UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

O ensino dos números primos inter-relacionados a conteúdos diversos através da resolução de problemas

Jeozadaque Quintans

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Jeozadaque Quintans

O ensino dos números primos inter-relacionados a conteúdos diversos através da resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. **Rosana Retsos Signorelli Vargas**

USP – São Carlos
Julho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Q7e

Quintans, Jeozadaque
O ensino dos números primos inter-relacionados a conteúdos diversos através da resolução de problemas / Jeozadaque Quintans; orientador Rosana Retsos Signorelli Vargas. -- São Carlos, 2020.
134 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. . I. Vargas, Rosana Retsos Signorelli , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Jeozadaque Quintans

The teaching of prime numbers interrelated to diverse content through problem solving

Master dissertation submited to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *REVISED VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. **Rosana Retsos Signorelli Vargas**

USP – São Carlos
July 2020

AGRADECIMENTOS

A Deus em quem acredito e que me deu forças na elaboração de mais um propósito.

A minha família pelo incentivo.

Aos professores do Profmat com quem tive o prazer de estudar.

Aos professores e amigos que me apoiaram e ajudaram na realização das pesquisas.

A todos que de maneira direta ou indireta contribuíram na realização desse trabalho.

RESUMO

QUINTANS, J. O ensino dos números primos inter-relacionados a conteúdos diversos através da resolução de problemas. 2020. 134 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Este projeto tem como objetivo apresentar os números primos, analisar sua história e os resultados obtidos por matemáticos ao longo do tempo, além de explorar curiosidades e aplicações em diferentes contextos.

A partir de uma reflexão do contexto atual, juntamente com alguns dados obtidos através de uma pesquisa qualitativa sobre o ensino de números primos no ensino escolar, busca-se ao longo desta dissertação, analisar as abordagens do tema através de pesquisas de literaturas disponíveis sobre o assunto, e posteriormente, investigar e sugerir uma metodologia de ensino para aplicação do assunto em questão, procurando dar ênfase em uma aprendizagem significativa com compreensão, a fim de colaborar para a prática docente.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”.

Palavras-chave: Números primos. Ensino escolar. Aprendizagem significativa.

ABSTRACT

QUINTANS, J. The teaching of primes interrelated to diverse contents though problem solving. 2020. 134 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This project aims to present prime numbers, analyze their history and the results obtained by mathematicians over time, as well as explore curiosities and applications in different contexts.

Based on a reflection of the current context, along with some data obtained through a qualitative research, on the teaching of prime numbers in school education, it is searched throughout this dissertation, to analyze the approaches of the theme, through researches of available literatures on the subject, and afterwards, investigate and suggest a teaching methodology to apply the subject in question, seeking to emphasize a meaningful learning with understanding, in order to collaborate for the teaching practice.

"This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001".

Keywords: Prime numbers. School education. Meaningful learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

A matemática desempenha um imenso papel no desenvolvimento da sociedade e, atualmente se tem percebido os esforços que estão sendo feitos para se tornar o ensino-aprendizagem em matemática mais eficiente, porém, apesar do imenso esforço obtido através de vários pesquisadores e educadores comprometidos com a educação, a visão geral do quadro atual do ensino-aprendizagem de matemática no Brasil ainda não é de se conformar.

As várias críticas vêm tornando a imagem do professor cada vez mais negativa, conduzindo-o a uma contínua preparação e esforço no objetivo de melhorar sempre.

No resumo técnico do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) formulado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), há algumas estatísticas resumidas em tabelas e, uma delas mostra que o número de municípios que alcançaram a meta de 2017, que na época havia sido projetada para os anos finais do ensino fundamental na rede pública, foi de apenas 23,9% (INEP, 2017, p. 37).

Após uma contínua reflexão do quadro atual da educação, evidenciado no resumo técnico do Inep (2017), complementado ao que tenho visto no meu cotidiano em sala de aula, nasceu em mim a necessidade de contribuir para a melhoria do ensino-aprendizagem de matemática e, foi então que surgiu a ideia de ingressar em um curso de mestrado profissional e, posteriormente, escolher os números primos como tema, no intuito de dar mais ênfase ao assunto, e a partir de então, desenvolver e compartilhar as ideias que surgirão ao longo de todo o curso e pesquisa.

Ao analisar alguns livros didáticos, é fácil perceber que nas escolas de ensino básico, os números primos são geralmente apresentados para os alunos que estão cursando o sexto ano, porém nos demais anos, mesmo quando é citada alguma referência aos números primos, o mesmo não ocorre com tanta ênfase, igual a que é proposta na primeira apresentação.

Quando se fala de educação básica, o aprofundamento e dedicação que poderia ser direcionado aos primos, infelizmente, são engolidos por outros assuntos considerados mais importantes para o momento em questão, o interessante é que, por exemplo, para Sautoy (2007, p.13), “esses números são os próprios átomos da aritmética”, logo se torna importante, assim como o aprofundamento dos outros conteúdos, também o seu aprofundamento.

Ao voltar na história, é fácil perceber que alguns matemáticos dedicaram grande parte de suas atenções, a fim de desvendar os segredos que estão guardados no universo desses números, dentre os grandes matemáticos que foram incomodados pelo fascínio dos números primos, estão as mentes de Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss e Bernhard Riemann.

Os números primos também são importantes na criptografia, o que os tornam “as chaves dos cofres onde estão guardados os segredos eletrônicos do mundo” (Sautoy 2007, p.21), sendo assim, acredito que há muito que se discutir, aprender e descobrir a respeito deste conjunto.

Uma maneira de dar aos alunos a chance de participar e ter em si o desejo de se aprofundar nesse universo é apresentar e trazer a eles um pouco mais a respeito deste assunto, na intenção de que eles tenham mais conhecimento e se interessem a ponto de também fazerem descobertas que podem trazer benefícios acessíveis.

Para iniciar esse trabalho, a princípio, foi proposto um questionário, que após a aplicação do projeto final foi proposto outra vez, mas, nesta última, apenas à turma que participou da aplicação do projeto, com 15 perguntas (encontradas no apêndice I), na intenção de entender melhor a respeito do conhecimento atual dos alunos sobre os números primos.

Das 15 perguntas, as 14 primeiras são perguntas fechadas ou dicotômicas, que segundo Lakatos e Marconi (1991, p. 204) são perguntas “também denominadas limitadas ou de alternativas fixas, são aquelas que o informante escolhe sua resposta entre duas opções: sim e não”.

Foi adicionada, no questionário, a 15ª pergunta, esta, não limitada por alternativas, portanto uma pergunta aberta que segundo Lakatos e Marconi (1991, p. 204) são “também chamadas livres ou não limitadas, são as que permitem ao informante responder livremente, usando linguagem própria, e emitir opiniões”, porém a 15ª pergunta, considerada pergunta aberta, foi feita de maneira intencional, afim de proporcionar questionamentos a respeito do conhecimento dos alunos sobre o assunto abordado nas demais perguntas.

Este questionário foi aplicado a alunos de 7º ano, 9º ano e de 3º ano do ensino médio em três escolas localizadas em São Miguel Paulista que serão intituladas de escolas A, B e C, onde as escolas A e B pertencem à rede estadual de ensino e a escola C à rede particular, totalizando 166 alunos.

Após o questionário, os dados coletados foram tabulados e representados em forma de tabela, que será apresentada no capítulo 7 desta dissertação, que segundo Lakatos e Marconi (1991, p.169) "Tabelas ou Quadros: é um método estatístico sistemático, de apresentar os dados em colunas verticais ou fileiras horizontais, que obedece à classificação dos objetos ou materiais da pesquisa". Na conclusão dessa dissertação serão dados mais detalhes sobre as intercorrências que surgiram na produção desses dados.

De acordo com os resultados obtidos, e tomando em consideração os conteúdos considerados essenciais em todo o ensino básico, formulou-se a seguinte pergunta: **"Seria possível aprofundar o conhecimento sobre números primos, ao longo do ensino fundamental e médio, inter-relacionando este conceito com os demais?**".

É em busca de resposta a esta pergunta que a presente dissertação se estender-se-á pelas páginas seguintes, organizadas em sete capítulos, na intenção de ao final, apresentar uma estratégia de ensino, com o intuito de discutir ou analisar algumas propostas de resolver problemas outrora apresentados na pesquisa, poderia citar como exemplo de um desses problemas, a dificuldade notada em alguns em citar com exatidão qual o maior número primo conhecido por eles (capítulo 7).

No capítulo 1 apresentamos um resumo (com alguns argumentos, baseados em discursos dos autores das referências bibliográficas) sobre a educação no Brasil, as reformas do ensino de matemática no século XX e o ensino de matemática através da resolução de problemas.

No capítulo 2 apresentamos alguns fatos históricos envolvendo números primos, passando por diversos matemáticos de renome, entre eles, Euclides, Euler, Gauss e Riemann.

No capítulo 3 são formulados e demonstrados alguns teoremas que, de alguma forma têm alguma relação com os números primos, isto, no intuito de dar consistência às afirmações feitas até então e as que em algum momento poderão ser feitas.

No capítulo 4 falamos sobre os tipos de problemas e sugerimos uma proposta de ensino de números primos através da resolução de problemas, onde a partir daí e de todo o trabalho realizado nos capítulos anteriores, apresentamos uma proposta de ensino inter-relacionando-os com os números primos, utilizando a resolução de problemas como ponto de partida, ao longo do ensino fundamental e médio.

No capítulo 5 sugerimos alguns problemas geradores, que servirão de apoio para a proposta sugerida, classificados por ano, que foram elaborados a partir do currículo utilizado pela secretaria da educação do estado de São Paulo no ano de 2017 (que se encontra no anexo), as resoluções dos problemas apresentados neste capítulo se encontram para consulta no apêndice II.

No capítulo 6 descrevemos a aplicação de um projeto, para uma turma do 7º ano, elaborado a partir das propostas sugeridas nos capítulos anteriores.

No capítulo 7 analisamos, através de tabelas, o questionário (anexo I) aplicado aos alunos e as respostas obtidas na primeira aplicação, que teve como objetivo o de entender melhor a respeito do conhecimento atual dos alunos sobre os números primos, e na segunda aplicação, esta aplicada apenas à turma que participou do projeto, com o objetivo adicional de observar o conhecimento dos alunos sobre os números primos após estes participarem do projeto.

Por fim vem a conclusão, onde finalizamos o trabalho com um breve comentário a respeito da pergunta motivadora desta dissertação e comentários adicionais a respeito da aplicação do projeto.

1 A EDUCAÇÃO NO BRASIL, SUAS REFORMAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática (1998, p. 21) ao falar sobre o quadro atual do ensino de matemática no Brasil já citava como obstáculos ”a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas”, porém, em seguida afirma que apesar desta situação, esforços vêm sendo feitos na intenção de minimizar tais problemas, onde um deles seria a elaboração de projetos educativos pelas escolas de maneira que contemple interesses da comunidade, além disso,

> também existem professores que, individualmente ou em pequenos grupos, têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumem uma atitude de constante reflexão [...] de modo semelhante, universidades, secretarias de educação e outras instituições têm produzido materiais de apoio para a prática do professor, (`PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998, p. 21)

Mas o motivo de ainda todas essas medidas não alterarem o quadro atual de ensino no Brasil, seria o fato de que tais iniciativas ainda não atingiram todo o conjunto de professores.

Segundo Onuchic (1999, p. 200-208), na medida em que a sociedade precisa de maior conhecimento é natural que se tenha a necessidade de se promover mudanças no ensino da matemática, um exemplo seria o século XX, que foi marcado por algumas reformas na perspectiva de se melhorar a maneira de se aprender e ensinar matemática, dentre essas reformas temos:

1. O ensino de matemática por repetição, onde a memorização de fatos básicos era muito importante como, por exemplo, a tabuada. Neste modelo, o professor falava, o aluno recebia a informação e logo depois, escrevia, memorizava e repetia, e dentre essas repetições, estavam incluídos os exercícios feitos em sala de aula que eram treinados em casa, e tinha-se como conclusão de que o aluno havia adquirido o conhecimento se ele repetisse bem o que o professor havia feito, alguns chegavam a compreender o que era feito, mas a maioria esquecia o que havia sido memorizado em pouco tempo.

2. O ensino de matemática com compreensão, que descartava o modelo anterior, pois o aluno teria que entender o que fazia, porém, o aluno não participava da construção de seu conhecimento e o trabalho era resumido em treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizados em outros conteúdos.
3. A matemática moderna, também descartava as reformas anteriores, e de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), “o ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas” (BRASIL, 1998, p. 19, 20), dentre as preocupações em excesso estava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que colocava o aprendizado em risco, então o aluno frequentemente tinha dificuldade em ver significado em todos aqueles conteúdos, mesmo que os usando em exercícios de aplicação, porém, “não há como negar que desse movimento ficou um outro modo de conduzir as aulas, com muita participação dos alunos, com uma percepção da importância de atividades, eliminando a ênfase antes exclusiva em contas” (D’Ambrósio, 1998, p. 59).
4. A resolução de problemas, que ganhou espaço no mundo inteiro no fim dos anos 70, em 1980 nos Estados Unidos. Uma publicação do National council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomenda como foco da matemática para os anos 80 a resolução de problemas e que o desenvolvimento desta habilidade deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos naquela década, segundo Onuchic (1999, p. 204), “a resolução de problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências naturais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas”.

No Brasil, a concepção de resolução de problemas enquanto prática educacional vem ganhando força e espaço desde que chegou. Hoje a resolução de problemas tem se encaixado nas indicações descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que o indicam como ponto de partida para as atividades matemáticas.

É interessante perceber que no decorrer do século XX, o ensino de matemática passou por diversas modificações e que hoje ao se fazer a abordagem do ensino de matemática através da resolução de problemas, tudo o que era considerado bom nas reformas anteriores também é utilizado.

Os PCNs mostram um resultado fornecido pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB), realizado em 1993 que indicou que 67,7% dos alunos da então primeira série do ensino fundamental acertaram pelo menos metade do teste, e esse índice foi caindo na terceira série para 17,9% e para 3,1% na quinta série e subia para 5,9% na até então chamada sétima série (hoje oitavo ano). Nas provas aplicadas em 1995 para alunos da quarta série (hoje quinto ano) e oitava série do ensino fundamental (hoje nono ano), os percentuais de acertos por capacidades cognitivas ainda diminuíam na medida em que aumentava o ano de escolaridade, e os indicativos das maiores dificuldades foram encontrados em questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas (BRASIL, 1998, p. 23, 24).

1.1 A resolução de problemas

Antes de se falar sobre a resolução de problemas, tem-se uma questão, que seria, o que é um problema? O que seria um problema matemático?

Para Dante (2007, p. 9, 10) Um problema “é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”, e um problema matemático “é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”.

Para Onuchic e Allevato (2004, p. 221), um problema “é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer”.

Onuchic e Allevato (2004, p. 220) discursam sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e enfatizam que neste contexto o problema se torna apenas no ponto de partida para o ensino, sendo utilizado para fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática.

É importante destacar que as concepções de resolução de problemas para Dante e Onuchic apesar de próximas são distintas, pois para Dante o problema é proposto e a busca por uma solução é imperativa ao estudante, de quem é exigido o pensar acerca da solução, já para Onuchic, o problema é algo que o estudante não sabe resolver, mas está interessado em fazê-lo.

Agora ao se falar sobre resolução de problemas, Branca (1997, p. 4) chama a atenção para o fato de que a expressão resolução de problemas ocorre em profissões e disciplinas diferentes, apesar de em matemática ser mais específica, ainda assim comporta diferentes interpretações e as atividades de resolução de problemas inclui resolução de problemas simples, os não rotineiros (quebra-cabeças), a aplicação da matemática a problemas do mundo real e o testar conjecturas matemáticas que levam a novos campos de estudos.

Segundo Branca (1997, p. 5-8), as três interpretações mais comuns de resolução de problemas são:

1. Como uma meta, onde interessados nas questões de o porquê ensinamos matemáticas e quais as metas do ensino da matemática, citam a resolução de problemas como uma meta do estudo de matemática, "a consideração importante aqui é que aprender a resolver problemas é a razão principal para estudar matemática" (p. 5).
2. Como um processo dinâmico e contínuo, onde é considerado importante os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas usadas na resolução de problemas.
3. Como uma habilidade básica, porém, relatórios e documentos de grupos que se concentram em definir ou avaliar as habilidades básicas na matemática os posicionam de dois tipos, os que têm interesse na determinação das habilidades mínimas para avaliação e os que têm interesse na identificação das habilidades básicas de que os indivíduos precisam para atuar em nossa sociedade, porém, "ao interpretar a resolução de problemas como uma habilidade básica, somos forçados a considerar especificidades do conteúdo de problemas, tipos de problemas e métodos de solução" (p. 8).

Já Onuchic at al. (2017, p. 437, 438) mostra três modos de abordar a resolução de problemas apresentados por Schoerder & Lester, que seriam:

1. Ensinar sobre resolução de problemas, onde neste modelo, são descritas um conjunto de quatro fases, que segundo o esquema de Polya estariam

classificadas na seguinte ordem: compreender o problema, criar um plano, executar o plano e fazer a verificação do problema original.

2. Ensinar a resolver problemas, que nesse caso, o professor se atenta para como a matemática é ensinada e o que se pode aplicar dela na solução de problemas, como consequência disto, são dados exemplos de conceitos e estruturas sobre o que estão estudando e oportunidades de aplicação desta matemática ao resolver problemas.
3. Ensinar matemática através da resolução de problemas, que começa com uma situação-problema para que a partir de então, se desenvolva técnicas matemáticas como respostas para os problemas.

Sobre esses modos Onuchic (1999, p. 207) já dizia que “embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas matemáticos possam ser separadas, na prática elas se superpõem e acontecem em várias combinações e sequências”.

Polya já dizia que “se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas” (KRULIK; REYS, 1997, p. 2).

A resolução de problemas, como ponto de partida de atividades matemáticas, é um dos métodos indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 39-42), além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias do ensino médio (2000, p. 40), fala do desenvolvimento de algumas capacidades, dentre elas o da resolução de problemas ao destacar sua importância na integração a uma sociedade da informação crescentemente globalizada.

Acompanhado a esta capacidade, também é mencionada a de comunicação, a de tomada de decisões, a de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores e a de trabalhar cooperativamente. Segundo Onuchic (1999, p. 207) “ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso”.

Para Dante (2007, p. 11) “um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las”.

D’Ambrósio (1998, p. 31) afirma que “interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas”, e essa afirmação vem de encontro com aquilo que é promovido pelo ensino através da resolução de problemas, tendo a resolução de problemas como ponto de partida, já que seria proposto um problema e o aprendiz partiria de suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas estando em total acordo com a afirmação de D’Ambrósio.

Charnay diz que “um dos objetivos essenciais (e ao mesmo tempo uma das dificuldades principais) do ensino da matemática é precisamente que o que se ensine esteja carregado de significado, tenha sentido para o aluno” (Parra; Saiz, 1996, p. 37) e considera dois níveis para a construção da significação de um conhecimento que seriam:

1. Um nível externo, que está vinculado ao campo de utilização de certo conhecimento e quais os limites desse campo.
2. Um nível interno, que está vinculado ao porque e ao como funciona tal ferramenta.

Logo, “o aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas” (Parra; Saiz, 1996, p. 38).

Nesse contexto, o ensino através da resolução de problemas pode fortalecer o interesse no aprendizado de matemática, pois, de acordo com Onuchic (1999, p. 207)

> o aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).

Além disso, o ensino através da resolução de problema permitirá ao aluno participar da construção de seu conhecimento, atitude esta que Freire (1996, p. 22) já dizia que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção”.

Na busca de criar tais possibilidades e ver significado em conceitos matemáticos usando a resolução de problemas, torna-se ainda indispensável destacar a importância da leitura, que é uma atividade essencial ao se usar esse método, ela envolve as habilidades de decodificação, compreensão, interpretação e retenção. Nessa busca o professor deve conhecer o cenário e se esforçar para trazer para sala de aula o contexto em que o aluno vive, sendo assim, deve propor problemas que tenham linguagens acessíveis ao aluno (Onuchic e Junior, 2016, p. 27-30).

> Se o aluno não possuir conhecimentos a priori sobre os conceitos evocados no problema, não conseguirá iniciar a decodificação, muito menos compreenderá, interpretará ou reterá o que se propôs no problema. A leitura é uma habilidade que se desenvolve com o hábito. Alunos que têm esse hábito desenvolvido, têm mais facilidade de entender as propostas que lhe são feitas através de problemas, e podem tornar-se bons resolvedores de problemas (Onuchic e Junior, 2016, p.31).

2 OS NÚMEROS PRIMOS NA HISTÓRIA

Desde os dias dos gregos antigos até o presente os números primos mantêm consigo uma longa história com descobertas importantes principalmente no século XIX, foram estudados com muitos esforços para determinar a natureza de sua distribuição, onde, na Antiguidade, os principais resultados foram a prova de sua infinitude (provado primeiro por Euclides por volta de 300 a.C) e o crivo de Eratóstenes, que quando dado um certo inteiro n, determina os primos inferiores a esse certo número n.

Sautoy (2007, p. 45-47) mostra que Euclides em uma das obras mais influentes da História chamada de Os Elementos explica na proposição 20 uma verdade fundamental sobre os números primos, ele diz que há um número infinito deles, onde a ideia começa pelo fato de que todo número pode ser gerado por fatores primos.

Muitas gerações tentaram sem sucesso aperfeiçoar o entendimento de Euclides a respeito dos números primos, entretanto, a respeito do Teorema de Euclides sobre a infinitude dos números primos, Eves (2004, p. 624) mostra que Lejeune-Dirichlet (1805-1859) conseguiu uma generalização notável, mostrando que toda progressão aritmética a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., onde a e d são primos entre si, contém infinitos números primos.

Uma definição muito usada sobre os números primos é que eles são uma classe de inteiros que não têm fatores divisores exceto por eles mesmos e por 1, além disso, se tornam menos frequentes na medida em que os números vão crescendo (Rooney, 2012, p. 52).

Uma grande descoberta, conforme já visto acima, é o que hoje é chamado de Teorema Fundamental da Aritmética que afirma que todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos, porém, os gregos foram os primeiros que idealizaram um argumento que mostra a impossibilidade de aparecer um número inteiro maior que 1 que não possa ser gerado por fatores primos (Sautoy, 2007, p. 44).

Os números primos seriam como os átomos do mundo físico, porém, nesse caso, os átomos da aritmética, onde a importância desses números é devido a sua capacidade de gerar todos os demais números inteiros e, ao listar esses números, ainda assim é impossível prever quando surgirá o próximo número primo, pois esta lista parecerá caótica e aleatória, sem fornecer pistas a respeito do próximo número (Sautoy, 2007, p. 13-14).

A busca de um padrão para explicar o modo como se comportam os números primos tem sido um desafio que atormenta mentes matemáticas de todas as épocas, que não aceitam a possibilidade de talvez não existir uma explicação de sua natureza.

Não existe um procedimento prático para dizer se um número grande é ou não um número primo, o maior testado, por mais de setenta e cinco anos num trabalho do matemático francês Anatole Lucas (1842-1891) em 1876, foi o número:

$2^{127} – 1$ = 170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727.

Em 1952 o Computador EDSAC, em Cambridge, Inglaterra, mostrou que o número $180(2^{127} – 1)^2 + 1$ de setenta e nove algarismos é um número primo. Outros computadores mostraram que são primos os números $2^n – 1$ se escolhermos para n os números: 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 86243, 132049, e 216091 (Eves, 2004, p. 623).

Na metade do século XIX, Bernhard Riemann abordou o problema de decifrar alguma ordem nos números primos de uma forma nova e começou a compreender parte do padrão que é responsável pelo caos dos primos e fez uma previsão ousada que ficou conhecida como a hipótese de Riemann, onde o caos dos primos parece se tornar ordenado e revelando um padrão consistente, então conjecturou que essa ordem se manteria sempre (Sautoy, 2007, p. 18).

A hipótese de Riemann é uma célebre conjectura que está ainda em aberto, a princípio, Euler chamou a atenção para a ligação entre a teoria dos números primos e a série $\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$, onde s é um número inteiro, então, Riemann estudou essa série para um número complexo do tipo s = $\sigma + i\tau$, onde a soma dessa série define uma função ζ(s) que veio a ser conhecida como função zeta de Riemann que está associada à hipótese de Riemann.

Por volta de 1859, Riemann veio a conjecturar que, todos os zeros da função zeta têm sua parte real $\sigma = \frac{1}{2}$, que até os dias de hoje continua não-resolvida, porém, em 1914, um inglês, especialista em teoria dos números, chamado Sir Godfrey Harold Hardy (1877-1947), provou que ζ(s) tem uma infinidade de zeros para $\sigma = \frac{1}{2}$ (Eves, 2004, p. 614-615).

Em uma manhã de agosto de 1900, David Hilbert, da Universidade de Göttingen anunciou uma lista com 23 problemas que, segundo ele, ditariam o rumo dos exploradores da matemática no século XX, nesta lista a hipótese de Riemann aparece sendo o de número oitavo (Sautoy, 2007, p. 9).

Dos 23 problemas, o único ainda não solucionado é a hipótese de Riemann, que ainda faz parte de um dentre sete problemas sugeridos por um grupo composto pelos melhores matemáticos do mundo, entre eles Andrew Wiles e Alain Connes, em 24 de maio de 2000 no Collège de France, em Paris para desafiar a comunidade matemática no novo milênio (Sautoy, 2007, p. 22).

Mas voltando um pouco mais no tempo, um indício não preciso (pois não se sabe ao certo se esse indício realmente foi uma dentre as primeiras tentativas de compreensão dos números primos ou é simplesmente uma coincidência) do primeiro momento em que a humanidade se depara com a qualidade dos números primos, é um osso conhecido como o osso de Ishango, descoberto em 1960 nas montanhas da África Central Equatorial, datado de 6500 a.C, nele há três colunas com quatro séries de entalhe, na qual em uma delas encontram-se todos os primos entre 10 e 20, que são 11, 13, 17 e 19 entalhes.

