



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Aplicações das cadeias de Markov na previsão de precipitações pluviométricas

Fabio Pscheidt

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Moiseis dos Santos Ceconello**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Agosto de 2020

Aplicações das cadeias de Markov na previsão de precipitações pluviométricas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Fabio Pscheidt e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 20 de agosto de 2020.

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Prof. Dr. Andre Krindges
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P974a Pscheidt, Fabio.
Aplicações das cadeias de Markov na previsão de precipitações pluviométricas /
Fabio Pscheidt. -- 2020
xi, 36 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Moiseis dos Santos Ceconello.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso,
Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em
Matemática, Cuiabá, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Probabilidade de transição. 2. Cuiabá. 3. Diamantino. 4. modelo matemático. 5.
Ensino Médio. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: **Aplicações de cadeias de Markov na previsão de precipitação pluviométrica**

Autor: mestrando **Fábio Pscheidt**

Dissertação defendida e aprovada em **20 de agosto de 2020**.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Moiseis dos Santos Ceconello (Presidente Banca/Orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. Doutor Andre Krindges (Examinador Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. Doutor Edgar Nascimento (Membro Externo)

Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso - campus Bela Vista

Cuiabá, 20/08/2020.



Documento assinado eletronicamente por **ANDRE KRINDGES, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 20/08/2020, às 17:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **MOISEIS DOS SANTOS CECCONELLO, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 20/08/2020, às 17:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **EDGAR NASCIMENTO, Usuário Externo**, em 20/08/2020, às 18:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2778287** e o código CRC **D10B5413**.

À minha doce amada.

Agradecimentos

Muito Obrigado aos colegas de turma pelo apoio em todos os momentos.

Obrigado Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz, coordenador do Profmat - Cuiabá, por seu empenho e precisão nas informações.

Em especial quero agradecer o Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza, por sua contribuição na preparação para o Exame Nacional de Qualificação.

Obrigado a minha família por entender minha ausência.

Obrigado ao meu orientador Prof. Dr. Moiseis dos Santos Ceconcello, por me direcionar no trabalho.

Por fim, quero agradecer a minha esposa, Thalyta D. T. Pscheidt pelo apoio, carinho e contribuições durante o curso.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático para determinar a probabilidade de precipitação pluviométrica diária dos municípios de Cuiabá e Diamantino, em Mato Grosso. O modelo foi desenvolvido com base nos conceitos de cadeias de Markov, que foi alimentado com informações pluviométricas diárias obtidas no site do INMET - Instituto Nacional de Meteorologia, que monitora e registra dados das estações automáticas de Cuiabá e Diamantino. A apresentação dos conceitos para a elaboração do modelo é direcionada à estudantes do Ensino Médio, mostrando que a junção de conceitos matemáticos elementares são capazes de fornecer modelos matemáticos sofisticados. Os resultados obtidos indicaram que o modelo matemático desenvolvido foi capaz de determinar uma probabilidade sobre os quantitativos pluviométricos especificados e que o modelo pode ser explorado durante as aulas de matemática para estimular os alunos a aprofundar seus conhecimentos na matemática e tecnologia.

Palavras chave: Probabilidade de transição, Cuiabá, Diamantino, modelo matemático, Ensino Médio.

Abstract

In this work, a mathematical model is presented to determine the probability of daily rainfall in the counties of Cuiabá and Diamantino, located at Mato Grosso State. The model is developed based on the concepts of Markov Chains, which was fed with daily rainfall information obtained from the INMET - National Institute of Meteorology website, which monitors and records data from the automatic stations in Cuiabá and Diamantino. The presentation of the concepts for the elaboration of the model is aimed at high school students, showing that the combination of elementary mathematical concepts are capable of providing sophisticated mathematical models. The results obtained indicated that the mathematical model developed was able to determine a probability over the specified rainfall values and that the model can be explored during mathematics classes to encourage students to deepen their knowledge in mathematics and technology.

Keywords: Transition probability, Cuiabá, Diamantino, mathematical model, high school.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de figuras	x
Lista de tabelas	xi
1 Probabilidade	1
1.1 Introdução	1
1.2 Conceitos básicos	2
1.2.1 Probabilidade condicional	3
1.2.2 Probabilidade de transição	6
2 Cadeias de Markov	9
2.1 Introdução	9
2.2 Definição	10
3 Cadeias de Markov na previsão de precipitação pluviométrica	17
3.1 Introdução	17
3.2 Material e método	18
3.3 Previsões de precipitação diária	19
3.3.1 Estação de Diamantino	19
3.3.2 Estação de Cuiabá	25
3.3.3 Resultados	30
3.3.4 Uma proposta para o Ensino Médio	32

Considerações finais	34
Referências Bibliográficas	36

Lista de Figuras

3.1	Localização das estações no Estado de Mato Grosso - Instituto Nacional de Metereologia (2020)	18
3.2	Registros pluviométricos de Diamantino no período	20
3.3	Registros pluviométricos de Diamantino no período 1961-2019	20
3.4	Precipitação pluviométrica de Cuiabá no período - Instituto Nacional de Metereologia (2020)	25
3.5	Precipitação pluviométrica de Cuiabá no período - Instituto Nacional de Metereologia (2020)	26

Lista de Tabelas

1.1	Distribuição do estudantes por área pretendida e por sexo	4
1.2	Precipitações anuais de Cuiabá/MT	6
1.3	Precipitações anuais de Cuiabá/MT	6
1.4	Número de trasições que partem de a	7
1.5	Número de trasições que partem de b	7
2.1	Probabilidades de transição Cuiabá/MT	13
3.1	Referências para intervalos pluviométricos	19
3.2	Quantidade de dias por intervalo	21
3.3	Quantidade de transições - Diamantino/MT	21
3.4	Probabilidades de transição - Diamantino/MT	22
3.5	Probabilidade de precipitação por intervalo - Diamantino/MT	25
3.6	Número de dias por referência - Cuiabá/MT	26
3.7	Quantidade de transições - Cuiabá/MT	27
3.8	Probabilidades de transições - Cuiabá/MT	27
3.9	Probabilidade de precipitação pluviométrica - Cuiabá/MT	30
3.10	Probabilidades de precipitação pluviométrica	31
3.11	Comparação dos resultados	31

Capítulo 1

Probabilidade

Neste capítulo serão apresentados os pressupostos teóricos que será suportarão os conceitos abordados no segundo capítulo. Esta abordagem se dará de forma simples com direcionamento aos discentes do Ensino Médio.

1.1 Introdução

Segundo Morgado et al. (2006), a teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de casos possíveis.

Em outras palavras, assim como evidenciado por Morgado et al. (2006), um experimento é denominado determinístico quando repetido em condições semelhantes conduzidos a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados diferentes são denominados experimentos aleatórios. Fenômenos aleatórios acontecem frequentemente no dia a dia. São frequentes perguntas tais como: choverá amanhã? Qual será o número de ganhadores na loteria esportiva?

Para se determinar a probabilidade de cada um dos questionamentos anteriores é necessário um estudo de seus respectivos fenômenos aleatórios para que se desenvolva um modelo matemático utilizando a teoria das probabilidades.

1.2 Conceitos básicos

Definição 1. *Conforme Morgado et al. (2006), denomina-se de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. O espaço amostral é representado por S e será considerado aqui apenas o caso de S ser finito. Os subconjuntos de S serão chamados de eventos. Um evento ocorre se e somente se seus elementos são parte ou todo o resultado de uma experiência.*

Os *eventos* geralmente são representados pelas primeiras letras do alfabeto ou pela primeira letra de seu adjetivo, sempre em caixa alta, por exemplo: ao lançar um dado com seis faces numeradas de 1 a 6 não se tem certeza, com antecedência, qual será a face voltada para cima após o lançamento, isto é, o observador pode obter qualquer uma das faces como resultado, logo, o espaço amostral desse caso é o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Em princípio, é razoável admitir em uma sequência grande de lançamentos o número de vezes que cada face aparece voltada para cima são iguais. Nesse caso, é comum dizer que a probabilidade de uma face estar voltada para cima após o lançamento é de $\frac{1}{6}$. No mesmo experimento de lançamentos de dados, é possível questionar qual a probabilidade da face voltada para cima ser um número par? Observando o espaço amostral, os possíveis resultados que satisfazem as condições dadas são as faces numeradas com os números pares 2, 4 ou 6. Os elementos de um espaço amostral que satisfazem a condição determinada pela probabilidade pertencem a um subconjunto denominado de Evento. Determinada a condição da face voltada para cima ser par, obtem-se o evento $A = \{2, 4, 6\}$, entre todos os resultados possíveis de um espaço amostral, os elementos de um evento são aqueles que deseja obter, ou seja, são os elementos favoráveis à condição dada entre todos os possíveis, logo, pode se calcular a probabilidade de se obter uma face par no lançamento de um dado de 6 faces, com base na teoria do azar.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Com base neste exemplo, segue uma definição mais formal de probabilidade baseado em Morgado et al. (2006)

Definição 2. *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$, de forma que:*

- Para todo evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(S) = 1$;
- $P(\emptyset) = 0$;
- Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$), então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Caso $(A \cap B) \neq \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.

