



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT



RAFAEL GOULART DE ANDRADE SANTOS

PROCESSOS ALGÉBRICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E ESPACIAL

SINOP – MT

2020

RAFAEL GOULART DE ANDRADE SANTOS

**PROCESSOS ALGÉBRICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E ESPACIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (FACET) da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong

SINOP – MT

2020

RAFAEL GOULART DE ANDRADE SANTOS

PROCESSOS ALGÉBRICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E ESPACIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT no Campus Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

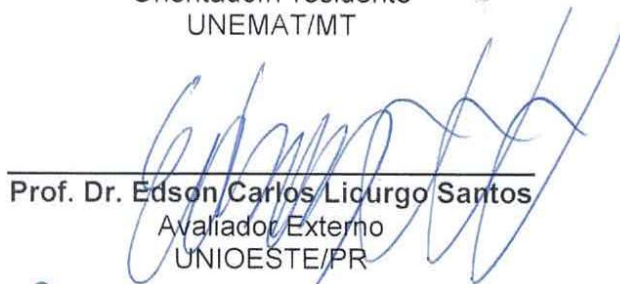
Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Aprovado em 31/08/2020

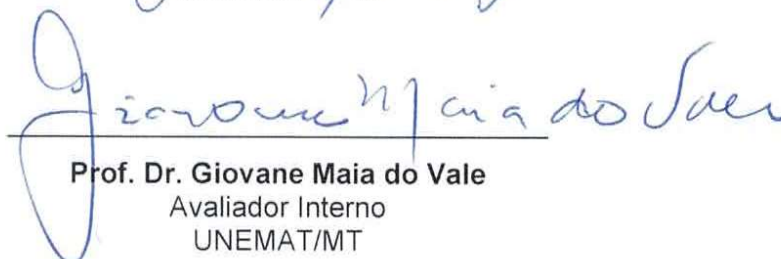
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves
Orientador/Presidente
UNEMAT/MT



Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos
Avaliador Externo
UNIOESTE/PR



Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
Avaliador Interno
UNEMAT/MT

SINOP-MT - ABRIL - 2020

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

S237p SANTOS, Rafael Goulart de Andrade.

Processos Algébricos na Resolução de Problemas de Geometria Euclidiana Plana e Espacial / Rafael Goulart de Andrade Santos. – Sinop, 2020.

85 f. ; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim).

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2020.

Orientador: Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

Coorientador: Dr. Oscar Antônio González Chong.

1. Geometria Analítica. 2. Geometria Sintérica. 3. Interdisciplinaridade.
I. Gonçalves, R. dos R., Dr. II. Chong, O. A. G., Dr. III. Título.

CDU 512.64:514.1

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi de extrema importância para meu crescimento profissional como professor e mesmo como entusiasta da matemática em si. Por conta disto agradeço imensamente primeiramente à minha família, a meus pais, Salvador Pereira dos Santos e Elza Rita Goulart de Andrade Santos, por sempre me darem o suporte emocional e estrutural para ter esta oportunidade. Agradeço também à minha namorada e companheira Joicy Oliveira Castro pelo incentivo constante. Gostaria de agradecer também ao meu professor orientador Rogério dos Reis Gonçalves em primeiro lugar pela ideia do tema que julguei pertinente desde a primeira vez que conversamos, pela paciência nas orientações e por fim por ser um exemplo para mim de como deve ser a prática docente. Sou grato também a todos os demais professores pelo empenho constante e por todo o conhecimento que nos passaram durante o período do mestrado.

Por fim sou grato a todos os meus colegas de sala, que me acompanharam nesta caminhada, em especial aos amigos Alessandro Morais Paronetto, Emerson Gentil e Mirian Laco que foram parceiros importantíssimos. No mais agradeço a todos que mesmo não citados fizeram parte dessa minha empreitada.

RESUMO

A adoção de novas estratégias a serem empregadas no ensino da Matemática é de extrema importância, dado que esta é uma preocupação há décadas pelos educadores e vigentes na atualidade, em especial, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esta ressalta a importância da utilização de situações-problema e da interdisciplinaridade entre as áreas da educação matemática. Uma das possíveis estratégias neste cenário é a de promover a conexão de diferentes considerações teóricas e soluções. É notório que não existe um caminho único para realizar tal conexão, muito menos uma cartilha apresentando-o passo a passo, visto que são inúmeros os objetos de conhecimento intrínsecos na matemática, cada qual com suas especificidades e diversas atuações práticas que podem ser aplicadas pelos docentes. Por outro lado, é possível provocar alguma contribuição em relação à essa discussão e o propósito deste trabalho se alinha nesta perspectiva da interdisciplinaridade ao propor a utilização de processos algébricos (geometria analítica) para resolver alguns problemas de geometria euclidiana plana e espacial que geralmente são assistidos por meio de processos geométricos (geometria sintética). Os problemas foram escolhidos de forma criteriosa a fim de contemplar a diversidade de conceitos advindos da geometria analítica. Dentre eles, destacam-se alguns presentes no Exame Nacional de Qualificação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). Concluiu-se que a utilização de processos algébricos mostrou-se uma ferramenta valiosa na resolução de problemas de geometria euclidiana plana e espacial, visto que, apesar de, muitas vezes, além de tornar simples o processo de resolução, permitiu a percepção de consideráveis interpretações em relação às soluções encontradas, principalmente quando confrontadas com as resoluções que permeiam a prática voltada para a geometria sintética.

Palavras chaves: Geometria Analítica, Geometria Sintética, Interdisciplinaridade, Problemas.

ABSTRACT

The adoption of new strategies to be used in the teaching of Mathematics is extremely important, given that this has been a concern for decades by educators and currently in force, especially in the BNCC (National Common Curricular Base). This highlights the importance of using problem situations and interdisciplinarity among the masses of mathematics education. One of the possible strategies in this scenario is to promote the connection of different theoretical considerations and solutions. It is notorious that there is no single way to make such a connection, much less a manual that shows step-by-step, since there are numbers of intrinsic knowledge objects in mathematics, each with its specificities and several practical activities that can be used by teaching users. On the other hand, it is possible to promote some contribution in relation to this discussion and the objective of this work is to consider this perspective of interdisciplinarity and to propose the use of algebraic processes (analytical geometry) to solve some problems of flat and spatial Euclidean geometry that are usually assisted by geometric processes (synthetic geometry). The problems were carefully chosen to contemplate the diversity of concepts arising from analytical geometry. Among them, we highlight some present in the National Qualification Examination of the Professional Master in Mathematics in the National Network (Profmat). It was concluded that the use of algebraic processes proved to be a valuable tool in solving problems of flat and spatial Euclidean geometry, since, despite the fact that, in addition to being simple or a resolution process, one can consider considerable interpretations in relation to the solutions presented, especially when confronted with measures that allow practicing towards synthetic geometry.

Keywords: Analytical Geometry, Synthetic Geometry, Interdisciplinarity, Problems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação gráfica das coordenadas de.....	17
Figura 2 - Representação gráfica das coordenadas de.....	18
Figura 3 - Distância entre dois pontos no plano	20
Figura 4 - Distância entre pontos no espaço.....	21
Figura 5 - Ponto médio de um segmento no plano	22
Figura 6 - Vetores equipolentes.....	24
Figura 7 - Vetor no plano	25
Figura 8 - Adição de vetores	26
Figura 9 - Adição de vetores (coordenadas).....	26
Figura 10 - Ângulo entre vetores	28
Figura 11 - Produto interno entre dois vetores	28
Figura 12 - Bases ortonormais no espaço.....	30
Figura 13 - Produto interno entre vetores no espaço.....	32
Figura 14 - Orientação do produto vetorial pela regra da mão direita	34
Figura 15 - Produto misto nulo - Vetores coplanares.....	36
Figura 16 - Paralelogramo ABCD.....	37
Figura 17 - Interpretação geométrica do produto misto	39
Figura 18 - Ponto P sobre a reta r.....	42
Figura 19 - Vetor normal à reta	43
Figura 20 - Ângulo de incidência de uma reta r no plano	49
Figura 21 - Problema 01: ENQ - 2018/1	50
Figura 22 – Ilustração geométrica da Figura 21 em um sistema de coordenadas	51
Figura 23 – Problema 02: ENQ - 2017/2.....	52
Figura 24 - Ilustração geométrica da Figura 23 em um sistema de coordenadas.....	53
Figura 25 – Problema 03: ENQ – 2016/2.....	55
Figura 26 – Ilustração geométrica da Figura 25 em um sistema de coordenadas	56
Figura 27 - Problema 04: ENQ – 2016/1.....	57
Figura 28 – Ilustração geométrica da Figura 27 em um sistema de coordenadas	58
Figura 29 - Problema 05: ENQ – 2015/2.....	58
Figura 30 - Ilustração geométrica da Figura 29 em um sistema de coordenadas.....	59
Figura 31 – Ilustração geométrica do Problema 06 em um sistema de coordenadas	60
Figura 32 - Ilustração geométrica do Problema 07 em um sistema de coordenadas.....	62

Figura 33 – Ilustração geométrica do Problema 08 em um sistema de coordenadas	64
Figura 34 – Problema 09: Campo de Futebol.....	65
Figura 35 – Ilustração geométrica do Problema 09 em um sistema de coordenadas	66
Figura 36 – Primeira ilustração geométrica do Problema 10 em um sistema de coordenadas.	67
Figura 37 – Segunda ilustração geométrica do Problema 10 em um sistema de coordenadas.	69
Figura 38 - Ilustração geométrica do Problema 11 em um sistema de coordenadas.....	70

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 REVISITANDO ALGUNS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA	
VETORIAL.....	17
2.1 COORDENADAS NO PLANO E NO ESPAÇO	17
2.1.1 Distância entre Dois Pontos no Plano	19
2.1.2 Distância entre Dois Pontos no Espaço.....	20
2.1.3 Ponto Médio de um Segmento	22
2.2 VETORES NO PLANO	23
2.2.1 Equipolência de Segmentos Orientados	23
2.2.2 Vetores	24
2.3 VETORES NO ESPAÇO	29
2.3.1 Produto Interno no Espaço.....	31
2.3.2 Produto Vetorial	33
2.3.3 Produto Misto e Determinante	35
2.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS VETORES	37
2.4.1 Área de Paralelogramos e Triângulos	37
2.4.2 Volume de Prismas e Pirâmides	38
2.5 EQUAÇÕES DA RETA E DO PLANO	40
2.5.1 Equações Paramétricas da Reta no Plano.....	41
2.5.2 Equação Cartesiana da Reta no Plano	43
2.5.3 Equações da Reta no Espaço	44
2.5.4 Equação Geral do Plano	45
2.6 DISTÂNCIA E ÂNGULOS NO ESPAÇO	45
2.6.1 Distância de um Ponto a um Plano	46
2.6.2 Distância entre dois Planos Paralelos	47
2.6.3 Distância de Ponto à Reta no Plano	47
2.6.4 Ângulo de Incidência de uma Reta em um Plano	48
3 PROBLEMAS PROPOSTOS.....	50
3.1 PROBLEMA 01 (ENQ 2018/1, ADAPTADO)	50
3.2 PROBLEMA 02 (ENQ 2017/2, ADAPTADO)	52
3.3 PROBLEMA 03 (ENQ 2016/2)	55

3.4 PROBLEMA 04 (ENQ 2016/1)	57
3.5 PROBLEMA 05 (ENQ 2015/2)	58
3.6 PROBLEMA 06 (ENQ 2012/2)	59
3.7 PROBLEMA 07 (PROBLEMA, 2006)	61
3.8 PROBLEMA 08 (GEOMETRIA, 2011)	63
3.9 PROBLEMA 09 (ADAPTADO DE LACERDA, 2015)	65
3.10 PROBLEMA 10 (ELABORADO PELOS AUTORES)	67
3.11 PROBLEMA 11 (ADAPTADO DE CONSTRUÇÕES, 2008)	69
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
6 APÊNDICE	76
6.1 ENQ 2018/1 (PROBLEMA 01 - ADAPTADO).....	76
6.2 ENQ 2017/2 (PROBLEMA 02 - ADAPTADO).....	78
6.3 ENQ 2016/2 (PROBLEMA 03).....	80
6.4 ENQ 2016/1 (PROBLEMA 04).....	82
6.5 ENQ 2015/2 (PROBLEMA 05).....	83
6.6 ENQ 2012/2 (PROBLEMA 06).....	85

1 INTRODUÇÃO

A visão da matemática como uma ferramenta para a resolução de problemas, tanto reais como teóricos, possui o potencial de agregar um maior valor ao seu aprendizado. Muitas situações cotidianas envolvem a aplicação de conceitos simples, como calcular o aumento da conta de energia, ou quantificar materiais que devem ser comprados. Esta ideia é bastante contemplada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) publicada no ano de 2018. Na mesma, uma das competências definidas como essenciais na matemática trabalhada no Ensino Médio é:

"Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas."