Algumas pessoas acreditam que a primeira cultura a perceber os números primos tenha sido a cultura chinesa, que atribuíam características aos números, e para eles os primos eram os números machões.

No quarto século a.C, foram os gregos da Antiguidade quem perceberam que esses números poderiam gerar todos os demais através da multiplicação, até então, é sabido que a primeira pessoa que produziu tabelas de números primos foi o diretor da biblioteca do instituto de pesquisa da Grécia Antiga em Alexandria, porém no terceiro século a.C Eratóstenes descobriu uma maneira de determinar quais números são primos e com esse procedimento, chamado mais tarde de crivo de Eratóstenes, construiu tabelas de primos (Sautoy, 2007, p. 30-31).

No século XVII, os matemáticos acreditaram ter descoberto um método em que podiam determinar se um número era primo ou não, o método consistia em calcular 2^n e dividi-lo por n, se o resto fosse 2, o número n seria primo, esse teste foi eliminado em 1819, pois o teste funcionava corretamente para os números menores que 341, que falha ao indicar que 341 é primo, pois 11x31 = 341 (Sautoy, 2007, p. 38).

Os matemáticos sempre tentaram encontrar fórmulas que produzissem lista de primos, um desses matemáticos foi Fermat (1601-1665), ele teria encontrado uma fórmula que geraria esta lista. Apesar de serem conhecidos apenas os 5 primeiros primos de Fermat, segundo ele $2^{2^n} + 1$ (chamado n-ésimo número de Fermat, para todo n inteiro não negativo), seria primo, porém, essa foi uma suposição errada, pois o quinto número da lista, que contém 10 algarismos, é divisível por 641.

Fermat descobriu, apesar de não ter registrado uma prova, que números primos que quando divididos por 4 deixam resto 1, podem ser expressos pela soma de dois quadrados, então Fermat mostrou sua descoberta a um monge francês chamado Marin Mersenne em 1640.

Enquanto Fermat relutava em publicar suas produções matemáticas, Mersenne divulgava muitas das descobertas de Fermat e também fez parte da geração que buscava alguma ordem nos primos, então, apesar de não ter formulado um método, encontrou a fórmula $2^n – 1$ (muito mais eficaz que a de Fermat), que para n primo geraria números primos, mas sua fórmula não garantia que o resultado fosse primo para todos os números, por exemplo, $2^{11} – 1 = 2047 = 23 \times 89$ (resultado esse que calculou a mão), apesar disso, afirmou que seria primo para n = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127, 257, além disso, não há ainda uma prova que garanta a infinidade dos primos de Mersenne (Sautoy, 2007, p. 48-50).

Sautoy (2007, p. 36) mostra um fato que acontece no reino animal envolvendo números primos, que tem a ver com o ciclo de vida de 17 e 13 anos de duas espécies de cigarra que vivem no mesmo ambiente e são chamadas de *Magicicada* *septendecim* e *Magicicada tredecim*, elas permanecem no solo durante toda vida, mas no último ano sofrem metamorfose e emergem do solo, onde das explicações, uma das possíveis causas, talvez seja o fato de que tendo um ciclo de vida formado por números primos, elas raramente emergirão no mesmo ano, evitando se competir com frequência.

Já no século XVIII, surge um matemático chamado Leonhard Euler (1707-1783), com enormes contribuições, dentre elas, uma prova da afirmação de Fermat de que certos primos podiam ser expressos pela soma de dois quadrados, que exibiu para Goldbach, esse um matemático amador alemão fascinado por experimentos numéricos e que estimulou Euler à paixão pela teoria dos números.

Euler chegou a produzir tabelas de números primos, além disso, foi o primeiro a demonstrar que a fórmula de Fermat 2^{2^n} + 1 (fórmula essa que segundo Fermat geraria números primos), falhava para n igual a 5, também descobriu a fórmula x^2 + x + 41 para x natural menor que 40 e que para q = 2, 3, 5, 11 e 17 a fórmula x^2 + x + q formava primos para números de 0 a q – 2, porém não conseguiu encontrar uma fórmula simples para gerar todos os primos.

Usando uma estratégia diferente dos matemáticos anteriores, aparece um outro que conseguiria grandes avanços a respeito do contexto dos primos, chamado Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (Sautoy, 2007, p. 53-55).

Gauss, quando menino, recebeu de presente um livro que continha uma lista de números primos. Enquanto os gregos haviam mostrado uma maneira de se construir um pentágono perfeito com régua e compasso.

Gauss descobriu uma construção geométrica de 17 lados, quando ninguém mais havia conseguido construir outros polígonos perfeitos com número primo de lados utilizando apenas régua e compasso, ainda mais, em seu tratado chamado Disquisitiones Arithmeticae, demonstra uma explicação sobre o motivo de que se o N-ésimo número de Fermat for primo, então seria possível construir um polígono de n lados utilizando apenas régua e compasso.

Os matemáticos falhavam ao tentar prever a localização do próximo primo, então Gauss teve a brilhante estratégia de ao invés de tentar localizar o próximo primo, tentar estimar a quantidade de primos que encontraria em uma lista entre 0 e um certo número N, fazendo assim, conseguiu perceber uma regularidade que até então ninguém havia percebido. A tabela descrita abaixo, mostra um pouco mais sobre essa ideia de Gauss, o símbolo π(N) surge a partir de Gauss, para expressar o número de primos que se encontra entre 1 e N.

Tabela 1 – Quantidade de primos que encontramos até diversas potências de dez

n	Número de primos de 1 a n, frequentemente chamado de $\pi(N)$	Em média, quantos números precisamos contar até atingir um número primo
10	4	2,5
100	25	4,0
1.000	168	6,0
10.000	1.229	8,1
100.000	9.592	10,4
1.000.000	78.498	12,7
10.000.000	664.579	15,0
100.000.000	5.761.455	17,4
1.000.000.000	50.847.534	19,7
10.000.000.000	455.052.511	22,0

Fonte: Sautoy (2007, p. 57)

É possível observar que para n maior que 10.000 a cada momento que se multiplica a primeira coluna por 10 a última coluna aumenta aproximadamente 2,3 a cada etapa, o que mostra uma interessante conexão com os logaritmos (que teve sua primeira tabela em 1614), que Gauss conhecia, pois tinha ganhado um livro de logaritmo (que também trazia a tabela de primos na contracapa) de presente quando adolescente.

Gauss ao perceber essa conexão estimou o que ficou conhecido como a conjectura dos números primos, que diz, que o número de primos entre 1 e N era de aproximadamente $\frac{N}{lnN}$, que apesar de não ser a fórmula que indicava a quantidade exata de primos, parecia ser uma estimativa razoável, porém apesar da conexão entre os primos e a função logarítmica, não havia uma prova que ligava essas duas áreas.

O matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), havia feito uma descoberta experimental acerca da conexão entre os primos e os logaritmos e aperfeiçoou a aproximação de Gauss por $\frac{N}{lnN-1,08366}$, mas Gauss refinou sua estimativa chegando a uma função mais precisa, ele havia percebido que a quantidade de primos diminuía a medida que a contagem fosse ficando mais alta, logo chegou à conclusão em que a probabilidade de que cada número N seja primo é de $\frac{1}{lnN}$.

Nesse modelo, a previsão do número de primo passa a ser $\frac{1}{ln2}+\frac{1}{ln3}+\cdots+\frac{1}{lnN}$, indo um passo além, gerando a função chamada integral logarítmica (Li(N)), construída baseada numa variação da soma de probabilidade descrita (Sautoy, 2007, p. 62 - 65).

Segundo Sautoy (2007, p. 66), Gauss, com base em primos até 3.000.000, percebeu que Li(N) sempre superestimaria o número de primos, então conjecturou intuitivamente, de maneira equivocada, que isso sempre ocorreria. Apesar de observações numéricas modernas confirmarem essa nova estimativa até 10^{16}, com um erro de apenas um décimo de milionésimo de 1 por cento (superior a tentativa de Legendre que nesse caso é de um décimo de 1 por cento),matemáticos conseguiram provar que $\pi(N)$ ultrapassará Li(N) (apesar de ainda, ninguém ter observado esse fato).

Ribenboim (2015, p. 284), diz que $\pi(N)$ cresce como $\frac{N}{logN}$ quando N tende ao infinito.

Coutinho (2004, p. 3), usando $\pi(x)$ para expressar o número de primos que se encontra entre 1 e x, sendo x um número inteiro maior que zero, diz que Gauss percebeu que “para valores grandes de x, a função $\pi(x)$ está muito próxima de ser igual a x/lnx; ou, em uma formulação mais precisa $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)Ln(x)}{x}$=1 ” , resultado que hoje é conhecido como Teorema dos Números Primos.

Um matemático russo chamado Pafnuty Chebyshev, apesar de não ter conseguido provar a então conjectura dos números primos, conseguiu demonstrar que o erro entre a estimativa de Gauss até N, independente do tamanho de N, não seria maior que 11% (Sautoy, 2007, p. 115).

Outra colaboração de Chebyshev foi usar seu teorema que dizia que para cada inteiro N > 0 existe um inteiro N_1 > 0 (que depende de N) tal que se x > N_1, então, $\frac{\pi(x)}{(\frac{x}{logx})}$ está entre C - $\frac{1}{N}$ e C + $\frac{1}{N}$, para x suficientemente grande, sendo x um número inteiro, onde C = $\frac{1}{30}$log$\frac{2^{15}.3^{10}.5^{6}}{30}$ e N > 0, e como consequência desse teorema mostrou que se N≥ 5, as desigualdades implicariam que $\pi(2N) - \pi(N) > \frac{1}{3}\frac{N}{logN}$> 1, e que sendo assim, haverá sempre um primo entre N e 2N, afirmação que também tinha sido observada por Bertrand (Ribemboim, 2015, p. 272-273).

A conjectura dos números primos foi provada independentemente em 1896 pelo Belga C. J. De La Vallée Poussin e pelo Francês J. Hadamard, onde era exigido amplo conhecimento da teoria das funções analíticas de uma variável complexa (Sautoy, 2007, p. 116, 117), mais tarde em 1949 Erdös e Selberg independentemente publicaram a prova do Teorema dos Números Primos sem usar os recursos da teoria das funções analíticas, apenas métodos elementares (Sautoy, 2007, p. 181, 182).

Após a morte de Gauss e posteriormente a de Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemão (1805-1859), e ex-aluno de Gauss, que foi indicado para sucedê-lo em Göttingen após sua morte, Bernhard Riemann (1826-1866), este, que teve tanto Gauss como Dirichlet como mentores e que mais tarde veio a suceder Dirichlet como professor titular, na busca de provar a então conjectura dos números primos de Gauss, publica um artigo de dez páginas.

Nesse artigo estaria o que veio a ser conhecida como a hipótese de Riemann, que se estivesse correta, implicaria que Gauss também estaria correto em sua conjectura, porém mais tarde, conforme já descrito acima, mesmo sem uma prova da hipótese de Riemann a conjectura dos números primos de Gauss, que mostrava uma conexão entre a função logarítmica e os números primos, obteve uma prova e veio a ser conhecida agora como o teorema dos números primos (Sautoy, 2007, p. 92).

Antes de Riemann, Euler mostrou que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ e conseguiu provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ é convergente para s > 1, ele deu o nome (para a soma) de ζ(s) (zeta de s), e então conseguiu a função s → ζ(s) definida para todo s > 1, com domínio real maior que um e imagem real maior que zero.

Euler provou que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\lim_{n\to\infty} P_n$, com s > 1 e p os números primos, este produto é conhecido como produto de Euler para a função zeta, nesta fórmula em um lado temos todos os inteiros positivos e no outro todos os primos, então Riemann manipulou esta fórmula utilizando números complexos em s e não apenas um número real tal que s > 1, esta nova função ficou conhecida como função zeta de Riemann.

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ converge quando Re(s) > 1 e diverge quando 0 < Re(s) ≤ 1, porém Riemann conseguiu obter uma paisagem que cobria todo o mapa de números imaginários, ele percebeu a existência de uma função analítica com domínio em todo o plano complexo (menos no ponto s = 1, pois ζ(1) = ∞), e que é igual a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, quando Re(s) > 1, Riemann então determinou zeros triviais à função zeta de Riemann, ou seja, ζ(s) = 0, para s = -2, -4, -6, ..., porém deduziu que os demais zeros estariam na faixa crítica (o conjunto dos números complexos s tais que 0 ≤ Re(s) ≤ 1).

Riemann acreditou que todos os zeros que estavam na faixa crítica, se encontravam na linha vertical, conhecida como “a linha crítica”, que contém s = $\frac{1}{2}$.

A conjectura de que todos os zeros da função zeta que estão na faixa crítica se encontram na linha crítica, é conhecida como a hipótese de Riemann.

Ao longo do século, matemáticos tentaram encontrar um padrão para o caótico comportamento dos números primos, porém Riemann foi quem conseguiu encontrar, percebendo que a localização dos zeros na linha crítica está ligada à distribuição dos números primos, então conjecturou a hipótese que leva o seu nome.

Ainda hoje, a hipótese de Riemann é um problema que não foi provado ser verdade, além de ser o único não resolvido, dentre aquela seleção de vinte e três, propostos pelo matemático David Hilbert (1862-1943) em 1900, ainda permanece entre os sete problemas que foram propostos para desafiar os matemáticos do novo milênio, estes, propostos no ano 2000 por um grupo formado pelos considerados no então momento os melhores matemáticos do mundo.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segue agora as demonstrações de alguns teoremas, no objetivo de dar sustento a cada afirmação feita até o momento a respeito dos números primos, além de tornar os temas que serão usados nos problemas do capítulo 5 mais consistentes.

3.1 Divisibilidade

O propósito de se começar com o conceito de divisibilidade é devido a consequência do fato de que se um certo número é primo, então os únicos divisores deste número é o 1 ou o próprio número em questão, então por que não começar a princípio por esse assunto? Pois além do teste de primalidade de um número, a divisibilidade é também chave essencial para o desenvolvimento de outros assuntos que virão a seguir ainda neste capítulo.

Definição 3.1.1 Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in Z$ tal que $b = c.a$, Nesse caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a ou que b é divisível por a (Hefez, 2014, p. 46).

3.2 Teorema da divisão euclidiana sobre os números inteiros

Teorema 3.2.1 (Ribenboim, 2015, p. 9-12). Sejam a e d números naturais positivos. Então,

i) Existem números naturais positivos q e r tais que $0 \leq r < d$ e $a = q.d + r$;

Demonstração. Os números $d = 1d < 2d < 3d < ...$ estão crescendo. Então, existe um número q para o qual a é maior ou igual a $q.d$, mas ainda menor que $(q + 1).d$. Logo, $q.d \leq a < (q + 1).d$.

Subtraindo $q.d$ de todos os membros da desigualdade, temos:

$0 = q.d - q.d \leq a - q.d < (q + 1).d - q.d = d$

Seja r igual ao número $a - q.d$, então,

$0 \leq r < d$ e $a = q.d + r$ □

ii) Existe um único número q e um único número r com as propriedades indicadas em **i)**.

Demonstração. Já sabemos que $a = q.d + r$ com $0 \leq r < d$. Nós nos perguntamos se existem números q_1 e r_1 tais que $0 \leq r_1 < d$ e $a = q_1.d + r_1$ e, neste caso, devemos mostrar que q_1 deve ser igual a q e r_1 deve ser igual a r. Temos $a = q.d + r = q_1.d + r_1$, de onde temos que existem duas possibilidades:

Caso 1: Assuma que $q = q_1$. Então, $q.d = q_1.d$, logo, r e r_1 devem ser iguais. E assim estamos satisfeitos com o caso 1.

Caso 2: Assuma que q_1 não é igual a q. Um dos dois números é maior que o outro, digamos que $q_1 > q$, então, neste caso, $q_1 - q \geq 1$. A prova é similar se $q > q_1$. Agora,

$$d = 1d \leq (q_1 - q).d = q_1.d - q.d = (a - q.d) - (a - q_1.d) = r - r_1$$

Isso é absurdo, pois $r - r_1 \leq r < d$. Então, caso 2 não pode acontecer e isso é o fim da prova de ii).

□

3.3 Máximo Divisor Comum (m.d.c)

Em muitos casos, mesmo quando um número não é primo, ainda assim pode ter a palavra “primo” associada a si, um exemplo seria a possibilidade de um par de números, onde mesmo que não sendo primos, poderem ser primos entre si, e uma das condições de se verificar essa veracidade é através da comparação entre eles encontrando o máximo divisor comum.

Definição 3.3.1 Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$ (Hefez, 2014, p. 86 - 88).

Ao se falar do máximo divisor comum de um número a e outro b, usaremos a notação (a,b) que também poderá ser dada por (b,a), pois o m.d.c de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, para representar um número inteiro $d \geq 0$, que chamaremos de máximo divisor comum de a e b, que pela definição dada por Euclides deverá possuir as seguintes propriedades:

I) d é um divisor comum de a e b, e

II) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Demonstração. Seja $d > 0$ um máximo divisor comum de a e b, não nulos e seja c um divisor comum qualquer desses números, então $|c|$ divide d e, portanto, $c \leq |c| \leq d$. □

Observemos ainda que sendo a e b números inteiros, se existir (a,b) de a e b, então, $(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$.

O seguinte resultado foi utilizado por Euclides para provar a existência do máximo divisor comum de dois inteiros não negativos.

Lema 3.3.1 Sejam $a, b, n \in Z$. Se existe $(a, b-n.a)$, então (a,b) existe e $(a,b) = (a,b-na)$.

Demonstração. Seja $d = (a,b-na)$. Como $d|a$ e $d|(b-na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b-n.a$ e, portanto, $c|d$. Isso prova que $d = (a,b)$.

3.4 O que são números primos?

Definição 3.4.1 Um número maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de número primo (Hefez, 2014, p. 140).

Dados dois números primos p e q e um número inteiro a qualquer, decorrem da definição acima os seguintes fatos:

i) se $p|q$, então $p = q$.
De fato, como $p|q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

ii) Se p não divide a, então $(p,a)=1$.
De fato, se $(p,a)=d$, temos que $d|p$ e $d|a$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois p não divide a e, consequentemente, $d = 1$.

3.5 O que são números compostos?

Definição 3.5.1 Um número maior do que 1 que não é primo será dito composto (Hefez, 2014, p. 140).

Como consequência desta definição há o fato de que se um número natural $n > 1$ é composto, existe um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$, logo, existe um número natural n_2 tal que $n = n_1.n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Por exemplo, o número 10 é composto, logo 10 = 2.5.

3.6 Números primos entre si

O fato de dois números serem primos entre si é bastante explorado em casos da aritmética, um desses casos seria o usado no conhecido lema de Gauss que será enunciado em 3.7.1.

Definição 3.6.1 Dois números inteiros a e b serão ditos primos entre si, ou coprimos, se $(a,b)=1$, ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1. (Hefez, 2014, p. 96).

Proposição 3.6.1. Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $m.a + n.b = 1$.

Em Hefez (2014, p. 96) se encontra a demonstração da proposição 3.6.1, é através dela que se verifica a veracidade da definição 3.6.1 dos números primos entre si, que não será mostrada neste espaço, pois para isso seria necessário introduzir novos assuntos que deixariam a demonstração muito longa, um exemplo disto foi o de observar a necessidade de que ao se demonstrar a proposição 3.6.1 ser importante definir todo o universo de um conjunto de números escritos na forma $x.a + y.b$ com $x,y \in Z$ e com $a,b \in Z$ não ambos nulos, para depois mostrar a relação entre $x.a + y.b$ e (a,b), e, fazendo uso desta relação, mostrar a existência de números inteiros m e n tais que $m.a + n.b = 1$, sendo assim, para consulta completa da demonstração, verificar a bibliografia citada.

3.7 Teorema Fundamental da Aritmética

O teorema fundamental da aritmética é consequência de uma importante descoberta a respeito do uso dos números primos, pois afirma que mesmo que um número não seja primo, ele surgirá da multiplicação de números primos (teorema 3.7.1).

Lema 3.7.1 (de Gauss) Sejam a, b e c números inteiros. Se a divide o produto $b.c$ então a divide c, apenas se a e b forem primos entre si (Hefez 2014, p. 96).

Demonstração. Se $a|bc$, *então existe* $e \in Z$ *tal que* $bc = ae$.

Se $(a,b) = 1$, *pela proposição 3.6.1, temos que existem* $m, n \in Z$ *tais que*

$$ma + mb = 1.$$

Multiplicando por c ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$c = mac + nbc.$$

Substituindo bc por ae nesta última igualdade, temos que

$$c = mac + nae = a(mc + ne)$$

e, portanto , $a|c$.

□

Lema 3.7.2 (Euclides) Sejam $a, b, p \in Z$, com p primo. Se $p|a.b$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração. Se p divide $a.b$, e p não divide a, então p divide b. Mas, se p não divide a, temos que $(p,a) = 1$. (Hefez, 2014, p. 141).

Suponha que p não dividide a, então (a,p) = 1(observação II do teorema 3.4.1)

Pelo lema de Gauss, então p divide b.

□

Colorário 3.7.1 Se $p, p_1, ..., p_n$ são números primos e, se $p|p_1...p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, ..., n$.

Demonstração. Use o Lema 3.7.1 (Euclides), indução sobre n e o fato de que, se $p|p_i$, então $p = p_i$.

□

Teorema 3.7.1 Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos (Hefez, 2014, p. 141).

Demonstração. Pelo princípio de indução completa, se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado, suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tal que $n = n_1.n_2$ e com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, ..., p_r$ e $q_1, ..., q_s$ tais que $n_1 = p_1...p_r$ e $n_2 = q_1...q_s$, portanto, $n = p_1...p_r.q_1...q_s$. □

Demonstração da unicidade da escrita. Suponha que tenhamos $n = p_1...p_r = q_1...q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1|q_1 ...q_s$, pelo corolário 3.7.1, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1, ..., q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto, $p_2 ...p_r = q_2 ... q_s$. Como $p_2...p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares.

□

Maiores detalhes da demonstração do teorema fundamental da aritmética se encontram em Hefez (2014, p. 141).

3.8 Quantos números primos existem?

Ao pensar em números pela primeira vez quando criança, é comum querer saber se existe um número considerado o último em uma sequência de naturais crescente, então consequentemente se descobre sobre sua infinitude, da mesma forma pode ocorrer a mesma curiosidade ao se estudar a respeito dos números primos.

Teorema 3.8.1 Existe uma infinidade de números primos (Ribenboim, 2012, p. 1, 2).

Demonstração (de Euclides). Suponhamos que a sucessão $p_1 = 2$, $p_2 = 3, ..., p_r$ dos r números primos seja finita. Façamos $P = p_1.p_2...p_r + 1$ e seja p um número primo que divide P. Esse número p não pode ser igual a qualquer um dos números $p_1, p_2, ..., p_r$ porque então ele dividiria a diferença $P – p_1.p_2...p_r = 1$, o que é impossível. Assim p é um número primo que não pertence à sucessão e, por consequência, $p_1, p_2, ..., p_r$ não podem formar o conjunto de todos os números primos.

□

É importante observar que a demonstração de Euclides, não fornece qualquer informação sobre o novo número primo p posto em destaque, somente que é no máximo igual ao número $P = p_1.p_2...p_r + 1$.

3.9 Teorema dos números primos

Sabendo-se que existem infinitos números primos, quantos números primos existem até certo inteiro x?

A resposta a essa pergunta é dada pelo chamado “teorema dos números primos”, pois esse teorema dá uma estimativa desta quantidade, ou seja, descreve a distribuição dos primos através do seguinte resultado: $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$, onde $\pi(x)$ é o número de primos p com $2 \leq p \leq x$. Este é um resultado dado por vários matemáticos, porém a demonstração completa só foi encontrada em 1896 independentemente por la Vallée Poussin e Hadamard.

De acordo com Martinez (2010, p. 272-273) uma aproximação mais precisa para $\pi(x)$ é dada por

Li(x) = $\int_0^x \frac{dt}{\log t}$, onde é tomado o valor principal desta integral, ou seja,

Li(x) = $\lim_{\varepsilon\to 0}(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t}+\int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t})$;

logo: $\lim_{x\to\infty} \frac{Li(x)}{(\log x)/x}$=1.

Sabe-se, entretanto que $|\pi(x) - Li(x)| \leq Cxe^{-\alpha(\log x)^{\frac{3}{5}}}(\log(\log x)^{-1/5}$ para algum valor das constantes α e C (independente de x). Em particular, para qualquer k>0 existe C>0 tal que, para todo x, $|\pi(x) - Li(x)| \leq C\frac{x}{(\log x)^k}$, o que mostra que li(x) e x/(logx-1) é uma aproximação de $\pi(x)$ bem melhor que x/logx (Martinez, 2010, p. 273).

Como consequência do teorema dos números primos, podemos responder a seguinte questão:

"Seja N um número natural muito grande e seja $\pi(N)$ a quantidade de números primos de 1 até N, tome n tal que 1 ≤ n ≤ N. Qual é a probabilidade de n ser primo?"

De acordo com Ribenboim (2015, p. 293), para N grande, pelo teorema dos números primos a probabilidade será dada por: $\frac{\pi(N)}{N} \sim \frac{\frac{N}{logN}}{N} = \frac{1}{logN}$

3.10 Reconhecendo os números primos

Um algoritmo simples para testar se qualquer inteiro positivo *n* é primo, porém considerado muito lento e trabalhoso, é dado pelo cálculo do resto da divisão de n por cada inteiro m com $2 \leq m \leq \sqrt{n}$, isso devido ao matemático grego Eratóstenes, se o resto for *0* em algum caso então n é composto e encontramos um divisor, se isto nunca ocorrer, n é primo (Martinez, 2010, p. 291).