1.2.1 Probabilidade condicional

Esta seção contém o conceito que será utilizado para a construção do modelo pretendido.

Definição 3. De acordo Morgado et al. (2006), dados dois eventos A e B , com $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B na certeza de A é o número $P(A \cap B)/P(A)$. No qual este número será representado por $P(B/A)$. Simbolicamente;

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (1.1)$$

Este número só está definido quando $P(A) > 0$. A equação 1.1 pode ser escrita como

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A). \quad (1.2)$$

Sendo $P(B) > 0$ também

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B). \quad (1.3)$$

Foi aplicada uma pesquisa com os estudantes de uma turma do Ensino Médio dos sexos femininos e masculinos, sobre a área profissional que pretendem seguir, o resultado podemos observar na tabela na tabela 1.1.

Tabela 1.1: Distribuição do estudantes por área pretendida e por sexo

Área	Masculino	Feminino	Total
Exatas	15	5	20
Humanas	3	7	10
Total	18	12	30

Qual a probabilidade de se escolher um estudante, ao acaso, do sexo masculino?

Primeiramente, determinar o total de estudantes da turma, que representa o número de elementos do espaço amostral, neste caso é igual a 30. Logo após o evento, que tem como elementos os estudantes do sexo masculino sendo um total de 18, portanto, a probabilidade de um estudante ser do sexo masculino é:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$$

E se desejarmos determinar a probabilidade de se escolher um estudante, ao acaso, do sexo feminino?

Seguindo os mesmos passos, o número de estudantes do sexo feminino é 12, total que representa o número de elementos do evento F, assim a probabilidade de um estudante ser do sexo feminino é:

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0,4$$

E se quisermos determinar a probabilidade de escolher ao acaso um estudante que pretenda cursar uma carreira na área de exatas?

Analisando a tabela 1.1, o total de estudantes que pretender cursar uma carreira na área de exatas é 20, então;

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,6666\dots$$

Caso deseja-se determinar a probabilidade de escolher um estudante, ao acaso, que seja do sexo feminino e pretenda cursar uma carreira na área de exatas, evidencia-se a probabilidade condicional pois a busca pelos estudantes é realizada apenas dentre o sexo feminino. Na tabela 1.1, o total de estudantes do sexo feminino é 12, que é o

espaço amostral neste caso. O *evento* se restringe às estudantes que pretendem carreira nas exatas, que é um total de 5.

Assim:

$$P(E|F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} = \frac{5}{12} = 0,4166\dots$$

E se quisermos determinar a probabilidade de se escolher um estudante ao acaso que seja do sexo masculino e pretenda cursar uma carreira na área de exatas?

A resolução é semelhante ao questionamento anterior:

$$P(E|M) = \frac{n(E \cap M)}{n(M)} = \frac{15}{18} = 0,8333\dots$$

Outro caso muito comum é a probabilidade envolvida em sorteios. Ao consideremos uma situação em que uma urna contém 6 bolas amarelas e 4 bolas verdes e que são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual seria a probabilidade de ambas as bolas serem verdes?

O total de bolas na urna que representa o espaço amostral é 10. Sejam $V_1 = \{\text{primeira bola é verde}\}$ e $V_2 = \{\text{segunda bola é verde}\}$, obtém-se:

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1).$$

Para a primeira retirada tem-se 4 casos favoráveis entre os 10 possíveis, portanto $P(V_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Agora para a segunda retirada há variação no total de bolas restantes no interior da urna, sobraram 3 bolas verdes entre as 9 restantes, com isso, $P(V_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Substituindo em (1.2),

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

E qual a probabilidade da primeira bola ser verde, sabendo que a segunda bola é verde?

Sejam $V_1 = \{\text{primeira bola é verde}\}$ e $V_2 = \{\text{segunda bola é verde}\}$. O objetivo é determinar $P(V_1|V_2)$, que representa a probabilidade do passado na certeza do futuro, neste caso, cabe a fórmula da definição de probabilidade condicional. $P(V_1|V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_2)}$. Do item anterior, tem-se que $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{15}$. E que $P(V_1) = P(V_2) = \frac{2}{5}$.

Portanto,

$$P(V_1|V_2) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2.5}{2.15} = \frac{1}{3}$$

Adaptado de (Morgado et al., 2006)

1.2.2 Probabilidade de transição

É possível determinar a probabilidade de um evento aleatório ocorrer logo após um evento aleatório anterior? Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015) o conceito de probabilidade condicional possui esta propriedade, que possibilita a probabilidade de que o evento I ocorra, dado que o evento J tenha ocorrido.

Para exemplificar o conceito, foram coletados dados no site do INMET da Estação Meteorológica de Cuiabá-MT (OMM:83361), com latitude (graus): -15,61, longitude (graus): -56,1 e altitude (metros): 145,00 com precipitação total mensal dos anos de 2010 à 2019, foram efetuadas as somas das precipitações totais mensais de cada ano para organizar a tabela 1.2 com as precipitações anuais, como segue:

Tabela 1.2: Precipitações anuais de Cuiabá/MT

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
PreAcu	1596,5	1673	1620,1	1524,4	1676,5	1382,4	1625,9	1623,3	2131,5	1258,6

Para o cálculo das probabilidades de transição é necessário uma sequência de fenômenos aleatórios e para determinar a sequência será atribuído um parâmetro em relação a média aritmética das precipitações da tabela 1.2:

$$\bar{x} = \frac{1596,5 + 1673 + 1620,1 + 1524,4 + 1676,5 + 1382,4 + 1625,9 + 1623,3 + 2131,5 + 1258,6}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{16112,2}{10} = 1611,22$$

A média obtida é de 1611,22mm. Na tabela 1.3, para os valores acima da média será atribuído a e para os valores abaixo da média b :

Tabela 1.3: Precipitações anuais de Cuiabá/MT

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Parâmetro	b	a	a	b	a	b	a	a	a	b

Para determinar as probabilidades de transição, em que:

P_{aa} → Probabilidade do estado a ir para o estado a ;

P_{ab} → Probabilidade do estado b ir para o estado a ;

P_{ba} → Probabilidade do estado a ir para o estado b ;

P_{bb} → Probabilidade do estado b ir para o estado b .

A tabela 1.4 contém as transições partindo de a na sequência $(b, a, a, b, a, b, a, a, a, b)$:

Tabela 1.4: Número de transições que partem de a

de a para	a	b
Qtde	3	3

O total de transições partindo de a é 6, portanto 6 é a quantidade de elementos de S .

Assim:

$$P_{aa} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ e } P_{ab} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Note que $P_{aa} + P_{ab} = 1$.

A tabela 1.5 contém as transições partindo de b na sequência $(b, a, a, b, a, b, a, a, a, b)$:

Tabela 1.5: Número de transições que partem de b

de b para	a	b
Qtde	3	0

Apesar de o total de estados b na sequência ser 4, em apenas 3 ocorreram transições, neste caso o total de elementos de S é 3.

Então:

$$P_{ba} = \frac{3}{3} = 1 \text{ e } P_{bb} = 0$$

Note que $P_{ba} + P_{bb} = 1$.

