UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS SÉRGIO RODRIGUES DA SILVA

UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM COMO AUXÍLIO NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

FORTALEZA

2013

CARLOS SÉRGIO RODRIGUES DA SILVA

UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM COMO AUXÍLIO NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S579u Silva, Carlos Sérgio Rodrigues da
Utilização de objetos de aprendizagem como auxílio no ensino de geometria analítica / Carlos Sérgio Rodrigues da Silva. – 2013.
57 f. : il., enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Geometria analítica. 2. Educação – Recursos de redes de computadorores. 3. Coleta de dados. I. Título.

CDD 516.3

CARLOS SÉRGIO RODRIGUES DA SILVA

UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM COMO AUXÍLIO NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus pais, Gesualdo e Tereza.

À minha esposa, Monique e à minha filha, Laís.

AGRADECIMENTOS

À Jeová Deus, o Grande Matemático, por criar o universo com toda essa beleza matemática e pelo dom de gostar dos números que recebi.

À Capes, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, pela sua orientação.

Aos meus professores, pela paciência que possuem em ensinar assuntos tão complexos.

Aos meus alunos, por serem meus parceiros de ensino aprendizagem.

Aos meus colegas de turma de mestrado, por caminharmos juntos essa difícil jornada.

Aos meus colegas de trabalho da E. E. F. M. Senador Fernandes Távora, pelo apoio e palavras de incentivo em momentos difíceis.

RESUMO

Este estudo procura analisar a eficiência do uso de objetos de aprendizagem no ensino de geometria analítica, mais precisamente no assunto distância entre dois pontos. Para isso, optou-se por um estudo experimental do qual participaram 14 alunos do 3º ano da Escola de Ensino Fundamental e Médio Senador Fernandes Távora que se localiza no bairro Demócrito Rocha, na cidade de Fortaleza, estado do Ceará. A turma foi dividida em dois grupos de 8 alunos cada, sendo que dois deles não participaram de todo o estudo. Em um dos grupos foi aplicada a atividade Pontos em Batalha e no outro apenas o método tradicional. Os instrumentos de coleta de dados foram: atividades do Rived, questionário socioeconômico e teste de múltipla escolha com questões sobre localização no plano cartesiano e distância entre dois pontos. Os dados foram analisados por meios de gráficos do programa Microsoft Excel. Percebeu-se, como resultado, que o grupo submetido à aplicação do objeto de aprendizagem teve um melhor desempenho no teste em relação ao outro grupo.

Palavras-chave: Ensino Médio. Objetos de Aprendizagem. Geometria Analítica.

ABSTRACT

This study seeks to analyze the efficiency of the use of learning objects in teaching analytic geometry, more precisely on subject distance between two points. For this, it was chosen an experimental study involving 14 students of the 3rd year of Primary School and Middle Senador Fernandes Távora, which is located in the neighborhood Demócrito Rocha, in the city of Fortaleza, state of Ceará. The class was divided into two groups of eight students each but two of these students did not participate in the entire study. In one of the groups was applied the activity Pontos em Batalha and the other only the traditional method. The instruments for data collection were activities rived, socioeconomic questionnaire and multiple-choice test with questions on location in the Cartesian plane and the distance between two points. Data were analyzed by means of graphical program Microsoft Excel. It was noticed as a result, the group submitted to the application of the learning object had a better performance on the test compared to the other group.

Keyword: High school. Learning object. Analytic Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – As três posições relativas dos pontos X, O e Y..17

Figura 2 – Ponto P de coordenadas (x, y)..18

Figura 3 – Os quadrantes do sistema OXY..19

Figura 4 – P e Q tem mesma ordenada..19

Figura 5 – P e Q tem mesma abscissa...20

Figura 6 – P e Q com coordenadas duas a duas distintas..20

Figura 7 – Triângulo OPQ...21

Figura 8 – O, P e Q colineares com $\theta = 0$..22

Figura 9 – Sistema de eixos $OXYZ$ e seus planos cartesianos.......................................23

Figura 10 – Ponto $P = (x_P, y_P, z_P)$...24

Figura 11 – Distância entre os pontos P e Q..25

Figura 12 – Triângulo OPQ no espaço...26

Figura 13 – O, P e Q colineares (espaço) com $\theta = 0$..27

Figura 14 – Tela inicial do jogo..29

Figura 15 – Tela de escolha de nível..29

Figura 16 – Cenário do nível 1...30

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparativo de acertos: Item 1..35

Gráfico 2 – Comparativo de acertos: Item 2..36

Gráfico 3 – Comparativo de acertos: Item 3..36

Gráfico 4 – Comparativo de acertos: Item 4..37

Gráfico 5 – Comparativo de acertos: Item 5..38

Gráfico 6 – Comparativo de acertos: Item 6..38

Gráfico 7 – Percepção quanto a utilidade prática...39

Gráfico 8 – Aumento do interesse..39

Gráfico 9 – Resultado Geral de acertos..40

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
2 UM POUCO DE HISTÓRIA 13
3 COORDENADAS E DISTÂNCIAS NA RETA, NO PLANO E NO ESPAÇO 15
3.1 Na reta 15
3.2 No Plano 17
3.3 No Espaço 23
4 DESCRIÇÃO E APLICAÇÃO DO OBJETO DE APRENDIZAGEM PONTOS EM BATALHA 29
4.1 Objetivos da aplicação desta atividade 32
4.2 Avaliação Prévia 32
4.3 Metodologia de Aplicação 32
4.3.1 Contexto 32
4.3.2 Participantes 33
4.3.3 Condução do Trabalho 33
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS 35
5.1 Item 1 35
5.2 Item 2 35
5.3 Item 3 36
5.4 Item 4 37
5.5 Item 5 37
5.6 Item 6 38
5.7 Item 7 39
5.8 Item 8 39
5.9 Avaliação Global 40
6 CONCLUSÃO 41
REFERÊNCIAS 44
APÊNDICE A – ESPAÇOS MÉTRICOS E DISTÂNCIA 45
APÊNDICE B – TESTE SOBRE LOCALIZAÇÃO NO PLANO CARTESIANO E DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS 51
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO 54
APÊNDICE D – TERMO DE CONCORDÂNCIA 58

1 INTRODUÇÃO

A geometria analítica, conforme ensinada aos alunos do ensino básico, diz respeito às definições e representações de formas geométricas por meio da álgebra. A partir daí, propriedades dessas formas são deduzidas através de processos algébricos. Em geral, os alunos tem um contato com a "matéria" geometria analítica no último ano do ensino básico, embora muitos aspectos do assunto tenham sido vistos anteriormente mas não com essa identificação nem com a abordagem própria dela. Por exemplo, o conceito de localização num sistema de coordenadas, geralmente é abordado quando o aluno estuda funções, visto que esse assunto requer a utilização do plano cartesiano.

Assim, ao estudar a "matéria" de geometria analítica, o primeiro conceito novo que o aluno se depara é o de distância entre dois pontos. Este se torna um conceito básico e importante para tantos outros que serão abordados, tais como, a circunferência e as cônicas, cujas definições estão atreladas ao conceito de distância. Antes disso, o cálculo do perímetro e da mediana de um triângulo são casos do uso direto da fórmula da distância entre dois pontos. E a fórmula para a distância entre um ponto e uma reta requer o uso da fórmula da distância entre dois pontos para a sua dedução sem apelar para a noção de vetores.

E nem precisamos mencionar a importância desse assunto quando o aluno deseja ampliar seus estudos em matemática (ou em outras áreas, como física e engenharia) por meio de uma formação superior.

Por outro lado, existe também a real necessidade dos alunos encontrarem sentido prático naquilo que estão estudando. Seria bom eles perceberem que o que aprendem pode ser útil na sua vida. E a forma como um assunto é ensinado pode influir muito nessa percepção. Isso pode ser um fator crucial em se os alunos vão dar a necessária atenção ao que está sendo abordado.

Ademais, nessa era da informática em que vivemos, onde a tecnologia pode ser tanto inimiga como aliada, os alunos atuais tem mais distrações do que os de antigamente. Dessa forma, o uso apenas do pincel e quadro ao dar uma aula pode não ter o atrativo necessário para conseguir dos alunos a constante atenção que o ensino da matemática requer.

Uma maneira de superar tais desafios é o uso de ferramentas de ensino ligadas a informática e tecnologias similares. E cada vez mais recursos tecnológicos ligados a educação e ao ensino tem sido desenvolvidos.

Este trabalho analisa o uso de um desses recursos no ensino de distância entre dois pontos, em geometria analítica. O Objeto de Aprendizagem (OA) usado é o Pontos em Batalha. Nas páginas seguintes é feita uma descrição de como este OA foi aplicado em uma turma do 3º ano do ensino médio, bem como o resultado obtido nessa aplicação. É importante salientar que o OA foi usado como atividade complementar após o assunto ter sido abordado em sala de aula.

Antes, porém, faremos um pequeno passeio no tempo para analisarmos um pouco da história da matemática que trata da origem da geometria analítica. Veremos a importância da obra de mentes brilhantes como a de Descartes e Fermat. E lembraremos que o conhecimento é uma contribuição de muitos que, com sua habilidade e esforço, deixaram sua marca na construção do conhecimento matemático.

Também veremos a fundamentação matemática para o assunto abordado por esse OA. Primeiro, como estabelecer coordenadas na reta e daí calcular a distância entre dois pontos num eixo. Depois, usando esses conceitos, faremos a mesma sequência no plano e no espaço e deduziremos a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano e no espaço. A notação usada neste trabalho para as coordenadas de um ponto num sistema de eixos é ligeiramente diferente da notação usada nos livros didáticos e da usada com a turma. Mas, a essência de tudo é a mesma.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

A geometria analítica pode ser considerado um poderoso método da geometria. A ideia é, basicamente, associar a álgebra à geometria para resolver problemas que a princípio são geométricos.

> A essência da ideia, quando aplicada ao plano [...] consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas no plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x, y) = 0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébrica e analíticas da equação $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada. Transfere-se assim, de maneira inteligente, a tarefa de provar um teorema em geometria para a de provar um teorema correspondente em álgebra e análise. (EVES, 2008, p. 382)

A maioria dos autores defende a ideia de que esse método foi criado pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, embora haja divergência não só quanto ao autor, mas também quanto a época em que foi criado. Essa divergência reside no fato de que vários matemáticos anteriores aos dois citados, usaram métodos ou recursos da geometria analítica. De fato, os egípcios e os romanos, por exemplo, usavam coordenadas na agrimensura; os gregos se dedicaram bastante à geometria algébrica; as Cônicas de Apolônio certamente continha muito do que chamamos hoje de geometria analítica; "no século XIV Nicole Oresme antecipou outros aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis". (EVES, 2008, p. 382)

Porém, é claro que, no momento da criação deste método, dois ramos da matemática já deveriam estar bem desenvolvidos: a geometria e a álgebra. O primeiro, principalmente após a publicação dos Elementos de Euclides, por volta do século III a.C, já estava bem desenvolvido e estabelecido. Faltava, então, "o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos." (EVES, 2008, p. 383) E a geometria analítica teve que esperar uns 18 séculos por isso.

Tal desenvolvimento da álgebra se tornou suficiente não antes do século XVI com a obra de Fançois Viète. Entre outros trabalhos, ele publicou em 1591 o seu mais famoso: *In artem analyticam isagoge* "ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico muito deve." (EVES, 2008, p. 309)

> Nesse texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. [...] Antes de Viète era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele

> expressava por A, $A\ q$, $A\ c$. [...] usava os símbolos atuais $+$ e $-$ mas não tinha nenhum símbolo para a igualdade. (EVES, 2008, p. 309, 310)

Sem a álgebra suficientemente desenvolvida, matemáticos anteriores a Viète não poderiam criar um método tão dependente dela. Assim, pode-se coerentemente considerar que a origem essencial da geometria analítica está nas contribuições feitas por Descartes e Fermat.

Em 1637 Descartes publicou o tratado *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências). Esta publicação continha três apêndices, a saber, *La dioptrique, Les météores* e *La géométrie,* este último trazendo a contribuição de Descartes à geometria analítica.

La géométrie foi a única publicação matemática de Descartes e se divide em três partes. Na primeira delas, Descartes fez uma explanação de alguns princípios da geometria algébrica. Na segunda, uma classificação de curvas e um método para construir tangentes de curvas. A terceira parte, trata de soluções de equações de grau maior que dois, traz pela primeira vez, a convenção do uso das primeiras letras do nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas para indicar variáveis, bem como, nossa atual notação para potências.

Porém, é importante salientar o que diz Eves (2008, p. 388)

> *La géométrie* não é, de maneira alguma, um desenvolvimento sistemático do método analítico, e o leitor é obrigado a quase construir o método por si mesmo, a partir de certas informações isoladas. Há trinta e duas figuras no texto, mas em nenhuma delas se encontram colocados explicitamente os eixos coordenados. O texto foi escrito intencionalmente de maneira obscura e como resultado era difícil de ler, o que limitava muito a divulgação de seu conteúdo. [...] Um século depois, ou um pouco mais, o assunto adquiriu a forma hoje familiar nos textos universitários. As palavras *coordenadas, abscissa* e *ordenada,* no sentido técnico que tem hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692.