Lema 3.10.1 Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo (Hefez, 2014, p. 151).

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que n não seja divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$ e que não seja primo. Seja q o menor número primo que divide n; então, $n = q.n_1$, com $q \leq n_1$. Segue daí que $q^2 \leq q.n_1 = n$. Logo, n é divisível por um número primo q tal que $q^2 \leq n$, absurdo.

□

Ribenboim (2015, p. 23), mostra um procedimento inventado na Grécia Antiga para encontrar primos sem ter que fazer divisões chamado "O Crivo de Eratóstenes", e o descreve para encontrar os primos de *0* até *100* da seguinte maneira:

1º) Escreva dez linhas de números ímpares, como abaixo

Tabela 2 – O Crivo de Eratóstenes

01	03	05	07	09
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

51	*53*	*55*	*57*	*59*
61	*63*	*65*	*67*	*69*
71	*73*	*75*	*77*	*79*
81	*83*	*85*	*87*	*89*
91	*93*	*95*	*97*	*99*

Fonte: Ribenboim (2015, p. 22-24)

2º) Elimine o número *1*.

3º) Não elimine o número *3*, salte três números, elimine o *9* e salte três números, elimine o *15*, e continue, desta forma.

4º) O menor número que ainda não foi eliminado é o *5*, não o elimine, salte cinco números e chegue ao *15*, que já foi eliminado anteriormente. Salte cinco números e elimine o *25*, repita esse processo.

5º) O menor número que ainda não foi eliminado é o *7*, não o elimine. Salte então, sete números e chegue ao *21*, que já foi eliminado anteriormente. Salte mais sete números e chegue ao *35*, que já foi anteriormente. Salte mais sete números e chegue ao *35*, que já foi eliminado. Salte, então, mais sete números e elimine o *49*. Repita esse processo.

Os números primos menores que *100*, são *2* e os que não foram eliminados sendo todos eles: *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 57, 71, 73, 79, 83, 89, 97*.

Em Hefez (2014, p. 241) podemos encontrar um critério de primalidade para verificar se um número maior que 4 é primo, calculando $(n – 1)! + 1$ e verificando se esse número é divisível por n.

3.11 Primos Gêmeos

Os números além de serem primos podem ter outras características curiosas que foram percebidas e pesquisadas, uma delas é que alguns deles também podem ser primos gêmeos.

Teorema 3.11.1. Dois números primos p e q são chamados primos gêmeos quando $|p - q| = 2$. (Martinez, 2010, p. 274).

Para caracterização dos primos gêmeos seguem a princípio alguns assuntos primordiais que são os de congruência, o pequeno teorema de Fermat e o teorema de Wilson.

3.11.1 congruência

Definição. Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se $a \equiv b \bmod m$. (Hefez, 2014, p. 192).

3.11.2 O Pequeno Teorema de Fermat

Teorema 3.11.2. Se p é um número primo e se a é um número natural, então $a^p \equiv a \bmod p$. Em particular, se p não divide a, então $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. (Ribenboim, 2012, p. 15)

Demonstração. O resultado é verdadeiro para $a = 1$. Suponhamos seja verdadeiro para $a \geq 1$, então por recorrência, temos $(a + 1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \bmod p$, porque os coeficientes binomiais $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$, $1 \leq k \leq p - 1$, são múltiplos de p. O teorema é então verdadeiro para todo número natural a. □

3.11.3 O Teorema de Wilson

Teorema 3.11.3. Se p é um número primo, então $(p - 1)! \equiv -1 \bmod p$. (Ribenboim, 2012, p. 18).

Demonstração. Trata-se de nada mais do que um corolário do pequeno teorema de Fermat. Com efeito, $1, 2, ..., p-1$ são raízes da congruência $X^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$. Ora, uma congruência módulo número primo p não pode ter mais raízes do que o seu grau.

Assim, $X^{p-1} - 1 \equiv (X - 1)(X - 2) \ldots (X - (p - 1)) \bmod p$.

Comparando os termos constantes, $-1 \equiv (-1)^{p-1}(p - 1)! \equiv (p - 1)! \bmod p$. (é igualmente verdadeiro para $p=2$). □

Vamos mostrar que vale a recíproca do teorema de Wilson.

Lema 3.11.1 $n|(n-1)!$ para todo número composto $n > 4$ (Hefez, 2014, p. 146).

Demonstração do lema. De fato, suponha que $n = n_1.n_2$ com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Se $n_1 \neq n_2$, podemos supor que $1 < n_1 < n_2$, e portanto, $(n-1)! = 1...n_1...n_2...(n-1)$, o que mostra que $n|(n-1)!$.

Suponha agora que $n_1 = n_2 > 2$. Logo, $(n-1)! = 1...n_1...2n_1...(n-1)$, o que implica também que $n = n_1.n_1$ divide $(n-1)!$. □

Recíproca do Teorema de Wilson (Hefez, 2014, p. 240).

Proposição 3.11.1 Seja $p \geq 2$ um inteiro. Se $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$, então p é primo.

Demonstração. O resultado vale trivialmente para $p = 2$, $p = 3$ ou $p = 4$. Suponhamos que $p > 4$ e não é primo. Temos que $p|(p-1)!$ E, portanto, p não divide $(p-1)! + 1$, o que mostra que $(p-1)!$ não é congruente a $-1 \bmod p$. □

3.12 Caracterização dos primos Gêmeos

De acordo com Ribenboim (2012, p. 183) os primos gêmeos foram caracterizados por CLement em 1949 conforme se encontra logo abaixo.

Seja $n \geq 2$. Os inteiros n e $n + 2$ são ambos primos se e somente se

$4[(n-1)!+1] + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$.

Demonstração. Se a congruência for satisfeita, então $n \neq 2, 4$ e $(n-1)! + 1 \equiv 0 \bmod n$ e, pelo teorema de Wilson, n é primo.

Por outro lado,

$$4(n-1)! + 2 \equiv 0 \bmod (n+2),$$

que multiplicada por $n.(n+1)$, dá:

$$[4(n+1)! + 1] + 2n^2 + 2n - 4 \equiv 0 \bmod (n+2),$$

e então,

$$4[(n+1)! + 1] + (n+2)(2n-2) \equiv 0 \bmod (n+2),$$

logo,

$$(n + 1)! + 1 \equiv 0 \mod (n+2),$$

e de acordo com o teorema de Wilson, $n + 2$ é também primo. □

Reciprocamente, se n e $n + 2$ são primos, então $n \neq 2$

Fazendo n e $(n + 2)$ em p no teorema de Wilson $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \mod p$, teremos:

$$(n - 1)! + 1 \equiv 0 \mod n,$$

$$(n + 1)! + 1 \equiv 0 \mod (n+2)$$

Observe que:

$$(n + 1)! + 1 \equiv 0 \mod (n+2)$$

é exatamente igual a:

$$\text{I)} \qquad (n + 1)\, n(n - 1)! + 1 \equiv 0 \mod (n+2)$$

Observe que,

$$(n + 1)\, n(n - 1)! = [(n + 2)(n - 1) + 2]\, (n - 1)! =$$
$$= (n + 2)(n - 1)\, (n - 1)! + 2(n - 1)!$$

Substituindo em I) teremos:

$$(n + 2)(n - 1)\, (n - 1)! + 2(n - 1)! + 1 \equiv 0 \mod (n+2)$$

Como $(n + 2)$ divide $[(n + 2)(n - 1)\, (n - 1)! + 2(n - 1)! + 1]$ e

$$(n + 2) \text{ divide } (n + 2)(n - 1)\, (n - 1)!$$

Então:

$$(n + 2) \text{ divide } 2(n - 1)! + 1,$$

pois se $x|\,(a + b)$ e $x|\,a$ então $x|\,b$

Logo:

$2(n - 1)! + 1 \equiv 0 \mod (n+2)$, onde $2(n - 1)! + 1 = k(n+2)$, onde k é inteiro.

De:

$$\text{II)} \qquad (n - 1)! + 1 \equiv 0 \bmod n$$

Temos que:

$(n - 1)! = 2.3...(n - 1)$. Portanto par, logo:

$(n - 1)! = 2k$, onde k é inteiro.

Portanto,

$$(n - 1)! + 1 = 2k + 1$$

Substituindo em II) teremos:

$$2k + 1 \equiv 0 \bmod n$$

Porém se multiplicarmos $(2k + 1)$ por $(n + 2)$ poderemos escrever:

$$\text{III)} \qquad (n + 2)\,(2K + 1) \equiv 0 \bmod n(n + 2)$$

Pois se, $a \equiv b \bmod (mn)$, $(m,n) = 1$, então $a \equiv b \bmod (m)$ e $a \equiv b \bmod (n)$,

Como $(n + 2)\,(2k + 1) = (n + 2)\,2k + (n + 2)$

Substituindo em III) teremos:

$$\text{IV)} \qquad (n + 2)\,2K + (n + 2) \equiv 0 \bmod n(n + 2)$$

já vimos que $k(n+2) = 2(n - 1)! + 1$,

Substituindo em IV) teremos:

$$2[2(n - 1)! + 1] + (n + 2) \equiv 0 \bmod n(n + 2)$$

Portanto:

$$4(n - 1)! + 2 + (n + 2) \equiv 0 \bmod n(n + 2)$$

Logo:

$$4(n - 1)! + 4 + n \equiv 0 \bmod n(n + 2)$$

Simplificando temos:

$$4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \bmod n(n + 2) \qquad \square$$

3.13 O Postulado de Bertrand

Na busca de se entender o conjunto dos números primos, outra descoberta importante foi o que é chamado de postulado de Bertrand que afirma que sempre haverá ao menos um número primo entre um certo número positivo $a \in Z$ e seu dobro (Martinez 2010, pag. 181-183).

Teorema 3.13.1. Seja n um inteiro positivo, então sempre existe um primo p tal que

$$n \leq p \leq 2n.$$

Lema 3.13.1 Para todo $n \geq 2$ e sendo p primo, temos $\prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Demonstração do Lema por indução em n.

Para n pequeno tal desigualdade p é válida, além disso, se o resultado vale para $n = 2m + 1$ então também vale para $n = 2m + 2$ pois não agregamos novos primos ao produto quando passamos de $2m + 1$ para $2m + 2$. Logo basta provar a desigualdade para um valor ímpar $n = 2m + 1$.

Dado que para todo primo p tal que $m + 1 < p \leq 2m + 1$ tem-se que p divide $(2m + 1)!$ mas não divide $(m + 1)!$ nem $m!$ então:

$$\prod_{m+1<p<2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m}{m+1} + \binom{2m}{m} < (1+1)^{2m} = 4^m$$

Portanto da hipótese de indução temos que

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \,.\prod_{m+1<p \leq 2m+1} p < 4^{m+1}.4^m = 4^{2m+1}$$

Demonstração do postulado de Bertrand:

Suponha que a afirmação é falsa para algum valor de n e mostraremos que n não pode ser muito grande.

Seja p_i o i-ésimo primo e α_i máximo tal que ${p_i}^{\alpha_i} \mid \binom{2n}{n}$. Como estamos supondo que não há primos entre n e 2n e como nenhum primo entre $\frac{2}{3}n$ e n divide $\binom{2n}{n}$, temos $\binom{2n}{n} = \prod_{p_{i \leq \frac{2n}{3}}} {p_i}^{\alpha_i}$. Sabemos que ${p_i}^{\alpha_i} \leq 2n$ e $\alpha_j \leq 1$ para $p_j > \sqrt{2n}$, logo: $\binom{2n}{n} \leq \prod_{p_{i \leq \sqrt{2n}}} {p_i}^{\alpha_i} \,.\, \prod_{\sqrt{2n} < p_j \leq \frac{2n}{3}} p_j \leq \prod_{p_{i \leq \sqrt{2n}}} 2n \,.\, \prod_{p_{j \leq \frac{2n}{3}}} p_j$. Utilizando o lema anterior, e supondo que n é suficientemente grande de modo que o número de primos entre 1 e $\sqrt{2n}$ é menor que $\sqrt{\frac{n}{2}}$ – 1 (n = 100 é suficiente e a partir deste valor esta hipótese se cumpre já que metade dos números neste intervalo são pares), temos:

$$\binom{2n}{n} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}-1}.4^{\frac{2n}{3}}$$

Por outra parte, $n.\binom{2n}{n} = n.\binom{2n-1}{n} + n.\binom{2n-1}{n-1} > (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$ e assim a desigualdade anterior implica:

$$\frac{2^{2n-1}}{n} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}-1}.4^{\frac{2n}{3}} \rightarrow 2^{\frac{2n}{3}} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

Tomando logaritmo na base 2, obtemos a desigualdade $\frac{2\sqrt{2}}{3}.\sqrt{n} < log_2 n + 1$, que é falsa para todo n > 50. Portanto, se existe um contraexemplo do postulado de Bertrand, este deve ser menos do que 100. Para terminar a demonstração só falta mostrar um primo que cumpra as condições do teorema para todo inteiro menos que 100: tome

p = 2 para 1 ≤ n ≤ 2

p = 5 para 3 ≤ n ≤ 5

p = 11 para 6 ≤ n ≤ 11

p = 23 para 12 ≤ n ≤ 23

p = 47 para 24 ≤ n ≤ 47

p = 79 para 48 ≤ n ≤ 79

p = 101 para 80 ≤ n ≤ 100

3.14 Existem fórmulas para números primos?

Vários matemáticos fracassaram ao tentar elaborar uma fórmula que gerasse todos os números primos, porém algumas fórmulas funcionam, mas somente em um intervalo restrito.

Em Sautoy (2007, p. 54) é citada a fórmula: $x^2 + x + 41$ que gera números primos, descoberta por Euler, basta substituir o valor de x por 0 ou qualquer um dos números naturais até *39*.

Em Eves (2004, p. 623) foram apresentadas as seguintes fórmulas para números n inteiros positivos:

$f(n) = n^2 - n + 41$ fornece primos para todo $n < 41$.

$f(n) = n^2 - 79n + 1601$ fornece primos para $n < 80$.

Watanabe (RPM37) apresenta uma fórmula simples que fornece todos os números primos e somente esses da seguinte maneira:

Sejam x e y números naturais, $y \neq 0$ e $a = x(y + 1) - (y! + 1)$.

A fórmula que dá todos os números primos e somente esses é:

$$f(x,y) = \frac{y-1}{2}[|a^2 - 1| - (a^2 - 1)] + 2$$

Demonstração. A demonstração baseia-se no Teorema de Wilson, usando esse teorema:

Vamos provar que $f(x,y)$ é sempre um número primo:

O número a é um número inteiro e, portanto, a^2 é inteiro. Há dois casos:

$a^2 \geq 1$ ou $a^2 = 0$.

Se $a^2 \geq 1$. $|a^2 - 1| = a^2 - 1$ e $f(x,y) = 0 + 2 = 2$.

Se $a^2 = 0$, $f(x,y) = (\frac{y-1}{2}).2 + 2 = y - 1 + 2 = y + 1$, neste caso, sendo $a = 0$, temos $x(y + 1) = y! + 1$ e, portanto, $y + 1$ é um número primo.

Agora vamos provar que $f(x,y)$ fornece todos os números primos.

Seja p um número primo. Pelo Teorema de Wilson, $\frac{(p-1)!+1}{p}$ é um número natural e podemos calcular $f\left(\frac{(p-1)!+1}{p}, p-1\right)$.

O valor de a é:

$a = \frac{(p-1)!+1}{p}.p - [(p-1)! + 1] = 0.$

Segue-se que:

$f\left(\frac{(p-1)!+1}{p}, p-1\right) = p - 1 + 1 = p$ □

Exemplos:

Se $x = 1$ e $y = 1$, então $a = 0$ e $f(1,1) = 2$;

Se $x = 1$ e $y = 2$, então $a = 0$ e $f(1,2) = 3$;

Se $x = 1$ e $y = 3$, então $a = -3$ e $f(1,3) = 2$;

E atribuindo-se a x e a y mais alguns valores, percebe-se logo que a função f tem uma predileção muito grande pelo número primo *2*. Mas ela fornece todos os números primos:

$5 = f(4,5); 7 = f(103,6); 11 = f(329891,10); 13 = f(36846277,12);$ ...

Como foram achados os pares (x,y) acima? A receita é simples, para obter o número primo p, calcule $f(x,y)$ para

$x = \frac{(p-1)!+1}{p}$ e $y = p - 1$

Assim, para obter *13*, fizemos:

$x = \frac{12!+1}{13} = 36846277$ e $y = 13 - 1 = 12$

Como se vê a fórmula existe, mas não é nada prática, uma vez que envolve cálculos com números muito grandes, outra coisa a destacar é que o mesmo não ocorre para uma função de uma variável.

4 UMA PROPOSTA DE ENSINO DE NÚMEROS PRIMOS, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A princípio, como podem ser classificados, os tipos de problemas matemáticos?

Butts (1997, p. 33-36) divide o conjunto de problemas matemáticos em cinco categorias que são:

1. **Exercícios de reconhecimento**: são aqueles tipos de exercícios onde normalmente são pedidos para que se reconheça ou se recorde de um fato específico, definição ou enunciado de algum teorema.
2. **Exercícios algorítmicos**: são aqueles exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo, geralmente um algoritmo numérico.
3. **Problemas de aplicação**: nesta categoria se incluem os problemas tradicionais, que exigem sua resolução, nestes normalmente se envolvem algoritmos aplicativos.
4. **Problemas de pesquisa aberta**: são aqueles que, no enunciado, pede-se para provar ou encontrar algo, ou outras diversas variações, que no enunciado não há uma estratégia para resolvê-los.
5. **Situações-problemas**: nestes são incluídas situações nas quais uma das etapas seria identificar o problema, onde a solução irá melhorar essa situação, aqui não se incluem problemas propriamente ditos, por exemplo, ao invés de se dizer aos alunos para resolverem um problema, apresentar a eles uma situação e dizer para pensarem nela.

Classificados os tipos de problemas matemáticos, como resolvê-los?

De acordo com Dante (2007, p. 22), Polya já citava uma estratégia, em quatro etapas, para ajudar na resolução de problemas. Essas etapas se dividiriam em compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer uma verificação.

Diferente de Butts e Dante, para Schoenfeld (1997, p. 14-15) a resolução de problemas não é algo rígido, não é pautada por receitas, como um roteiro generalizável, mas acontece enquanto processos de descoberta, algo fluído onde deve haver a discussão de soluções e propõe algumas heurísticas importantes na resolução de problemas.

Tabela 3 – Algumas Heurísticas importantes na resolução de problemas

Analisando e entendendo um problema:
1. Desenhe um diagrama, se for possível.
2. Examine casos particulares para:
a) exemplificar o problema;
b) explorar as várias possibilidades, através de casos com limitações; e
c) encontrar padrões de indução fazendo os parâmetros inteiros iguais sucessivamente a 1, 2, 3, ...
3. Tente simplificar, usando simetria ou “sem prejuízo da generalidade”.
Delineando e planejando uma solução:
1. Planeje as soluções hierarquicamente.
2. Seja capaz de explicar, em qualquer momento da resolução, o que você está fazendo e porque; o que você fará com o resultado dessa operação.
Explorando soluções para problemas difíceis:
1. Considere uma variedade de problemas equivalentes:
a) substitua a condicionante por outras equivalentes;
b) recombine elementos do problema de formas diferentes;
c) introduza elementos auxiliares;
d) reformule o problema:
1) com uma mudança de perspectiva ou notação;

2) argumentando por contradição ou contra positivamente; ou

3) assumindo uma solução e determinando as propriedades que ela precisa ter.

2. Considere ligeiras modificações do problema original:

   a) Escolha metas secundárias e tente alcança-las;

   b) Desconsidere uma condicionante e, depois, tente impô-la novamente;

   c) Decomponha o problema e trabalhe nele, parte por parte.

3. Considere modificações amplas do problema original:

   a) Examine problemas análogos com menor complexidade (menos variáveis);

   b) Explore o papel de uma única variável ou condicionante deixando o resto fixo;

   c) Explore algum problema de forma, dados ou conclusões similares; tente explorar o resultado e o método.

Verificando uma solução:

1. Use estes testes específicos: A solução usa todos os dados? É adequada a estimativas razoáveis? Resiste a testes de simetria, análise de dimensões, escala?

2. Uses estes testes gerais: Pode ser obtida de forma diferente? Pode ser comprovada em casos particulares? Reduzida a resultados conhecidos? Pode gerar alguma coisa que você conhece?

Fonte: KRULIK; REYS (1997, p. 14-15)

Para se utilizar de tais modelos e aplicá-los em uma proposta, seria importante entender como está organizado o currículo da educação básica atualmente.

Nas escolas do estado de São Paulo o currículo é elaborado pela Secretaria da Educação do Estado. No currículo do Estado de São Paulo (2010, p. 57-70), estão elaborados, até o ano de 2018 (com algumas mudanças a partir de 2019), o conteúdo de matemática ao longo do ensino fundamental (nesse caso, do 6º ao 9º ano) e médio, todos organizados no anexo desta dissertação.

4.1 Uma Proposta

Em uma proposta visando um ensino-aprendizado acompanhado de compreensão e significado no objetivo de trabalhar um objeto matemático através da resolução de problemas, Onuchic (1999, p. 215-217), com a participação de professores, apresenta as seguintes etapas:

- 1ª etapa - O professor forma grupos e entrega uma atividade, pois muitas vezes um resultado afirmativo de um objetivo vem do esforço em grupo, e é importante que os estudantes participem deste progresso aprendendo uns com os outros. Além disso, nesse modelo de trabalho o professor passa a ser o mediador e incentivador, que levará os alunos a pensarem através de intermediações.
- 2ª etapa - Após todos os grupos terminarem o trabalho, o professor anota todos os resultados obtidos pelos grupos na lousa, independentemente se estão certos ou errados.
- 3ª etapa - Após a etapa anterior, o professor chama os alunos de todos os grupos para uma breve plenária, para defenderem seus pontos de vista.
- 4ª etapa - A partir daqui, os resultados são analisados e explorados, no objetivo de trabalhar pontos de dificuldades, podendo surgir outros problemas, que deverão ser trabalhados.
- 5ª etapa - Após a análise dos resultados e dúvidas sanadas, o professor juntamente com os alunos busca um consenso sobre o resultado que se pretende encontrar.
- 6ª etapa - Por fim, vem a formalização do resultado, onde o professor em conjunto com os alunos faz uma síntese do que se tinha como objetivo aprender a partir do problema gerador. A partir de então são inseridas as definições, propriedades e demonstrações acerca do assunto em questão, se

destacando também, a partir de então, as terminologias próprias de cada assunto.

Nesse modelo, os assuntos surgem a partir de um problema gerador, porém, esse trabalho é aberto à possibilidade do uso de recursos auxiliares, é importante destacar que a proposta de Onuchic sobre resolução de problemas aproxima-se pragmaticamente daquela de Schoenfeld, mas também não se define por um roteiro que é trabalhado individualmente.

4.2 Utilizando a proposta

Mediados pela bibliografia disponível nas referências bibliográficas, utilizando o currículo e a proposta de Onuchic (indicados acima), foi possível elaborar vários problemas (que se encontram no capítulo seguinte), que serão os geradores dos conceitos e conceitualizações de números primos, que poderão ser utilizados unindo-os com a sugestão proposta, conforme indicado anteriormente.

Ao elaborar os problemas, a ideia foi usar as propostas do currículo, porém, acrescentando e desenvolvendo conceitualizações de números primos em cada situação abordada, adicionando nesse processo, algumas informações.

Suponha que se queira ensinar o teorema de Tales por exemplo. Então, à luz da proposta sugerida, faríamos assim:

O professor, de acordo com a 1ª etapa mencionada, forma grupos e entrega uma atividade que pode ser o seguinte problema:

Supondo que certo tipo de bloco, no formato de paralelepípedo, tenha 20 cm de altura e 20 cm de comprimento.

a) Qual a quantidade x de blocos será necessária para se construir um muro de 2 metros de altura e 1,94 metros de comprimento?
b) Verifique que o número x correspondente à quantidade de blocos utilizados para se fazer o muro é um número primo seguindo os seguintes passos:

- 1º utilize uma calculadora para encontrar a raiz quadrada de x.
- 2º verifique que x não é divisível pelos números primos menores que a raiz quadrada de x.

Então segue-se as demais etapas, apresentadas em 4.1, por fim, na 6ª etapa, formalizamos o resultado. Neste momento, o professor em conjunto com os alunos, sintetiza o objetivo inicial e insere as definições, propriedades e demonstrações acerca do teorema de Tales, aproveitando para discutir sobre os números primos, com destaque para as terminologias próprias do assunto.

Contudo, espera-se que, algumas conceitualizações sobre os números primos sejam introduzidas e adicionadas juntamente com outros conhecimentos pré-estabelecidos, e ao trabalhar a proposta, utilizar para isso a metodologia de resolução de problemas.

5 ALGUNS PROBLEMAS GERADORES

Entenda problemas geradores como os problemas que serão introduzidos como motivador dos conceitos matemáticos que se quer propor.

A ideia desde o início foi o de agregar conhecimento e interesse ao aluno sobre os números primos.

Utilizando o ensino através da resolução de problemas, as ideias propostas nos capítulos anteriores e com base nos exercícios e problemas sugeridos por Dante (2016), segue abaixo, uma lista de problemas geradores de conceitos do ensino fundamental e médio.

Em cada problema, foram incluídos vários conceitos e informações a respeito dos números primos que foram mencionados no decorrer dos capítulos anteriores. Entre parênteses está indicado, juntamente com o problema, o assunto que poderá ser gerado. No apêndice segue algumas sugestões de resolução para esses problemas.

É importante entender que apesar de se tratar de problemas geradores específicos numa seção determinada, os mesmos são apenas exemplos para servirem de motivação, podendo ser adaptados, modificados ou simplesmente servir de inspiração para elaboração de outros, de acordo com a realidade de cada um.