Dispondo os resultados em uma única tabela,

de a	de b		de a	de b	
P_{aa}	P_{ba}	para a	0,5	1	para a
P_{ab}	P_{bb}	para b	0,5	0	para b

Observando os resultados das probabilidades obtidas no exemplo, é possível afirmar que se em um ano a precipitação total for acima da média, a probabilidade do ano seguinte ter uma precipitação abaixo ou acima da média são iguais a 0,5; caso a precipitação total de um ano for abaixo da média, com certeza no ano seguinte a precipitação total será acima da média.

Mas estes resultados dependem exclusivamente da informação de um estado anterior, seria possível determinar essa probabilidade em qualquer período no futuro? O capítulo a seguir responderá esta questão.

Capítulo 2

Cadeias de Markov

Neste capítulo, o tema cadeias de Markov será abordado de forma elementar dando ênfase aos conceitos essenciais para a aplicação, que será desenvolvida no capítulo 3, com direcionamento para discentes que estão cursando o Ensino Médio. Os direcionamentos a seguir levam em consideração que os alunos em algum momento já tiveram contato com as operações entre matrizes. Todas as referências citadas no texto podem ser acessadas pelos estudantes que desenvolverem maior interesse sobre o tema.

2.1 Introdução

Conforme Howard (2004) as ideias pioneiras de Fermat, Pascal e Huygens em teoria das probabilidades foram trabalhadas consideravelmente no século XVIII e os progressos nesse novo campo se sucederam de maneira bastante rápida. A *Ars conjectandi* de Bernoulli foi seguida de importantes contribuições à teoria das probabilidades, figurando com destaque entre elas as de Abraham De Moivre (1667-1754).

Em sequência, alguns matemáticos se dedicaram a dar continuidade ao desenvolvimento da teoria das probabilidades. Em destaque Andrei Andreevitch Markov que é considerado o pai da probabilidade moderna.

Segundo Kolman (1999), Andrei Andreevitch Markov (1856-1922) viveu a maior parte de sua vida em São Petersburgo, onde seu pai era um funcionário graduado do departamento florestal da Rússia, foi aluno e depois professor da Universidade de São Petersburgo, embora interessado em muitos aspectos da análise matemática, seu trabalho mais importante foi a criação dos fundamentos da teoria moderna de probabilidade. Suas

ideias sobre processos de Markov foram motivadas por um desejo de provar rigorosamente a lei dos grandes números e de estender a aplicabilidade dessa lei, essas ideias apareceram em uma série de artigos entre 1906 e 1912.

2.2 Definição

De acordo com Boldrini et al. (1986), muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno observado passasse, a partir de um estado inicial, por uma sequência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade, chamada de **probabilidade de transição**. No caso em que a probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, esse processo será chamado **processo de Markov** e uma sequência de estados seguindo este processo será denominada **uma cadeia de Markov**. Evidentemente, ao se supor tal restrição estaremos simplificando, talvez demasiadamente, uma vez que as probabilidades podem ser modificadas com o tempo. Todavia, a informação que obtivermos com este modelo servirá de auxílio para uma previsão do comportamento de alguns fenômenos.

O processo de Markov, também conhecido como processo estocástico¹, é uma extensão do conceito de variável aleatória. Uma variável aleatória é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a um número real, denomina-se processo de Markov uma variável aleatória cuja função está associada ao tempo.

Uma vez em que o estudo de um determinado fenômeno aleatório forneça um histórico de seus estados anteriores durante um determinado período de tempo, é possível calcular a probabilidade de transição entre os estados e determinar a probabilidade de ocorrência dos estados a longo prazo, para isto, as probabilidades de transição são organizadas em uma matriz, denominada matriz de transição e em algum momento a variação das potências das matrizes apresentarão os mesmos resultados. Quando os resultados se tornarem constantes independente do aumento das potências, estes serão as probabilidades de cada estado ocorrer.

¹A palavra estocástico é derivada do adjetivo grego *stokhastikos*, que significa capaz de aproximar (ou adivinhar). É aplicada em qualquer coisa governada pelas leis da probabilidade, no sentido de que probabilidade faz previsões sobre a chance de as coisas acontecerem. Na teoria da probabilidade, os processos estocásticos são uma generalização das Cadeias de Markov.

A cadeia de Markov que será apresentada neste trabalho é de primeira ordem, uma cadeia de Markov é de primeira ordem quando a probabilidade de um estado depende apenas de seu estado anterior (Paiva e Clarke, 1997).

Segue uma definição mais formal descrita por Boldrini et al. (1986):

Definição 4. *Um processo aleatório de Markov é um processo que pode assumir estados a_1, a_2, \dots, a_r , de tal modo que a probabilidade de transição de estado a_i para um estado a_j seja p_{ij} (um número que só depende de a_i e a_j).*

A matriz das probabilidades de transição (matriz estocástica) é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

Observe que $p_{ij} \geq 0$, e que a soma de cada coluna deve ser 1.

O vetor probabilidades é aquele cuja i -ésima linha dá a probabilidade de ocorrência do estado a_i após n transações:

$$\text{Vetor de probabilidades} = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_r^{(n)} \end{pmatrix} = T^n \cdot \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_r^{(1)} \end{pmatrix}$$

Segundo Boldrini et al. (1986), para que seja possível a aplicação da definição anterior, que tem como objetivo realizar previsões a longo prazo, a matriz de transição deve satisfazer certas condições:

Definição 5. *Uma matriz das probabilidades de transição é regular se alguma de suas potências tem todos os elementos não nulos.*

Teorema 1. *Se a matriz $\mathbf{T}_{r \times r}$ das probabilidades é regular, então;*

- *As potências \mathbf{T}^n aproximam-se de uma matriz \mathbf{P} , no sentido de que cada elemento de \mathbf{T}^n aproximam-se do elemento correspondente em \mathbf{P} :*

- Todas as colunas de \mathbf{P} são iguais, sendo dadas por um vetor coluna:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix}$$

com $p_1 > 0, p_2 > 0, \dots, p_r > 0$.

- Para qualquer vetor de probabilidades inicial:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_r^{(1)} \end{pmatrix}$$

O vetor de probabilidades $\mathbf{T}^n \mathbf{V}_1$ aproxima-se de \mathbf{V} (dado no item anterior).

- O vetor \mathbf{V} é o único vetor que satisfaz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{V}_1$$

Este teorema possibilita determinar a probabilidade de um evento a longo prazo não importando seu estado imediatamente anterior. As matrizes de probabilidade de transição são regulares, uma vez que seus elementos são resultados de probabilidades e mesmo que algum elemento seja igual a zero durante os cálculos das potências todos os elementos passam a ser não nulos. Uma forma de exemplificar que as matrizes de transição são regulares é determinar o quadrado da matriz de transição $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Assim,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.a + b.c & a.b + b.d \\ c.a + d.c & c.b + d.d \end{pmatrix}$$

Sendo os valores de a, b, c e d probabilidades de transição, então $a + c = 1$ e $b + d = 1$. Mesmo que algum valor seja nulo, pela propriedade da multiplicação, as

potências tornam todos os elementos da matriz em não nulos.

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, a matriz \mathbf{T}^n tende a matriz:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \dots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_r & p_r & \dots & p_r \end{pmatrix}$$

Sendo que cada coluna da matriz \mathbf{P} representa o **Vetor de Probabilidades**, com

$p_1 > 0, p_2 > 0, \dots, p_r > 0$ e $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$.

A demonstração deste teorema é apresentado ao final deste capítulo, pois o mesmo pode ser compreendido por alunos do Ensino Médio com o auxílio de um professor, por conter conceitos já conhecidos por eles.

Para exemplificar estes conceitos, consideremos as probabilidades de transição indicadas na tabela 2.1 que foram determinadas no capítulo anterior. O objetivo é determinar as probabilidades de precipitação anual de Cuiabá em relação a média.