Muitos pesquisadores afirmam que o ensino da matemática carece de atualização dos docentes em relação aos métodos didáticos adotados para garantir a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos. Autores como Shulman (2014), Pontes (2019) e Pacheco e Andreis (2018) defendem em especial a responsabilidade do docente neste processo.

Shulman (2014) comenta que para que se alcance os objetivos da escolarização metódica, são necessários materiais e estruturas, como currículos, escopos, sequências didáticas, avaliações e um conjunto de regras hierárquicas. Neste sentido é natural que o docente, por operar dentro deste cenário, possua como base de conhecimento para o ensino os fatores que compõe estes materiais e estruturas.

O autor reforça ainda que devido a uma visão extremamente simplista de quais as habilidades o docente precisa, sendo muitas vezes obtidas através de testes ou exames de competências, acaba estimulando que o ensino seja trivializado e que se ignore a complexidade dele, levando estes a terem dificuldade de articular o que sabem e como sabem.

Além disto é bastante comum perceber muitas inquietações e indagações de discentes sobre a aplicabilidade de conceitos aprendidos, tanto em relação ao contexto em que estão inseridos, como a utilidade prática e compreensão real do que estão aprendendo (PONTES, 2019).

Pacheco e Andreis (2018) concluíram também em um estudo realizado com turmas de 3º ano de Ensino Médio, que grande parte dos alunos não lembravam de conteúdos de períodos passados, o que evidencia um ensino fragmentado. De maneira geral isto indica que não são

feitas conexões entre os assuntos abordados, o que dificulta para o aluno um conhecimento significado da matéria estudada.

Assim, são necessárias novas abordagens que possibilitem uma maior clareza desta noção para o discente. Uma área que se destaca neste sentido é a geometria. Esta apresenta grande grau de proximidade com situações cotidianas e é possível de ser trabalhada de maneira visual mais facilmente.

A experiência como discente de Ensino Superior constantemente me leva a questionar as técnicas que emprego e analisar seus resultados práticos em sala de aula. Na prática profissional como professor de disciplinas relacionadas com a área de Estruturas em cursos de Engenharia Civil, percebo, por parte dos alunos, uma limitação preocupante em relação ao desempenho da matemática e que os mesmos estão mais habituados a resolver exercícios de uma forma meramente mecânica, possivelmente devido às influências do modelo tradicional de ensino Brasileiro, o qual enfatiza o uso de técnicas (algoritmos) e prática (resolver uma lista de exercícios) no ensino e no aprendizado de matemática.

Em suma, geralmente eles sabem aplicar fórmulas, mas não se atém ao conceito do porquê a utiliza, não tendo a percepção da importância do conceito na aplicação do exercício e muitas vezes falha ao empregá-las, o que pode ocorrer se tais conceitos foram trabalhados de forma dissociada de significação lógica e social. Esta limitação também é encontrada por muitos colegas que lecionam no Ensino Básico e/ou Superior, que relatam que mesmo em níveis diferentes os problemas são muito semelhantes. Diante disso, acredito ser mais instigante se, desde os anos iniciais, o ensino da matemática fosse mais focado na resolução de situações problemas para despertar no aluno o vislumbre da matemática e que ele compreenda que o conhecimento matemático é uma ferramenta valiosa na vida social. Esta minha preocupação é compartilhada por vários colegas e mesmo por pesquisadores da matemática nas últimas décadas, que mediaram direta ou indiretamente na criação da BNCC.

Uma disciplina que se destaca neste sentido é a disciplina de Geometria. Segundo a BNCC,

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.

No entanto, apesar deste trabalho apresentar um amplo conjunto de conceitos e procedimentos para resolver problemas, o nosso objetivo não é apresentar e discutir a resolução de problemas aplicados a problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, e sim de estabelecer conexões entre dois tipos de procedimentos que podem ser usados para

resolvê-los, a saber, o algébrico e o geométrico. O primeiro está pautado na localização dos objetos por meio de um sistema cartesiano e este será o tema central, concordando inclusive com um dos anseios da Base, em que desde os Anos Iniciais espera que os estudantes identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos.

Explorar um mesmo ente geométrico de diversas formas diferentes caracteriza uma das maiores adições para a aprendizagem e compreensão da Geometria Euclidiana por completo. Outro fato importante é a simplicidade que pode ser verificada na solução de certos problemas geométricos por meio de métodos algébricos (FALCÃO e DIAS, 2012).

Falcão (2012) também observou em um estudo realizado com estudantes do Ensino Médio, propondo problemas de Geometria Euclidiana para eles, que sequer foi pensado pelos alunos a possibilidade de usarem métodos algébricos para a solução dos mesmos e que percebeu-se surpresa por parte dos mesmos sobre a possibilidade de utilização deste tipo de solução para os exercícios propostos.

É importante ressaltar a relevância do trabalho conjunto dos conceitos de geometria por meio de processos algébricos, já que historicamente foi gerado um elo entre estas ramificações matemáticas. De maneira geral a geometria analítica permitiu a conciliação de diferentes fatos geométricos por uma relação mútua com relações algébricas. Isto foi fortemente influenciado pela formalização das obras de Descartes e Fermat (JÚNIOR, 2013).

Júnior (2013) ressalta ainda que por mais que existam indícios de controvérsias sobre a autenticidade das obras e mesmo de estudos anteriores que apontavam para o uso de coordenadas convenientes por gregos e egípcios, é inegável o mérito das obras de Descartes na introdução à matemática moderna.

Ratificando nossos objetivos, utilizar procedimentos algébricos na resolução de problemas de geometria euclidiana plana e espacial que geralmente são resolvidos por procedimentos geométricos, pode permitir uma visualização mais clara e uma maior facilidade de ser entendido pelo estudante e, além disso, vai ao encontro de uma das propostas apresentadas em diversos currículos da Matemática, como, por exemplo, desenvolver no estudante a percepção de que um conjunto de conhecimentos distintos podem estar inter-relacionados, interiorizando no aluno o aprendizado significativo.

Wagner (1999), há duas décadas, já demonstrava uma preocupação com o fato de o conceito de Geometria Analítica ser tratado somente no último ano do Ensino Médio e de uma forma completamente desconexa das outras aplicações matemáticas, dando a impressão para o aluno de que o que é aprendido é dedicado somente ao que tange à própria disciplina, não sendo

de forma alguma relacionado com o conteúdo de geometria sintética que o estudante vêm acompanhando desde o Ensino Fundamental.

Valerio e Souza (2013) comentam ainda que a geometria analítica requer que os alunos adquiram habilidades desde simples representações de pontos, figuras e relações de equação no plano cartesiano até a resolução de problemas mais complexos com equações e inequações, identificação de equação de reta, circunferência e formas cônicas.

Importante comentar o que é tratado por Lima et al (2005) em mais de uma de suas obras, em que comenta por exemplo sobre a reta real. O autor afirma que a reta real é um modelo aritmético de uma reta e que a reta é um modelo geométrico dos números reais. O conceito denota a importância de compreender a matemática de uma maneira não desconexa, já que em verdade a divisão só se faz por um motivo de organização didática.

Esta união de conceitos diferentes é bastante evidente na resolução de situações problema. As situações problema permitem por meio da relação professor aluno e da interação entre os mesmos, que se impulse o aprendizado pois criam novos processos que levam à construção de novos conhecimentos, já que deve permitir a ação, exploração, sistematização, confrontação e debate. Assim a partir dela é possível chegar a uma generalização dos conceitos (JOHN e CORDOBA, 2003).

Terradas (2011) comenta que o uso da interdisciplinaridade não se aplica somente à sala de aula, mas a maioria das práticas cotidianas, as quais pretende-se preparar o aluno para saber integrar diferentes concepções e realidades. Este pensamento pode ser encontrado de maneira evidente na maior parte das áreas profissionais, como Direito, Engenharias, Medicinas, por exemplo, em que não se exige do profissional o domínio de somente um tipo de área de conhecimento, mas em que constantemente se faz uso de diversos conceitos diferentes de maneira complementar.

Em especial se observa um estímulo a este tipo de metodologia menos fragmentada em muitos países conforme abordado por Borba et al (2010). Na Dinamarca, por exemplo, os autores comentam sobre o método KOM: Competências e Aprendizado em Matemática, que propõe um entendimento do domínio da Matemática por meio do conceito de competências que são relacionadas a como o aluno utiliza a linguagem e a abstração matemática e não necessariamente sob seu desempenho em áreas desconexas da disciplina.

Hoje a resolução de problemas é vista como uma metodologia de ensino em que o discente desenvolve situações problemas definidas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa proposta pretende que o aluno construa conceitos matemáticos por meio de situações que agucem a sua curiosidade matemática (D'AMBROSIO, 1989).

Além disso, Leite (2018) ressalta algo importante: “(...) a busca por caminhos alternativos para solucionar problemas resulta, inevitavelmente, numa saudável expansão do conhecimento matemático”. O autor concluiu em sua pesquisa o fato de que a aplicabilidade da matemática, em especial a geometria, em situações “reais” é resultado natural do caráter universal da disciplina.

Baseada em grande parte das ideias apontadas em grande parte destes estudos, e mesmo com a contribuição direta de diversos pesquisadores da área de educação matemática, a BNCC busca sintetizar as ideias defendidas de modo a criar um princípio geral a ser seguido pelos docentes. Porém, o processo de possibilitar a aplicação destes conceitos parte de iniciativas para darem realidade aos princípios discutidos.

Neste sentido, o presente trabalho pretende contribuir com o estudo da geometria euclidiana sintética de forma associada ao estudo da geometria analítica. Neste trabalho, o uso da terminologia geometria analítica também pode ser compreendida como geometria analítica com tratamento vetorial, e geometria sintética como a geometria plana e espacial construída e concebida de maneira sintética e sem a utilização de coordenadas e entes cartesianos.

Pretende-se mostrar ao aluno a inter-relação entre os conteúdos estudados, valorizando os conhecimentos já explorados em etapas anteriores, a fim de possibilitá-los a construção de uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade, em consonância com as propostas da BNCC. Neste sentido, novas técnicas para resolução de exercícios, por exemplo, de geometria analítica, possibilitam que esta visão possa ser aplicada e adaptada pelos discentes.