5.1-Problemas geradores de conteúdos propostos na 5ª série ou 6º ano do Ensino Fundamental

5.1.1- (Múltiplos e Divisores) - Um número maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de número primo. Qual a quantidade de números primos entre 1 e 50?

5.1.2- (Potenciação) - Uma pessoa carrega consigo 3 bolsas grandes. Cada bolsa tem 3 bolsas menores. Cada bolsa menor tem 3 canetas.

a) Quantas canetas essa pessoa está carregando?
b) Sabendo-se que um número maior do que 1 e que não é primo, é chamado número composto. Um número natural maior do que 1, elevado a um expoente natural maior do que 1, é um número composto? Por que?

5.1.3- (Operações básicas) - Calculando 15 + 5.5 – 10:2 teremos como resultado um número primo? Por que?

5.1.4- (M.M.C e M.D.C) - Encontre todos os divisores de 16 e os divisores de 8 e responda:

a) Quais deles são divisores comuns?
b) Qual o máximo divisor comum de 16 e 8? Sabendo-se que é o maior dentre os divisores comuns.
c) Dois números inteiros serão ditos primos entre si, ou coprimos, se o m.d.c (máximo divisor comum) entre eles for igual a 1. Conhecendo o máximo divisor comum de 16 e 8, indicado por m.d.c (16,8), é correto afirmar que os números 16 e 8 são primos entre si? Justifique.

5.1.5- (Decomposição em fatores primos) - Todo número natural maior do que 1, ou é primo ou é um produto de números primos. Quais são os números primos que quando multiplicados, formam o número 30?

5.1.6- (Formas geométricas) - Suponha que a capacidade de certa garrafa, equivale à capacidade de 8 copos. Ao usarmos 2 garrafas Cheias para encher um recipiente, é correto afirmar que a quantidade de copos que serão necessários para encher o mesmo recipiente será um número primo? Por que?

5.1.7- (Geometria) - Uma piscina retangular de duas raias tem 15m de comprimento e 7m de largura. Desenhe essa piscina em seu caderno de maneira que as medidas das larguras das duas raias sejam números primos.

5.1.8- (Geometria) - Desenhe um triângulo cujo perímetro seja um número composto.

5.1.9 - (Área) - O Teorema Fundamental da Aritmética diz que todo número natural maior do que 1, ou é primo ou é um produto de números primos, sendo assim, se a medida da área de um retângulo for um número composto, é correto afirmar que a medida da base e da altura desse retângulo são números primos? Faça um desenho.

5.1.10- (Estatística) - Em uma determinada avenida, observou-se a quantidade de carros que passou nas 10 primeiras horas do dia, e o resultado obtido para cada hora foi, respectivamente, os 10 primeiros números primos. Organize esses dados em uma tabela e faça um gráfico, então responda qual a média de carros que passa por essa rua em uma hora?

5.2- Problemas geradores de conteúdos propostos na 6ª série ou 7º ano do Ensino Fundamental

5.2.1- (Sistema de numeração) - Considerando que no calendário cristão, o marco zero é marcado como sendo o nascimento de Cristo, onde a partir daí, vêm as notações a.C (antes de Cristo) para datas antes desse marco e d.C (depois de Cristo) para datas após esse marco, responda:

a) De acordo com o enunciado, como ficaria a notação do ano de nascimento de uma pessoa que viveu 90 anos e veio a falecer em 30 d.C? Qual era a idade desta pessoa, quando o calendário estava em seu marco zero?
b) Quantos números primos e quantos números compostos o calendário atingiu a partir do marco zero até a data que esta pessoa veio a falecer?

5.2.2- (Números negativos) - Em um banco, uma pessoa está com um saldo negativo de R$ 55,00. Porém, ao fazer um depósito de certa quantia, fica com um saldo positivo de R$25,00. Analisando a situação responda:

a) Qual a fração que representa o saldo positivo em relação à quantidade depositada?
b) Pense em dois números primos, se a diferença entre eles for igual a 2, então eles são primos gêmeos. O numerador e o denominador da fração representada são primos gêmeos? Por que?

5.2.3- (Geometria) - Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180°, responda:

a) Quais os ângulos de um triângulo cujas medidas são todas congruentes?
b) O Teorema Fundamental da Aritmética diz que todo número natural maior do que 1, ou é primo ou é um produto de números primos. Sendo assim, o produto de quais números primos, formam o número que equivale a metade da medida de um ângulo de um triângulo equilátero?

5.2.4- (Construções geométricas) - Faça um desenho, no seu caderno, de um paralelepípedo e responda:

a) Qual a quantidade de arestas, vértices e faces?
b) Os números correspondentes à quantidade de faces e arestas são primos entre si? Justifique.

5.2.5- (Álgebra) - O postulado de Bertrand diz que sempre haverá um número primo p tal que $n \leq p \leq 2n$, onde n é um número inteiro positivo, sendo assim:

a) Quantos números há de n a 2n se n for igual a 1? E se n for igual a 2? E se n for igual a 3? E se n for igual a 4?
b) Quantos números primos p há, de n a 2n, se n for igual a 1? E se n for igual a 2? E se n for igual a 3? E se n for igual a 4?
c) Observe os números de n até 2n para n igual a 1, 2, 3 e 4 e verifique qual a razão da quantidade de números naturais, para a quantidade de números primos, que vão de n até 2n.

5.2.6- (Porcentagem) - Em uma urna há 50 bolas numeradas de 1 a 50, qual a chance de se sortear uma bola numerada com um número primo? E de se sortear uma bola numerada com o maior número primo entre 1 e 50?

5.2.7- (Álgebra) - Uma maneira de saber se um número n maior que 1 é primo é, verificando se n não é divisível por nenhum número primo menor que $\sqrt{n}$. Verifique essa afirmação para:

a) n = 11
b) n = 17
c) n = 29

5.2.8- (Equação) - Vários matemáticos fracassaram ao tentar elaborar uma fórmula que gerasse todos os números primos, porém algumas fórmulas funcionam se colocarmos condições. Por exemplo, Euler percebeu que a fórmula $x^2 + x + 41$ gera números primos apenas se x for zero ou um dos primeiros 39 números naturais. Escolha 5 números e verifique a validade da afirmação para esses casos particulares.

5.2.9- (Equação) - Elabore:

a) Uma equação que tenha um número primo como solução.
b) Uma equação com duas incógnitas que tenham como solução dois números que são primos entre si (obs.: dois números naturais são primos entre si quando o máximo divisor comum entre eles é igual a 1).
c) Uma equação com duas incógnitas que tenha números primos gêmeos como solução (obs.: números primos gêmeos, são qualquer par de números primos cuja diferença é igual a 2).

5.2.10- (Equação) - Uma pessoa vai a uma loja e compra 1 lápis por 80 centavos, 2 canetas, onde cada caneta custa 1 real, e uma bolsa no valor de 50 reais. Quanto essa pessoa teria que adicionar para que a soma dos valores desses itens seja um número primo?

5.3-Problemas geradores de conteúdos propostos na 7ª série ou 8º ano do Ensino Fundamental

5.3.1- (Números racionais) - Dê dois exemplos de frações com o numerador igual a 1 e o denominador igual um número dentre os cinco primeiros primos tal que sua representação decimal seja uma dízima periódica.

5.3.2- (Potenciação) - É possível que a potência p^n, com p e n pertencente ao conjunto dos números naturais e maiores do que 1, seja um número primo? Justifique.

5.3.3- (Expressões algébricas) - Qual é o número que adicionado a sua metade, menos o único número primo que é par, é igual a 13?

5.3.4- (Expressões algébricas) - Dados dois números primos p e q, se a diferença entre eles for igual a 2, então dizemos que p e q são números primos gêmeos, um exemplo seria os números 3 e 5. Sendo assim, represente o enunciado do problema algebricamente.

5.3.5- (Expressões algébricas) - Na tentativa de criar uma fórmula que gere números primos, um monge francês chamado Marin Mersenne, que viveu no século XVII, percebeu que a fórmula $2^n - 1$ gera números primos quando substituímos n por alguns números primos.

a) Verifique a validade desta afirmação substituindo n por 2, 3 e 5.

b) Você conseguiria encontrar mais algum valor para n, tal que a fórmula gere algum outro número primo?

c) Verifique que para n = 11 a fórmula 2n – 1 tem o mesmo resultado que 23x89 e sendo assim, a fórmula falha, pois não gera um número primo nesse caso.

5.3.6- (Sistemas de equações) - Encontre dois números x e y, tais que sua soma seja igual a 45, sendo x igual ao dobro de y. Verifique que o postulado de Bertrand é válido ao se colocar os números encontrados em ordem crescente (o postulado de Bertrand diz que se x é um número inteiro positivo então sempre existe um número primo p tal que $x \leq p \leq 2x$).

5.3.7- (Gráficos) - Localize os pontos (x,y), para x=y, onde x, são números primos menores do que 15.

5.3.8- (Gráficos) - Para ir de casa até um parque, uma pessoa andou 80 metros para o norte e 60 metros para o oeste.

a) Represente essa trajetória com um desenho.

b) No desenho, trace uma trajetória alternativa de forma que a pessoa ande a menor distância possível. Qual foi essa distância

c) De acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética, todo número natural maior do que 1, ou é primo ou é um produto de números primos. Represente a medida das duas trajetórias em fatores primos.

5.3.9- (Teorema de Tales) - Supondo que certo tipo de bloco, no formato de paralelepípedo, tenha 20 cm de altura e 20 cm de comprimento.

a) Qual a quantidade x de blocos será necessária para se construir um muro de 2 metros de altura e 1,94 metros de comprimento?

b) Verifique que o número x correspondente à quantidade de blocos utilizados para se fazer o muro é um número primo seguindo os passos:

- 1º utilize uma calculadora para encontrar a raiz quadrada de x.
- 2º verifique que x não é divisível pelos números primos menores que a raiz quadrada de x.

5.3.10- (Área de polígonos) - Desenhe um polígono qualquer e um prisma, com dimensões tais que a área x do polígono e o volume y do prisma tenham valores numéricos que sejam primos entre si.

5.4-Problemas geradores de conteúdos propostos na 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental

5.4.1- (Conjuntos numéricos) - Para se verificar se um número n maior que 1 é ou não primo, primeiro extraiu-se a raiz quadrada de n, e depois verificou-se se n não é divisível por nenhum número primo menor ou igual a $\sqrt{n}$, utilize este método para verificar se o número 441 é primo ou composto.

5.4.2- (Notação científica) - Números muito grandes e números muito pequenos, geralmente são escritos em notação científica, ou seja, na forma $a.10^n$, com $1\leq a<10$, onde n é um número inteiro. Escreva o produto dos números primos 991 e 997 em notação científica.

5.4.3- (Equações) - Vários matemáticos fracassaram ao tentar elaborar uma fórmula que gerasse todos os números primos, porém algumas fórmulas funcionam, mas somente em um intervalo restrito. Encontre ao menos três números para x, tal que as fórmulas abaixo gerem um número primo.

a) $x^2 + x + 41=$
b) $x^2 - x + 41=$
c) $x^2 - 79x + 1601=$

5.4.4- (Funções) - Na metade do século XIX, um matemático alemão chamado Bernhard Riemann abordou o problema de decifrar alguma ordem nos números primos, para isso ele utilizou a função ζ(s) (lê-se zeta de s), que seria a soma $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$ porém antes dele, o matemático Suíço Leonhard Euler já havia provado que essa soma seria igual ao produto $\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} . \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{13^s}}$ ... para s>1, perceba que na soma aparece todos os números naturais e no produto os números primos. Utilize s=2 para os cinco primeiros termos da soma e do produto e compare as duas respostas.

5.4.5- (Equações) - Encontre mentalmente os valores de a e b, tal que (x-a).(x-b) = 6 quando x=5, sabendo que a e b são primos entre si, ou seja, m.d.c (a,b)=1. Use os números a e b encontrados e desenvolva novamente a equação a fim de encontrar o valor x, e verifique que para este caso teremos x=0 ou x=5.

5.4.6- (Proporcionalidade) - Em uma classe com 40 alunos, 35 são meninas e 15 são meninos. De acordo com essa situação:

a) Escreva na forma de fração, a razão entre o número de meninos e o total de alunos da classe. (obs. Não se esqueça de simplificar a fração).
b) Escreva na forma de fração, a razão entre o número de meninas e o total de alunos da classe. (obs. Não se esqueça de simplificar a fração).
c) Observando as frações, obtidas nos itens a e b, podemos afirmar que para cada uma delas, os números que estão no numerador e no denominador são primos entre si? Justifique.

5.4.7- (Semelhança de triângulos) - Dados dois triângulos retângulo A e B sendo A um triângulo de lados 2 e 3 e hipotenusa igual a 5 e B um triângulo de lados 6 e 9 e hipotenusa igual a 15.

a) Mostre que os triângulos A e B são semelhantes.
b) Construa um triângulo isósceles C, de maneira que a medida de algum de seus lados e a hipotenusa de A sejam primos gêmeos.

5.4.8- (O número π) - Observe o número 3,1415926536, esse é o número π (pi) com apenas algumas casas decimais. Utilize os algarismos que formam o número mostrado e escreva:

a) 3 pares de números que são primos entre si
b) Números que são primos gêmeos

5.4.9- (Área) - Calcule a área de uma região retangular, sabendo que um dos lados mede 17 cm e a medida do outro lado em cm é igual ao 5º número primo ímpar.

5.4.10- (Probabilidade) - Quantos números de dois dígitos, podem ser formados utilizando apenas números primos menores do que 10, sem que haja repetição de dígito em cada número formado?

5.5-Problemas geradores de conteúdos propostos na 1ª série do Ensino Médio

5.5.1- (Sequências) - Escreva no caderno, o conjunto dos números primos que existem de 1 até 100. Quantos números primos você registrou?

5.5.2- (Sequências) - Observando a sequência de números primos onde p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7,..., encontre os números primos correspondentes a:

a) p_{10}=
b) p_{20}=
c) p_{25}=

5.5.3- (Funções) - Na metade do século XIX, um matemático alemão chamado Bernhard Riemann abordou o problema de decifrar alguma ordem nos números primos, para isso ele utilizou a função ζ(s) (lê-se zeta de s), que seria a soma $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$ porém antes dele, o matemático Suíço Leonhard Euler já havia provado que essa soma fatorada seria $\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{13^s}}$ ... para s>1, perceba que na soma aparece todos os números naturais e no produto, os números primos. Utilizando ζ(s) na forma de soma e também de produto para os cinco primeiros termos:

a) Calcule $\zeta(2)$:
b) Faça uma análise dos resultados de $\zeta(2)$ na forma de soma e de produto e escreva suas conclusões.

5.5.4- (Funções) - A partir do matemático alemão Gauss (1777-1855) surgiu o costume de usar o símbolo π(N) para expressar o número de primos de 1 até N, sendo N um número natural. A partir desta explicação, calcule:

a) π(10)
b) π(50)
c) π(100)

5.5.5- (Função de 2º grau) - Vários matemáticos fracassaram ao tentar elaborar uma fórmula que gerassem todos os números primos, porém algumas fórmulas funcionam, mas somente em um intervalo restrito. Nos casos abaixo, encontre ao menos 5 valores para x, de maneira que f(x) seja um número primo.

a) $f(x) = x^2 + x + 41$
b) $f(x) = x^2 – x + 41$
c) $f(x) = x^2 – 79x + 1601$

5.5.6- (Função exponencial e Logarítmica) - Gauss (1777-1855), conjecturou o que hoje é conhecido como o teorema dos números primos. Esse teorema dá uma estimativa de quantos números primos existem de 1 até um inteiro N. Segundo essa informação, para números N grandes teremos que π(N) se aproxima de N/ln(N). Sendo assim, utilizando uma calculadora, e a fórmula N/ln(N), dê um valor aproximado da quantidade de números primos existem de 1 até N para N igual a:

(obs.: use ln(1.000) = 6,9 ; ln(10.000) = 9,2; ln(100.000) = 11,5)

a) 1.000 e compare com o valor real que é π(1.000) = 168
b) 10.000 e compare com o valor real que é π(10.000) = 1.229
c) 100.000 e compare com o valor real que é π(100.000) = 9.592
d) Faça um comentário sobre os resultados encontrados.

5.5.7- (Função exponencial e logarítmica) - O matemático francês chamado Legendre (1752-1833) acreditou ter corrigido a fórmula que Gauss obteve para estimar a quantidade de primos que existem entre 1 até um inteiro N com a fórmula $\frac{N}{lnN-1,08366}$, Sendo assim, utilizando uma calculadora, e a fórmula $\frac{N}{lnN-1,08366}$, dê um valor aproximado da quantidade de números primos existem de 1 até N para N igual a: (use uma calculadora)

a) 1.000 e compare com o valor real que é π(1.000) = 168
b) 10.000 e compare com o valor real que é π(10.000) = 1.229
c) 1000.000 e compare com o valor real que é π(100.000) = 9.592

5.5.8- (Geometria) - Um prédio, projeta uma sombra no chão, em metros, o equivalente a soma dos quatro primeiros números primos, neste mesmo instante uma pessoa de 1,7 metros projeta, no chão, uma sombra de 1 metro. Qual a altura do prédio?

5.5.9- (Geometria) - Qual a medida x da hipotenusa de um triângulo retângulo, sabendo que x^2 é igual a quantidade de números primos que há de 1 a 100.

5.5.10- (Razões trigonométricas) - Seja x um número equivalente ao décimo nono número composto (obs.: contar a partir de 4), calcule senxº, cosxº e tgxº.

5.6-Problemas geradores de conteúdos propostos na 2ª série do Ensino Médio

5.6.1- (Trigonometria) – Para x = $\frac{\pi}{2}$ os números inteiros resultantes de 3senx e 6(cosx + 1) são primos entre si? Justifique.

5.6.2- (Funções trigonométricas) - Quantos primos gêmeos há entre 0 e o número resultante de 40.sen150º? (Dois números primos são primos gêmeos, quando sua diferença é igual a 2).

5.6.3- (Matrizes) - Crie duas matrizes de ordem 2 de maneira que seus determinantes sejam primos gêmeos.

5.6.4- (Matrizes) - Encontre uma matriz A_{2x2} e uma matriz B_{2x2} de maneira que o determinante de $(A.B)_{2x2}$ seja um número primo.

5.6.5- (Sistemas lineares) - O postulado de Bertrand diz que sendo n um número inteiro positivo, sempre haverá um número primo p tal que $n \leq p \leq 2n$. Elabore um sistema com duas equações e duas incógnitas x e y, de maneira que $x \leq 2 \leq y$.

5.6.6- (Análise combinatória) – Dados n = 1, 2, 3 , 4, 5, 6, para quais valores de n, teremos n! + 1 igual a um número primo?

5.6.7- (Probabilidade) - Suponha um dado cujas faces são formadas pelos seis primeiros números primos. Ao lançar esse dado duas vezes, qual a probabilidade de que os dois números a sair com as faces para cima sejam.

a) Primos gêmeos?
b) Primos entre si?

5.6.8- (Geometria métrica espacial) - Se um número natural n>1 não é divisível por nenhum número primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$, então n é um número primo. Verifique se o volume de um paralelepípedo de dimensões formadas pelos números primos 3, 5 e 7 é um número primo. Justifique sua resposta.

5.6.9- (Geometria métrica espacial) - É possível montar um paralelepípedo reto retangular, cujas medidas são números naturais maiores do que 1, tal que a medida de sua área total seja igual um número primo? Justifique.

5.6.10- (Geometria métrica espacial) - O Teorema Fundamental da Aritmética diz que todo número natural maior do que 1, ou é primo ou é um produto de números primos. Desenhe uma pirâmide regular de base quadrada, com área da base formada pelo produto de dois números primos e altura igual a um número composto que seja coprimo com a medida da área da base.

5.7-Problemas geradores de conteúdos propostos na 3ª série do Ensino Médio

5.7.1- (Geometria Analítica) - Escreva os pares ordenados (4,9), (3,5), (5,7), (2,3), (7,9) e (6,8) em um plano cartesiano ortogonal, logo após, destaque os pares que são:

a) Primos entre si
b) Primos gêmeos
c) Formado por números compostos

5.7.2- (Geometria Analítica) - Considere os pontos $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ e determine o ponto médio de AB de maneira que x_1, uma coordenada de A, seja um número que, substituído em $y_1 = x_1^2 - x_1 + 41$ gere um número primo e x_2, uma coordenada de B, seja um número que, substituído em $y_2 = x_2^2 + x_2 + 41$ gere um número primo.

5.7.3- (Geometria Analítica) - Construa um quadrilátero de vértices A(a,b), B(c,d), C(e,f) e D(g,h) de maneira que os pares de cada um dos vértices sejam todos primos gêmeos.

5.7.4- (Equações algébricas) - Mesmo com dificuldades em conseguir um padrão lógico, vários matemáticos ao analisar a sequência de números primos, tentaram elaborar uma fórmula que gerasse todos os números primos, na revista do professor de matemática de número 37, contém a seguinte afirmação "sejam x e y números naturais, y ≠ 0 e a = x(y + 1) – (y! + 1), a fórmula que dá todos os números primos e somente esses é:

$f(x,y) = \frac{y-1}{2}[|a^2 - 1| - (a^2 - 1)] + 2$ ", verifique a afirmação para:

a) x =1, y = 1
b) x = 1, y = 2
c) x = 1, y = 3

5.7.5- (Funções) - Na metade do século XIX, um matemático alemão chamado Bernhard Riemann abordou o problema de decifrar alguma ordem nos números primos, para isso ele utilizou a função zeta, que seria $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$, para s>1, o matemático Suíço Leonhard

Euler provou que essa soma fatorada é $\zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{13^s}}$ ... para s>1, utilizando apenas os dois primeiros termos, calcule $\zeta(5)$:

a) Utilizando a primeira forma (soma)
b) Utilizando a segunda forma (fatorada)
c) Compare e faça um breve comentário sobre os resultados encontrados nos itens anteriores.

5.7.6- (Funções) - Gauss (1777-1855), conjecturou o que hoje é conhecido como o teorema dos números primos. Esse teorema dá uma estimativa de quantos números primos existem de 1 até um inteiro N. Segundo ele π(N) se aproxima de $\frac{N}{ln(N)}$, onde π(N) é o número de primos que existem de 1 até N. Porém um matemático francês chamado Legendre (1752-1833) acreditou ter corrigido a fórmula que Gauss obteve para estimar a quantidade de primos que existem entre 1 até um inteiro N com a fórmula $\frac{N}{lnN-1,08366}$, Sendo assim, dados que os valores reais de π(1.000), π(10.000), e π(100.000) são respectivamente, 168, 1.229 e 9.592, utilize as fórmulas elaboradas por Gauss e por Legendre:

a) Determine π(1.000)
b) Determine π(10.000)
c) Determine π(100.000)

5.7.7- (Estatística) - Dos dez primeiros números naturais, 4 são números primos, dos cem primeiros, 25 são números primos, dos mil primeiros, 168 são primos, dos dez mil primeiros, 1.229 são primos e dos cem mil primeiros, 9.592 são primos. Utilizando essas informações:

a) Organize os dados em uma tabela
b) Para cada linha da tabela, calcule a razão da quantidade de números naturais para a quantidade de números primos.
c) Elabore um gráfico.

5.7.8- (Medidas de tendência central) - Em uma determinada avenida, se observou a quantidade de carros que iria passar nas 10 primeiras horas do dia, e o resultado obtido para cada hora foi, respectivamente, os 10 primeiros números primos. Organize esses dados em uma tabela e responda.

a) Qual a média de carros que passa por essa rua em uma hora?
b) Calcule a mediana?

5.7.9- (Medidas de tendência central) - Utilize os dez primeiros números primos e calcule:

a) Sua média

b) O desvio médio
c) O desvio padrão

5.7.10- (Medidas de tendência central) - Calcule a média, a mediana, o desvio médio e o desvio padrão para os dez primeiros números primos.

6 APLICAÇÃO DO PROJETO

De acordo com as propostas sugeridas nos capítulos 4 e 5, foi elaborado um projeto (apêndice III) contendo as atividades 1 e 2 (apêndice IV), sendo a atividade 1 um problema envolvendo razão, proporcionalidade direta e inversa inter-relacionando-os com os números primos através da resolução de problemas, e a atividade 2 um problema envolvendo proporcionalidade, escalas e regra de três, também inter-relacionando-os com os números primos pela resolução de problemas e adicionando uma pequena porção da arte das dobraduras.

O projeto foi apresentado à coordenação da Escola Estadual Doutor Henrique Smith Bayma e, após aprovação, aplicado de acordo com o sugerido no capítulo 4 desta dissertação, da maneira que se segue:

O professor pediu para a turma se dividir em grupos que totalizaram em 8 grupos, sendo que 4 grupos eram formados por 4 alunos por grupo e os outros 4 grupos por 3 alunos por grupo, então foi entregue a atividade 1, que em duas questões inicia uma discussão sobre razões e proporcionalidades através de problemas, na busca de trazer sentido a cada um desses conceitos.

Nesse contexto os alunos ainda não tinham algo formalizado a respeito dos conceitos que viriam a conhecer nem mesmo tiveram uma introdução a respeito do que teriam a partir daquele momento, eles ainda não conheciam algumas palavras que apareceram nos enunciados.

A princípio os alunos tiveram dificuldade para interpretar os enunciados, quando percebido que os componentes dos grupos já não conseguiam prosseguir na discussão das questões o professor vinha com a intervenção e explicava para cada grupo, que não conseguia prosseguir, com uma segunda leitura do enunciado acompanhado de exemplos.

Como tinham palavras que os alunos não conheciam isso contribuiu para que eles se sentissem desmotivados na condução dos problemas, a partir do momento em que os grupos não conseguiam prosseguir com as respostas das questões e percebendo que nenhum de seus componentes tinha um plano para as devidas respostas, eles chamavam o professor pedindo esclarecimentos a respeito das questões.

