



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

# A prova de Euler para a resolução do problema da Basileia

**Roberta de Jesus Santos**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa**

Barra do Garças - MT

Agosto de 2020

# A prova de Euler para a resolução do problema da Basileia

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Roberta de Jesus Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 26 de agosto de 2020.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa  
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto  
Prof. Dr. Maurício Donizetti Pieterzack

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

S237p Santos, Roberta de Jesus.  
A prova de Euler para a resolução do problema da Basileia /  
Roberta de Jesus Santos. -- 2020  
xiv, 100 f. ; 30 cm.

Orientador: Márcio Lemes de Sousa.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de  
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de  
Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia,  
2020.  
Inclui bibliografia.

1. Soma de séries infinitas. 2. Análise real. 3. Ensino Médio. I.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**  
**PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**  
**UFMT/CUA/ICET - BARRA DO GARÇAS**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO: A prova de Euler para a resolução do problema da Basileia**

**AUTORA: Mestranda Roberta de Jesus Santos**

Dissertação defendida e aprovada em 26/08/2020.

**COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA**

1. Doutor Márcio Lemes de Sousa (Presidente Banca / Orientador) - Universidade Federal de Mato Grosso
2. Doutor Adilson Antônio Berlatto (Membro Interno) - Universidade Federal de Mato Grosso
3. Doutor Maurício Donizetti Pieterzack (Membro Externo) - Universidade Federal de Goiás

**Barra do Garças, 26/08/2020.**



Documento assinado eletronicamente por **MARCIO LEMES DE SOUSA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 09/09/2020, às 17:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ADILSON ANTONIO BERLATTO, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 09/09/2020, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maurício Donizetti Pieterzack, Usuário Externo**, em 10/09/2020, às 22:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2821641** e o código CRC **FA575CSF**.

*Aos meus amados pais.*

# Agradecimentos

A Deus, por me conceder essa existência e por estar sempre ao meu lado nos momentos de tristeza e alegria, por permitir a realização desse sonho.

Aos meus pais, Alcir e Maria Lúcia, por todos os esforços empenhados para que eu chegasse até aqui.

À minha irmã, Camila, e ao meu cunhado, Thamer, pelo incentivo e apoio.

Ao meu amado marido, Eduardo, por ser companheiro nos momentos difíceis e pelo apoio em toda a trajetória no mestrado.

A toda a minha família, pela compreensão, em especial à minha sogra, dona Maria José de Lima (in memorian), vovó Luzia e ao vovô Albino (in memorian), que sempre estiveram na torcida por mim.

Ao Dr. Humberto Leão Velloso (in memorian), que sempre me incentivou a buscar conhecimento.

Ao meu professor de matemática da 8<sup>o</sup> série, Edvalson Furtunato de Freitas, que, a partir dos seus ensinamentos e da demonstração da forma canônica da equação de segundo grau, me sensibilizou a aprender matemática.

Ao meu professor orientador, grande amigo, Dr. Márcio Lemes de Sousa, pelo tempo dedicado, pelo apoio, pelas sugestões, correções, acompanhamentos efetuados, durante a elaboração deste trabalho e toda minha trajetória nesse programa, me encorajando nos momentos felizes e de dificuldade.

Aos professores do mestrado, em especial, Dr. Márcio Lemes de Sousa, Dr. Adilson Antônio Berlatto e Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins, pelas aulas e ensinamentos enriquecedores. Agradeço por colaborarem com essa expressiva etapa de aprendizado, pois suas contribuições me fizeram crescer.

Aos colegas de classe, em especial aos meus grandes amigos André Luiz Braga de Souza e Vivilene de Souza Sá, que me ajudaram a superar minhas limitações e estiveram

juntos comigo.

Aos egressos do programa, Aduino Zanata, Bruna Fernanda Sato Lopes e Fabrício Gonçalves de Jesus, que, prontamente, se dispuseram em compartilhar materiais e ferramentas de aprendizagem durante todo percurso.

Às minhas amigas Gleyca Vieira Farias e Valéria Aparecida Lanzoni Zanetoni, por me alentar nos percalços dessa etapa e por estar presentes em todos os momentos.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão dessa jornada.

“O começo é o fim e o fim é o começo”

Autor desconhecido.

# Resumo

A partir do desenvolvimento de novas ferramentas em matemática, os estudos de séries infinitas se constituíram em um patamar elevado no cenário da matemática pura e aplicada. O presente trabalho aborda uma contextualização histórica da vida e obra de Leonhard Paul Euler, apresentando um estudo sobre a prova de Euler para a resolução do problema da Basileia. Este problema, que permaneceu muito tempo sem solução, consistia em formular o resultado da soma dos inversos dos quadrados perfeitos. De modo geral, a pesquisa tem como objetivo analisar a engenhosa e elucidativa prova de Euler até a validação da prova pelo teorema da fatoração de Weierstrass. Aborda, também, outras resoluções elementares e algumas provas rigorosas para a solução do problema. Discute, ainda, sugestões de atividades relacionadas a soma de séries infinitas no Ensino Médio. Assim, se espera que este trabalho possa contribuir de maneira significativa para o ensino-aprendizagem de professores e alunos no âmbito acadêmico e no Ensino Médio.

**Palavras chave:** Soma de séries infinitas, análise real, Ensino Médio.

# Abstract

From the development of new tools in mathematics, the studies of infinite series constituted themselves in a high level in the scenario of pure and applied mathematics. The present work approaches a historical contextualization of the life and work of Leonhard Paul Euler, presenting a study about Euler's proof for solving the Basel problem. This problem, which remained unsolved for a long time, consisted of formulating the result of the sum of the inverses of the perfect squares. In general, the research aims to analyze Euler's ingenious and elucidative proof until the validation of the proof by the Weierstrass factorization theorem. It also approaches other elementary resolutions and some rigorous evidences for solving the problem. It discusses yet suggestions for activities related to the sum of infinite series in high school. Thus, it is expected that this work may contribute significantly to the teaching-learning of teachers and students in the academic scope and in high school.

**Keywords:** Sum of infinite series, real analysis, high school.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de figuras	xiii
Lista de tabelas	xiv
Introdução	1
<b>1 Esboço biográfico</b>	<b>3</b>
1.1 A vida de Leonhard Paul Euler . . . . .	3
<b>2 Notas introdutórias</b>	<b>14</b>
2.1 Polinômios . . . . .	14
2.1.1 Divisão de polinômios . . . . .	16
2.1.2 Relação entre raízes de polinômios . . . . .	17
2.2 Identidades trigonométricas . . . . .	18
2.2.1 Conceitos básicos . . . . .	19
2.2.2 Adição de arcos . . . . .	21
2.3 Sequências e séries . . . . .	25
2.3.1 Sequências numéricas . . . . .	25
2.3.2 Séries numéricas . . . . .	27
2.3.3 Série de funções . . . . .	33
2.3.4 Série de potências . . . . .	35
2.3.5 A convergência da série de potências . . . . .	35

2.3.6	Funções como séries de potências . . . . .	37
2.4	Série de Taylor . . . . .	37
2.4.1	Resultados adicionais para séries de potências . . . . .	40
2.5	Série de Fourier . . . . .	45
2.5.1	Periodicidade da função seno e cosseno . . . . .	45
2.5.2	Ortogonalidade das funções seno e cosseno . . . . .	47
2.5.3	Convergência da série de Fourier . . . . .	50
<b>3</b>	<b>O problema da Basileia e a prova de Euler</b>	<b>54</b>
3.1	O Contexto histórico do problema da Basileia . . . . .	54
3.2	A prova de Euler . . . . .	55
3.3	A não validade da prova de Euler . . . . .	58
3.4	A fatoração de Weierstrass . . . . .	59
3.5	O problema da Basileia e o teorema de Pitágoras . . . . .	60
3.6	A fórmula de Euler para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Outras provas do problema da Basileia</b>	<b>64</b>
4.1	A prova de Giesy . . . . .	64
4.2	A prova de Cauchy . . . . .	67
4.3	Prova utilizando a fórmula de Euler e a regra de L' Hôpital . . . . .	71
4.4	Prova usando a série de Fourier . . . . .	72
4.5	A prova de Apostol . . . . .	74
4.6	A prova de Harper . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Abordagens no Ensino Médio</b>	<b>83</b>
5.1	Soma de séries infinitas no Ensino Médio . . . . .	83
5.2	Proposta 01- O triângulo de Sierpinski . . . . .	84
5.3	Proposta 02- Lançamento de uma bola . . . . .	89
5.4	Proposta 03- Aplicação algébrica . . . . .	89
5.5	Proposta 04- Raiz da planta do mangue . . . . .	90
5.6	Proposta 05- Dízima periódica . . . . .	91
5.7	Proposta 06- Perímetro do triângulo . . . . .	92
5.8	Proposta 07- Molusco sobre a estrela do mar . . . . .	93



# Lista de Figuras

1.1	Leonhard Paul Euler. . . . .	4
1.2	Árvore genealógica da família Bernoulli. . . . .	5
1.3	Johann Bernoulli. . . . .	6
1.4	Katharina Gsell. . . . .	8
1.5	Salome Abigail Gsell. . . . .	13
2.1	Ciclo trigonométrico. . . . .	19
2.2	Fórmulas de adição de arcos. . . . .	22
3.1	O problema da Basileia e o teorema de Pitágoras. . . . .	61
4.1	$f(x) = x^2, -\pi < x < \pi, e f(x + 2\pi) = f(x)$ . . . . .	73
4.2	Sistemas de coordenadas rotacionado . . . . .	76
4.3	Região após rotação . . . . .	77
5.1	O Triângulo de Sierpinski. . . . .	85
5.2	Modelo de raiz de planta do mangue. . . . .	91
5.3	Representação do triângulo. . . . .	93
5.4	Molusco sobre a estrela do mar. . . . .	94
5.5	Semicírculos. . . . .	94

# Lista de Tabelas

5.1	Área do triângulo branco. . . . .	87
5.2	Soma das áreas dos triângulos brancos. . . . .	88

# Introdução

“Leiam Euler, leiam Euler. Ele é o mestre de todos nós”  
(Laplace)

A cada época, filósofos, sábios, cientistas e matemáticos descobriram e aperfeiçoaram axiomas, postulados e conceitos, a fim de colaborar para o progresso e desenvolvimento humano.

No decorrer da história da humanidade, diversos problemas na área de Matemática pura e aplicada permaneceram e ainda continuam em aberto no cenário que envolve o campo. Alguns desses problemas foram objetos de estudo para muitos matemáticos e perpassaram quase um século sem solução.

No século XVII, buscar valores exatos para soma de séries infinitas tornou-se um *hobby* para muitos matemáticos da época. Uma delas, em específico, desafiou grandes personalidades. Segundo Ávila (2008), essa série infinita, proposta por Pietro Mengoli (1625 – 1686), no ano 1644, consistia em formular o valor exato para a soma infinita dos inversos dos quadrados perfeitos, de maneira que:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Jacques Bernoulli (1654–1725) foi um dos matemáticos que procurou solucionar a série. Sem êxito, na cidade da Basileia, Bernoulli publicou em um livro a problematização da série, que ficou conhecida como o problema da Basileia. Por quase um século esse problema ficou em aberto, garantindo, assim, fama e notoriedade para quem conseguisse propor uma solução.

Diante deste contexto, coube a Leonhard Paul Euler a resolução da famosa série, que ficou intitulada como o produto infinito de Euler para a função seno.

Neste trabalho, apresentaremos o método engenhoso e elucidativo utilizado por

Euler em sua descoberta para a resolução do problema da Basileia, bem como exibiremos outras resoluções elementares e rigorosas no decorrer da história.

Mostraremos outro problema que ainda permanece em aberto, decorrente do problema da Basileia. As falhas dessa demonstração nos convidam à construção de uma teoria geral de produtos infinitos.

Para alcançar os objetivos desse trabalho, foram realizadas pesquisas bibliográficas em livros, artigos e dissertações, nacionais e internacionais, no sentido de propiciar ao leitor uma compreensão ampliada da prova de Euler para o Problema da Basileia, bem como outras resoluções ao longo da história. A análise de dados foi realizada por meio de uma leitura seletiva e reflexiva.

Nessa perspectiva, a presente pesquisa está subdividida em cinco capítulos, de maneira que:

Abordaremos no capítulo 1, um sucinto esboço bibliográfico da vida de Leonhard Paul Euler, desde seu nascimento na cidade da Basileia, sua estadia na Rússia, a passagem pela Alemanha e seu retorno para a Rússia.

Exporemos no capítulo 2, de forma breve, alguns conceitos e resultados que darão embasamento teórico a este trabalho, em particular, ao estudo de polinômios, algumas identidades trigonométricas, seqüências e séries, série de Taylor e série de Fourier.

No capítulo 3, faremos referência ao contexto histórico do problema da Basileia, e apresentaremos a resolução proposta por Euler. Abordaremos ainda, a passagem que continha a invalidade da prova, bem como o teorema da fatoração de Weierstrass, a representação geométrica do problema, a generalização de Euler para a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$  e o problema que permanece em aberto da soma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ , quando  $k$  for um número ímpar.

No capítulo 4, versaremos sobre outras provas elementares (prova de Cauchy, prova de Harper) e algumas provas rigorosas (prova de Apostol, prova de Fourier, prova de Giesy e prova usando L' Hôpital) para a solução do problema ao longo da história, a partir da prova de Euler.

No capítulo 5, apresentaremos algumas propostas de atividades de soma de séries infinitas, em progressão geométrica, para o Ensino Médio.

# Capítulo 1

## Esboço biográfico

Neste primeiro capítulo, será abordado um sucinto esboço biográfico da vida de Leonhard Paul Euler, desde seu nascimento na cidade da Basileia, sua estadia na Rússia, a passagem pela Alemanha e seu retorno para a Rússia. Nesse sentido, esta pesquisa possui o objetivo de destacar alguns pontos nas produções do autor, visto que, uma delas, subsidiará o desenvolvimento deste trabalho, e será detalhada no segundo capítulo. Para escrever este capítulo, utilizamos como referência Calinger (1996), Calinger (1976), Chaquiam (2012), Gillispie (1970), Dunham (1999), D'Ambrosio (2009), Pereira (2014) e Truesdell (2002).

### 1.1 A vida de Leonhard Paul Euler

No início do século XVIII, a Suíça esteve a frente na produção acadêmica da Matemática, onde, notoriamente, Leonhard Paul Euler (1707-1783) se destacou, devido às grandes contribuições nas diversas áreas, como astronomia, engenharia, matemática (álgebra, curvas, cálculo de variações, cálculo infinitesimal, geometria e séries), óptica, mecânica e música.

Leonhard Paul Euler nasceu em 1707, e viveu 76 anos, até o outono de 1783. Entretanto, a vida de Euler não era especialmente emocionante. Euler era uma pessoa bastante convencional, muito generosa, e foi uma das figuras mais célebres de seu século (Dunham, 1999).

Euler nasceu em 15 de abril, na cidade da Basileia, fronteira entre a França e Alemanha, na Suíça. Seu pai, Paul Euler, era um clérigo protestante de meios modestos,

que sonhava que Leonhard fosse pastor. Sua mãe, Marguaretha Brucker, também veio de uma família pastoral. Euler era filho primogênito e tivera duas irmãs mais novas, Anna Maria e Maria Magdalena. Posteriormente ao seu nascimento, sua família mudou-se para Riehen, uma cidade também na Suíça, onde passou sua infância (D'Ambrosio, 2009).

Na infância, Euler recebeu educação domiciliar, ficando sob a inspeção de seus pais. A formação domiciliar de Euler perpassou os estudos humanísticos, em que os estudos clássicos gregos e/ou romanos eram mediados por sua mãe. As instruções em Matemática eram conduzidas por seu pai, visto que, na época, toda construção acadêmica deveria passar por conhecimentos elementares da Matemática.

Paul e Margaretha eram muito rigorosos com a educação de Euler, o que defrontava com o comportamento inquieto e pródigo do pequeno Leonhard. Ele sempre estava envolvido com brinquedos curiosos sobre fenômenos físicos. No intuito de distraí-lo, “o pai deu-lhe um livro que era uma importante introdução à álgebra e muito popular na época, o *Die Coss*, de Christoph Rudolff, que continha questões desafiantes” (D'Ambrosio, 2009, p.17).

Euler era um jovem precoce, dominava vários idiomas e possuía memória extraordinária. Carregava em sua mente uma variedade de informações curiosas, incluindo orações, poemas, entre outros. Sua habilidade em realizar cálculos aritméticos sem o uso de lápis e papel era impressionante.



Figura 1.1: Leonhard Paul Euler.

Fonte: <https://www.picuki.com/media/2174192551458927662>

Em 1715, Euler voltou para Basileia, para a casa de sua avó materna, no intuito de

dar continuidade a seus estudos. Mais tarde, aos 14 anos, matriculou-se na Universidade de Basileia para estudar Medicina, Teologia, Astronomia, Física e Línguas Orientais, por influência de seu pai (Dunham, 1999).

Embora Paul Euler tivesse interesse que Euler fosse pastor Calvinista, a opção de Leonhard em estudar matemática não foi assumida por seu pai como ultraje, visto que as influências de Euler partiam da família Bernoulli. Paul Euler era amigo de Jacques Bernoulli (1654 - 1705), pai de Johann Bernoulli (1667- 1748). Euler foi o discípulo favorito de Johann Bernoulli (1667-1748), irmão de Jacob, e amigo de seus filhos Nicolaus II (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Johann II (1710-1790), como está apresentado na árvore genealógica da família Bernoulli.

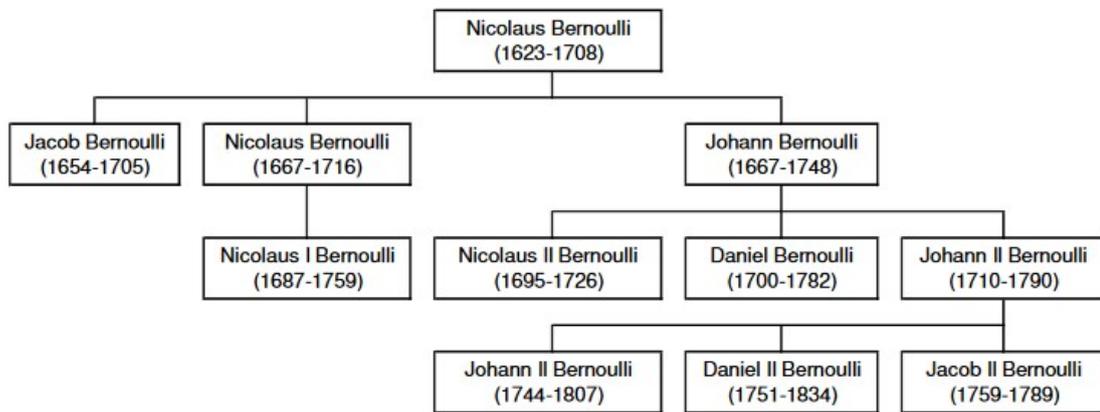


Figura 1.2: Árvore genealógica da família Bernoulli.  
Fonte: D'Ambrosio (2009).

Em relação à Johann Bernoulli (1667-1748), dois fatos devem ser considerados. Primeiramente, ele era um homem orgulhoso e arrogante, que tão rapidamente menosprezava o trabalho dos outros e, na mesma velocidade, enautecia suas produções. E, em segundo, qualquer elogio vindo dele, provalvemente era mais do que merecido.