Em consonância ao exposto acima, o objetivo deste trabalho é aplicar conceitos de geometria analítica com tratamento vetorial na resolução de problemas em que normalmente são utilizados os conceitos da geometria sintética, visando estudar a possibilidade do emprego deste tipo de técnica para alunos do Ensino Médio e/ou Ensino Superior. Ressalta-se que não é objetivo deste comparar os procedimentos de resolução, e sim, apresentar o procedimento proposto a fim de atender a inter-relação entre conteúdos.

A elaboração deste trabalho baseia-se nos seguintes procedimentos metodológicos: a) realização de uma pesquisa bibliográfica; b) definição de exercícios para serem resolvidos e apresentados; (c) revisão de exercícios apresentados e apresentação de discussões envolvendo a aplicação das ferramentas inerentes à geometria analítica. Como a ideia do trabalho é baseada em utilizar a geometria analítica para a resolução de problemas clássicos de geometria sintética, optou-se por não considerar aqueles que geralmente são explorados pelas ferramentas da geometria analítica. Neste sentido, devido à pesquisa bibliográfica, notou-se uma falta destes

tipos de problemas nas bibliografias referenciadas neste trabalho. Grande parte das mesmas tratavam-nos por meio de procedimentos mecânicos e menos ferramentais. Neste sentido, as bases tomadas para os problemas resolvidos foram principalmente dos exames de qualificação do Profmat e de exercícios realizados em encontros de formação de docentes, como o PAPMEM. A resolução destes usualmente possui alguma base em análise geométrica.

Este trabalho foi estruturado em cinco capítulos. O Capítulo 1 foi dedicado à introdução, na qual procurou-se contextualizar o leitor acerca da importância do tema abordado e das classes de problemas que a pesquisa busca estudar. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão sintetizada dos conceitos da geometria analítica e vetorial que serão utilizados na resolução dos problemas propostos. Para isto, optou-se por bibliografias alinhadas com o material que é empregado pelos professores de matemática em sala de aula ou em sua formação acadêmica. O leitor familiarizado com os conceitos de geometria analítica e vetorial poderá ir diretamente ao capítulo seguinte. No Capítulo 3 são apresentados os problemas propostos e também pelo menos uma proposta de resolução baseada em métodos algébricos, de acordo com o objetivo deste trabalho. No Capítulo 4 serão feitas as considerações finais e, por fim, o Capítulo 5 apresenta as referências bibliográficas, composta em sua maioria por materiais relacionados ao Profmat. Decidiu-se por apresentar no Apêndice a resolução dos problemas propostos que foram extraídos do Exame Nacional de Qualificação (Profmat) a fim de facilitar ao leitor interessado em comparar a proposta de resolução por procedimentos geométricos com a proposta deste trabalho, a saber, por procedimentos algébricos.

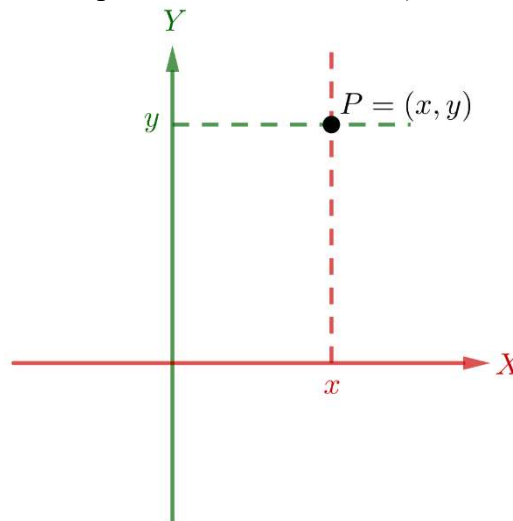
2 REVISITANDO ALGUNS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL

O objetivo deste capítulo é revisar alguns conceitos encontrados na geometria analítica vetorial a fim de melhor nortear suas aplicabilidades na resolução dos problemas propostos. Ele foi baseado em (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995) e (DELGADO et al, 2017).

2.1 COORDENADAS NO PLANO E NO ESPAÇO

A geometria analítica plana traduz o a geometria euclidiana em um plano cartesiano. O conceito de plano cartesiano foi apresentado no século XVII pelos matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat, e consistem em duas retas orientadas, uma horizontal e a outra vertical, com as quais é possível apresentar pares ordenados, (x, y) , que relacionam pontos a números reais (BEZERRA; SILVA, 2010).

Figura 1 - Representação gráfica das coordenadas de um ponto P duas dimensões)



Fonte: Acervo próprio

O eixo horizontal é dito eixo das abscissas e o eixo vertical, eixo das ordenadas. Assim, o primeiro valor contido no par ordenado refere-se a um ponto contido no eixo das abscissas e o segundo no eixo das ordenadas e a intersecção das retas paralelas aos eixos, que passam pelos

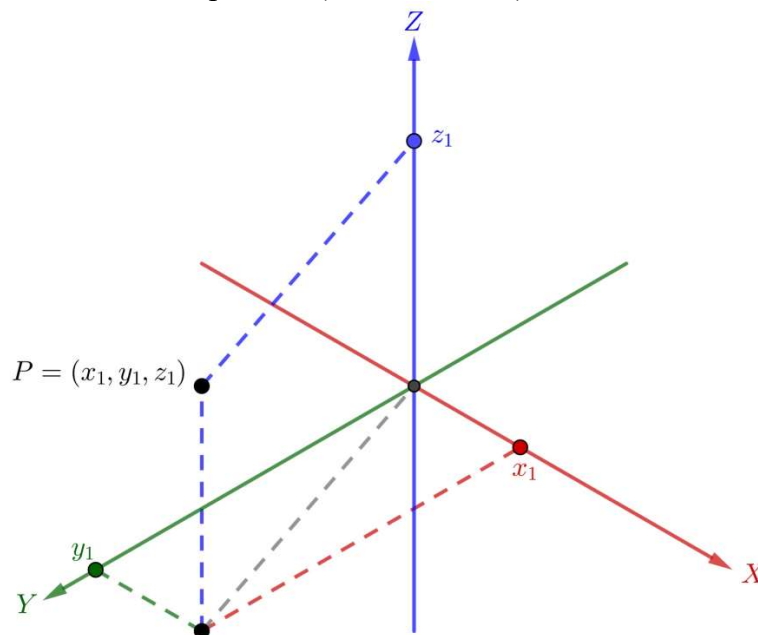
pontos do par ordenado se intersectam em um local do plano, no caso o ponto definido pelo par ordenado. Assim o par ordenado define uma coordenada única no espaço referente à combinação dos valores usados em ambos os eixos. Isto pode ser visto na Figura 1.

Lima et al (2017) comenta também que um plano π pode ser representado por uma função que associa cada ponto P do plano π com seu respectivo par coordenado $f(P) = (x, y)$, de modo que pode-se dizer que \mathbb{R}^2 pode ser definido como o modelo aritmético do plano π enquanto o plano π pode ser definido como o modelo geométrico de \mathbb{R}^2 .

Para o espaço tridimensional toma-se como base um sistema de três eixos ortogonais, $OXYZ$, pertencentes ao espaço euclidiano E . “Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço E e os termos ordenados de números reais (x, y, z) ” (DELGADO et al, 2017).

Como a correspondência é biunívoca, existe unicidade nas coordenadas do plano e no espaço.

Figura 2 - Representação gráfica das coordenadas de um ponto P (três dimensões)



Fonte: Acervo próprio.

Dada a definição de pontos e provada sua unicidade, pode-se operar com os pontos de maneira algébrica, desde que partindo de conceitos geométricos, como será visto nos próximos itens. A princípio algo que parece natural que seja a primeira indagação é, como encontrar a

distância entre dois pontos quaisquer no plano e no espaço. Devido à importância deste conceito, a seguir será apresentada sua demonstração.

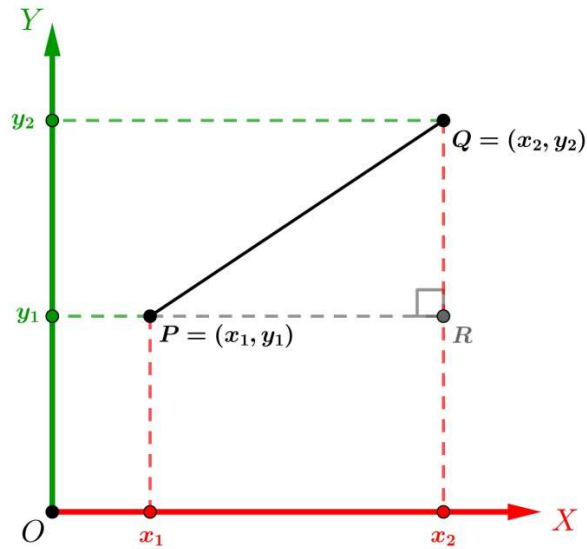
2.1.1 Distância entre Dois Pontos no Plano

O Axioma da Incidência diz que: “Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta e por três pontos distintos, não situados numa mesma reta passa um e somente um plano”. Assim, a distância entre dois pontos P e Q é igual à medida do segmento \overline{PQ} .

Tomemos a princípio que o segmento \overline{PQ} seja paralelo ao eixo X do plano OXY , ou seja $P = (x_1, 0)$ e $Q = (x_2, 0)$. Como \overline{PQ} é paralelo a um eixo definido por uma reta real, tem-se que a norma do segmento é definida por $|x_2 - x_1|$. O mesmo pode ser observado caso o segmento tomado seja paralelo ao eixo Y .

Sejam dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, pertencentes ao plano OXY , e que formam o segmento \overline{PQ} não paralelo a nenhum dos eixos. O cálculo da distância pode ser obtido por meio de um triângulo retângulo, em que o segmento \overline{PQ} é a hipotenusa. Para isto pode-se tomar um ponto R conforme apresentado na Figura 3. Assim obtêm-se o triângulo PQR , retângulo em R e com catetos $PR = |x_2 - x_1|$ e $QR = |y_2 - y_1|$, conforme definido no parágrafo anterior, e a hipotenusa PQ sendo a distância entre os pontos definida por $d(PQ)$.

Figura 3 - Distância entre dois pontos no plano



Fonte: Acervo próprio.

Sendo assim, pelo Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$(PQ)^2 = (QR)^2 + (PR)^2$$

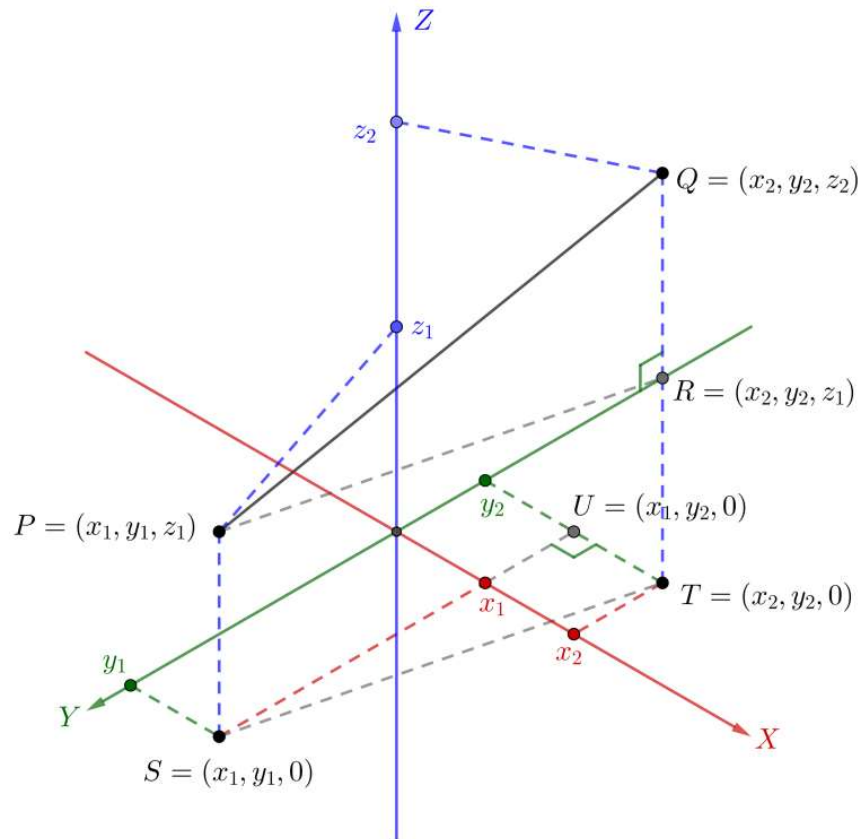
$$d(PQ) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \quad (01)$$

Logo a distância entre dois pontos no plano depende somente de suas coordenadas em relação ao eixo de referência tomado.