A princípio o professor pedia para os grupos conversarem entre si e procurar um caminho para prosseguirem com o problema.

Em outros momentos o professor lia com o grupo novamente as questões.

Quando o professor notou que a maior parte dos alunos não estava compreendendo o significado de algumas palavras, por exemplo, razão, proporção, grandezas, primos entre si e primos gêmeos, pediu para os alunos grifarem todas as palavras que eles tivessem desconhecimento.

Então os grupos prosseguiram destacando as palavras que não conheciam, em vários momentos o professor relia a questão junto com cada grupo que pedia sua ajuda.

Em alguns momentos, quando o professor entendia que os alunos já tinham usado todos os recursos que possuíam no momento, a fim de não os deixar desmotivados, sugeria o uso da fração para que percebessem uma conexão entre os dados que eram utilizados nas questões, porém sem que fosse definida a palavra razão, em um dos casos, uma aluna disse não saber o que era uma fração, coube então ao professor dar a ela a definição de fração, só então ela recordou do que se tratava.

Findando o tempo de aula, o professor pegou as atividades e pediu aos alunos para pesquisarem em casa as definições de cada palavra que eles haviam grifadas como desconhecidas.

Na aula seguinte, o professor devolveu as atividades para os alunos continuarem a responder a 1ª questão seguindo para a 2ª, alguns alunos tinham feito a pesquisa que o professor tinha pedido, porém, boa parte dos alunos não pesquisou, cabendo ao professor explicar algumas definições de acordo com a necessidade de cada grupo conforme as dificuldades de cada um, o professor que estava sempre andando na sala e observando o desempenho de cada grupo dava assistência com explicações, mas, antes perguntava para os membros do grupo a opinião de cada um, e advertia-os para que todos participassem da solução.

Na atividade 1, os alunos fizeram as duas questões sempre com o auxílio do professor, que os orientavam quando eles não entendiam o significado das palavras.

A atividade 1 foi concluída em duas aulas, na primeira aula foi trabalhada a 1ª questão e na segunda aula a 2ª questão.

Na terceira aula, após todos os grupos terminarem, foi pedido para todos os grupos colocarem na lousa os resultados obtidos, nesta fase os alunos se distribuíram no grupo de maneira que todos participaram escrevendo ao menos um resultado conforme orientados pelo grupo, porém eles sempre tinham antes a preocupação de perguntar ao professor se a resposta que eles iriam por na lousa estava ou não correta, mesmo o professor dizendo a eles para não se preocuparem ainda com isso naquele momento, pois logo iriam ter um momento para discutirem sobre cada resposta.

Então os alunos se dividiam no grupo da seguinte maneira, um ou dois escrevia na lousa o resultado que haviam encontrado em cada questão e outro do grupo lia a questão para a sala, depois escolhiam um dentre eles para dizer o que foi feito em cada questão.

O professor sempre pedia o silêncio da sala para ouvirem a leitura do componente do grupo que iria ler a questão.

O professor incentivava para que todos participassem, de maneira que todos fizeram parte em algum dos momentos, embora tivessem alunos mais tímidos e outros que resistiam em participar, porém a esses, o grupo dava a eles a chance de apenas escreverem os resultados na lousa e então eles vendo que todos estavam participando de alguma forma, então participavam também.

Também tiveram aqueles alunos dos quais pediam para participar e escrever os resultados na lousa.

Logo depois de os resultados estarem na lousa, o professor usou esse momento para discutir com a turma cada questão, pontuando as dificuldades que os alunos tiveram no decorrer da atividade e aproveitando para expandir os assuntos discutidos.

Figura 1 – Alunas colocando na lousa os resultados obtidos

Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

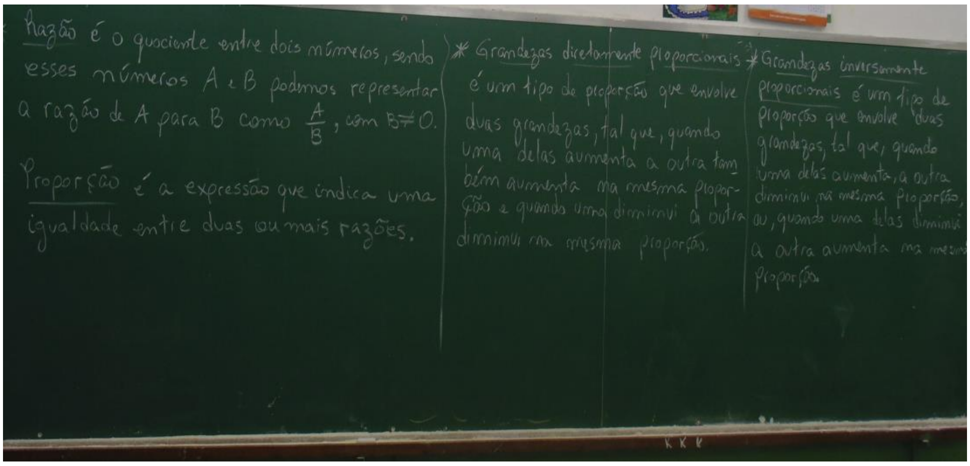
Figura 2 – Alunos colocando na lousa os resultados obtidos

Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Na quarta aula, o professor fez uma revisão de tudo que foi visto nas três primeiras aulas, aproveitando para discutir e formalizar os assuntos, e então, fazer uma síntese do que se tinha como objetivo aprender a partir do problema gerador.

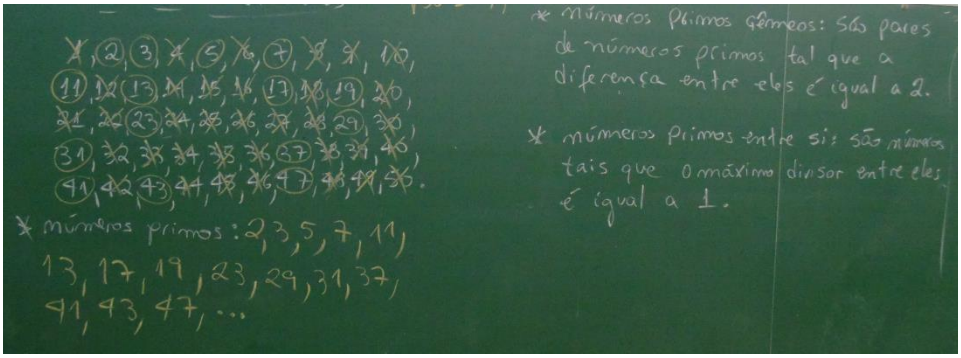
Nessa aula, o professor escreveu na lousa todas as definições dos assuntos que objetivou na atividade 1, então fez um breve comentário sobre cada assunto descrito na lousa.

Figura 3 – Síntese dos assuntos



Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 4 – Síntese dos assuntos referentes aos números primos



Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

O professor utilizou a 5ª e 6º aula para aplicar a atividade 2, na intenção de fixar e colocar na prática alguns conteúdos que se tinham como objetivo ensinar na atividade 1.

A atividade 2 também era formada por problemas, porém nesse tinha o que o professor chamou de mão na massa, pois foi exigido o uso de régua, tesoura e cola.

Nesta etapa, houve uma maior cooperação entre os alunos do que a obtida na atividade 1, todos os grupos entregaram a atividade, houve porém dúvidas a respeito do assunto sobre escalas que apareceu pela primeira vez, os alunos ainda tiveram dúvidas sobre o que eram números primos gêmeos.

Neste caso o professor teve que dar suporte explicando novamente do que se tratava o enunciado e em alguns casos reformulando a questão.

O professor revisou com os alunos quais eram os números primos e o que eram números primos gêmeos.

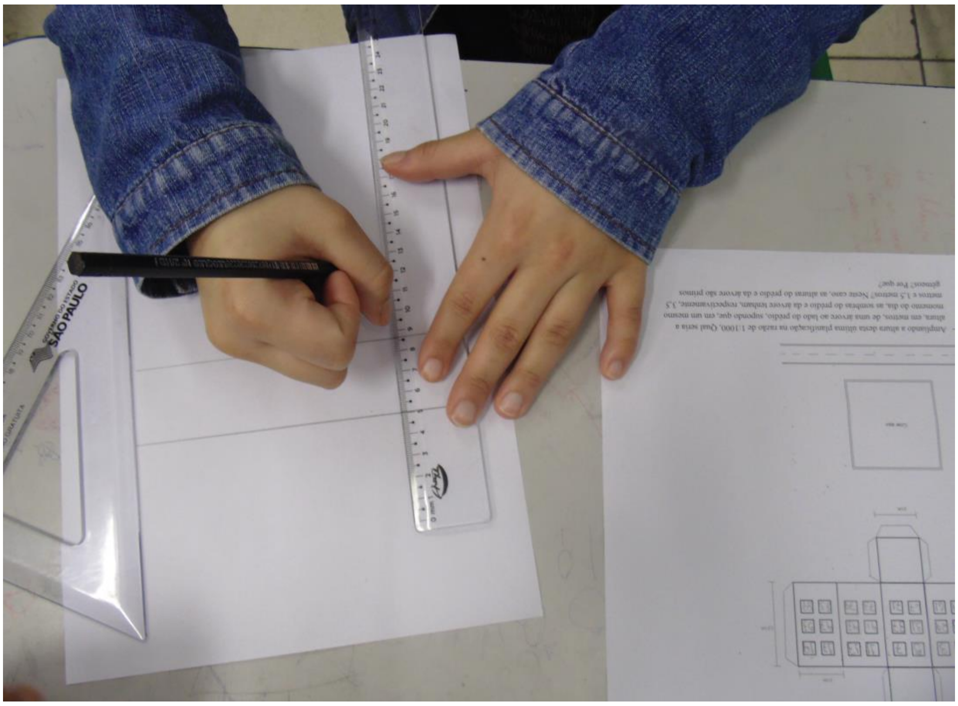
Daí em diante os alunos prosseguiram, e só vieram a ter nova dificuldade na última questão, que era exigida o uso da regra de três, da qual ainda não tinham conhecimento.

Então o professor aproveitou o momento para explicar a eles como utilizar a regra de três para resolver o último problema.

Na atividade 2, os alunos apresentaram mais comprometimento do que na atividade 1, aparentemente o fato de terem que usar outros materiais, em alguns casos também o lápis de cor, chamaram a atenção deles, ao ponto de fazerem silêncio devido o envolvimento com a atividade.

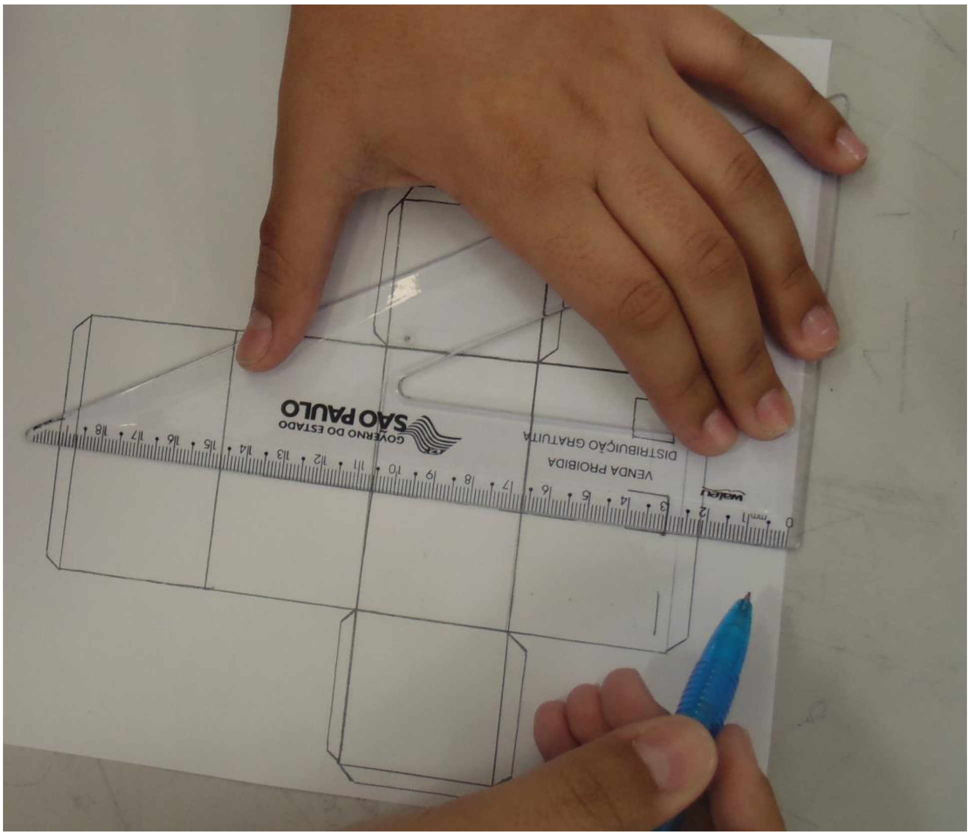
Após concluírem a atividade eles traziam ao professor, que fotografava cada uma e devolvia para levarem para casa. Aparentemente os alunos se sentiam satisfeitos com o feito depois de concluído.

Figura 5 – Iniciando trabalho de ampliação de figura



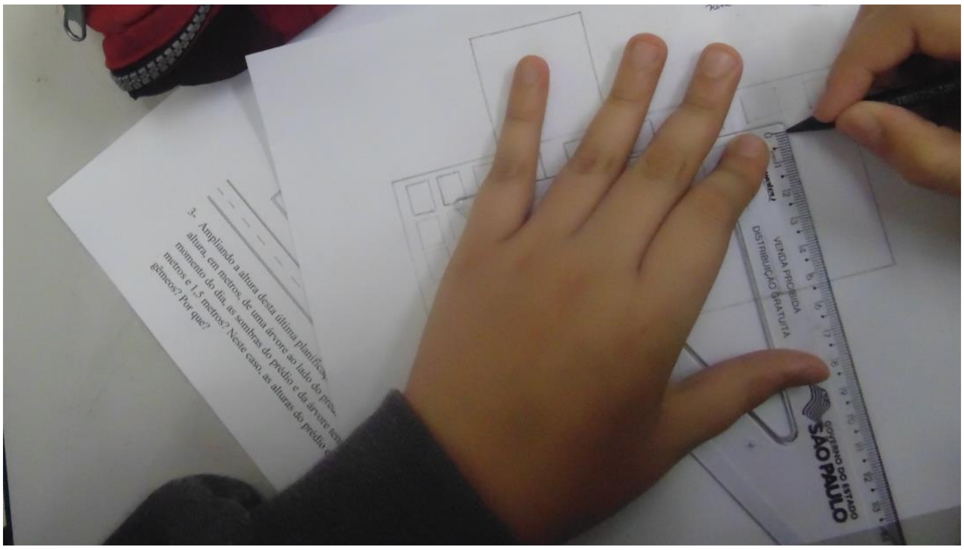
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 6 – Figura em fase de ampliação



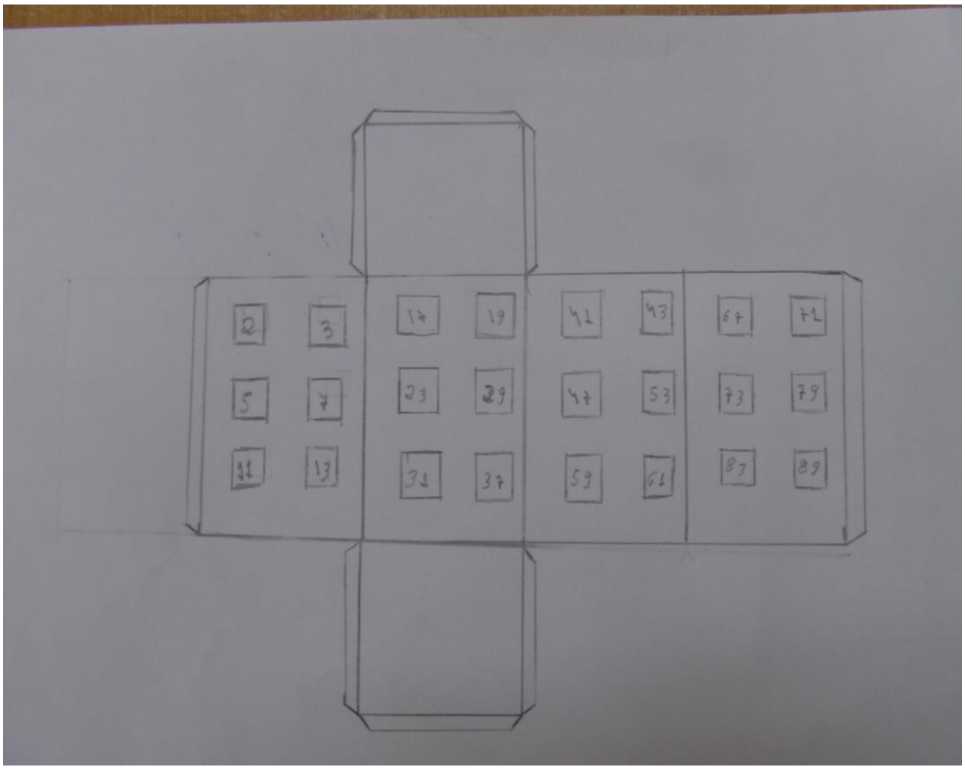
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 7 – Fase final da ampliação da figura



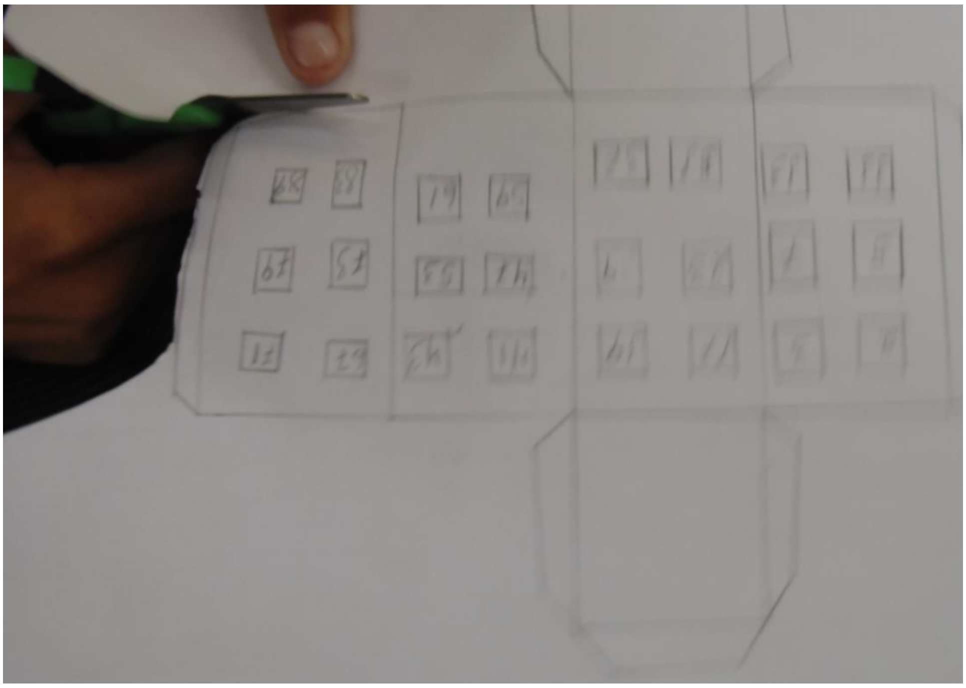
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 8 – Figura ampliada



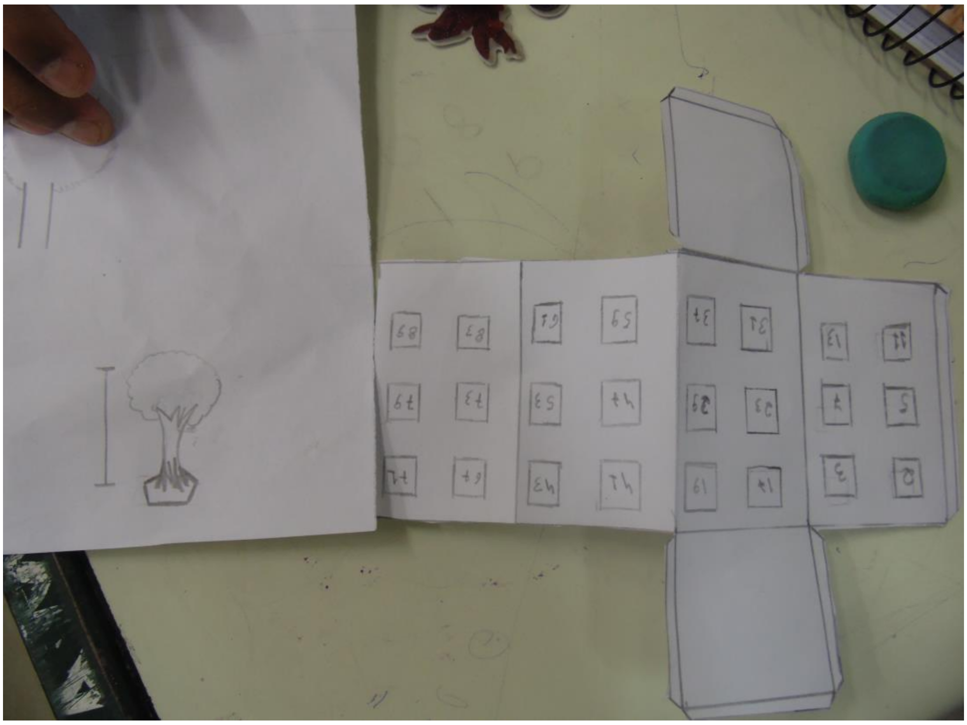
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 9 – Recortando a figura



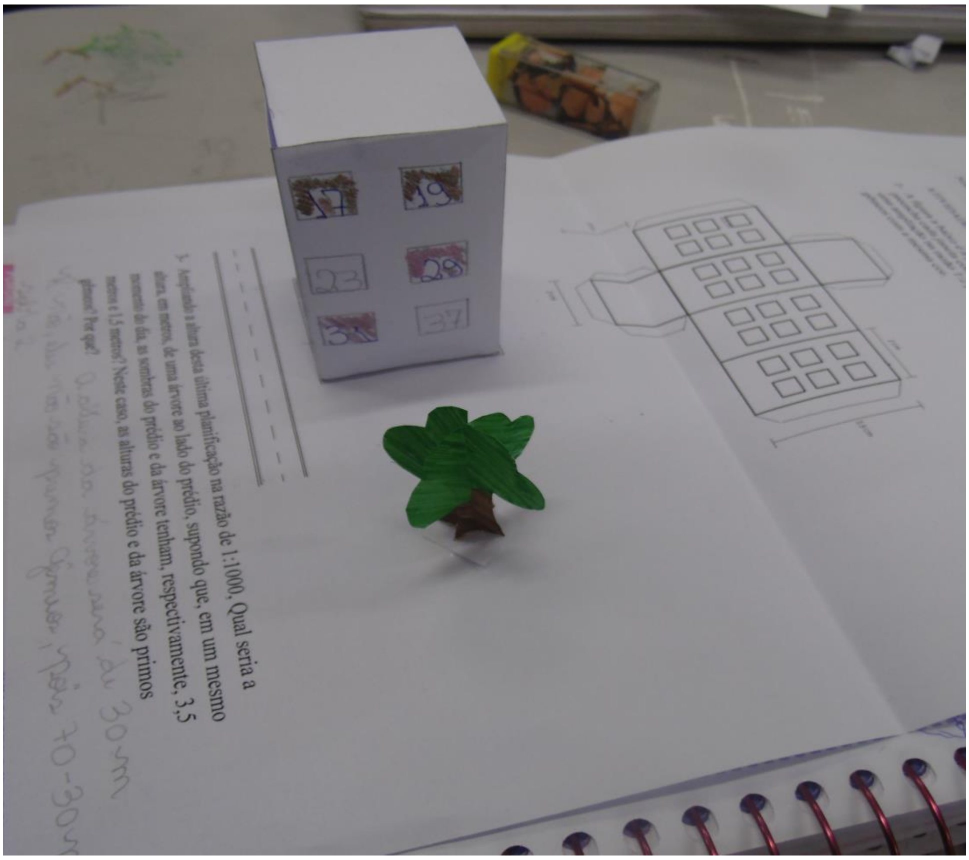
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 10 – Figura recortada e uma árvore de papel em fase de construção



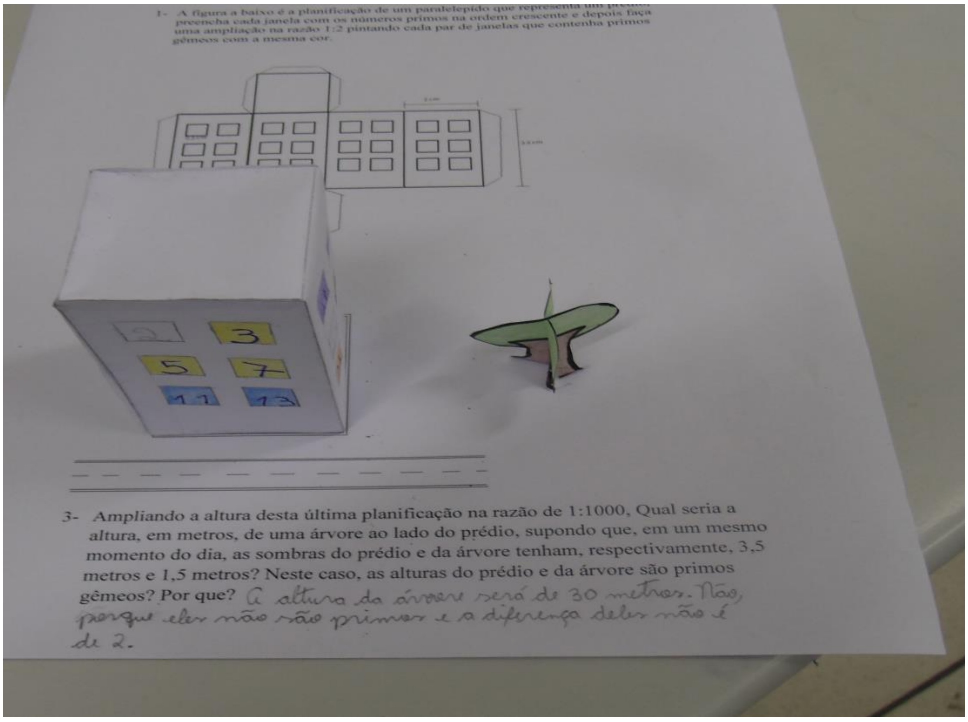
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 11 – Atividade concluída 1