Em 1721, Johann Bernoulli era, literalmente, o maior matemático da época (Leibniz havia morrido alguns anos antes e Newton havia abandonado a matemática há muito tempo). Bernoulli não era apenas um professor de Euler, era, na verdade, um mentor para o jovem estudioso, sugerindo-lhe leituras matemáticas e disponibilizando-se para estudar e discutir alguns pontos matemáticos com mais rigor.

Gillispie (1970, p. 468) pontua que anos mais tarde, Euler lembrou que “foi-me dada permissão para visitar (Johann Bernoulli) livremente todos os sábados à tarde, onde, gentilmente me explicou tudo o que eu não conseguia entender”.

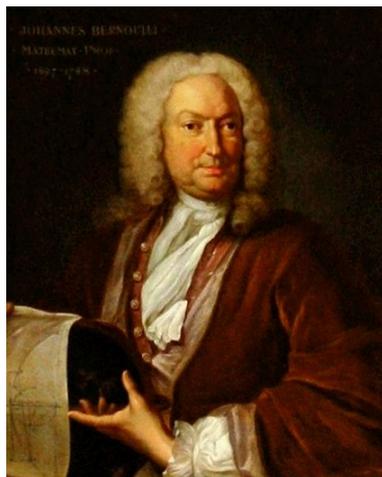


Figura 1.3: Johann Bernoulli.

Fonte: <https://www.picuki.com/media/2174192551458927662>

Euler afirmou que o método de ensino de Bernoulli era sem dúvida “o melhor método para o sucesso em assuntos matemáticos” (Dunham, 1999, p.20), e o rígido Johann Bernoulli notou que seu jovem pupilo tinha um talento especial, e, com o passar do tempo, Bernoulli foi quem mais aprendeu com Euler.

No ano de 1723, concluiu a graduação em Filosofia, alcançando o grau de Magister, pela dissertação em latim sobre os trabalhos de Descartes (1596-1650) e Newton (1643 - 1727). Três anos mais tarde, apresentou uma tese à cátedra de física denominada “Física sobre o Som”, tornando uma clássica referência à pesquisa acústica durante o restante do século, contribuindo significativamente com o campo de estudos da acústica.

Apesar de possuir uma conduta religiosa, Euler não se entusiasmou com os estudos teológicos, pois, suas aptidões em Matemática e os estudos vinculados a essa ciência mobilizavam os interesses do autor, como pontua Truesdell (2002) ao parafrasear as palavras de Euler, onde ele teve que cursar a faculdade de teologia e “me dedicar às línguas grega e hebreu, mas não houve muito progresso, pois dediquei a maior parte do tempo aos estudos matemáticos e pela minha feliz sorte, as visitas de sábado para Johann Bernoulli continuaram”.

Aos 20 anos, Euler ganhou notoriedade em uma competição científica internacional por sua análise da colocação de mastros em um veleiro. Tal premiação constituía um fato extraordinário para alguém tão jovem e que morava em um país sem litoral. Euler, até então, havia passado sua juventude na Suíça.

Em 1726, Euler concluiu seu doutorado pela Universidade de Basileia com sua

tese sobre a propagação do som, participando, ainda no mesmo ano, do Grande Prêmio da Academia de Paris. O problema consistia em propor a melhor maneira da disposição de mastros em um navio. Euler ficou ranqueado em segundo lugar com o seu o intitulado *Meditationes super problemate náutico* (Reflexões sobre um problema náutico), ficando atrás somente de Pierre Bouger (1698 - 1758), reconhecido como patrono da arquitetura naval.

Naquele período, os prêmios como o da Academia francesa, constituíam a principal honraria científica do século e representavam uma quantia monetária substancial. Dentre os agraciados, Johann Bernoulli ganhou duas vezes, seu filho Daniel Bernoulli recebeu-o dez vezes e Euler conquistou-o doze vezes, correspondendo um prêmio por cada quatro anos de sua vida como matemático (Chaquiam, 2012, p. 212).

Em 1725, o filho de Johann, Daniel Bernoulli (1700- 1782), chegou à Rússia para assumir um cargo no departamento de matemática na nova Academia de São Petersburgo<sup>1</sup>.

No entanto, a única vaga na época era em fisiologia/medicina, mas as vagas de emprego eram escassas, então Euler aceitou a oferta. Não conhecendo nada das artes médicas, ele começou a aprender o assunto de uma maneira caracteristicamente industrial, embora de um ponto de vista um tanto geométrico (Dunham, 1999).

Durante os primeiros anos na Rússia, Euler morou na casa de Daniel Bernoulli, e os dois passaram horas e horas em longas discussões sobre física e matemática, mudando assim, o curso da Ciência Européia nas próximas décadas.

Euler habituou-se tanto a vida em São Petersburgo que se propôs a dominar a língua russa, além do que aceitou nos primeiros anos de sua chegada um trabalho adicional de médico-tenente na Marinha Russa de 1727 a 1730 (Pereira, 2014, p.36).

Em 1733, Daniel Bernoulli voltou para a Suíça para ocupar um cargo acadêmico. Por um lado, a partida de seu amigo deixou um vazio na vida de Euler, entretanto, Euler ocupou a vaga de Daniel no departamento de Matemática.

---

<sup>1</sup>A Academia de São Petersburgo foi desenvolvida com a finalidade de elevar a qualidade da educação no país e preencher a lacuna existente no campo das ciências quando comparado ao nível da Europa Ocidental. Para tanto, ficou determinado que para alcançar tais objetivos dever-se-ia incentivar o intercâmbio com estudiosos de outros países europeus e, nos anos seguintes, Euler foi convidado a se juntar a ele (Pereira, 2014, p.34)

Com o progresso profissional, Euler se viu com uma certa estabilidade financeira e logo se casou. Sua esposa era Katharina Gsell (1707 - 1773), filha de um pintor suíço que vivia na Rússia. (Dunham, 1999).



Figura 1.4: Katharina Gsell.

Fonte: <https://www.picuki.com/media/2174192551458927662>

Ao longo de quatro décadas de casamento, Euler e Katharina tiveram 13 filhos. Infelizmente, apenas três chegaram a idade adulta.

Euler afirmara que muitas de suas maiores descobertas matemáticas aconteceram em momentos que estava segurando um de seus filhos nos braços, enquanto as outras crianças brincavam ao seu redor. São desse período seus relevantes trabalhos sobre ciência naval (Pereira, 2014, p.36).

Após o ano de 1730, o panorama da produção científica de Euler foi a cartografia, o magnetismo, os motores, a combustão, as máquinas e a construção naval. Já na área da matemática, seu enfoque centrava-se na teoria de números, na análise infinitesimal, nas equações diferenciais, no cálculo de variações e na mecânica racional.

Em 1735, Euler consolidou sua carreira alcançando fama em todo o mundo. Um de seus primeiros triunfos foi a solução do conhecido problema da Basileia (o contexto histórico deste problema será descrito no Capítulo 3), que deixou perplexos os matemáticos do século anterior. A questão era determinar o valor exato da série infinita.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

O matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686) fez a proposição do problema em 1644, e Jakob Bernoulli (1654-1705), irmão de Johann e tio de Daniel, levaram atenção ao problema em uma publicação no seu livro. Em mãos de ferramentas do Cálculo Diferencial, já era possível supor que a soma da sequência se aproximava de  $\frac{8}{5}$ , mas não conseguiam provar o valor exato.

No século XVIII, o problema voltou a ser discutido, e qualquer um capaz de resumir a série causaria um grande alvoroço e receberia fama e notoriedade. Quando a solução foi provada em 1735, a geniosa fórmula foi compartilhada por Euler (Calinger, 1976).

A solução foi uma verdadeira surpresa, pois a série possuía o valor exato de  $\frac{\pi^2}{6}$ . Esse resultado, altamente elucidativo, tornou a prova ainda mais incrível e o solucionador ainda mais famoso. (A prova de Euler para o Problema da Basileia será descrito no capítulo 3).

Com a prova do Problema de Basileia, Euler ganhou fama e sucesso no mundo inteiro, e prosseguiu sua pesquisa em um ritmo impressionante. Ele produziu muitos artigos para o jornal da Academia de São Petersburgo, de maneira que, para algumas edições, metade dos artigos publicados tinham sua autoria.

Em 1738 e 1740, Euler conquistou o prêmio na Academia de Paris, juntamente com outros matemáticos da época, e assim

Sua permanência na Rússia foi um período de grande produtividade. Dentre os inúmeros trabalhos que publicou, destacam-se: em 1736, um tratado de mecânica analítica, em 2 volumes, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*; em 1738-40, uma Introdução à Arte da Aritmética para uso nas Escolas Elementares afiliadas à Academia Imperial de São Petersburgo, em 2 volumes; em 1739, uma Teoria da Música, *Tentamen novae theoriae musicae* (D'Ambrosio, 2009, p.22).

No entanto, três problemas ofuscaram esse período. O primeiro foi a reviravolta política na Rússia após a morte inesperada de Catarina I.<sup>2</sup>

Sua ausência deixou um vazio de liderança e um conjunto de suspeitas e into-

---

<sup>2</sup>A morte da czarina Catarina I teve sérias consequências para o processo de modernização iniciado por Pedro, o Grande. Ascendeu ao poder um grupo de forte tendência anti-europeização e que via a Academia como um luxo desnecessário. Surgiram conflitos entre os 17 membros estrangeiros da Academia, intensificaram-se as rivalidades entre seguidores de Descartes, de Newton e de Leibniz (D'Ambrosio, 2009, p.19)

lerância aos estrangeiros. O fato de a Academia ter uma equipe quase exclusivamente estrangeira, levou Euler a descrever sua situação como um tanto estranha.

Outro ponto referia-se à coordenação da Academia pelo burocrata extravagante, Johann Schumacher. Segundo Truesdell (2002), a ocupação principal de Schumacher estava na minoração do talento de qualquer um que ele pudesse julgar inconveniente. Embora Euler fosse diplomático ao lidar com o chefe, ele certamente não poderia estar confortável com a supressão de seu talento.

Por último, a deterioração da visão de Euler em 1738 dificultou a continuidade de seu trabalho. Naquela época, Euler atribuiu a doença ao excesso de trabalho, particularmente ao intenso esforço de cartografia. Por outro lado, após análises médicas atuais, sugere-se que o mais provável foi o resultado de uma infecção grave.

Em termos de produção matemática, o impacto da perda parcial da visão não impediu a continuidade da sua pesquisa. Euler escreveu sobre construção de navios, acústica e a teoria da harmonia musical. Com o apoio de seu amigo Christian Goldbach (1690-1764), Euler fez descobertas pioneiras na Teoria Clássica dos Números e na Teoria Analítica dos Números.

Em resposta à carta de Philippe Naudé (1684-1745), ele lançou as bases para teoria das partições, e foi durante esse período que ele escreveu seu texto, *Mechanica*, que apresentou as leis newtonianas do movimento dentro de uma estrutura de cálculo: para isso, o *Mechanica* foi chamado de um marco na história da física (Dunham, 1999, p.23).

A partir dessa produção, surgiu uma oferta de Frederico, o Grande (1712-1786), da Prússia, de ir trabalhar na recém-revitalizada Academia de Berlim<sup>3</sup>. Como a situação política na Rússia era desconfortável, a oferta lhe pareceu promissora. Logo, em 1741, Euler e sua família se mudaram para a Alemanha.

Euler morou vinte cinco anos em Berlim. Na fase intermediária de sua carreira matemática, integrou funções na Academia alemã, como a supervisão do observatório e do jardim botânico, a gerência dos recursos humanos e financeiros. Produziu ainda, mapas geográficos e várias publicações de trabalhos científicos.

---

<sup>3</sup>A Sociedade de Cientistas Berlim-Brandenburgo havia sido fundada em 1700 e Leibniz havia sido seu presidente. Frederico II decidiu remodelá-la, nos moldes da Academia de Ciências de Paris. Convidou cientistas notáveis para dar corpo a essa renovação, inclusive o eminente Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (D'Ambrosio, 2009, p.21)

Ainda em 1744, foi publicado *Theoria motuum planetarum et cometarum* (Teoria do Movimento de Planetas e Cometas); em 1745, *Neue Grundsätze der Artillerie* (Novos Princípios de Artilharia) e, nesse mesmo ano, escreveu *Anleitung zur Naturlehre* (Introdução às Ciências Naturais) que só viria a ser publicado postumamente em 1862 em 1748 o *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à Análise dos Infinitos), e *Reflexions sur l'Espace et le Tem* (Reflexões sobre o Espaço e o Tempo); em 1749, a *Scientia navalis* (Ciência Naval, que havia sido terminada em São Petersburgo, em 1738); em 1753, a *Theoria motus lunae* (Teoria do Movimento da Lua); em 1755, o *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* vol 1, (Fundamentos do Cálculo Diferencial com Aplicações à Análise Finita e às Séries) (D'Ambrosio, 2009, p.23).

Em Berlim, Euler foi instrutor de ciência elementar da princesa de Anhalt Dessau. Como produto, foi uma obra-prima de vários volumes, posteriormente denominada como *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Este livro, tornou-se um sucesso internacional. Foi traduzido para várias línguas em toda Europa e, em 1833, foi publicado nos Estados Unidos. Essa obra de Euler foi um sucesso literário, em todo mundo.

Não é sempre o caso de um estudioso que trabalha na fronteira da pesquisa, escrever um tratado acessível ao leigo, mas Euler certamente o fez. As *Letters to a princess of Germany* continuam sendo, até hoje, um dos melhores exemplos de sucesso em ciência popular (Calinger, 1976, p.24).

No entanto, nem tudo estava bem em Berlim, pois Frederico, o Grande, havia desenvolvido um imenso desprezo por Euler. Essa aversão foi motivada por conflitos de personalidade e profissionais, visto que o rei, se considerava erudito, espirituoso e sábio. Amava filosofia e poesia francesa. Assim, todos os assuntos da Academia em Berlim eram realizados em francês, e não em alemão.

Para Frederico, Euler era um caipira, um brilhante caipira, mas, ainda sim, um caipira. Euler era comum em seus gostos, era um homem de família, trabalhador, e um protestante devoto. Antes de perder a visão, ele reunia a família para ler um capítulo da Bíblia todas as noites. Euler era defensor das doutrinas mais rígidas do Calvinismo. Em pouco tempo, o rei passou a chamá-lo de “ meu sábio ciclope ”, uma referência cruel à visão limitada de Euler (Dunham, 1999).

Para piorar, havia certa animosidade entre Euler e a outra estrela da Academia, Voltaire (1694-1778). Por um tempo, Voltaire desfrutou de vantagens no círculo do rei. Ele foi afamado como autor e satirista, era sofisticado como Frederico e totalmente francês. Euler não foi poupado da inteligência ácida de Voltaire. De acordo com Dunham (1999), Voltaire o intitulou como aquele que “nunca aprendeu filosofia ” e, portanto, se satisfaz “ com a fama de ser um matemático ”.

Outro fato que pairou sobre a Academia foi a disputa entre Euler e Voltaire sobre a existência de Deus, que gerou muita reverberação após Voltaire argumentar a favor da inexistência de Deus, e julgar trivial a fé religiosa de Euler. (D’Ambrosio, 2009).

Dessa maneira, apesar de trazer fama para a Academia de Berlim, Euler foi obrigado a deixar o país. As questões políticas na Rússia haviam melhorado, principalmente com o reinado de Catarina, a Grande (1729-1796), e, assim, Euler voltou para a Academia de São Petersburgo.

Em 1762, quando Catarina II, a Grande (1729-1796), assumiu o poder na Rússia, ela empenhou-se em restabelecer o altíssimo padrão da Academia da Rússia. Decidiu convidar Euler para retornar a São Petersburgo, com grandes privilégios. Ele retornou em 1766 e foi recebido com as maiores honrarias. Foram oferecidos a ele um altíssimo salário, excelente moradia e emprego para os filhos (D’Ambrosio, 2009, p.24).

Apesar de sua vida científica ter continuado, os próximos anos o trouxeram duas tragédias pessoais. Primeiramente, no ano de 1771, ele perdeu a visão do seu olho esquerdo, ficando praticamente cego. E a segunda é que, no final de 1773, Katharina morreu.

Embora praticamente cego, ele aumentou sua produção científica. No ano de 1775, escreveu bastante, mesmo que precisasse de que outros o lessem artigos científicos. Ele, por sua vez, ditava seu trabalho a escritores diligentes.

Destacam-se seus filhos Johann Albrecht (1734-1800) e Christoph (1743-1808), bem como Anders Johan Lexell (1740-1784), Wolfgang Ludwig Krafft (1743-1814), Mikhail Evseyevich Golovin (1756-1790) e Nikolaus Fuss (1755-1826), talvez o mais ativo de todos, tendo redigido cerca de 200 trabalhos de Euler, feitos enquanto era totalmente cego (D’Ambrosio, 2009, p.24).

Três anos após a morte da sua esposa, contrariando a opinião dos filhos, ele casou-se novamente com sua cunhada, Salome Abigail Gsell (1723-1793), encontrando, assim, uma companheira para compartilhar seus últimos anos.



Figura 1.5: Salome Abigail Gsell.

Fonte: <https://romanov.blogs.sapo.pt/19194.html>

Em 7 de setembro de 1783, Euler faleceu após o jantar com seu colaborador, Anders Johan Lexell, matemático e astrônomo. Durante o jantar, conversaram sobre a órbita de um novo planeta, o planeta Urano. Posteriormente, enquanto brincava e tomava chá com um de seus netos, sofreu de um mal súbito. Euler foi sepultado no Alexander Nevsky Navra, em São Petersburgo, um dos mais importantes mosteiros e cemitério da Rússia, destinado aos mais ilustres artistas, escritores e músicos do país.

Euler deixou um legado de proporções épicas. Após 48 anos de sua morte, o jornal da Academia de São Petersburgo continuava publicando a lista de seus artigos. Raramente existe um ramo da matemática ou da física em que ele não exerça um papel significativo.

Segundo Boyer (2003), uma lista bibliográfica das obras de Euler, com 886 itens está sendo publicada na Suíça com, aproximadamente, 75 volumes substanciais. Desse modo, Euler ficou caracterizado como a “Análise encarnada”.

Em um elogio, o Marquês de Condorcet observou que todo aquele que pratica matemática no futuro será “guiado e sustentado pelo gênio Euler” (Dunham, 1999).

No capítulo 3, abordaremos o contexto histórico do problema da Basileia e, posteriormente, apresentaremos a prova de Euler para a resolução deste problema.

# Capítulo 2

## Notas introdutórias

Neste capítulo apresentaremos, de forma breve, alguns conceitos e resultados que darão embasamento teórico a este trabalho, em particular, ao estudo de Polinômios, algumas Identidades Trigonômicas, Sequências e Séries, Série de Taylor e Série de Fourier. A seção a seguir foi fundamentada a partir de Biazzi (2014), Figueiredo (2005), Guidorizzi (2002), Guidorizzi (2008), Iório (2005), Lima (2017), Lima (2007), Muniz Neto (2013), Muniz Neto (2015) e Simmons (1988).

### 2.1 Polinômios

Para esta seção, a menos que mencionemos, podemos identificar o conjunto denotado por  $\mathbb{K}$  como sendo ou o conjunto  $\mathbb{Q}$ , ou  $\mathbb{R}$ , ou  $\mathbb{C}$ , por ter algumas propriedades algébricas especiais<sup>1</sup>.

