

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Expressões algébricas e genética: Uma troca de olhares

Luiz Henrique Sai

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Luiz Henrique Sai

Expressões algébricas e genética: Uma troca de olhares

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

USP – São Carlos
Agosto de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S132e Sai, Luiz Henrique
Expressões algébricas e genética: Uma troca de
olhares / Luiz Henrique Sai; orientadora Claudia
Inês Garcia. -- São Carlos, 2020.
74 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. O ensino de matemática e a modelagem
matemática. 2. Genética e seus fundamentos. 3.
Binômio de Newton e a teoria das probabilidades. 4.
Oficina de modelagem matemática. 5. Conclusões e
comentários. I. Garcia, Claudia Inês, orient. II.
Título.

Luiz Henrique Sai

Algebraic expressions and genetics: an exchange of glances

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

USP – São Carlos
August 2020

*Este trabalho é dedicado à minha amada irmã Neili,
que sempre acreditou em meu potencial e à minha mãe Inêz, que é a minha base na vida.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente à minha família, pelo apoio durante todo curso de Mestrado, e à minha orientadora, a professora Claudia, pelos conselhos e sugestões preciosos durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço também aos professores do PROFMAT pelo empenho e dedicação em oferecer um curso de excelência e modelo em todo o país.

*“Cantando a vida,
como o cisne a morte.”
(Bocage)*

RESUMO

SAI, L. H. **Expressões algébricas e genética: Uma troca de olhares.** 2020. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Este trabalho pretende elucidar as relações entre as abordagens dadas à introdução e ao estudo de expressões algébricas e o ensino-aprendizagem de genética e outros conceitos biológicos tratados no Ensino Médio. Através dos processos de elaboração e construção de modelos matemáticos da realidade/situação observada foi elaborada uma oficina dirigida de acordo com temas pré-selecionados, como determinação do sexo biológico de indivíduos, variação de características ao longo de gerações, leis mendelianas e interação gênica, entre outros. Os estudantes que participaram da mesma puderam entender como se dão os processos que compõem a criação de modelos, como a estruturação, elaboração de hipóteses e validação de resultados obtidos a partir da análise dos dados apresentados a cerca de um determinado fenômeno biológico, além de observarem a manipulação de expressões e a apresentação de proposições algébricas sob um caráter interdisciplinar.

Palavras-chave: Modelagem, Genética, Probabilidade, Ensino, Expressões Algébricas.

ABSTRACT

SAI, L. H. **Algebraic expressions and genetics: an exchange of glances**. 2020. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This work aims to elucidate the relationships between the approaches given to the introduction and study of algebraic expressions and the teaching-learning of genetics and other biological concepts treated in high school. Through the processes of elaboration and construction of mathematical models of the observed reality / situation, a workshop was developed according to pre-selected themes, such as determining the biological sex of individuals, variation of characteristics over generations, Mendelian laws and gene interaction, among others. The students who participated in it were able to understand how the processes that make up the creation of models occur, such as structuring, hypothesis elaboration and validation of results obtained from the analysis of the data presented about a certain biological phenomenon, in addition to observing the manipulation of expressions and the presentation of algebraic propositions under an interdisciplinary character.

Keywords: Modeling, Genetics, Probability, Teaching, Algebraic Expressions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração do cruzamento cromossómico da autoria de Thomas Hunt Morgan (1916)	39
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Representação do cruzamento resultante da autofecundação dos indivíduos da geração F_1	33
Tabela 2 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre indivíduos di-híbridos da geração P_1	35
Tabela 3 – Frequências genótípicas observadas no cruzamento representado na Tabela 2.	35
Tabela 4 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre dois indivíduos heterozigóticos para um determinado genótipo.	36
Tabela 5 – Fenótipos da cor da pele humana	37
Tabela 6 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre indivíduos di-híbridos de drosófilas da geração M_1	39
Tabela 7 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre os indivíduos de genótipos Rr e rr	60
Tabela 8 – Frequências genótípicas e fenótípicas de um cruzamento em função do número de pares de alelos considerados.	62
Tabela 9 – Proporções fenótípicas após o cruzamento dos indivíduos di-híbridos da geração P_1	62
Tabela 10 – Possibilidades de sexos para os nascimentos de 3 filhos de um casal.	64
Tabela 11 – Análise de dados obtidos através da Tabela 8.	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	O ENSINO DE MATEMÁTICA E A MODELAGEM MATEMÁTICA	25
2.1	As representações ao longo dos tempos	25
2.2	O ensino de Matemática via Modelagem Matemática	26
3	A GENÉTICA E SEUS FUNDAMENTOS	31
3.1	Genética: uma história mais antiga do que a palavra	31
3.1.1	<i>A 1ª lei de Mendel: Monohibridismo</i>	33
3.1.2	<i>A 2ª lei de Mendel: Di-hibridismo</i>	34
3.2	A Genética pós – Mendel e um caso de interação gênica particular: a herança quantitativa	36
3.3	O conceito de <i>linkage</i> e os trabalhos de Morgan	38
3.4	A Genética de populações e o modelo de Hardy-Weinberg	40
3.4.1	<i>Considerações iniciais</i>	40
3.4.2	<i>O modelo de Hardy-Weinberg</i>	41
4	O BINÔMIO DE NEWTON E A TEORIA DAS PROBABILIDADES	43
4.1	O produto entre dois números reais	43
4.2	Os princípios da contagem	43
4.3	O Binômio de Newton	44
4.3.1	<i>O triângulo de Pascal e os números binomiais</i>	45
4.3.2	<i>O Teorema Binomial</i>	47
4.4	Probabilidades e eventos	49
4.4.1	<i>Axiomas da Probabilidade</i>	52
4.4.2	<i>Regra da adição de probabilidades</i>	55
4.4.3	<i>Probabilidade Condicional</i>	55
5	OFICINA DE MODELAGEM MATEMÁTICA	57
5.1	Metodologia	57
5.2	O conceito de Gene e do quadro de Punnet como aliados no ensino- aprendizagem de operações com polinômios	58
5.3	As ligações intrínsecas entre a genética e o binômio de Newton . .	63
5.4	A distribuição binomial e o modelo de Hardy-Weinberg	67

6 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS 69

REFERÊNCIAS 73

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática na educação básica passa, aos olhos da maioria dos estudantes, sobretudo nos anos finais do ensino Fundamental, por uma profunda “transformação” devido a um fator muito preponderante: a introdução ao “universo” da Álgebra – palavra derivada do termo árabe *al-jabr*, que significa “arte de reunir ossos quebrados” ou “reunião de partes deslocadas” (7GRAUS, 2008-2020). Essa “transformação” deve-se, sobretudo, ao nível de abstração e interpretação exigida pela área e que, em sua grande maioria, gera inúmeras dificuldades durante a vida escolar das pessoas.

Os conceitos e definições de incógnita, variável, equações, funções, entre outros, são abordados num primeiro momento, introduzindo problemas e situações em que um valor desconhecido figura como personagem principal e é exatamente nesse momento que se estabelece o contexto, o histórico do problema e a interpretação adequada através da simbologia algébrica.

A partir das experiências e situações vivenciadas ao longo da trajetória docente foi possível inferir que a grande maioria dos estudantes consideram a matemática e outras áreas do conhecimento de maneira isolada. “Eu não gosto de ‘Exatas’”, é uma frase recorrentemente usada para justificar dificuldades e falácias ao longo da aprendizagem de conceitos matemáticos. Entretanto, o que as diferentes áreas do conhecimento tem em comum remete a algo mais simples: o que seria de um problema de álgebra por exemplo, sem a boa interpretação de seu enunciado e até do seu próprio contexto? A álgebra configura um sistema amplo e carregado de simbologia, que nada mais é do que um outro tipo de linguagem com seus significados e regras.

No Ensino Médio, o ensino-aprendizagem de vários temas é aprofundado e estabelecem-se as conexões entre as sub-áreas – equações trigonométricas, geometria analítica, conceitos de probabilidade e eventos, etc – cujos estudos são regidos pela simbologia e interpretação algébrica visando o desenvolvimento de habilidades relacionadas “à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real”(MEC, 1997).

Falando das relações intrínsecas entre as diferentes áreas do conhecimento, a palavra preferida nesse contexto é “interdisciplinaridade”.

Para diversos autores, a possibilidade de diálogo entre diferentes áreas do conhecimento, promovendo a integração dos diferentes saberes para dar suporte a conceitos científicos mais amplos (BUENO, 2011) expressa a essência das discussões a cerca do que vem a ser interdisciplinaridade. Entretanto, esse tema é, muitas vezes, mais discutido teoricamente do que visto em prática. A interação entre as disciplinas depende também da interação entre os professores das diversas áreas que, devido a necessidade de ensinar e avaliar os estudantes através de roteiros de aulas “cronometrados” e pré-definidos, acaba engessando os conteúdos e inviabilizando as possibilidades de diálogo entre os conteúdos das diferentes disciplinas.

“Pra que/Onde vou usar isso?”, esse questionamento, levantado por vários alunos, ronda os ambientes de sala de aula frequentemente; cada vez mais curiosos e imersos nos avanços tecnológicos, os estudantes demonstram a necessidade de observar utilidade no mundo real daquilo que aprendem. Por conta disso, situações que exigem um nível alto de abstração carecem de abordagens que possam sanar essa barreira entre o intangível e o aplicável para os alunos.

A interpretação de enunciados e sua transcrição para a linguagem algébrica é, sem dúvidas, um desafio enfrentado por estudantes desde o início de sua trajetória escolar até o ambiente acadêmico, mais rigoroso, das graduações. Um exemplo clássico disso são situações-problema que abordam o desenvolvimento e compreensão de expressões como “o quadrado da soma de dois valores”, “a diferença entre os quadrados de dois valores”, entre outras; nas quais, frequentemente, o apelo à fórmulas e métodos de resolução pré-estabelecidas – o quadrado da soma de dois valores é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo – tornam-se práticas exaustivas e desinteressantes para os estudantes.

Pensando nisso, o estudo feito aqui pretende colaborar de forma a conseguir melhorar e aperfeiçoar as análises e interpretações de expressões e identidades algébricas, problemas que envolvam o conhecimento a cerca das probabilidades de um determinado fenômeno e/ou evento e outros contextos onde a transcrição dos mesmos via linguagem algébrica faça-se bem-vinda.

Baseado nessas observações, pretende-se, a partir de um projeto em formato de oficinas de estudos monitorados, aproximar a realidade vivenciada pelos estudantes e aquela estudada durante as aulas de Matemática, através de propostas de elaboração e construção de modelos matemáticos da realidade tratada, valendo-se da interação entre os conteúdos abordados nos temas de Álgebra, Análise Combinatória, Binômio de Newton e Probabilidades com os abordados em e dinâmica de populações, nas aulas de Biologia. A possibilidade de descrever um fenômeno biológico algebricamente reforça o valor do aprendizado em ambas as áreas – Matemática e Biologia – e também a necessidade de amparo e embasamento teórico que cada uma tem sobre a outra. Para isso, esse trabalho foi dividido em capítulos que abordam, respectivamente, como o processo de modelagem foi concebido em diferentes épocas e por diferentes autores; a

criação e desenvolvimento das bases teóricas da Genética através dos tempos; o tratamento de conceitos a respeito do estudo de expressões algébricas, do Binômio de Newton, das definições a cerca de Análise Combinatória e Probabilidades; e finalmente, a proposta de oficina de estudos monitorados para os alunos interessados no processo de modelagem dos fenômenos biológicos estudados previamente.

O ENSINO DE MATEMÁTICA E A MODELAGEM MATEMÁTICA

A representação abstrata de objetos, fenômenos ou situações do cotidiano acompanham a humanidade desde a Idade da Pedra. As pinturas rupestres, por exemplo, eram formas de representar situações em que o homem caçava, pescava, lutava por territórios, entre muitos outros (SCHICHL, 2004, p.25). O princípio básico dessas representações encontra-se no conceito de modelo.

2.1 As representações ao longo dos tempos

Um modelo é uma versão simplificada de algo que é real (SCHICHL, 2004, p.28); a sua função varia bastante, desde a necessidade de explicar um fenômeno, fazer previsões a respeito de acontecimentos futuros, ajudar na tomada de decisões e até na comunicação entre pessoas. Se essa representação da realidade é descrita através de estruturas e objetos de natureza matemática segundo as regras e formalidades dessa última, fala-se, então, de um modelo matemático da situação observada. Essa definição é quase que unânime na opinião de diversos pesquisadores a respeito do que definem como modelo matemático.

Falar sobre o processo de criação de modelos em Matemática transporta os processos atuais ao início dos impérios antigos; afinal, desde a construção de habitações, cultivos de alimentos, criação de barragens de rios, até a construção das Pirâmides no Egito, pode-se observar o contínuo processo do que é “modelar” algo matematicamente. Apesar do termo em si ter surgido muito tempo depois, mais precisamente durante o século XX, na literatura de Engenharia e Ciências Econômicas segundo Biembengut (2009), os seus resquícios permeiam toda história das Ciências.