Em setembro de 1936 Fermat escreve uma carta a outro matemático da época, Roberval, onde afirmava que suas ideias sobre o método analítico já existiam a sete anos. Postumamente essas ideias foram publicadas em um artigo intitulado *Isogoge ad locus et sólidos*, onde encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discursão sobre cônicas. “Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, concluído antes de 1937, Fermat definiu muitas curvas novas analiticamente.” (EVES, 2008, p.389)

> Assim, em grande escala, onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava uma equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica. (EVES, 2008, p. 389)

3 COORDENADAS E DISTÂNCIAS NA RETA, NO PLANO E NO ESPAÇO

Neste ponto do trabalho é importante que façamos uma explanação dos conceitos matemáticos envolvidos no assunto abordado, a saber, o conceito de distância. Para isso, é necessário analisarmos um pré-requisito importante para tal conceito: a noção de coordenadas, tanto na reta, como no plano. No que segue, admitimos que o leitor conhece os conceitos de completude e ordenação do conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, bem como fatos elementares da chamada geometria euclidiana, como por exemplo, por dois pontos distintos passam uma, e somente uma reta; dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, passando por P existe uma, e somente uma reta paralela r e uma, e somente uma, reta perpendicular a r; Teorema de Pitágoras, entre outros.

Dessa forma, iniciamos com a

Definição 1 *Dada uma unidade de comprimento, a cada par de pontos A e B do espaço, chamaremos de distância entre os pontos A e B, o comprimento do segmento de reta com extremidades nesses pontos. Denotaremos essa distância por $d(A,B)$.*

$d(A,B)$ é um número real com as seguintes propriedades, que provem da geometria euclidiana:

1. $d(A,B) \geq 0$
2. $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $d(A,B) = d(B,A)$
4. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (**Desigualdade Triangular**)
5. $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) \Leftrightarrow A, B$ e C são colineares e C está entre A e B.

As propriedades 1 a 4, destacadas acima, são usadas para dar uma definição mais geral de distância. Esta consideração foge ao objetivo deste texto. Não obstante, uma breve explanação do assunto é dado no apêndice A deste trabalho.

3.1 Na reta

Para estabelecermos as coordenadas numa reta precisamos das definições a seguir.

Definição 2 *Uma reta orientada é uma reta sobre a qual se escolheu um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso chama-se negativo.*

Definição 3 *Dada uma reta orientada, dizemos que B está à direita de A (e A está à esquerda de B) quando o sentido de percurso de A para B é positivo.*

Definição 4 *Uma reta orientada na qual se fixou um ponto O denomina-se eixo. Este ponto fixo é chamado de origem.*

Com essas definições em mãos, podemos estabelecer uma correspondência entre um eixo e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, da seguinte forma: à origem faz-se corresponder o número zero; a cada ponto X à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$; a cada ponto X à esquerda de O corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$.

Veja que a correspondência estabelecido acima é biunívoca. De fato, para cada ponto X do eixo, existe um único número real associado a este; reciprocamente, dado um número real x; se $x = 0$, ele está associado à origem O; caso contrário, existem dois pontos X e X' no eixo, tais que $d(X, O) = d(X', O) = |x|$, um estando à direita de O e o outro, à esquerda. Se $x > 0$, ele está associado ao ponto que está à direita de O, caso contrário, ao ponto à esquerda de O. Assim, x está associado a um único ponto do eixo.

Dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 5 *O número real x, que corresponde ao ponto X de um eixo da maneira indicada acima, chama-se coordenada desse ponto.*

Dados X e Y pertencente a um eixo, sendo x e y suas respectivas coordenadas, é óbvio que se X está à direita de Y, então $x > y$. Além disso, temos o

Teorema 1 $d(X, Y) = |x - y|$, onde $|\quad|$ é módulo de um número real.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que X está a esquerda de Y. Assim, temos 3 casos.

Primeiro, O está entre X e Y. Assim, pela propriedade 5 da distância,

$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) = -x + y = |x - y|$.

Segundo, Y está entre X e O. Neste caso,

$d(X, O) = d(X, Y) + d(Y, O) \Leftrightarrow -x = -y + d(X, Y)$,

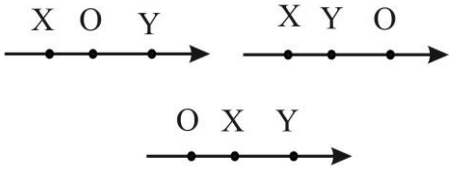
daí, $d(X, Y) = y - x = |x - y|$.

Terceiro, X está entre O e Y. Agora fica,

$d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y) \Leftrightarrow y = x + d(X, Y) \Leftrightarrow d(X, Y) = y - x$, e então,

$d(X, Y) = |x - y|$. ■

Figura 1 – As três posições relativas dos pontos X, O e Y



Fonte: Elaborado pelo Autor

3.2 No Plano

Consideremos agora o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) de números reais, denotado por $\mathbb{R}^2$, isto é, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$. Veja que, dados $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, tem-se $(x, y) = (x', y')$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. O número x é chama-se primeira coordenada ou abscissa e o número y a segunda coordenada ou ordenada do par (x, y).

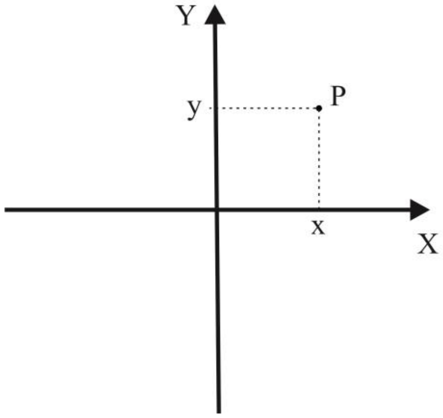
Definição 6 *Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano π é um par de eixos perpendiculares, OX (eixo das abscissas) e OY (eixo das ordenadas), contidos nesse plano, com a mesma origem O. O sistema é indicado com a notação OXY.*

A escolha de um sistema de coordenadas no plano π permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre π e $\mathbb{R}^2$. A cada ponto P do plano fazemos corresponder um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

Se P pertence ao eixo OX, ele corresponde ao par $(x, 0)$, onde x é a coordenada de P no eixo OX, do modo explicado na seção anterior; se P pertence ao eixo OY, ele corresponde ao par $(0, y)$, onde y é sua coordenada nesse eixo. Se P não pertence a nenhum dos eixo, o fazemos corresponder ao par (x, y), onde x é a coordenada, em OX, do pé da perpendicular a OX que passa por P e y é a coordenada, em OY, do pé da perpendicular a OY que passa por P. O ponto O, origem do sistema, está associado ao par $(0, 0)$.

Dizemos que os números x e y são as coordenadas do ponto P relativa ao sistema OXY sendo x a abscissa e y a ordenada.

Figura 2 – Ponto P de coordenadas (x, y)



Fonte: Elaborada pelo Autor

É importante salientar que o plano π não é a mesma coisa que o conjunto $\mathbb{R}^2$. No entanto, quando fixamos um sistema de coordenadas, a correspondência descrita acima nos permite identificar o ponto $P \in \pi$ com o par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a ele associado. Por isso, é costumeiro usar a notação $P = (x, y)$, indicando assim que P tem abscissa x e ordenada y. Porém, nos livros de ensino médio usados no Brasil, é usada a notação $P(x, y)$. Dessa forma, ao ser considerado esse assunto com os alunos da turma que participou da pesquisa deste trabalho, foi usada a segunda notação.

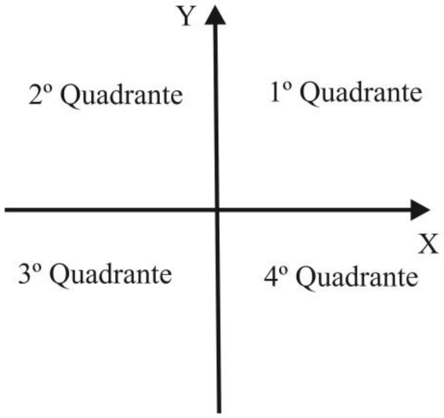
Definição 7 *As regiões em que o plano π fica dividido, ao se fixar um sistema de coordenadas, são chamados quadrantes.*

O quadrante superior direito é o primeiro quadrante e as coordenadas dos pontos pertencentes a ele são positivas; o quadrante superior esquerdo, é o segundo e possui os pontos em que a abscissa é negativa e a ordenada positiva; já o quadrante inferior esquerdo é o terceiro quadrante e seus pontos possuem ambas as coordenadas negativas; já o último quadrante, o quarto, possui abscissa positiva e ordenada negativa.

Resumindo, se $P = (x, y)$

a) pertence ao primeiro quadrante, $x > 0$ e $y > 0$;
b) pertence ao segundo quadrante, $x < 0$ e $y > 0$;
c) pertence ao terceiro quadrante, $x < 0$ e $y < 0$;
d) pertence ao quarto quadrante, $x > 0$ e $y < 0$.

Figura 3 – Os quadrantes do sistema OXY



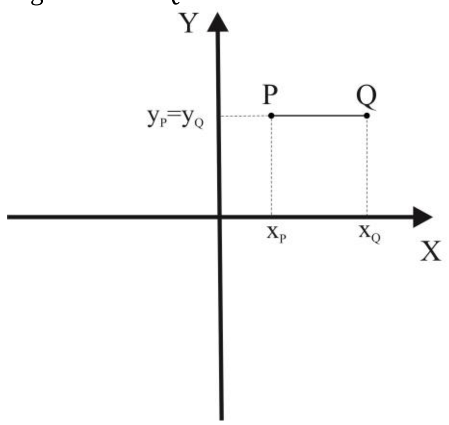
Fonte: Elaborado pelo Autor

Para o cálculo da distância entre dois pontos $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ no plano, vamos considerar 3 casos.

No primeiro, $y_P = y_Q$, ou seja, os pontos tem mesma ordenada. Neste caso basta ver que a distância entre P e Q é a distância entre os pontos $P' = (x_P, 0)$ e $Q' = (x_Q, 0)$ que estão no eixo OX e cuja distância é o valor absoluto da diferença entre as suas coordenadas nesse eixo, conforme vimos na seção anterior. Assim,

$d(P,Q) = d(P',Q') = |x_P - x_Q|$.

Figura 4 – P e Q tem mesma ordenada

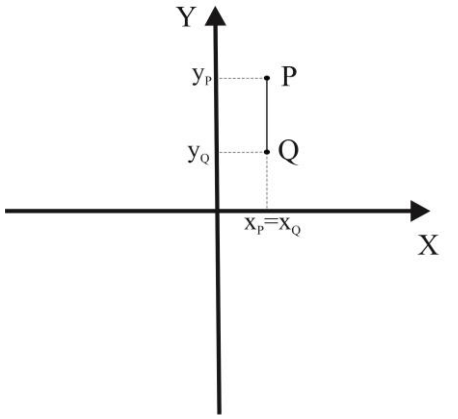


Fonte: Elaborada pelo Autor

No segundo caso, $x_P = x_Q$. De modo similar ao primeiro, considerando agora os pontos $P'' = (0, y_P)$ e $Q'' = (0, y_Q)$ no eixo OY. Temos que

$d(P,Q) = d(P'',Q'') = |y_P - y_Q|$.

Figura 5 – P e Q tem mesma abscissa

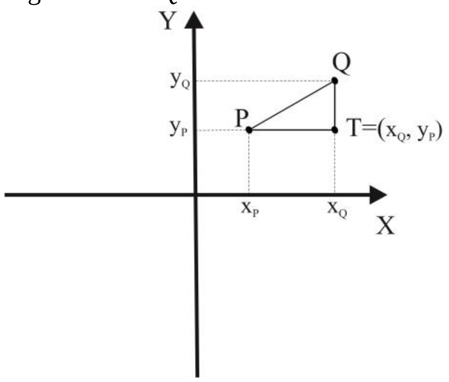


Fonte: Elaborada pelo Autor

No terceiro caso, as coordenadas são duas a duas distintas. Para encontrar uma expressão que nos dê a distância entre os pontos, em termos de suas coordenadas, vamos usar um conhecido resultado da geometria plana, a saber, o Teorema de Pitágoras. Consideremos o ponto T obtido pela intersecção da reta perpendicular ao eixo OX passando por Q com a reta perpendicular ao eixo OY passando por P (veja figura 6). Observe que, por construção, temos que $T = (x_Q, y_P)$. De modo que, T tem mesma abscissa do ponto Q e a mesma ordenada do ponto P. Assim,

$d(P.T) = |x_P - x_Q|$ e $d(Q,T) = |y_P - y_Q|$

Figura 6 – P e Q com coordenadas duas a duas distintas



Fonte: Elaborada pelo Autor

Observe também que o triangulo PQT é retângulo em T, por construção. Ora, pelo Teorema de Pitágoras,

$$[d(P,Q)]^2 = [d(P,T)]^2 + [d(Q,T)]^2 \Leftrightarrow [d(P,Q)]^2 = |x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2$$

Como $|x_P - x_Q|$ e $|y_P - y_Q|$ são positivos, não precisamos escrever as barras. Daí,

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Assim, podemos enunciar o

Teorema 2 *Sejam* $P = (x_P, y_P)$ *e* $Q = (x_Q, y_Q)$, *pontos no plano no qual foi adotado um sistema de eixos, então a distância entre os dois pontos é dada pela fórmula*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Note que o teorema 2 vale para os dois primeiros casos já que, se $y_P = y_Q$, então $y_P - y_Q = 0$ e

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q|;$$

e $x_P = x_Q \Leftrightarrow x_P - x_Q = 0$, logo

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(y_P - y_Q)^2} = |y_P - y_Q|.$$

Vejamos como a fórmula da distância entre dois pontos pode ser usada para a demonstração de uma importante desigualdade.