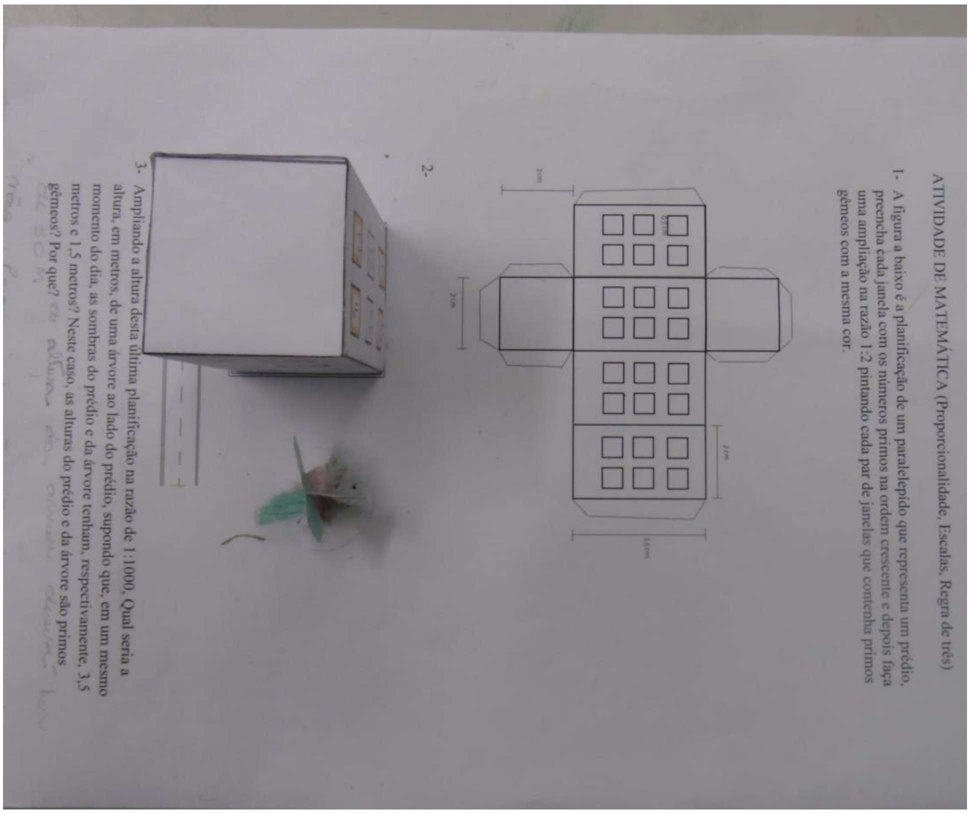
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 12 – Atividade concluída 2



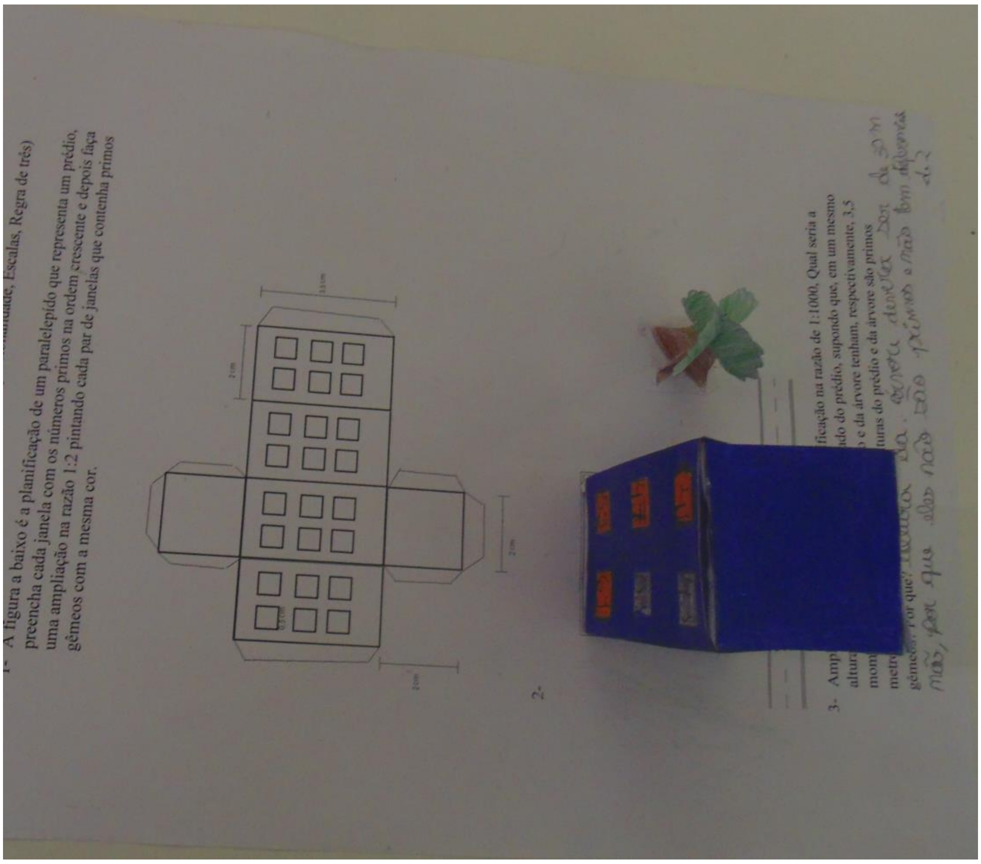
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 13 – Atividade concluída 3



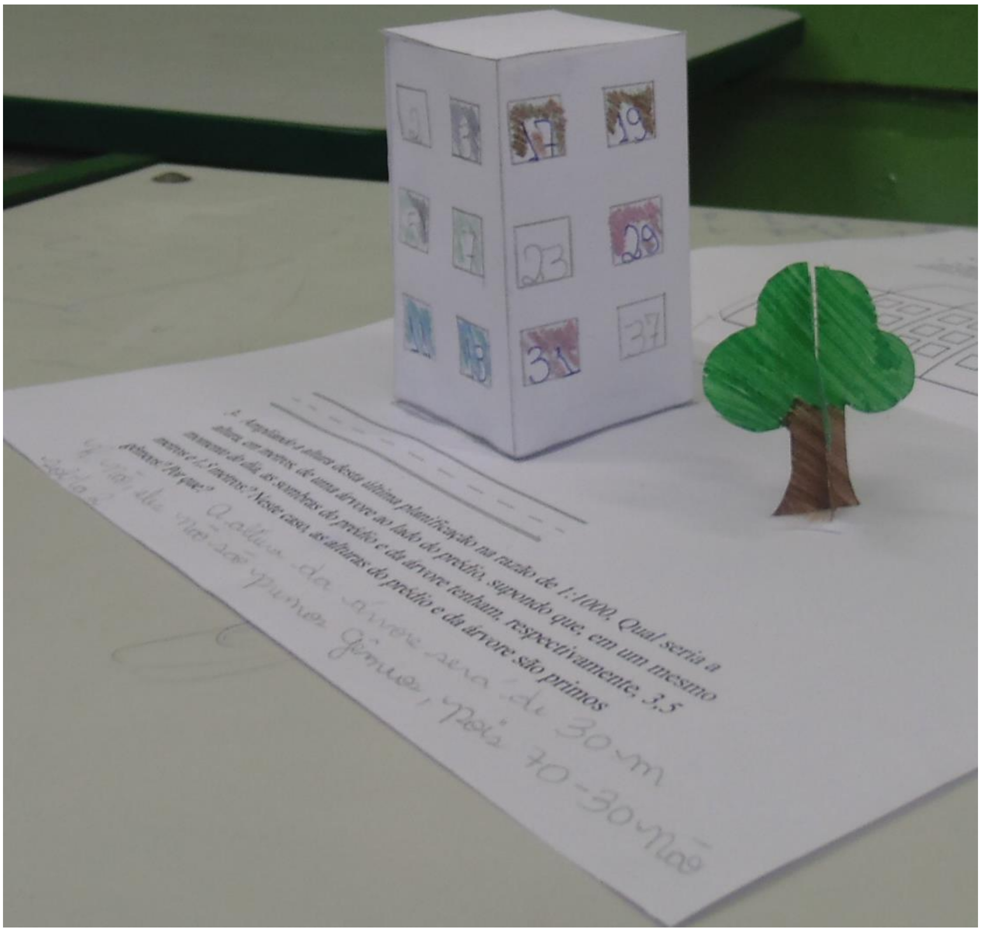
Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 14 – Atividade concluída 4



Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

Figura 15 – Atividade concluída 5



Fonte: E.E Doutor Henrique Smith Bayma (2018)

7 TABELAS E ANÁLISE DAS REPOSTAS DO QUESTIONÁRIO

Conforme já descrito anteriormente, um questionário (anexo I) foi formado por 15 perguntas sendo as 14 primeiras, fechadas, delimitada a apenas se responder sim ou não, e a 15ª, aberta, este questionário foi aplicado a alunos de 7º ano, 9º ano e de 3º ano do ensino médio em três escolas localizadas em São Miguel Paulista que serão intituladas de escolas A, B e C, onde as escolas A e B pertencem à rede estadual de ensino e a escola C à rede particular, totalizando 166 alunos.

A princípio, o questionário foi elaborado na intenção de se verificar o conhecimento atual dos alunos no que diz respeito a números primos para então, através de uma primeira amostra, ter uma base mais consistente para direcionar essa dissertação da maneira que até aqui foi proposta.

A respeito do questionário, foi importante ter um bom senso no momento da análise das respostas dos alunos no que diz respeito às perguntas de número 2 e 11, pois nelas não houve melhor detalhamento, como por exemplo, o fato de o número 1 não ser considerado nem primo nem composto, e que não foi detalhado até que ponto pode ou não existir uma fórmula para encontrar números primos já que é possível ter fórmulas para encontra-los desde que sejam obedecidos certos limites, como por exemplo, o comentado no capítulo 3, porém as respostas para essas perguntas irão variar de acordo com o critério de quem estará analisando as respostas, não trazendo maiores prejuízos na análise geral, já que a ideia maior é mostrar uma visão mais geral do quadro que se encontra o conhecimento a respeito do assunto em questão.

Com a aplicação do questionário, após analisadas as respostas, construiu-se as etapas desta dissertação e deu-se prosseguimento da mesma, por fim, se utilizando das propostas mencionadas nesta dissertação, foi elaborado e colocado em prática um projeto conforme descritos em capítulos anteriores, logo em seguida, o mesmo questionário aplicado no início teve então uma segunda aplicação, porém, agora aplicado apenas a uma nova turma (turma essa que participou do projeto elaborado) e motivado na base das propostas sugeridas em capítulos anteriores.

Sendo assim, segue abaixo os resultados obtidos na primeira aplicação, que teve como objetivo o de entender melhor a respeito do conhecimento atual dos alunos sobre os números primos e os resultados obtidos na segunda aplicação, esta aplicada apenas à turma que participou do projeto, com o objetivo adicional de observar o conhecimento dos alunos sobre os números primos após estes participarem do mesmo.

Os dados coletados se encontram a seguir, representados separadamente por perguntas em uma tabela dividida em três partes, e cada parte contém a proporção relacionada a um ano (ou série) que são os anos finais de ciclo, de maneira mutuamente exclusiva, pois cada ano está sendo representado por proporções coletadas separadamente dos outros anos (ou série), e isso para cada pergunta, pois, de acordo com Lakatos e Marconi (p.170), “ quando se têm muitos dados, é preferível utilizar um número maior de tabelas para não reduzir o seu valor interpretativo”.

7.1 Tabelas de respostas da 1ª aplicação

Tabela 4 – 1ª pergunta: Uma característica dos números primos é que ele é divisível pelo número 1 e por ele mesmo?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	83%	17%	72%	28%	98%	2%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 5 – 2ª pergunta: Um número que não é primo é chamado de número composto?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	83%	17%	53%	47%	70%	30%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 6 – 3ª pergunta: Existem infinitos números primos no conjunto dos números naturais?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	55%	45%	67%	33%	84%	16%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 7 – 4ª pergunta: Todos os números primos são ímpares?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	34%	66%	40%	60%	21%	79%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 8 – 5ª pergunta: Existe um número primo que é par?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	74%	26%	51%	49%	75%	25%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 9 – 6ª pergunta: Se o Máximo Divisor Comum (M.D.C) entre dois números é igual a um, então esses dois números são primos entre si?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	47%	53%	49%	51%	77%	23%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 10 – 7ª pergunta: Você conhece algum método para afirmar se um número qualquer é primo ou não?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	51%	49%	47%	53%	71%	29%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 11 – 8ª pergunta: Existem mais de dez números primos entre os números 0 e 50?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	87%	13%	75%	25%	96%	4%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 12 – 9ª pergunta: Através da multiplicação de números primos, é possível representar qualquer número natural?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	72%	28%	63%	37%	63%	37%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 13 – 10ª pergunta: Você já ouviu falar sobre números que são primos gêmeos? (por exemplo,5 e 7 é um par de números primos gêmeos).

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	36%	64%	30%	70%	9%	91%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 14 – 11ª pergunta: Existe uma fórmula para encontrar números primos?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	79%	21%	68%	32%	36%	64%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 15 – 12ª pergunta: A sequência dos números primos é padronizada?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	34%	66%	30%	70%	36%	64%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 16 – 13ª pergunta: Sempre existirá pelo menos um número primo entre um número e o dobro desse número?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	45%	55%	68%	32%	77%	23%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 17 –14ª pergunta: Se você escolhe um número qualquer, é possível saber quantos números primos existem até esse número escolhido, através de uma fórmula?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Respostas	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
	68%	32%	54%	46%	50%	50%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

15ª pergunta: Qual o maior número primo que você conhece? A análise dos dados referentes a essa pergunta, se encontrará logo a seguir, no final de 7.2.

7.2 Tabelas de respostas da 1ª aplicação separado por escola

Tabela 18 – 1ª pergunta: Uma característica dos números primos é que ele é divisível pelo número 1 e por ele mesmo?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	67%	33%	45%	55%	100%	0%
B	83%	17%	65%	35%	94%	6%
C	95%	5%	95%	5%	100%	0%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 19 – 2ª pergunta: Um número que não é primo é chamado de número composto?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	80%	20%	75%	25%	94%	6%
B	89%	11%	76%	24%	72%	28%
C	80%	20%	10%	90%	45%	55%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 20 – 3ª pergunta: Existem infinitos números primos no conjunto dos números naturais?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	53%	47%	70%	30%	61%	39%
B	44%	56%	65%	35%	94%	6%
C	65%	35%	65%	35%	95%	5%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 21 – 4ª pergunta: Todos os números primos são ímpares?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	60%	40%	35%	65%	39%	61%
B	39%	61%	47%	53%	17%	83%
C	10%	90%	40%	60%	10%	90%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 22 – 5ª pergunta: Existe um número primo que é par?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	53%	47%	55%	45%	50%	50%
B	67%	33%	47%	53%	83%	17%
C	95%	5%	50%	50%	90%	10%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 23 – 6ª pergunta: Se o Máximo Divisor Comum (M.D.C) entre dois números é igual a um, então esses dois números são primos entre si?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	40%	60%	45%	55%	94%	6%
B	44%	56%	24%	76%	72%	28%
C	55%	45%	75%	25%	65%	35%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 24 – 7ª pergunta: Você conhece algum método para afirmar se um número qualquer é primo ou não?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	33%	67%	85%	15%	100%	0%
B	44%	56%	29%	71%	50%	50%
C	70%	30%	70%	30%	80%	20%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 25 – 8ª pergunta: Existem mais de dez números primos entre os números 0 e 50?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	80%	20%	85%	15%	100%	0%
B	78%	22%	59%	41%	94%	6%
C	100%	0%	80%	20%	95%	5%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 26 – 9ª pergunta: Através da multiplicação de números primos, é possível representar qualquer número natural?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	80%	20%	70%	30%	56%	44%
B	72%	28%	53%	47%	56%	44%
C	65%	35%	65%	35%	75%	25%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 27 – 10ª pergunta: Você já ouviu falar sobre números que são primos gêmeos? (por exemplo, 5 e 7 é um par de números primos gêmeos).

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	40%	60%	20%	80%	6%	94%
B	28%	72%	71%	29%	6%	94%
C	40%	60%	5%	95%	15%	85%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 28 – 11ª pergunta: Existe uma fórmula para encontrar números primos?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	67%	33%	75%	25%	33%	67%
B	83%	17%	82%	18%	44%	56%
C	85%	15%	50%	50%	30%	70%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 29 – 12ª pergunta: A sequência dos números primos é padronizada?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	60%	40%	25%	75%	61%	39%
B	33%	67%	47%	53%	28%	72%
C	15%	85%	20%	80%	20%	80%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 30 – 13ª pergunta: Sempre existirá pelo menos um número primo entre um número e o dobro desse número?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	33%	67%	70%	30%	72%	28%
B	56%	44%	71%	29%	72%	28%
C	45%	55%	65%	35%	85%	15%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 31 – 14ª pergunta: Se você escolhe um número qualquer, é possível saber quantos números primos existem até esse número escolhido, através de uma fórmula?

	7º ano		9º ano		3º ano do ensino médio	
Escola	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
A	80%	20%	90%	10%	78%	22%
B	56%	44%	41%	59%	39%	61%
C	70%	30%	30%	70%	35%	65%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

15ª pergunta: Qual o maior número primo que você conhece?

Com base nas 14 primeiras questões, de acordo com os dados de 7.1, em média, cerca de, aproximadamente, 42% dos alunos do 7º ano do ensino fundamental, 41% dos alunos do 9º do ensino fundamental e 35% dos alunos do 3º anos do ensino médio, tem alguma defasagem a respeito do conteúdo relacionado a números primos.

A 15ª questão mostra que essas proporções, referentes à defasagem, podem ser, ainda, bem maiores, pois, ao se perguntar sobre qual o maior número primo conhecido, dos alunos do 7º ano, 81% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 9º ano, 51% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 3º ano do ensino médio, 37% colocaram números que não eram primos ou não responderam.

Agora analisando as 14 primeiras questões, de acordo com os dados de 7.2, na escola A, em média, cerca de, aproximadamente, 52% dos alunos do 7º ano do ensino fundamental, 43% dos alunos do 9º do ensino fundamental e 42% dos alunos do 3º anos do ensino médio, tem alguma defasagem a respeito do conteúdo relacionado a números primos.

Na escola B, em média, cerca de, aproximadamente, 44% dos alunos do 7º ano do ensino fundamental, 46% dos alunos do 9º do ensino fundamental e 35% dos alunos do 3º anos do ensino médio, tem alguma defasagem a respeito do conteúdo relacionado a números primos.

Na escola C, em média, cerca de, aproximadamente, 32% dos alunos do 7º ano do ensino fundamental, 34% dos alunos do 9º do ensino fundamental e 27% dos alunos do 3º anos do ensino médio, tem alguma defasagem a respeito do conteúdo relacionado a números primos.

Voltando a falar da 15ª questão, na escola A, dos alunos do 7º ano, 80% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 9º ano, 50% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 3º ano do ensino médio, 56% colocaram números que não eram primos ou não responderam.

Na escola B, dos alunos do 7º ano, 72% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 9º ano, 29% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 3º ano do ensino médio, 28% colocaram números que não eram primos ou não responderam.

Na escola C, dos alunos do 7º ano, 90% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 9º ano, 70% colocaram números que não eram primos ou não responderam, dos alunos do 3º ano do ensino médio, 30% colocaram números que não eram primos ou não responderam.

Uma observação a ser feita com base na 15ª pergunta do questionário, é que apenas nas turmas do 9º ano e do 3º ano do ensino médio da escola B, que a proporção de alunos que mostrou certa defasagem no assunto (pois responderam com números que não eram primos ou não responderam), foi menor que a média de defasagem observada nas primeiras 14 questões das mesmas turmas, o que não acontece com a turma do 7º ano da mesma escola e com as demais turmas das escolas A e C.

7.3 Tabelas de respostas da 2ª aplicação

Concluída a etapa da aplicação do projeto, foi entregue aos alunos o mesmo questionário (anexo I), desta vez, apenas aos alunos que participaram (do projeto). Uma observação a ser feita é que o projeto foi realizado em 6 aulas, e que, dos 28 alunos que participaram deste questionário apenas 17 deles participaram de todas as 6 aulas previstas, sendo que os outros 11 alunos, por algum motivo não declarado, se ausentaram da escola em algum dia da semana, não frequentando de duas a quatro das seis aulas utilizadas para a aplicação, porém desses, todos frequentaram pelo menos em duas das seis aulas previstas. Sendo assim, seguem-se os resultados do questionário:

Tabela 32 – 1ª pergunta: Uma característica dos números primos é que ele é divisível pelo número 1 e por ele mesmo.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	93%	7%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 33 – 2ª pergunta: Um número que não é primo é chamado de número composto.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	89%	11%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 34 – 3ª pergunta: Existem infinitos números primos no conjunto dos números naturais?

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	64%	36%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 35 – 4ª pergunta: Todos os números primos são ímpares.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	25%	75%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 36 – 5ª pergunta: Existe um número primo que é par.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	61%	39%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 37 – 6ª pergunta: Se o Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois números é igual a um, então esses dois números são primos entre si.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	79%	21%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 38 – 7ª pergunta: Você conhece algum método para afirmar se um número qualquer é primo ou não?

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	75%	25%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 39 – 8ª pergunta: Existem mais de dez números primos entre os números 0 e 50.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	100%	0%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 40 – 9ª pergunta: Através da multiplicação de números primos, é possível representar qualquer número natural.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	54%	46%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 41 – 10ª pergunta: Você já ouviu falar sobre números que são primos gêmeos? (por exemplo, 5 e 7 é um par de números primos gêmeos).

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	93%	7%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 42 – 11ª pergunta: Existe uma fórmula para encontrar números primos.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	86%	14%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 43 – 12ª pergunta: A sequência dos números primos é padronizada.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	11%	89%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 44 – 13ª pergunta: Sempre existirá pelo menos um número primo entre um número e o dobro desse número.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	71%	29%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Tabela 45 – 14ª pergunta: Se você escolhe um número qualquer, é possível saber quantos números primos existem até esse número escolhido, através de uma fórmula.

	7º ano	
Respostas	Sim	Não
	86%	14%

Fonte: Questionário aplicado aos alunos

15ª pergunta: Qual o maior número primo que você conhece?

Nesta questão, dentre os 28 alunos, 23 deles, que correspondem a 82,145% da turma, escreveram corretamente um número primo, sendo que a maioria deles escolheu um número primo entre os números 40 e 50.

Levando em consideração que 11 dos 28 alunos não frequentaram todos os dias em que o projeto foi aplicado, é razoável dizer que o resultado geral poderia ter sofrido modificações significativas caso todos os alunos estivessem frequentado as seis aulas, outro ponto importante, é o fato de que o projeto aplicado, não inseriu todos os assuntos abordados no questionário, ficando a critério de cada professor o assunto a que se pretende dar mais ênfase.

Ao comparar os dois momentos da aplicação do questionário, apesar da diferença da quantidade de alunos nos dois momentos, pode-se tirar algumas conclusões a respeito dos mesmos.

Quando comparados os dois momentos, é possível perceber que os conceitos com maior ênfase nas duas atividades apontaram diferentes respostas na segunda aplicação.

Um exemplo é notado ao se comparar a questão indicada na tabela 13 (1º aplicação) com a mesma questão na tabela 41 (2º aplicação), talvez o fato de este conceito ter sido bastante enfatizado nas duas atividades, resultou a diferença de respostas entre as duas aplicações.

Outro exemplo interessante é o caso da tabela 14 (1º aplicação) ao ser comparada com a mesma questão na tabela 11 (2º aplicação) a qual ainda uma grande quantidade de alunos afirmam existir uma fórmula para encontrar números primos, mesmo após participarem das 2 atividades, na qual foram discutidos pontos que indicavam a não padronização das sequências dos números primos.

Uma possível resposta para esse problema é o fato de não ter sido dada tanta ênfase nessa questão, ainda que tenha importância relevante.

Ao comparar os resultados das duas aplicações, há ainda a 15º questão, que se torna interessante ser dada uma atenção. Na primeira aplicação os alunos que participaram da pesquisa escreveram os maiores números primos que conheciam, porém nessa escrita, mais da metade desses alunos escreveram números que não eram primos.

Na segunda aplicação, mais de 80% dos alunos que participaram do projeto, escreveram corretamente os números primos, dentre esses, boa parte dos que estão entre 40 e 50 e isso pode ter ocorrido porque nas atividades foram propostos momentos em que é dada bastante ênfase nesses números, como exemplo poderia citar o crivo de Eratóstenes que foi construído juntamente com os alunos por mais de uma vez, o que também ficou evidenciado na tabela 39.

CONCLUSÃO

Ao iniciar esse trabalho foi feito a pergunta **“Seria possível aprofundar o conhecimento sobre números primos, ao longo do ensino fundamental e médio, inter-relacionando este conceito com os demais?**”.