Mundialmente, ainda segundo Biembengut (2009), o termo “modelagem matemática”

começou a ser utilizado amplamente a partir do final da década de 1950, primeiramente nos EUA, em alguns trabalhos realizados pelo School Mathematics Study Group (SMSG), no 69º anuário da National Society for the Study of Education e no New Trends in Mathematics Teaching IV; intensificando a discussão a cerca da aplicabilidade em matemática na década de 1960 com o movimento “utilitarista”. Alguns eventos nessa época como o Lausanne Symposium (1968), na Suíça, questionavam o quão útil o ensino de Matemática necessitava ser, ou seja, mostrar a realidade defrontada pelo estudante via os moldes teóricos estudados na disciplina.

Na Europa, em 1978, um congresso com a temática “Matemática e realidade”, ajudou a consolidar a criação do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA, através dos esforços de Hans Freudenthall, Bernhelm Booss e Mogens Niss, importantes pesquisadores e representantes da Matemática “utilitária”.

Todos esses acontecimentos influenciaram pesquisadores e estudiosos no Brasil, a partir da década de 1970, a iniciarem o movimento pela modelagem na Educação Matemática fazendo a Matemática Aplicada emergir de forma inédita nos cursos e disciplinas das mais diferentes áreas do conhecimento, mostrando as conexões entre a realidade e o saber matemático. Dentre tantos adeptos, os professores Aristides C. Barreto, Ubiratan D’ Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, destacaram-se pelas participações em eventos internacionais, impulsionando e disseminando as principais ideias do movimento. A partir desse momento, a modelagem Matemática como ferramenta de ensino ganha destaque nacional progredindo em vários aspectos, até que em 2001, a Sociedade Brasileira de Matemática cria o Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática e ainda, em 2006, a professora Maria Salett Biembengut inaugura o Centro de Referência da Modelagem Matemática no Ensino – CREMM.

2.2 O ensino de Matemática via Modelagem Matemática

Por diversas vezes, os professores buscam novas estratégias, métodos e práticas de ensino a fim de dar suporte e, em certas vezes, até renovar as formas de como os estudantes percebem, assimilam e dominam determinados conteúdos. Essa busca encontra uma aceitação e interesse cada vez mais significativos por parte dos alunos quando a análise da realidade figura como personagem principal. “Compreender que a realidade não é matemática significa também compreender que descrevê-la matematicamente constitui uma das inúmeras possibilidades de conhecê-la” (ANASTACIO, 2010) e é neste princípio que reside a modelagem matemática.

Durante as aulas, os professores devem ter em mente que o estudante do século XXI possui desafios diferentes daqueles que os estudantes de outros séculos defrontavam-se. O mundo atual, globalizado, tecnológico e conectado muda e absorve informações numa velocidade extrema; a iniciativa, a autonomia, a tomada de decisões e a criatividade são pré-requisitos para o desenvolvimento e formação de um cidadão; e cabe, pois ao professor propiciar situações que levem o aluno a refletir sobre seu processo de aprendizagem ao longo de toda sua vida escolar,

visando este conjunto de competências esperadas e almejadas neste século.

O processo de modelagem matemática tem se mostrado amplamente eficaz em metodologias que salientam essas qualidades tão desejadas em futuros cidadãos e profissionais das mais distintas áreas. É claro que, ao lidar com o processo de modelagem, existem diferentes formas de concebê-la e isso também possibilita diferentes objetivos ao considerá-la.

Grande parte dos pesquisadores e professores que fazem uso do processo de modelagem matemático, como a professora dr^a Maria Salett Biembengut, os professores drs Dionisio Burak e Jonei Cerqueira Barbosa, entre outros, concordam que o mesmo é mais eficaz quando trabalhado em grupos de estudantes em que estes tenham liberdade no momento da escolha do tema ou situação-problema a ser analisada, porém, há certas concepções que não consideram como crucial a criação de um modelo em si ao final da proposta, mas sim, a importância do processo de pesquisa, o levantamento de questionamentos a cerca dos métodos utilizados na representação matemática do problema e na teorização de conceitos abordados na resolução do mesmo (BUENO, 2011).

É crucial ter em mente qual é o público-alvo e qual é o objetivo ao utilizar a modelagem matemática em sala de aula. Neste momento, o professor deve refletir sobre o porquê utilizar a modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem: para simplesmente ensinar um determinado conteúdo? Ou para que os alunos tenham o protagonismo devidamente esperado no processo de pesquisa, coleta de informações, levantamento de hipóteses e propostas de solução? Ensinar através do processo de modelagem, “a adoção de uma metodologia que leve em consideração uma nova perspectiva que contemple um novo modelo de racionalidade, mais amplo, capaz de se alinhar com as mudanças que se impõem” (BURAK, 2010), permite um cenário em que o diálogo e a exposição de dúvidas e ideias seja trabalhado de uma forma mais fluida e democrática.

Os desafios nesta proposta são muitos; ainda segundo Burak (2010), o atual sistema de ensino, dividido em disciplinas, focado nos pré-requisitos que o estudante necessita para continuar seus estudos e que serão exigidos durante avaliações e outras provas, acaba deixando de lado as experiências verdadeiramente significativas em sala de aula. Os alunos enxergam conteúdos de formas isoladas, separadamente e/ou em momentos diferentes, quando na verdade um mesmo tema possui abordagens e formas de serem tratadas por diferentes áreas, mas que se complementam e se integram; devendo observar que tudo faz parte de um todo, que perde seu sentido quando suas partes são isoladas uma da outra.

Tendo em vista todas essas contribuições do ensino da matemática via modelagem matemática, no estudo feito ao longo desta dissertação, não se busca tratar do processo de modelar através de uma única concepção, mas sim, aproveitando diferentes visões de autores na área e como essas podem se interligar e somatizar. A seguir são apresentados as principais concepções usadas durante este estudo sobre diferentes aspectos do processo de modelagem.

Segundo Barbosa (2007), uma situação real que representa um problema aos estudantes,

ou seja, não há métodos pré-concebidos para lidar com a mesma, representa uma possibilidade de atividade abordando modelagem. Contudo, mais importante do que chegar a um modelo matemático, está o processo de investigação que essa abordagem propicia, isto é, o tratamento das informações a cerca da situação real analisada, a partir de objetos matemáticos, mesmo sem obter uma representação matematicamente precisa, é modelagem matemática.

Neste aspecto, [Barbosa \(2007\)](#) salienta as diferenças ao se lidar com o processo de modelagem em diferentes ambientes. Um pesquisador, um professor ou alguém que tem um nível acadêmico mais avançado por muitas vezes, está interessado na construção e obtenção de um modelo matemático propriamente dito; já o estudante do ensino médio ainda está em um processo de formalização de como pesquisar, como organizar dados referentes a uma pesquisa, como levantar hipóteses e propor diferentes modelos de uma determinada situação. Portanto, é necessário distinguir esses dois processos de criação e pesquisa em modelagem matemática; ambos são eficazes e podem abordar até uma mesma situação real, contudo, seus objetivos podem ser diferentes.

Em se tratando de modelagem em um nível mais acadêmico, para [Bassanezi \(2002\)](#), citado por [Anastacio \(2010\)](#), este processo possui etapas a serem seguidas, que são descritas a seguir:

1. Experimentação - correspondente à coleta de dados e seleção das variáveis analisadas no processo.

2. Abstração - correspondente à formulação do modelo matemático e subdividida em 4 etapas: a seleção de variáveis; a explicitação do que se pretende resolver; a formulação de hipóteses e a simplificação, que trata do salto entre o real e a simbologia matemática que o representa.

3. Resolução - correspondente ao tratamento matemático dado em busca de uma solução.

4. Validação - correspondente a verificação sobre o quão adequado o modelo proposto é para descrever a realidade analisada.

5. Modificação - correspondente a situação em que o modelo não foi considerado satisfatório para a situação tratada.

O cumprimento de cada uma das etapas descritas gera um encadeamento das mesmas e, caso a última etapa seja necessária, um novo ciclo se inicia a partir da segunda etapa.

Ao se tratar da modelagem matemática voltada para o ensino médio neste projeto, esse ciclo descrito por [Bassanezi](#) é articulado de uma forma mais sutil, de modo que a nomeação das etapas não é feita de uma forma explícita e sucessiva, mas sim, tratando cada uma conforme as indagações e formulações feitas pelos estudantes durante todo o processo assim como sugere ([BARBOSA, 2007](#)).

Tomando como base do estudo os fenômenos biológicos observados em cruzamentos de

indivíduos, apresentam-se duas áreas, tratadas muitas vezes em situações distintas e sem ligações tanto pelos estudantes, quanto pelo próprios professores, que possuem relações tão profundas em que, ora é necessário recorrer a uma análise meticulosa dos dados, ora é necessário se amparar em como o processo biológico é regido e conduzido. Segundo [Miramontes e Biomatemática \(2004\)](#), **“as ciências são entes dinâmicos e a visão da mesma como algo que se pode dividir ou parcelar é incorreta”**.

É impossível afirmar quando e onde o primeiro modelo matemático de um fenômeno biológico foi formulado, porém o mais antigo registrado na literatura do assunto é o proposto por Leonardo de Pisa (1190 – 1247) que veio a ser conhecido como a sequência de Fibonacci ([MIRAMONTES; BIOMATEMÁTICA, 2004](#)).

Vários conteúdos tratados na disciplina de Biologia carecem de um tratamento matemático da situação analisada. Desde a divisão celular, até os processos de interação entre diferentes espécies, várias situações possuem a característica de desenvolverem comportamentos padrões, repetitivos e que podem ser previstos ao longo do tempo e é a partir da formalização matemática destes objetos que sua análise e pesquisa torna-se possível.

A GENÉTICA E SEUS FUNDAMENTOS

Tendo como principal objetivo elucidar os conceitos e definições a cerca das leis que regem a Genética Mendeliana e pós-Mendeliana de forma que assegure-se uma base sólida para os estudos propostos ao longo desse texto, pretende-se apresenta a seguir um resumo dessas informações baseadas, em sua grande maioria, na obra de [Mendonça \(2013\)](#) e de [Beiguelman \(2008\)](#).

3.1 Genética: uma história mais antiga do que a palavra

Em 1860, o monge austríaco Gregor Mendel (1822 – 1884) realizou uma série de cruzamentos entre plantas de ervilhas analisando todos os resultados obtidos. Iniciava-se nesse momento, o estudo e teorização das leis de transmissão de caracteres hereditários ([BEIGUELMAN, 2008](#)).

O estudo e conhecimento a cerca da divisão celular e de estruturas como os cromossomos, DNA e síntese de proteínas, foram posteriores aos experimentos realizados por Mendel, mas que vieram também a confirmar grande parte das propostas levantadas no estudo da hereditariedade.

Durante mais de 10 anos de trabalho, Mendel isolou 22 variedades de ervilhas que originavam linhagens puras – uma descendência homogênea ao longo das gerações analisadas.

Escolhendo um ser vivo cuja reprodução ocorre por autofecundação, de fácil polinização e apresentando um desenvolvimento rápido, além de um grande número de descendentes a cada cruzamento e com características hereditárias visíveis e de fácil constatação, Mendel encontrou nas ervilhas uma oportunidade perfeita para realizar seus estudos e se consolidar como o “pai” da Genética.

Mendel selecionou 7 caracteres da planta de ervilha (*Pisum sativum*) para realizar suas observações:

1. a forma da semente – lisa ou rugosa.
2. a cor da semente – amarela ou verde.
3. a cor da flor – púrpura ou branca.
4. a posição da flor – axilar ou terminal.
5. a forma do fruto – liso e estofado ou ondulado e achatado.
6. a cor do fruto – verde ou amarelo.
7. a altura do caule – alto ou baixo.

Usando plantas de linhagens puras, ou seja, plantas que geravam descendentes com aspectos que não variavam ao longo dos cruzamentos, Mendel separou as plantas de acordo com cada uma das 7 características observadas sempre entre 2 subgrupos, de acordo com os diferentes aspectos observados. Todos esses indivíduos de linhagem pura constituem a geração parental.

Após isso, Mendel realizou cruzamentos entre as plantas de linhagens puras de aspectos diferentes. Por exemplo, cruzando plantas que apresentavam sementes lisas com as que apresentavam sementes rugosas. A partir dessa fecundação cruzada – onde o gameta masculino de um indivíduo (contido no grão de pólen) fecunda o gameta feminino contido na flor de outro indivíduo – ele obteve frutos com sementes lisas e nomeou essas como sendo a geração F_1 . Entretanto, essa geração não é pura, pois resulta do cruzamento de plantas que produzem sementes com aspectos diferentes (lisas e rugosas), desta forma, definimos os indivíduos da geração F_1 como híbridos.