**Definição 2.1.1.** *Uma sequência  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  de elementos em  $\mathbb{K}$  é dita quase toda nula se existir  $n \geq -1$  tal que*

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \dots = 0.$$

**Definição 2.1.2.** *Um polinômio com coeficientes  $\mathbb{K}$  é uma soma formal  $f = f(X)$  do tipo*

$$f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots := \sum_{k \geq 0} a_k X^k,$$

---

<sup>1</sup>Em geral um corpo de característica 0, veja por exemplo Muniz Neto (2016).

onde  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  é uma sequência quase toda nula de elementos de  $\mathbb{K}$  e convençionamos  $X^0 = 1$  e  $X^1 = X$  no somatório acima.

Dizemos que dois polinômios  $f(X) = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$  e  $g(X) = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$  sobre  $\mathbb{K}$  são iguais se, e somente se,  $a_k = b_k$  para todo  $k \geq 0$ .

Dado um polinômio  $f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$  sobre  $\mathbb{K}$ , convençionamos que:

- (i) Os elementos  $a_i \in \mathbb{K}$  são denominados os **coeficientes** de  $f$ .
- (ii) Quando  $a_i = 0$ , sempre que for conveniente, omitiremos o termo  $a_i X^i$ . Em particular, como a sequência  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  é quase toda nula, existe um inteiro  $n \geq 0$  tal que

$$f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k,$$

este inteiro citado, chamamos de grau do polinômio.

- (iii) Quando  $a_i = \pm 1$ , escrevemos  $\pm X^i$ , para o termo correspondente de  $f$ .

- (iv) O polinômio

$$0 = 0 + 0X + 0X^2 + \dots$$

é denominado o **polinômio identicamente nulo** sobre  $\mathbb{K}$ , e, neste caso, dizemos que o polinômio não tem grau.

- (v) Mas geralmente, dado  $\alpha \in \mathbb{K}$ , denotamos o polinômio

$$\alpha + 0X + 0X^2 + \dots,$$

ou apenas  $\alpha$ , o denominamos de **polinômio constante**  $\alpha$ . Se  $\alpha \neq 0$  dizemos que este polinômio tem grau 0.

Usaremos a notação  $\mathbb{K}[X]$  para representar o conjunto de todos os polinômios sobre  $\mathbb{K}$ . Pelo item (v), temos que

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X].$$

Por outro lado, como  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  temos que

$$\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X].$$

**Exemplo 2.1.1.** Se  $f(X) = 1 + X - \sqrt{2}X^5$ , então  $f \notin \mathbb{Q}[X]$ , pois  $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , mas  $f \in \mathbb{R}[X]$ . Já a expressão  $g = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots$  não é um polinômio, pois a sequência  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  não é quase toda nula.

**Definição 2.1.3.** Dados em  $\mathbb{K}[X]$  os polinômios

$$f(X) = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \quad e \quad g(X) = \sum_{k \geq 0} b_k X^k,$$

a soma e o produto de  $f$  e  $g$ , denotados respectivamente por  $f + g$  e  $f \cdot g$ , são os polinômios

$$(f + g)(X) = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) X^k$$

e

$$(f \cdot g)(X) = \sum_{k \geq 0} c_k X^k,$$

onde  $c_k = \sum_{i+j=ki, j \geq 0} a_i b_j$ .

Em seguida, relacionaremos algumas propriedades importantes sobre o Polinômios. Para maior detalhamento da demonstração, ver Muniz Neto (2016).

## 2.1.1 Divisão de polinômios

Um polinômio dividido por outro resulta em um polinômio no quociente e um polinômio no resto. Este procedimento é definido como algoritmo da divisão para polinômios.

**Teorema 2.1.1.** Se  $f, g \in \mathbb{K}[X]$ , com  $g \neq 0$ , então existem únicos  $q, r \in \mathbb{K}[X]$  tais que

$$f = gq + r \quad \text{com} \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \partial r \leq \partial g,$$

onde o símbolo  $\partial$  representa o grau do polinômio em questão.

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $p(X) = 7X^4 - 3X^3 + X^2 - X - 2$  e  $g(X) = X^3 - X^2 + X + 7$ , o quociente da divisão de  $p(X)$  por  $g(X)$  é  $q(X) = 7X + 4$ . Já  $r(X) = -2X^2 - 54X - 30$ , é denominado como resto, isto é

$$p(X) = (7X + 4) \cdot (X^3 - X^2 + X + 7) + (-2X^2 - 54X - 30)$$

## 2.1.2 Relação entre raízes de polinômios

Iremos ilustrar um dos teoremas mais importantes para os estudo de Polinômios, conhecido na literatura como **Teorema Fundamental da Álgebra**. Para isto, primeiramente, iremos definir alguns conceitos que são consequências do teorema (2.1.1).

**Definição 2.1.4.** *Dado um polinômio*

$$f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X],$$

a **função polinomial** associada a  $f$  é a função  $\tilde{f} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  dada, para todo  $x \in \mathbb{K}$ , por

$$\tilde{f}(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Quando  $f(X) = c$ , note que a função polinomial associada  $\tilde{f}$  será a função constante  $\tilde{f}(x) = c$ , para todo  $x \in \mathbb{K}$ .

**Definição 2.1.5.** *Seja  $f \in \mathbb{K}[X]$  um polinômio, com função polinomial associada  $\tilde{f} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ . Um elemento  $\alpha \in \mathbb{K}$  é uma **raiz** de  $f$  se*

$$\tilde{f}(\alpha) = 0.$$

**Exemplo 2.1.3.** Se  $f(x) = X + 5 \in \mathbb{C}[X]$  temos que  $x = -5$  é a única raiz de  $f$  em  $\mathbb{C}$ . De fato, de acordo com a definição (2.1.5), a função associada a  $f$  é  $\tilde{f}(x) = x + 5$  e

$$\tilde{f}(x) = 0 \iff x = -5.$$

**Definição 2.1.6.** *Um elemento  $\alpha \in \mathbb{K}$  é dito raiz de **multiplicidade**  $m \in \mathbb{N}$  de um polinômio  $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ , se existe um polinômio  $q(X) \in \mathbb{K}[X]$ , com  $\partial q < \partial f$ , tal que*

$$f(X) = (X - \alpha)^m q(x),$$

com  $\tilde{q}(\alpha) \neq 0$ . Se  $m = 1$  dizemos que  $\alpha$  é uma raiz simples.

**Exemplo 2.1.4.** Sendo  $f(X) = X^3 - 7X^2 + 16X - 12$  um polinômio em  $\mathbb{R}[X]$ , note que

$$f(X) = (X - 2)^2(X - 3),$$

isto significa que 2 é uma raiz dupla de  $f$  e 3 uma raiz simples.

É comum que em alguns conjuntos, os polinômios associados não tem raízes naquele conjunto. A exemplificar, o polinômio

$$f(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X], \quad \text{ou} \quad g(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X].$$

Para solucionar tais problemas, utilizamos o **Teorema Fundamental da Álgebra**<sup>2</sup>.

**Teorema 2.1.2.** (*Teorema Fundamental da Álgebra*) *Todo polinômio*

$$f \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$$

*possui ao menos uma raiz complexa.*

Uma consequência imediata do teorema (2.1.2) é o seguinte corolário:

**Corolário 2.1.1.** *Se*

$$f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X],$$

*é um polinômio de grau  $n \geq 1$ , então existem  $n$  números complexos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tais que*

$$f(X) = a_n (X - z_1) \dots (X - z_n). \tag{2.1}$$

A expressão (2.21) é chamada **forma fatorada do polinômio**  $f$ . Durante nosso trabalho, não iremos fazer distinção entre o polinômio  $f$  e sua função associada  $\tilde{f}$ , para facilitar o desenvolvimento do texto.

## 2.2 Identidades trigonométricas

Nesta seção, deduziremos algumas identidades essenciais no desenvolvimento deste trabalho, sendo elas as fórmulas de soma de arcos, arcos duplos e transformações em produto.

---

<sup>2</sup>conforme Muniz Neto (2016) uma das provas é apresentada por Jean-Baptiste el Round D'Alembert, matemático francês do século XVIII.

## 2.2.1 Conceitos básicos

**Definição 2.2.1.** Definimos como ciclo trigonométrico o círculo  $\Gamma$ , dado no plano cartesiano (conforme a figura (2.1)), centrado na origem  $O(0,0)$ , com raio 1 e comprimento  $2\pi$ .

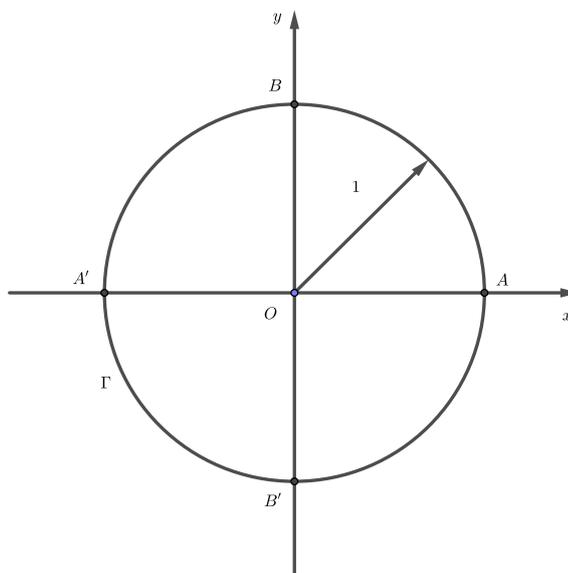


Figura 2.1: Ciclo trigonométrico.

**Definição 2.2.2.** Seja  $c \in \mathbb{R}$  dado, usando as notações da figura (2.1), medimos sobre  $\Gamma$ , a partir de  $A$ , um arco de comprimento  $|c|$ , no sentido anti-horário se  $c > 0$  e no sentido horário se  $c < 0$ . Sendo  $P$  a extremidade final desse arco, dizemos que o arco  $\widehat{AP}$  mede  $c$  radianos.

Como consequência da definição (2.2.2), convencionamos sobre  $\Gamma$ , que o **sentido trigonométrico** é o sentido anti-horário. Daí, o arco de  $2\pi$  radianos sobre  $\Gamma$  é o arco que dá uma volta em  $\Gamma$  no sentido trigonométrico, retornando ao ponto  $A$ .

**Definição 2.2.3.** Dado  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\widehat{AP} = c$  onde  $P$  é um ponto situado no ciclo trigonométrico, definimos o seno e o cosseno de  $c$  (radianos), e denotamos, respectivamente,  $\text{senc}$  e  $\text{cos } c$ , por

$$\text{cos } c = \text{abscissa de } P; \quad \text{senc} = \text{ordenada de } p.$$

Lembremos que pela definição (2.2.1), temos que qualquer ponto  $P$  do ciclo trigonométrico, em coordenadas cartesianas  $P(x, y)$ , satisfaz a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.2)$$

Como consequência da definição (2.2.3) e da equação (2.2), temos as seguintes propriedades:

**Proposição 2.2.1.** *Para todo  $c \in \mathbb{R}$ :*

$$(i) \quad \text{sen}^2 c + \text{cos}^2 c = 1 \quad (\text{Relação fundamental da trigonometria});$$

$$(ii) \quad \begin{cases} -1 \leq \text{sen } c \leq 1 \\ -1 \leq \text{cos } c \leq 1; \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} \text{sen } c + 2k\pi = \text{sen } c \\ \text{cos } c + 2k\pi = \text{cos } c \end{cases} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z};$$

$$(iv) \quad \begin{cases} \text{sen } -c = -\text{sen } c \\ \text{cos } -c = \text{cos } c. \end{cases}$$

$$(v) \quad \begin{cases} \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \text{cos } c \quad e \quad \text{cos } \left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \text{sen } c \\ \text{sen } (\pi - c) = \text{sen } c \quad e \quad \text{cos } (\pi - c) = -\text{cos } c. \end{cases}$$

Se olharmos seno e cosseno como funções, na proposição (2.2.1), o item (ii) nos diz que as duas funções são limitadas. Já o item (iii) está dizendo que são funções periódicas de período  $2\pi$ , que iremos definir posteriormente na subseção (2.5.1) e (iv). Assim, temos que a função seno é uma função ímpar e função cosseno é uma função par. Para maiores detalhes de tais resultados, ver Muniz Neto (2013).

Para concluirmos esta seção, relacionaremos algumas definições que serão usadas no decorrer do trabalho.

**Definição 2.2.4.** *Seja  $c$  um número real dado, usando novamente as notações da figura (2.1), tal que  $\widehat{AP} = c$  sendo  $P$  um ponto qualquer do ciclo trigonométrico. Definimos*

$$(i) \quad \tan c = \frac{\text{sen } c}{\text{cos } c}, \quad \forall c \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(ii) \quad \cot c = \frac{\text{cos } c}{\text{sen } c}, \quad \forall c \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(iii) \sec c = \frac{1}{\cos c}, \quad \forall c \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(iv) \csc c = \frac{1}{\operatorname{sen} c}, \quad \forall c \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 2.2.2 Adição de arcos

Observemos as fórmulas de adição de arcos, relacionadas na proposição a seguir.

**Proposição 2.2.2.** *Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos:*

$$(i) \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$$

$$(ii) \operatorname{sen}(a \mp b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$

$$(iii) \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}, \quad \text{quando } \tan a, \tan b \text{ e } \tan(a \pm b), \text{ estiverem definidos.}$$

*Demonstração.* Iniciemos pela fórmula  $\cos(a+b)$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $a, b > 0$ , e marquemos, sobre o ciclo trigonométrico  $\Gamma$ , os pontos  $P, Q$  e  $R$ , conforme a figura (2.2), de modo que  $\widehat{AP} = a$ ,  $\widehat{AQ} = -b$  e  $\widehat{AR} = a+b$ , então os pontos citados em coordenadas cartesianas ficam

$$P(\cos a, \operatorname{sen} a), \quad Q(\cos(-b), \operatorname{sen}(-b)) = Q(\cos b, -\operatorname{sen} b) \quad \text{e} \quad R(\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b)).$$

Como  $\widehat{AR}$  e  $\widehat{PQ}$  são iguais a  $(a+b)$  radianos, as cordas implícitas  $AR$  e  $PQ$  têm comprimentos idênticos. Logo,

$$\begin{cases} \overline{AR}^2 &= (1 - \cos(a+b))^2 + \operatorname{sen}^2(a+b) \\ \overline{PQ}^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Igualando as duas expressões da equação (2.3) temos:

$$(1 - \cos(a+b))^2 + \operatorname{sen}^2(a+b) = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2. \quad (2.4)$$

Desenvolvendo os membros da equação (2.4), e lembrando que (proposição (2.2.1))

(i)

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1, \quad \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b = 1 \quad \text{e} \quad \cos^2(a+b) + \operatorname{sen}^2(a+b) = 1,$$

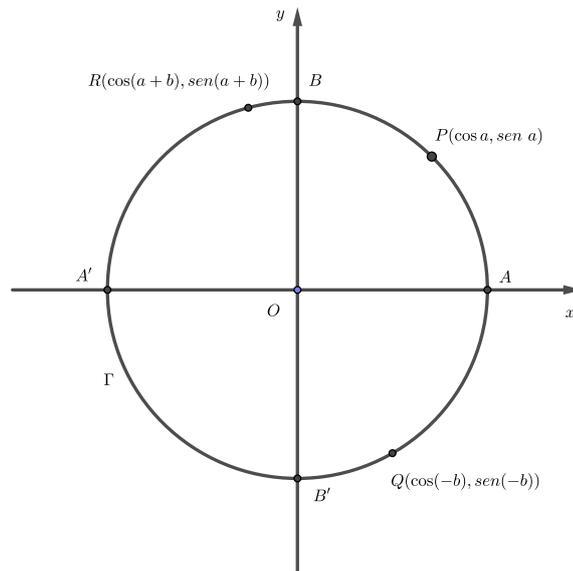


Figura 2.2: Fórmulas de adição de arcos.

temos:

$$-2 \cos(a + b) = -2 \cos a \cos b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

isto prova uma parte de (i). Para outra parte, basta observar que

$$a - b = a + (-b),$$

e usar a proposição (2.2.1) (iv). Usando novamente a proposição (2.2.1), e usando o que foi provado anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(-b) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \operatorname{sen}(b) \\ &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos a fórmula para  $\text{sen}(a - b)$ . Para finalizar, temos:

$$\begin{aligned}
 \tan(a + b) &= \frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} \\
 &= \frac{\text{sen} a \cos b + \cos a \text{sen} b}{\cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b} \\
 &= \frac{\frac{1}{\cos a \cos b} (\text{sen} a \cos b + \cos a \text{sen} b)}{\frac{1}{\cos a \cos b} (\cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b)} \\
 &= \frac{\frac{\text{sen} a}{\cos a} + \frac{\text{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\text{sen} a}{\cos a} \frac{\text{sen} b}{\cos b}} \\
 &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.
 \end{aligned}$$

De maneira semelhante, obtemos  $\tan(a - b)$ . □

Uma consequência da proposição (2.2.2), são as relações que apresentaremos agora, geralmente denominadas fórmulas de arcos duplos.

**Corolário 2.2.1.** *Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , temos:*

(i)  $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a;$

(ii)  $\text{sen} 2a = 2 \sin a \cos a;$

(iii)  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a},$  se  $\tan a$  e  $\tan 2a$  estiverem definidas.

*Demonstração.* Basta assumir  $a = b$  nas fórmulas da proposição (2.2.2), com sinal positivo. □

Finalizamos nosso breve apanhado de identidades trigonométricas, deduzindo as fórmulas de transformações em produto de arcos, relacionadas na proposição a seguir.

**Proposição 2.2.3.** *Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos:*

(i)  $\sin a \pm \text{sen} b = 2 \text{sen} \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2};$

(ii)  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2};$

(iii)  $\cos a - \cos b = -2 \text{sen} \frac{a + b}{2} \text{sen} \frac{a - b}{2};$

(iv)  $\tan a \pm \tan b = \frac{\text{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$

*Demonstração.* Faremos a demonstração para  $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$  e  $\tan a + \tan b$ . As demais fórmulas seguem de maneira análoga.

Tomando

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = x+y \\ b = x-y. \end{cases}$$

Assim, usando a proposição (2.2.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) \\ &= (\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x) + (\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x) \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos y \\ &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \tan a + \tan b &= \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \\ &= \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \cos b}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.2.4.** Para  $x \in \mathbb{R}$ , com  $x \neq 2k\pi$  como  $k \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{[(2n+1)x]}{2}}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (2.5)$$

*Demonstração.* Pelo que vimos na demonstração da proposição (2.2.3), temos

$$2 \cos \theta \operatorname{sen} \phi = \sin(\theta + \phi) - \sin(\theta - \phi). \quad (2.6)$$

Em (2.6), usando  $\phi = \frac{x}{2}$  e  $\theta = kx$  com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $1 \leq k \leq n$ , temos

$$2 \cos kx \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \left( \frac{(2k+1)x}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)x}{2} \right), \quad (2.7)$$

da equação (2.7), temos que:

$$2\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2\sum_{k=1}^n \cos kx \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) + \left(\operatorname{sen}\frac{5x}{2} - \operatorname{sen}\frac{3x}{2}\right) + \dots + \left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\right). \quad (2.8)$$

Simplificando a equação (2.8), obtemos:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx\right) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2},$$

então para  $x \neq 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , chegamos no resultado desejado.  $\square$

## 2.3 Sequências e séries

Nessa seção, faremos uma apresentação sucinta sobre algumas definições de sequências e séries, mais especificamente série de potências.