2.1.2 Distância entre Dois Pontos no Espaço

Considere dois pontos P e Q distintos, onde $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$. Se tomarmos a projeção do segmento \overline{PQ} no plano OXY , pode-se determinar o segmento \overline{ST} . Além disso pode ser tomado um ponto R , tal que $PR = ST$, conforme pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 - Distância entre pontos no espaço



Fonte: Acervo próprio.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo STU , tem-se

$$(PR)^2 = (ST)^2 + (UT)^2$$

$$(PR)^2 = (ST)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Agora aplicando novamente o Teorema de Pitágoras para o triângulo PQR :

$$(PQ)^2 = (QR)^2 + (PR)^2$$

$$(PQ)^2 = (|z_2 - z_1|)^2 + (|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2)$$

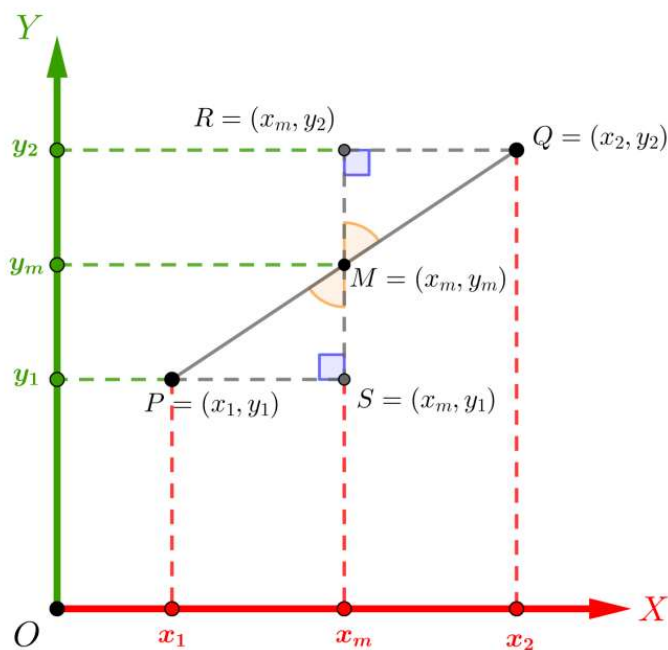
$$d(PQ) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2} \quad (02)$$

Assim, $d(PQ)$ representa a distância entre dois pontos quaisquer P e Q . Percebe-se também que novamente, para que possa ser definida a distância entre eles, basta somente que se conheçam suas coordenadas cartesianas, mas agora no plano.

2.1.3 Ponto Médio de um Segmento

Conhecendo-se a distância é possível também que seja encontrado o ponto médio de um segmento qualquer no plano. Seja $M = (x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento \overline{PQ} , onde $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, conforme mostrado na Figura 5, logo, $PM = MQ$.

Figura 5 - Ponto médio de um segmento no plano



Fonte: Acervo próprio.

Tome $R = (x_m, y_2)$ e $S = (x_m, y_1)$. Dessa forma, tem-se que o segmento \overline{RS} é paralelo ao eixo Y e contém o ponto M e os triângulos PMS e QMR são retângulos e congruentes.

Assim, tem-se $PS = RQ$ e, portanto $|x_m - x_1| = |x_2 - x_m|$. Consequentemente,

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Analogamente, de $SM = MR$, obtém-se

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (03)$$

De maneira semelhante, mostra-se que dados $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ no espaço, o ponto médio entre eles pode ser calculado da seguinte maneira:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad (04)$$

A demonstração desta é relativamente exaustiva e será apresentada no Problema 01 por meio do conceito de vetores, que será visto detalhadamente na Seção 2.3.

2.2 VETORES NO PLANO

Delgado et al (2017) comentam que por quase 200 anos os métodos algébricos da Geometria Cartesiana de Fermat e Descartes foram suficientes para a matemática, mas que foram necessários novos métodos que fossem mais diretos e menos atrelados a operação com coordenadas. Isto foi possível através do conceito de equipolência que foi apresentado por Giusto Bellavitis em 1832 e posteriormente em 1844 formalizado pelo matemático Hermann Grassmann. Este conceito é a base para a noção de vetores que é conhecida atualmente.

A Geometria dentro da matemática se destaca por permitir o entendimento da noção de vetor de forma natural, já que envolve conceitos como magnitude, direção e sentido. Porém, é importante que se diferencie sua representação gráfica (em papel) da sua significação como objeto matemático. O conceito de vetor deve alcançar três objetivos principais: deve possuir magnitude, orientação e deve ser possível operar entre os vetores (BEZERRA; SILVA, 2010).

Para que seja possível determinar este conceito de forma precisa é necessário definir primeiramente o conceito de equipolência.

2.2.1 Equipolência de Segmentos Orientados

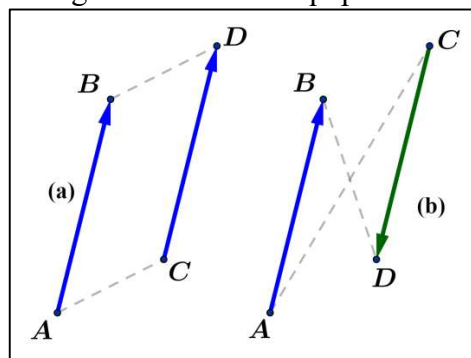
Um segmento orientado é definido por um par ordenado que relaciona dois pontos, um sendo denominado origem do segmento e o outro como sua extremidade. Sendo assim um

segmento \overline{AB} possui origem no ponto A e extremidade no ponto B , e é representada uma seta na extremidade para representar a orientação do segmento (STEINBRUCH; WINTERLE, 1995).

Por definição, dois segmentos orientados quaisquer do espaço são equipolentes se satisfazem concomitantemente as três seguintes condições: (a) possuem o mesmo comprimento; (b) são paralelos ou colineares; (c) possuem a mesma orientação ou sentido. Sejam dois segmentos equipolentes AB e CD , representamos a relação por $AB \equiv CD$. (DELGADO et al, 2017)

Lacerda (2015) comenta que se os segmentos de reta orientados AD e BC possuem o mesmo ponto médio, é fato necessário e suficiente para tomarmos AB e CD como segmentos equipolentes. Isto é visível geometricamente levando em consideração a condição de existência do paralelogramo. (Figura 6)

Figura 6 - Vetores equipolentes



(a) AB e CD equipolentes. (b) AB e CD não equipolentes

Fonte: Adaptado de DELGADO et al (2017)

2.2.2 Vetores

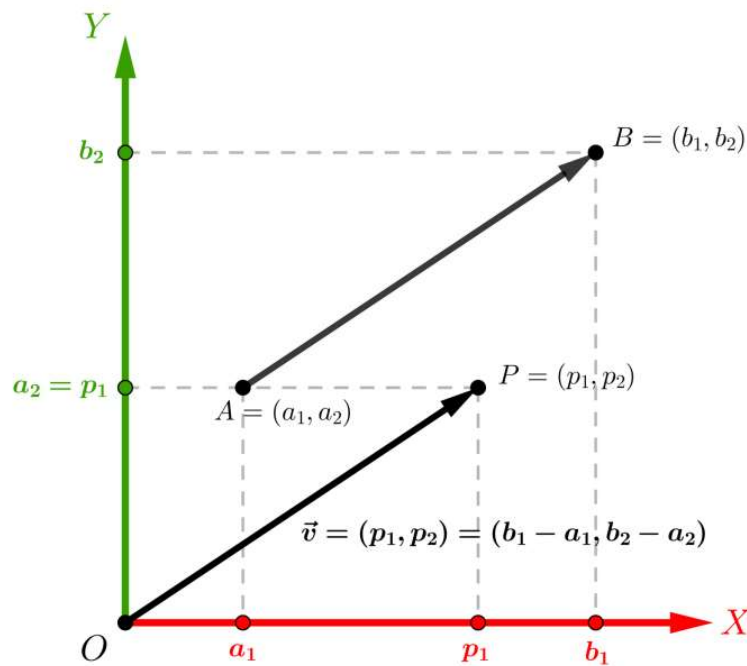
Ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB dá-se a denominação de vetor AB , que pode ser escrito como \overrightarrow{AB} . Assim cada um dos segmentos equipolentes será um representante do vetor \overrightarrow{AB} (MELLO; WATANABE, 2011).

Para que seja possível manipular estes vetores é necessário fazer emprego de suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais por meio de coordenadas. Sejam dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$, são respectivamente as

coordenadas do vetor , de modo que fica representado como $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (DELGADO et al, 2017).

Além disso, se for tomado um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, para todo vetor \vec{v} existe um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, e o vetor possui a mesma coordenada do ponto P , conforme pode ser visto na Figura 7.

Figura 7 - Vetor no plano



Fonte: Acervo próprio

2.2.2.1 Operações Básicas com Vetores

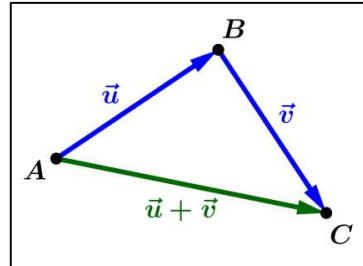
As operações básicas entre vetores podem ser divididas em adição entre vetores e produto de um número real por um vetor. Mais a frente serão tratados também com mais ênfase o produto escalar e o produto vetorial.

A adição de vetores é a operação que associa o vetor \overrightarrow{AC} , a cada par de vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, de modo que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, conforme visto na Figura 8 (DELGADO et al, 2017). Esta operação é regida pelas seguintes propriedades (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995):

- i. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

- ii. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- iii. Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo vetor \vec{v} se tem: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$;
- iv. Qualquer que seja o vetor \vec{v} , existe um só vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de \vec{v}) tal que: $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$.

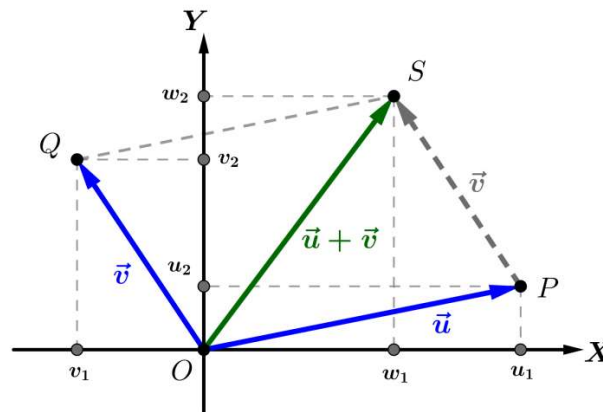
Figura 8 - Adição de vetores



Fonte: Acervo próprio

O princípio básico para a adição dos vetores é baseada na seguinte proposição: “Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores do plano expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY , então $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ ”.