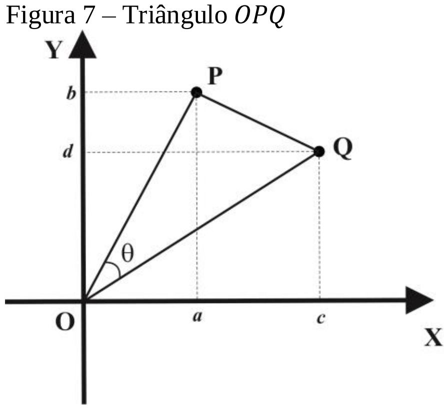
Proposição 1 (Desigualdade de Cauchy) *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Então,*

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. *A igualdade ocorre se, somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $a = \lambda c$ *e* $b = \lambda d$.

Prova: Se $a = b = 0$ ou $c = d = 0$, a desigualdade é trivial. Caso contrário, sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, pontos no plano OXY. Consideremos o triângulo OPQ (figura 7). Temos as distâncias

$$d(O,P) = \sqrt{a^2 + b^2},\ d(O,Q) = \sqrt{c^2 + d^2} \text{ e } d(P,Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Figura 7 – Triângulo OPQ



Fonte: Elaborada pelo Autor

Ora, pela lei dos cossenos, segue-se que

$$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)\cdot d(O,Q)\cdot cos\theta$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - d(P,Q)^2}{2d(O,P)\cdot d(O,Q)}$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2-[(a-c)^2+(b-d)^2]}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2-a^2+2ac-c^2-b^2+2bd-d^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{2ac+2bd}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$$

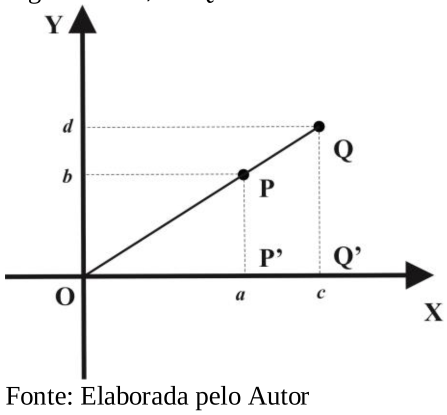
$$\Leftrightarrow cos^2\theta = \frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \leq 1,$$

pois $-1 \leq cos\theta \leq 1 \Leftrightarrow cos^2\theta \leq 1$.

Assim, $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$.

A igualdade ocorre se, só se, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, ou seja, O, P e Q são colineares (figura 8 para $\theta = 0$), o que equivale aos triângulos OPP' e OQQ' serem semelhantes, o que nos dá que, existe $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tal que $d(O,P') = k\cdot d(O,Q')$ e $d(P,P') = k\cdot d(Q,Q')$, isto é, $a = \lambda c$ e $b = \lambda d$, onde $\lambda = k$, se $\theta = 0$ e $\lambda = -k$, se $\theta = \pi$. ■

Figura 8 – O, P e Q colineares com $\theta = 0$



Fonte: Elaborada pelo Autor

A seguir, uma aplicação dessa desigualdade.

Exemplo 1 Mostre que, entre todos os triângulos com hipotenusa a, fixada, o que tem maior soma dos catetos é o triângulo isósceles.

Solução: Sejam b e c os catetos desse triângulo. Usando a Desigualdade de Cauchy para os números $b, c,$ 1 e 1, e o Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$), temos,

$$(b+c)^2 = (b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (b^2 + c^2)(1^2 + 1^2) = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow b + c \leq a\sqrt{2}.$$

A igualdade ocorre se, só se, existe $\lambda \neq 0$, tal que $b = \lambda \cdot 1$ e c= $\lambda \cdot 1$, o que nos dá $\lambda = b = c$, o que significa que o triângulo é isósceles.

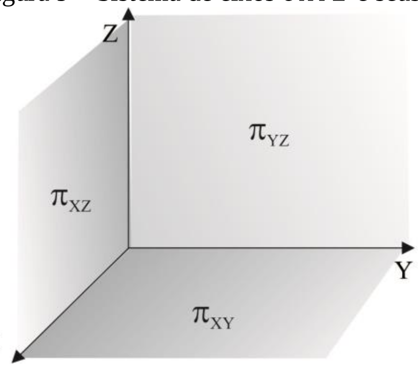
3.3 No Espaço

Definição 8 *Seja E o espaço euclidiano tridimensional. Um sistema de eixos ortogonais em E consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX, OY e OZ, com a mesma origem O.*

Dado um sistema de eixos ortogonais em E, ficam determinados três planos, chamados planos cartesianos, denominados da seguinte forma:

a) π_{XY}, plano determinado pelos eixos OX e OY;
b) π_{XZ}, plano determinado pelos eixos OX e OZ;
c) π_{YZ}, plano determinado pelos eixos OY e OZ.

Figura 9 – Sistema de eixos $OXYZ$ e seus planos cartesianos

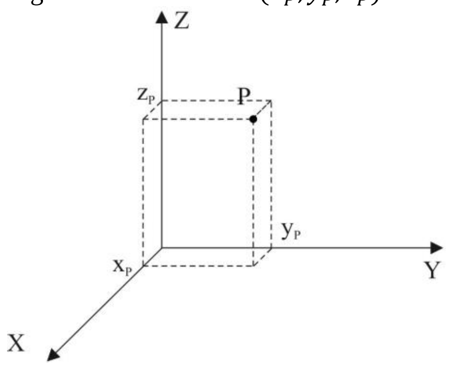


Fonte: Elaborada pelo Autor

De modo análogo ao que foi feito no caso do plano, um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, no espaço E, estabelece uma correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c); a,b,c \in \mathbb{R}\}$ dos ternos ordenados de números reais.

Se o ponto P está associado ao terno (x,y,z), dizemos que x, y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. A coordenada x é a coordenada, em OX, do ponto de interseção deste eixo com o plano que passa por P e é paralelo ao plano π_{YZ}. A coordenada y é a coordenada, em OY, do ponto de interseção deste eixo com o plano que passa por P e é paralelo ao plano π_{XZ}. A coordenada z é a coordenada, em OZ, do ponto de interseção deste eixo com o plano que passa por P e é paralelo ao plano π_{XY}. Dessa forma, identificamos P pelas suas coordenadas (x, y, z) e escrevemos $P = (x, y, z)$.

Figura 10 – Ponto $P = (x_P, y_P, z_P)$



Fonte: Elaborada pelo Autor

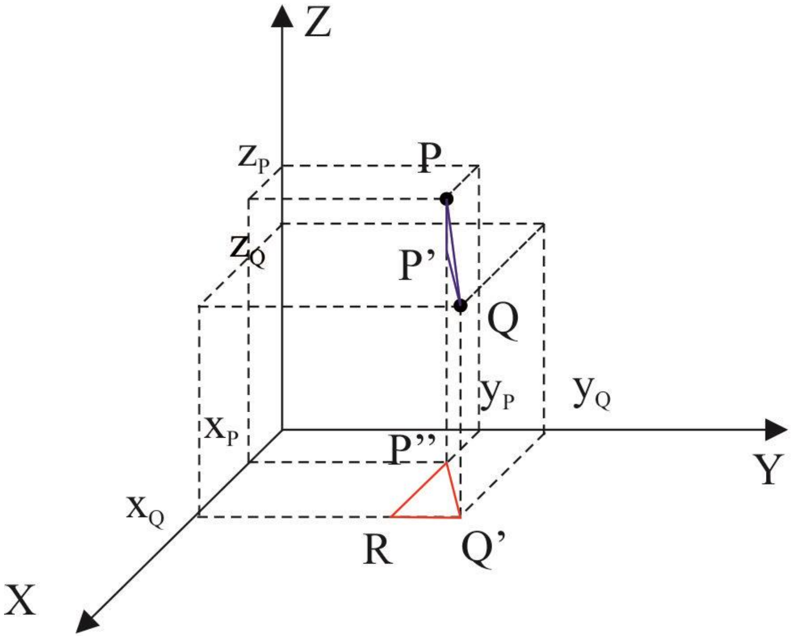
Observe que, com essa identificação, $O = (0,0,0)$, $OX = \{(x, 0,0); x \in \mathbb{R}\}$, $OY = \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$, $OZ = \{(0,0, z); z \in \mathbb{R}\}$, $\pi_{XY} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$, $\pi_{XZ} = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ e $\pi_{YZ} = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$.

Estabelecidas as coordenadas no espaço tridimensional, passemos ao cálculo da distância entre dois pontos P e Q.

Primeiro, observe que se $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ pertencem a uma reta paralela ao eixo OX, então $d(P, Q) = d(P', Q') = |x_P - x_Q|$, onde $P' = (x_P, 0,0)$ e $Q' = (x_Q, 0,0)$ ambos pertencentes a OX. De modo similar, se P, Q pertencem a uma reta paralela à OY, $d(P, Q) = |y_P - y_Q|$ e se pertencem a uma reta paralela à OZ, $d(P, Q) = |z_P - z_Q|$.

Para o caso geral, vamos considerar os pontos $P' = (x_P, y_P, z_Q)$, $P'' = (x_P, y_P, 0)$, $Q' = (x_Q, y_Q, 0)$ e $R = (x_Q, y_P, 0)$, como auxílio (veja figura 11).

Figura 11 – Distância entre os pontos P e Q



Fonte: Elaborada pelo Autor

Veja que o triângulo $P''RQ'$ é retângulo em R (pois $P''R$ é paralelo a OX e RQ' é paralelo a OY). Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d(P'',Q')^2 = d(P'',R)^2 + d(R,Q')^2$$

$$\Leftrightarrow d(P'',Q')^2 = \left(x_P - x_Q\right)^2 + (y_P - y_Q)^2 \qquad (1)$$

Além disso, $d(P',Q) = d(P'',Q')$ ($P'Q$ e P''Q' são lados opostos do retângulo $P'QQ'P''$). Ademais, o triângulo $PP'Q$ é retângulo em P'. Logo, pelo Teorema de Pitágoras e por (1), vem

$$d(P,Q)^2 = d(P,P')^2 + d(P',Q)^2$$

$$\Leftrightarrow d(P,Q)^2 = \left(z_P - z_Q\right)^2 + d(P'',Q')^2 = \left(z_P - z_Q\right)^2 + \left(x_P - x_Q\right)^2 + (y_P - y_Q)^2$$

$$\Leftrightarrow d(P,Q) = \sqrt{\left(x_P - x_Q\right)^2 + \left(y_P - y_Q\right)^2 + \left(z_P - z_Q\right)^2}.$$

Dessa forma, vale o

Teorema 3 *Sejam $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, pontos no espaço euclidiano E, no qual foi adotado um sistema de eixos, então a distância entre os dois pontos é dada pela fórmula*

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(x_P - x_Q\right)^2 + \left(y_P - y_Q\right)^2 + \left(z_P - z_Q\right)^2}.$$

Essa equação pode ser usada para demonstrar uma outra versão da Desigualdade de Cauchy.

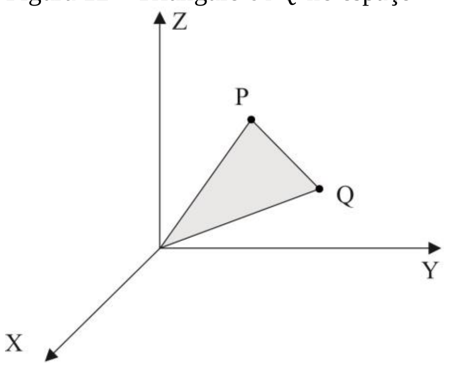
Proposição 2 *Sejam* $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. *Então é verdade que*

$(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) \geq (ad + be + cf)^2$. *Ocorrendo a igualdade se, só se, existe* $\lambda \neq 0$, *tal que* $a = \lambda d$, $b = \lambda e$ *e* $c = \lambda f$.