A característica que se manifesta nas gerações que não formam linhagens puras recebe o nome de dominante, enquanto que a característica não manifestada é a recessiva. Tendo isso em mente, Mendel se indagou a respeito do caráter recessivo ter desaparecido da geração F_1 , já que os indivíduos da mesma apresentavam apenas o aspecto dominante, apesar de terem surgido de um cruzamento de uma geração parental com aspectos destoantes.

Mendel então resolveu deixar ocorrer a autofecundação entre os indivíduos da geração F_1 , obtendo a geração F_2 (a segunda geração de descendentes), com os seguintes resultados: 75%, aproximadamente, dos indivíduos apresentaram o caráter dominante e 25%, o recessivo, concluindo assim que o aspecto recessivo está presente na geração F_1 , contudo, ele é “camuflado” devido a presença do aspecto dominante.

Posteriormente, os avanços na área da genética e de divisão celular, conseguiram sanar os motivos desse “desaparecimento” do caráter recessivo na geração F_1 a partir dos dados observados por Mendel – as células de ervilhas são diploides, isto é, apresentam pares de cromossomos homólogos que, por sua vez, apresentam os mesmos locos gênicos (um determinado lugar de um cromossomo é ocupado por um gene, no cromossomo homólogo haverá o alelo ocupando a mesma posição. Nas ervilhas, o aspecto liso da semente, por exemplo, determina um alelo dominante em relação a outro alelo, que determina o aspecto rugoso. Dessa forma, um aspecto

recessivo só se manifesta na ausência do aspecto dominante.

Com base nessas informações, definimos os conceitos de genótipo e fenótipo em biologia.

- **Genótipo:** São os pares de alelos de um indivíduo diploide, relacionados na determinação de um caráter ou ao conjunto de características.

- **Fenótipo:** São as características ou aspectos apresentados por um indivíduo, que são determinados pelo genótipo e moduladas por fatores do meio.

Assim, se representarmos por A o alelo que determina sementes lisas e por a o alelo que determina sementes rugosas, teremos 3 possibilidades de genótipos para a característica analisada: AA , Aa e aa .

Os indivíduos AA e aa representam linhagens puras e não alteram suas características na autofecundação, já os indivíduos Aa representam linhagens híbridas e produzem descendentes com características dominantes (75%) e recessivas (25%). Dessa forma, os genótipos AA e Aa condicionam o fenótipo semente lisa e o genótipo aa condiciona o fenótipo semente rugosa – note que o fenótipo recessivo é sempre puro.

Definem-se aqui também os termos,

- **Homozigótico:** referindo-se aos indivíduos que compõem linhagens puras (no caso anterior, AA e aa).

- **Heterozigótico:** referindo-se aos indivíduos que compõem linhagens híbridas (no caso anterior, Aa).

3.1.1 A 1ª lei de Mendel: Monohibridismo

Em qualquer ser vivo, os gametas são células haploides, ou seja, possuem apenas um alelo de cada par existente nas células somáticas do indivíduo.

Dessa forma, na geração F_1 obtida pelos cruzamentos de linhagens puras AA e aa , todos os descendentes são híbridos, pois recebem um cromossomo com o alelo A e um com o alelo a , formando uma célula-ovo com genótipo Aa . Esses indivíduos produzem sementes lisas, entretanto, produzem dois tipos de gametas: os com alelo A e os com alelo a , em igual proporção.

Já na geração F_2 , que é obtida a partir da autofecundação de indivíduos da geração F_1 , temos as seguintes possibilidades na formação dos descendentes:

Tabela 1 – Representação do cruzamento resultante da autofecundação dos indivíduos da geração F_1 .

Gametas	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Fonte: Mendonça (2013).

Observando a [Tabela 1](#), nota-se que 50% dos descendentes são heterozigóticos e os outros 50% são homozigóticos, sendo 25% destes com o caráter dominante e 25% com o caráter recessivo. Isso significa que o caráter recessivo que estava “camuflado” na geração F_1 , de fato, reaparece na geração seguinte; tal fato é possível por conta dos cromossomos homólogos separarem-se na formação dos gametas. Assim, cada gameta contém apenas um dos alelos e quando ocorre a autofecundação dos indivíduos da geração F_1 , temos dois tipos de gametas: os que possuem o alelo A e os que possuem o alelo a .

Finalmente, Mendel formalizou a conclusão de suas análises:

...cada caráter é determinado por um par de fatores e estes se separam na formação dos gametas, que são sempre puros.

Esta afirmação ficou conhecida como a 1ª lei de Mendel ou lei do monohibridismo. Entretanto, há certos casos que não seguem os resultados previstos pela 1ª lei de Mendel, como os citados a seguir:

- **Codominância:** quando ambos os alelos são expressos em heterozigose, produzindo um terceiro fenótipo.
- **Dominância intermediária:** não há preferência em como os alelos expressam-se na heterozigose, e sim, uma “combinação” de seus fenótipos.
- **Polialelia:** quando há mais de dois alelos para um mesmo loco gênico.

3.1.2 A 2ª lei de Mendel: Di-hibridismo

Ainda tratando dos estudos e análises desenvolvidos por Mendel, o que fazer num caso em que se quer analisar duas características de um indivíduo ao mesmo tempo?

Retomando-se a situação do cruzamento de plantas de ervilhas analisado anteriormente, suponha-se que agora Mendel queira analisar tanto a forma quanto a cor da semente das ervilhas. Lembre-se que os alelos que determinam cada uma dessas características estão situados em pares de cromossomos homólogos distintos, ou seja, nessa análise Mendel está considerando 2 pares de cromossomos.

Observe, por exemplo, o cruzamento de uma planta que produz ervilhas lisas e amarelas, homozigótica para ambos os caracteres (leve em consideração que esses alelos são dominantes) e outra, que produz ervilhas rugosas e verdes, também homozigótica para ambos os caracteres (leve em consideração que esses caracteres são recessivos).

Tem-se a geração parental: $AABB \times aabb$, cujos gametas produzidos (geração P_1) serão AB e ab . Onde:

A – alelo que determina a característica lisa nas sementes.

a – alelo que determina a característica rugosa nas sementes.

B – alelo que determina a característica cor amarela nas sementes.

b – alelo que determina a característica cor verde nas sementes.

Nota-se então, que todos os indivíduos da geração P_1 , resultantes do cruzamento acima, são heterozigóticos ($AaBb$).

Define-se, dessa forma, o conceito de di-híbrido: os indivíduos da geração P_1 são híbridos para as duas características analisadas. Genericamente, utiliza-se o termo poli híbridos para se referir a 3 ou mais caracteres.

Como seria então, o resultado de um cruzamento entre os indivíduos da geração P_1 descrita anteriormente?

Observando-se que a Geração P_1 trata do cruzamento: $AaBb \times AaBb$, como os gametas são haploides, eles possuem um alelo condicionando à forma da semente e outro, à cor. Dessa forma, há 4 combinações gênicas nos gametas dos indivíduos di-híbridos com igual probabilidade de ocorrer: AB , Ab , aB e ab .

Considerando as chances de cruzamento entre quaisquer gametas (masculino e feminino) temos as seguintes possibilidades:

Tabela 2 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre indivíduos di-híbridos da geração P_1 .

GAMETAS	AB	Ab	aB	ab
AB	$AABB$	$AABb$	$AaBB$	$AaBb$
Ab	$AABb$	$AAbb$	$AaBb$	$Aabb$
aB	$AaBB$	$AaBb$	$aaBB$	$aaBb$
ab	$AaBb$	$Aabb$	$aaBb$	$aabb$

Fonte: Mendonça (2013).

Nota-se, através da [Tabela 2](#), que há um total de 16 possibilidades, constituindo 9 genótipos diferentes.

Tabela 3 – Frequências genótípicas observadas no cruzamento representado na [Tabela 2](#).

Genótipo	Frequência
$AABB$	1
$AABb$	2
$AAbb$	1
$AaBB$	2
$AaBb$	4
$Aabb$	2
$aaBB$	1
$aaBb$	2
$aabb$	1

Entretanto, há apenas 4 fenótipos representados na [Tabela 3](#): semente lisa e amarela (condicionada pelos genótipos *AABB*, *AABb*, *AaBB* e *AaBb*), lisa e verde (condicionada pelos genótipos *AAbb* e *Aabb*), rugosa e amarela (condicionada pelos genótipos *aaBB* e *aaBb*) e rugosa e verde (condicionada pelo genótipo *aabb*).

É importante frisar que tal divisão dos genótipos se dá devido ao fato das características analisadas estarem em diferentes pares de cromossomos homólogos e essa separação refere-se aos cromossomos e não aos genes.

Mendel então, enunciou sua 2ª lei: “*Na formação dos gametas, os alelos existentes em um par de cromossomos homólogos separam-se independentemente de qualquer outro par de alelos em outro par de homólogos.*” Esta lei é válida tanto para os di-híbridos, quanto os poli-híbridos.

Posteriormente, devido aos avanços no estudo da genética, surgiram casos que não contemplavam a lei do di-hibridismo, como, por exemplo,

- **pleiotropia:** um par de alelos condiciona mais de um caráter.
- **interação gênica:** um caráter é condicionado por mais de um par de alelos.

3.2 A Genética pós – Mendel e um caso de interação gênica particular: a herança quantitativa

Após os vários avanços na área de pesquisas a respeito da hereditariedade e descobertas sobre o DNA e RNA; entre o final do século XIX e início do século XX, o biólogo William Bateson, vários anos após a morte de Mendel, redescobriu os trabalhos deste e tornou-se um defensor do “Mendelismo”. É atribuído a Bateson, a invenção do termo “genética” (do grego *geno*; fazer nascer) e a partir deste, o emprego e difusão de outros termos como gene, genótipo, fenótipo e alelo cresceram gradativamente.

Outro biólogo, Reginald Punnett (1875 – 1967), ciente dos trabalhos de Bateson, interessou-se pelo estudo da genética e, pela primeira vez, simulou o cruzamento de indivíduos através de um diagrama que levaria seu nome, o quadro de Punnett, usado até hoje em cálculos de probabilidades em genética, já mencionado anteriormente.

Tabela 4 – Quadro de Punnett representando o cruzamento entre dois indivíduos heterozigóticos para um determinado genótipo.

Gametas	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Outros avanços importantes nos estudos da genética também foram alcançados nesse

período. Por exemplo, os fenótipos de plantas de ervilhas estudadas por Mendel que eram sempre bem definidos – cor verde ou amarela, semente lisa ou rugosa, etc; consideradas variações fenotípicas descontínuas. Contudo, estudos posteriores mostraram que certas características possuem variações fenotípicas contínuas – a pele humana é um exemplo clássico: os fenótipos variam continuamente do branco ao preto. Neste caso, temos um caso de interação gênica denominado **herança quantitativa**.

Nesta situação, 2 ou mais pares de alelos situados em cromossomos diferentes somatizam-se e, com isso, o fenótipo resultante dependerá da quantidade de alelos que contribuem, efetivamente, com esse efeito cumulativo e não existe uma relação de dominância e recessividade simples entre eles.

Acredita-se que a cor da pele humana seja determinada por pelo menos 2 pares de alelos localizados, cada um, em um par de cromossomos homólogos.

Considere então, *N* e *B* os alelos efetivos, ou seja, aqueles que contribuem igualmente para o aumento de pigmentação da pele (*N* representando o alelo para a cor negra e *B* para a cor branca) e *n* e *b* os alelos não efetivos, ou seja, aqueles que não provocam a síntese de pigmentos além de uma quantidade mínima.

Assim, obtemos os diferentes fenótipos representados a seguir.

Tabela 5 – Fenótipos da cor da pele humana

Genótipos	Alelos efetivos	Alelos não efetivos	Fenótipos
<i>NNBB</i>	4	0	Negro
<i>NNBb</i> <i>NnBB</i>	3	1	Mulato escuro
<i>NNbb</i> <i>NnBb</i> <i>nnBB</i>	2	2	Mulato médio
<i>nnBb</i> <i>Nnbb</i>	1	3	Mulato claro
<i>nnbb</i>	0	4	Branco

Fonte: Mendonça (2013).

Conclui-se então, a partir dos dados apresentados na [Tabela 5](#), que quanto maior o número de alelos efetivos, maior será a síntese de pigmentos e, em decorrência, mais escura será a pele; inversamente, quanto maior o número de alelos não efetivos, menor será a síntese de pigmentos e, em decorrência, mais clara a cor da pele.

3.3 O conceito de *linkage* e os trabalhos de Morgan

Em seus estudos, apesar de não ter confirmado em vida, Mendel sempre considerou as regras mencionadas em suas 2 principais leis – a separação independente e existência de um único alelo na formação dos gametas. Entretanto, estudos posteriores comprovaram que um mesmo cromossomo guarda vários genes e estes, não se separariam na formação dos gametas. Apenas se ocorresse um processo de permutação. Nestas situações, em que se consideram genes situados num mesmo cromossomo, define-se o conceito de vinculação ou ligação gênica, mais conhecido por *linkage*.