Figura 9 - Adição de vetores (coordenadas)



Fonte: Acervo próprio

De fato, tomados dois pontos $P = (u_1, u_2)$, $Q = (v_1, v_2)$ e $S = (w_1, w_2)$, tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PS}$, conforme Figura 9. Assim:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{PS} \\ (v_1 - 0, v_2 - 0) &= (w_1 - u_1, w_2 - u_2) \\ (w_1, w_2) &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ \vec{u} + \vec{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2)\end{aligned}$$

Ainda, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Portanto, $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$.

Chama-se produto do número real $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $\vec{p} = \lambda \cdot \vec{v}$, tal que (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995):

- i. O módulo é definido por $|\vec{p}| = |\lambda \cdot \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$;
- ii. A direção é a mesma de \vec{v} ;
- iii. O sentido é o mesmo de \vec{v} se $\lambda > 0$, e contrário se $\lambda < 0$;
- iv. Se $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o produto é o vetor $\vec{0}$.

Em termos de coordenadas, temos também que dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ e um valor real λ , tem-se

$$\lambda \cdot \overrightarrow{AB} = (\lambda \cdot (b_1 - a_1), \lambda \cdot (b_2 - a_2))$$

2.2.2.2 Produto Interno

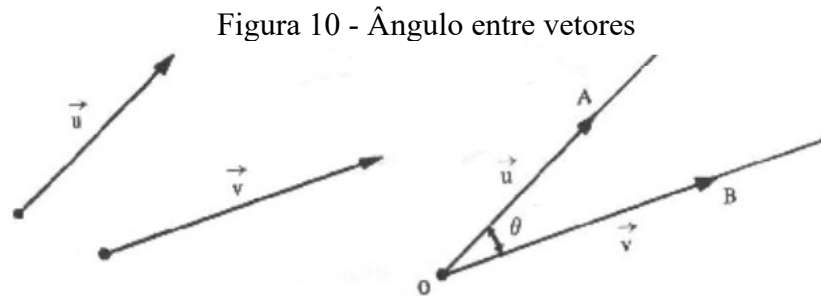
O conceito de produto interno entre vetores é intimamente ligado à ideia de norma do vetor e ângulos entre vetores. Seja um vetor \vec{v} , sua norma é o valor do comprimento de um segmento qualquer representante do vetor e é denotado pela expressão $\|\vec{v}\|$. De certa feita, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então tem-se que $d(A, B) = d(C, D) = \|\vec{v}\|$ (DELGADO et al, 2017).

Desta forma a norma de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a, b)$ pode ser definida por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (05)$$

Além disso, um vetor \vec{v} é denominado unitário quando $\|\vec{v}\| = 1$, de modo que um vetor unitário $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é dito vetor normalizado de \vec{v} .

Por sua vez, o ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} tomados é definido pelo ângulo θ formado por duas semi-retas quaisquer representantes dos vetores (OA e OB na Figura 10), de maneira que $0 \leq \theta \leq \pi$ (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995).



Fonte: STEINBRUCH e WINTERLE, 1995.

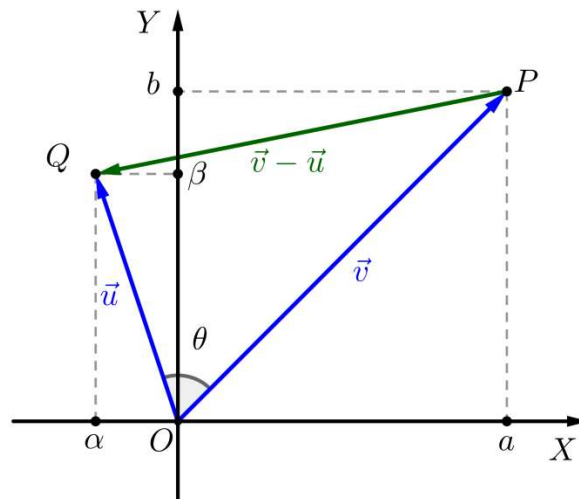
Sendo assim o produto interno entre dois vetores quaisquer \vec{u} e \vec{v} tomados, com o ângulo entre eles sendo θ , é denotado $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e definido da seguinte forma (BEZERRA e SILVA, 2010):

- i. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$, se \vec{u} e \vec{v} são ambos não nulos.
- ii. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, se \vec{u} , \vec{v} , ou ambos forem nulos.

Além disso, sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta)$, tem-se que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a\alpha + b\beta$. De fato, se \vec{u} ou \vec{v} forem nulos a conclusão é imediata. Sejam então $\vec{u} = \overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ} \neq \vec{0}$ (Figura 11), logo

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (\alpha - a, \beta - b)$$

Figura 11 - Produto interno entre dois vetores



Fonte: Adaptado de DELGADO et al, 2017.

Tem-se ainda que, sendo O, P e Q não colineares, é formado o triângulo OPQ , e portanto pode ser aplicada a lei dos cossenos em relação ao ângulo θ e o lado PQ do triângulo.

Desta forma:

$$\begin{aligned}
 \|\overline{PQ}\|^2 &= \|\overline{OP}\|^2 + \|\overline{OQ}\|^2 - 2 \cdot \|\overline{OP}\| \cdot \|\overline{OQ}\| \cdot \cos \theta \\
 \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \\
 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta &= -\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \\
 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= -((\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2) + (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) \\
 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= -\alpha^2 - a^2 + 2a\alpha - \beta^2 + b^2 + 2b\beta + a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 \\
 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= 2 \cdot (a\alpha + b\beta) \\
 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= a\alpha + b\beta
 \end{aligned} \tag{06}$$

Pois $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$, já que \vec{u} e \vec{v} são não nulos.

Uma conclusão interessante também se dá quando temos vetores ortogonais. Temos por definição que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais ($\vec{u} \perp \vec{v}$) quando $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \theta = 90^\circ$. Além disso, pode-se afirmar que \vec{u} e \vec{v} são ortogonais se, e somente se, seu produto interno é nulo. Ora, se algum dos dois ou ambos forem nulos, os vetores são ortogonais entre si pois por definição um vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor no plano, e pela última relação vista, seu produto interno também é nulo.

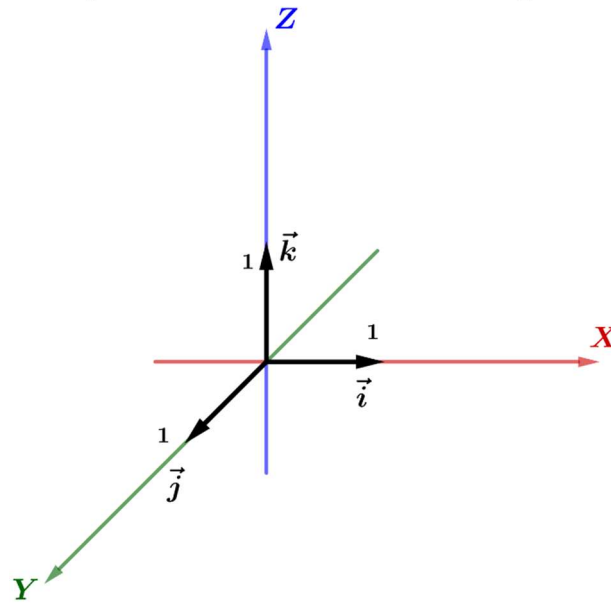
Sejam escolhidos então \vec{u} e \vec{v} não nulos, tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$, logo $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \theta = 90^\circ$, e como $\cos \theta = 0$, segue que $\theta = 90^\circ$. Agora, tomando dois vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos, tais que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Como ambos são vetores não nulos então $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$ e, portanto, $\cos \theta = 0$. Por definição $0 \leq \theta \leq \pi$, o que implica que $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \theta = 90^\circ$, logo os vetores são ortogonais.

2.3 VETORES NO ESPAÇO

As noções de equipolência vistas para vetores no plano se aplica da mesma forma para os vetores no espaço, ou seja, o vetor é o representante de todos os segmentos orientados equipolentes. Assim, dado um ponto P no espaço e um vetor \vec{v} , tem-se que $Q = P + \vec{v}$ é o único ponto no espaço tal que $\vec{v} = \overline{PQ}$ (DELGADO et al, 2017).

Um conceito também existente no plano mas, em especial, importante para o entendimento no espaço é o conceito de base. Uma base no espaço R^3 é formada pelo conjunto de quaisquer três vetores linearmente independentes e que geram o espaço. Em especial, as bases mais utilizadas são as ortonormais. Para isto os três vetores devem ser ortogonais entre si e unitários (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995).

Figura 12 - Bases ortonormais no espaço



Fonte: Adaptado de STEINBRUCH e WINTERLE, 1995.

Existem infinitas bases no espaço, mas uma em especial a ser considerada é base formada pelos vetores, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Por definição, esta base é tomada como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e chamada de canônica (Figura 12). Para o plano ocorre de forma análoga mas tomando a base e dois vetores unitários $(1, 0)$ e $(0, 1)$ (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995). Nestas bases é fácil escrever um vetor como combinação linear dos vetores destas bases e geralmente simplifica o uso de algumas operações.

Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ e $D = (d_1, d_2, d_3)$ pontos no espaço relacionados a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, então $AB \equiv CD$, se e somente se, $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$, $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$ e $b_3 - a_3 = d_3 - c_3$. De fato, $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio de AD coincide com BC . Assim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}, \frac{a_3 + d_3}{2} \right) &= \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}, \frac{b_3 + c_3}{2} \right) \\ \Leftrightarrow a_1 + d_1 &= b_1 + c_1 \quad \Leftrightarrow b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \\ \Leftrightarrow a_2 + d_2 &= b_2 + c_2 \quad \Leftrightarrow b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \\ \Leftrightarrow a_3 + d_3 &= b_3 + c_3 \quad \Leftrightarrow b_3 - a_3 = d_3 - c_3 \end{aligned}$$

Logo, o resultado é análogo ao encontrado no plano de modo que um vetor $\vec{v} = \overline{AB}$, com as coordenadas apresentadas no parágrafo anterior fica definido por $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

As propriedades de adição, subtração e multiplicação por escalar são demonstradas de maneira bastante análogas às aplicadas no plano, então serão somente apresentadas a seguir.

Sejam então dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- i. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
- ii. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
- iii. $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

2.3.1 Produto Interno no Espaço

A operação de produto interno ou escalar no espaço é bastante análoga à aplicada no plano, sendo sua definição também análoga. Em outras palavras, tomando-se dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} no espaço, seu produto interno $\langle u, v \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$, sendo θ o ângulo formado entre eles. No caso um deles ou ambos serem nulos, então $\langle u, v \rangle = 0$.