Prova: A demonstração é similar ao caso já mostrado. Se $a = b = c = 0$ ou $d = e = f = 0$, a desigualdade é trivial. Caso contrário, sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (d, e, f)$ pontos do espaço euclidiano E. Consideremos o triângulo OPQ da figura 12. Temos que,

$d(O,Q) = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$, $d(P,Q) = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ e $d(O,P) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Figura 12 – Triângulo OPQ no espaço



Fonte: Elaborada pelo Autor

Pela lei dos cossenos, sendo $\theta = P\hat{O}Q$, temos

$$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P) \cdot d(O,Q) \cdot cos\theta$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - d(P,Q)^2}{2d(O,P) \cdot d(O,Q)}$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - (a-d)^2 - (b-e)^2 - (c-f)^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2)}}$$

$$\Leftrightarrow cos\theta = \frac{2(ad+be+cf)}{2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)}}$$

$$\Rightarrow cos^2\theta = \frac{(ad+be+cf)^2}{(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)}.$$

Como, $cos^2\theta \leq 1$, então,

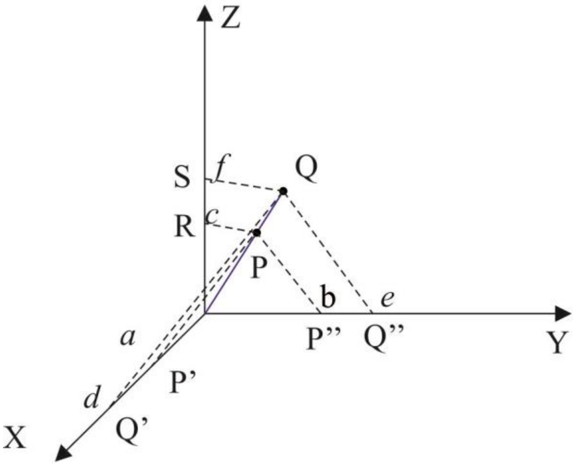
$$\frac{(ad+be+cf)^2}{(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)} \leq 1.$$

De onde sai o resultado.

A igualdade ocorre se, somente se, $cos\theta = \pm 1$, isto é, $\theta = 0 \; ou \; \theta = \pi$, o que nos dá que O, P e Q são colineares. Assim, temos os seguintes triângulos semelhantes: OPP' e OQQ', OPP'' e OQQ'' e por fim OPR e OQS (veja a figura 13 para $\theta = 0$). O que equivale a existir $k \neq 0$ tal que

$$\frac{d(O,P)}{d(O,Q)} = \frac{d(O,P')}{d(O,Q')} = \frac{d(O,P'')}{d(O,Q'')} = \frac{d(O,R)}{d(O,S)} = k.$$

Figura 13 – O, P e Q colineares (espaço) com $\theta = 0$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Logo, $d(O,P') = k \cdot d(O,Q'), d(O,P'') = k \cdot d(O,Q'')$ e $d(O,R) = k \cdot d(O,S)$, ou seja, $a = \lambda d$, $b = \lambda e$ e $c = \lambda f$, onde $\lambda = k$, se $\theta = 0$ e $\lambda = -k$, se $\theta = \pi$. ■

O exemplo a seguir é uma aplicação deste resultado.

Exemplo 2 Se $x, y, z > 0$, use a desigualdade encontrada na proposição 2 para provar que $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$.

Solução: Na desigualdade da proposição 2, basta fazer $a = \frac{y}{z}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{x}{y}, d = \frac{z}{x}, e = \frac{x}{y}$ e $f = \frac{y}{z}$. Teremos,

$$\left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}\right)\left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}\right) \geq \left(\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} + \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}\right)^2.$$

Mas, $\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}$, o que nos dá

$$\left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)^2 \geq \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)^2.$$

Como todos os valores são positivos, podemos extrair a raiz quadrada nos dois membros e obtemos a desigualdade desejada.

Agora que temos uma ideia de como se desenvolveu a geometria analítica e dos conceitos de coordenadas e distância na reta, no plano e no espaço euclidiano, vejamos como a utilização de um objeto de aprendizagem pode auxiliar na assimilação do conceito de distância por alunos do ensino médio. Embora tenhamos abordado o assunto nos três casos (reta, plano e espaço), trabalhamos em sala de aula apenas o caso da reta e do plano.

4 DESCRIÇÃO E APLICAÇÃO DO OBJETO DE APRENDIZAGEM PONTOS EM BATALHA

A atividade Pontos em Batalha é uma atividade sugerida no portal proativa (http://www.proativa.virtual.ufc.br/oa/pontos/pontos.html) para alunos do Ensino Médio. É um jogo em que são utilizados os conceitos de localização no plano cartesiano, distância entre dois pontos e distância entre um ponto e uma reta (ou segmento de reta). Na tela inicial do jogo o aluno é convidado a colocar seu nome e apertar o botão entrar. Na tela seguinte aparece uma saudação e por trás existe um mapa com sete pontos com bandeiras piratas indicando que o local está dominado por estes. Cada ponto representa um nível do jogo.

Figura 14 – Tela inicial do jogo

Fonte: OA Pontos em Batalha – RIVED - PROATIVA

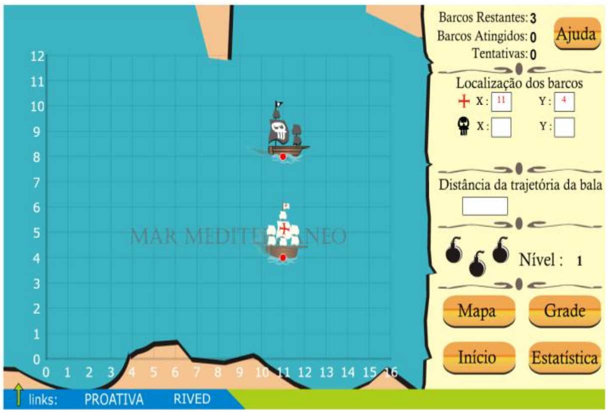
Figura 15 – Tela de escolha de nível

Fonte: OA Pontos em Batalha – RIVED - PROATIVA

Ao clicar em um ponto, o aluno chega ao jogo em si. O cenário é o primeiro quadrante do plano cartesiano ou o plano cartesiano como todo. No plano (ou no quadrante) estão indicados pontos onde estão localizados navios. Nos níveis 1 ao 4, o aluno, comandando um navio branco, deve atingir um navio pirata que ameaça a região onde está situado seu navio.

Para isso ele dispõe de 3 balas que devem atingir um navio pirata, cada. Para tanto, o aluno deve localizar o navio pirata escrevendo as coordenadas cartesianas deste nos quadros abaixo de "Localização dos barcos", bem como informar a distância entre os navios no quadro abaixo de "Distância da trajetória da bala". Estes quadros estão localizados no lado direito da tela. Após isso, aperta o botão atirar. Se as informações dadas estivem corretas, o navio pirata será atingido e afundará. O navio pirata sendo atingido ou não, no cenário aparecerão em dois outros pontos um navio branco e um pirata para que se inicie novamente a "batalha". Após acabarem as balas, encerra-se o nível. Se os três navios piratas tiverem sido atingidos, no mapa, a bandeira pirata será substituída pela bandeira do navio branco indicando que o aluno venceu o nível. Caso contrário, o aluno poderá iniciar novamente o nível. Dessa forma, se o aluno errar uma vez, não é mais possível vencer o nível. Não é preciso vencer um nível para passar para o seguinte.

Figura 16 – Cenário do nível 1



Fonte: OA Pontos em Batalha – RIVED - PROATIVA

No nível 1 os navios estão apenas no primeiro quadrante do plano cartesiano e os dois navios tem uma das coordenadas iguais. No nível 2 os navios podem ocupar todo o plano cartesiano, mas também tem uma das coordenadas com mesmo valor. No nível 3 eles ocupam apenas o primeiro quadrante e suas coordenadas são duas a duas diferentes. No nível 4 os navios ocupam todo o plano cartesiano e, assim como no nível 3, possuem as coordenadas duas a duas distintas.

Nos níveis 5 ao 7 o navio pirata está "sequestrando" um terceiro navio do mesmo grupo do navio do aluno. Este, por sua vez, deve dar a localização do navio aliado e do navio pirata, bem como a distância entre seu navio e o segmento de reta que liga o navio aliado ao navio pirata. Assim como nos níveis 1 ao 4 existe um espaço para que isso seja feito. Se as informações dadas estiverem corretas, ao apertar o botão atirar, a corda que liga o navio pirata ao navio aliado será atingido e o navio pirata afundará.

É importante informar que o jogo só permite a inserção de números inteiros nos quadros “Localização dos barcos” e “Distância da trajetória da bala”. Assim, ao encontrar um valor não exato para a distância entre os navios, o aluno deve arredondar o resultado para o número inteiro mais próximo. Daí surge um problema: quando o valor encontrado para a distância dá a possibilidade de arredonda-lo para dois números inteiros diferentes (e consecutivos), não existe um critério no jogo para qual número arredondar, se para o menor ou o maior número. Nessas situações é bem provável que se erre a distância, consequentemente se perca a bala e então o nível.

Para a análise feita neste trabalho, os alunos realizaram apenas as atividades dos níveis 1 ao 4, pois os níveis 5 ao 7 tratam do assunto de distância entre um ponto e uma reta.

São objetivos dessa atividade, conforme o portal Proativa informa no seu Guia do Professor desta atividade:

a) através do objeto de aprendizagem, despertar o interesse do aluno e auxiliar na resolução de problemas;
b) permitir que os alunos fiquem atentos ao conteúdo que está sendo desenvolvido, contando com a participação dos mesmos;
c) permitir a investigação matemática, favorecendo conjecturas e análise de resultados obtidos;
d) atribuir significado ao conteúdo desenvolvido;
e) trabalhar com dados reais;
f) apresentar dados históricos sobre a geometria analítica;
g) discutir como localizar um ponto no plano cartesiano;
h) saber ler, interpretar o gráfico e identificar as coordenadas de pontos.
i) buscar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
j) caracterizar os pontos situados nos eixos de coordenadas, bem como os pontos dos diferentes quadrantes;
k) usar a noção de distância na resolução de problemas;
l) proporcionar ao aluno condições de descobrir, com a mediação do professor, a fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos, sendo dadas suas coordenadas;
m) desenvolver a capacidade de raciocínio dedutivo.

4.1 Objetivos da aplicação desta atividade

São objetivos da aplicação desta atividade:

a) comparar o aprendizado dos alunos que foram submetidos ao método tradicional de ensino da geometria analítica com o dos alunos submetidos ao método utilizado na atividade Pontos em Batalha;
b) verificar se há um interesse maior por parte dos alunos, em especial daqueles com maior dificuldade de concentração.

4.2 Avaliação Prévia

Espera-se que, com o uso dessa atividade, a compreensão e o envolvimento dos alunos sejam maiores do que com o uso do método tradicional. Para se medir o quão maiores foram essa compreensão e envolvimento, os alunos foram submetidos a um pequeno teste que contém perguntas relacionadas ao assunto e sobre seu próprio envolvimento na atividade; as impressões do professor ao observar o envolvimento dos alunos também foram consideradas para efeito de avaliação. Neste teste os alunos submetidos ao OA Pontos em Batalha, em geral, devem ter um número maior de acertos.

Pode-se esperar algumas dificuldades, entre as quais podemos citar uma possível limitação dos recursos tecnológicos disponíveis; ou ainda o não envolvimento completo por parte dos alunos, o que pode nos dá um resultado não tão exato quanto o esperado; ainda outra dificuldade seria com a manipulação de radicais nos cálculos envolvendo distâncias.

4.3 Metodologia de Aplicação

4.3.1 Contexto

A atividade foi realizada em uma turma da E. E. F. M. Senador Fernandes Távora, uma escola pública da rede estadual de ensino localizada no bairro Demócrito Rocha, na cidade de Fortaleza, no Ceará. A escola possui cerca de 900 alunos distribuídos em turmas de 6º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio. Os alunos que chegam à última série do ensino médio, em sua maioria, estudaram no colégio desde o 6º ano. Boa parte dos alunos mora em comunidades carentes situadas nas proximidades da escola. Apesar disso, observa-se que sua grande maioria tem acesso aos recursos tecnológicos, como computador, internet, celulares. A própria escola disponibiliza laboratório de informática para os professores usarem em suas aulas.

4.3.2 Participantes

A atividade foi aplicada na única turma do 3º ano, do turno da tarde, da escola acima citada. Os 16 alunos dessa turma foram divididos em dois grupos de 8 alunos cada. Essa divisão foi feita tão-somente para se realizar uma comparação entre os dois métodos de ensino. A turma foi dividida de modo que cada parte fosse formada por alunos com diferentes níveis de desempenho em matemática e assim os dois grupos tinham basicamente o mesmo perfil da turma como um todo. Essa divisão foi possível visto que os componentes da turma são, em sua maioria, desde o 1º ano do ensino médio, alunos do professor que aplicou a atividade. A idade dos participantes varia entre 16 e 20 anos, sendo em média 17 anos. A maioria afirma ter um conhecimento maior de informática quando comparado ao seu conhecimento de matemática. Os alunos e/ou responsáveis assinaram um termo de concordância (Apêndice D).