Tabela 2.1: Probabilidades de transição Cuiabá/MT

de a	de b	
0,5	1	para a
0,5	0	para b

Com as probabilidades de transição disponíveis é possível determinar a matriz das probabilidades de transição:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Com base no teorema anterior e com o auxílio de uma planilha eletrônica, as potências de \mathbf{T} são:

$$\mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^4 = \begin{pmatrix} 0,6875 & 0,625 \\ 0,3125 & 0,375 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^8 = \begin{pmatrix} 0,667969 & 0,664063 \\ 0,332031 & 0,335938 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{16} = \begin{pmatrix} 0,666672 & 0,666656 \\ 0,333328 & 0,333344 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{32} = \begin{pmatrix} 0,666667 & 0,666667 \\ 0,333333 & 0,333333 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{64} = \begin{pmatrix} 0,666667 & 0,666667 \\ 0,333333 & 0,333333 \end{pmatrix}.$$

A partir de \mathbf{T}^{32} as matrizes são idênticas e suas colunas possuem os mesmos valores. Conforme o teorema, a coluna indica as probabilidades desejadas, portanto o modelo determina que a probabilidade de a precipitação total anual ser acima da média em Cuiabá é aproximadamente 67% e de ser abaixo da média é aproximadamente 33%. É preciso considerar que os resultados obtidos no exemplo poderiam ser mais confiáveis caso o período de observação das transições fossem maior.

Para Rousseau e Saint-Aubin (2015), o que garante que uma matriz de transição regular, que tem todas as probabilidades maiores do que zero, se aproxime de uma matriz constante, denominada de matriz de probabilidades, são os teoremas a seguir:

Teorema 2. *A matriz de transição \mathbf{T} de uma cadeia de Markov tem pelo menos um autovalor igual a 1.*

Teorema 3. *Se λ é um autovalor de uma matriz de transição $\mathbf{T}_{n \times n}$, $|\lambda| \leq 1$. Além disso, existe um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ com todas as entradas não negativas.*

As propriedades dos autovalores descritas nos teoremas 2 e 3, garantem que conforme as potências da matriz de transição se tornem cada vez maiores, ou seja, tenda ao infinito, a matriz de transição se aproxima de uma matriz constante, denominada de matriz de probabilidades. As demonstrações dos teoremas 2 e 3 serão omitidos aqui por envolverem conceitos de Álgebra Linear.

De acordo com a UNESP (2016), a demonstração do teorema 1, descrito por Boldrini et al. (1986) evidência:

- Para qualquer vetor de probabilidade inicial

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_r^{(n)} \end{pmatrix}$$

o vetor de probabilidades $\mathbf{T}^n \mathbf{V}_1$ aproxima-se de \mathbf{V} .

Demonstração:

Seja

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

um vetor de probabilidades inicial, como $\mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{P}$, segue que $\mathbf{T}^n \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{P} \mathbf{V}_1$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{V}_1 &= \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \dots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_r & p_r & \dots & p_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 x_1 + p_1 x_2 + \dots + p_1 x_r \\ p_2 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_2 x_r \\ \vdots \\ p_n x_1 + p_n x_2 + \dots + p_n x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ p_2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ \vdots \\ p_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pelo fato de que $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1$, logo $\mathbf{T}^n \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}$.

- O vetor \mathbf{V} é o único vetor que satisfaz $\mathbf{V} = \mathbf{T} \mathbf{V}$.

Demonstração:

Existência: como $\mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{V}$, $\mathbf{T}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}$. No entanto, $\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T} \mathbf{T}^n$, de modo que $\mathbf{T}^{n+1} \rightarrow \mathbf{T} \mathbf{V}$, logo $\mathbf{T} \mathbf{V} = \mathbf{V}$. Igualando as colunas correspondentes dessa equação,

têm-se: $\mathbf{T}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.

Unicidade: se v_0 é outro vetor de probabilidade tal que $\mathbf{T}v_0 = v_0$, do teorema anterior $\mathbf{T}^n x_0 \rightarrow v_0$ e, como $\mathbf{T}x_0 = x_0$ para todo n , logo $x_0 = v_0$.

Capítulo 3

Cadeias de Markov na previsão de precipitação pluviométrica

3.1 Introdução

Segundo Keller et al. (2005), a distribuição e a irregularidade da chuva, no tempo e no espaço, são as principais características climáticas de uma região, a precipitação pluvial, assim como outros fatores climáticos, é sujeita a grandes variações, que afetam de modo significativo a produção agrícola. A produtividade agrícola é fortemente influenciada pela oferta pluviométrica, pela frequência e duração dos períodos secos. Na maior parte das regiões tropicais, a alternância entre períodos chuvosos e secos apresenta um notável comportamento sazonal.

No mundo da meteorologia, novas tecnologias para aprimorar a previsão do tempo estão em constante evolução. Aqueles que dependem da previsão do tempo para planejar suas ações estão sempre atentos e dispostos a investir recursos e tempo no assunto.

Nesta seção a previsão do tempo será determinada por informações anteriores, disponíveis no Instituto Nacional de Meteorologia (2020), ocorridas e registradas por estações meteorológicas automáticas localizadas em locais distintos no Estado de Mato Grosso, nas cidades de Cuiabá e Diamantino. Conforme a figura 3.1, a estação de Diamantino (OMM: 83309) está localizada na latitude (graus) : -14.4 com longitude (graus) : -56.45 e altitude (metros): 286.30 e a estação de Cuiabá (OMM: 83361) esta localizada na de latitude (graus) : -15.61 com longitude (graus) : -56.1 e altitude (metros): 145.00.

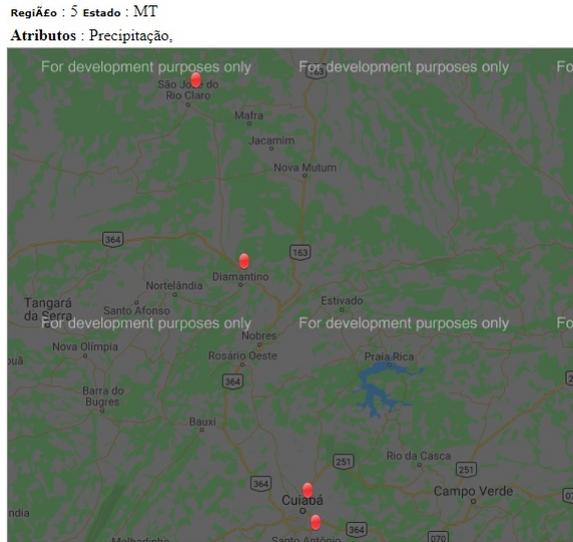


Figura 3.1: Localização das estações no Estado de Mato Grosso - Instituto Nacional de Metereologia (2020)

3.2 Material e método

Os registros diários de precipitação pluviométrica obtidos no Instituto Nacional de Metereologia (2020), são variáveis aleatórias contínuas e não permitem uma sucessão de estados devido a grandes quantidades de valores distintos. Para que seja possível representar os registros pluviométricos diários, como uma cadeia de Markov, é necessário que os estados sejam discretos, para que se obtenha uma sucessão de estados e seja possível fazer a contagem destes. A quantidade de estados de uma variável contínua pode ser tão variada que sua contagem perderia o sentido, por isso os intervalos a seguir foram modelados de acordo com os registros do histórico pluviométrico de Cuiabá e Diamantino, para que os resultados obtidos possam ser comparados. Os valores atribuídos levam em consideração a amplitude dos registros destes locais.

Consideremos os estados $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ que a variável aleatória (x) pode assumir, conforme a tabela 3.1:

Tabela 3.1: Referências para intervalos pluviométricos

A	para $x = 0$;
B	para $0mm \leq x < 10mm$
C	para $10mm \leq x < 20mm$
D	para $20mm \leq x < 30mm$
E	para $30mm \leq x < 40mm$
F	para $40mm \leq x < 50mm$
G	para $x \geq 50mm$

A probabilidade condicional entre os quantitativos pluviométricos determinam as probabilidades de transição e conseqüentemente uma cadeia de Markov. As transições entre os quantitativos do item anterior resultam em 49 probabilidades de transição, em que P_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j em que i e j estão no conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. A classificação das precipitações diárias conforme os intervalos indicados na tabela anterior resultam em uma sequência de estados, posteriormente é realizada a contagem de cada estado diário para se obter seu respectivo espaço amostral e por fim é feita a contagem das transições entre os estados para obtermos os eventos, que são um total de 49.

3.3 Previsões de precipitação diária

3.3.1 Estação de Diamantino

A estação meteorológica de Diamantino, com início das atividades em 1932, conta com um dos históricos meteorológicos mais antigos de MT armazenado no banco de dados do Instituto Nacional de Meteorologia, desde 1961. Para o desenvolvimento deste modelo foram coletados 19.338 dados de informação pluviométrica diária com início em 01/01/1961 até 31/12/2019.