Porém, existe uma particularidade em relação à operação envolvendo as coordenadas do vetor, já que os vetores pertencem ao espaço. Neste sentido tem-se que sendo $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ então $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. Ora, se \vec{u} ou \vec{v} forem nulos a conclusão é trivial. Sejam então $\vec{u} = \overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ} \neq \vec{0}$ (Figura 13), então:

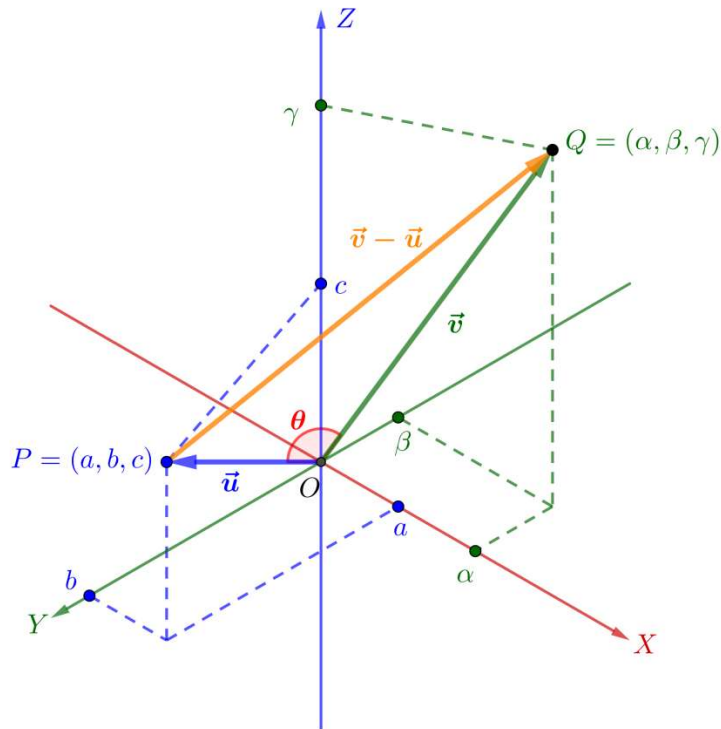
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (\alpha - a, \beta - b)$$

Tem-se ainda que, sendo O , P e Q não colineares, é formado o triângulo OPQ , e portanto pode ser aplicada a lei dos cossenos em relação ao ângulo θ e o lado PQ do triângulo.

Desta forma:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PQ}\|^2 &= \|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OQ}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \|\overrightarrow{OQ}\| \cdot \cos \theta \\ \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \\ 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta &= -\left((\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2\right) + (a, b, c)^2 + (\alpha, \beta, \gamma)^2 \\ 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= -\alpha^2 - a^2 + 2a\alpha - \beta^2 - b^2 + 2b\beta - \gamma^2 - c^2 + 2c\gamma + a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= 2 \cdot (a\alpha + b\beta + c\gamma) \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= a\alpha + b\beta + c\gamma \end{aligned} \quad (07)$$

Figura 13 - Produto interno entre vetores no espaço



Fonte: Autoria própria

Da mesma forma que no plano, se forem tomados dois vetores \vec{u} e \vec{v} , então temos que $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Além disso o produto interno no espaço obedece as seguintes propriedades (DELGADO et al, 2017):

- i. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
- ii. $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;

- iii. $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle;$
- iv. $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle;$
- v. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle;$

para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} , e \vec{w} do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$

2.3.2 Produto Vetorial

O produto vetorial é uma operação que somente pode ocorrer no espaço (\mathbb{R}^3), devido principalmente à sua definição. A premissa desta definição parte de ser possível encontrar um vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ no espaço que seja ortogonal aos outros dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, também no espaço, ou seja, $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. O sistema obtido por esta relação leva a infinitas soluções, o que é evidente já que o espaço é infinito, mas em especial uma das soluções é (BEZERRA e SILVA, 2010):

$$\begin{cases} x = u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ y = u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ z = u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{cases}$$

Sendo assim, o produto vetorial fica definido por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = ((u_2 v_3 - u_3 v_2), (u_3 v_1 - u_1 v_3), (u_1 v_2 - u_2 v_1))$$

Uma forma conveniente de representar esta relação é através do emprego de determinantes de uma matriz 3×3 , em que as linhas são formadas pela base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e pelas coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} tomados, necessariamente na ordem em que se dá o produto vetorial. Assim dados os vetores $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ e $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, em suas formas canônicas, pode-se representar o produto vetorial pela seguinte notação (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995):

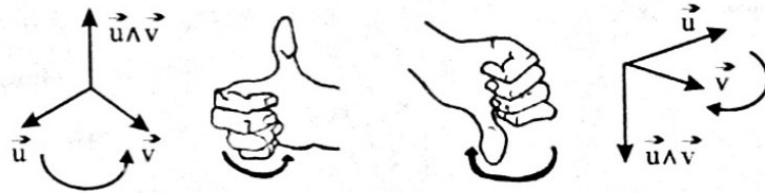
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (08)$$

Outros fatores importantes em relação ao produto vetorial são em relação à sua orientação e sua norma. A orientação é dependente da ordem em que é tomado o produto

vetorial. Assim, nota-se que ao contrário do produto interno o produto vetorial não apresenta a propriedade comutativa $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$. Este fato pode ser observado inclusive se forem invertidas as linhas na notação matricial apresentada acima.

Existe um processo bastante simples para determinar esta orientação, denominado regra da mão direita. Este consiste em deixar o polegar esticado e fechar a mão de modo a seguir o movimento do primeiro vetor apresentado no produto vetorial em direção ao segundo, formando um ângulo inferior a 180° (ângulo entre os vetores). Assim, para onde estiver apontado o polegar, este será o sentido do vetor resultante, conforme vista na Figura 14 (MELLO e WATANABE, 2011).

Figura 14 - Orientação do produto vetorial pela regra da mão direita



Fonte: MELLO e WATANABE, 2011.

Em função do sentido adotado para o produto vetorial chega-se a conclusão de que dados vetores \vec{u} e \vec{v} quaisquer no espaço, tem-se que $(\vec{u} \times \vec{v}) = -(\vec{v} \times \vec{u})$. Basta que sejam invertidas as linhas tomadas na notação do determinante matricial apresentado anteriormente para que isso se conclua de imediato.

Por outro lado, para determinar a norma do vetor basta partir de sua definição para concluir que a norma do produto vetorial $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen} \theta$, onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. De fato:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_2u_3v_2v_3 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 - 2u_1u_3v_1v_3 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1u_2v_1v_2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1^2v_1^2 + 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_2^2 + 2u_3v_3(u_1v_1 + u_2v_2) + u_3^2v_3^2) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - ((u_1v_1 + u_2v_2)^2 + 2 \cdot (u_1v_1 + u_2v_2) \cdot (u_3v_3) + (u_3v_3)^2) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen} \theta \quad (09)$$

Assim, a norma do produto vetorial depende da norma dos vetores e do ângulo entre eles, bastante semelhante ao produto interno.

2.3.3 Produto Misto e Determinante

Sendo tomados os vetores $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$, nesta ordem em especial, denomina-se produto misto dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} ao número real denominado pelo produto interno entre \vec{u} e $\vec{v} \times \vec{w}$. Assim o produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995).

Como $\vec{v} \times \vec{w} = ((v_2w_3 - v_3w_2), (v_3w_1 - v_1w_3), (v_1w_2 - v_2w_1))$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3), ((v_2w_3 - v_3w_2), (v_3w_1 - v_1w_3), (v_1w_2 - v_2w_1)) \rangle \\
&= u_1 \cdot (v_2w_3 - v_3w_2) + u_2 \cdot (v_3w_1 - v_1w_3) + u_3 \cdot (v_1w_2 - v_2w_1)
\end{aligned}$$

Portanto,

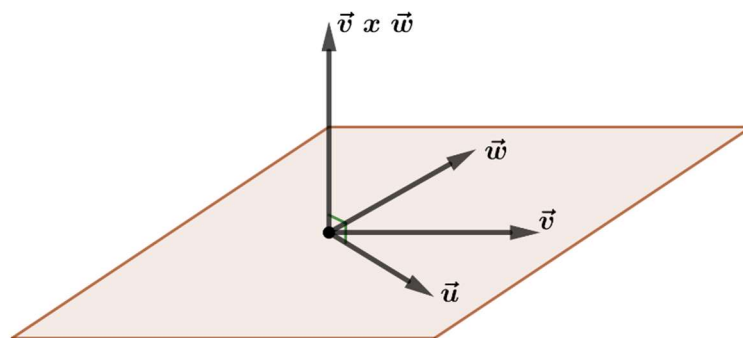
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Como o produto misto tem a possibilidade de ser definido por um determinante, podem se tomar algumas conclusões de suas propriedades. Em primeiro lugar, uma matriz tem seu sinal invertido quando duas linhas são permutadas, e mantém o sinal quando esta operação é realizada um número par de vezes. (BEZERRA e SILVA, 2010). Em consequência disto vale para o produto misto a propriedade cíclica, de forma que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, que nada mais consiste do que na permutação das linhas do determinante (MELLO e WATANABE, 2011).

Outra propriedade advinda de ser trabalhado o produto misto como um determinante, é a seguinte: " $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, um dos vetores é nulo, se dois deles são colineares, ou se os três são coplanares". De fato se um dos vetores for nulo o determinante da matriz também é nulo. Se dois deles forem colineares, significa que um deles pode ser escrito como um múltiplo de um dos outros vetores. Logo o determinante da matriz é nulo, pois uma das linhas é múltipla da outra.

Por fim, se tomarmos \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} como vetores coplanares, tem-se que $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal a \vec{v} e \vec{w} e portanto também é ortogonal ao vetor \vec{u} (Figura 15). De fato, \vec{u} e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais se, e somente se, seu produto interno for nulo (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995).

Figura 15 - Produto misto nulo - Vetores coplanares



Fonte: Adaptado de STEINBRUCH e WINTERLE, 1995.

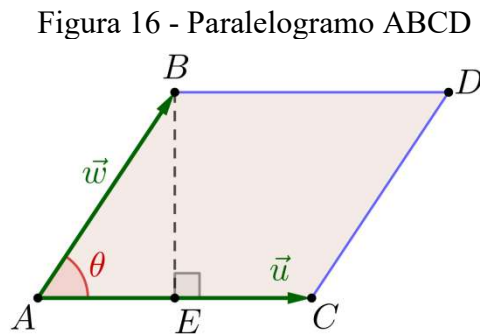
Uma aplicação bastante interessante para o produto misto é no cálculo de volumes conforme será visto adiante.

2.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS VETORES

Como os vetores, do ponto de vista geométrico, definem áreas e volumes, é natural que existam ferramentas que possibilitem a relação entre operações vetoriais e o cálculo de áreas e volumes. Nas próximas seções estas relações serão evidenciadas.

2.4.1 Área de Paralelogramos e Triângulos

Suponha a princípio um paralelogramo $ABCD$, conforme mostrado na Figura 16, formado pelos vetores $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e o ângulo $\theta = \hat{C}AB$. Sabe-se que a área do mesmo será definida pela multiplicação de uma de suas bases e a altura relativa a ela. Seja \overline{BE} a altura em relação à base \overline{AC} . Como $|BE| = |AB| \cdot \text{sen}\theta$, tem-se que a área S do paralelogramo é definida por $S = |AC| |AB| \cdot \text{sen}\theta$.



Fonte: Adaptado de DELGADO et al, 2017.