4.3.3 Condução do Trabalho

A turma teve três seções de 50 minutos, cada, de aula introdutória sobre geometria analítica usando-se o método tradicional. Nestas aulas foram abordados os seguintes pontos: O que é Geometria Analítica, um pouco de história, Plano Cartesiano, localização de pontos no Plano Cartesiano e divisão do plano em quadrantes. Foram realizadas algumas atividades do livro-texto. Em outras duas seções foi abordado o assunto de distância entre dois pontos. Nessa ocasião, foi definido que a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta cujas extremidades são os pontos em questão.

Para se calcular essa distância foi dada a cada aluno um folha de papel com uma malha de pontos. Pediu-se para que eles encontrassem a distância entre dois pontos quaisquer que estivessem na mesma linha ou coluna da malha, o que foi prontamente feito simplesmente contando quantos espaços tinham entre os pontos. Neste momento, o professor sugeriu que os pontos fossem numerados em ordem crescente da esquerda para a direita e de baixo para cima; além disso, que tentassem calcular a distância tomando como base essa numeração. Logo os alunos perceberam que bastava diminuir os números correspondentes aos dois pontos dos quais queriam saber a distância. Daí, foi pedido que calculassem a distância entre pontos que não estivessem na mesma linha ou coluna. Nesta ocasião, surgiu a dificuldade. Foi então explicado aos alunos que seria bom considerarem dois casos: quando os dois pontos possuíssem uma das coordenadas iguais (estão na mesma linha ou coluna) e quando possuíssem as coordenadas duas a duas distintas. Para o segundo caso, foi deduzido, usando o Teorema de Pitágoras, a tão conhecida fórmula da distância entre dois pontos no Plano Cartesiano. Usou-se exemplos que exemplificavam o uso da fórmula.

Para uma terceira seção, agora de 70 minutos, os 16 alunos foram separados em dois grupos, cada um com 8 alunos, um chamada Grupo de Controle e o outro, Grupo Experimental. O Grupo de Controle ficou na sala de aula fazendo a atividade do livro-texto sob a supervisão de um professor auxiliar; o Grupo Experimental foi levado ao Laboratório de Informática (LEI). Lá foi apresentado ao grupo o OA Pontos em Batalha descrito acima. Estes 8 alunos realizaram as atividades dos primeiros 4 níveis. Fizeram uso de lápis e papel para realizarem anotações e cálculos necessários e foi permitido o uso de calculadora para o cálculo aproximado de raízes quadradas.

Na quarta e última seção, de 50 minutos, foi realizado um questionário socioeconômico (Apêndice C) e um pequeno teste de 8 itens ou questões (Apêndice B) que visava verificar qual dos grupos se sairia melhor. Seis dessas questões tinha o objetivo de avaliar o aprendizado do conteúdo e as outras duas, de caráter pessoal, verificar se o aluno percebia que o assunto tinha alguma utilidade na sua vida bem como seu grau de interesse. Com o objetivo de não beneficiar nenhum dos dois grupos, os itens 3 e 6 do teste foram baseados em questões contidas na atividade do livro-texto que o grupo de controle fez em sala ao passo que os itens 4 e 5 foram retirados de situações do próprio OA. Dois dos alunos do Grupo Experimental estavam ausentes devido a problemas pessoais e não fizeram o teste posteriormente. Por isso, a análise dos resultados, que será mostrada a seguir, não foi feita baseada nos valores absolutos mas sim nas porcentagens de acerto dos dois grupos sobre o número de alunos, independente se todos responderam o item ou não.

Passemos então à análise do desempenho de cada grupo no teste.

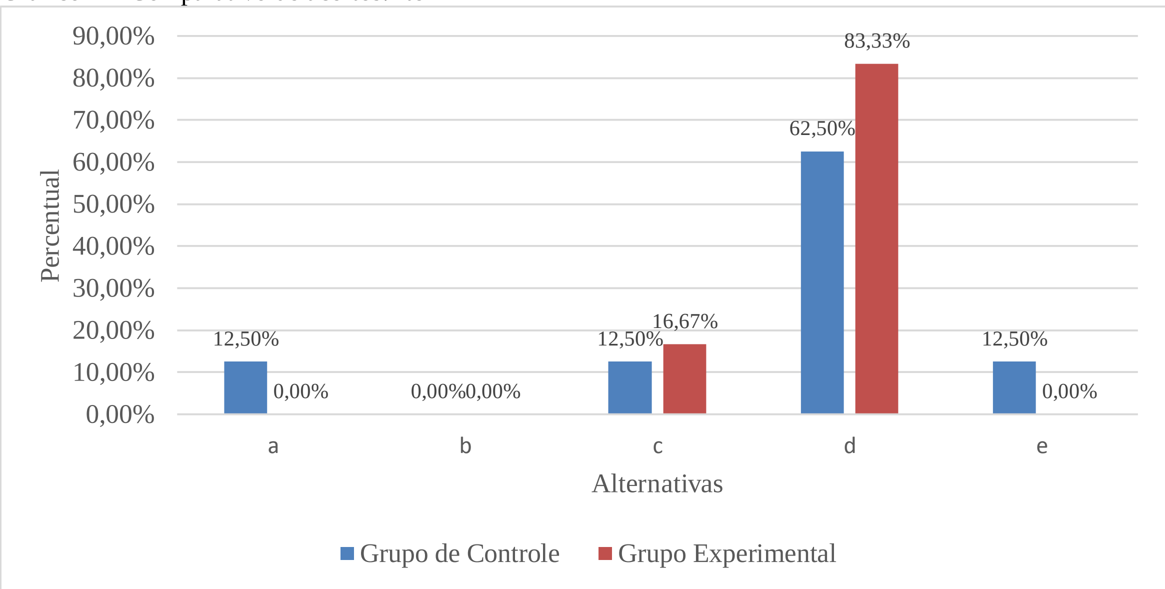
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Primeiro será feita uma análise individual de acertos de cada item e depois uma análise global.

5.1 Item 1

Neste item, o aluno deveria apenas indicar as coordenadas de cada ponto no Plano Cartesiano da figura. Ele deveria lembrar que a primeira coordenada está indicada no eixo horizontal ou eixo das abscissas e a segunda, no eixo vertical ou eixo das ordenadas. A alternativa correta é (d). Vemos no gráfico 1 que o Grupo Experimental conseguiu um resultado melhor: 83,33% de acerto contra 62,50%.

Gráfico 1 – Comparativo de acertos: Item 1

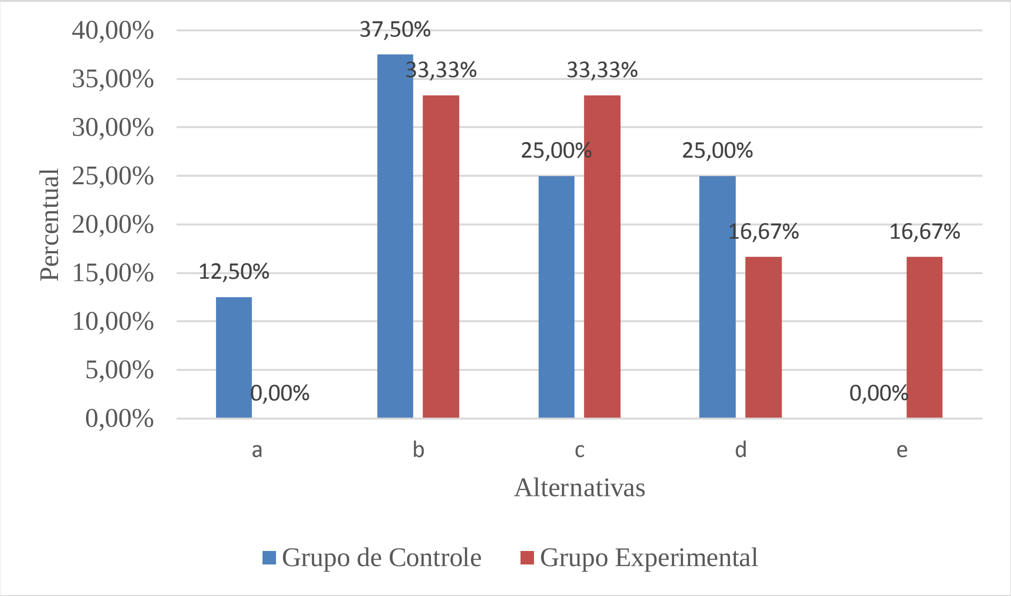


Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 Item 2

Neste item, o aluno deveria apenas informar em qual quadrante do Plano Cartesiano cada ponto está localizado. Ele deveria lembrar como está convencionada a numeração dos quadrantes. Daí, com um simples desenho, poderia localizar cada ponto e verificar em qual quadrante estaria situado. A resposta também poderia ser encontrada analisando o sinal de cada coordenada. A alternativa correta é (b). Neste caso, o Grupo de Controle obteve um melhor resultado: 37,50% de acertos contra 33,33% (Veja gráfico 2).

Gráfico 2 – Comparativo de acertos: Item 2

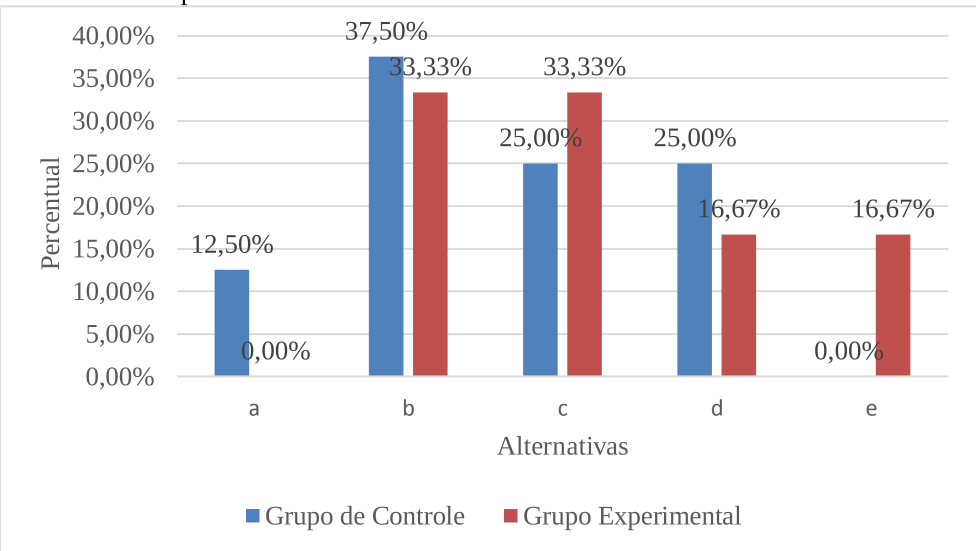


Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 Item 3

Este item requeria que o aluno entendesse o conceito de distância entre dois pontos no Plano Cartesiano (o fato de se mencionar que as extremidades do fio serão amarrados em pontos de mesma altura descarta a possibilidade de usar uma terceira coordenada). Bastaria que ele calculasse a distância do ponto A ao ponto B utilizando a fórmula. A alternativa correta é (c). Neste caso também, o Grupo Experimental obteve um resultado superior: 33,33% de acertos contra 25,00%.

Gráfico 3 – Comparativo de acertos: Item 3

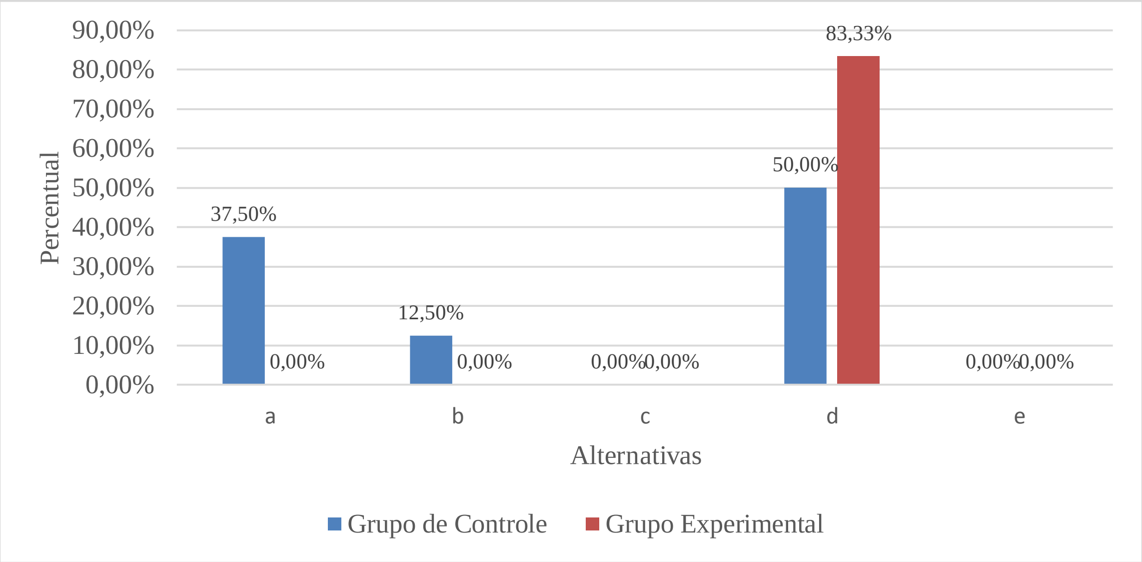


Fonte: Elaborado pelo autor

5.4 Item 4

Este item foi retirado de uma situação que pode ocorrer no OA Pontos em Batalha, embora não seja necessário um contato anterior com o jogo para o aluno poder resolvê-lo corretamente. De fato, este item apenas requer que o aluno informe as coordenadas cartesianas de cada navio. A alternativa correta é (d). No Grupo Experimental, nenhum aluno errou este item; apenas um deixou de respondê-lo. No Grupo de Controle, apenas metade dos alunos acertaram.