O geneticista Thomas Hunt Morgan (1866 – 1945) realizou diversos experimentos envolvendo cruzamentos entre linhagens de *Drosophila melanogaster*, conhecidas como moscas-da-fruta, que foram fundamentais para compreensão e difusão dos conceitos ligados a herança com vinculação gênica.

O mapeamento do genoma da drosófila e de outras espécies, a humana inclusive, possibilitou uma análise mais minuciosa da quantidade de genes armazenada em cada cromossomo e como estes genes estão vinculados uns aos outros.

A pequena mosca-da-fruta pode apresentar, por exemplo, dois fenótipos em relação ao caráter “cor do corpo”: cinza e preto, sendo o alelo que condiciona a cor cinza (P) dominante em relação ao alelo que condiciona a cor preta (p). E em relação ao caráter “tamanho da asa”, estas também apresentam dois fenótipos: asas normais e vestigiais, sendo o alelo que condiciona asa normal (V) dominante em relação ao alelo que condiciona asa vestigial (v). Só que estes dois pares de alelos, que condicionam a cor do corpo e o tamanho da asa, estão ligados, isto é, situam-se num mesmo par de cromossomos homólogos.

Considere agora o cruzamento entre duas drosófilas em que ambas estão em homozigose nos dois pares de alelos citados anteriormente. A geração M_1 resultante desse cruzamento será composta apenas por moscas de cor cinza e asas normais, com genótipo $PpVv$.

Na **Geração parental**: $PPVV \times ppvv$, onde cada indivíduo gera apenas os gametas PV e pv , tem-se, por decorrência a **Geração Filial**: $PpVv$ (ou $PVpv$).

O que ocorreria então, no cruzamento entre os indivíduos di-híbridos da geração M_1 ? Se a segunda lei de Mendel fosse válida, os dois pares de alelos estariam localizados em pares distintos de cromossomos homólogos, e seriam formados quatro tipos de gametas: PV , Pv , pV e pv . Contudo, os caracteres cor do corpo e tamanho da asa, em drosófilas, estão no mesmo par de cromossomos homólogos e formam-se apenas dois tipos de gametas: PV e pv .

Tabela 6 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre indivíduos di-híbridos de drosófilas da geração M_1 .

Gametas	<i>PV</i>	<i>pv</i>
<i>PV</i>	<i>PPVV</i> ou <i>PVPV</i> (Cinza/asa normal)	<i>PpVv</i> ou <i>PVpv</i> (Cinza/asa normal)
<i>pv</i>	<i>PpVv</i> ou <i>PvpV</i> (Cinza/asa normal)	<i>ppvv</i> ou <i>pvpv</i> (Preto/asa vestigial)

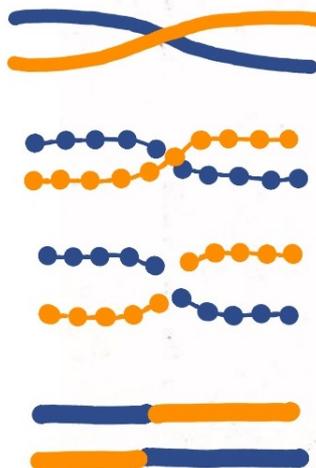
Fonte: [Mendonça \(2013\)](#).

Assim, no cruzamento entre os indivíduos di-híbridos da geração M_1 expresso pela [Tabela 6](#), a geração M_2 resultante apresenta apenas 3 genótipos e dois fenótipos diferentes e as proporções entre os mesmos são 25% para *PVPV*, 50% para *PvpV* e 25% para *pvpv*.

Outra situação que pode ocorrer nesse cruzamento é a permutação ou *crossing-over* entre cromátides homólogas exatamente no trecho onde estão os locos de *PV* e *pv*.

Deve-se ter em mente que, antes da divisão celular, quando a célula está em interfase, ocorre a duplicação dos cromossomos, formando as cromátides irmãs, que permanecem ligadas uma à outra pelo centrômero.

Figura 1 – Ilustração do cruzamento cromossômico da autoria de Thomas Hunt Morgan (1916)



Fonte: Adaptada de [Wikipédia \(2020\)](#).

Na prófase 1 da meiose, ocorre o emparelhamento dos cromossomos homólogos, que se condensam tornando possível observar a tétrade, que é o conjunto das quatro cromátides, duas de cada cromossomo. Note que cromátides originadas de cromossomos homólogos são, por decorrência, cromátides homólogas.

Ainda durante a prófase 1 da meiose, duas cromátides homólogas podem sofrer ruptura nos mesmos locais e ocorrer então a permuta de uma parte de sua estrutura, ficando cada uma

com um pedaço da outra. A seguir temos um esquema simplificado de como esse processo ocorre.

Voltando à situação de cruzamento dos indivíduos di-híbridos da geração M_1 ; em função da permutação que pode ocorrer, surgem gametas recombinantes Pv e pV . Assim, na geração M_2 , apareceriam moscas de corpo cinza com asas vestigiais e moscas pretas de asas normais (fenótipos recombinantes).

Esse processo de permutação, representado na [Figura 1](#) da ([WIKIPÉDIA, 2020](#)), possui uma taxa de ocorrência que é determinada pela distância que separa esses genes no cromossomo: quanto mais distantes, maior a probabilidade de que ocorra a permutação. Essa distância entre os dois genes ligados é medida em unidades de medida chamadas morganiídeos, em homenagem a Morgan o precursor de análises sobre cruzamentos de drosófilas que obedeciam essas leis.

3.4 A Genética de populações e o modelo de Hardy-Weinberg

A investigação da dinâmica dos genes nas populações naturais, buscando a elucidação dos mecanismos que alteram a sua composição gênica ou apenas a frequência genotípica pelo aumento da homozigose, fizeram o médico alemão Wilhelm Weinberg (1862 – 1937) e o matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947) chegarem independentemente, e quase que simultaneamente, àquilo que seria conhecido como a lei do equilíbrio de Hardy e Weinberg ([BEIGUELMAN, 2008](#)).

3.4.1 Considerações iniciais

Como o conteúdo genético de uma população se transforma ao longo das gerações?

Para responder a essa pergunta, Hardy e Weinberg consideraram as seguintes hipóteses:

H_1) O número de indivíduos na população é infinito;

H_2) A análise é feita sob um locus gênico;

H_3) Dois alelos A e a são observados para esse locus;

H_4) A fertilidade e sobrevivência são independentes do genótipo (não ocorre seleção natural);

H_5) Não há mutação;

H_6) A frequência de genótipos de indivíduos na geração n são obtidos proporcionalmente ao produto das frequências dos genótipos na geração $n - 1$ (*Random mating*). Isto irá impor uma dinâmica temporal no modelo.

3.4.2 O modelo de Hardy-Weinberg

Considere dois alelos A e a sendo observados num locus gênico da população, ou seja, seus genótipos possíveis são AA , Aa e aa . Sejam f_n a frequência do gene A na geração n , g_n a frequência do gene a na geração n e x_n , y_n e z_n as frequências dos genótipos AA , Aa e aa na geração n respectivamente. Então, segundo as hipóteses da [Subseção 3.4.1](#):

$$f_n = x_{n-1} + 0,5y_{n-1} = (f_{n-1})^2 + 0,5f_{n-1} \cdot g_{n-1} = f_{n-1} \quad (3.1)$$

De modo análogo, tem-se que $g_n = g_{n-1}$. Desta forma, se f_0 e g_0 são as frequências na geração inicial, então $f_n = f_0$ e $g_n = g_0$, para todo n natural. Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= (f_n)^2 = (f_0)^2 \\ y_n &= 2f_n \cdot g_n = 2f_0 \cdot g_0 \\ z_n &= (g_n)^2 = (g_0)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mostrando que

"...as frequências alélicas não se alteram ao longo das gerações, assim como as frequências genotípicas, a partir da primeira geração, também permanecem inalteradas."(BEIGUELMAN, 2008)

Esse resultado ficou conhecido então, como o modelo de Hardy-Weinberg, ou simplesmente, lei de Hardy-Weinberg. Sendo f a frequência do gene A na população, a frequência total de homozigotos na mesma (sejam eles AA ou aa), denominada homozigosidade, é definida por

$$G = f^2 + (1 - f)^2$$

Como as frequências entre homozigóticos, representada por G e heterozigóticos, representada por H , na população são sempre complementares, isto é, $H + G = 1$, a frequência de heterozigotos, denominada heterozigosidade, é definida por

$$H = 1 - G = 2f \cdot (1 - f)$$

Ao longo dos próximos capítulos, poderão ser observadas as relações intrínsecas entre o modelo de Hardy – Weinberg e o desenvolvimento do Binômio de Newton e, em decorrência, o modelo de distribuição binomial em Estatística.

O BINÔMIO DE NEWTON E A TEORIA DAS PROBABILIDADES

Durante os estudos e análises discutidas ao longo desta dissertação, uma série de conceitos e definições matemáticas foram necessárias para a melhor compreensão dos estudantes envolvidos para o tratamento da modelagem proposta, o que pretende-se apresentar ao longo deste capítulo.

4.1 O produto entre dois números reais

Considere a , b e c números reais, a multiplicação em \mathbb{R} satisfaz as seguintes propriedades (LIMA, 2013, p.28-29):

I) Propriedade comutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (4.1)$$

conhecida popularmente como a “ordem dos fatores não altera o produto”.

II) Propriedade associativa:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (4.2)$$

III) Propriedade distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (4.3)$$

4.2 Os princípios da contagem

Definição 1. Seja A um conjunto. Denotamos por $|A|$ a quantidade de elementos pertencentes ao conjunto A , que será definido como a cardinalidade de A (MORGADO; CARVALHO, 2015).

Em exercícios de contagem, sempre consideram-se 2 princípios básicos, o aditivo e o multiplicativo descritos a seguir segundo [Morgado et al. \(1991\)](#).

- **O princípio aditivo:** Se A e B são dois conjuntos disjuntos com , respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.
- **O princípio multiplicativo:** Se um evento A pode ocorrer de m maneiras distintas e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é mn . Na linguagem de conjuntos, mn representa o número de elementos (cardinalidade) do conjunto $A \times B$ (lê-se A cartesiano B), que é o conjunto dos pares ordenados (a, b) onde a pertence a A e b pertence a B .

Tanto o princípio aditivo quanto o multiplicativo podem ser estendidos para um número finito qualquer de conjuntos.

- **Extensão do princípio aditivo:** Se A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a quantidade de elementos da união desses conjuntos é definida por

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n a_i \quad (4.4)$$

Onde a notação $|A|$ indica a cardinalidade de um conjunto A considerado.

- **Extensão do princípio multiplicativo:** Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ maneiras distintas.

4.3 O Binômio de Newton

Em análise combinatória, um dos principais problemas envolvendo contagem é o que aborda a seleção de k objetos distintos dentre um grupo de n objetos distintos ([SOUZA et al., 2014](#)).

Observe que, para responder a este problema, começamos escolhendo um primeiro objeto, depois o segundo, e assim sucessivamente até o k -ésimo. A primeira escolha pode ser feita de n maneiras distintas. Na segunda, pode-se optar por $n - 1$ objetos, pois o primeiro já foi selecionado. Para o terceiro, haverá $n - 2$ escolhas possíveis e, repetindo-se o processo até o k -ésimo objeto haverá $n - (k - 1) = n - k + 1$ escolhas possíveis. Contudo, note que, vários grupos com os mesmos objetos foram considerados mais de uma vez. Por exemplo, o conjunto de objetos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ e o conjunto de objetos $\{x_2, x_1, x_3, \dots, x_k\}$ possuem os mesmos elementos, mas, quando determina-se o primeiro, segundo, até o k -ésimo objeto escolhido está,

implicitamente, definindo-se uma ordem de escolha, que na realidade não é necessária nesse caso. Portanto, deve-se retirar as repetições cometidas ao considerar a ordenação dos k objetos escolhidos, que é determinada, de acordo com o princípio multiplicativo por

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-(k-2)) \cdot (k-(k-1)) = k!$$

Note que, se $k = 0$, define-se $k! = 1$.

Assim, o número de formas que podemos selecionar k objetos distintos dentre um grupo de n objetos distintos é

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.5)$$

Esta é a definição para a combinação simples de n elementos tomados k a k , idêntica a definição de número binomial, que será tratada a seguir.

4.3.1 O triângulo de Pascal e os números binomiais

Definição 2. Chama-se número binomial, todo número da forma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4.6)$$

Com $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $k \leq n$.