Começamos com um questionário diagnóstico que foi inserido apenas para dar base em uma afirmação que a experiência vivida no cotidiano escolar já mostrava, e a partir de então, foi planejado algumas etapas no propósito de ter melhor clareza naquilo que foi proposto.

Ao aplicar esse questionário pela primeira vez nas três escolas que foram intituladas como escolas A, B e C, algumas situações ocorreram no decorrer de sua aplicação.

Em algumas turmas das escolas A e B, o questionário foi aplicado pelo professor que estava com aquela turma naquele momento, em outras o próprio autor desta dissertação quem aplicou. Teve casos que o autor da dissertação acompanhou o professor da turma na aplicação.

Na escola C, quem aplicou o questionário para as turmas foi um de seus funcionários, esta aplicação não teve o acompanhamento do autor desta dissertação.

Ao fazer as tabulações dos resultados desse questionário, das escolas A e B, foi percebido que em uma das turmas, todas as respostas estavam iguais, fato que não tinha ocorrido nas demais, essa turma foi uma daquelas da qual o próprio professor que se fazia presente no momento aplicou sem o acompanhamento do autor, neste caso o questionário não foi considerado e o próprio autor optou por aplicar o mesmo questionário em outra turma do mesmo ano, pois considerou as respostas viesadas.

Na segunda aplicação do questionário, aquela em que somente a turma que participou do projeto respondeu, esse foi aplicado pelo próprio autor, o objetivo foi o de observar o impacto causado nos alunos a respeito do conhecimento sobre os números primos além de analisar eventuais observações na comparação entre as duas aplicações.

Apesar de a primeira aplicação ter sido apenas para fins de se direcionar uma ideia que o autor já tinha em mente, pelo fato de já ter sido uma cena vivida pelo próprio, algo que poderia ser melhorado nessas aplicações seria a maneira em que ela foi feita, acredito que o autor da dissertação deva participar de todas as aplicações para que possa fazer anotações e melhorias a tempo, nos casos que perceba algo que possa ser considerado prejudicial na pesquisa.

Voltando aos primeiros capítulos deste trabalho, no inicio é apresentado um pequeno resumo que fornece uma visão geral da educação no Brasil e suas reformas no século XX que finaliza com a apresentação do ensino através da resolução de problemas, logo depois é mostrado algumas das histórias que protagonizam o assunto que envolve os números primos, isso na intenção de mostrar sua importância onde, como complemento, são adicionadas algumas demonstrações que foram importantes para dar propósito a algumas afirmações que foram feitas posteriormente.

Com base nas propostas indicadas nos primeiros capítulos e na proposta curricular do estado de São Paulo (anexo) também mencionada, surgem conexões de ideias que resultam em problemas que servem como ponto de partida para se ensinar os conceitos matemáticos indicados na proposta curricular, porém agora inter-relacionando-os aos números primos e utilizando para isso o ensino através da resolução de problemas.

Em uma afirmação Onuchic diz

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema, que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória, que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas, que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem (1999, p. 215).

Cumpridas essas etapas, com base nas ideias propostas pelos autores indicados nas referências bibliográficas e fazendo uso de exemplos de problemas geradores propostos no capítulo 5 desta dissertação, elaborou-se um projeto onde nele constam as atividades 1 e 2, onde outra vez volto a observar que os temas abordados nelas, deram mais ênfase a certos pontos sobre números primos do que a outros, isso porque a preparação da atividade depende muito daquilo que o professor objetiva ensinar, outros assuntos também podem ser aprofundados e conectados de acordo com a dinâmica da aula, pois o ensino através da resolução de problemas não é uma proposta de ensino linear.

Onuchic (1999, p. 215) afirma sobre a importância de os professores fazerem as conexões entre os diferentes ramos da matemática e que “a atividade matemática escolar não se resume a olhar para coisas prontas e definitivas mas para a construção e a apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade”.

Sendo assim na 1ª atividade são propostos problemas que envolvem os temas contidos na proposta curricular e nestes problemas também constam propostas envolvendo números primos, além disso, as atividades são propostas para serem desenvolvidas em grupo, pois de acordo com o currículo do Estado de São Paulo (p.11) a escola sendo uma instituição que também aprende também parte do princípio de que o conhecimento coletivo é maior que a soma dos conhecimentos individuais, e a ideia de se trabalhar em grupo é aplicado até a professores, como afirmado no currículo do Estado de São Paulo da seguinte maneira

> ações como a construção coletiva da Proposta Pedagógica, por meio da reflexão e da prática compartilhadas, e o uso intencional da convivência como situação de aprendizagem fazem parte da constituição de uma escola à altura de seu tempo (p.11).

Com o propósito de fortificar os assuntos trabalhados na 1ª atividade, na 2ª atividade também são propostos problemas que envolvem os temas contidos na proposta curricular inter-relacionando-os aos números primos, porém, foi também incorporada uma pequena porção da arte das dobraduras, pois além dos assuntos já abordados, consta adicionado na atividade, uma figura geométrica no problema e, de acordo com Genova (2001, p. 12), o origami pode desempenhar o papel mediador entre a passagem da manipulação de materiais e reconhecimento de formas aos conceitos teóricos de modo interessante e fecundo, pois apesar do projeto estar apoiado no ensino através da resolução de problemas, isso nada impede de acrescentarmos outras metodologias, desde que isso não acarrete em eventuais prejuízos no aprendizado.

Além dos objetivos cumpridos nas duas atividades do projeto, é importante destacar que, para a turma que participou do projeto, antes já havia um plano bimestral de aula indicado na proposta curricular referente ao 3º bimestre que foi preparado anteriormente e que era necessário ser cumprido.

Esta foi uma situação que veio de encontro com um dos objetivos desse trabalho, que é aquele que permite trabalhar o conceito de números primos juntamente com o conceito elaborado no planejamento curricular anual, o que foi feito sem muitas dificuldades, pois o que o currículo objetivava que se cumprisse em um bimestre, através deste projeto foi vivenciado em uma semana juntamente com conceitos dos números primos através da resolução de problemas.

Então após a conclusão do projeto aqueles conceitos que estavam anteriormente planejados para serem aplicados no bimestre foram feitos apenas como revisão, já que não era mais novidade à turma, o que veio apenas para contribuir.

Apesar de ter verificado efeitos do projeto que considero favorável, algo que eu mudaria com relação às atividades 1 e 2, é o modo de como foi elaborado cada enunciado, apesar de ter sido explorado pelos alunos, percebi que, se a dificuldade proposta nos enunciados fosse menor, haveria um melhor desempenho e interação entre os grupos.

Agora voltando à pergunta que motivou essa dissertação sobre se seria possível aprofundar o conhecimento sobre números primos, ao longo do ensino fundamental e médio, inter-relacionando este conceito com os demais, posso afirmar apoiado em tudo o que foi escrito até o momento, que sim, e isso poderá ser evidenciado através da resolução de problemas, dentro desta afirmação fica (não como finalização, mas como uma dentre várias que poderão surgir), a ideia proposta, na qual dedico a todos os professores, que constantemente estão batalhando para um melhor desenvolvimento do ensino no Brasil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRANCA, Nicholas A. **A Resolução de Problemas Como Meta, Processo e Habilidade Básica**. IN: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual Editora, 1997. Cap2, p.4-10.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Fundamental, MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio, MEC, 2000.

BUTTS, Thomas. **Formulando problemas adequadamente**. IN: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual Editora, 1997. Cap4, p.32-48.

CHARMAY, Roland. **Aprendendo (com) a resolução de problemas**. IN: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap3, p.36-47.

COUTINHO, S.C. **Primalidade em Tempo Polinomial:** Uma introdução ao algoritmo AKS. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: Da Teoria à Prática, 4ª edição. São Paulo: Papirus Editora, 1998.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**, 12ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações, 3ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2017. v. 1, 2 e 3.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática, 6º, 7°, 8° e 9° ano, 2ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2016.

DERBYSHIRE, John. **Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics**. Washington: Plume Books, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa, 28ªedição. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GENOVA, Carlos. **Origami:** A milenar arte das dobraduras. 6ª edição. São Paulo: Escrituras Editora, 2001.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

INEP. Resumo Técnico. **Resultados do índice de desenvolvimento da educação básica**, MEC, 2017. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf > Acesso em: 18 jun. 2020.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 3ª edição. São Paulo: Editora Atlas, 1991.

MARTINEZ, F. B.; **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

ONUCHIC, L. DE LA R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. IN: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. Educação Matemática: Pesquisa em movimento. São Paulo: Unesp, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. DE LA R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. IN: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. Cap12, p.199-217.

ONUCHIC, L. DE LA R.; JUNIOR, L. C. L. **A Influência da Leitura na Resolução de Problemas: Questões de sentidos, significados, interesses e motivações**. REMATEC, v. 11, n. 21, 8 nov. 2016. p.24-46. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/58/32> Acesso em: 23 jun. 2020.

ONUCHIC, L. DE LA R.; ANDRADE, Cecília Pereira de. **Perspectivas para a Resolução de problemas no GTERP**. IN: ONUCHIC, L. DE LA R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, Márcio. Perspectivas para Resolução de Problemas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. Cap14, p.433-466.

POLYA, G. **Sobre a Resolução de Problemas de Matemática na High School**. IN: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual Editora, 1997. Cap1, p.1-3.

RIBENBOIM, P. **Números Primos, amigos que causam problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

RIBENBOIM, P. **Números Primos: Velhos Mistérios e Novos Recordes**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2012.

SÃO PAULO (estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** / Secretaria da Educação. Coordenação geral: Maria Inês Fini; Coordenação de área: Nilson José Machado. – São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO (Universidade). **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP /** Sistema Integrado de Bibliotecas da USP. Coordenadora: Vânia Martins Bueno de Oliveira Funaro. 3º edição. – São Paulo: SIBiUSP, 2016.

SAUTOY, Marcus du. **A Música dos Números Primos**: a história de um problema não resolvido na matemática. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

SCHOENFELD, Alan H. **Heurísticas na sala de aula**. IN: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual Editora, 1997. Cap3, p.13-29.

Watanabe, R. G. **Uma fórmula para números primos**. RPM37. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/11/2.htm> Acesso em: 18 abr. 2017.

APÊNDICE I – Questionário aplicado aos alunos

Figura 16 – Questionário aplicado aos alunos

Data de preenchimento:___/____/2017

Idade: ___ anos

Série:_________________

Prezado aluno, este questionário faz parte de um projeto de pesquisa que visa compreender os conhecimentos que os alunos possuem sobre números primos. Por favor, responda as questões abaixo assinalando (S) para SIM e (N) para NÃO:

1) (   ) Uma característica dos números primos é que eleé divisível pelo número 1 e por ele mesmo?

2) (   ) Um número que não é primo é chamado de número composto?

3) (   ) Existem infinitos números primos no conjunto dos números naturais?

4) (   ) Todos os números primos são ímpares?

5) (   ) Existe um número primo que é par?

6) (   ) Se o Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois números é igual a um, então esses dois números são primos entre si?

7) (   ) Você conhece algum método para afirmar se um número qualquer é primo ou não?

8) (   ) Existem mais de dez números primos entre os números0 e 50?

9) (   ) Através da multiplicação de números primos, é possível representar qualquer número natural?

10) (   ) você já ouviu falar sobre números que sãoprimos gêmeos? (por exemplo,5 e 7 é um par de números primos gêmeos).

11) (   ) Existe uma fórmula para encontrar números primos?

12) (   ) A sequência dos números primos é padronizada?

13) (   ) sempre existirá pelo menos um número primo entre um número e o dobro desse número?

14) (   ) Se você escolhe um número qualquer, é possível saber quantos números primos existem até esse número escolhido, através de uma fórmula?

15) Qual o maior número primo que você conhece?

Muito obrigado!

Fonte: Quintans, Jeozadaque (2017)

APÊNDICE II – Respostas e sugestões de resolução dos problemas geradores

5.1-Problemas geradores de conteúdos propostos na 5ª série ou 6º ano do Ensino Fundamental

5.1.1- (Múltiplos e Divisores)

Escrevendo a sequência de números naturais até 50, a partir do número 2 elimine seus múltiplos e mantenha o número 2, depois faça o mesmo com o número 3, depois com o número 5 (já que o número 4 já terá sido eliminado por ser um múltiplo de 2), continue até chegar no número 7, os números não eliminados são os números primos, logo após, verificar a quantidade de números primos entre 1 e 50, sendo eles 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 ,43, 47. Esse é o chamado crivo de Eratóstenes.

5.1.2- (Potenciação)

a) Como cada bolsa menos tem 3 canetas cada, em 3 bolsas menores terão 3x3 canetas, ou seja, 9 canetas em cada bolsa grande, como são 3 bolsas grandes, tem-se 3x9 canetas, ou seja, a pessoa está carregando 27 canetas, o que equivale a dizer $3x3x3=3^3$ canetas.
b) Sim, pois se este número está elevado a algum expoente natural maior do que um, significa que a base está sendo multiplicada por ela mesma a quantidade de vezes mostrada no expoente, sendo assim a potência é um múltiplo da base, portanto um número composto.

5.1.3- (Operações básicas)

Não, pois 15 + 5.5 – 10:2 = 15 + 25 – 5 = 35, um múltiplo de 5.

5.1.4- (M.M.C e M.D.C)

a) Os divisores de 16 são: 1, 2, 4, 8, 16. Os divisores de 8 são: 1, 2, 4, 8. Os divisores comuns entre eles são 1, 2, 4 e 8.
b) O máximo divisor comum de 16 e 8 é o número 8.
c) Não, pois m.d.c (16,8) = 8.

5.1.5- (Decomposição em fatores primos)

Decomponha o número 30 em fatores primos para obter 2x3x5. Concluir com um comentário a respeito do Teorema Fundamental da Aritmética.

5.1.6- (Formas geométricas)

Não, pois se a capacidade de certa garrafa equivale a capacidade de 8 copos, ao se dobrar a quantidade de garrafas, se dobrará a quantidade de copos, logo a quantidade de copos será um múltiplo de 2.

5.1.7- (Geometria)

Basta dividir a largura da piscina em duas partes, sendo essa largura igual a 7, ao dividirmos 7 em duas partes, de maneira que cada uma tenha a medida de um número primo, uma parte terá largura igual a 5 e a outra igual a 2.

5.1.8- (Geometria)

Basta desenhar um triângulo cuja soma das medidas de seus lados não seja um número primo.

5.1.9 - (Área)

Não, pois apesar de todo número composto poder ser reduzido a fatores primos, não significa que será exatamente dois números primos, por exemplo, se a área do retângulo for 30, sua decomposição em fatores primos será 2x3x5, três números primos, mas sua base e altura, poderia ser respectivamente 6 e 5, 2 e 15 ou ainda 3 e 10, ou seja, sua área seria um número composto, porém teria ainda base ou altura formada por um número composto.

5.1.10- (Estatística)

Uma alternativa seria a de distribuir os dados em uma tabela, de maneira que cada hora, a partir da primeira hora, seja correspondida, respectivamente, a sequência dos dez primeiros números primos, então o professor poderá escolher o gráfico mais apropriado para representação da tabela. A média de carros que passa por essa rua em uma hora é de:

$$(2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29)/10 = 12,9.$$

5.2-Problemas geradores de conteúdos propostos na 6ª série ou 7º ano do Ensino Fundamental

5.2.1- (Sistema de numeração)

a) Nesse caso, como a pessoa viveu 90 anos, sendo 30 d.C, tem-se que 60 foi a.C, portanto essa pessoa nasceu em 60 a.C, e a idade dessa pessoa em seu marco zero era de 60 anos.
b) Basta encontrar a quantidade de números primos de 0 a 30 e, excluindo os números 0 e 1, o que não for número primo será número composto.

5.2.2- (Números negativos)

a) Para que a pessoa fique com o saldo zerado, será preciso depositar R$ 55,00 reais, depois precisa depositar R$ 25,00 para ficar com esse saldo positivo, sendo assim no total foi depositado R$50,00 + R$ 25,00 = R$ 80,00, logo a representação fracionária será $\frac{25}{80}$ que na sua forma simplificada será $\frac{5}{16}$.
b) Não, pois levando em conta a fração irredutível, o denominador não é um número primo, além disso, a diferença entre o numerador e o denominador não é igual a 2.

5.2.3- (Geometria)

a) Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180º, basta dividir 180º por 3, logo, os ângulos desse triângulo serão todos de 60º.
b) O ângulo de um triângulo equilátero é de 60º, o número que equivale à metade da medida desse ângulo é 30, decompondo 30 em fatores primos, teremos 2x3x5.

5.2.4- (Construções geométricas)

a) Após o desenho, o aluno deverá verificar que um paralelepípedo tem 12 arestas, 8 vértices e 6 faces.
b) Não, pois o m.d.c (6,12) = 6, para que sejam primos entre si, o m.d.c desses números deveria ser igual a 1.

5.2.5- (Álgebra)

a) Para n=1, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números há de 1 a 2? E teríamos 2 números. Para n=2, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números há de 1 a 4? E teríamos 4 números. Para n=3, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números há de 1 a 6? E teríamos 6 números. Para n=4, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números há de 1 a 8? E teríamos 8 números.
b) Para n=1, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números primos p há, de 1 a 2? E teríamos 1 número primo. Para n=2, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números primos p há, de 1 a 4? E teríamos 2 números primos. Para n=3, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números primos p há, de 1 a 6? E teríamos 3 números primos. Para n=4, a pergunta ficaria da seguinte maneira: Quantos números primos p há, de 1 a 8? E teríamos 4 números primos.
c) Para n=1 temos que a razão será: $\frac{2}{1}$. Para n=2 temos que a razão será: $\frac{4}{2}$. Para n=3 temos que a razão será: $\frac{6}{3}$. Para n=4 temos que a razão será: $\frac{8}{4}$. (Obs: Nesse momento, vale a pena o professor comentar uns dos grandes avanços de Gauss (descrito no capítulo 3), que, em certo momento, ao invés de tentar prever a localização precisa do próximo primo em uma sequência, buscou saber quantos haveria entre os 100 primeiros números naturais, os 1000 primeiros números naturais, e assim por diante, percebendo certo padrão, na medida em que a contagem se elevava ao analisar como se alterava a proporção de números primos existentes nesses intervalos).

5.2.6- (Porcentagem)

Contando a quantidade de números primos que há de 1 a 50, encontramos 15 números primos, onde o maior deles é o número 47, sendo assim, a chance de se sortear uma bola que contém um número primo é de $\frac{15}{50}$, ou seja, $\frac{3}{10}$, e a chance de se sortear uma bola que contém o maior número primo entre 1 e 50 é de $\frac{1}{50}$.

5.2.7- (Álgebra)

a) Para n = 11, temos que $\sqrt{11}$ é de aproximadamente 3,31, sendo 2 e 3, os números primos menores que 3,31, não sendo o número 11, divisível por esses dois números primos, então 11 é número primo.
b) Para n = 17, temos que $\sqrt{17}$ é de aproximadamente 4,1, sendo 2 e 3, os números primos menores que 4,1, não sendo o número 17, divisível por esses dois números primos, então 17 é número primo.
c) Para n = 29, temos que $\sqrt{29}$ é de aproximadamente 5,4, sendo 2, 3 e 5, os números primos menores que 5,4, não sendo o número 29 divisível por esses três números primos, então 29 é número primo.

5.2.8- (Equação)

Para x=0, temos $(0)^2 + (0) + 41 = 41$

Para x=1, temos $(1)^2 + (1) + 41 = 43$

Para x=2, temos $(2)^2 + (2) + 41 = 47$

Para x=3, temos $(3)^2 + (3) + 41 = 53$

Para x=4, temos $(4)^2 + (4) + 41 = 61$

5.2.9- (Equação)

a) Uma sugestão seria x + 2 = 7
b) x + y = 12, sendo x = 7 e y = 5.
c) y – x = 2, sendo y = 7 e x = 5.

5.2.10- (Equação)

De acordo com o enunciado do problema, temos 0,80 + 2x1 + 50 = 52,80, adicionando 0,20 ao resultado, obteremos o número primo 53.

5.3-Problemas geradores de conteúdos propostos na 7ª série ou 8º ano do Ensino Fundamental

5.3.1- (Números racionais)

$\frac{1}{3}$ = 0,333... e $\frac{1}{7}$ = 0,142857142857142857...

5.3.2- (Potenciação)

Não, pois se este número é maior do que 1 e está elevado a algum expoente natural maior do que um, significa que a base está sendo multiplicada por ela mesma a quantidade de vezes mostrada no expoente, sendo assim a potência é um múltiplo da base, portanto um número composto.

5.3.3- (Expressões algébricas)

Pelos dados do enunciado temos $x + x/2 – 2 = 13$, portanto, $x = 10$.

5.3.4- (Expressões algébricas)

Sejam p e q números primos, logo teremos $|p - q| = 2$

5.3.5- (Expressões algébricas)

a) Para n = 2, temos $2^2 – 1 = 3$,
para n = 3, temos $2^3 – 1 = 7$,
para n = 5, temos $2^5 – 1 = 31$, portanto a fórmula não gera um número primo para n = 5.

b) Para n = 7, temos $2^7 – 1 = 127$.

c) Substituindo n por 11 teremos, $2^{11} – 1 = 2048 – 1 = 2047$ sendo o mesmo que 23x89 = 2047, portanto, um número composto.

5.3.6- (Sistemas de equações)

Pelo enunciado do problema temos que $x + y = 45$ e $x = 2y$, substituindo x por 2y na primeira equação, teremos $2y + y = 45$, portanto $y = 15$ e, sendo assim, $x = 2x15 = 30$, e nesse caso, o postulado de Bertrand é válido, pois entre 15 e 30 temos os números primos 17, 19, 23, 29.

5.3.7- (Gráficos)

Temos que x = y e, sendo x os números primos menores do que 15 bastam localizar no gráfico os pontos (2,2), (3,3), (5,5), (7,7), (11,11) e (13,13).

5.3.8- (Gráficos)

a) Escolhendo uma unidade de medida que represente 1 quilômetro e que seja razoável para se desenhar, a partir de um ponto de partida, basta seguir de acordo com o que o enunciado sugere.
b) A trajetória alternativa deverá ser equivalente à hipotenusa de um triângulo retângulo, então, basta utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar medida referente a distância desta trajetória, que será de 100 metros, dada por $\sqrt{80^2 + 60^2} = 100$.
c) A primeira trajetória é de 140 metros, dada por 80 + 60 = 140, que decomposto em fatores primos será dada por 2x2x5x7. A segunda trajetória é de 100 metros, que decomposto em fatores primos será dada por 2x2x5x5.

5.3.9- (Teorema de Tales)

a) A área que cada paralelepípedo ocupa é dada por 0,2m x 0,2m = 0,04m^2, queremos um muro com área igual a 2m x 1,94m = 3,88m^2, portanto, basta dividir 3,88 por 0,04 para obter x = 97 blocos.
b) Sendo $\sqrt{97}$ aproximadamente igual a 9,8 e sabendo que 97 não é divisível pelos números primos 2, 3, 5 e 7, logo 97 é um número primo.

5.3.10- (Área de polígonos)

Supondo que o polígono seja um quadrado de lado 2, sua área será 4 e, supondo que o prisma seja regular de base quadrada, tais que os lados de sua base seja igual a 3 e a altura deste prisma seja igual a 3, seu volume será 27, neste caso, para a área x = 4 do polígono e o volume y = 27 do prisma, temos que seus valores numéricos são primos entre si, pois m.d.c (4,27) = 1.

5.4-Problemas geradores de conteúdos propostos na 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental

5.4.1- (Conjuntos numéricos)

Como $\sqrt{441}$ = 21, e sabendo-se que os números primos menores do que 21 são os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19, de acordo com o método em questão, como dentre esses, o número 3 divide o número 21, logo, o número 441 é um número composto.

5.4.2- (Notação científica)

Temos que 991x997 = 988027, que representado em notação científica será $9{,}88027\text{x}10^5$.

5.4.3- (Equações)

a) Para x = 0, teremos $0^2 + 0 + 41 = 41$, para x = 1, teremos $1^2 + 1 + 41 = 43$, para x = 2, teremos $2^2 + 2 + 41 = 47$.
b) Para x = 0, teremos $0^2 - 0 + 41 = 41$, para x = 1, teremos $1^2 - 1 + 41 = 41$, para x = 2, teremos $2^2 - 2 + 41 = 43$.
c) Para x = 0, teremos $0^2 – 79.0 + 1601 = 1601$, que é um número primo, para x = 1, teremos $1^2 – 79.1 + 1601 = 1523$, que é um número primo, para x = 2, teremos $2^2 – 79.2 + 1601 = 1447$, que é um número primo.

5.4.4- (Funções)

Para s=2 na soma $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s}$ teremos $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{3600+900+400+225+144}{3600} = \frac{5269}{3600}$ = 1,4636111... . Para s=2 no produto $\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} . \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} . \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} . \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} . \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}}$ teremos $\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} . \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} . \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} . \frac{1}{1-\frac{1}{7^2}} . \frac{1}{1-\frac{1}{11^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} . \frac{1}{1-\frac{1}{9}} . \frac{1}{1-\frac{1}{25}} . \frac{1}{1-\frac{1}{49}} . \frac{1}{1-\frac{1}{121}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} . \frac{1}{\frac{8}{9}} . \frac{1}{\frac{24}{25}} . \frac{1}{\frac{48}{49}} . \frac{1}{\frac{120}{121}} = \frac{4}{3} . \frac{9}{8} . \frac{25}{24} . \frac{49}{48} . \frac{121}{120}$ simplificando, teremos $\frac{1}{2} . \frac{5}{24} . \frac{49}{48} . \frac{121}{8} = \frac{29645}{18432}$ = 1,60834418402777... note que há uma pequena diferença no resultado que se igualará a medida que para s se escolha um número maior.