Gráfico 4 – Comparativo de acertos: Item 4

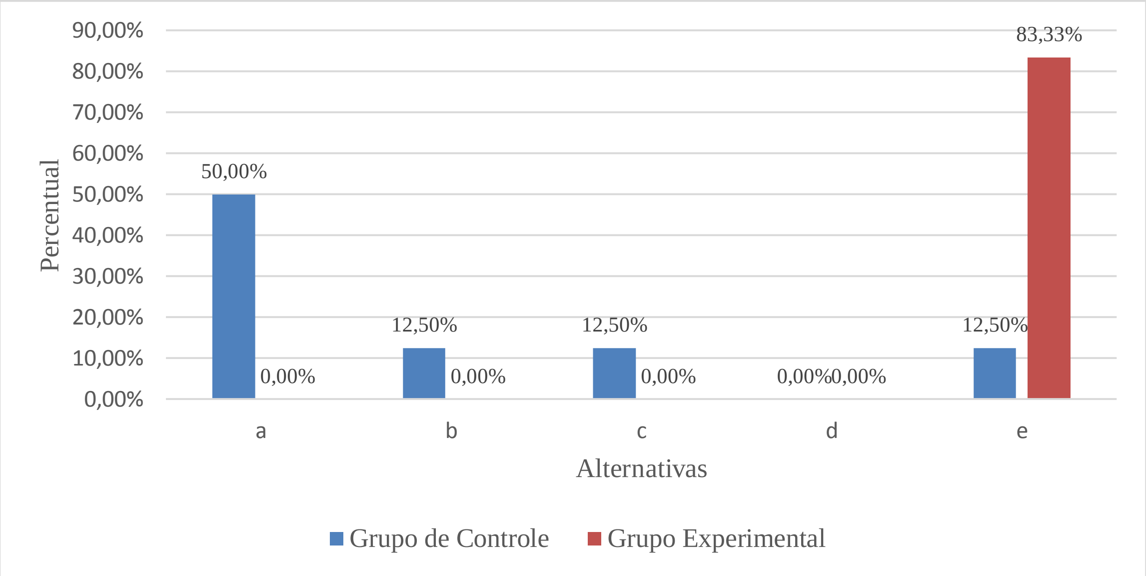


Fonte: Elaborado pelo autor

5.5 Item 5

Usando a mesma situação descrita na ilustração do item 4, o item 5 pedia para o aluno calcular a distância entre os dois navios. Isso pode ser feito usando a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano. A s coordenadas dos dois pontos já deveriam ter sido identificadas no item anterior. Ao realizar o cálculo, o aluno deverá calcular o valor da raiz quadrada de 145 utilizando para isso uma calculadora. A alternativa correta é (e). Mais uma vez, nenhum aluno do Grupo Experimental errou a questão; apenas um não a respondeu. Já no Grupo de Controle, apenas 12,50% dos alunos acertaram.

Gráfico 5 – Comparativo de acertos: Item 5

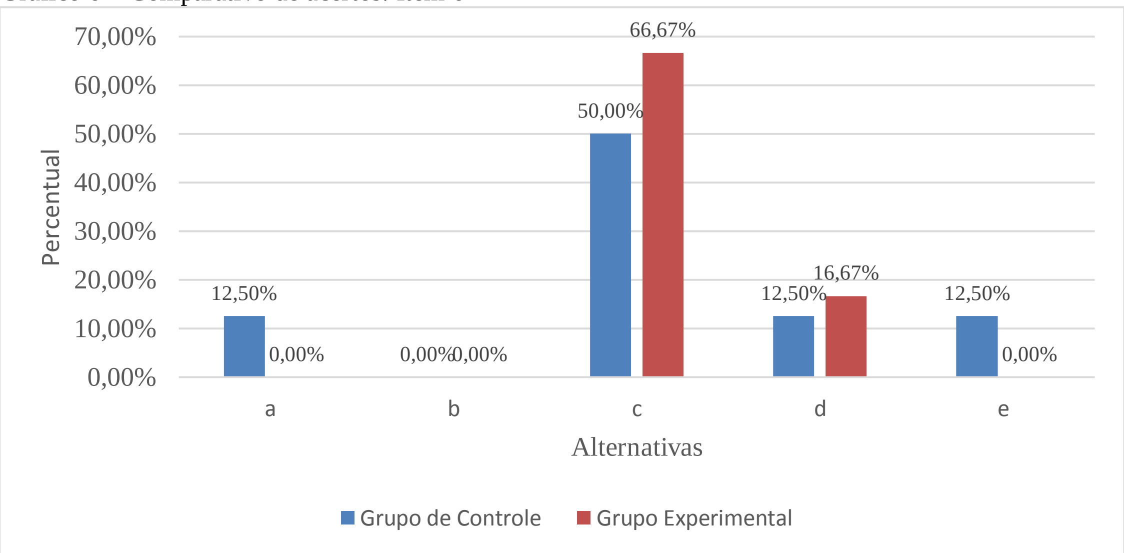


Fonte: Elaborado pelo autor

5.6 Item 6

Neste item, o aluno precisava calcular a distância entre a estação de rádio situada no ponto A e a casa de João situada no ponto B. Daí, era só comparar o resultado com o alcance do sinal da rádio. Ao usar a fórmula da distância entre dois pontos, o aluno precisava calcular a raiz quadrada aproximada de 392, o que é um pouco menor que 20. A alternativa correta é (c). Neste item, o Grupo Experimental também se saiu melhor, com 66,67% dos alunos acertando a questão, enquanto que no Grupo de Controle apenas a metade dos alunos acertaram. É importante observar que um aluno do Grupo de Controle não respondeu este item.

Gráfico 6 – Comparativo de acertos: Item 6

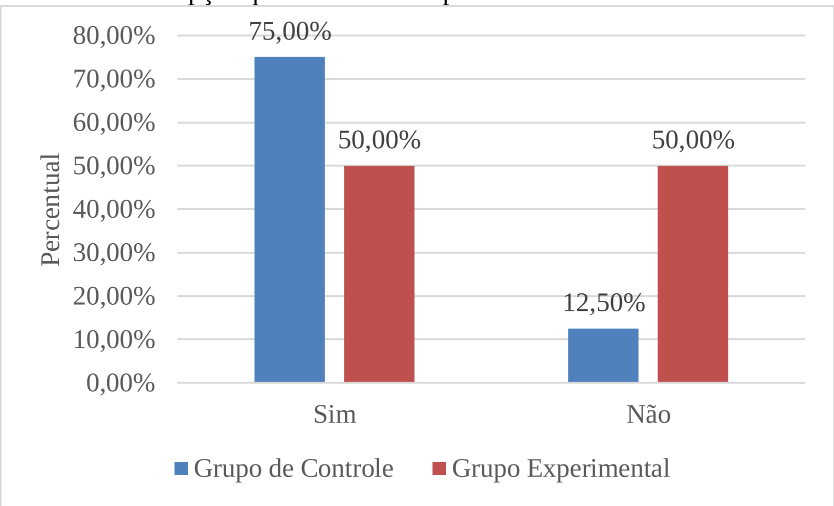


Fonte: Elaborado pelo autor

5.7 Item 7

Este item visava indagar do aluno sua opinião sobre se o assunto poderia ter algum significado ou aplicação prática no seu dia-a-dia. O resultado foi que, pela atividade realizada, o Grupo de Controle teve uma melhor percepção de como o conteúdo pode ser prático na sua vida.

Gráfico 7 – Percepção quanto a utilidade prática

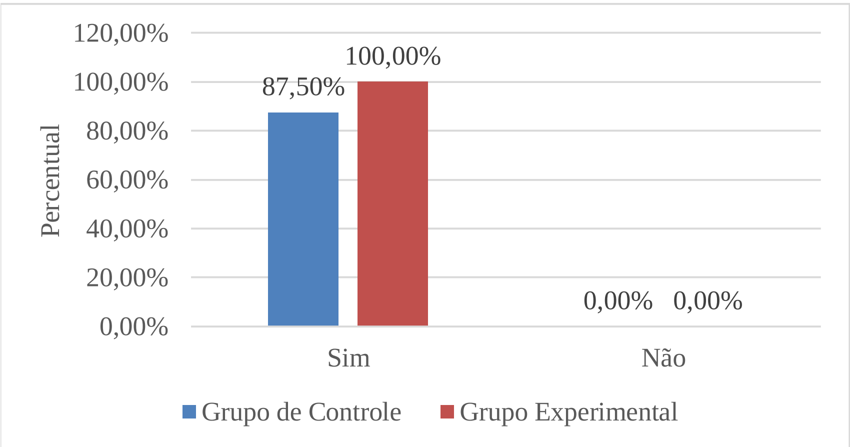


Fonte: Elaborado pelo autor

5.8 Item 8

Perguntou-se aos alunos neste item se a escolha da atividade sugerida pelo professor afetou seu interesse. Neste caso, o Grupo Experimental expressou com unanimidade que seu interesse foi aumentado. O Grupo de Controle também expressou que seu interesse aumentou. Sendo que apenas um aluno deste grupo não respondeu essa pergunta.

Gráfico 8 – Aumento do interesse

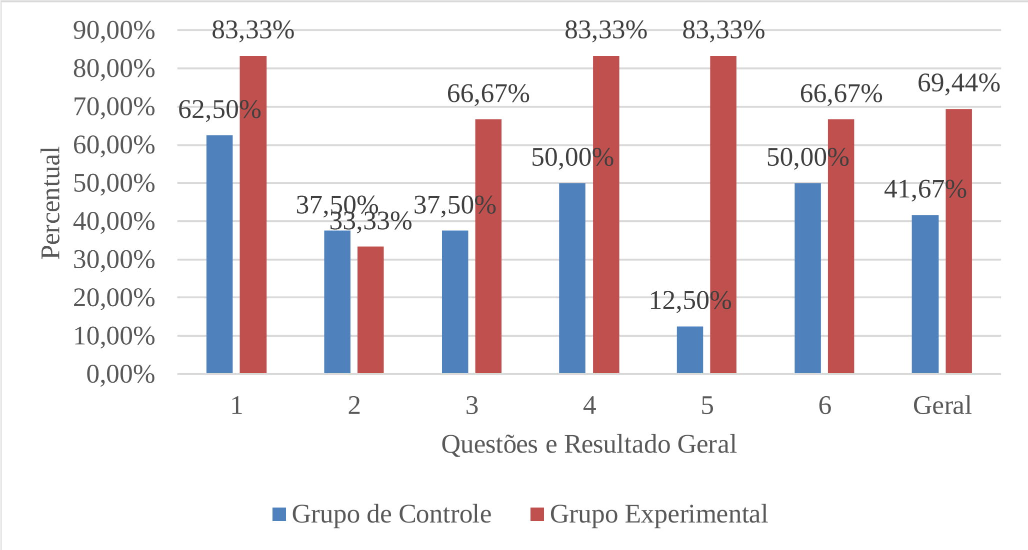


Fonte: Elaborado pelo autor

5.9 Avaliação Global

De modo geral, o Grupo Experimental teve um melhor desempenho no teste, sendo que em apenas uma questão o percentual de acertos dele foi menor do que do outro grupo. O gráfico a seguir resume esse resultado. Observe que, no geral, o Grupo de Controle obteve um índice de acertos de 41,67% ao passo que o Grupo Experimental obteve 69,44%, mostrando assim um melhor desempenho deste último.

Gráfico 9 – Resultado Geral de acertos



Fonte: Elaborado pelo autor

6 CONCLUSÃO

Em vista do explanado nesse texto, podemos concluir que o ganho pelo uso de objetos de aprendizagem é grande. Essa pesquisa foi feita desejando-se perceber quanto afetaria o desempenho dos alunos o uso de um objeto de aprendizagem; e os quase 28% de diferença de acerto dos itens do Grupo Experimental em relação ao Grupo de Controle mostra que certamente vale a pena usar esse tipo de método de ensino.

É importante ressaltar, porém, que essa pesquisa teve limitações. Em especial pela quantidade de alunos participantes da pesquisa e pelo fato de ela ter sido realizada em um grupo constituído de alunos que vivem em circunstâncias parecidas. Não dá para garantir, por exemplo, que o método daria o mesmo resultado com alunos da rede particular de ensino ou que vivem em outra região do país.