A partir dos números binomiais, criou-se uma estrutura reunindo-os e dividindo-os em linhas e colunas, de modo que nas linhas, o índice k varia a partir de zero (denominador) e nas colunas, o índice n varia a partir de zero (numerador). Tal construção recebe o nome de *Triângulo de Pascal*.

$$\begin{array}{cccccc} \binom{0}{0} & & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{array} \quad (4.7)$$

Neste triângulo há várias propriedades interessantes relacionadas a sua estrutura, das quais salientam-se:

P1. Números binomiais complementares: Considere $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $k \leq n$. Então,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. Pela definição de número binomial, tem-se que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

□

P2. Relação de Stifel: Considere $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $k \leq n$. Então,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{(k+1)} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1+n}{(n-k)(k+1)} \right) \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \end{aligned}$$

Logo,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

P3. Soma dos elementos da n -ésima linha:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

Demonstração. Seja L_n a soma de todos os termos da n -ésima linha do triângulo de Pascal. Então

$$\begin{aligned}
 L_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\
 &= \binom{n}{0} + \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \\
 &\quad \text{(Extraíu-se o primeiro e último termos do somatório)} \\
 &= \binom{n}{0} + \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] \quad \text{(Pelo Item P2.)} \\
 &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \\
 &= \left[\binom{n-1}{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} \right] + \left[\binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right] \\
 &\quad \text{(Agrupando-se os termos de uma maneira conveniente a fim de} \\
 &\quad \text{re-introduzi-los no somatório)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \quad \text{(Ajustando os índices)} \\
 L_n &= 2L_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, nota-se que a soma das linhas do Triângulo de Pascal formam uma sequência de razão constante $q = \frac{L_n}{L_{n-1}} = 2$. Sendo assim, como o primeiro termo dessa progressão geométrica é $L_0 = 1$ concluímos que $L_n = L_0 q^n = 2^n$ (SOUZA *et al.*, 2014, p.19).

□

4.3.2 O Teorema Binomial

Levando em consideração a estrutura dos números binomiais, pode-se demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 1. (Teorema Binomial) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (4.8)$$

Demonstração. Por indução em n tem-se

- Para $n = 1$: $(x + y)^1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} x^{1-i} y^i = x + y = (x + y)^1$

- Supondo a sentença válida para $n = k$, provar-se-á sua validade para $n = k + 1$.

Note que $(x + y)^{k+1} = (x + y)(x + y)^k$

Supondo a sentença verdadeira para $n = k$, tem-se:

$$\begin{aligned} (x + y)(x + y)^k &= (x + y) \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i \right] = x \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i \right] + y \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^i \right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i+1} y^i \right] + \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1} \right] \end{aligned}$$

Retirando-se o primeiro termo do somatório da primeira parcela, tem-se

$$= x^{k+1} + \left[\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k-i+1} y^i \right] + \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1} \right]$$

E retirando-se o último termo do somatório da segunda parcela, obtém-se

$$= x^{k+1} + \left[\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k-i+1} y^i \right] + y^{k+1} + \left[\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1} \right]$$

Alterando os índices no somatório,

$$= x^{k+1} + \left[\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k-i+1} y^i \right] + y^{k+1} + \left[\sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} x^{k-i+1} y^i \right]$$

$$\text{Assim, } (x + y)^{k+1} = x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} x^{k-i+1} y^i$$

$$= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} x^{k-i+1} y^i \quad (\text{Pela Relação de Stifel})$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{k-i+1} y^i \quad (\text{Re-introduzindo os termos no somatório})$$

E esta é justamente a expressão do teorema para $n = k + 1$.

Logo,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

O que encerra a demonstração. (MORGADO; CARVALHO, 2015)

□

Exemplo: para $n = 2$, temos:

$$(x + y)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} x^k y^{2-k} = \binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2. \quad (4.9)$$

4.4 Probabilidades e eventos

Nos resultados apresentados ao longo dessa seção, principalmente nos que citam os eventos aleatórios, a teoria de probabilidades faz uso de várias definições e propriedades da teoria dos Conjuntos descritos por Melo (2017), onde, sendo A e B dois conjuntos quaisquer, tem-se que

Definição 3. $A \cup B$: união dos eventos A e $B \Rightarrow$ representa a ocorrência **de pelo menos um** dos eventos A ou B .

Definição 4. $A \cap B$: intersecção dos eventos A e $B \Rightarrow$ representa a ocorrência **simultânea** dos eventos A e B .

Definição 5. Dois eventos, A e B , são **disjuntos ou mutuamente exclusivos** quando não tem elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$

Definição 6. Dois eventos, A e B , são **complementares** se a sua intersecção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$. O conjunto complementar de A é representado por A^c .

Em Estatística, de um modo geral, o interesse sempre encontra-se em realizar um levantamento de dados a cerca de algum aspecto, denominado como **variável**, referente a um conjunto de elementos que é definido como **população**. Entretanto, na grande maioria das vezes, o pesquisador não tem acesso a todos os dados desse conjunto e, por conta disso, elege um subconjunto menor de elementos, denominado **amostra** para realizar suas análises e inferir propriedades e/ou características a cerca da população (MELO, 2017).

A cerca da variável analisada, essa pode ser classificada como:

- **Qualitativas:** que correspondem a uma qualidade (ou atributo) do indivíduo pesquisado; podendo ser sub-divididas em **nominal** - onde não há nenhuma possível ordenação entre os resultados coletados, por exemplo: cor do cabelo, sexo, nacionalidade; e em **ordinal** - quando os resultados apresentam alguma ordem, por exemplo: nível de proficiência em um idioma, grau de estágio de uma doença, tom da pele.
- **Quantitativas:** que correspondem a uma quantidade resultante de uma contagem ou mensuração a cerca da variável analisada; sendo sub-divididas em **discreta** - onde os possíveis valores formam um conjunto finito ou enumerável de números (resultantes de

uma contagem), por exemplo: número de irmãos, quantidade de animais de estimação; e em *contínua* - onde os possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais (resultantes de uma mensuração), por exemplo: estatura, peso, densidade.

A partir da análise dos dados coletados da amostra, determinam-se as *frequências absoluta* e *relativa* da variável observada (a primeira considera o número de ocorrências da variável observada, enquanto que a segunda, considera o percentual, ou seja, a proporção de ocorrências da variável em relação à amostra).

A *probabilidade* é definida, segundo Melo (2017), como uma medida de incerteza associada aos resultados de um *experimento aleatório* - procedimento que, ao ser repetido sob as mesmas condições, pode fornecer resultados diferentes. Para entender melhor como essa medida funciona, é preciso apresentar certos elementos que sustentam a teoria das probabilidades definidos por Souza *et al.* (2014).

Definição 7. Seja Ω o conjunto dos possíveis resultados de um experimento aleatório. Uma classe de eventos aleatórios \mathcal{F} é um conjunto tal que

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Seja $A \subset \Omega$. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

Definição 8. Seja o espaço amostral Ω de um experimento aleatório e \mathcal{F} uma classe de eventos aleatórios. Se $A \in \mathcal{F}$ então, A é um evento aleatório.

Definição 9. A função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é chamada função de probabilidade e é regida pelos seguintes axiomas:

AXIOMA 1: Se $A \in \mathcal{F}$, então $0 \leq P(A) \leq 1$.

AXIOMA 2: $P(\Omega) = 1$

AXIOMA 3: Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Definição 10. Dado Ω definimos modelo probabilístico como um espaço de três coordenadas (Ω, \mathcal{F}, P) , onde \mathcal{F} é uma classe de eventos aleatórios de Ω e P é uma função de probabilidade.

No caso de uma variável aleatória discreta, tem-se o resultado atribuído à proposição a seguir.

Proposição 2. Se $|\Omega| = n$ finito e \mathcal{F} o conjunto das partes de Ω , então $|\mathcal{F}| = 2^n$.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que o conjunto das partes Ω é uma classe de eventos. Seja A um conjunto formado por elementos de Ω . Então, $\Omega - A = A^c \subset \Omega$ o que significa que A^c é formado por elementos de Ω e, portanto, compõe o conjunto das partes. Considere os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \subset \Omega$, então $A_i \in \mathcal{F}$ conjunto das partes $\forall i \in \mathbb{N}$ e, além disso, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \Omega$, por isso pertence a \mathcal{F} . Logo, \mathcal{F} é uma classe de eventos de Ω . Agora basta contar os subconjuntos de Ω . Notamos que existe $\binom{n}{0} = 1$ subconjunto de Ω vazio, $\binom{n}{1} = n$ subconjuntos de Ω unitários, $\binom{n}{2}$ subconjuntos de Ω com dois elementos e assim por diante. Genericamente, os subconjuntos de Ω com k elementos totalizam $\binom{n}{k}$. Como \mathcal{F} é o conjunto das partes de Ω segue que,

$$|\mathcal{F}| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n},$$

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \text{ (Pelo Item P3.)}$$

$$|\mathcal{F}| = 2^n.$$

□

Algumas propriedades:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap \Omega = A$
4. $\emptyset^c = \Omega; \quad \Omega^c = \emptyset$
5. $A \cap A^c = \emptyset$
6. $A \cup A^c = \Omega$
7. $A \cup \emptyset = A; \quad A \cup \Omega = \Omega$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
10. $A \cup (A \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
11. Leis de Morgan: Sejam os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$. Então, são válidas:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k)^c \quad (4.10)$$

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)^c \quad (4.11)$$

4.4.1 Axiomas da Probabilidade

As proposições e propriedades a seguir são sustentadas naquelas apresentadas por [Souza et al. \(2014\)](#).

Proposição 3. Considere a tripla (Ω, \mathcal{F}, P) vinculada a um experimento aleatório qualquer. Tome $A, B \in \mathcal{F}$ e $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{F} . Demonstram-se pois, a validade das propriedades a seguir:

Propriedade 1: $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ sempre que $A_i \cap A_j = \emptyset$ com $i \neq j$.

Propriedade 2: $P(\emptyset) = 0$.

Propriedade 3:

$$P(A^c) = 1 - P(A). \quad (4.12)$$

Propriedade 4: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Propriedade 5: $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

Propriedade 6: $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - P\left[\bigcap_{k=1}^n (A_k)^c\right]$

Propriedade 7: $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^n P[(A_k)^c]$.

Propriedade 8: Se $A \subset B$, então $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$.

Demonstração. Propriedade 1: Note que,

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^n A_k &= \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \emptyset \right) \\ \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= P\left[\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \emptyset\right)\right]. \end{aligned}$$

Como todos os conjuntos são disjuntos, pelo Axioma 3, temos,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) + \sum_{n+1}^{\infty} P(\emptyset) \\ P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(A_k). \end{aligned}$$

□

Propriedade 2: Devemos recorrer à Propriedade 1 e considerar a igualdade entre as probabilidades

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\Omega \cup \emptyset) \\ &= P(\Omega) + P(\emptyset); \text{ (Propriedade 1)} \\ \text{Disto, } P(\emptyset) &= P(\Omega) - P(\Omega) = 0 \end{aligned}$$

□

Propriedade 3: É claro que

$$\begin{aligned} \Omega &= A \cup A^c \\ P(\Omega) &= P(A \cup A^c); \text{ (Propriedade 1)} \\ P(\Omega) &= P(A) + P(A^c); \end{aligned}$$

para finalizar a prova basta aplicar o Axioma 2,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

□

Propriedade 4: Como $A \subset B$ vale a seguinte identidade.

$$B = A \cup (A^c \cap B).$$

Como a união é disjunta segue que,

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Por outro lado, $0 \leq P(A^c \cap B) \leq 1$. Ao somar $P(A)$ concluímos a demonstração

$$P(A) \leq P(A) + P(A^c \cap B) = P(B).$$

□

Propriedade 5: Considere a identidade

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup [A_2 \cap A_1^c].$$

Como $A_1 \cup [A_2 \cap A_1^c]$ é uma união disjunta ao aplicar a função de probabilidade temos,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c)$$

Mas, $A_2 \cap A_1^c \subset A_2$, então $P(A_2 \cap A_1^c) \leq P(A_2)$. O que implica em

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

A tese constata-se para $n = 2$. Suponha, por indução, que $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$. Então,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup A_{n+1}\right) \\ &\leq P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}); \text{ (Caso } n=2) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(A_{n+1}); \text{ (Hipótese de indução)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k). \end{aligned}$$

□

Propriedade 6:

Das leis DeMorgan, Propriedade 11, temos, $\bigcup_{k=1}^n A_k = \left[\bigcap_{k=1}^n (A_k)^c\right]^c$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= P\left(\left[\bigcap_{k=1}^n (A_k)^c\right]^c\right); \\ &= 1 - P\left[\bigcap_{k=1}^n (A_k)^c\right]. \end{aligned}$$

□

Propriedade 7:

Aplicando DeMorgan, Propriedade 11, segue a identidade, $\bigcap_{k=1}^n A_k = \left[\bigcup_{k=1}^n (A_k)^c\right]^c$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) &= P\left(\left[\bigcup_{k=1}^n (A_k)^c\right]^c\right); \text{ (Propriedade 3)} \\ &= 1 - P\left[\bigcup_{k=1}^n (A_k)^c\right]; \text{ (Propriedade 5)} \\ P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) &\geq 1 - \sum_{k=1}^n P[(A_k)^c]. \end{aligned}$$

□

Propriedade 8: Fazendo

$$\begin{aligned} B &= A \cup (A^c \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \\ &\Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) - P(A). \end{aligned}$$

□

4.4.2 Regra da adição de probabilidades

Ao calcular a probabilidade da união de dois conjuntos quaisquer A e B , temos a proposição a seguir.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração. Note que

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$

Como A e $B \cap A^c$ são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c). \quad (4.13)$$

Como $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$, $A \cap B$ e $B \cap A^c$ também são mutuamente exclusivos, logo,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c) \Rightarrow P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B). \quad (4.14)$$

Substituindo a [Equação 4.14](#) em [Equação 4.13](#) obtém-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

4.4.3 Probabilidade Condicional

Definição 11. Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Se $A, B \in \mathcal{F}$ e $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado B , representada por $P(A \setminus B)$, é

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tendo em vista os conceitos e definições apresentados ao longo deste capítulo, abordar-se-á a situação da oficina de estudos envolvendo as construções de analogias entre os tópicos vistos neste e no capítulo anterior - sobre Genética e suas definições.

