periódicos são facilmente identificados. A conjugação topológica  $S$  garante a preservação das características dinâmicas de  $\Sigma_2$  em  $\Lambda$ . Com isto, resultados que seriam difíceis de se provar, como a existência de uma órbita densa de  $F_\mu$  em  $\Lambda$ , a infinidade de órbitas periódicas e o comportamento caótico, são obtidos diretamente utilizando o homeomorfismo  $S$ . De fato, por meio da dinâmica simbólica provamos resultados importantes para  $F_\mu$ , em especial seu comportamento caótico.

O comportamento caótico de uma aplicação é caracterizado por sua imprevisibilidade. Escolhendo dois pontos quaisquer de um conjunto caótico, um deles no aberto  $U$  e outro em um aberto  $V$ , existe um número de iterações  $k > 0$  tal que a interseção dos abertos não é vazia. Por outro lado, todo o conjunto caótico é sensível às condições iniciais, isto é, pontos arbitrariamente próximos se distanciam pelo menos um número  $\delta > 0$  pelas iterações da aplicação. Além desta imprevisibilidade todo o conjunto de pon-

tos periódicos é denso no domínio da aplicação. Na ferradura o comportamento caótico é entendido verificando quais quadrados são visitados pelos pontos de  $\Lambda$ . Estes quadrados são univocamente representados por uma sequência binária, e a sequência de quadrados que é visitada por um ponto é o itinerário do ponto. Logo, a ferradura é caótica pois escolhidos dois pontos arbitrariamente próximos as sequências que representam seus itinerários não são necessariamente iguais, ou seja, dois pontos arbitrariamente próximos podem visitar quadrados diferentes após um número suficientemente grande de iterações de  $F$ .

A rica dinâmica da ferradura de Smale é entendida por meio das sequências binárias bi-infinitas de  $\Sigma_2$ . De fato, pelo processo de construção da ferradura  $F(V_k) = H_j$ , logo quando aplicamos a função  $F$ , cada ponto invariante do quadrado  $Q$ , tem exatamente dois caminhos possíveis,  $H_0$  ou  $H_1$ . Pensando desta maneira parece natural associar a órbita desses pontos as sequências de 0's e 1's. Essa associação é feita por meio do homeomorfismo  $S$ . A órbita  $\{\dots, F^{-2}(x), F^{-1}(x) \cdot F_\mu(x), F_\mu^2(x), \dots\}$  de um ponto  $x \in \Lambda$ , pode ser determinada utilizando-se a órbita de uma sequência bi-infinita  $S(x) \in \Sigma_2$ , dada por  $\{\dots, \sigma^{-2}(S(x)), \sigma^{-1}(S(x)), S(x), \sigma(S(x)), \sigma^2(S(x)), \dots\}$ . Aplicando  $S$  à órbita de  $x$  obtemos  $\{\dots, S(F^{-2}(x)), S(F^{-1}(x)), S(x), S(F_\mu(x)), S(F_\mu^2(x)), \dots\}$ . Como  $S$  é uma conjugação topológica, pois  $S(F(x)) = \sigma(S(x))$ , qualquer iteração  $n$  de  $F$  sobre  $x$  pode ser determinada calculando-se  $\sigma^n(S(x))$ . Portanto, a dinâmica da ferradura de Smale em  $\Lambda$  é a mesma das sequências bi-infinitas em  $\Sigma_2$ .



# Referências Bibliográficas

- Alves, M. T. (2008). O conjunto de Cantor. Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis-SC.
- Baccarin, F. L. (2013). Conjuntos infinitos e suas surpresas: Uma sequência de atividades. Dissertação de Mestrado, UEL, Londrina.
- Devaney, R. L. (1985). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview, Boston.
- Ferreira, F. A. (2007). Dinâmica simbólica e ferradura de Smale. *Polytechnical Studies Review*, 8:183–199.
- Guidorizzi, H. L. (2008). *Um curso de Cálculo*. LTC, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2009a). *Curso de Análise vol.1*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2009b). *Elementos de topologia geral*. SBM, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2011a). *Análise Real: funções de uma variável*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2011b). *Curso de análise vol.2*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2011c). *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2013). *Números e funções reais*. SBM, Rio de Janeiro.
- Moura, E. C. (2017). Conjunto de Cantor: um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero. *31 Colóquio Brasileiro de Matemática*, 8:1–3.
- Robinson, C. (1995). *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC Press, New York.