De qualquer modo, podemos perceber alguns pontos que certamente são favoráveis. Primeiro, a atenção prestada pelos alunos que participaram da atividade com o objeto de aprendizagem Pontos em Batalha foi maior do que a costumeira. Isso é corroborado pelo que os alunos responderam no item 8 sobre se a atividade afetou seu interesse de forma positiva. Todos do grupo Experimental afirmaram que sim. Até mesmo alunos que não se esforçavam nas atividades da aula tradicional participaram ativamente, tirando dúvidas, fazendo comentários, jogando, acertando, errando, corrigindo.

Segundo, o próprio desempenho do Grupo Experimental no teste, fala por si. Foi bastante superior ao do Grupo de Controle. Em todos os itens onde se precisava perceber que se deveria calcular a distância entre dois pontos, o Grupo Experimental foi superior. Assim, eles não só aprenderam a usar a fórmula da distância, mas também aprenderam a quando usá-la corretamente, o que é o mais importante.

Outro aspecto importante a salientar sobre essa pesquisa, foram as dificuldades que surgiram, no seu decorrer. Primeiro, o fato de o objeto de aprendizagem permitir somente o uso de números inteiros ao escrever distâncias e de não ser coerente quanto a considerar arredondamentos, algo que deveria não ocorrer, já que em muitos casos o cálculo de distância resulta em um número irracional cujo valor se aproxima da média de dois números inteiros consecutivos. Para qual desse números deveria ser o arredondamento? Por exemplo, em uma situação do jogo, um aluno deveria calcular a raiz quadrada de 50 $(=5^2+5^2)$ e digitar como valor da distância entre os navios, o número inteiro mais próximo, que, no caso, é o 7. Nesta situação não houve problema. Porém, em outra situação, a raiz a ser calculada era a de 20 ($= 2^2 + 4^2$). O resultado aproximado dessa raiz com duas casas decimais é $4{,}47$. Qual número inteiro a ser colocado no local indicado para a distância? 4 ou 5? Algumas vezes o jogo considerava o maior número, em outras, o menor. Não havia coerência nesse aspecto. Isso fazia os alunos errarem o alvo mesmo aplicando a fórmula e fazendo os cálculos corretamente. Isso os chateava a ponto de expressarem que não queriam continuar a atividade. Mas eles foram incentivados a continuar, apesar disso.

Isso ilustra a importância da escolha do OA. É importante o professor conhecer bem os recursos que estão sendo usados para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Antes de utilizar algum em sala de aula seria interessante lidar com ele antes. Conhecer cada detalhe, experimentá-lo, saber como funciona e prever possíveis dificuldades que possam surgir a fim de saber lidar com elas. É claro que isso exige tempo, mas é algo que vale a pena.

Outra dificuldade que surgiu foi o fato de dois alunos do Grupo Experimental faltarem no dia do teste. Isso poderia ter dois efeitos negativos. Primeiro, visto que a turma foi dividida de modo que os dois grupos tivessem perfil similares no desempenho em matemática, a falta de dois alunos de um dos grupos poderia modificar essa similaridade; mas isso não ocorreu. Segundo, a maneira com que o resultado do teste seria analisado levaria em conta que os dois grupos teriam a mesma quantidade de alunos ao se fazer o comparativo de acertos. Mas essa dificuldade foi sanada usando-se o percentual sobre a quantidade de alunos, e não a quantidade de alunos, que acertaram determinada questão.

O item 7 do teste merece um pequeno comentário. A atividade, seja do livro-texto, seja do OA, deveria ajudar o aluno a identificar situações na vida em que ele poderia calcular distâncias. Assim, neste item, o aluno foi incentivado a expressar se a atividade proposta ajudou-lhe a perceber se o conteúdo tem alguma aplicação na sua vida. No caso do Grupo de Controle a maioria respondeu que sim ao passo que no Grupo Experimental apenas a metade deu essa resposta. Isso pode ter ocorrido pelo fato de o OA Pontos em Batalha se concentrar em apenas um tipo de situação, no caso, o cálculo da distância entre os dois navios, algo com que certamente os alunos não se deparam no dia a dia. Por outro lado, a atividade do livro-texto mostra situações diferentes, talvez algo com que muitos alunos tenham se identificado. Dessa forma, é importante também levar isso em conta na escolha do objeto de Aprendizagem.

Esperamos que essa pesquisa seja um passo inicial para tantas outras. Mais ainda, que possa ser um incentivo para o uso contínuo na sala de aula, não somente do objeto de aprendizagem Pontos em Batalha, mas de muitos outros, em todas as áreas de ensino. E mais importante, que isso ajude a melhorar cada vez mais a qualidade da educação de nossos jovens.

REFERÊNCIAS

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas : UNICAMP, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios**. Rio de Janeiro : IMPA, 2002. (Coleção professor de matemática)

______ . **Espaços métricos**. 3.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2003. (Coleção projeto Euclides)

______ . **Geometria analítica e álgebra linear**. 2.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2011.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática**. 1.ed. São Paulo : FTD, 2010.v.3

APÊNDICE A – ESPAÇOS MÉTRICOS E DISTÂNCIA

A Topologia é o ramo da matemática que se ocupa do estudo das funções contínuas de um espaço topológico em outro. A conceito de continuidade está ligado ao de proximidade de elementos de um conjunto, que pode ser avaliada através da distância entre esses elementos. Daí a importância da ideia de distância nesse ramo da matemática e em outros que nele se sustentam.

As considerações a seguir visam mostrar que podemos, a partir de algumas condições, definir distância em qualquer conjunto sem depender do conhecimento de propriedades geométricas, bem como, mostrar que a distância entre dois pontos na reta, num plano ou no espaço euclidiano, é um caso particular de um conceito mais amplo. Para as considerações a seguir, admitimos que o leitor conhece fatos básicos de conjuntos, funções e álgebra linear.

Definição 1 *Uma métrica num conjunto* M *é uma função* $d: M \times M \to \mathbb{R}$, *que associa a cada par ordenado de elementos* x, y *de* M *um número real* $d(x, y)$, *que chamaremos de distância de* x *a* y, *e que satisfaz as seguintes condições para todo* $x, y, z \in M$:

a) $d(x, y) \geq 0$;
b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
c) $d(x, y) = d(y, x)$;
d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2 *Um espaço métrico é um par* (M, d), *onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica definida em* M.

A definição de métrica e espaço métrico nos permite definir distância em diversos tipos de conjunto, como conjuntos numéricos, conjuntos de funções, de sequências, de matrizes etc. Basta definirmos neste conjunto uma função que satisfaz as condições mencionadas acima.

Exemplo 1 Seja d uma métrica definida no espaço métrico M. Considere a função $D: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $D(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Observe que D está bem definida, pois $1 + d(x, y) \neq 0$. Afirmamos que D é uma métrica em M. De fato,

$d(x, y) \geq 0$ e $1 + d(x, y) \geq 0$, logo $D(x, y) \geq 0$;

$D(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$;

$D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = D(x,y)$.

Para mostrar que D satisfaz a condição (d), vamos escrever d em função de D. Temos,

$d(x,y) = \frac{D(x,y)}{1-D(x,y)}$. Mas d satisfaz a desigualdade triangular. Assim, dados $x, y, z \in M$, vale que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Desse modo, $\frac{D(x,z)}{1-D(x,z)} \leq \frac{D(x,y)}{1-D(x,y)} + \frac{D(y,z)}{1-D(y,z)}$. Observe agora que $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1$ logo, $1 - D(x,y) > 0$ para quaisquer $x, y \in M$. Assim, podemos multiplicar a desigualdade acima por $[1 - D(x,z)] \cdot [1 - D(x,y)] \cdot [1 - D(y,z)]$ sem alterá-la. Ficamos com $D(x,z)[1 - D(x,y)][1 - D(y,z)] \leq D(x,y)[1 - D(x,z)][1 - D(y,z)] + D(y,z)[1 - D(x,z)][1 - D(x,y)]$. Multiplicando e cancelando os termos iguais que estão em membros opostos, obtemos $D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z) + D(x,y)D(y,z)[D(x,z) - 2]$. Ora, $D(x,z) < 1 \Rightarrow D(x,z) - 2 < -1 < 0$. Logo, a expressão do lado direito da igualdade é menor que, ou igual a $D(x,y) + D(y,z)$, o que nos dá

$$D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z)$$

que é a desigualdade procurada.

Agora vamos nos concentrar em três exemplos de espaços métricos: a reta, o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$.

A reta, ou conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, com a métrica $d(x,y) = |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ é um importante exemplo de espaço métrico. Que d, assim definida, satisfaz as condições a), b), c) e d) segue das propriedades do módulo. De fato, $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$ e $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Antes de analisar os casos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ vamos aprofundar um pouco mais nossas considerações sobre espaços métricos.

Definição 3 *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno em V é uma função $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores $x, y \in V$ um número real $< x, y >$, chamado o* *produto interno de x por y, de modo que se cumpram as condições a seguir, para $x, x', y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer:*

1) $< x + x', y > = < x, y > + < x', y >$
2) $< \lambda x, y > = \lambda \cdot < x, y >$
3) $< x, y > = < y, x >$
4) $x \neq 0 \Rightarrow < x, x > > 0$

As primeiras três propriedades garantem que

$$< x, y + y' > = < x, y > + < x, y' >, < x, \lambda y > = \lambda \cdot < x, y >, < 0, y > = 0$$

Exemplo 2 Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$. Temos que

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 \qquad (1)$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Com efeito,

$$\begin{aligned} < x + y, z > &= (x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2 = x_1 z_1 + y_1 z_1 + x_2 z_2 + y_2 z_2 \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2) + (y_1 z_1 + y_2 z_2) = < x, z > + < y, z >. \end{aligned}$$

Além disso,

$$< \lambda x, y > = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 = \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2) = \lambda \cdot < x, y >.$$

Também,

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = < y, x >.$$

Por fim,

$$x \neq (0,0) \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \Rightarrow < x, x > = {x_1}^2 + {x_2}^2 \neq 0.$$

De modo similar, também se define em $\mathbb{R}^3$, o produto interno

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \qquad (2)$$

onde, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. A prova é similar ao caso $\mathbb{R}^2$, apenas acrescentando uma variável.

Definição 4 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma norma em V é uma função real $|\quad|: V \to \mathbb{R}$ que associa cada vetor $x \in V$ o número real indicado por $|x|$, chamado norma de x, de modo que sejam cumpridas as seguintes condições para todo $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:*

I) $x \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 0$;
II) $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$;
III) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Note que, em II), $|\lambda|$ é o valor absoluto de λ e $|x|$ é a norma de x. Além disso, fazendo $\lambda = 0$, vemos que $|0| = 0$. Ademais, fazendo $\lambda = -1$, temos que $|-x| = |-1 \cdot x| == |-1| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$ e

$$0 = |x + (-x)| \leq |x| + |-x| = 2|x| \Rightarrow |x| \geq 0, \forall x \in V.$$

Daí, $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Definição 5 *Um espaço vetorial normado é um par $(V, |\quad|)$ onde V é um espaço vetorial e $|\quad|$ é uma norma definida em V.*

Observação: Todo espaço vetorial normado V torna-se um espaço métrico com a definição $d(x, y) = |x - y|$, onde $|\quad|$ é a norma do espaço vetorial. De fato, $d(x, y) = |x - y| \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$; $d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$ e $d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$, as quatro condições das métricas sendo satisfeitas. Diz-se que essa métrica é proveniente da norma $|\quad|$.

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor $x \in V$ escrevendo $|x| = \sqrt{< x, x >}$, isto é, $|x|^2 =< x, x >$. De fato, 4) implica I). $|\lambda \cdot x| = \sqrt{< \lambda \cdot x, \lambda \cdot x >} = \sqrt{\lambda^2 \cdot < x, x >} = |\lambda| \cdot \sqrt{< x, x >} = |\lambda| \cdot |x|$ o que satisfaz a condição II). Para mostrar que essa função obedece a condição III), vamos usar a

Proposição 1 (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) $|< x, y >| \leq |x| \cdot |y|$.

Demonstração Suponha $x \neq 0$ (se $x = 0$, a desigualdade vem de $< 0, y >= |0| \cdot |y| = 0$). Sejam $\lambda = \frac{<x,y>}{|x|^2}$ e o vetor $z = y - \lambda \cdot x$. Note que $< x, z >=< x, y > - \frac{<x,y>}{|x|^2} \cdot < x, x >= 0$. Sabendo que o vetor $y = z + \lambda \cdot x$, temos que

$|y|^2 =< y,y >=< z,z > +2\lambda < x,z > +\lambda^2 \cdot< x,x >$.

Daí,

$|y|^2 = |z|^2 + \lambda^2 \cdot |x|^2 \Rightarrow |y|^2 \geq \lambda^2 \cdot |x|^2 = \frac{<x,y>^2}{|x|^4} \cdot |x|^2 = \frac{<x,y>^2}{|x|^2} \Leftrightarrow |y|^2 \cdot |x|^2 \geq< x,y >^2$,

donde sai o resultado. ■

Com isso em mãos podemos mostrar que, num espaço com produto interno, pondo $|x| = \sqrt{< x,x >}$ e $|y| = \sqrt{< y,y >}$, vale $|x + y| \leq |x| + |y|$. De fato, temos:

$$|x + y|^2 =< x + y, x + y >= |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot< x,y >\leq |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x||y|$$
$$= (|x| + |y|)^2,$$

de onde vem a desigualdade esperada.