### 2.3.1 Sequências numéricas

**Definição 2.3.1.** Dizemos que uma sequência (infinita) de números reais é uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e denotamos o  $k$ -ésimo termo dessa sequência por  $a_k = f(k)$ .

Segundo a definição (2.3.1), temos que

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \dots$$

A notação mais comum para representar uma sequência é

$$(a_n)_{n \geq 1} \quad \text{ou} \quad (a_n).$$

**Exemplo 2.3.1.** Alguns exemplos simples de sequência de números reais são:

- (a) os termos de uma progressão aritmética

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

onde  $a_1$  e  $r$  são números reais fixados, ou seja,

$$a_1, \quad a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_1 + 2r \quad \dots$$

(b) A sequência cuja sua lei de formação é dada por

$$b_n = \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \quad \dots$$

**Definição 2.3.2.** Dizemos que uma sequência  $(a_n)$  converge para um limite  $L$  e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L,$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 > 0$ , tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Se uma sequência não converge para real algum será dita divergente, em particular, se uma sequência  $(a_n)$  tende para o infinito  $+\infty$ , dizemos que ela tende para o  $+\infty$  ou diverge para o  $+\infty$ .

A noção intuitiva da definição (2.3.2) é que, para  $n$  suficientemente grande os termos  $a_n$  da sequência se aproximam de  $L$ .

Em seguida, ilustraremos no próximo exemplo, sequências convergentes e divergentes.

**Exemplo 2.3.2.** (a) A sequência  $a_n = a_1 + (n - 1)r$  dada no exemplo (2.3.1), é divergente para  $r \neq 0$  pois

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( a_1 + (n - 1)r \right) = \pm\infty$$

de acordo com o sinal de  $r$  e converge para  $a_1$  se  $r = 0$ . Já a sequência  $b_n = \frac{1}{n}$ , também dada no exemplo (2.3.1), converge para 0, pois

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(b) A sequência cuja o termo geral é dado por  $a_n = (-1)^n$  diverge, pois, seus termos oscilam entre 1 e  $-1$ , com frequência indefinida.

(c) A sequência  $a_n = a_0 r^n$  supondo  $a_0 \neq 0$ , conhecida também como termo geral de uma progressão geométrica, converge para 0, se  $-1 < |r| < 1$  e diverge, se  $|r| > 1$ .

De fato, pois,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 r^n = 0, & \text{se } -1 < |r| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 r^n = a_0, & \text{se } r = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 r^n = \pm\infty, & \text{se } r > 1, \end{cases}$$

no caso em que  $r \leq -1$ , não existe o limite, a sequência diverge.

### 2.3.2 Séries numéricas

Agora iremos começar a seção definindo série.

**Definição 2.3.3.** *Seja  $a_n$  uma sequência infinita. A soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (2.9)$$

*é definida como série numérica infinita de termo geral  $a_n$ . Se somarmos os  $n$  primeiros termos dessa série, obtemos*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

*o que chamamos de somas parciais. Dizemos que a série dada na equação (2.9) é convergente se a sequência de somas parciais ( $S_n$ ) converge para algum  $s \in \mathbb{R}$  e escrevemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s.$$

*O número  $s$  é chamado soma da série.*

**Exemplo 2.3.3.** *(Série telescópica)* Vamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Para tal fato, observemos primeiro que o termo geral da série pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \\ &= \frac{a(n+1) + b_n}{n(n+1)} \\ &= \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)},\end{aligned}$$

daí obtemos

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1, \end{cases}$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Agora escrevendo a soma parcial temos que

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

**Teorema 2.3.1.** *Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então  $a_n \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convirja para  $s$ , e seja  $(S_n)$  uma soma parcial da série, isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

daí temos que,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}),$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1},$$

concluimos que  $a_n \rightarrow 0$ . □

O próximo resultado, em relação a soma dos termos infinitos de uma progressão geométrica, é bastante utilizado no Ensino Médio.

**Teorema 2.3.2.** (*Série geométrica*) Dada a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ , com  $a_0 \neq 0$ . Então, a série converge se, e somente se,  $|r| < 1$ . Além disso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}.$$

*Demonstração.* Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ , com  $a_0 \neq 0$  e  $r \neq 0$ , e lembremos que

$$a_n = a_0 r^n \quad \text{para } n > 0.$$

Multiplicando  $r$  na soma parcial  $S_n$ , e com um simples ajuste de índices, temos

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= (a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n) - r(a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n) \\ &= a_0(1 - r^{n+1}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$S_n = \frac{a_0(1 - r^{n+1})}{1 - r}, \quad \text{para } r \neq 1.$$

Quando  $|r| < 1$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = 0$ . Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{a_0}{1 - r}.$$

No caso de  $|r| \geq 1$ , observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_0 r^n| \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n \neq 0.$$

Portanto, pelo teorema (2.3.1) a série diverge. □

Em geral, existe um amplo estudo para convergência de uma série, que, na literatura, são chamados de testes para convergência de uma série. Iremos ilustrar aqui, o teste conhecido como **teste da comparação**.

**Teorema 2.3.3.** (Teste da comparação.) *Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas sequências de números reais, tais que,  $0 \leq a_n \leq b_n$  para todo  $n$  natural. Daí:*

(i) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  é uma série convergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  será convergente.*

(ii) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série divergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  será divergente.*

*Demonstração.* Primeiramente, começaremos provando (i). Considere as seguintes somas parciais

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{e} \quad E_n = b_1 + \cdots + b_n.$$

Como as séries são termos positivos, as somas parciais  $(S_n)$  e  $(E_n)$  são crescentes, pois, por exemplo

$$S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1} \quad \forall \quad n > 1.$$

Além disso, como estamos supondo que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  é convergente, digamos para  $b$ , segue que  $E_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Daí temos então

$$0 \leq S_n \leq b.$$

Portanto, a sequência  $(S_n)$  é monótona e limitada, ver por exemplo (Muniz Neto, 2015), logo é convergente  $(S_n)$ . Dessa maneira, concluímos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série convergente.

Para (ii), observemos que se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  fosse convergente, teríamos de (i) que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  seria convergente, contradizendo a hipótese.  $\square$

Agora, iremos mostrar que a série que deu origem a este trabalho é convergente.

**Proposição 2.3.1.** *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.*

*Demonstração.* Primeiramente, observemos as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

então, para mostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge é equivalente a mostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  converge. Para isto, observemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + n = n(n+1),$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo exemplo (2.3.3), temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, então, pelo teste da comparação (teorema (2.3.3)) a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ . Logo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.  $\square$

Como consequência da proposição (2.3.1), usando o teste da comparação e o teorema (2.3.3), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{2.10}$$

é uma série convergente para  $p \geq 2$ . Ainda mais geral, usando o teste da integral (Muniz Neto, 2015), mostra-se que a série dada pela expressão (2.10) converge, se  $p > 1$  e diverge para  $p \leq 1$ , e, no caso  $p = 1$  a série é conhecida como série harmônica.

**Definição 2.3.4.** Dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é dita absolutamente convergente se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  for convergente. Quando a série é convergente, mas não absolutamente, dizemos que ela é condicionalmente convergente.

Um pergunta natural que pode-se ocorrer: toda série absolutamente convergente é convergente? O próximo resultado responderá esta pergunta.

**Proposição 2.3.2.** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  for convergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será convergente.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  convirja, e observemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 0, & \text{se } a_n \leq 0 \\ 2|a_n|, & \text{se } a_n > 0, \end{cases}$$

ou seja

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, segue do teste da comparação, teorema (2.3.3), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$$

também é convergente. Para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$a_n = (|a_n| + a_n) - |a_n|,$$

daí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

isto significa que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é a diferença de séries convergentes, portanto convergente.  $\square$

Outra pergunta que também pode ocorrer é: com que condições a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  é convergente? A resposta para isto segue no próximo resultado conhecido como critério de Leibniz para séries alternadas.

**Proposição 2.3.3.** *Se  $(a_n)$  é uma seqüência não crescente de números reais positivos, isto é,*

$$a_n \geq a_{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

*então  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  é convergente.*

Para demonstração da proposição (2.3.3), ver Guidorizzi (2008).

### 2.3.3 Série de funções

Iremos, primeiramente, falar de seqüências de funções com intuito de aplicar o mesmo resultado para séries de funções.

**Definição 2.3.5.** Dizemos que uma seqüência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $n \in \mathbb{N}$  converge pontualmente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  em  $I$ , quando, dados  $\varepsilon > 0$  e  $x \in I$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo de  $\varepsilon$  e de  $x$ ) tal que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ou seja, fixado  $x \in I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

**Exemplo 2.3.4.** As seqüências de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \frac{x}{n}$ , convergem pontualmente para  $f \equiv 0$  em  $\mathbb{R}$ . De fato, para  $x \in \mathbb{R}$  fixado temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

**Definição 2.3.6.** Dizemos que uma seqüência de funções  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , converge uniformemente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  em  $I$ , quando, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo apenas de  $\varepsilon$ ), tal que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo 2.3.5.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f_n(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$ . Então,  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f \equiv 0$ . De fato, pelas desigualdades das médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

tomando  $n_0 \leq \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$ , temos que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

**Definição 2.3.7.** Uma série de funções é uma série  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ , onde  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma sequência de funções. Dizemos que a série de funções converge pontualmente (respectivamente uniformemente) em  $I$  para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , se sua sequência de somas parciais

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x),$$

converge pontualmente (respectivamente uniformemente) em  $I$  para  $f$ .

O próximo resultado é de grande importância para a garantia de convergência de séries de funções, conhecido na literatura como **critério  $M$  de Weierstrass**. A demonstração deste critério pode se encontrada em Iório (2005).

**Teorema 2.3.4.** Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  uma série de funções, com  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , e suponhamos que exista uma série numérica  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ , tal que, para todo  $x \in I$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n(x)| \leq M_n.$$

Nestas condições, se a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$  for convergente, então a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  convergirá uniformemente, em  $I$ , à função  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ .

Iremos agora ilustrar uma aplicação do critério  $M$  de Weierstrass.

**Exemplo 2.3.6.** A série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x^4 + n^4}$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ . De fato, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\left| \frac{\sin nx}{x^4 + n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4},$$

pois, lembremos que  $|\sin nx| \leq 1$  e  $x^4 + n^4 \geq n^4$ . Como a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$  é convergente, segue pelo critério  $M$  de Weierstrass (teorema (2.3.4)) série dada converge

uniformemente em  $\mathbb{R}$  à função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x^4 + n^4}.$$

No que segue, iremos tratar de um caso especial das séries de funções.

### 2.3.4 Série de potências

Com manuseio formal sobre séries de potências de somas conhecidas, as somas de outras séries foram alcançadas para uma gama de funções, o que simplificava o estudo dessas funções.

**Definição 2.3.8.** *Considere  $(a_n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , uma sequência numérica, e seja  $x_0$  um número real dado. A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

é definida como série de potências, com coeficientes  $a_n$ , centrada em  $x_0$ .

Uma série de potências refere-se à uma série de polinômios com infinitos termos. Observaremos que funções definidas como séries de potências compartilham de diversas propriedades similares dos polinômios.

### 2.3.5 A convergência da série de potências

Uma série de potências centrada em  $x_0$ , com coeficientes  $a_n$  é convergente para  $x = x_0$ , sendo que é possível ser o único ponto de convergência. O teorema a seguir evidencia uma propriedade essencial das séries de potências.

**Teorema 2.3.5.** *Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  for convergente para  $x = x_1$ , com  $x_1 \neq 0$ , então a série convergirá para todo  $x$  no intervalo aberto  $(-|x_1|, |x_1|)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$  com  $x_1 \neq 0$  seja convergente, então, pelo teorema (2.3.1),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x_1^n = 0.$$

Tomando  $\varepsilon = 1$ , então, pela definição (2.3.2), existe um  $n_0$  natural, tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$|a_n x_1^n| \leq 1.$$

Como

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n,$$

temos que para todo  $x$  e para todo natural  $n \geq n_0$ ,

$$|a_n x^n| \leq \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

Pelo teorema (2.3.2), se  $|x| < |x_1|$  a série geométrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$  é convergente. Então, pelo teste da comparação, teorema (2.3.3), temos que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge para todo  $|x| \leq |x_1|$ .  $\square$

**Corolário 2.3.1.** *Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  for convergente para  $x = x_1$ , com  $x_1 \neq x_0$ , então a série convergirá para todo  $x$  no intervalo aberto  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , onde  $r = |x_1 - x_0|$ .*

Pelo que já vimos, para quais valores de  $x$  uma série de potências converge? Para solucionar tal problema, temos o Raio de Convergência da série de potências, que segue no teorema abaixo.

**Teorema 2.3.6.** *Considere a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Existem três, e somente três possibilidades:*

I) Ou  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge para  $x = 0$ ;

II) Ou  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge para todo  $x$  real;

III) Ou existe  $R > 0$ , tal que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge para  $x$  no intervalo  $(-R, R)$  e diverge para todo  $|x| > R$ . Nos extremos  $-R$  e  $R$  a série poderá convergir, ou não.

A demonstração do resultado acima e do exemplo abaixo, podem ser encontrados em (Guidorizzi, 2008). Existem vários resultados para encontrar o Raio de convergência

de uma série, isto é, dizer para quais valores de  $x$  a série de potências converge. A exemplificar, a expressão

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

desde que  $a_n \neq 0$  para  $n > n_0$ , sendo  $n_0$  um natural fixado.

### 2.3.6 Funções como séries de potências

As funções podem ser representadas como a soma de termos infinitos. Tal condição é uma ferramenta muito importante, pelo fato de aproximar as soluções das séries usando propriedades de polinômios.

Uma série de potência convergente para todo  $x$  ou para algum  $R > 0$ , tal que  $|x - x_0| < R$ , pode ser expressa como uma função  $f(x)$ . Podemos escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

A série é dita uma representação da função  $f(x)$  no intervalo de convergência e é definida como a expansão em série de potências da função  $f(x)$  no ponto  $x_0$ .

## 2.4 Série de Taylor

O desdobramento de funções em séries de Taylor é uma estratégia muito utilizada nas áreas do Cálculo Infinitesimal e em Análise Numérica. Apresentar funções como a soma de termos infinitos é uma ferramenta extremamente importante, visto que as mesmas oportunizam utilizar as propriedades de polinômios para resolução de outras séries.

**Definição 2.4.1.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função infinitamente derivável. Para cada  $x_0 \in I$ , dizemos que a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (2.11)$$

*é a série de Taylor da função  $f$  em  $x_0$ . Quando  $x_0 = 0$ , a série de Taylor também é conhecida como série de Maclaurin.*

Iremos ver, sem demonstração, com que condições a série de Taylor de  $f$  em  $x_0$  converge para  $f$  em  $I$ .

**Proposição 2.4.1.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função infinitamente derivável. Se existe uma constante  $C \geq 0$  tal que  $|f^{(n)}(x)| \leq C^n$ , para todos  $n \geq 1$  e  $x \in I$ , então fixado  $x_0 \in I$ , temos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (2.12)$$

**Exemplo 2.4.1.** Considere a função  $f(x) = \sin x$ . Lembremos que, para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sin' x = \cos x \\ \sin'' x = -\sin x \\ \sin^{(3)} x = -\cos x \\ \sin^{(4)} x = \sin x, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \sin^{(2j)} x = (-1)^j \sin x \\ \sin^{(2j-1)} x = (-1)^{j+1} \cos x. \end{cases}$$

Segue que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin^{(2j)} x| \leq 1$  e  $|\sin^{(2j-1)} x| \leq 1$  segue da proposição (2.4.1) que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (2.13)$$

No caso da função ser uma série de potências, a série de Taylor nos permite obter a série de potências que representa a função. No entanto, nem toda função é igual a uma série de potências, o que necessita cuidados.

**Teorema 2.4.1.** *Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ , então:*

(a) *A função  $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ , é contínua.*

(b) *Para todo  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , temos que*

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1},$$

*em particular a série dada no segundo membro tem raio de convergência  $R$*

(c) *A função  $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ , é infinitamente derivável.*

(d) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a  $n$ -ésima derivada de  $f$  é dada por

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k \geq n} \frac{k!}{(k-n)!} (x-x_0)^{k-n},$$

para todo  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , e a série que define  $f^n$  também tem raio de convergência  $R$ .

Para maiores detalhes da prova do teorema (2.4.1), ver (Muniz Neto, 2015). Uma consequência imediata do teorema (2.4.1) é

**Corolário 2.4.1.** Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$  tem raio de convergência  $R > 0$ ,

e seja  $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ . Então

(a)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$  é a série de Taylor de  $f$ .

Em seguida, listaremos algumas séries de Maclaurin.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1 \\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty \\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad R = \infty \\ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad R = \infty \\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}, \quad R = 1 \\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad R = 1 \\ (1+x)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n, \quad R = 1 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

### 2.4.1 Resultados adicionais para séries de potências

Iremos, aqui, relacionar algumas propriedades especiais para séries de potências que usaremos como ferramentas, posteriormente, no nosso trabalho.

**Definição 2.4.2.** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é uma função par se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e dizemos que  $f$  é função ímpar se

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.4.2.** As funções  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = x^{2n}$  com  $n \in \mathbb{N}$  são exemplos de funções pares e as funções  $h(x) = \sin x$  e  $j(x) = x^{2n-1}$  com  $n \in \mathbb{N}$  são exemplos de funções ímpares.

Em seguida, vamos ilustrar um resultado que envolve séries e funções pares e ímpares.

**Proposição 2.4.2.** Seja  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , onde  $r$  é o raio de convergência desta série, então:

(a)  $f$  é uma função par se, e somente se,  $a_{2n+1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(b)  $f$  é uma função ímpar se, e somente se,  $a_{2n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Iremos provar o item (a), e o item (b) segue de modo análogo. Suponhamos primeiramente, que  $a_{2n+1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n},$$

daí, para todo  $x \in (-L, L)$ , temos

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} (-x)^{2n} = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = f(x),$$

ou seja,  $f$  é uma função par.

Reciprocamente, suponhamos que  $f$  seja uma função par. Pelo corolário (2.4.1) temos que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como por hipótese  $f$  é uma função par temos:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(n)}(-x), & \text{se, } n \text{ for par} \\ -f^{(n)}(-x), & \text{se, } n \text{ for ímpar,} \end{cases} \quad (2.15)$$

da expressão (2.15), segue que, para  $x_0 = 0$  temos que  $f^{(n)}(0) = 0$  se  $n$  for ímpar. Logo para  $n$  ímpar e  $x_0 = 0$ , obtemos:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0,$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}.$$

□

O resultado acima mostra que, se a função é par, a expansão da série de potências de tal função só possui termos  $x$  elevado a expoentes pares e elevado a expoentes ímpares se a função for ímpar. Veja, por exemplo, as séries de potências do seno e do cosseno na expressão (2.14). Iremos relacionar dois outros resultados, onde a demonstração pode ser encontrada em (Lima, 2007).

**Proposição 2.4.3.** *Se as séries de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  convergem para todo  $x \in (-R, R)$ , então, pondo*

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

*para todo  $x$  nesse intervalo, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  é convergente e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

O próximo resultado é para dar condições à série de potências da função  $\frac{1}{f(x)}$ ,

conhecendo a série de potências da função  $f(x)$ .