OFICINA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Foi proposta uma oficina de estudos sobre conceitos envolvendo expressões algébricas e os processos de construção de modelos matemáticos para a Biologia, em especial, frisando diversos conceitos estudados em Genética e, em contrapartida, a utilização das definições em Genética como base para o melhor entendimento e assimilação das propriedades envolvendo operações elementares com expressões algébricas.

O público-alvo foram estudantes do 3º ano do ensino médio técnico do curso de Informática do Instituto técnico de Barueri “Brasílio Flores de Azevedo”, tendo em consideração o contato prévio com os conceitos de Probabilidade e Genética utilizados ao longo da oficina. O trabalho foi realizado ao longo do ano letivo de 2017 com os interessados – em torno de 10 alunos – durante o período da tarde (das 13 às 14 horas), uma vez por semana, num total de 22 encontros.

5.1 Metodologia

A oficina foi estruturada em forma de grupos de debate e aprofundamento a cerca de conceitos previamente estudados nas disciplinas de Biologia e Matemática ao longo dos 3 anos constituintes do ensino médio técnico.

Inicialmente, foram revisados conceitos importantes sobre Genética e Probabilidade – já descritos nos capítulos 2 e 3 deste trabalho – alguns estudados em anos anteriores. Após isso, os encontros iniciavam-se com a apresentação de uma situação-problema selecionada a partir do livro-texto utilizado nas aulas regulares do 3º ano do ensino médio técnico em Matemática ou em Biologia. A grande maioria das situações-problema apresentadas demandou cerca de 4 encontros cada uma para seu desenvolvimento e resolução, sendo que, ao longo das oficinas, foram apresentadas um total de 5 situações-problema principais.

5.2 O conceito de Gene e do quadro de Punnet como aliados no ensino-aprendizagem de operações com polinômios

Uma das primeiras propriedades abordadas no ensino de equações do 1º grau diz respeito a distributividade da multiplicação em relação à adição:

Sendo A , B e C números reais quaisquer,

$$A(B + C) = AB + AC \quad (5.1)$$

Situação-problema 1: Como ilustrar essa propriedade?

Motivação: os alunos queixavam-se muito a respeito das expressões pré-estabelecidas para os chamados Produtos Notáveis. Segundo os mesmos, eles não viam utilidade nas mesmas e consideravam seus resultados como uma “decoreba” - um termo utilizado pelos próprios alunos quando estes não entendem alguma propriedade, teorema e/ou conceito de alguma disciplina e, por conta disso, sentem-se “obrigados” a decorar os resultados da situação tratada.

Questionamento (feito pelos alunos): Por que

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (?) \quad (5.2)$$

e não,

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 \quad (?) \quad (5.3)$$

Ao se introduzir as operações elementares entre polinômios, grande parte das propriedades passa pelos estudantes de uma forma muito rápida e abstrata. Em diversos casos, o aluno associa diversos conceitos a fórmulas pré-estabelecidas, sem indagar sua veracidade ou confrontá-las.

Aproveitando-se da oportunidade de reflexão por parte dos alunos sobre a relevância das expressões algébricas em diferentes contextos e, a partir de conceitos extraídos da Genética, foi proposto uma analogia entre as operações elementares entre polinômios e as definições estudadas em Genética.

Observe primeiramente, uma abordagem a respeito da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

Considere os alelos A , B e C responsáveis por uma característica fictícia de um ser vivo de uma espécie. Num cruzamento entre 2 indivíduos dessa espécie, o primeiro apresenta apenas o alelo A para a característica fictícia analisada e o outro, apresenta os alelos B e C para essa mesma característica.

Pergunta (proposta pelo professor): Quais os genótipos resultantes do cruzamento entre os dois indivíduos descritos anteriormente?

Proposta de solução (elaborada pelos alunos): O 1º indivíduo só pode transferir o alelo A aos seus descendentes, já o 2º, pode transferir o alelo B ou o alelo C . Considerando-se que os descendentes dessa geração parental recebem um e apenas um alelo de cada progenitor, ocorre a seguinte situação

A	e	B ou C
alelo herdado do 1º indivíduo		alelos herdados do 2º indivíduo

Os genótipos possíveis serão portanto, AB ou AC .

Observe que, segundo os princípios aditivo e multiplicativo de contagem, podemos re-escrever a situação acima como a [Equação 5.1](#).

O que ilustra a veracidade e necessidade da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na abordagem envolvendo o cruzamento genético.

O interesse nesta abordagem é propiciar aos estudantes a observação da relações existentes entre as operações entre polinômios e os cruzamentos genéticos que seguem as leis de Mendel, onde, a partir do resultado obtido na análise do cruzamento entre os indivíduos, estabeleceu-se, de uma maneira natural, uma expressão algébrica que traduz a situação descrita.

Aproveitando a situação, retomou-se aqui, com os alunos, a análise dos possíveis genótipos dos descendentes de um cruzamento entre ervilhas rugosas (rr) e lisas (Rr), por exemplo, a partir da multiplicação entre polinômios.

Solução proposta (pelos alunos): a geração parental é composta por ervilhas rugosas – que contribuem apenas com o alelo r – e ervilhas lisas heterozigóticas – que contribuem com o alelo R ou o alelo r . Logo, num cruzamento entre esses indivíduos podemos obter o alelo r das ervilhas rugosas e o alelo R ou o alelo r das ervilhas lisas heterozigóticas:

$$(r + r).(R + r) = Rr + rr + Rr + rr = 2Rr + 2rr \quad (5.4)$$

Um dos alunos aqui sugeriu a transcrição de $(r + r)$ como simplesmente $2r$ e rr como r^2 , obtendo-se a expressão

$$2r.(R + r) = 2Rr + 2r^2$$

Ou seja, os possíveis genótipos resultantes do cruzamento descrito são Rr e rr .

Dessa forma, os alunos chegaram a conclusão de que o genótipo homozigótico pode ser representado algebricamente indicando-se as frequência de seus alelos simplesmente atribuindo-se um expoente no alelo que o representa.

Note que a esquematização do cruzamento acima via quadro de Punnet, descrito na [Tabela 7](#), fornece os mesmos genótipos dos descendentes.

Tabela 7 – Quadro de Punnet representando o cruzamento entre os indivíduos de genótipos Rr e rr

Gametas	r	r
R	Rr	Rr
r	rr	rr

Dessa forma, os alunos podem usar o quadro de Punnet para representar multiplicações entre binômios, evitando, dessa forma, a realização desse tipo de operação através da fórmula pré-estabelecida na [Equação 5.2](#) por exemplo:

$$1) (A + B).(A + C)$$

*	A	B
A	AA	AB
C	AC	BC

Logo,

$$(A + B).(A + C) = AA + AC + AB + BC = A^2 + AC + AB + BC.$$

$$2) (A + B)^2$$

Como $(A + B)^2 = (A + B).(A + B)$, então, pelo quadro de Punnet, tem-se

*	A	B
A	AA	AB
B	AB	BB

Portanto,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Observa-se nesses dois últimos exemplos um fato muito interessante: o tratamento da operação de multiplicação entre as expressões via Quadro de Punnet, evitou resultados gerados anteriormente através da [Equação 5.3](#). Assim, os próprios alunos afirmaram e concordaram sobre a necessidade do termo intermediário $2xy$ na [Equação 5.2](#).

Situação-problema 2: Como modelar a 2ª lei de Mendel?

Com base nos pressupostos que regem a genética Mendeliana, os alunos foram confrontados a, a partir dos dados coletados no estudo da 2ª lei de Mendel, traçar propostas e estratégias a fim de conseguir transpor as informações de cruzamentos envolvendo mais de uma característica analisada – obtidas inicialmente pelo quadro de Punnet e tabelação dos dados - no formato algébrico.

Os alunos foram então, orientados a retomarem a situação apresentada no capítulo 2, quando do cruzamento entre indivíduos dí-íbridos da geração P_1 , $AaBb \times AaBb$, na qual fora estudado que, os pares de alelos estão localizados em cromossomos diferentes, que sofrem disjunção independente durante a meiose. Assim, concluíram que poderiam interpretar o cruzamento $AaBb \times AaBb$ como $(Aa \times Aa)$ e $(Bb \times Bb)$ – já que os eventos analisados representam características independentes.

Dessa forma, o 1º indivíduo transmite o alelo A ou a para a primeira característica analisada e o alelo B ou b para a segunda característica analisada, idem para o 2º indivíduo.

Um dos estudantes participantes da situação analisada sugeriu aproveitarem e utilizarem as relações provenientes dos princípios aditivo e multiplicativo, obtém-se

$$(A + a) \cdot (A + a) \cdot (B + b) \cdot (B + b) =$$

$$(A + a)^2 \cdot (B + b)^2 =$$

$$(A^2 + 2Aa + a^2) \cdot (B^2 + 2Bb + b^2) =$$

$$A^2B^2 + 2A^2Bb + A^2b^2 + 2AaB^2 + 4AaBb + 2Aab^2 + a^2B^2 + 2a^2Bb + a^2b^2. \quad (5.5)$$

Os genótipos resultantes do cruzamento são 9: $AABB$, $aaBb$ e $aabb$, cujos coeficientes de cada um dos termos algébricos que os representa coincide com a frequência genotípica de cada um dos mesmos. Já os fenótipos resultantes são 4: os dominantes para ambas as características, os dominantes para a 1ª característica e recessivos para a 2ª, os recessivos para a 1ª e dominantes para a 2ª e os recessivos para ambas.

Foi sugerida ainda, como atividade extra aos estudantes interessados, uma reflexão para estimar as frequências genotípicas de um cruzamento onde analisam-se 3 pares de genótipos. Exemplo: $AaBbCc \times AaBbCc$.

No livro-texto de Biologia utilizado pelos alunos, citam-se duas expressões para o cálculo do número de genótipos e fenótipos obtidos num cruzamento respeitando a 2ª lei de Mendel

- **Número de fenótipos** : $N_f = 2^n$

- **Número de genótipos**: $N_g = 3^n$

onde n é o número de pares de alelos considerados no cruzamento.

Questionamento (proposto pelo professor): Mas de onde vem essas expressões? Como obtê-las?

Os estudantes elaboraram então, a [Tabela 8](#) para analisar os números de fenótipos e genótipos em alguns exemplos de cruzamentos.

Tabela 8 – Frequências genótípicas e fenotípicas de um cruzamento em função do número de pares de alelos considerados.

Número de pares de alelos analisados no cruzamento	Número de genótipos resultantes	Número de fenótipos resultantes
1	3	2
2	9	4
3	27	8

Observou-se então que, como é válida a 2ª lei de Mendel nos cruzamentos analisados, os pares de alelos representando cada característica considerada tem formação independente, portanto, para cada característica analisada temos as seguintes possibilidades:

Genótipos diferentes: AA (AA e Aa produzem o mesmo fenótipo)
 Aa
 aa

Logo, para cada característica analisada, temos 3 possibilidades de genótipos e 2 possibilidades de fenótipos; como estamos generalizando a situação para uma quantidade n de características analisadas, temos então as duas expressões obtidas para N_f e N_g .

Situação-problema 3: Na análise de um cruzamento, como calcular a frequência de apenas 1 fenótipo em específico? Por exemplo, num cruzamento entre dois indivíduos di-híbridos ($AaBb \times AaBb$) qual a frequência do fenótipo em que ambos os pares de alelos manifestam o caráter dominante?