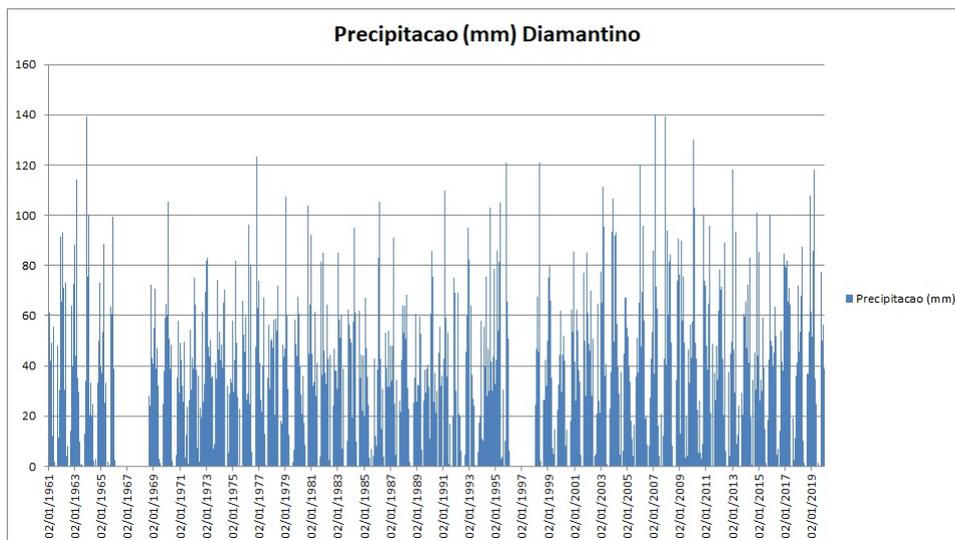


Figura 3.2: Registros pluviométricos de Diamantino no período

Os registros na figura 3.2 estão na forma contínua, inviabilizando a contagem dos estados e de suas transições, após as classificações diárias seguindo os intervalos especificados na tabela 3.1, foram observados:

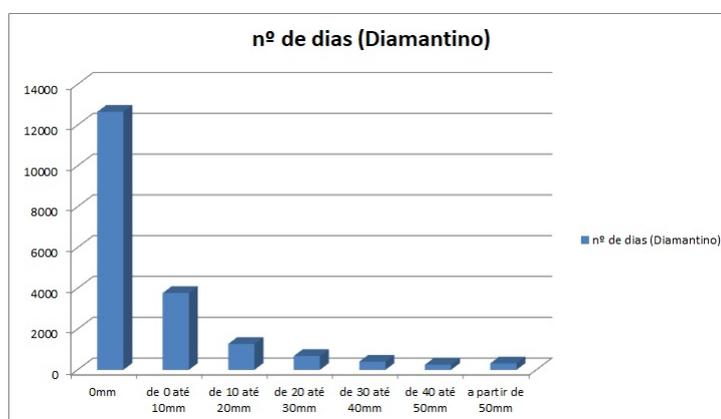


Figura 3.3: Registros pluviométricos de Diamantino no período 1961-2019

Já na figura 3.3 os registros estão na forma discreta, possibilitando sua contagem, cujos valores estão indicados na tabela 3.2 a seguir:

Tabela 3.2: Quantidade de dias por intervalo

Referência	Quantidade de dias
A	12 651
B	3 766
C	1 272
D	678
E	404
F	249
G	318

Em seguida, vamos observar na sequência de estados quantas transições existem entre eles. O total de transições observadas foram 49, uma vez que cada estado pode ter em seguida qualquer um dos 7 estados adotados. Na tabela 3.3 constam as quantidades observadas na sequência:

Tabela 3.3: Quantidade de transições - Diamantino/MT

De A	De B	De C	De D	De E	De F	De G	
9854	1661	528	268	158	88	94	Para A
1626	1182	398	221	123	83	133	Para B
511	407	133	82	61	43	35	Para C
271	216	79	47	22	20	23	Para D
157	137	49	28	15	6	12	Para E
103	77	35	13	11	2	8	Para F
129	86	50	19	14	7	13	Para G
$\Sigma = 12651$	$\Sigma = 3766$	$\Sigma = 1272$	$\Sigma = 678$	$\Sigma = 404$	$\Sigma = 249$	$\Sigma = 318$	Total

Calculando as probabilidades condicionais da tabela 3.3, em que o somatório de cada coluna representa seu respectivo espaço amostral e os elementos da coluna representam os eventos, exemplifica-se que entre os anos de 1961 e 2019 o total de dias sem precipitação pluviométrica é 12651. Na tabela os dias sem precipitação foram classificados como **A**, isso indica que o número de elementos do Espaço Amostral de **A**, $N_{S_A} = 12651$, e o número de transições entre um dia sem precipitação para um dia com precipitação abaixo de 10mm é de 1626, resultado no número de elementos do evento de transição de **A** para **B**, ou seja $N_{AB} = 1626$, com estas informações é possível determinar a probabilidade de transição:

$$P_{AB} = \frac{N_{AB}}{N_{S_A}} = \frac{1626}{12651} = 0,1285 = 12,85\%$$

O procedimento é análogo para o restante dos espaços amostrais e eventos. As probabilidades de transição com quatro casas decimais conforme a tabela 3.4 são:

Tabela 3.4: Probabilidades de transição - Diamantino/MT

De A	De B	De C	De D	De E	De F	De G	
0,77891	0,44105	0,41509	0,39528	0,39109	0,35341	0,29560	Para A
0,12853	0,31386	0,31289	0,32596	0,30446	0,33333	0,41824	Para B
0,04039	0,10807	0,10456	0,12094	0,15099	0,17269	0,11006	Para C
0,02142	0,05736	0,06211	0,06932	0,05446	0,08032	0,07233	Para D
0,01241	0,03638	0,03852	0,04130	0,03713	0,02410	0,03774	Para E
0,00814	0,02045	0,02752	0,01917	0,02722	0,00803	0,02516	Para F
0,01020	0,02284	0,03931	0,02802	0,03465	0,02811	0,04088	Para G
$\Sigma = 1$	Total						

Conforme capítulo anterior, uma cadeia de Markov é uma matriz resultante das probabilidades de transição, utilizando as probabilidades de transição da tabela 3.4 obtêm-se a matriz de transição a seguir:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,77891 & 0,44105 & 0,41509 & 0,39528 & 0,39109 & 0,35341 & 0,29560 \\ 0,12853 & 0,31386 & 0,31289 & 0,32596 & 0,30446 & 0,33333 & 0,41824 \\ 0,04039 & 0,10807 & 0,10456 & 0,12094 & 0,15099 & 0,17269 & 0,11006 \\ 0,02142 & 0,05736 & 0,06211 & 0,06932 & 0,05446 & 0,08032 & 0,07233 \\ 0,01241 & 0,03638 & 0,03852 & 0,04130 & 0,03713 & 0,02410 & 0,03774 \\ 0,00814 & 0,02045 & 0,02752 & 0,01917 & 0,02722 & 0,00803 & 0,02516 \\ 0,01020 & 0,02284 & 0,03931 & 0,02802 & 0,03465 & 0,02811 & 0,04088 \end{pmatrix},$$