**Proposição 2.4.4.** *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  uma série de potências que converge ao valor  $f(x)$ , para todo  $x \in (-R, R)$ . Se  $a_0 \neq 0$ , então existem  $s > 0$  e uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  que converge, para todo  $x \in (-s, s)$ , ao valor  $\frac{1}{f(x)}$ .*

Em seguida iremos destacar uma série de potências (especial) que usaremos para encontrar alguns resultados no decorrer do trabalho. Para isso, lembremos, primeiramente, que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

daí temos,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots, \quad (2.16)$$

para  $x \neq 0$ , e essa série tem o valor 1 em  $x = 0$ , como  $a_0 = 1 \neq 0$ , pela proposição (2.4.4), a função  $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  tem expansão em série de potências válida em alguma vizinhança da origem, se  $g(0) = 1$ . Então, escrevemos

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n. \quad (2.17)$$

Os números  $B_n$ , definidos na equação (2.17), são chamados de números de Bernoulli.

**Proposição 2.4.5.** *Os números  $B_n$  de Bernoulli, satisfazem o seguinte:*

$$B_1 = 1, \quad B_2 = -\frac{1}{2}, \quad B_n = 0 \text{ se } n > 1, \text{ ímpar},$$

e

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Da expressão (2.17), temos que  $B_0 = 1$ , por outro lado temos

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \frac{2}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \frac{(e^x + 1) + (1 - e^x)}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 \right),$$

ou seja

$$\frac{x}{e^x - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}. \quad (2.19)$$

Observemos que  $h(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  é uma função par. De fato

$$h(-x) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{1}{e^x} - 1} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = h(x).$$

Segue da proposição (2.4.2), que a série de potências de  $h$  tem somente potências pares em  $x$ , daí concluímos que  $B_1 = -\frac{1}{2}$  e  $B_n = 0$  para  $n > 1$  ímpar.

Por outro lado, das equações (2.16) e (2.17), temos:

$$\left( B_0 + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!} + \frac{B_3}{3!} + \dots \right) \left( \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots \right) = 1,$$

daí, concluímos que o coeficiente de  $x^{n-1}$  no produto da esquerda é igual a zero se  $n > 1$ .

Pela proposição (2.4.3), tem-se

$$\frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{n!} + \frac{B_1}{1!} \cdot \frac{1}{(n-1)!} + \frac{B_2}{2!} \cdot \frac{1}{(n-2)!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{1!} = 0, \quad (2.20)$$

multiplicando por  $n!$  a equação (2.20), obtemos

$$\frac{n!}{0!n!} B_0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} B_1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} B_2 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!1!} B_{n-1} = 0. \quad (2.21)$$

Portanto, a equação (2.21) pode ser escrita na forma

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0.$$

□

Agora, usando a proposição (2.4.5), podemos encontrar os coeficientes Bernoulli, por exemplo substituindo  $n = 3$  na equação (2.18), temos:

$$\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 0,$$

como  $\binom{3}{0} = 1$ ,  $\binom{3}{1} = 3 = \binom{3}{2}$ ,  $B_0 = 1$  e  $B_1 = -\frac{1}{2}$  temos

$$1 - \frac{3}{2} + 3B_2 = 0 \iff B_2 = \frac{1}{6}.$$

De maneira análoga, tomando  $n = 5, 7, 9, 11, \dots$ , na equação (2.18) obtemos

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \dots \quad (2.22)$$

Para o que segue, lembremos de variáveis complexas, a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

e como consequência

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{cases} \quad (2.23)$$

**Corolário 2.4.2.**

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \quad (2.24)$$

*Demonstração.* Começemos observando que

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{x/2}(e^{x/2} + e^{-x/2})}{e^{x/2}(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}},$$

e pela proposição (2.4.5), temos que

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \quad (2.25)$$

No primeiro membro da equação (2.25), substituindo  $x$  por  $2ix$  eu usando as expressões de (2.23) obtemos

$$\frac{2ix}{2} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = x \frac{(e^{ix} + e^{-ix})/2}{(e^{ix} - e^{-ix})2i} = x \cot x. \quad (2.26)$$

Juntando as equações (2.25) e (2.26), só que em (2.25)  $2ix$  ao invés de  $x$ , temos

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2ix)^{2n},$$

e como  $i^{2n} = -1$  se  $n$  for ímpar, ao passo que,  $i^{2n} = 1$  se  $n$  for par, obtemos

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

□

## 2.5 Série de Fourier

As séries de Fourier simbolizam um grande número de funções, abrangendo algumas funções descontínuas. No entanto, as séries de Fourier podem representar, exclusivamente funções periódicas com período  $T$ .

O estudo de séries de Fourier constitui uma das partes mais antigas da análise, sendo estudadas em problemas físicos, por exemplo, as equações de calor e da onda. Na atualidade, elas vêm desempenhando um papel importante no estudo do som, condução de calor, ondas eletromagnéticas, vibrações mecânicas, entre os outros, conforme citado em (Simmons, 2008).

Uma série composta por senos e cossenos é intitulada série trigonométrica. Quando a série de Fourier é convergente, ela pode ser representada como uma função  $f(x)$ , da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (2.27)$$

Para a série citada na equação (2.27), surgem as seguintes questões:

- (I) Dada uma função  $f$ , conforme a equação (2.27), como calculamos os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ ?
- (II) Uma vez que a série para  $f$  tenha sido calculada, podemos demonstrar que ela converge para  $f$ ?

Vamos responder, aqui, algumas dessas questões, além de usar a série de Fourier para continuidade de nosso trabalho.

### 2.5.1 Períodicidade da função seno e cosseno

**Definição 2.5.1.** *Uma função  $f(x)$  é dita de periódica com período  $T > 0$  se o domínio de  $f(x)$  contém  $(x + T)$  sempre que contiver  $x$  e se*

$$f(x + T) = f(x),$$

*para todo valor de  $x \in \mathbb{R}$ . Chamamos  $T$  de período.*

Observemos se  $T$  é um período de uma função periódica  $f$ , segue que  $2T$  pois,

$$f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x),$$

em geral  $kT$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , é um período da função  $f$ . Nesse sentido, então, o menor período positivo é chamado *período fundamental*.

**Exemplo 2.5.1.** As funções  $f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$  e  $g(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$  têm período fundamental  $T = \frac{2L}{n}$ . De fato, iremos mostrar a afirmação para a função  $f$ . Seja  $T$  um período da função  $f$ , então

$$\sin \frac{n\pi(x + T)}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

usando a proposição (2.2.2), na equação (2.28) temos:

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \sin \frac{n\pi T}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.29)$$

Substituindo  $x = \frac{L}{2n}$  na equação (2.29), obtemos

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} = \sin \frac{\pi}{2},$$

o que implica

$$\cos \frac{n\pi T}{L} = 1, \quad (2.30)$$

e, daí, e pela relação fundamental da trigonometria, proposição (2.2.1), obtemos

$$\sin \frac{n\pi T}{L} = 0. \quad (2.31)$$

Como estamos interessados no menor valor positivo  $T$ , satisfazendo (2.30) e (2.31), concluímos que

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \iff T = \frac{2L}{n}.$$

Portanto, concluímos que o período fundamental da função  $f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$  é  $T = \frac{2L}{n}$ . Procedendo de modo análogo, mostra-se que o período fundamental da função  $g(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$  também é  $T = \frac{2L}{n}$ , com  $n \neq 0$ . Em particular,  $2L$  também é um período para  $f$  e  $g$ .

## 2.5.2 Ortogonalidade das funções seno e cosseno

Seja

$$C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ seja contínua } [a, b], \} \quad (2.32)$$

pode-se mostrar que este conjunto é um espaço vetorial, conhecido como espaço vetorial das funções contínuas em  $[a, b]$ . Iremos, então, definir um produto interno neste espaço vetorial (os conceitos de espaço vetorial e produto interno são muito utilizados em Álgebra Linear. Para o leitor se familiarizar, ver, por exemplo, Lima (2004)).

**Definição 2.5.2.** *Seja  $C^0([a, b])$  o espaço vetorial mencionado na equação (2.32), definimos o produto interno em  $C^0([a, b])$  por*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \forall f, g \in C^0([a, b]).$$

Se  $\langle f, g \rangle = 0$ , dizemos que  $f$  e  $g$  são ortogonais em  $[a, b]$ . Uma família de funções em  $C^0([a, b])$  é dita ortogonal em  $[a, b]$  se as funções forem duas a duas ortogonais.

No que segue, iremos usar a notação abaixo:

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, & n \in \mathbb{N} \\ \psi_n(x) = \operatorname{cos} \frac{n\pi x}{L}, & n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (2.33)$$

**Proposição 2.5.1.** *Usando as notações de (2.33), seja conjunto*

$$A = \{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\},$$

então  $A$  é um conjunto ortogonal em  $[-L, L]$  e valem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \psi_n(x)\psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m, n \in \mathbb{Z}^+, m \neq n, \\ L & \text{se } m = n \in \mathbb{N}, \\ 2L & \text{se } m = n = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\int_{-L}^L \psi_n(x)\varphi_m(x) dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

$$\int_{-L}^L \varphi_n(x)\varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m, n \in \mathbb{N}^+, m \neq n, \\ L & \text{se } m = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.36)$$

*Demonstração.* Iremos provar (2.36). Os demais casos seguem de modo análogo. Para isto, da proposição (2.2.2), temos que

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b, \end{cases} \quad (2.37)$$

na expressão (2.37), subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}. \quad (2.38)$$

De (2.38) temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx &= \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \cos \frac{(n - m)\pi x}{L} - \cos \frac{(n + m)\pi x}{L} \right] dx \end{aligned}$$

se  $n \neq m$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2L}{(n - m)\pi} \operatorname{sen}((n - m)\pi) - \frac{2L}{(n + m)\pi} \operatorname{sen}((n + m)\pi) \right] = 0, \end{aligned}$$

se  $n = m$ ,

$$\int_{-L}^L (\varphi_n(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ 1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx = L - \frac{2L}{4n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi) = L.$$

□

### 2.5.2.1 Determinação dos coeficientes de Fourier

Em seguida, iremos responder uma das questões levantadas no início da seção.

**Proposição 2.5.2.** *Sejam  $a_n, n \geq 0$ , e  $b_n, n \geq 1$  números reais dados. Suponhamos que a série trigonométrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

converja, uniformemente, em  $[-L, L]$ , a uma função  $f$ . Então

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.39}$$

*Demonstração.* Para prova desta proposição, usaremos as notações de (2.33). Para todo  $x \in [-L, L]$ , temos

$$f = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n),$$

pela proposição (2.5.1), temos:

$$\langle f, \psi_0 \rangle = \frac{a_0}{2} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle = a_0 L,$$

ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{L} \langle f, \psi_0 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \psi_0(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

De modo análogo, para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_n \rangle &= a_n \langle \psi_n, \psi_n \rangle = a_n L, \\ \langle f, \varphi_n \rangle &= b_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = b_n L. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

□

As fórmulas encontradas na proposição (2.5.2) são conhecidas como as *fórmulas de Euler-Fourier*.

**Definição 2.5.3.** *Sejam  $L > 0$  e  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. A série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

*é dita série de Fourier de  $f$ . Os coeficientes  $a_n, n \in \mathbb{Z}$  e  $b_n, n \in \mathbb{N}$ , encontrados na proposição (2.5.2) são ditos coeficientes de Fourier de  $f$ .*

### 2.5.3 Convergência da série de Fourier

Iremos, aqui, tratar apenas o caso que será necessário para a sequência do nosso trabalho. Para isto, temos:

**Definição 2.5.4.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será **seccionalmente contínua** se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie, isto é, desde que os limites*

$$f(x_0^+) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_0^-) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

*existam e sejam finitos, em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados  $a < b$ , existem*

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b,$$

*tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_i, a_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  e existem os limites*

$$f(a_j^+) \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Obsevamos que toda função contínua é seccionamente contínua.

**Definição 2.5.5.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será **seccionalmente diferenciável** se ela for seccionalmente contínua e se a função  $f'$  também for seccionalmente contínua.*

Para demonstrar o resultado seguinte, ver Figueiredo (2005), por exemplo. Este resultado, também conhecido como Teorema de Fourier.

**Teorema 2.5.1. (de Fourier)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então, a série de Fourier da função  $f$ , dada na definição (2.5.3), converge em cada ponto  $x$  para*

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)],$$

isto é,

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right). \quad (2.40)$$

Iremos, em seguida, por meio de um exemplo, encontrar uma série para uma dada função.

**Proposição 2.5.3.** *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \cos \alpha x & \text{se } -\pi < x \leq \pi \\ \text{periódica de período } 2\pi. \end{cases}$$

para  $\alpha \neq 0$  um número real. Mostre que

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} \cos nx \right]$$

para  $\alpha \neq$  um número real

*Demonstração.* Para o que pede no enunciado, iremos encontrar a série de Fourier de  $f$ . Na proposição (2.5.2), fazendo  $L = \pi$ , temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \operatorname{senn} x \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pela primeira equação de (2.41), temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi \alpha} \sin \alpha x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi \alpha} \sin \alpha \pi. \quad (2.42)$$

Somando as duas equações da expressão (2.37), temos,

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \quad (2.43)$$

substituindo (2.43) na segunda equação de (2.41), para todo  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n + \alpha)x + \cos(n - \alpha)x] dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n + \alpha} \operatorname{sen}(n + \alpha)x + \frac{1}{n - \alpha} \operatorname{sen}(n - \alpha)x \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \left[ 2(n - \alpha) \operatorname{sen}(n + \alpha)\pi + 2(n + \alpha) \operatorname{sen}(n - \alpha)\pi \right].
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Usando a proposição (2.2.2), temos

$$\begin{aligned}
 &(n - \alpha) \operatorname{sen}(n + \alpha)\pi + (n + \alpha) \operatorname{sen}(n - \alpha)\pi = \\
 &= (n - \alpha) \left[ \operatorname{sen}n\pi \cos \alpha\pi + \operatorname{sen}\alpha\pi \cos n\pi \right] + (n + \alpha) \left[ \operatorname{sen}n\pi \cos \alpha\pi - \operatorname{sen}\alpha\pi \cos n\pi \right] \\
 &= (n - \alpha) \operatorname{sen}\alpha\pi \cos n\pi - (n + \alpha) \operatorname{sen}\alpha\pi \cos n\pi \\
 &= -2\alpha \operatorname{sen}\alpha\pi \cos n\pi.
 \end{aligned}$$

Daí a equação (2.44) fica

$$a_n = -\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi \cos n\pi}{\pi \frac{n^2 - \alpha^2}{n^2 - \alpha^2}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi (-1)^{n+1}}{\pi \frac{n^2 - \alpha^2}{n^2 - \alpha^2}}. \tag{2.45}$$

Usando soma de arcos para o seno, de modo análogo ao do cosseno temos:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2}, \tag{2.46}$$

substituindo (2.46) na segunda terceira equação de (2.41), para todo  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \alpha)x + \operatorname{sen}(n - \alpha)x}{2} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n + \alpha} \cos(n + \alpha)x \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n - \alpha} \cos(n - \alpha)x \left[ \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

em que a última igualdade de (2.47) segue do fato que a função cosseno é uma função par. Como a função  $f$  é seccionalmente diferenciável para todo intervalo  $[-L, L]$ , com  $L > 0$ , e  $f$  é periódica, com  $f(x^+) = f(x^-)$ , segue do teorema (2.5.1) que  $f$  converge para sua

série de Fourier. Substituindo as equações (2.41), (2.45) e (2.47) em (2.40), temos

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} \cos nx \right], \quad (2.48)$$

para todo  $\alpha$  real diferente de zero. □

**Corolário 2.5.1.** *Para  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , temos*

$$\cot \alpha \pi = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \right], \quad (2.49)$$

*Demonstração.* Basta observar que

$$\sin \alpha \pi \neq 0 \iff \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Pondo  $x = \pi$  na equação (2.48), chegamos no resultado desejado. □

## Capítulo 3

# O problema da Basileia e a prova de Euler

Neste capítulo, será apresentado um breve apanhado histórico do problema da Basileia, bem como a compreensão heurística da perspicácia de Euler, para a fórmula engenhosa e eluciadativa do valor da soma infinita dos inversos dos quadrados. Aborda, ainda, a representação geométrica do problema, e um problema que permanece em aberto, decorrente da fórmula de Euler. Para escrever este capítulo, utilizamos como referência Ávila (2008), Barros (2016), Dunham (1999), Gayo (2013), Knopp (1996), Simmons (1988) e Santos Filho (2014).

### 3.1 O Contexto histórico do problema da Basileia

O primeiro registro relacionado à série infinita na matemática foi associado à série geométrica de Arquimedes de Siracusa, 287-212 a.c. Após mais de 16 séculos sem mensuração, em meados do século XIV, os estudos das séries infinitas voltaram a ter destaque, inicialmente, em ensaios sobre Cinemática Merton College da Universidade de Oxford e, posteriormente, no século XVI, na conjuntura do Cálculo infinitesimal. A partir do desenvolvimento de novas ferramentas em matemática, os estudos de séries infinitas se constituíram em um patamar significativo no cenário da matemática pura e aplicada.

No século XVI, o matemático e professor italiano de Mecânica da Universidade de Bolonha, Pietro Mengoli (1625-1686), foi pioneiro em apresentar um problema consistia em formular o resultado da soma dos inversos dos quadrados perfeitos, problema famoso

por estar associado a função zeta de Riemann (Ávila, 2008). Ou seja,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sem êxito, a série infinita veio problematizada e compartilhada em um livro, e, por quase um século, a mesma foi tida como desafio entre os matemáticos da época, proporcionando notoriedade a quem conseguisse resolvê-la.

Um dos matemáticos que tentou formular a soma da série foi Jacques Bernoulli, (1654-1705), que já havia solucionado outras somas de séries. Por outro lado, Jacques percebeu que seu trabalho era ineficaz na série sugerida por Mengoli, e propôs, assim, no seu (*Tractatus de Seriebus Infinitis*), uma solicitação: “Se alguém encontrar e nos comunicar o que até agora escapou de nossos esforços, será grande nossa gratidão” (Dunham, 1999).

Como Jacques Bernoulli era professor na cidade de Basileia, o problema ficou conhecido como o Problema da Basileia (Ávila, 2008).

Coube a Leonhard Paul Euler, a grandiosidade de apresentar sua prova em 1734, e enunciá-la em 1735. Como o problema havia resistido aos principais matemáticos da época, onde ficou quase um século sem solução, a prova de Euler lhe trouxe fama imediata aos 28 anos.

## 3.2 A prova de Euler

Iremos, aqui, ilustrar o método que Euler utilizou para encontrar a solução do problema, baseando-nos em Simmons (1988).

**Teorema 3.2.1.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Tomemos, inicialmente, os fundamentos da Álgebra. Considere  $a$  e  $b$ , ambos diferentes de zero. Logo, pelo corolário (2.1.1),  $a$  e  $b$  são as raízes da equação

$$(x - a)(x - b) = 0, \quad (3.2)$$

ou ainda,

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{b}\right) = 0. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) pode ser reescrita na forma

$$1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{ab}x^2 = 0, \quad (3.4)$$

em que o oposto do coeficiente de  $x$  é a soma dos inversos das raízes. Substituindo  $x$  por  $x^2$ ,  $a$  e  $b$  por  $a^2$  e  $b^2$ , nas equações (3.3) e (3.4), respectivamente, temos,

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) = 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \frac{1}{a^2b^2}x^4 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, temos que as raízes da equação (3.5) são  $\pm a$  e  $\pm b$ , e as duas equações (3.5) estão escritas na forma polinomial.