5.4.5- (Equações)

Para x = 5 teremos (5-a).(5-b) = 6, se a=2 e b=3, onde m.d.c(2,3) = 1, agora substituindo os valores de a e b respectivamente por 2 e 3 na primeira equação, teremos (x-2).(x-3) = 6 que equivale a equação $x^2 - 5x = 0$, logo teremos x=0 ou x=5.

5.4.6- (Proporcionalidade)

a) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$
b) $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$
c) Sim, pois m.d.c (3,8) = 1 e m.d.c (7,8) = 1

5.4.7- (Semelhança de triângulos)

a) Como os dois triângulos são retângulos, basta notar que as medidas referentes aos lados do triângulo A são respectivamente igual ao triplo das medidas dos lados do triângulo B.
b) Construa um triângulo isósceles C, de maneira que um dos lados de C e a hipotenusa de A sejam primos gêmeos. Basta construir um triângulo isósceles em que seu lado maior ou dois dos seus lados congruentes sejam 3 ou 7.

5.4.8- (O número π)

a) 3 e 4; 4 e 5; 5 e 9
b) 3 e 5

5.4.9- (Área)

Temos que os seis primeiro números primos são os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, sendo que o 5º número primo ímpar é o 13, sendo assim, a área da região retangular será 17 cm x13 cm = 221cm^2.

5.4.10- (Probabilidade)

Temos 4 números primos menores do que 10 e, para obter números com dois dígitos formados por eles, não podendo se repetir os dígitos, teremos 4x3 = 12 números.

5.5-Problemas geradores de conteúdos propostos na 1ª série do Ensino Médio

5.5.1- (Sequências)

Os números primos menores do que 100 são os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97, um total de 25 números primos.

5.5.2- (Sequências)

a) $p_{10} = 29$
b) $p_{20} = 71$
c) $p_{25} = 97$

5.5.3- (Funções)

a) Utilizando a forma de soma teremos:
$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{3600+900+400+225+144}{3600} = \frac{5269}{3600} = 1{,}4636111...$.
Utilizando a forma de produto teremos:
$\zeta(2) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{25}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{49}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{121}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{\frac{24}{25}} \cdot \frac{1}{\frac{48}{49}} \cdot \frac{1}{\frac{120}{121}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{121}{120} = 1{,}60834418402777...$

b) Analisando os dois resultados, há uma pequena diferença nas respostas (obs: é importante que o professor comente o fato de que a medida que o valor de s se torna maior, essa diferença de resultado diminui).

5.5.4- (Funções)

a) $\pi(10) = 4$
b) $\pi(50) = 15$
c) $\pi(100) = 25$

5.5.5- (Função de 2º grau)

a) f(0) = 41; f(1) = 43; f(2) = 47; f(3) = 53; f(4) = 61
b) f(0) = 41; f(1) = 41; f(2) = 43; f(3) = 47; f(4) = 53
c) f(0) = 1601; f(1) = 1523; f(2) = 1447; f(3) = 1373; f(4) = 1301

5.5.6- (Função exponencial e Logarítmica)

a) $\pi(1.000) = \frac{1.000}{ln(1.000)} = 144$

b) π(10.000)= $\frac{10.000}{ln(10.000)}$ = 1.085

c) π (100.000) = $\frac{100.000}{ln(100.000)}$ = 8.685

d) Embora seja uma boa estimativa, é percepitível que ela se desvia do númeo real à medida que o valor de N se eleva.

5.5.7- (Função exponencial e Logarítmica)

a) π(1.000) = $\frac{1.000}{ln(1.000)-1,08366}$ = 171

b) π(10.000) = $\frac{10.000}{ln(10.000)-1,08366}$ = 1.230

c) π (100.000) = $\frac{100.000}{ln(100.000)-1,08366}$ = 9.588

5.5.8- (Geometria)

A soma dos quatro primeiros números primos é de 17, logo, fazendo uso da regra de três, conclui-se que a altura do prédio é de 28,9 metros.

5.5.9- (Geometria)

A quantidade de números primos que há de 1 a 100 é igual a 25, portanto teremos que x^2 = 25, que resultará em x = 5 ou x = -5, cancelando-se o valor de -5 por se tratar de uma medida, temos que a medida x da hipotenusa do triângulo retângulo será igual a 5.

5.5.10- (Razões trigonométricas)

O 19º número composto é o número 30, logo, temos que sen30º = 0,5, cos30º = 0,866 e tg30º = 0,577.

5.6-Problemas geradores de conteúdos propostos na 2ª série do Ensino Médio

5.6.1- (Trigonometria)

Não, pois 3sen($\frac{\pi}{2}$) = 3 e 6(cos($\frac{\pi}{2}$) + 1)= 6, e m.d.c (3,6) ≠ 1.

5.6.2- (Funções trigonométricas)

Temos que 40.sen150º = 40.0,5 = 20, e os números primos gêmeos entre 0 e 20 são os números 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19.

5.6.3- (Matrizes)

Uma sugestão são as matrizes $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ cujos determinantes são, respectivamente, 3 e 5.

5.6.4- (Matrizes)

Uma solução, pode ser, escolhendo-se as matrizes A = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, tal que $(A.B)_{2x2}$ = $\begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, cujo determinante é igual a 13.

5.6.5- (Sistemas lineares)

Se escolhermos x=3 e y=6 teremos que 3 ≤ 2 ≤ 2.3, sendo assim, para o sistema pedido, podem ser dada como solução as equações 2x+1y = 12 e 3x+2y = 21.

5.6.6- (Análise combinatória)

Para n = 1 temos que 1! + 1 = 2; para n = 2 temos que 2! + 1 = 3, para n = 3 temos que 3! + 1 = 7, para n = 4 temos que 4! + 1 = 25, para n = 5 temos que 5! + 1 = 121, para n = 6 temos que 6! + 1 = 721, portanto o resultado só será um número primo para n = {1, 2, 3}, não sendo primos os números 25 = 5x5, 121 = 11x11 e 721 = 7x103.

5.6.7- (Probabilidade)

As faces dado são formadas pelos seis primeiros números primos, portanto suas faces são 2, 3, 5, 7, 11 e 13.

a) Dentre os números das faces, podem sair com a face para cima, os pares (3,5), (5,7), (11,13), (5,3), (7,5), (13,11) das 36 possibilidades, portanto, a probabilidade será $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
b) Como todos os números da face são números primos, logo, não importam quais serão os pares, todos serão primos entre si.

5.6.8- (Geometria métrica espacial)

O volume do paralelepípedo é 3x5x7 = 105, um número composto, é divisível pelos números 3, 5 e 7 além do número 1 e o próprio 105.

5.6.9- (Geometria métrica espacial)

Não, pois de acordo com as condições dadas no enunciado, supondo, a, b e c sendo, respectivamente, a largura, o comprimento e a altura do paralelepípedo, a área total será 2.(a.b + b.c + a.c), com a, b e c maiores do que 1, onde, em outras palavras, a medida da área total será sempre dada por um número par maior do que dois, portanto um número composto.

5.6.10- (Geometria métrica espacial)

Uma solução pode ser dada escolhendo os números 3 e 5 para a base da pirâmide, a área da base será 3x5 = 15, neste caso, podemos escolher como altura da pirâmide, a medida 16, pois m.d.c (15,16) = 1.

5.7-Problemas geradores de conteúdos propostos na 3ª série do Ensino Médio

5.7.1- (Geometria Analítica)

a) (9,4); (3,5); (5,7); (2,3) e (7,9)
b) (3,5) e (5,7)
c) (4,9) e (6,8)

5.7.2- (Geometria Analítica)

Fazendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos que $y_1 = x_1^2 - x_1 + 41 = (1)^2 - (1) + 41 = 41$ e $y_2 = x_2^2 + x_2 + 41 = (1)^2 + (1) + 41 = 43$, sendo assim, teremos A(1,41) e B(1,43), logo o ponto médio de AB será $M_{AB} = (\frac{1+1}{2}, \frac{41+43}{2}) = (1,42)$.

5.7.3- (Geometria Analítica)

De acordo com o enunciado, uma solução seria os pares (3,5), (5,7), (11,13) e (17,19).

5.7.4- (Equações algébricas)

a) Para x = 1 e y = 1, teremos a = x(y + 1) – (y! + 1)= 1.(1 + 1) – (1! + 1) = 0, logo a = 0, portanto, $f(1,1) = \frac{y-1}{2}[|a^2 - 1| - (a^2 - 1)] + 2 = \frac{1-1}{2}[|0^2 - 1| - (0^2 - 1)] + 2 = 2$.
b) Para x = 1 e y = 2, teremos a = x(y + 1) – (y! + 1)= 1.(2 + 1) – (2! + 1) = 0, logo a = 0, portanto, $f(1,2) = \frac{y-1}{2}[|a^2 - 1| - (a^2 - 1)] + 2 = \frac{2-1}{2}[|0^2 - 1| - (0^2 - 1)] + 2 = 3$.

c) Para x = 1 e y = 3, teremos a = x(y + 1) – (y! + 1)= 1.(3 + 1) – (3! + 1) = -3, logo a = -3, portanto, f(1,3) = $\frac{y-1}{2}$[|a^2 - 1| - (a^2 – 1)] + 2 = $\frac{3-1}{2}$[|(-3)^2 - 1| - ((-3)^2 – 1)]+2 =*2.*

5.7.5- (Funções)

a) ζ(5) = 1 + $\frac{1}{2^5}$ = 1 + $\frac{1}{32}$ = 1,03125
b) ζ(5) = $\frac{1}{1-\frac{1}{2^5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^5}} = \frac{1}{1-\frac{1}{32}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{243}} = \frac{1}{\frac{31}{32}} \cdot \frac{1}{\frac{242}{243}} = \frac{32}{31} \cdot \frac{243}{242}$ = 1,0365
c) Há uma pequena diferença a partir dos décimos de milésimos, esta diferença ocorre devido a quantidade de termos que foram usados, diminuindo conforme aumenta-se os termos.

5.7.6- (Funções)

a) Pelo método de Gauss temos π(1.000) = $\frac{1.000}{ln(1.000)}$ = 144, pelo método de Legendre temos π(1.000) = $\frac{1.000}{ln(1.000)-1,08366}$ = 171
b) Pelo método de Gauss temos π(10.000) = $\frac{10.000}{ln(10.000)}$ = 1.085, pelo método de Legendre temos π(10.000) = $\frac{10.000}{ln(10.000)-1,08366}$ = 1.230
c) Pelo método de Gauss temos π(100.000) = $\frac{100.000}{ln(100.000)}$ = 8.685, pelo método de Legendre temos π(100.000) = $\frac{100.000}{ln(100.000)-1,08366}$ = 9.588

5.7.7- (Estatística)

a) Montar uma tabela com duas colunas em que cada linha da quantidade de números naturais corresponda à quantidade de números primos.
b) Para a primeira linha temos $\frac{10}{4}$ = 2,5, para a segunda linha temos $\frac{100}{25}$ = 4, para a terceira linha temos $\frac{1.000}{168}$ = 5,95, para a quarta linha temos $\frac{10.000}{1229}$ = 8,1367 e para a quinta linha temos $\frac{100.000}{9.592}$ = 10,425.
(obs. Ao observar a proporção de primos, Gauss percebeu certo padrão à medida que a contagem se elevava, parecendo estar aumentando aproximadamente 2,3 para cada uma das etapas)
c) Utilize o gráfico de barras para representar a quantidade de números primos em função da quantidade de números naturais de acordo com a tabela.

5.7.8- (Medidas de tendência central) - Em uma determinada avenida, se observou a quantidade de carros que iria passar nas 10 primeiras horas do dia, e o resultado obtido para cada hora foi, respectivamente, os 10 primeiros números primos. Organize esses dados em uma tabela e responda.

a) Média = $\frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23+29}{10}$ = 12,9
b) Mediana = 12

5.7.9- (Medidas de tendência central)

a) Média = $\frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23+29}{10}$ = 12,9
b) Desvio médio= $\frac{|2-12{,}9| + |3-12{,}9| + |5-12{,}9| + |7-12{,}9| + |11-12{,}9| + |13-12{,}9| + |17-12{,}9| + |19-12{,}9| + |23-12{,}9| + |29-12{,}9|}{10}$ = 7,3
c) Variância = 73,29; Desvio padrão = $\sqrt{\text{variância}}$ = $\sqrt{73{,}29}$ = 8,56

5.7.10- (Medidas de tendência central)

Média = $\frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23+29}{10}$ = 12,9
Mediana = 12
Desvio médio= $\frac{|2-12{,}9| + |3-12{,}9| + |5-12{,}9| + |7-12{,}9| + |11-12{,}9| + |13-12{,}9| + |17-12{,}9| + |19-12{,}9| + |23-12{,}9| + |29-12{,}9|}{10}$ = 7,3
Desvio padrão = $\sqrt{\text{variância}}$ = $\sqrt{73{,}29}$ = 8,56

APÊNDICE III – Projeto aplicado à turma do 7ª ano do ensino fundamental

TEMA: Proporcionalidade.

OBJETIVO GERAL: O ensino de Proporcionalidade: desenvolver uma atividade de construção geométrica utilizando o conteúdo aprendido.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Explorar a noção de razão de proporcionalidade, noções de proporcionalidade direta e inversa, escalas, ampliação, planificação, regra de três, construir, de forma cooperativa e solidária conteúdos de geometria inter-relacionando-os com os números primos.

JUSTIFICATIVA: Ao analisar alguns livros didáticos, é fácil perceber que nas escolas de ensino básico, os números primos são geralmente apresentados para os alunos que estão cursando o sexto ano. Porém, nos demais anos, mesmo quando é feita alguma referência aos números primos, o mesmo não ocorre com tanta ênfase quanto a que é proposta na primeira apresentação. Sendo assim, nossa intenção é incluir os conteúdos de números primos inter-relacionando-os aos assuntos já programados no início do ano letivo, que neste caso, será o ensino de geometria.

METODOLOGIA: Resolução de Problemas.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE:

Formar grupos – entregar uma atividade (nesta fase o professor passa a ser um observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem).

Resultados na lousa – Feita a atividade, os grupos deverão colocar na lousa a forma de como chegou a cada resultado.

Plenária - Cada grupo deverá explicar para os demais a maneira de como chegou ao resultado pretendido.

Análise dos resultados – O professor deverá analisar juntamente com a sala cada resultado descrito pelos grupos, neste momento o professor poderá tirar as dúvidas e trabalhar pontos de dificuldade encontrados pelos alunos, aproveitando para explorar o assunto.

Consenso - A partir das análises feitas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

Formalização – Faz-se uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado, colocam-se as definições e propriedades.

Desenvolver uma nova atividade incluindo a construção de uma planificação ampliada de um poliedro a partir de especificações dadas pelo professor. (nesta etapa os alunos deverão utilizar os conhecimentos a respeito de proporcionalidade e números primos que foram aprendidos nas tarefas anteriores).

CRONOGRAMA: seis aulas

BIBLIOGRAFIA:

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental, MEC, 1998.

SÃO PAULO (estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação. Coordenação geral: Maria Inês Fini; Coordenação de área: Nilson José Machado. – São Paulo: SEE, 2010.

DANTE, L. R. Projeto Teláris: Matemática, 7º ano, 2ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2016.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. IN: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. Cap12, p.199-217.

SAUTOY, Marcus du. A Música dos Números Primos: a história de um problema não resolvido na matemática. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa, 28ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

APÊNDICE IV – Atividades 1 e 2

Atividade 1

Nome: ____ nº ___ ano: ___

Nome: ____ nº ___

Nome: ____ nº ___

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

(Razão, proporcionalidade direta e inversa)

1- (Razões) Em uma sala de aula há 35 alunos, sendo 15 meninos e 20 meninas.
   a) De que maneira podemos comparar a quantidade de meninos e meninas com diferentes salas de aulas?
   b) Qual a razão entre o número de meninos e o número de meninas?
   c) Os números usados para representar a quantidade de meninos e de meninas são primos entre si? Por que?

2- Em certa casa há a necessidade de se construir 4 muros iguais, para isso foi contratado um pedreiro que geralmente constrói 2 muros em 5 horas, desde que a base já esteja pronta.
   a) A partir das informações dadas, quais são as grandezas envolvidas? Supondo que o pedreiro construa todos os muros no mesmo ritmo, em quanto tempo o pedreiro construirá os 4 muros? Se o mesmo pedreiro fosse construir 8 muros, em quanto tempo os faria?
   b) Ao comparar a razão entre os valores correspondentes à quantidade de muro e ao tempo, é possível notar uma proporção? Por que? Represente, para este caso, a razão de proporcionalidade através de uma fração.
   c) Os números que correspondem à razão de proporcionalidade são números primos? São números primos gêmeos? São números primos entre si?

d) Em quanto tempo seria construído os 4 muros se fosse contratado mais um pedreiro, supondo que os dois pedreiros tenham o mesmo rendimento?

Atividade 2

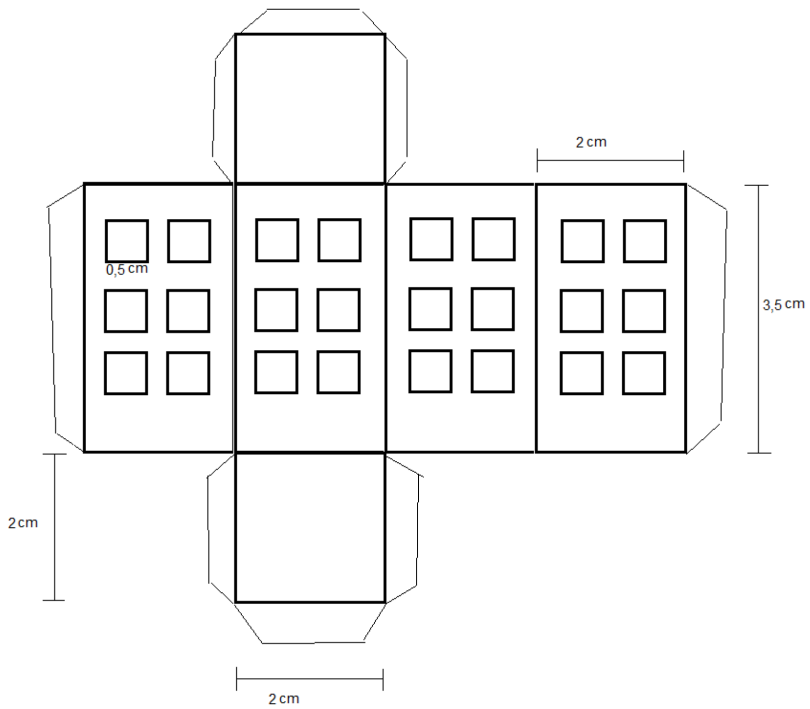
Nome: ____ nº ___ ano: __

Nome: ____ nº ___

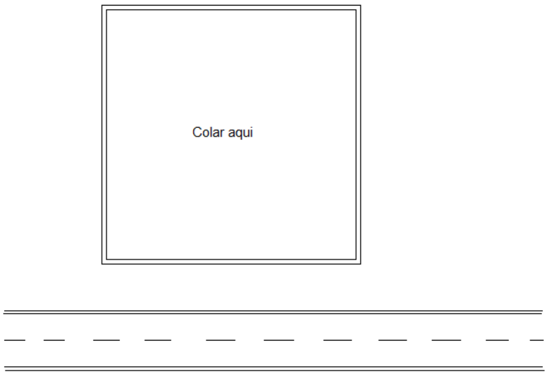
Nome: ____ nº ___

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA (Proporcionalidade, Escalas, Regra de três)

1- A figura a baixo é a planificação de um paralelepído que representa um prédio, preencha cada janela com os números primos na ordem crescente e depois faça uma ampliação na razão 1:2 pintando cada par de janelas que contenha primos gêmeos com a mesma cor.



2-



3- Ampliando a altura desta última planificação na razão de 1:1000, Qual seria a altura, em metros, de uma árvore ao lado do prédio, supondo que, em um mesmo momento do dia, as sombras do prédio e da árvore tenham, respectivamente, 3,5 metros e 1,5 metros? Neste caso, as alturas do prédio e da árvore são primos gêmeos? Por que?

ANEXO – Currículo do Estado de São Paulo

Tabela 46 – Conteúdos propostos na 5ª série ou 6º ano do Ensino Fundamental

1º bimestre		
Números	Números naturais	Múltiplos e divisores
		Números primos
		Operações básicas (+,-,x,÷)
		Introdução às potências
	Frações	Representação
		Comparação e Ordenação
		Operações
2º bimestre		
Números/Relações	Números decimais	Representação
		Transformação em fração decimal
		Operações
	Sistemas de medida	Medidas de comprimento, massa e capacidade
		Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade
3º bimestre		
Geometria/Relações	Formas geométricas	Formas Planas
		Formas Espaciais
	Perímetro e área	Unidades de medida
		Perímetro de uma figura plana
		Cálculo de área por composição e decomposição
		Problemas envolvendo área e perímetro de

		figuras planas
4º bimestre		
Números/Relações	Estatística	Leitura e construção de gráficos e tabelas
		Média aritmética
		Problemas de contagem

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 57-58)

Tabela 47 – Conteúdos propostos na 6ª série ou 7º ano do Ensino Fundamental

1º bimestre		
Números	Sistemas de numeração	Sistemas de numeração na Antiguidade
		O sistema posicional decimal
	Números negativos	Representação
		Operações
	Números racionais	Representação fracionária e decimal
		Operações com decimais e frações (complementos)
2º bimestre		
Geometria	Geometria	Ângulos
		Polígonos
		Circunferência
		Simetrias
		Construções geométricas
		Poliedros
3º bimestre		
Relações	Proporcionalidade	Variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais
		Conceito de razão
		Porcentagem
		Razões constantes na Geometria: π
		Construção de gráficos de setores
		Problemas envolvendo probabilidade

4º bimestre		
Números	Álgebra	Uso de letras para representar um valor desconhecido
		Conceito de equação
		Resolução de equações
		Equações e problemas

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 59-60)

Tabela 48 – Conteúdos propostos na 7ª série ou 8º ano do Ensino Fundamental

1º bimestre		
Números	Números racionais	Transformação de decimais finitos em fração
		Dízimas periódicas e fração geratriz
	Potenciação	Propriedades para expoentes inteiros
		Problemas de contagem
2º bimestre		
Números/Relações	Expressões algébricas	Equivalências e transformações
		Produtos notáveis
		Fatoração algébrica
3º bimestre		
Números/Relações	Equações	Resolução de equações de 1º grau
		Sistemas de equações e resolução de problemas
		Inequações de 1º grau
	Gráficos	Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano

4º bimestre		
Geometria	Geometria	Teorema de Tales
		Teorema de Pitágoras
		Área de polígonos
		Volume do prisma

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 61-62)

Tabela 49 – Conteúdos propostos na 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental

1º bimestre		
Números	Números reais	Conjuntos numéricos
		Números irracionais
		Potenciação e radiciação em R
		Notação científica
2º bimestre		
Numeros/Relações	Álgebra	Equações de 2º grau: resolução e problemas
	Funções	Noções básicas sobre função
		A ideia de variação
		Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º 2º graus
3º bimestre		
Geometria/Relações	Proporcionalidade na Geometria	O conceito de semelhança
		Semelhança de triângulos
		Razões trigonométricas

4º bimestre		
Geometria/Números	Corpos redondos	O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo
		Volume e área do cilindro
	Probabilidade	Problemas de contagem e introdução à probabilidade

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 63-64)

Tabela 50 – Conteúdos propostos na 1ª série do Ensino Médio

1º bimestre		
Números	Números e sequências	Conjuntos numéricos
		Regularidades numéricas: sequências
		Progressões aritméticas e progressões geométricas
2º bimestre		
Relações	Funções	Relação entre duas grandezas
		Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado
		Função de 1º grau
		Função de 2º grau
3º bimestres		
Relações	Função exponencial e logarítmica	Crescimento exponencial
		Função exponencial: equações e inequações
		Logaritmos: definição e propriedades
		Função logarítmica:

		equações e inequações
4º bimestre		
Geometria/Relações	Geometria-Trigonometria	Razões trigonométricas nos triângulos retângulos
		Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies
		Resolução de triângulos não retângulos: Leis dos Senos e Lei dos Cossenos

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 65-66)

Tabela 51 – Conteúdos propostos na 2ª série do Ensino Médio

1º bimestre		
Relações	Trigonometria	Fenômenos periódicos
		Funções Trigonométricas
		Equações e inequações
		Adição de arcos
2º bimestre		
Números/Relações	Matrizes, determinantes e sistemas lineares	Matrizes: significado como tabelas, características e operações
		A noção de determinante de uma matriz quadrada
		Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento

3º bimestre		
Números	Análise combinatória e probabilidade	Princípios multiplicativo e aditivo
		Probabilidade simples
		Arranjos, combinações e permutações
		Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos
		Probabilidade condicional
		Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o binômio de Newton
4º bimestre		
Geometria	Geometria métrica espacial	Elementos de geometria de posição
		Poliedros, prismas e pirâmides
		Cilindros, cones e esferas

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 67-68)

Tabela 52 – Conteúdos propostos na 3ª série do Ensino Médio

1º bimestre		
Geometria/Relações	Geometria analítica	Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos
		Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares
		Ponto e reta: distância
		Circunferência: equação
		Reta e circunferência: posições relativas
		Cônicas: noções, equações, aplicações
2º bimestre		
Números	Equações algébricas e números complexos	Equações polinomiais
		Números complexos: operações e representação geométrica
		Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial
		Relações de Girard

3º bimestre		
Relações	Estudo das funções	Qualidades das funções
		Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmicas e polinomiais
		Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação
		Composição: translações e reflexões
		Inversão
4º bimestre		
Números/Relações	Estatística	Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos
		Medidas de tendência central: média, mediana e moda
		Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão
		Elementos de amostragem

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 69-70)