Na sequência, calcula-se as potências de \mathbf{T} até que a matriz de transição se aproxime de uma matriz estacionária:

$$\mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} 0,69937 & 0,57770 & 0,56568 & 0,56047 & 0,55749 & 0,54630 & 0,52472 \\ 0,17083 & 0,23515 & 0,24186 & 0,24423 & 0,24569 & 0,25203 & 0,26425 \\ 0,05657 & 0,08151 & 0,08392 & 0,08485 & 0,08520 & 0,08619 & 0,09194 \\ 0,03012 & 0,04341 & 0,04479 & 0,04530 & 0,04571 & 0,04697 & 0,04920 \\ 0,01782 & 0,02613 & 0,02670 & 0,02734 & 0,02734 & 0,02863 & 0,02966 \\ 0,01115 & 0,01581 & 0,01610 & 0,01652 & 0,01671 & 0,01741 & 0,01763 \\ 0,01414 & 0,02029 & 0,02094 & 0,02129 & 0,02187 & 0,02246 & 0,02260 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^4 = \begin{pmatrix} 0,66013 & 0,64416 & 0,64259 & 0,64189 & 0,64148 & 0,64001 & 0,63724 \\ 0,19161 & 0,20006 & 0,20090 & 0,20127 & 0,20148 & 0,20226 & 0,20373 \\ 0,06457 & 0,06782 & 0,06814 & 0,06829 & 0,06837 & 0,06867 & 0,06924 \\ 0,03441 & 0,03616 & 0,03633 & 0,03641 & 0,03645 & 0,03661 & 0,03692 \\ 0,02049 & 0,02157 & 0,02168 & 0,02173 & 0,02176 & 0,02186 & 0,02204 \\ 0,01265 & 0,01326 & 0,01332 & 0,01335 & 0,01336 & 0,01342 & 0,01352 \\ 0,01614 & 0,01696 & 0,01704 & 0,017107 & 0,01709 & 0,01717 & 0,01731 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^8 = \begin{pmatrix} 0,65431 & 0,65403 & 0,65400 & 0,65399 & 0,65398 & 0,65396 & 0,65391 \\ 0,19469 & 0,19484 & 0,19485 & 0,19486 & 0,19486 & 0,19488 & 0,19490 \\ 0,06576 & 0,06581 & 0,06582 & 0,06582 & 0,06582 & 0,06583 & 0,06584 \\ 0,03505 & 0,03508 & 0,03508 & 0,03508 & 0,03508 & 0,03509 & 0,03509 \\ 0,02088 & 0,02090 & 0,02091 & 0,02091 & 0,02091 & 0,02091 & 0,02091 \\ 0,01287 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01289 & 0,01289 \\ 0,01644 & 0,01645 & 0,01645 & 0,01646 & 0,01646 & 0,01646 & 0,01646 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{16} = \begin{pmatrix} 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 \\ 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 \\ 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 \\ 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 \\ 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 \\ 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 \\ 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{32} = \begin{pmatrix} 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 \\ 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 \\ 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 \\ 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 \\ 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 \\ 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 \\ 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{1024} = \begin{pmatrix} 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 \\ 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 \\ 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 \\ 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 \\ 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 \\ 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 \\ 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 & 0,65420 \\ 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 & 0,19475 \\ 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 & 0,06578 \\ 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 & 0,03506 \\ 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 & 0,02089 \\ 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 & 0,01288 \\ 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 & 0,01644 \end{pmatrix}.$$

A partir da 16^{o} potência é possível observar que todas as colunas da matriz são iguais, determinando o vetor de probabilidades:

$$V = \begin{pmatrix} 65,42\% \\ 19,47\% \\ 6,58\% \\ 3,51\% \\ 2,09\% \\ 1,29\% \\ 1,64\% \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Os resultados do vetor 3.1 determinam a probabilidade, por intervalo, de precipitação pluviométrica diária em Diamantino, como se evidencia na tabela 3.5:

Tabela 3.5: Probabilidade de precipitação por intervalo - Diamantino/MT

Precipitação	Probabilidade
$x = 0$	65,42%
$0 \leq x < 10mm$	19,47%
$10 \leq x < 20mm$	6,58%
$20 \leq x < 30mm$	3,51%
$30 \leq x < 40mm$	2,09%
$40 \leq x < 50mm$	1,29%
$x \geq 50mm$	1,64%

3.3.2 Estação de Cuiabá

A estação metereológica de Cuiabá, com início das atividades em 1911, também conta com um dos históricos metereológicos mais antigos de MT, armazenados no banco de dados do Instituto Nacional de Metereologia, desde 1961. Foi possível coletar informações pluviométricas diárias a partir de 01/01/1961 até 31/12/2019, conforme a figura 3.4. O número de dados diários disponibilizados neste período para a confecção do modelo a seguir foi de 18 523:

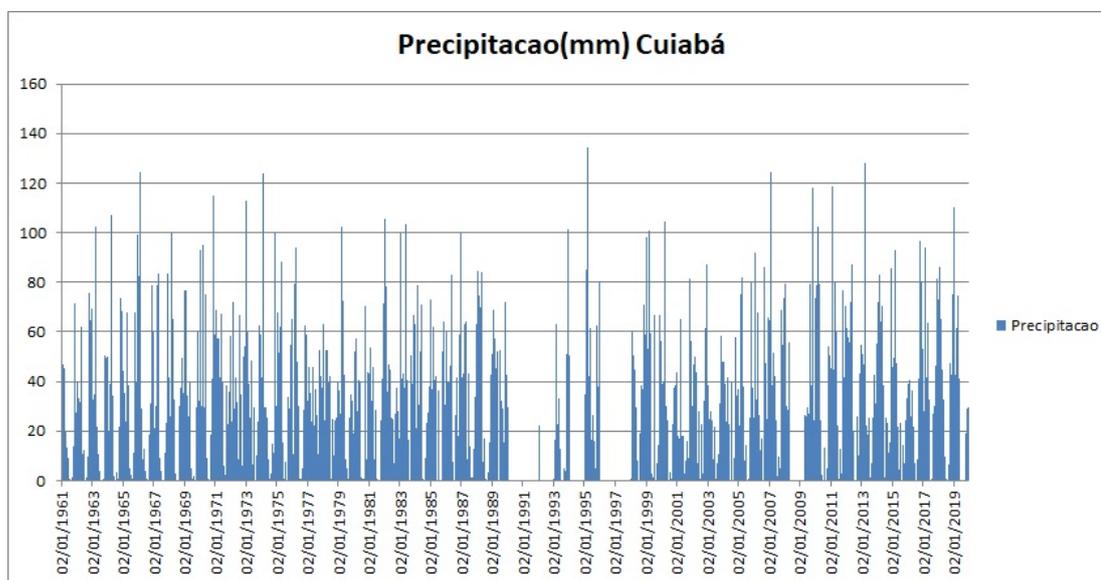


Figura 3.4: Precipitação pluviométrica de Cuiabá no período - Instituto Nacional de Metereologia (2020)

Com a finalidade de comparação entre o comportamento pluviométrico entre Cuiabá e Diamantino, os intervalos de classificação da quantidade de chuva serão os

mesmos adotados para Diamantino, conforme a tabela 3.1.

Usando os valores de referência indicados na tabela 3.1, os registros pluviométricos diários de Cuiabá passam a ter um comportamento discreto, conforme a figura 3.5:

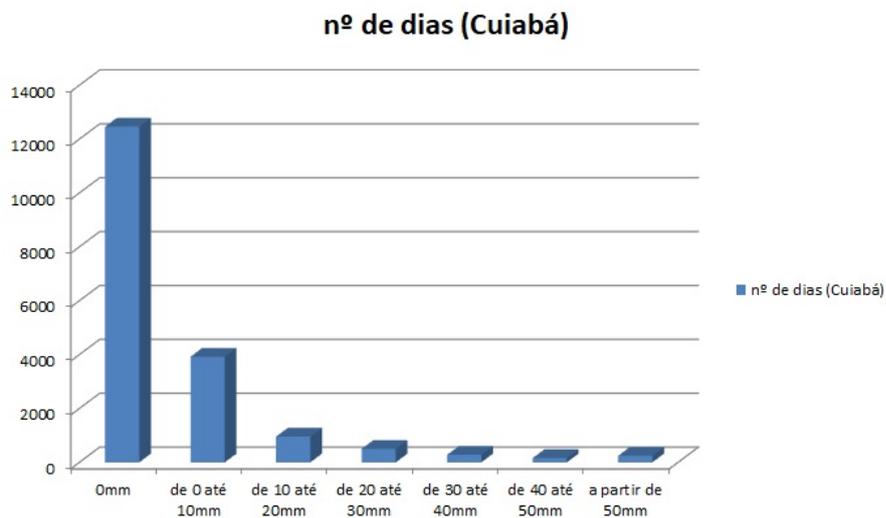


Figura 3.5: Precipitação pluviométrica de Cuiabá no período - Instituto Nacional de Metereologia (2020)

A tabela 3.6 indica a contagem da quantidade de dias para cada referência pluviométrica:

Tabela 3.6: Número de dias por referência - Cuiabá/MT

Referência	Quantidade de dias
A	12461
B	3923
C	956
D	501
E	279
F	158
G	245

Uma vez estabelecida uma sucessão de estados, a tabela 3.7 indica o total de transições entre os estados:

Tabela 3.7: Quantidade de transições - Cuiabá/MT

De A	De B	De C	De D	De E	De F	De G	
9690	1856	407	235	114	61	97	Para A
1849	1309	341	164	105	54	102	Para B
390	359	98	42	23	19	25	Para C
225	172	50	23	15	8	8	Para D
124	89	28	13	11	6	8	Para E
69	50	11	16	6	5	1	Para F
114	88	21	8	5	5	4	Para G
$\Sigma = 12461$	$\Sigma = 3923$	$\Sigma = 956$	$\Sigma = 501$	$\Sigma = 279$	$\Sigma = 158$	$\Sigma = 245$	Total

Calculando as probabilidades condicionais da tabela 3.7, em que o somatório de cada coluna representa seu respectivo espaço amostral e os elementos da coluna representam os eventos, obtemos a tabela 3.8 que determina a probabilidades de transição entre os estados:

Tabela 3.8: Probabilidades de transições - Cuiabá/MT

De A	De B	De C	De D	De E	De F	De G	
0,77763	0,47311	0,42573	0,46906	0,40860	0,38608	0,39592	Para A
0,14838	0,33367	0,35669	0,32735	0,37634	0,34177	0,41633	Para B
0,03130	0,09151	0,10251	0,08383	0,08244	0,12025	0,10204	Para C
0,01806	0,04384	0,05230	0,04591	0,05376	0,05063	0,03265	Para D
0,00995	0,02269	0,02929	0,02595	0,03943	0,03797	0,03265	Para E
0,00554	0,01275	0,01151	0,03194	0,02151	0,03165	0,00408	Para F
0,00915	0,02243	0,02197	0,01597	0,01792	0,03165	0,01633	Para G
$\Sigma = 1$	Total						

Conforme o capítulo anterior, uma matriz resultante das probabilidades de transição é uma cadeia de Markov. Assim, a matriz \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,77763 & 0,47311 & 0,42573 & 0,46906 & 0,40860 & 0,38608 & 0,39592 \\ 0,14838 & 0,33367 & 0,35669 & 0,32735 & 0,37634 & 0,34177 & 0,41633 \\ 0,03130 & 0,09151 & 0,10251 & 0,08383 & 0,08244 & 0,12025 & 0,10204 \\ 0,01806 & 0,04384 & 0,05230 & 0,04591 & 0,05376 & 0,05063 & 0,03265 \\ 0,00995 & 0,02269 & 0,02929 & 0,02595 & 0,03943 & 0,03797 & 0,03265 \\ 0,00554 & 0,01275 & 0,01151 & 0,03194 & 0,02151 & 0,03165 & 0,00408 \\ 0,00915 & 0,02243 & 0,02197 & 0,01597 & 0,01792 & 0,03165 & 0,01633 \end{pmatrix}$$

Com o objetivo de se determinar o vetor de probabilidades, seguem as potências de \mathbf{T} até que as colunas se tornem iguais:

$$\mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} 0,70652 & 0,60836 & 0,59310 & 0,60610 & 0,58761 & 0,57713 & 0,58498 \\ 0,19142 & 0,25077 & 0,25998 & 0,25109 & 0,26286 & 0,26908 & 0,26523 \\ 0,04506 & 0,06409 & 0,06690 & 0,06469 & 0,06785 & 0,07010 & 0,06854 \\ 0,02413 & 0,03257 & 0,03396 & 0,03285 & 0,03445 & 0,03525 & 0,03473 \\ 0,01339 & 0,01821 & 0,01900 & 0,01850 & 0,01937 & 0,02016 & 0,01920 \\ 0,00756 & 0,01031 & 0,01084 & 0,01083 & 0,01133 & 0,01144 & 0,01061 \\ 0,01192 & 0,01570 & 0,01623 & 0,01595 & 0,01653 & 0,01685 & 0,01670 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^4 = \begin{pmatrix} 0,67618 & 0,66596 & 0,66437 & 0,66570 & 0,66379 & 0,66269 & 0,66354 \\ 0,20973 & 0,21590 & 0,21686 & 0,21605 & 0,21721 & 0,21787 & 0,21736 \\ 0,05093 & 0,05291 & 0,05322 & 0,05296 & 0,05333 & 0,05354 & 0,05338 \\ 0,02675 & 0,02763 & 0,02776 & 0,02765 & 0,02781 & 0,02791 & 0,02784 \\ 0,01489 & 0,01539 & 0,01547 & 0,01541 & 0,01550 & 0,01556 & 0,01551 \\ 0,00843 & 0,00872 & 0,00877 & 0,00873 & 0,00879 & 0,00882 & 0,00879 \\ 0,01309 & 0,01349 & 0,01355 & 0,01350 & 0,01357 & 0,01361 & 0,01358 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^8 = \begin{pmatrix} 0,67269 & 0,67258 & 0,67256 & 0,67258 & 0,67256 & 0,67254 & 0,67255 \\ 0,21184 & 0,21190 & 0,21191 & 0,21190 & 0,21192 & 0,21192 & 0,21192 \\ 0,05161 & 0,05163 & 0,05163 & 0,05163 & 0,05163 & 0,05164 & 0,05164 \\ 0,02705 & 0,02706 & 0,02706 & 0,02706 & 0,02706 & 0,02706 & 0,02706 \\ 0,01506 & 0,01507 & 0,01507 & 0,01507 & 0,01507 & 0,01507 & 0,01507 \\ 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 \\ 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{16} = \begin{pmatrix} 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 \\ 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 \\ 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 \\ 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 \\ 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 \\ 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 \\ 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{32} = \begin{pmatrix} 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 \\ 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 \\ 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 \\ 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 \\ 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 \\ 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 \\ 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{1024} = \begin{pmatrix} 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 \\ 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 \\ 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 \\ 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 \\ 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 \\ 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 \\ 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 & 0,67265 \\ 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 & 0,21186 \\ 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 & 0,05162 \\ 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 & 0,02705 \\ 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 & 0,01506 \\ 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 & 0,00853 \\ 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 & 0,01323 \end{pmatrix}.$$

A partir da 16^0 potência é possível observar que todas as colunas da matriz \mathbf{T}^n são iguais, indicando o vetor de probabilidades:

$$V = \begin{pmatrix} 67,27\% \\ 21,19\% \\ 5,16\% \\ 2,70\% \\ 1,51\% \\ 0,85\% \\ 1,32\% \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Os resultados do vetor 3.2 determinam a probabilidade, por intervalo, de precipitação pluviométrica diária em Cuiabá, como se evidencia na tabela 3.9:

Tabela 3.9: Probabilidade de precipitação pluviométrica - Cuiabá/MT

Precipitação	Probabilidade
$x = 0$	67,27%
$0 \leq x < 10mm$	21,19%
$10 \leq x < 20mm$	5,16%
$20 \leq x < 30mm$	2,70%
$30 \leq x < 40mm$	1,51%
$40 \leq x < 50mm$	0,85%
$x \geq 50mm$	1,32%

3.3.3 Resultados

Utilizando o histórico do quantitativo pluviométrico de Cuiabá e Diamantino, cidades localizadas no Estado de Mato Grosso, foi possível obter com sucesso um modelo matemático capaz de determinar as probabilidades de precipitação diária destas cidades em um dia qualquer no futuro. Os modelos apresentaram os vetores de probabilidade com facilidade, indicando que os dados de precipitação pluviométrica é um processo aleatório de Markov.

Os resultados obtidos têm como objetivo demonstrar uma aplicação matemática aplicada em um tema muito importante para a sociedade, que é a precipitação pluviométrica.

Uma comparação entre os resultados das cidades Cuiabá e Diamantino, pode ser feita usando testes de significância, para verificar se as diferenças entre os resultados das cidades são relevantes (Silva et al., 2010).