Pela segunda equação (3.5), observamos que o coeficiente de  $x^2$  é a soma dos inversos dos quadrados das raízes positivas da equação polinomial. Procedendo de modo análogo, impondo  $a, b, c \neq 0$ , temos a equação

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) = 0$$

tem  $\pm a$ ,  $\pm b$ ,  $\pm c$  como raízes e pode ser escrita na forma

$$1 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2}\right)x^4 - \frac{1}{a^2b^2c^2}x^6 = 0. \quad (3.6)$$

Novamente temos que, o coeficiente de  $x^2$  é a soma dos inversos dos quadrados das raízes positivas da equação polinomial. Procedendo de modo análogo, indutivamente, temos que, o coeficiente de  $x^2$  é a soma dos inversos dos quadrados das raízes positivas da equação polinomial.

Consideremos, agora, a equação

$$\operatorname{sen}x = 0. \quad (3.7)$$

Substituindo na equação (3.7) a expansão da série de Maclaurin da função seno, conforme

a equação (2.14), temos

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = 0. \quad (3.8)$$

Se olharmos a equação (3.8) como “equação polinomial de grau infinito”, e levando em conta a equação (3.7), sabemos que a mesma tem um número infinito de raízes que são  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ , para  $x \neq 0$ , a equação (3.7) pode ser representado por

$$\frac{\text{sen}x}{x} = 0,$$

ou seja,

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = 0, \quad (3.9)$$

cujas as raízes  $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ . A partir das raízes dessas equações, podemos escrever a série infinita na forma do produto infinito

$$\frac{\text{sen}x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Usando o procedimento análogo ao da equação (3.6), temos que o coeficiente de  $x^2$  é a soma dos inversos dos quadrados das raízes positivas, e pela equação (3.9), temos

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} \dots = \frac{1}{3!},$$

e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Para Simmons (1988), pesquisas audaciosas são características da genialidade de Euler. Por outro lado, a prova de Euler não possui a força de uma prova rigorosa. Mas, a essência desse trabalho está no significado e na validade da expressão conhecida como produto infinito de Euler para a função seno. Por quase 150 anos, a prova de Euler tinha uma passagem inválida. As falhas dessa discussão convidam à construção de uma teoria geral de produtos infinitos.

### 3.3 A não validade da prova de Euler

Por muito tempo, a prova de Euler tinha uma passagem inválida. A invalidade estava contida em considerar que séries de potências são polinômios, não satisfazendo, assim, todas as propriedades de polinômios.

Considere o seguinte polinômio  $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , com raízes  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$ . Pelo corolário (2.1.1), temos  $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ .

Pelas relações entre coeficientes e raízes de um polinômio,

$$\begin{cases} a_0 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \\ a_1 = -(r_2 \cdot r_3 \cdot r_4) - (r_1 \cdot r_3 \cdot r_4) - (r_1 \cdot r_2 \cdot r_4) - (r_1 \cdot r_2 \cdot r_3). \end{cases}$$

Logo,

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}. \quad (3.10)$$

Observe que o argumento citado acima e descrito pela equação (3.10) não é válido para um polinômio infinito. Iremos ilustrar isto no exemplo abaixo.

**Exemplo 3.3.1.** *A função*

$$g(x) = 2 - \frac{1}{1-x},$$

tem  $x = \frac{1}{2}$  como sua única raiz. Por outro lado, lembremos que a expansão de  $\frac{1}{1-x}$ , como série de Maclaurin, conforme a equação (2.14), é

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 \dots,$$

quando  $|x| < 1$ . Daí a expansão de  $g(x)$  em séries de potências é da forma

$$g(x) = 1 - x - x^2 - x^3 - \dots,$$

logo  $a_0 = 1$  e  $a_1 = -1$ . Por outro lado, a soma dos inversos das raízes não é  $-\frac{a_1}{a_0}$ , ou seja, a equação (3.10) não é satisfeita.

Vale ressaltar que Euler não dispunha da teoria de convergência de séries que dispomos atualmente. Tal conhecimento no contexto de Euler era puramente empírico. Desse modo, devemos analisar a sua prova sob a ótica científica da época.

### 3.4 A fatoração de Weierstrass

No ano de 1885, o matemático Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) provou o teorema da fatoração de Weierstrass. Iremos somente ilustrar o resultado, que é a justificativa para o método usado por Euler para resolver o problema da Basileia.

**Teorema 3.4.1.** (*Fatoração de Weierstrass*) *Seja  $f$  uma função inteira não nula e  $(a_n)_{n \geq 1}$  a sequência dos seus zeros não nulos, contados com suas respectivas multiplicidades. Se  $f$  tem um zero em  $z = 0$  de ordem  $m \geq 0$ , então existe uma função inteira  $g$  e uma sequência de números naturais  $(p_n)_{n \geq 1}$ , tais que*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right),$$

para todo  $z \in \mathbb{Z}$ .

Da Análise Complexa, o resultado acima quer dizer que toda função analítica que pode ser representada por uma série de potências, pode ser expressa por um produto envolvendo suas raízes (Knopp, 1996).

Usando este argumento para a  $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ , temos que a mesma é uma função analítica e pode ser definida como uma série de potências. Argumento justificada pelo Teorema da Fatoração de Weierstrass. A problemática é que a prova de Euler é anterior a este teorema. Desse modo, essa passagem na sua resolução ficou sem justificativa por quase 150 anos.

A partir desse teorema, outros matemáticos, ao mesmo tempo em que aclamavam o resultado obtido de Euler, ressaltavam falta de rigor desta passagem. Diversos matemáticos fizeram suas demonstrações contendo apenas passagens válidas para o Problema da Basileia. Por outro lado, o desafio destes foi menos elaborado, tendo em vista que os mesmos já tinham posse do resultado numérico da soma infinita. Nessa perspectiva, a prova de Euler se mostra totalmente correta, sendo validada pelo o Teorema da Fatoração de Weierstrass.

### 3.5 O problema da Basileia e o teorema de Pitágoras

Tomemos, inicialmente, o Teorema de Pitágoras. Considerando as duas primeiras parcelas da soma,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

teremos, conforme a figura (3.1), um triângulo retângulo de vértices nos pontos  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , de modo que  $\overline{AP_1} = 1$ ,  $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{2}$ , e o triângulo sendo retângulo em  $P_1$ . Tomando  $r_1 = \overline{AP_1}$  e  $r_2 = \overline{AP_2}$ , pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} r_2^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2^2}. \end{aligned}$$

Fixando o ponto  $P_3$  de forma que  $\overline{P_2P_3} = \frac{1}{3}$  e o ângulo  $\widehat{AP_2P_3}$  seja reto. Considerando  $\overline{AP_3} = r_3$ , temos

$$\begin{aligned} r_3^2 &= r_2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}. \end{aligned}$$

Nessa proposição, ao marcarmos o ponto  $P_n$ , temos um segmento  $r_n$  onde

$$r_n^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Pelo Problema da Basileia, temos que  $r_n^2 < \frac{\pi^2}{6}$ , isto é,  $r_n < \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ . Assim, todos os pontos  $P_n$  estarão contidos no círculo de raio  $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ , conforme figura abaixo.

Desse modo, temos que os segmentos  $\overline{AP_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_nP_{n+1}}, \dots$ , formam uma espiral infinita, pelo fato de a soma da medida de cada segmento ser a série harmônica  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right)$ . Assim, a espiral formada se aproxima da circunferência sem ultrapassá-la.

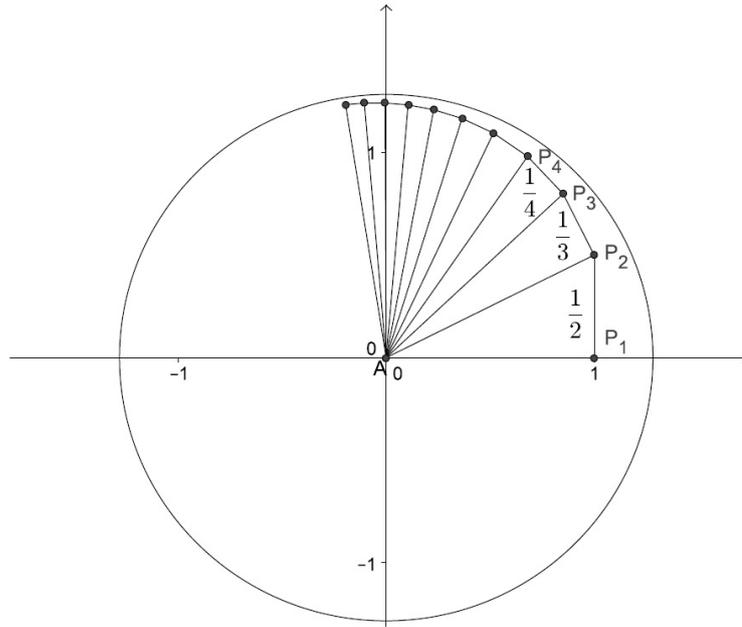


Figura 3.1: O problema da Basileia e o teorema de Pitágoras.  
Fonte: Gayo (2013).

### 3.6 A fórmula de Euler para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$

O próximo resultado é baseado em (Simmons, 1988, p.722).

**Teorema 3.6.1.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad (3.11)$$

onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $B_{2k}$  são os coeficientes de Bernoulli.

*Demonstração.* Da equação (2.24), temos,

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad (3.12)$$

por outro lado, da equação (2.49), temos

$$\pi x \cot \pi x = 1 - 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}. \quad (3.13)$$

Substituindo  $x$  por  $\pi x$  em (3.12) e igualando a (3.13), obtemos

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x^2}{n^2 - x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} (\pi x)^{2k}, \quad (3.14)$$

onde, na equação (3.14),  $k$  é o índice do somatório à direita. Na equação (3.14), expandindo cada termo da série à esquerda, em série geométrica,

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{n^2 - x^2} &= -2 \cdot \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - x^2/n^2} \\ &= -2 \cdot \frac{x^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^k \\ &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}}. \end{aligned}$$

Assim, (3.14) pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} x^{2k}.$$

Trocando a ordem do somatório à esquerda, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} x^{2k}.$$

Igualando os coeficientes de  $x^{2k}$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \pi^{2k}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . □

Aplicando o teorema (3.6.1) e os coeficientes de Bernoulli (proposição (2.4.5)), em particular, para  $k = 1, 2, 3$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

É admirável que, por quase um século e meio, tenha havido poucos avanços na formulação de um resultado exato para qualquer uma das somas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}, \dots$$

Em face do enigma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ , quando  $k$  for um número ímpar, somos tentados a relançar o problema de Jacques Bernoulli em 1689 “Se alguém encontrar e nos comunicar o que até agora escapou de nossos esforços, será grande nossa gratidão” (Dunham, 1999).

# Capítulo 4

## Outras provas do problema da Basileia

Após a prova de Euler para a resolução do Problema da Basileia, outros matemáticos apresentaram suas resoluções no decorrer dos séculos posteriores. Dentre as provas apresentadas, algumas são simples e outras são rigorosas. Neste capítulo, vamos apresentar algumas provas de diferentes níveis de complexidade. Os conceitos, as definições e as propriedades foram baseadas em Chapman (2003), Dunham (1999), Figueiredo (2005), Gayo (2013), Harper (2003), Lima (2003) e Simmons (1988).

### 4.1 A prova de Giesy

A prova proposta por D. P. Giesy foi publicada no Mathematics Magazine, em 1972, (Simmons, 1988, p. 701).

*Demonstração.* Definimos, inicialmente, a função  $f_n(x)$  por

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx. \quad (4.1)$$

Pela proposição (2.2.4), a função dada na equação (4.1) é dada por

$$f_n(x) = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad (4.2)$$

desde que  $x \neq 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Usando (4.1) para definir o número  $E_n$  e também para

calculá-lo

$$E_n = \int_0^n x f_n(x) dx = \int_0^\pi \left[ \frac{x}{2} + x \cos x + x \cos 2x + \dots + x \cos nx \right] dx. \quad (4.3)$$

Observemos que, no lado direito da expressão (4.3), cada termo da integral, a partir do segundo, integremos por partes

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos nxdx &= \frac{x}{k} \sin kx \Big|_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \text{sen} kxdx \\ &= \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^\pi \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.3), obtemos

$$E_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right]. \quad (4.5)$$

Como os termos pares da soma da direita são nulos, podemos reescrever (4.5) da forma

$$\frac{1}{2} E_{2n-1} = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (4.6)$$

Mostraremos agora, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2n-1} = 0$ . Assim, da equação (4.6), teremos provado a fórmula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (4.7)$$

que será uma ferramenta para chegar no resultado desejado. Para  $x \in [0, \pi]$ , defina

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x/2}{\text{sen}(x/2)}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que para  $x \neq 0$

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{x/2}{\text{sen}(x/2)} \right] = \frac{2 \text{sen}(x/2) - x \cos(x/2)}{4 \text{sen}^2(x/2)}$$

e

$$\begin{aligned} G'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)} - 1}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \operatorname{sen}(x/2)}{2x \operatorname{sen}(x/2)}, \end{aligned}$$

aplicando L' Hôpital

$$G'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x/2)}{2 \operatorname{sen}(x/2) + x \cos(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x/2)}{2 \cos(x/2) - \frac{x}{2} \operatorname{sen}(x/2)} = 0.$$

Tomando, então  $g(x)$  por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ \frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)} \right], & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

observemos que  $g$  é contínua em  $[0, \pi]$ . De fato, basta verificar esta afirmação para  $x = 0$ .

Aplicando L' Hôpital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(x/2) - x \cos(x/2)}{4 \operatorname{sen}^2(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{8 \cos(x/2)} = 0 = g(0),$$

segue daí que  $g$  é limitada em  $[0, \pi]$ . Substituindo (4.2) em (4.3), temos

$$E_{2n-1} = \int_0^\pi \frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)} \operatorname{sen} \frac{(4n-1)x}{2} dx. \quad (4.8)$$

integrando (4.8) por partes, temos

$$E_{2n-1} = \frac{1}{4n-1} \left[ 2 + 2 \int_0^\pi g(x) \cos \frac{(4n-1)x}{2} dx \right] \quad (4.9)$$

no qual utilizamos do limite fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)} = 1.$$

Assim, como  $g(x)$  é limitada em  $[0, \pi]$  e a função cosseno também é limitada, segue que a

integral na expressão (4.9) é limitada, ou seja

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2n-1} = 0,$$

daí concluímos a veracidade de (4.7).

Para complementar a prova de Euler, dividimos os inteiros positivos em ímpares e pares e usamos (4.7) para escrever

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

## 4.2 A prova de Cauchy

Apesar da maioria das provas utilizarem ferramentas de matemática avançada, como a prova de Fourier, a prova seguinte utiliza ferramentas bem mais elementares.

A prova, aqui apresentada, é de autoria de Augustin Louis Cauchy (Cours d'Analyse, 1821, nota VIII).

*Demonstração.* Começamos aqui, lembrando a fórmula de De Moivre (veja por exemplo Ávila (2011)), que é:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \forall n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Seja  $x$  um número real, tal que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , e seja  $n$  um número inteiro ímpar positivo. Pela fórmula de Moivre (expressão (4.10)), e pela a definição da função cotangente,

temos

$$\begin{aligned} \frac{\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}^n x} &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n}{\operatorname{sen}^n x} \\ &= \left( \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right)^n \\ &= (\cot x + i)^n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pelo Teorema Binomial<sup>1</sup>

$$(\cot x + i)^n = \binom{n}{0} \cot^n x + \binom{n}{1} (\cot^{n-1} x) i + \cdots + \binom{n}{n-1} (\cot x) i^{n-1} + \binom{n}{n} i^n.$$

Lembremos que

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 4k \\ i, & \text{se } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{se } n = 4k + 2 \\ -i, & \text{se } n = 4k + 3, \end{cases}$$

com  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Daí temos:

$$\begin{aligned} (\cot x + i)^n &= \left( \binom{n}{0} \cot^n x - \binom{n}{2} \cot^{n-2} x + \cdots \pm \binom{n}{n-1} \cot x \right) \\ &+ i \left( \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x + \cdots \pm \binom{n}{n} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Igualando as partes imaginárias das equações (4.11) e (4.12), temos a identidade

$$\frac{\sin(nx)}{\operatorname{sen}^n x} = \left( \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x + \cdots \pm \binom{n}{n} \right). \quad (4.13)$$

Como estamos supondo  $n$  ímpar, então, existe um número inteiro positivo  $m$  fixado, tal que  $n = 2m + 1$ . Além disso, considere  $x_r = \frac{r\pi}{2m+1}$  com  $r = 1, 2, \dots, m$ , então  $nx_r$  é um múltiplo de  $\pi$ , e portanto  $\sin(nx_r) = 0$ . Substituindo  $x_r$  por  $x$  na equação (4.13),

<sup>1</sup>Na Álgebra, a expansão binomial descreve a expansão algébrica de potências de um binomial. Pelo teorema, é possível expandir o polinômio  $(x+y)^n$  em uma soma envolvendo termos da forma  $ax^b y^c$ , onde os expoentes  $b$  e  $c$  são inteiros não negativos com  $b+c=n$  e o coeficiente  $a$  de cada termo é um número inteiro positivo, em função de  $n$  e  $b$ .

obtemos

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m}(x_r) - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2}(x_r) \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1},$$

para cada  $r = 1, 2, \dots, m$ . Os valores  $x_r = x_1, x_2, \dots, x_m$  são números distintos no intervalo  $0 < x_r < \frac{\pi}{2}$ . Assim, a função  $\cot^2 x$  é única neste intervalo e os valores  $t_r = \cot^2 x_r$  são distintas para  $r = 1, 2, \dots, m$ . Pela equação acima, os números  $m$  são as raízes do polinômio de m-grau:

$$p(t) = \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

Pelas fórmulas de Viète<sup>2</sup>, podemos calcular a soma das raízes examinando os dois primeiros coeficientes do polinômio. Logo, temos

$$\begin{aligned} \cot^2 x_1 + \cot^2 x_2 + \dots + \cot^2 x_m &= \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} \\ &= \frac{2m(2m-1)}{6}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo a identidade trigonométrica  $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$  (pode ser facilmente obtida através da relação fundamental da trigonometria), temos

$$\begin{aligned} \csc^2 x_1 + \csc^2 x_2 + \dots + \csc^2 x_m &= \frac{2m(2m-1)}{6} + m \\ &= \frac{2m(2m+2)}{6}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Agora, para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , temos

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad (4.16)$$

dividindo a inequação (4.16) por  $\sin x$ , obtemos,

$$\cot x < \frac{1}{x} < \csc x,$$

daí temos,

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \csc^2 x. \quad (4.17)$$

---

<sup>2</sup>As fórmulas de Viète são fórmulas que relacionam os coeficientes de um polinômio à somas e produtos de suas raízes. Para aprofundamento, ver Harper (2003).