A primeira conclusão direta é que este valor é igual à norma do produto vetorial entre os vetores \vec{w} e \vec{v} , a qual será usada na próxima seção. Além disso, nota-se que também é possível pensar em uma equação que dependa do produto interno, desde que possamos tratar a expressão em função do $\cos\theta$. Partindo do cálculo da área S , tem-se

$$\begin{aligned}
 S &= |AC| |AB| \cdot \text{sen}\theta \\
 S^2 &= |AC|^2 |AB|^2 \cdot \text{sen}^2\theta \\
 S^2 &= |AC|^2 |AB|^2 \cdot (1 - \cos^2\theta) \\
 S^2 &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2
 \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2} \quad (2)$$

Se forem tomados $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (x, y)$, tem-se ainda

$$\begin{aligned} S^2 &= (a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ S^2 &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - b^2y^2 - 2axby \\ S^2 &= a^2y^2 + b^2x^2 - 2axby \\ S^2 &= (ay - bx)^2 \end{aligned}$$

$$S = ay - bx = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \quad (3)$$

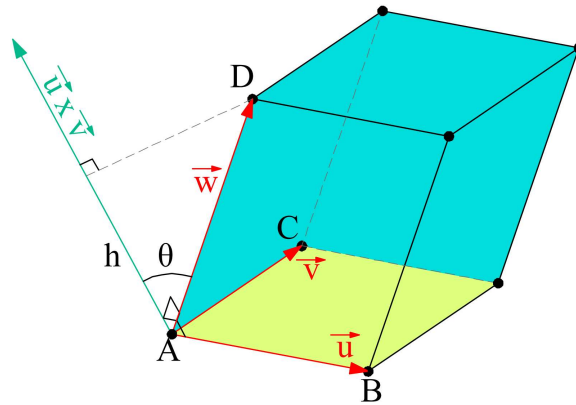
Logo, a área do paralelogramo pode ser encontrada pelas coordenadas dos vetores que o definem, através de um determinante matricial. Como a área de um triângulo pode ser definida pela metade da área de um paralelogramo, pode-se também definir sua área pela metade do determinante de dois vetores que formam o triângulo. No triângulo ABC mostrado na Figura 16, sua área pode ser obtida pela Equação (13).

$$S = 2S_{\Delta} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \quad (4)$$

2.4.2 Volume de Prismas e Pirâmides

Sejam A, B, C e D pontos não coplanares pertencentes ao espaço, tais quais formem um paralelepípedo pelos segmentos AB , AC e AD como arestas adjacentes, conforme representado na Figura 17. Sabe-se que o volume $V(P)$ de um paralelepípedo pode ser encontrado multiplicando a área de uma das bases pela altura relativa à mesma. Tomando então a base com formato de paralelogramo e área $S(P)$, formada pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, tem-se que $V(P) = S(P) \cdot h$, sendo h a altura relativa a esta base, conforme representado na Figura 17.

Figura 17 - Interpretação geométrica do produto misto



Fonte: Adaptado de DELGADO et al, 2017.

No capítulo anterior definiu-se que a área $S(P)$ formada pelos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , seria equivalente à norma do produto vetorial entre eles, ou seja, $S(P) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\theta$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores. Além disso, conforme visto na Figura 17, se h for escrito em função de $\|\vec{w}\|$, tem-se que $h = \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta$. Ora, se forem substituídas as expressões na fórmula do volume, encontra-se que ele pode ser definido pelo produto misto dos três vetores não coplanares:

$$\begin{aligned} V(P) &= S(P) \cdot h \\ V(P) &= (\|\vec{u} \times \vec{v}\|)(\|\vec{w}\| \cdot \cos\theta) \\ V(P) &= (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned} \quad (5)$$

Determinado o volume do prisma retangular (paralelepípedo) é possível determinar também o volume $V(P_t)$ do prisma triangular, que é equivalente à metade do volume do paralelepípedo de mesma base, de forma que $V(P_t) = \frac{1}{2}V(P)$.

Além disso também é possível determinar o volume da pirâmide de bases triangulares ou retangulares, já que ambas correspondem a um terço do volume de um prisma de mesma base. Assim, tem-se que o volume da pirâmide de base retangular ($V(Pr_r)$) e o volume da pirâmide de base triangular ($V(Pr_\Delta)$):

$$V(Pr_r) = \frac{1}{3}V(P) \quad (6)$$

$$V(Pr_\Delta) = \frac{1}{3}V(P_\Delta) = \frac{1}{6}V(P) \quad (7)$$

Através das formulações de pirâmides e prismas triangulares, uma infinidade de volumes de sólidos pode ser encontradas dividindo-se o sólido nestas figuras. Por exemplo, o volume de um prisma hexagonal ou uma pirâmide de base quadrada, por exemplo, pode ser encontrada dividindo o primeiro em prismas triangulares e o segundo em pirâmides triangulares. Este conceito será visto posteriormente nas resoluções de problemas.

2.5 EQUAÇÕES DA RETA E DO PLANO

A reta é um ente geométrico no estudo de Geometria, e extremamente intuitivo, já que partindo de dois pontos é possível afirmar que haja uma reta determinada por uma relação unívoca com ambos os pontos (BEZERRA; SILVA, 2010). Como o estudo da reta é fundamental para a resolução de uma grande variedade de exercícios, é essencial que seja definido como pode-se entendê-la algebricamente.

A princípio de discussão, pode-se partir do seguinte teorema: "A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde a , b e c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r ".

De fato, dados dois pontos $Q = (x_1, y_1)$ e $R = (x_2, y_2)$, distintos e pertencentes ao plano OXY e seja r a reta definida pelos pontos Q e R . Se for tomado um ponto $P = (x, y)$ também pertencente à reta, mas distinto de Q e R , tem-se que P , Q e R devem ser colineares. Assim, para que isto ocorra,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)z = 0$$

Logo, tomados $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$, tem-se que qualquer ponto $P \in \mathbb{R}$ tomado, deve verificar a equação $ax + by + c = 0$, denominada equação geral da reta r (IEZZI, 1993).

Como a reta pode ser definida por dois pontos tomados, vale a definição dada por Lima et al (2017), de que: “Dados arbitrariamente (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ ” Assim para uma reta não vertical qualquer vale a função afim definida pela expressão $f(x) = ax + b$.

O coeficiente a é comumente tratado como coeficiente angular, quando o problema trabalhado envolve uma análise geométrica, em especial quando depende do ângulo da reta em relação ao eixo já que $a = \text{tg}\alpha$, sendo α o ângulo partindo do eixo x até a posição da reta no sentido anti-horário. Para problemas não geométricos recomenda-se a nomenclatura taxa de variação. (LIMA et al, 2017)

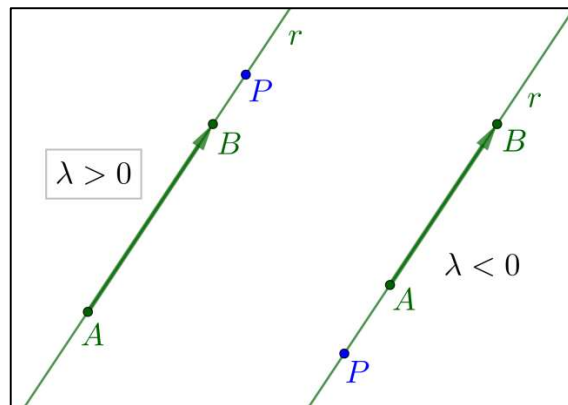
Esta forma de entender a reta é bastante utilizada no Ensino Médio devido em especial à interrelação com o estudo de funções e por isso é bastante útil na simplificação de conceitos para a resolução de problemas. Estas aplicações serão vistas mais adiante nas resoluções dos problemas.

Além deste modelo de apresentação algébrica da reta, outras duas formas pertinentes de serem comentadas são a equação paramétrica e a equação cartesiana que serão analisadas nas próximas seções.

2.5.1 Equações Paramétricas da Reta no Plano

As equações paramétricas relacionam as coordenadas dos pontos existentes em uma reta por meio de expressões de primeiro grau em função de uma variável real tomada como parâmetro (DELGADO et al, 2017). Em outras palavras, as equações paramétricas relacionam os valores das coordenadas cartesianas e os particularizam através de equações, mas utilizando uma mesma variável para cada uma delas, a qual é chamada parâmetro.

Figura 18 - Ponto P sobre a reta r



Fonte: Adaptado de DELGADO et al, 2017.

Para entender como definir as equações, primeiro é necessário partir da seguinte proposição: "Um ponto P pertence à reta que passa pelos pontos A e B se, e somente se, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$." Ora, se $P \in r$, tem-se que \overrightarrow{AP} é um vetor de mesma direção que \overrightarrow{AB} e, portanto, seu múltiplo, ou seja, tem-se que $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Além disso, a recíproca é verdadeira, dado que tomado $\mu = \frac{d(A,P)}{d(A,B)}$, existem três possibilidades (Figura 18):

- i. Se $\mu = 0$ ou $\mu = 1$ então $P = A$ ou $P = B$ e então $P \in r$.
- ii. Se $\mu \neq 0$, e \overrightarrow{AP} têm o mesmo sentido de \overrightarrow{AB} , então $\lambda = \mu$, e portanto ou o ponto $P \in \overline{AB}$ ou o segmento \overline{AP} passa pelo ponto B . Em ambos os casos $P \in r$ e é o único ponto tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$.
- iii. Se $\mu \neq 0$, e \overrightarrow{AP} têm o sentido inverso de \overrightarrow{AB} , então $\lambda = -\mu$, e assim existe somente um ponto $P \in r$ tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$.

Assim, a proposição é verdadeira. Partindo disto, dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, qualquer ponto P na reta poderia ser representado por $P = A + \lambda \vec{v}$. É importante notar que como A e B são genéricos, o vetor \vec{v} tomado pode ser qualquer um que tenha a mesma direção da reta, e pode ser denominado vetor diretor da reta (BEZERRA; SILVA, 2010).

Sejam agora dados um ponto qualquer $P = (x, y)$ pertencente à reta r , um ponto fixo conhecido da reta $A = (x_0, y_0)$ e um vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ qualquer da reta, de modo que $\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$, com $t \in \mathbb{R}$, tem-se que:

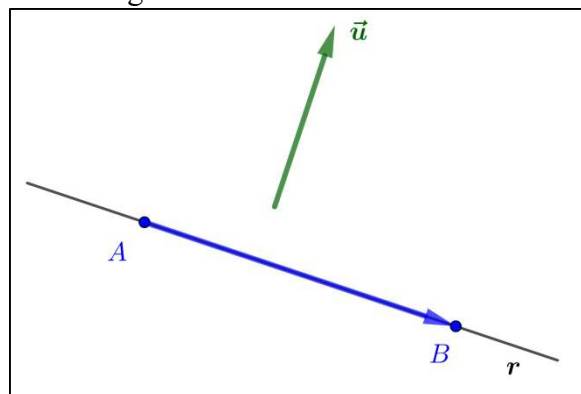
$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad (8)$$

que são as equações paramétricas da reta r .

2.5.2 Equação Cartesiana da Reta no Plano

A equação cartesiana da reta identifica uma reta por um vetor normal, ou perpendicular a ela. Por definição um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é normal ou perpendicular a uma reta r se para quaisquer pontos $A, B \in \mathbb{R}$ tomados, $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ (DELGADO et al, 2017). Assim sendo, qualquer vetor normal tomado em relação a uma reta é perpendicular a um vetor direção dela.

Figura 19 - Vetor normal à reta



Fonte: Autoria própria.

Conforme visto anteriormente, pode-se verificar a perpendicularidade entre vetores por meio do produto interno, quando este é nulo. Seja então $\vec{u} = (a, b)$ um vetor normal à reta r , a qual passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$. Sendo assim, se for tomado um ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta r , tem-se por definição que: $P \in r \Leftrightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AP}$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle &= 0 \\ \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle &= 0 \\ a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) &= 0 \\ ax + by &= ax_0 + by_0 \end{aligned}$$

Como as coordenadas do ponto A e do vetor normal \vec{u} são definidas, é possível tomar $c = ax_0 + by_0$, de modo que se tenha $ax + by = c$. Daí toma-se que a equação cartesiana de uma reta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e tem como vetor normal $\vec{u} = (a, b)$ como

$$r : ax + by = c$$

A equação cartesiana consegue então caracterizar a curva utilizando somente uma equação, diferente das equações paramétricas (DELGADO et al, 2017).