Os estudantes já haviam deduzido que os coeficientes que multiplicam cada um dos genótipos na [Equação 5.5](#) representam a frequência desse mesmo genótipo. Entretanto, não conseguiram concluir a respeito de como calcular separadamente essa frequência sem realizar todas as operações descritas na [Equação 5.5](#), mas concordaram que, de acordo com a quantidade de pares de alelos analisados, ficaria “inviável” realizar as operações uma a uma para achar os coeficientes de cada um dos genótipos resultantes do cruzamento em questão.

A partir dessas afirmações, os alunos construíram a [Tabela 9](#) a seguir, a fim de elencar os diferentes fenótipos resultantes do cruzamento expresso pela [Equação 5.5](#).

Tabela 9 – Proporções fenotípicas após o cruzamento dos indivíduos di-híbridos da geração P_1 .

Proporções fenotípicas	9 dominantes para ambas as características	3 dominantes para apenas a primeira característica	3 dominantes para apenas a segunda característica	1 recessivo para ambas as características
Proporções genótípicas	1 AABB 2 AaBB 2 AABb 4 AaBb	1 AAAb 2 AAbb	1 aaBB 2 aaBb	1 aabb
Total	9 A_B_	3 A_bb	3 aaB_	1 aabb

Dessa forma, os estudantes puderam encontrar, finalmente, a proporção fenotípica 9 : 3 : 3 : 1 descrita por Mendel em seus trabalhos. É muito interessante perceber junto aos alunos que, como o cruzamento foi esquematizado algebricamente pelos mesmos então, independentemente das 2 características tomadas para análise, ter-se-á sempre estas mesmas proporções.

Um estudante sugeriu que, como as proporções fenotípicas num cruzamento considerando-se o monoibridismo são sempre na razão de 3 : 1, como já descrito pela [Tabela 4](#); então, a proporção 9 : 3 : 3 : 1 poderia ser interpretada como um "produto" entre duas proporções 3 : 1 através da propriedade distributiva, ou seja,

$$(3 : 1) \cdot (3 : 1) = (9 : 3 : 3 : 1)$$

Apesar disso, o grupo não concordou de forma unânime sobre esta abordagem de "multiplicação entre as proporções fenotípicas ser sempre válido ou não.

5.3 As ligações intrínsecas entre a genética e o binômio de Newton

Situação-problema 4: Num exercício sobre probabilidades, tem-se o enunciado a seguir:

“Um casal deseja ter 3 filhos. Considerando-se que as chances de nascimento entre meninos e meninas é igual, qual a probabilidade deste casal ter 2 bebês do sexo masculino?”

Observou-se, então, a resolução de um estudante do 3^o ano do ensino médio durante a oficina:

“O casal terá 3 filhos, dos quais 2 deseja-se que sejam meninos”. Como a ordem não importa neste exercício, fixa-se as probabilidades de nascimentos dos 2 meninos e de 1 menina. Logo,

$$P(X = 2H) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad (5.6)$$

Note que o aluno levou em consideração a “ausência de ordem” (sempre haverá 2 meninos e 1 menina), o que o leva ao erro. É muito comum os alunos basearem-se na regra: “a ordem dos elementos é ou não relevante no exercício?”, inclusive muitos professores valem-se dessa regra para explicar em quais momentos usa-se a fórmula de arranjos outrora, a de combinações de elementos.

Voltando ao exercício proposto, é necessário perceber que há sim uma ordem implícita nesses nascimentos, pois eles não ocorrem simultaneamente. Entretanto, o aluno memorizou a regra que associa o uso da fórmula de arranjo de elementos quando da relevância da ordem dos elementos no exercício. Contudo, observe o raciocínio de outro aluno que recorreu ao uso da fórmula de arranjos simples no mesmo exercício:

“Há 3 opções de ordem para os nascimentos, desses, deseja-se selecionar 2 para o nascimento de meninos, logo, isso recorre a um arranjo de 3 elementos, tomados 2 a 2, obtendo-se 6 formas de organizar os nascimentos dos 2 meninos dentre os 3 possíveis.”

Entretanto, logo em seguida, o aluno contabilizou o total de arranjos possíveis de 3 elementos tomados 3 a 3 – que equivale a permutação de 3 elementos distintos – identicamente igual a 6. Portanto, haveria uma probabilidade de 100% de nascimento de 2 indivíduos do sexo masculino, o que, obviamente, gerou estranhamento imediato no aluno.

Finalmente, temos um último caso de resolução por parte de um terceiro estudante que abordou o exercício da seguinte forma:

“Considere H_1, H_2 e H_3 como as ocorrências dos nascimentos dos primeiro, segundo e terceiro meninos, respectivamente; e, da mesma forma, M_1, M_2 e M_3 como as ocorrências dos nascimentos das primeira, segunda e terceira meninas, respectivamente”. Como estamos analisando 3 nascimentos, temos as seguintes possibilidades:

Tabela 10 – Possibilidades de sexos para os nascimentos de 3 filhos de um casal.

1º nascimento	2º nascimento	3º nascimento
H_1	H_2	H_3
H_1	H_2	M_1
H_1	M_1	H_2
H_1	M_1	M_2
M_1	H_1	H_2
M_1	H_1	M_2
M_1	M_2	H_1
M_1	M_2	M_3

A partir da análise da [Tabela 10](#), podemos concluir que há 3 casos em que ocorre o nascimento de 2 bebês do sexo masculino e 1 do sexo feminino, dentre 8 casos possíveis. Portanto, a probabilidade será de 3 em 8 ou 37,5%.

Observe que a tática adotada pelo terceiro aluno de analisar todas as possibilidades de sexo dos 3 bebês que o casal poderia ter foi a única que obteve a resposta esperada do exercício. Contudo, o método utilizado demandou a análise de cada caso de sexo do bebê nos nascimentos, o que demandou um tempo maior durante a resolução.

Apresentando a resolução feita pelo terceiro aluno, os demais indagaram sobre alguns aspectos, que foram discutidos pelo mesmo grupo de estudantes:

Questionamento 1. Se a ordem dos nascimentos é relevante, então a sequência de nascimentos $H_1 - H_2 - M_1$ seria diferente da sequência $H_2 - H_1 - M_1$?

Questionamento 2. Se a ordem dos nascimentos é relevante, por que não utiliza-se a fórmula de arranjos simples?

Questionamento 3. Haveria alguma forma de modelar os dados apresentados na [Tabela 8](#) a fim de sistematizar algebricamente a situação?

Questionamento 4 (proposto pelo professor). Seria viável a resolução apresentada pelo terceiro aluno, numa situação que estamos interessados em analisar a ocorrência de nascimento de dois indivíduos do sexo masculino dentre 10 nascimentos possíveis? E dentre 100 nascimentos possíveis? Qual a melhor estratégia a se tomar na análise de uma quantidade alta de nascimentos observados?

Em seguida, apresenta-se um resumo da discussão a cerca das respostas aos questionamentos.

Questionamento 1. O índice 1 e 2 que aparece em H_1 e H_2 , referem-se ao nascimento do 1º e 2º bebê do sexo masculino, respectivamente. Portanto, a sequência $H_2 - H_1 - M_1$ não faria sentido nesse contexto.

Questionamento 2. A fórmula de arranjos simples consideraria os termos H_1 , H_2 e H_3 (assim como M_1 , M_2 e M_3) como termos diferentes entre si, porém, ao construí-los, a diferenciação foi feita em relação ao número de vezes que os nascimentos de um bebê de determinado sexo ocorre, ou seja, a frequência em que ocorrem. Portanto, ao tomar as sequências de nascimentos $H_1 - H_2 - M_1$, $H_1 - M_1 - H_2$ e $M_1 - H_1 - H_2$ representam a mesma situação – o nascimento de 2 bebês do sexo masculino e 1 do sexo feminino.

Questionamento 3. Os alunos anotaram todos os casos possíveis de sexo no nascimentos dos bebês apresentados na [Tabela 11](#):

Tabela 11 – Análise de dados obtidos através da [Tabela 8](#).

Ocorrências	Frequência das ocorrências	Sequências associadas
3 meninos	1	$H_1 - H_2 - H_3$
2 meninos e 1 menina	3	$H_1 - H_2 - M_1$, $H_1 - M_1 - H_2$, $M_1 - H_1 - H_2$
2 meninas e 1 menino	3	$M_1 - M_2 - H_1$, $M_1 - H_1 - M_2$, $H_1 - M_1 - M_2$
3 meninas	1	$M_1 - M_2 - M_3$

Observou-se então, a possibilidade de 4 ocorrências/possibilidades para o sexo dos bebês, sendo que estes, estão distribuídos na frequência 1 – 3 – 3 – 1, num total de 8 sequências distintas para a determinação do sexo.

Após essa primeira coleta de dados, buscou-se alguma forma de obter esses dados sem a construção das tabelas. Os alunos foram orientados a se basearem em algum conceito intuitivo de probabilidade em relação a ocorrência do sexo masculino ou feminino em um nascimento aleatório observado.

Questionamento 4. Todos os alunos envolvidos concordaram de maneira unânime sobre o fato de que “quanto maior o número de nascimentos observados, maiores serão as possibilidades para as sequências do sexo dos bebês nos nascimentos.”

Tendo esta afirmação em mente, os estudantes tomaram como ponto de partida, o “Método Binomial” (DANTE, 2013, p.283-285) descrito no livro-texto adotado durante o ano escolar.

Considerando-se como H , o evento “nascimento de um indivíduo do sexo masculino” e como M , o evento “nascimento de um indivíduo do sexo feminino”, tem-se

$$P(H) = x = \frac{1}{2}$$

$$P(M) = y = \frac{1}{2}$$

Logo, $x + y = 1$ (a probabilidade de nascer um bebê do sexo masculino **ou** feminino, em um nascimento qualquer, é de 100%).

Quando analisam-se as probabilidades em 2 nascimentos tem-se

$$P(H \text{ e } H) = P(H) \cdot P(H) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (x^2)$$

$$P(H \text{ e } M) = P(H) \cdot P(M) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (xy)$$

$$P(M \text{ e } H) = P(M) \cdot P(H) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (yx)$$

$$P(M \text{ e } M) = P(M) \cdot P(M) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (y^2)$$

Foi usado o princípio multiplicativo ao calcular a probabilidade do sexo dos 2 nascimentos em cada caso, pois as chances de um nascimento não interferem nas do outro (eventos independentes) e, portanto, ao considerarem-se 2 nascimentos obtém-se

$$x^2 \quad + \quad 2xy \quad + \quad y^2 \quad = \quad 1$$

$$P(H \text{ e } H) \quad \text{ou} \quad P(H \text{ e } M) \text{ ou } P(M \text{ e } H) \quad \text{ou} \quad P(M \text{ e } M)$$

Note que $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y) \cdot (x + y) = (x + y)^2$, ou seja, “a probabilidade de nascimentos de 2 meninos **ou** de 1 menino e 1 menina **ou** de 2 meninas equivale a probabilidade de nascer um menino **ou** uma menina no 1º nascimento e a probabilidade de nascer um menino **ou** uma menina no 2º nascimento analisado.” Assim, os estudantes obtiveram, de maneira análoga, a expressão que fornece as probabilidades de sexo dos indivíduos ao longo de 3 nascimentos

$$(x + y)^3 = 1$$

Situação-problema 5: Como calcular de maneira rápida as frequências para as possibilidades de cada sequência de nascimentos no caso acima?

5.4 A distribuição binomial e o modelo de Hardy-Weinberg

Na situação de sexo de indivíduos ao longo de uma certa quantidade de nascimentos, há 2 possíveis eventos para a variável sexo S : masculino (M) e feminino (F). Note que, esses eventos são mutuamente exclusivos, ou seja, a ocorrência de um implica na não ocorrência do outro. Dessa forma, os alunos concluíram que

$$p(S = M) + p(S = F) = 1$$

Então, quando se consideram k indivíduos do sexo masculino ao longo de n nascimentos, automaticamente consideram-se $n - k$ indivíduos do sexo feminino ao longo desses mesmos n nascimentos.

Como deseja-se distribuir k ocorrências do evento M ao longo de n possibilidades, chegaram à $C_{n,k}$ formas distintas de fazer isto.

Cada um dos nascimentos é independente do outro, portanto, calcula-se a probabilidade de ocorrência de um determinado sexo em cada um destes.

Sugestão de um estudante: Sendo $p(S = M) = m$ e $p(S = F) = f = 1 - m$, tem-se que

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot m^k \cdot (1 - m)^{n-k} \quad (5.7)$$

Onde X é o evento que representa o número de nascimentos de indivíduos do sexo masculino ao longo de n nascimentos observados.