Somando todas essas desigualdades dadas na inequação (4.17), para cada um dos números  $x_r = \frac{r\pi}{2m+1}$ , e usando as duas identidades (4.14) e (4.15), obtemos

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{(2m+1)}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{(2m+1)}{m\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}. \quad (4.18)$$

Multiplicando ambos membros da expressão (4.18) por  $\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^2$ , obtemos

$$\frac{\pi^2}{6} \left(\frac{2m}{2m+1}\right) \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{2m}{2m+1}\right) \left(\frac{2m+2}{2m+1}\right).$$

Se colocarmos

$$\begin{cases} a_m &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{2m}{2m+1}\right) \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \\ b_m &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2}, \\ c_m &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{2m}{2m+1}\right) \left(\frac{2m+2}{2m+1}\right), \end{cases}$$

temos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} c_m = \frac{\pi^2}{6}.$$

À medida que  $m$  tende ao infinito, ambas as seqüências  $(a_m)$  e  $(c_m)$  tendem a  $\frac{\pi^2}{6}$ . Pelo Teorema do Confronto<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

□

---

<sup>3</sup>É usado para confirmar o limite de uma função (ou de uma seqüência), pela comparação de duas outras funções (ou seqüências), cujos limites são conhecidos. Isto é, no caso em questão,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $a_m \leq b_m \leq c_m$  e  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(x) = L = \lim_{m \rightarrow +\infty} c_m$ , então  $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = L$ , (Lima, 2017).

### 4.3 Prova utilizando a fórmula de Euler e a regra de L' Hôpital

Apresentaremos nessa seção, outra demonstração para o problema da Basileia, utilizando o resultado de Euler e a regra de L' Hôpital.

*Demonstração.* Começemos, aqui, usando o Teorema da fatoração de Weierstrass, teorema (3.4.1), para função seno, ou seja,

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right),$$

então,

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 - x^2}{n^2}\right). \quad (4.19)$$

Aplicando  $\ln$  nos dois membros da equação (4.19), obtemos

$$\ln(\sin \pi x) = \ln \pi + \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n^2 - x^2) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \ln n. \quad (4.20)$$

Derivando (4.20) em relação a  $x$ , obtemos

$$\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}, \quad (4.21)$$

Dividindo a equação (4.21) por  $2x$  e agrupando os termos, obtemos

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi \cot(\pi x)}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}. \quad (4.22)$$

Na equação (4.22), fazendo a mudança de variável ( $x = -it$ ), obtemos

$$-\frac{1}{2t^2} + \frac{\pi \cot(-\pi it)}{2it} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}. \quad (4.23)$$

Pela fórmula de Euler e pela expressão (2.23), podemos deduzir

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cot(-\pi it)}{2it} &= \frac{\pi}{2it} \cdot \frac{(e^{i(-\pi it)} + e^{-i(-\pi it)})/2}{(e^{i(-\pi it)} - e^{-i(-\pi it)})/2i} \\ &= \frac{\pi}{2t} \cdot \frac{e^{2\pi t} + 1}{e^{2\pi t} - 1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.23), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} = \frac{\pi t(e^{2\pi t} + 1) - e^{2\pi t} + 1}{2t^2(e^{2\pi t} - 1)}. \quad (4.25)$$

Assim, assumindo o valor do limite quanto  $t$  se aproxima de zero, e aplicando a regra de L' Hôpital três vezes em (4.25), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\pi t e^{2\pi t} - e^{2\pi t} + 1}{\pi t^2 e^{2\pi t} + t e^{2\pi t} - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^3 t e^{2\pi t}}{2\pi(\pi t^2 e^{2\pi t} + 2t e^{2\pi t}) + e^{2\pi t} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2(2\pi t + 1)}{4\pi^2 t^2 + 12\pi t + 6} \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

## 4.4 Prova usando a série de Fourier

Nesta seção, exibiremos a demonstração do problema, usando as Séries de Fourier. Essa resolução foi apresentada no século XIX.

*Demonstração.* Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\pi < x \leq \pi \\ \text{periódica de período } 2\pi, & \end{cases}$$

como ilustra a figura (4.1).

Iremos encontrar a série de Fourier de  $f$ . Para isto, usemos a proposição (2.5.2).

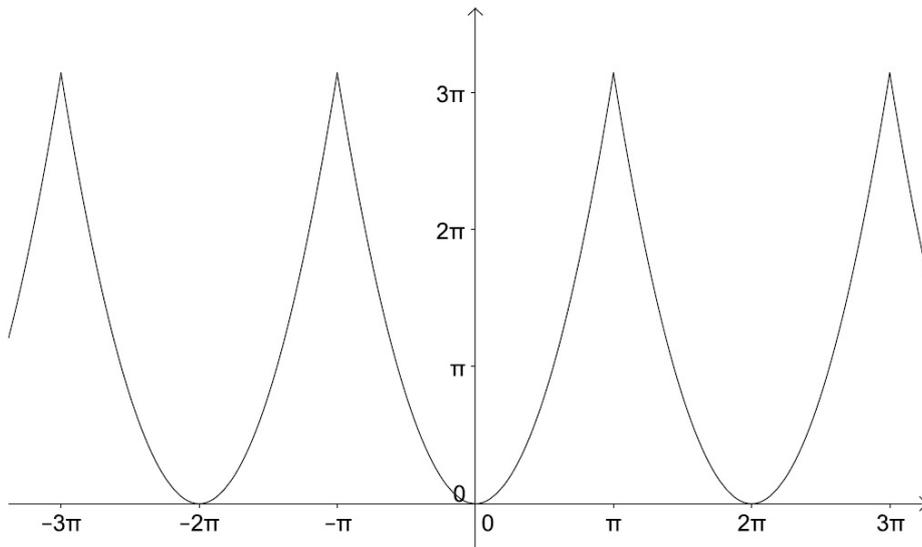


Figura 4.1:  $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi, e f(x + 2\pi) = f(x)$ .  
 Fonte: Gayo (2013).

Fazendo  $L = \pi$ , temos que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Pela primeira equação de (4.26), temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}. \tag{4.27}$$

Em seguida, utilizando a integração por partes na segunda equação de (4.26), temos que

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ x^2 \frac{\sen(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sen(nx)}{n} dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ x^2 \frac{\sen(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2 \sen(nx)}{n^3} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right].
 \end{aligned}$$

Como,  $\sen(n\pi) = \sen(-n\pi) = 0$  e  $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$ , pois  $n$  é um número natural, temos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{4\pi}{n^2} (-1)^n = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \quad (4.28)$$

Como  $x^2 \sin(nx)$  é uma função ímpar e os limites de integração são simétricos, temos que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0. \quad (4.29)$$

Como a função  $f$  é seccionalmente diferenciável para todo intervalo  $[-L, L]$ , com  $L > 0$  e  $f$  é periódica, com  $f(x^+) = f(x^-)$ , segue que  $f$  converge para sua série de Fourier. Substituindo as equações (4.27), (4.28) e (4.29) em (2.40), temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + 0 \sin(nx) \right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \right). \end{aligned}$$

Em particular, para  $x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) \right),$$

ou seja,

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} (-1)^n \cdot (-1)^n \right).$$

Isto é

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

## 4.5 A prova de Apostol

A prova a seguir, utilizando integrais duplas e séries geométricas, foi formulada pelo matemático Tom M. Apostol (1983, p. 59-60). A demonstração da obtenção da fórmula de Euler por integração dupla está disponível em Simmons (1988).

*Demonstração.* Lembremos de (2.14), que a série geométrica é dada por

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \dots$$

Daí, a função  $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$  pode ser escrita (para o domínio de convergência) por

$$\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + x^2y^2 + \dots$$

então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-xy} &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2y^2 + \dots) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y^2 + \dots \right) \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left( 1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + \dots \right) dy \\ &= \left( y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3^2} + \dots \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \end{aligned}$$

Assim, a soma da série de Euler  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é o valor da integral dupla

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-xy}. \quad (4.30)$$

Ao calcularmos a integral na expressão (4.30), determinaremos a soma da série. Para isto, usaremos uma mudança de coordenadas que será uma rotação do sistema de coordenadas de ângulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

De modo geral, quando rotacionamos por um ângulo qualquer  $\theta$ , o sistema  $xy$  é levado para um novo sistema de coordenadas  $uv$ . Assim, o sistema de coordenadas será transformado como segue

$$\begin{cases} x &= u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta. \end{cases} \quad (4.31)$$

Substituindo  $\theta$  por  $\frac{\pi}{4}$  na expressão (4.31), obtemos

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u - v) \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u + v), \end{cases} \quad (4.32)$$

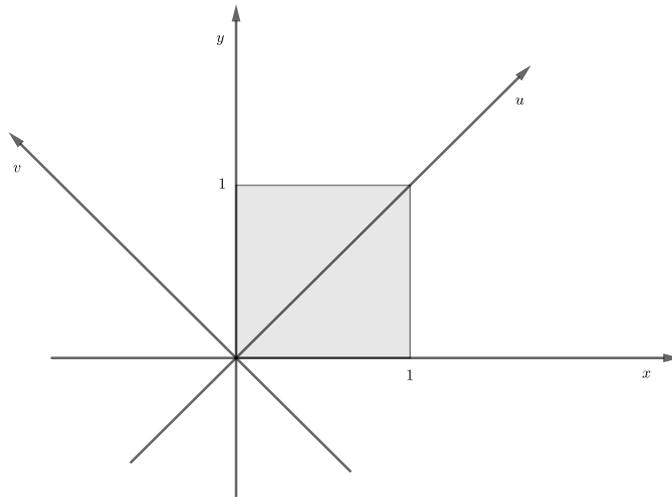


Figura 4.2: Sistemas de coordenadas rotacionado

e, então, da expressão (4.32), obtemos

$$xy = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u^2 - v^2) \quad e \quad 1 - xy = \left( \frac{2 - u^2 + v^2}{2} \right).$$

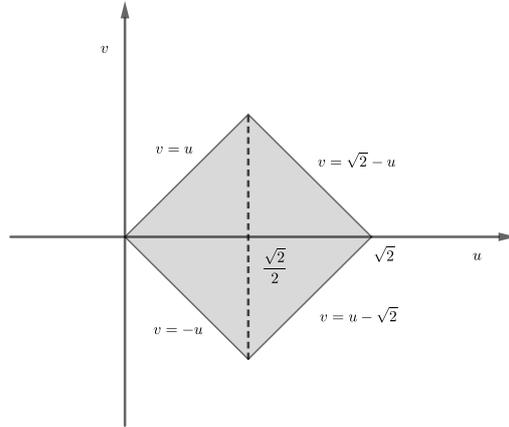


Figura 4.3: Região após rotação

Observe, pelas figuras (4.2) e (4.3), que a região de integração não sofre deformação, e pelo teorema de mudança de variáveis na integral dupla, vemos que a integral em (4.30) pode ser escrita na forma <sup>4</sup>,

$$I = 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^u \frac{dvdu}{2 - u^2 + v^2} + 4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dvdu}{2 - u^2 + v^2}. \quad (4.33)$$

Denotando como  $I_1$  e  $I_2$  as integrais pela direita na expressão (4.33), obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[ \int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right] du \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{2 - u^2} \right) \arctan \left( \frac{v}{\sqrt{2 - u^2}} \right) \Big|_0^u du \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{2 - u^2} \right) \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{2 - u^2}} \right) du. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta, \quad (4.35)$$

<sup>4</sup>Veja por exemplo Guidorizzi (2002).

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

acarreta em

$$\begin{cases} \sqrt{2-u^2} & = \sqrt{2}\cos\theta, \\ du & = \sqrt{2}\cos\theta d\theta, \\ \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) & = \theta. \end{cases} \quad (4.36)$$

Logo, substituindo (4.35) e (4.36) em (4.34), obtemos

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} \cdot \theta \cdot \sqrt{2}\cos\theta d\theta = 2\theta^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Calculando  $I_2$ , teremos

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2} \right] du. \\ &= 4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2-u^2} \right) \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) du. \end{aligned}$$

Dando continuidade aos cálculos, usamos a substituição dada em (4.35)

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) &= \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right), \end{aligned}$$

pela Relação Fundamental da Trigonometria, proposição (2.2.1), temos

$$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta \iff (1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) = \cos^2\theta.$$

Para  $\cos\theta \neq 0$ , obtemos

$$\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta},$$

daí e das expressões de somas de arcos, corolário (2.2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) &= \arctan\left(\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\cos^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\theta\right) \sqrt{2}\cos\theta d\theta \\
 &= 4 \left[ \frac{\pi}{4}\theta - \frac{1}{4}\theta^2 \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 4 \left[ \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16}\right) - \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{144}\right) \right] \\
 &= \frac{\pi^2}{9}.
 \end{aligned}$$

Somando os resultados, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= I \\
 &= I_1 + I_2 \\
 &= \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} \\
 &= \frac{\pi^2}{6}.
 \end{aligned}$$

□

Vale ressaltar que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{1-xyz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

de maneira que o cálculo dessa integral tripla será igual à soma a direita.

A soma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  é um problema em aberto desde que Euler levantou a problemática

em 1736.

## 4.6 A prova de Harper

Uma prova simples para o problema da Basileia foi apresentada pelo matemático James D. Haper (2003, p.540-541), utilizando o teorema de Fubini para a expansão da série de McLaurin para a função arco tangente.

*Demonstração.* Seja

$$f(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Da expressão (2.14), para  $|y| < 1$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} &= \frac{1}{2} (\ln(1+y) - \ln(1-y)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-y)^n}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dx dy. \tag{4.38}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} 1+2xy+y^2 &= (1-x^2) + (x+y)^2 \\ &= (1-x^2) \left( 1 + \left( \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 \right) \\ &= (\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}) \left( 1 + \left( \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 \right), \end{aligned} \tag{4.39}$$

e

$$\int \frac{u'}{1+u^2} du = \arctan u,$$

temos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dydx = \int_{-1}^1 \frac{\arctan \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{-1}^1 dx. \quad (4.40)$$

Pondo  $\theta_1 = \arctan \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$  e  $\theta_2 = \arctan \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ , ou seja,

$$\tan \theta_1 = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \tan \theta_2 = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Como  $-1 < x < 1$ , usando a proposição (2.2.2), temos

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \frac{x^2-1}{1-x^2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41) em (4.40), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dydx &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \arcsin x \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dx dy &= \int_{-1}^1 \frac{\log(1+2xy+y^2)}{2y} \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\log \frac{1+y}{1-y}}{y} dy. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Substituindo (4.37) em (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dx dy &= 2 \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1} dy \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Então, igualando (4.42) a (4.44), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

o que é equivalentemente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

# Capítulo 5

## Abordagens no Ensino Médio

Nesse capítulo, abordaremos algumas sugestões de atividades em relação a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Para tanto, nos fundamentamos em Lima (2018) e Brasil (2018).

### 5.1 Soma de séries infinitas no Ensino Médio

No Ensino Médio, a área da Matemática tem como objetivo fomentar o entendimento de conceitos, estratégias e procedimentos que possibilitem uma futura formação acadêmica. Assim, é importante que os estudantes saibam aplicar as ferramentas matemáticas em diferentes contextos, sejam elas na ciência, na tecnologia ou em situações cotidianas.

Vale ressaltar a necessidade do estudante utilizar os processos de resolução de situações problemas ou de problemas heurísticos tendo segurança em expressar verbal ou geometricamente os conceitos matemáticos, de modo a estabelecer relações em outras áreas do currículo.

Dessa forma, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), endossado pela Competência 5, específica de Matemática e suas tecnologias, para o Ensino Médio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe a seguinte expectativa de aprendizagem:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531).

Propõe ainda, pela habilidade 08, que perpassa do 1° ao 3° ano do Ensino Médio, que os alunos precisam

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (Brasil, 2018, p. 547).

Neste caso, o documento curricular enuncia a necessidade de apresentar as noções de séries infinitas de maneira significativa no Ensino Médio, em particular, no que tange as progressões geométricas, visto que, atualmente, este objeto de conhecimento aparece nos livros didáticos de modo intuitivo.

Após os estudos dos conceitos essenciais de progressão geométrica, tais como o termo geral da P.G e a soma dos  $n$  termos de uma P.G. finita, o professor terá em mãos as ferramentas necessárias para introduzir, ampliar e consolidar os conceitos em relação à Soma infinita dos  $n$  termos de uma progressão geométrica.

Nessa proposição, há diversas aplicações no Ensino Médio de séries infinitas relacionadas à progressão geométrica (aplicações na Biologia, Física entre outras), que propiciam aos estudantes aplicar conceitos, ferramentas e conjecturas formais às situações cotidianas e na sua vivência acadêmica.

## 5.2 Proposta 01- O triângulo de Sierpinski

Essa abordagem é uma adaptação da atividade criada pela professora Juliana Grassmann dos Santos, que tem como intuito introduzir o conceito da soma dos termos de uma progressão geométrica a partir do Triângulo de Sierpinski.

### O triângulo de Sierpinski

#### 1° momento: Introdução

Inicialmente, divida os alunos em duplas ou trios. Cada agrupamento precisará de:

✓ régua;

- ✓ compasso;
- ✓ folha sulfite;
- ✓ lápis;
- ✓ borracha.

Em seguida, distribua aos agrupamentos as seguintes orientações:

Nessa atividade vocês irão construir os quatro primeiros estágios do triângulo de Sierpinski e, posteriormente, responderão um questionário.

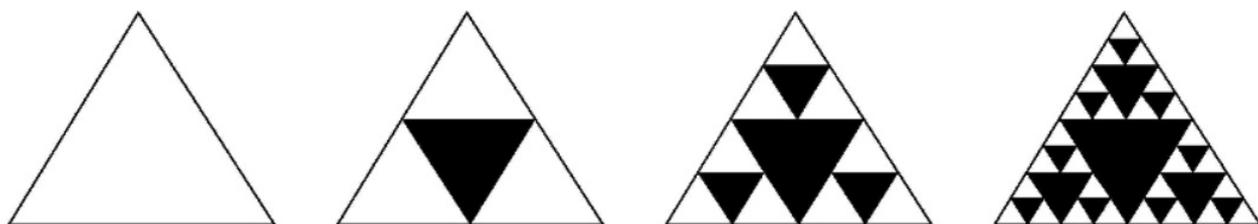


Figura 5.1: O Triângulo de Sierpinski.  
Fonte: Lima (2018).

### Triângulo original

#### Estágio 1:

- ✓ Construa um triângulo equilátero, com 16 cm de lado, com auxílio da régua e compasso;
- ✓ Divida cada lado do triângulo em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);
- ✓ Trace um triângulo no centro e ilustre-o da maneira que preferir.

#### Estágio 2:

- ✓ Repita o estágio um;
- ✓ Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);
- ✓ Trace um triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

#### Estágio 3:

- ✓ Repita o estágio dois;
- ✓ Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);
- ✓ Trace um triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que pre-

ferir.

#### **Estágio 4:**

✓ Repita o estágio três;

✓ Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio);

✓ Trace um triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

### **Questões**

1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência em que o 1<sup>o</sup> termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio original, o 2<sup>o</sup> termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.

Resp: 1, 3, 9, 81, 243

2. Qual é o próximo termo desta sequência?

Resp: 729

3. O que acontece a cada novo termo?

Resp: Espera-se que o aluno perceba que a cada novo termo, o número de triângulos brancos triplica.

4. Se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos teremos no estágio 10?

Resp: 19683 triângulos brancos

5. Agora, vamos analisar o número total de triângulos em cada estágio. Escreva os cinco primeiros termos da sequência em que o 1<sup>o</sup> termo indica a quantidade de triângulos no estágio original, o 2<sup>o</sup> termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.