Conforme Moreno e Higa (2005), em Mato Grosso, onde as áreas mais elevadas são formadas por chapadas, a altitude associada à ventilação constitui o fator geográfico que mais influencia as variações de temperatura e pluviosidade. Cuiabá e Diamantino possuem a mesma classificação climática, o clima de Savana (Aw) - clima tropical, com estação seca, no outono/inverno, e estação chuvosa, na primavera/verão.

A diferença mais significativa entre Cuiabá e Diamantino está na altitude, segundo Moreno e Higa (2005) Cuiabá pertence a unidade climática situada entre 85 a 200 m de altitude e Diamantino na faixa entre 200 a 400m, nessa faixa de altitude as precipitações anuais de Cuiabá variam de 1200mm a 1500mm e de Diamantino entre 1600mm

a 1800mm.

Se for considerada a média entre os valores máximos e mínimos como um valor pluviométrico intermediário para as duas cidades, Cuiabá teria 1350mm de pluviosidade média e Diamantino 1700mm, o que resulta em uma diferença próxima a 20%.

Tabela 3.10: Probabilidades de precipitação pluviométrica

Precipitação	Probabilidade em Cuiabá/MT	Probabilidade em Diamantino/MT
$x = 0$	67,27%	65,42%
$0 \leq x < 10mm$	21,19%	19,47%
$10 \leq x < 20mm$	5,16%	6,58%
$20 \leq x < 30mm$	2,70%	3,51%
$30 \leq x < 40mm$	1,51%	2,09%
$40 \leq x < 50mm$	0,85%	1,29%
$x \geq 50mm$	1,32%	1,64%

Com base nas informações acima, para efeitos de comparações a diferença entre as probabilidades dos intervalos das cidades e a porcentagem dessa diferença em relação ao menor valor, indica a porcentagem da vantagem de cada cidade nos intervalos, conforme a tabela 3.11:

Tabela 3.11: Comparação dos resultados

Precipitação	Proporção Percentual
$x = 0$	3% mais provável em Cuiabá
$0 \leq x < 10mm$	8% mais provável em Cuiabá
$10 \leq x < 20mm$	28% mais provável em Diamantino
$20 \leq x < 30mm$	30% mais provável em Diamantino
$30 \leq x < 40mm$	38% mais provável em Diamantino
$40 \leq x < 50mm$	52% mais provável em Diamantino
$x \geq 50mm$	24% mais provável em Diamantino

A alta probabilidade de não chover nas duas cidades é justificada pela condição climática das regiões, que possuem duas estações secas bem definidas.

Os demais resultados apontam que as precipitações pluviométricas acima de 10mm são maiores em Diamantino, que pode ser justificada pelo motivo das cidades pertencerem a unidades climáticas distintas e médias pluviométricas anuais maiores em Diamantino, e indica que as diferenças entre as médias pluviométricas anuais das cidades citadas estejam relacionadas com o volume de chuvas e não com a frequência das mesmas.

3.3.4 Uma proposta para o Ensino Médio

Estudada desde os anos 80, a modelagem matemática tem como objetivo a facilitação da aprendizagem, desenvolvimento do raciocínio e contribui para a Matemática tornar-se mais interessante. Para as turmas do Ensino Médio, a modelagem matemática pode ser desenvolvida de forma mais ampla, de início, com propósito motivacional, mostrando todas as etapas da modelagem e correlacionando com os objetos do conhecimento a serem estudados (Carminati Luiz, 2007).

Os objetos do conhecimento evidenciados neste modelo matemático são a probabilidade condicional e de forma especial a multiplicação entre matrizes, desta forma, este trabalho pode ser apresentado aos discentes do Ensino Médio em três momentos: o primeiro para explorar os conceitos de contagem e apresentar os recursos da planilha eletrônica para facilitar o processo; no segundo momento abordar os conceitos de probabilidade para calcular as probabilidades de transição e, por fim, as multiplicações entre matrizes que, neste caso, devido as suas características, quando as potências tendem a números cada vez maiores a matriz se aproxima de uma matriz constante determinando as probabilidades dos índices pluviométricos estabelecidos.

Além da motivação, a construção e os resultados obtidos com o modelo matemático podem ser trabalhados com os alunos do Ensino Médio por permitir algumas possibilidades de articulação entre as áreas de conhecimento, que no caso específico do modelo, motiva os estudantes a aprofundar seus conhecimentos sobre as diferenças das regiões climáticas do local que habitam e aperfeiçoar seus conhecimentos sobre os recursos disponibilizados pelas planilhas eletrônicas, motivando grupos de estudantes que se propõem, com base em uma problemática definida, a acompanhar, analisar e fiscalizar a evolução de fenômenos.

Também tem como objetivo contribuir com a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas. Na sua construção podem ser explorados as estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos como: Aritmética, Álgebra e Probabilidade, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e

a adequação das soluções propostas (MEC, 2018).

Por fim, o modelo desenvolvido neste trabalho pode contribuir com a motivação inicial para a apresentação dos objetos do conhecimento que foram utilizados durante o desenvolvimento do modelo e possibilitar a articulação entre as áreas de conhecimento propiciando um aprendizado significativo e integrado.

Considerações finais

Este trabalho analisou as cadeias de Markov como uma aplicação para determinar a probabilidade de precipitação pluviométrica diária.

A classificação das informações sobre precipitação diária das cidades de Cuiabá - MT e Diamantino -MT e os cálculos das potências das matrizes de transição foram realizadas com o auxílio de uma planilha eletrônica.

Os modelos foram capazes de determinar os vetores de probabilidades a partir da 16^{o} potência da matriz de transição e os resultados obtidos sugerem que em um dia qualquer do futuro as cidades possuem probabilidade de precipitação pluviométrica diária semelhantes, porém os volumes pluviométricos tendem a ser maiores em Diamantino.

Por fim, este trabalho teve como objetivo mostrar aos estudantes do Ensino Médio que muitos conceitos abordados em sala de aula podem ser usados em aplicações interessantes. Os conceitos de Álgebra costumam ser os mais abstratos e de difícil compreensão para os alunos, já as aplicações que buscam respostas para problemas do cotidiano costumam ser os mais bem sucedidos durante as aulas. Desta forma conceitos como probabilidade condicional e multiplicação entre matrizes quando combinados podem produzir resultados interessantes, instigando os alunos a pensarem em novas possibilidades entre conceitos matemáticos ou até mesmo com outras áreas do conhecimento.

Referências Bibliográficas

- Boldrini, J. L., Costa, S. R., Figueiredo, V. L., e Wetzler, H. G. (1986). *Álgebra Linear*. Ed. Harbra, São Paulo-SP.
- Carminati Luiz, N. (2007). Modelagem matemática: Uma proposta de ensino possível na escola pública. <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/975-4.pdf>.
- Howard, E. (2004). *Introdução a História da Matemática*. Ed. Unicamp, Campinas-SP.
- Instituto Nacional de Meteorologia (2020). INMET. Disponível em <http://www.inmet.gov.br> Acesso em: 20/01/2020.
- Keller, T., Assad, E. D., e Lima, P. R. S. R. (2005). Regiões pluviométricamente homogêneas no Brasil. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 40:311–322.
- Kolman, B. (1999). *Introdução a Álgebra Linear com Aplicações*. LTC, Rio de Janeiro-RJ.
- MEC (2018). Disponível em <http://portal.mec.gov.br> Acesso em 07/08/2020.
- Moreno, G. e Higa, T. C. S. (2005). *Geografia de Mato Grosso: território, sociedade, ambiente*. Ed. Entrelinhas, Cuiabá - MT.
- Morgado, A. C., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., e Fernandez, P. (2006). *Análise Combinatória e Probabilidade*. Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ.
- Paiva, E. e Clarke, R. (1997). RBRH -Revista Brasileira de Recursos Hídricos. URL:<https://www.researchgate.net/profile/RobinClarke4/publication/267806216.pdf> : 20/07/2020.

Rousseau, C. e Saint-Aubin, Y. (2015). *Matemática e Atualidade*. Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ.

Silva, E. M., Silva, E. M., Gonçalves, V., e Murolo, A. C. (2010). *Estatística para os cursos de Economia, Administração e Contabilidade*. Ed. Atlas, São Paulo-SP.

UNESP (2016). Revista Eletrônica Paulista de Matemática. Disponível em <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v08ica01-convergencia-de-matrizes.pdf> Acesso em: 20/07/2020.