Essa situação foi justamente aquela esperada ao longo da oficina para evidenciar aos participantes que a expressão obtida acima equivale a função de probabilidade de uma variável aleatória X , que corresponde ao número de sucessos em n ensaios independentes e com mesma probabilidade m de ocorrência que possui uma distribuição Binomial com parâmetros k e m , tal que $0 < m < 1$ e $k = 1; 2; \dots$

Ao analisarem as probabilidades de resultados para o sexo de indivíduos ao longo de uma sequência finita n de nascimentos, os estudantes lidaram com premissas muito semelhantes àquelas consideradas no modelo de Hardy-Weinberg e, como consideram-se as probabilidades

dos eventos $S = M$ e $S = F$, com probabilidade m e $1 - m$ respectivamente, ao longo de n nascimentos, pode-se introduzir a expressão

$$(m + f)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k f^{n-k} \quad (5.8)$$

Que equivale à expansão do binômio de Newton já citada anteriormente.

O interessante na abordagem feita acima é que, considerando-se o modelo de Hardy-Weinberg, que lida exclusivamente com as frequências genótípicas de uma população ao longo das gerações, os estudantes puderam estender seu comportamento para outras situações que mantêm a relação de eventos mutuamente exclusivos. Aliás, as condições estabelecidas para a obtenção do equilíbrio de Hardy-Weinberg não são satisfeitas completamente por nenhuma população real, humana ou não (BEIGUELMAN, 2008). Entretanto, ao longo dos anos, inúmeras pesquisas feitas com numerosas populações humanas, por exemplo, evidenciaram a distribuição de genes seguindo o modelo de Hardy-Weinberg.

Além disso, o tratamento das expressões algébricas através da analogia com os cruzamentos genéticos e as leis que os mantêm, propiciaram uma facilidade maior por parte dos estudantes participantes da oficina em lidar com esses conceitos matemáticos e até prevenirem-se de erros ligados ao decorar das fórmulas e teoremas apresentados.

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Uma das principais indagações que sustentei e sustento ao longo de meus 9 anos lecionando como professor de Matemática é sobre o motivo de termos um sistema de ensino dividido em disciplinas; onde cada assunto é tratado de uma maneira isolada, de acordo com um critério pré-estabelecido.

Sempre considerei as ciências e os seus agentes como pontes para chegar ao outro lado: e do outro lado, outra ponte e assim por diante.

Lecionar no século XXI nos convida a desafiarmo-nos: o mundo globalizado e tecnológico exige uma desenvoltura maior por parte do profissional que educa o cidadão de amanhã. E esses jovens tem sede de um conhecimento que não caiba apenas numa linha de um livro, de uma lousa ou na fala de um professor... eles querem APLICAÇÃO, UTILIDADE, PRATICIDADE.

"Onde/Pra que uso isso?" antes de começar a explicar, o meu aluno já me fez essa pergunta e, dependendo da resposta, já se define nesse momento o interesse dele pela minha aula.

É importante frisar que, apesar desses questionamentos, nem sempre será possível exemplificar aplicações, utilidades, entre outros apontamentos, para absolutamente tudo que é abordado ao longo das aulas de Matemática. Muitas vezes nos deparamos ora com definições que são convenientes a nossa abordagem, ora com conceitos cujas aplicações são ainda processos futuros a serem desempenhados pelos estudantes e as suas origens podem ser muito "profundas" para um entendimento e assimilação eficazes no momento escolar em que é tratado num primeiro momento.

Entretanto, creio que seja muito proveitoso abordar situações que possibilitam exemplificar e ilustrar conceitos e práticas tratadas em sala de aula, muitas vezes de uma forma abstrata para os alunos. O desafio principal aqui para muitos de nós, professores, tem relação com a vida escolar movimentada e rápida, exigida muitas vezes pelo sistema disciplinar em que estamos submetidos - apresentar x tópicos da disciplina em y horas - e, por conta disso, essas

oportunidades de evidenciar aplicações, utilidades e/ou praticidade a algo fica muito difícil.

A oportunidade de realizar essa oficina de estudos com os alunos do ensino médio da escola em que lecionava foi um momento único e especial em que finalmente pude trabalhar com os estudantes de modo a quebrar essas barreiras entre o "onde" e "pra que..." da Matemática.

Então veio a "ponte": tratar um tema aparentemente algébrico sob um viés biológico; íntimo a tal ponto que poderia expressar a Matemática para os estudantes através do próprio ato de gerar uma vida - plantas, animais, dos seres microscópicos até as populações das grandes cidades; tudo estaria interligado através dos braços da Genética envoltos no colo da abstração algébrica.

A maioria de meus estudantes sempre demonstrou muitas dificuldades em lidar com conceitos e propriedades algébricas relacionadas às diversas expressões que surgem ao longo dos anos escolares. Qual professor de matemática ao longo de sua trajetória nunca deve ter visto um $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ feito por um aluno? Esse erro tão simples mas tão frequentemente condenado por tantos sempre me chamou atenção: Por que ele ocorre tanto? Por que muitos alunos até mais esclarecidos em seus conhecimentos matemáticos acabam "tropeçando" neste obstáculo?

E então, com um desejo de entender melhor essas indagações, consegui reunir um grupo de célebres alunos muito interessados em entender melhor as finalidades daquilo que, até então, seria mais uma espécie de um "emaranhado" de fórmulas, leis e etc; cujo principal objetivo, segundo os próprios alunos, seria simplesmente o de "dificultar a vida escolar" destes.

A vantagem de ter uma turma de alunos dos anos finais do Ensino Médio foram muitas: a partir do 9º ano do Ensino Fundamental II, com a ramificação daquilo concebido como "Ciências" para Biologia, Física e Química permitiu aos alunos enxergarem "uma" disciplina como algo maior. Além disso, justamente no 9º ano ainda, os alunos tem os primeiros contatos com conceitos envolvendo a Genética Mendeliana e suas leis fundadoras (depois vistos novamente no 3º ano do Ensino Médio de uma maneira mais aprofundada e formal). Infelizmente, devido à forma de estruturação de conteúdos ao longo dos anos escolares os temas que interliguei (Genética x Binômio de Newton) não são abordados em momentos convenientes e de modo que um tire o máximo de proveito do outro.

Por conta disso, num primeiro momento durante a oficina, retomando os conceitos de genética Mendeliana com os estudantes, os próprios indagaram-me sobre a ausência quase total de experimentos práticos ligados à Genética em sala de aula. Um exemplo muito interessante foi o de um aluno que questionou-me a respeito de como Mendel calculava as frequências genotípicas resultantes de diferentes cruzamentos de ervilhas e, quando respondi que Mendel quantificava seus resultados, anotando-os e repetindo-os, a grande maioria dos estudantes ficou muito interessado e ao mesmo tempo chateado de nunca terem a oportunidade de realizar algum experimento como este. E realmente, se pensarmos um pouco, há uma dificuldade em abraçar práticas desse tipo no Ensino Básico - um currículo engessado que prioriza a assimilação de um

determinado nível de conteúdo muitas vezes a um curto prazo pré-determinado peca bastante no quesito experimentar, vivenciar e re-elaborar uma situação, um procedimento, entre outros.

Apesar das divergências com relação ao nível de proficiência sobre os temas trabalhados, os alunos demonstraram-se muito motivados com a Genética figurando como um tema norteador para sanar várias dúvidas e até enriquecer a experiência Matemática através das analogias criadas entre ambas.

Ao meu ver é muito vantajoso tratar da questão de modelo e do processo de modelagem a partir de situações cada vez mais próximas à vida do estudante: "Por que tenho olhos azuis e meu irmão não?", "Por que existem pessoas com mais pelos do que outras?", "Como posso descobrir meu tipo sanguíneo?"; questões como estas são essenciais e importantes para os alunos e, construir métodos capazes de analisar e quantificar estas, faz com que os estudantes percebam o quão essencial a matemática foi e continua sendo ao longo dos tempos.

Diria até que, uma proposta inter e, por que não, transdisciplinar é muito bem-vinda em casos como estes, pois dessa forma os alunos percebem a necessidade natural que as diferentes áreas tem entre si e, apesar de serem tratadas sob óticas distintas são sempre conectadas e flutuam de uma à outra. O que seria da Matemática sem a cuidadosa interpretação de uma situação-problema? Sem o contexto histórico por trás de suas descobertas? Sem a natureza manifestar-se através de seus padrões belos e que muitas vezes seguem rigorosidades estupendas?

Talvez se o ensino básico baseasse seus conteúdos, disciplinas e áreas de acordo com um mesmo tema analisado sob diferentes pontos de vista - filosófico, histórico, matemático, biológico, cultural, etc; oficinas como esta descrita ao longo dessa dissertação não seriam casos especiais a serem analisados e sim, uma maneira de criar uma base mais multi-facetada e dinâmica, assim como o mundo contemporâneo apresenta-se para aquele que acabara de concluir o Ensino Médio.

Das conclusões obtidas com a oficina, poder melhorar a capacidade de raciocínio algébrico dos alunos, a partir das situações modeladas, não foi apenas observada durante as atividades e avaliações abordando a manipulação de expressões algébricas, mas também possibilitou a esses estudantes adquirirem um amadurecimento e uma melhor percepção de como os conteúdos estudados são regidos por situações de seu cotidiano e vice-versa.

Após o término da oficina, quando os estudantes que participaram da mesma deparavam-se com situações em que a análise de expressões envolvendo polinômios é crucial, os mesmos já demonstravam uma naturalidade muito maior do que aquela que tinham em seu início. Casos envolvendo produtos notáveis e o binômio de Newton foram tratados com diferentes formas de pensar e agir, ora valendo-se de conceitos mais fortes como a lei de Hardy-Weinberg, ora simplesmente através de uma analogia como o do lançamento de uma moeda - "temos 2 resultados possíveis cara (K) ou coroa (C) e a soma das duas possibilidades é 100%".

Como o rendimento do grupo ao longo da oficina proposta foi muito satisfatório em

sua grande parte, decidi manter a proposta realizada neste trabalho e aplicá-la desde as turmas de ensino fundamental II que leciono atualmente e são expostas ao primeiro contato com a linguagem algébrica justamente nesta fase, além de poder finalmente propor o experimento prático de cruzamento utilizando amostras de ervilhas assim como Mendel para os estudantes. Dessa forma, estou aproveitando as vivências da oficina proposta neste trabalho para sensibilizar os jovens desde os primeiros anos de sua trajetória escolar naquilo que seja talvez o pilar da Matemática e de qualquer ciência: compreender e intervir no mundo real.

REFERÊNCIAS

7GRAUS. *Dicionário Etimológico: etimologia e origem das palavras*. 2008–2020. Disponível em: <<https://www.dicionarioetimologico.com.br/algebra/>>. Citado na página 21.

ANASTACIO, M. Q. A. Realidade: uma aproximação através da modelagem matemática. **Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 2–9, 2010. Citado nas páginas 26 e 28.

BARBOSA, J. C. Sobre a pesquisa em modelagem matemática no brasil. In: **Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2007. v. 5, p. 82–103. Citado nas páginas 27 e 28.

BEIGUELMAN, B. Genética de populações humanas. **Ribeirão preto: Editora SBG**, 2008. Citado nas páginas 31, 40, 41 e 68.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009. Citado na página 25.

BUENO, V. C. Modelagem matemática: quatro maneiras de compreendê-la. **Minas Gerais: Universidade Federal de Ouro Preto**, 2011. Citado nas páginas 22 e 27.

BURAK, D. Modelagem matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 10–27, 2010. Citado na página 27.

DANTE, L. R. Matemática: contexto & aplicações. **São Paulo: Editora Ática**, v. 2, 2013. Citado na página 66.

LIMA, E. L. Números e funções reais. **Rio de Janeiro: SBM**, 2013. Citado na página 43.

MEC, B. Parâmetros curriculares nacionais. **Brasília, DF: MEC/SEF**, 1997. Citado na página 21.

MELO, M. P. d. Pma5641: Probabilidade e estatística - notas de aula. 2017. Citado nas páginas 49 e 50.

MENDONÇA, V. L. Biologia: O ser humano, genética, evolução (vol. 3). **São Paulo: Editora AJS**, 2013. Citado nas páginas 31, 33, 35, 37 e 39.

MIRAMONTES, P.; BIOMATEMÁTICA, G. de. La biología matemática. **Bautista R. Las matemáticas y su entorno. México: Siglo XXI**, p. 47–65, 2004. Citado na página 29.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. **Rio de Janeiro: SBM**, 2015. Citado nas páginas 43 e 48.

MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO, J. B. P. d.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. [S.l.]: Instituto de Matemática pura e aplicada, 1991. Citado na página 44.

SCHICHL, H. Models and the history of modeling. In: **Modeling languages in mathematical optimization**. [S.l.]: Springer, 2004. p. 25–36. Citado na página 25.

SOUZA, D. F. d. *et al.* Modelos binomiais: caracterização e aplicações. Universidade Federal de Goiás, 2014. Citado nas páginas 44, 47, 50 e 52.

WIKIPÉDIA. **Cruzamento cromossômico** — **Wikipédia, a enciclopédia livre**. 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Cruzamento_cromoss%C3%B3mico&oldid=58971835>. Citado nas páginas 39 e 40.