Resp: 1, 4, 13, 94, 337

6. Qual é o próximo termo desta sequência?

Resp:  $337 + 729 = 1066$

7. O que acontece a cada novo termo?

Resp: Espera-se que o aluno perceba que o n-ésimo termo dessa sequência é igual à soma dos n primeiros termos da sequência construída na questão 1.

8. Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?

Resp: Teremos um número infinito de triângulos.

Note que foi solicitado ao aluno que, a cada etapa da construção do triângulo de Sierpinski, pintasse o triângulo do centro. No entanto, o triângulo central deve ser removido, mas optamos pela ilustração para facilitar o manuseio dos materiais e a aplicação da atividade em sala de aula.

## 2º momento: Situação - problema

Depois que os grupos terminarem de registrar as respostas, comente que, ao continuarmos a construção do triângulo de Sierpinski indefinidamente, haverá um número infinito de triângulos. Em seguida, proponha a seguinte questão: Já que o número de triângulos é infinito, é possível dizer que a área pintada também será infinita? O objetivo é que eles reflitam, pois em geral, os alunos se surpreendem com a ideia de que a soma da área de infinitos triângulos não é um número infinito.

Você pode conduzir essa discussão da seguinte maneira:

1. Construa a tabela com os valores da medida do lado do triângulo branco ( $cm$ ) e a área de cada triângulo branco ( $cm^2$ ), em cada estágio.

Tabela 5.1: Área do triângulo branco.

E	l	A
0	16	$64\sqrt{3}$
1	8	$16\sqrt{3}$
2	4	$4\sqrt{3}$
3	2	$\sqrt{3}$
4	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$

Na tabela 5.1:

**E** representa o estágio da construção;

**l** representa a medida do lado do triângulo branco;

**A** representa a área de cada triângulo branco ( $cm^2$ ) em cada estágio.

2. Pergunte o que ocorre com a medida do lado do triângulo branco a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo, a medida do lado do triângulo branco se reduz à metade.

3. Pergunte o que ocorre com a área do triângulo branco a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo, a área do triângulo branco se reduz à quarta parte.
4. Peça aos alunos que calculem a área dos triângulos brancos nos seis primeiros estágios. Basta multiplicar a área do triângulo branco pela quantidade de triângulos brancos em cada estágio.
5. Pergunte o que ocorre com a soma da área dos triângulos brancos a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo, a área do triângulo branco é multiplicada por  $\frac{3}{4}$ .
6. Peça aos alunos que calculem a área pintada do triângulo nos seis primeiros estágios. Basta subtrair a soma da área dos triângulos brancos da área do triângulo inicial.

Tabela 5.2: Soma das áreas dos triângulos brancos.

E	A	Q	S
0	$64\sqrt{3}$	1	$64\sqrt{3}$
1	$16\sqrt{3}$	3	$48\sqrt{3}$
2	$4\sqrt{3}$	9	$36\sqrt{3}$
3	$\sqrt{3}$	27	$27\sqrt{3}$
4	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	81	$\frac{81\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	243	$\frac{243\sqrt{3}}{16}$

Na tabela 5.2:

**E** representa o estágio da construção;

**A** representa a área de cada triângulo branco ( $cm^2$ ) em cada estágio.

**Q** representa a quantidade de triângulos brancos;

**S** representa a soma das áreas dos triângulos brancos ( $cm^2$ ).

7. Conclua, com os alunos, que, a cada novo termo, a área se aproxima à área do triângulo inicial, ou seja, a área tende a  $64\sqrt{3}$ . Esse valor é resultado de  $64\sqrt{3} - \left(\frac{3}{8}\right)^8 \cdot 64\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ .

### 3<sup>a</sup> momento: Sistematização

Sistematize a soma infinita de termos de uma PG. A formalização da fórmula pode ser feita a partir de sua demonstração. Em seguida, relacione a atividade anterior à

fórmula e proponha novas questões.

### 5.3 Proposta 02- Lançamento de uma bola

Uma bola é lançada na vertical, de encontro ao solo, de uma altura  $h$ . Cada vez que a bola bate ao solo, ela sobe até 80 por cento da altura de que caiu. Nessas condições, determine o comprimento total percorrido pela bola em sua trajetória, até atingir o repouso.

Solução:

Como 80 por cento =  $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ , temos que cada vez que a bola atinge o solo, ela sobe  $\frac{4}{5}$  da altura anterior. Partindo de uma altura  $h$ , a bola percorre

$$S_{\infty} = h + \frac{4}{5} \cdot h + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot h + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot h + \dots$$

Daí, somando os termos iguais:

$$S_{\infty} = h + 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot h + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot h + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot h + \dots$$

E, observando que  $2 \cdot \frac{4}{5} \cdot h + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot h + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot h + \dots$  é a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica convergente ( $-1 < q = \frac{4}{5} < 1$ ), chega-se a seguinte operação:

$$S_{\infty} = h + \frac{a_1}{1 - q}.$$

Assim,

$$S_{\infty} = h + \frac{2 \cdot \frac{4h}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = h + \frac{8h}{5} \cdot \frac{5}{1} = 9h.$$

Por fim, podemos concluir que o comprimento total percorrido pela bola foi de  $9h$ .

### 5.4 Proposta 03- Aplicação algébrica

Seja  $k$  a raiz da equação

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots + \frac{x}{3^{x-1}} = 9$$

Nessas condições, determine o valor de  $k^2$ .

Solução:

Pelo enunciado, tem-se a soma de infinitos termos de uma Progressão Geométrica convergente de razão  $q = \frac{1}{3}$ . Logo,

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$9 = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$9 = \frac{x}{\frac{2}{3}}$$

$$9 = \frac{3x}{2}$$

$$3x = 18$$

$$x = \frac{18}{3}$$

$$x = 6.$$

Assim, chegamos que  $k = 6$  e, portanto,  $k^2 = 36$ .

## 5.5 Proposta 04- Raiz da planta do mangue

(UEL 2012- Adaptada) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz, e, em cada uma delas, surgem mais duas ramificações, e assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim da mesma, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.

Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de  $h_1 = 1$  m, determine o comprimento vertical total da raiz, em metros.

Solução:

Os comprimentos das ramificações, em metros, constituem a progressão geométrica  $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \dots)$ .

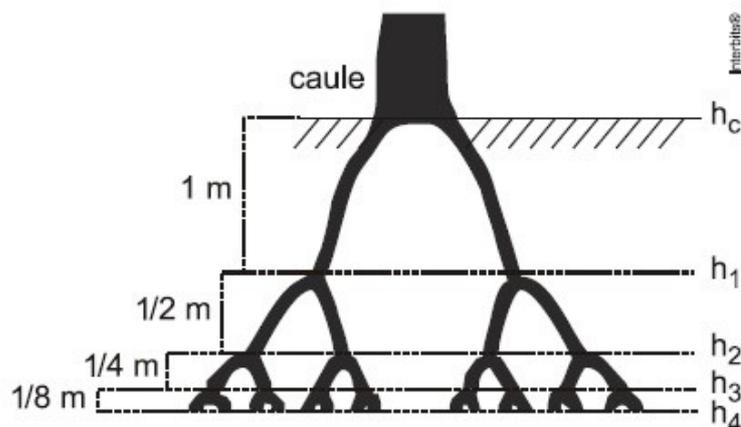


Figura 5.2: Modelo de raiz de planta do mangue.  
Fonte: Lima (2018).

Assim, temos que  $a_1 = 1$  e  $q = \frac{1}{2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

## 5.6 Proposta 05- Dízima periódica

Uma dízima periódica qualquer é originada de uma fração geratriz. Considere que as dízimas periódicas podem ser caracterizadas como uma soma infinita de parcelas decimais. Assim, é possível determinar a fração geratriz dessas dízimas utilizando a soma de termos de uma progressão geométrica infinita.

Determine a fração geratriz da dízima  $1,2515151 \dots$

Solução:

Temos que:

$$\begin{aligned}1,2515151 &= 1,2 + 0,051 + 0,00051 + 0,0000051 + \dots \\&= 1,2 + \frac{51}{10^3} + \frac{51}{10^5} + \frac{51}{10^7} + \dots \\&= 1,2 + 51 \left( \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots \right) \\&= 1,2 + 51(S_\infty) \\&= 1,2 + 51 \left( \frac{a_1}{1 - q} \right) \\&= 1,2 + 51 \left( \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} \right) \\&= 1,2 + 51 \left( \frac{1}{10^3} \cdot \frac{10^2}{99} \right) \\&= 1,2 + 51 \left( \frac{51}{990} \right) \\&= \frac{12(100 - 1)}{10 \cdot 99} + \frac{51}{990} \\&= \frac{1200 - 12 + 51}{990} \\&= \frac{1239}{990}.\end{aligned}$$

Portanto

$$1,2515151 = \frac{1239}{990}.$$

## 5.7 Proposta 06- Perímetro do triângulo

A medida do lado de um triângulo equilátero é  $10\text{cm}$ . Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtêm-se os lados de um novo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero, obtêm-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente.

Assim, calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:

Como o lado do segundo triângulo possui vértice no ponto médio do primeiro triângulo, temos que o perímetro de cada triângulo é a metade do triângulo anterior. Isto é,  $q = \frac{1}{2}$ . Considere a sequência formada pelo perímetro dos triângulos conforme os triângulos da

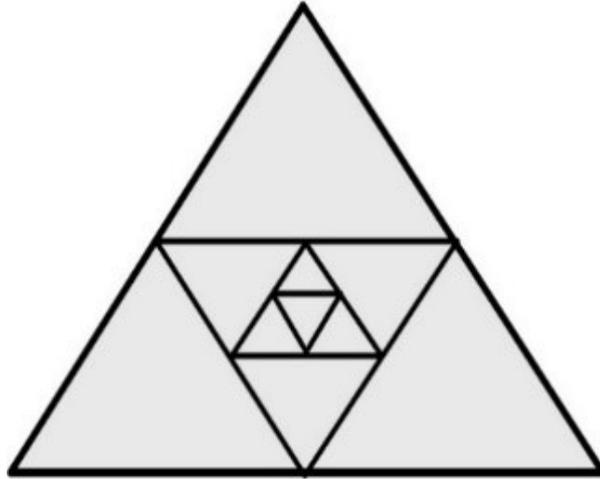


Figura 5.3: Representação do triângulo.  
Fonte: Lima (2018).

figura 5.3 acima.

$$(30, 15, 7, 5, \dots)$$

Logo,

$$S_{\infty} = \frac{30}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60.$$

Logo, a soma dos perímetros dos infinitos triângulos é de  $60m$ .

## 5.8 Proposta 07- Molusco sobre a estrela do mar

(UERJ- Adaptada) A figura a seguir mostra um molusco *Triton tritoris* sobre uma estrela do mar.



Figura 5.4: Molusco sobre a estrela do mar.

Um corte transversal nesse molusco permite visualizar, geometricamente, uma seqüência de semicírculos. O esquema abaixo indica quatro desses semicírculos.

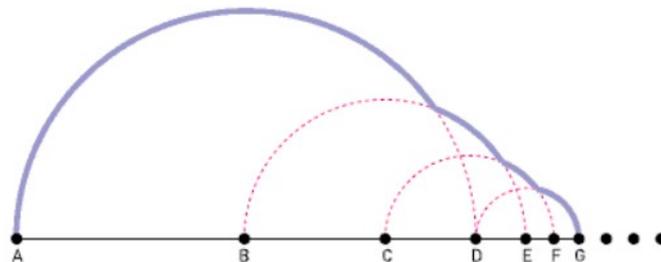


Figura 5.5: Semicírculos.

Admita que as medidas dos raios ( $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \dots$ ) formem uma progressão tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \dots$$

Considere  $\overline{AB} = 2\text{cm}$ . Nessas condições, determine o valor da soma  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \dots$ .

Solução:

Observe inicialmente que  $\overline{AB} = 2\text{cm}$  e  $\overline{BC} = 2q$ , assim, temos que  $\overline{CD} = 2q^2$ . Por outro lado, tem-se que  $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC}$ . Como  $\overline{BD} = \overline{BC} = 2$ , temos:

$$2q^2 = 2 - 2q.$$

Isto é

$$2q^2 + 2q - 2 = 0.$$

Ou seja,

$$q^2 + q - 1 = 0, \quad \text{pois } q > 0.$$

Assim, temos as raízes  $q_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $q_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ . Como  $q$  é uma medida de comprimento, adotamos  $q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Utilizando a fórmula da soma infinita de uma progressão geométrica, obtemos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{2}{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{4}{2 - (\sqrt{5} - 1)} \\ &= \frac{4}{2 - \sqrt{5} + 1} \\ &= \frac{4}{3 - \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{4(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} \\ &= 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

. Portanto, o valor da soma  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \dots$  é equivalente a  $3 + \sqrt{5}$ .

# Considerações finais

A Matemática, em seu papel formativo, contribui para o enriquecimento de processos cognitivos e atitudinais, cujo proveito e abrangência transcendem o âmbito da Matemática. A partir do rigor conceitual, característico de sua projeção científica, a intencionalidade da prática docente deve preparar os estudantes para os desafios cotidianos, de maneira que adquiram habilidades para desempenhar funções na sociedade.

Este trabalho teve como objetivo principal analisar a prova de Euler para a resolução do Problema da Basileia. Este tema é bastante relevante para a teoria dos números e foi resolvido por Leonhard Euler em 1734, e enunciado em 1735. Como o problema havia sido objeto de desafio por quase um século aos principais matemáticos da época, a prova de Euler lhe trouxe fama imediata aos 28 anos. A princípio, a prova de Euler não possuía rigor matemático, visto que uma de suas passagens ficou invalidada por quase 150 anos. Posteriormente, a partir da fatoração de Weierstrass, sua prova está totalmente aceita. As conjecturas e métodos utilizados por Euler em sua demonstração têm a virtude de exibir a extraordinária perspicácia de um gênio da Matemática.

Vale ressaltar algumas provas elencadas nesse trabalho, (prova de Giesy, prova de Cauchy, prova de Apostol, prova utilizando a fórmula de Euler e a regra de L'Hôpital, prova usando a série de Fourier, e a prova de Harper), que surgiram no decorrer dos séculos, considerando diferentes perspectivas da Matemática para solucionar o problema da Basileia. Existem outras provas para esse problema, a exemplificar: a prova utilizando o cálculo de resíduos da análise complexa, a prova utilizando a identidade de Parseval e a prova de Matsuoka. Para maior aprofundamento, ver Chapman (2003).

No entanto, não houve avanços expressivos em suas prospecções teóricas. Mesmo após quase três séculos, o problema da Basileia permanece em aberto, do enigma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ , quando  $k$  for um número ímpar. As falhas dessa discussão convidam à construção de uma teoria geral de produtos infinitos.

Outro ponto a se considerar é o desdobramento do estudo da soma de séries infinitas no Ensino Médio, visto que há diversas aplicações de séries infinitas relacionadas à progressão geométrica, que propiciam aos estudantes aplicar conceitos, ferramentas e conjecturas formais em diferentes contextos.

Desse modo, o objeto de conhecimento soma de  $n$  termos de uma progressão geométrica infinita deve ser abordado de maneira articulada com os objetos de conhecimentos trabalhados anteriormente, tais como sequências e séries.

Assim, os aspectos de aporte teórico para o estudo de soma de séries infinitas, neste nível de ensino, visam intervir como ferramenta significativa na aprendizagem das propriedades, relações, operações formais e técnicas, além de analisar e interpretar situações problemas em outras áreas de conhecimento.

Portanto, espera-se que este trabalho tenha contribuído de forma significativa para a compreensão heurística da prova de Euler para o problema da Basileia, bem como para a prática docente no ensino de soma de séries infinitas no Ensino Médio, permitindo, assim, ao professor da Educação Básica correlacionar a teorização formal da Matemática em diferentes contextos.

# Referências Bibliográficas

- Ávila, G. (2008). Euler e o problema da Basileia. *Revista Matemática Universitária*, 42:9–12.
- Ávila, G. (2011). *Variáveis Complexas e Aplicações*. LTC, Rio de Janeiro.
- Barros, J. L. C. (2016). O teorema da aplicação de Riemann: Uma prova livre de integração. Dissertação de Mestrado, IME–USP, São Paulo/SP.
- Biazzi, R. N. (2014). Polinômios irredutíveis: Critérios e aplicações. Dissertação de Mestrado, IGCE–UNESP, Rio Claro/SP.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília.
- Calinger, R. S. (1976). Eulers: Letters to a princess of germany as an expression of his mature scientific. URL: <http://www.link.springer.com/> Acesso em: 06/01/2020.
- Calinger, R. S. (1996). Leonhard euler: The first st. Petersburg years. URL: <http://www.link.springer.com/> Acesso em: 07/01/2020.
- Chapman, W. (2003). Evaluating  $\zeta(2)$ . University of Exeter.
- Chaquiam, M. (2012). *Guilherme de La Penha: uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões*. Tese de Doutorado, UFRN, Natal/RN.
- D'Ambrosio, U. (2009). Euler, um matemático multifacetado. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 9:13–31.
- Dunham, W. (1999). *Euler: the master of us all*. Mathematical Association of America, Washington.
- Figueiredo, D. G. (2005). *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, (Projeto Euclides)*. IMPA, Rio de Janeiro.

- Gayo, J. (2013). O problema que tornou Euler famoso. Dissertação de Mestrado, Profmat–UTFP, Curitiba/PR.
- Gillispie, C. C. (1970). *Dictionary of Scientific Biography*. Ed. in chief, New York.
- Guidorizzi, L. H. (2002). *Um Curso de Cálculo, vol. 3*. LTC, Rio de Janeiro.
- Guidorizzi, L. H. (2008). *Um Curso de Cálculo, vol. 4*. LTC, Rio de Janeiro.
- Harper, J. D. (2003). Another simple proof of  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ . *American Mathematical Monthly*.
- Iório, V. (2005). *EDP, um curso de graduação : Coleção Matemática Universitária*. SBM, Rio de Janeiro.
- Knopp, K. (1996). *Theory of Functions*. Dover, New York.
- Lima, E. L. (2003). *Espaços Métricos*. Ed. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2004). *Álgebra Linear: Coleção Matemática Universitária*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2007). *Curso de Análise, (Projeto Euclides)*. v.1, IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2017). *Análise Real*. Ed. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lima, G. M. (2018). *Álgebra: 2 Série*. Sistema Ari de Sá de Ensino, Fortaleza.
- Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria: Coleção Profmat*. SBM, Rio de Janeiro.
- Muniz Neto, A. C. (2015). *Fundamentos de Cálculo: Coleção Profmat*. SBM, Rio de Janeiro.
- Muniz Neto, A. C. (2016). *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios: Coleção Matemática Universitária*. SBM, Rio de Janeiro.
- Pereira, D. E. (2014). *Correspondências científicas como uma relação didática entre história e ensino de matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha*. Tese de Doutorado, UFRN, Natal/RN.
- Santos Filho, M. F. C. J. (2014). Euler e Problema da Basileia. Dissertação de Mestrado, Profmat–UFPB, João Pessoa/PB.

- Simmons, G. F. (1988). *Cálculo com Geometria Analítica*. Ed. Pearson Makron Books, São Paulo.
- Simmons, G. F. (2008). *Equações Diferenciais: teoria, técnica e prática*. McGraw-Hill, São Paulo.
- Truesdell, C. A. (2002). *Leonhard Euler, Supreme Geometer, in Eulers Elements of Algebra*. Springer-Verlag, New York.