Exemplo 3 $\mathbb{R}^2$ é um exemplo de espaço vetorial normado onde, para $x = (x_1, x_2)$, se tem

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{3}$$

Para provar que $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ é uma norma, basta observar que (3) é proveniente de (1). De fato, $< x,x >= x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{< x,x >}$.

Da mesma forma, fazendo, para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{4}$$

tornamos $\mathbb{R}^3$ um espaço vetorial normado. Esta norma provem do produto interno em (2).

Esses resultados nos permitem mostrar que $\mathbb{R}^2$ se torna um espaço métrico ao definirmos a métrica $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \tag{5}$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Veja que ela é proveniente da norma em (3), pois

$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} = d(x,y)$. É uma métrica devido a observação após a definição 5.

Assim, também, em $\mathbb{R}^3$, definimos $d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, pondo, para $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}. \qquad (6)$$

Esta, por sua vez é proveniente da norma em (4), portanto, uma métrica.

Observe que as definições de produto interno em (1) e (2), de norma em (3) e (4) e de métrica em (5) e (6) podem ser estendidas a todo espaço $\mathbb{R}^n$, tornando-o, assim, um espaço métrico com a métrica $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

APÊNDICE B – TESTE SOBRE LOCALIZAÇÃO NO PLANO CARTESIANO E DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

1. Diga quais são as coordenadas dos pontos indicados na figura a seguir.

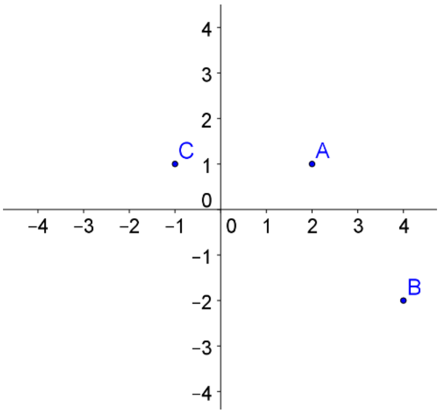
   a) $A(2,1), B(4,2), C(-1,1)$

   b) $A(1,2), B(4,2), C(-1,1)$

   c) $A(1,2), B(-2,4), C(1,-1)$

   d) $A(2,1), B(4,-2), C(-1,1)$

   e) $A(2,1), B(4,2), C(1,1)$



2. Os pontos $A(-1,2)$ e $B(-1,-1)$ pertencem, respectivamente, aos quadrantes:

   a) 1 e 2.

   b) 2 e 3.

   c) 3 e 4.

   d) 1 e 4.

   e) 2 e 4.

3. Deseja-se fazer uma ligação entre duas casas com um fio esticado. Para descobrir o tamanho do fio necessário para fazer essa ligação, Paulo percebeu que poderia usar um plano cartesiano como referência, no qual uma casa estava sobre o ponto $A(0,0)$ e a outra sobre o ponto $B(-9,12)$. As extremidades do fio serão amarradas em pontos de mesma altura. Após calcular a distância entre os pontos A e B, Paulo descobriu que o tamanho do fio deveria ser igual a:

   a) 9

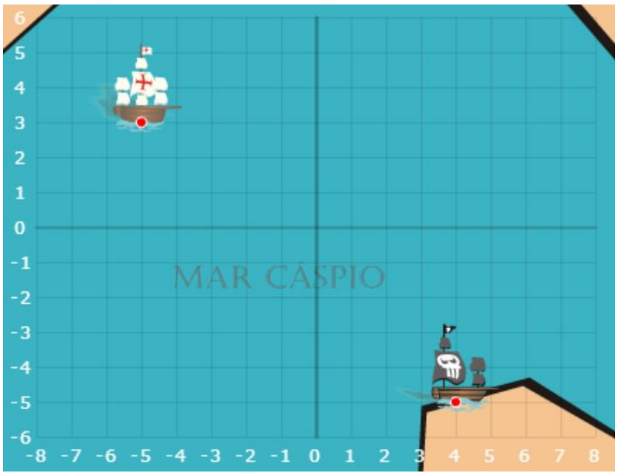
   b) 12

   c) 15

   d) 18

   e) 21

A figura a seguir é um situação que pode ser encontrada no jogo Pontos em Batalha. Levando em conta essa figura, responda as questões 4 e 5.



4. As coordenadas do navio branco e do navio pirata são, respectivamente:

   a) $(3, -5)$ e $(-5, 4)$

   b) $(3, -5)$ e $(4, -5)$

   c) $(-5, 3)$ e $(-5, 4)$

   d) $(-5, 3)$ e $(4, -5)$

   e) $(-5, -5)$ e $(3, 4)$

5. Qual a distância aproximada entre os dois navios?

   a) 8

   b) 9

   c) 10

   d) 11

   e) 12

6. Uma pequena estação de rádio tem uma antena capaz de emitir um sinal até uma distância de $20\ km$. Utilizando um plano cartesiano como referência em que uma unidade corresponde a $1\ km$ e a estação de rádio está situada no ponto $A(-2, 3)$, a casa de João fica sobre o ponto $B(12, 17)$. Então, podemos afirmar corretamente que:

   a) A casa de João recebe o sinal pois a distância a antena é igual a $12\ km$.

   b) A casa de João recebe o sinal pois a distância a antena é igual a $17\ km$.

   c) A casa de João recebe o sinal pois a distância a antena é um pouco menor que $20\ km$.

   d) A casa de João não recebe o sinal pois a distância a antena é igual a $20\ km$.

   e) A casa de João não recebe o sinal pois a distância a antena é maior que $20\ km$.

7. Depois da atividade sobre distância entre dois pontos você consegue perceber se o assunto estudado tem algum significado ou utilidade no dia-a-dia? Comente.

   a) Sim

   b) Não

8. O exercício sugerido sobre o assunto despertou mais seu interesse do que se tivesse sido sugerido outro tipo de exercício?

   a) Sim

   b) Não

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

A seguir você preencherá um questionário socioeconômico com o acréscimo de algumas perguntas sobre cultura, educação e etnia;

Caso sinta-se incomodado(a) em responder a alguma pergunta do questionário, marque as alternativas de não declaração, mas não deixe de responder;

Favor preencher o questionário com sinceridade.

---

1. Sexo:
(1) Masculino

(2) Feminino

2. Idade (Anos completos)
(1) 14

(2) 15

(3) 16

(4) 17

(5) 18

(6) mais de 18

3. Em relação à cor da pele, você se considera:
(1) Branco(a)

(2) Pardo(a)

(3) Negro(a)

(4) Amarelo(a) (oriental)

(5) Indígena

(6) Prefiro não declarar

4. Em relação à religião, você diria que é:
(1) Ateísta

(2) Agnóstico

(3) Acredito em Deus mas não sigo nenhuma religião

(4) Católico

(5) Católico não praticante

(6) Protestante (evangélico, batista, mórmon, calvinista, luterano, testemunha de Jeová ou outro)

(7) Espírita kardecista

(8) Praticante de religião afro-brasileira (umbanda, candomblé)

(9) Budista

(10) Muçulmano

(11) Judeu

(12) Tenho outra religião

(13) Prefiro não declarar.

5. Estado de origem: _____ e Município de origem:______________________

6. Você mora na região:
(1) Urbana (cidade)

(2) Rural (fazenda, sítio, chácara, aldeia, vila agrícola, etc.)

7. Com quem você mora?
(1) Pais

(2) Parentes

(3) Amigos

(4) Outros

(5) (ou) Sozinho (a)

8. Quantos irmãos?
(0) Nenhum

(1) Um

(2) Dois

(3) Três

(4) Quatro

(5) Cinco

(6) Seis ou mais

9. Até quando seu pai estudou?
(0) Não estudou.

(1) Da 1ª à 5ª série do ensino fundamental (antigo primário).

(2) Da 6ª à 9ª série do ensino fundamental (antigo ginásio).

(3) Ensino médio (antigo 2º grau) incompleto.

(4) Ensino médio completo.

(5) Ensino superior incompleto.

(6) Ensino superior completo.

(7) Pós-graduação.

(8) Não sei.

10. Até quando sua mãe estudou?
(0) Não estudou.

(1) Da 1ª à 5ª série do ensino fundamental (antigo primário).

(2) Da 6ª à 9ª série do ensino fundamental (antigo ginásio).

(3) Ensino médio (antigo 2º grau) incompleto.

(4) Ensino médio completo.

(5) Ensino superior incompleto.

(6) Ensino superior completo.

(7) Pós-graduação.

(8) Não sei.

11. Atualmente você:
(1) Apenas estuda

(2) Trabalha e estuda

12. Qual é a renda familiar mensal?
(1) Menos de 1 salário mínimo (até R$678)

(2) Acima de um até dois salários mínimos (entre R$679 e R$1.356)

(3) Acima de dois até cinco salários mínimos (entre R$1.357 e R$3.390)

(4) Acima de cinco até dez salários mínimos (entre R$3.391 e R$6.780)

(5) Acima de dez salários mínimos (acima de R$6.780)

(6) Não sei informar.

13. Qual a sua participação na vida econômica do grupo familiar?
(1) Não trabalho e sou sustentado por minha família ou outras pessoas

(2) Trabalho e sou sustentado parcialmente por minha família ou outras pessoas

(3) Trabalho e sou responsável apenas por meu próprio sustento

(4) Trabalho, sou responsável por meu próprio sustento e ainda contribuo parcialmente para o sustento da família

(5) Trabalho e sou o principal responsável pelo sustento da família

(6) Outra situação

14. Quantas pessoas (contando com você) contribuem para a renda da sua família?
(1) Uma

(2) Duas

(3) Três

(4) Quatro

(5) Cinco

(6) Seis

(7) Mais de seis

15. Em que tipo de escola você estudou?
(1) Somente em escola pública.

(2) Maior parte em escola pública.

(3) Somente em escola particular.

(4) Maior parte em escola particular.

16. Você já repetiu alguma série?
(0) Não

(1) Sim

17. O acesso a computadores e outros recursos de Informática na sua Escola é:
(1) Insuficiente a Regular

(2) Regular a Bom

(3) Bom a excelente

18. Seus pais cobram se você fez o dever de casa?
(1) Sempre ou quase sempre

(2) De vez em quando

(3) Nunca ou quase nunca

(4) Omissos/não sei

19. Seus pais falam para você não faltar às aulas?
(1) Sempre ou quase sempre

(2) De vez em quando

(3) Nunca ou quase nunca

(4) Omissos/não sei

20. Seus pais falam para você tirar boas notas?
(1) Sempre ou quase sempre

(2) De vez em quando

(3) Nunca ou quase nunca

(4) Omissos/não sei

21. Com que frequência seus pais participam das reuniões na escola?
(1) Sempre ou quase sempre

(2) De vez em quando

(3) Nunca ou quase nunca

(4) Omissos/não sei

22. Quantos livros em média você costuma ler por ano?
(1) Nenhum

(2) Um livro

(3) De 2 a 5 livros

(4) De 6 a 10 livros

(5) De 11 a 15 livros

(6) De 16 a 20 livros

(7) De 21 a 30 livros

(8) Mais do que 30 livros

23. Quantos computadores têm na sua casa?
(0) Nenhum

(1) um

(2) dois ou mais

24. Você possui internet?
(0) Não

(1) Sim

25. Como você classifica o seu conhecimento de Informática?
(1) Muito bom.

(2) Bom.

(3) Ruim.

(4) Muito ruim.

26. Como você classifica o seu conhecimento de Matemática?

(1) Muito bom.

(2) Bom.

(3) Ruim.

(4) Muito ruim.

APÊNDICE D – TERMO DE CONCORDÂNCIA

Eu, ____ abaixo assinado, concordo em participar da presente pesquisa.

O pesquisador manterá sigilo absoluto sobre as informações aqui prestadas, assegurará o meu anonimato quando da publicação dos resultados da pesquisa, **além de me dar permissão de desistir**, em qualquer momento, sem que isto me ocasione qualquer prejuízo para a qualidade do atendimento que me é prestado, caso sinta qualquer constrangimento por alguma pergunta ou simplesmente me queira retirar dela.

A pesquisa será realizada pelo mestrando **Carlos Sérgio Rodrigues da Silva**, aluno do mestrado da Universidade Federal do Ceará e orientada pelo professor Doutor Jonatan Floriano da Silva.

Fui informado(a) que posso indagar o pesquisador se desejar fazer alguma pergunta sobre a pesquisa, pelo telefone: (85) 32920831, endereço: ***Rua Goiás, 1443, Demócrito Rocha, Fortaleza, Ceará*** e que, se por tal me interessar, posso receber os resultados da pesquisa quando esses forem publicados. O consentimento prévio dado pelo(a) colaborador(a) cujo nome e informações serão guardados pelo pesquisador e, em nenhuma circunstância, eles serão dados a conhecer a outras pessoas alheia ao estudo, a não ser que o(a) colaborador(a) o consinta, por escrito.

Assinatura do (a) participante: ____