2.5.3 Equações da Reta no Espaço

Da mesma forma que no plano, as equações de reta no espaço pode ser escrita na forma paramétrica mas com algumas considerações adicionais. Tomando-se primeiramente uma reta r no espaço que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e que seja definida por um vetor diretor $\vec{v} = (l, m, n)$. Seja então $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer da reta, tem-se que $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Da relação tem-se que $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \cdot (l, m, n)$ ou ainda que (MELLO e WATANABE, 2011):

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot \lambda \\ y = y_0 + m \cdot \lambda \\ z = z_0 + n \cdot \lambda \end{cases}$$

Assim, ficam definidas as equações paramétricas da reta, bastante similares às equações da reta no plano. Além disso, tomando-se $l, m, n \neq 0$, pode-se isolar as equações pelos parâmetros o que resulta no que denomina-se equação simétrica da reta. Em outras palavras, percebe-se que $\lambda = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, que define a equação simétrica da reta.

Por fim, para que três pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ sejam colineares, a condição necessária e suficiente é que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, ou (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995):

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Esta definição deriva da própria ideia da equação simétrica, já que se os pontos A , B e C são colineares, então ambos os vetores podem ser vetores diretores da reta.

2.5.4 Equação Geral do Plano

Uma das possíveis formas de definir um plano no espaço, é determinando genericamente todos os vetores ortogonais a um vetor que seja ortogonal ao plano. Seja, por exemplo $A = (x_1, x_2, x_3)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor ortogonal ao plano. O plano π pode ser definido pelo conjunto de possíveis pontos $P = (x, y, z)$, tais que o vetor \overrightarrow{AP} é ortogonal a \vec{n} , ou seja, em que $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle = 0$ (STEINBRUCH e WINTERLE, 1995).

Logo, pela definição de produto interno tem-se que:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle &= 0 \\ (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) &= 0 \\ ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) &= 0 \end{aligned}$$

Como o último termo é composto somente por valores fixos (coordenadas dos vetores e do ponto), pode-se escrever $d = ax_1 + by_1 + cz_1$, de modo que o plano π fica definido por $\pi: ax + by + cz = d$, que é a equação geral ou cartesiana do plano.

2.6 DISTÂNCIA E ÂNGULOS NO ESPAÇO

Encontrar ângulos e distâncias entre entes geométricos é bastante comum em problemas de geometria espacial. Nas demais seções deste capítulo serão apresentadas ferramentas úteis que possibilitam resolver estes problemas por processos algébricos.

2.6.1 Distância de um Ponto a um Plano

Uma das maneiras possíveis de se determinar a distância de um ponto a um plano é supondo uma reta perpendicular ao plano e encontrando um ponto que pertença tanto à reta quanto ao plano (ponto de interseção) (MELLO e WATANABE, 2011). Para isto, basta que tomado um plano π definido por $ax + by + cz = d$, seja definida uma reta com vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Assim, dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, pretende-se encontrar a distância ao plano π representado pela equação $ax + by + cz = d$.

Esta distância será definida pela norma do segmento $\overline{IP_0}$, sendo $I = (x_1, y_1, z_1)$ o ponto de interseção de uma reta r perpendicular ao plano e que passa por P_0 .

Assim, pode-se definir a reta em função do ponto P_0 e de um vetor diretor normal ao plano $\vec{v} = (a, b, c)$. Como o ponto I pertence à reta tem-se que suas equações paramétricas podem ser representadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \lambda_1 \\ y = y_0 + b \cdot \lambda_1 \\ z = z_0 + c \cdot \lambda_1 \end{cases}$$

Sendo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{IP_0} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \lambda_1 (a, b, c)$, a norma do segmento $\overline{IP_0}$ será definida por $d(I, P_0) = |\lambda_1| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Como I pertence ao plano $ax + by + cz = d$, segue que

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= d \\ a(x_0 + a \cdot \lambda_1) + b(y_0 + b \cdot \lambda_1) + c(z_0 + c \cdot \lambda_1) &= d \\ \lambda_1 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) &= d - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\ \frac{d(I, P_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) &= |d - (ax_0 + by_0 + cz_0)| \\ d(I, P_0) \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &= |ax_0 + by_0 + cz_0 - d| \\ d(I, P_0) &= d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (9)$$

Dado que $|\lambda_1| = \frac{d(I, P_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, basta que se tenha as equações do plano e as coordenadas do ponto para que se determine a distância entre eles.

2.6.2 Distância entre dois Planos Paralelos

A distância entre dois planos paralelos pode ser obtida por meio da Equação (18), para isso, basta considerar um ponto qualquer em um dos planos e calcular a distância entre este ponto e o outro plano.

Considere $ax + by + cz = d_1$ e $ax + by + cz = d_2$ as equações cartesianas dos planos π_1 e π_2 , respectivamente, e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer pertencente ao plano π_1 .

Assim,

$$d(P_0, \pi_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi_1$, segue que $ax_0 + by_0 + cz_0 = d_1$ e, portanto,

$$d(P_0, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (10)$$

Se os planos são coincidentes, a distância é nula.

2.6.3 Distância de Ponto à Reta no Plano

Por definição, a distância de um ponto P a uma reta r , sendo o ponto não pertencente à reta, é o número dado por

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in \mathbb{R}\}.$$

Se tomado o ponto P' de modo que $\overrightarrow{PP'}$ é perpendicular à reta r , para qualquer ponto $Q \in r$, tem-se $d(P, P') < d(P, Q)$, dado que o triângulo PQP' é retângulo e \overline{PQ} é a hipotenusa do mesmo (DELGADO et al, 2017), conforme mostrado na Figura 20.

Seja então uma reta r definida pela equação cartesiana $ax + by = c$ e $P = (x_0, y_0)$ um ponto qualquer não pertencente à reta.

Considerando $P' = (x', y')$ como um ponto pertencente à reta, tal que $\overrightarrow{PP'}$ é perpendicular à reta r , tem-se que $\overrightarrow{PP'} = \lambda \cdot (a, b)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e um vetor $\vec{u} = (a, b)$ normal à reta r .

Desta forma, como $\overrightarrow{PP'} = (x' - x_0, y' - y_0)$, então as coordenadas do ponto P' podem ser escritas como

$$x' = x_0 + \lambda a \text{ e } y' = y_0 + \lambda b.$$

Como $P' \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} ax' + by' &= c \\ a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) &= c \\ ax_0 + by_0 + \lambda(a^2 + b^2) &= c \\ \lambda &= \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Além disso, $\overrightarrow{PP'} = \lambda(a, b)$, logo

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Portanto,

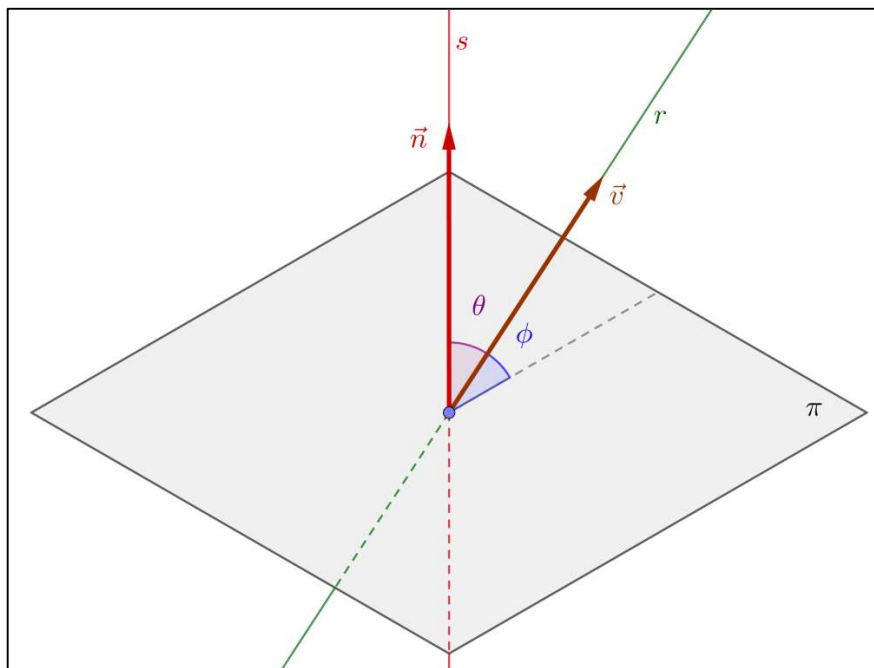
$$\|\overrightarrow{PP'}\| = d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (11)$$

2.6.4 Ângulo de Incidência de uma Reta em um Plano

Uma reta que não seja paralela ou pertencente a um plano intersecta-o em um ponto de incidência formando um ângulo (Figura 20).

Seja $\pi : ax + by + cz = d$ um plano e r uma reta incidente a ele, definida por um vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, e que forma um ângulo ϕ com o plano. Considerando $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor ortogonal ao plano, tem-se o ângulo $\angle(\vec{v}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \phi = \theta$. Observa-se que θ é um ângulo complementar ao ângulo de incidência ϕ , conforme mostrado na Figura 20.

Figura 20 - Ângulo de incidência de uma reta r no plano



Fonte: Adaptado de DELGADO et al, 2017.

O ângulo θ entre os vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{n} = (a, b, c)$ pode ser obtido da Equação (21).

$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}\|}, \text{ com } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

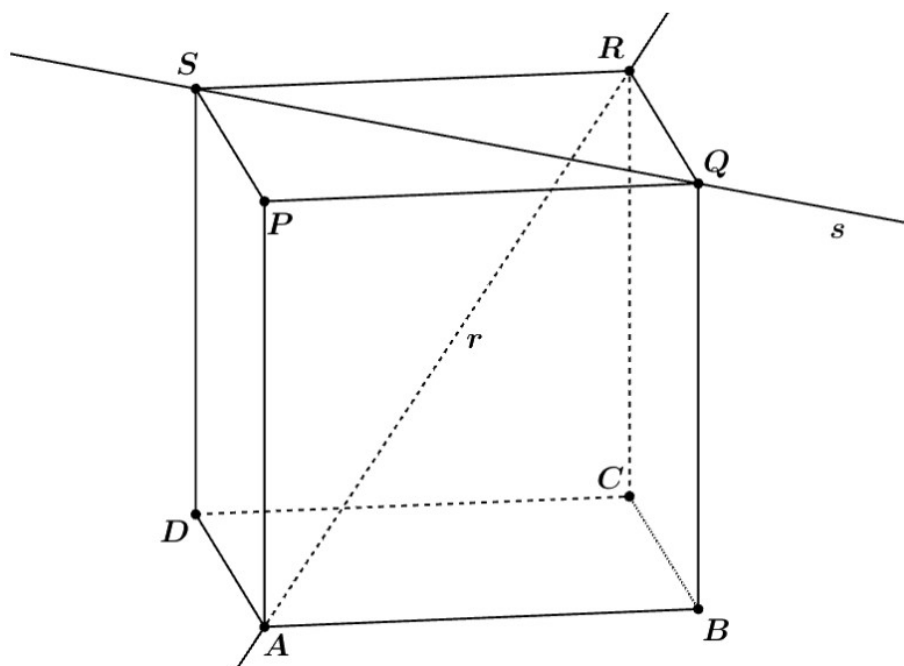
3 PROBLEMAS PROPOSTOS

Em cada problema será apresentada uma proposta de resolução com o uso da geometria analítica e na maioria deles será dado um enfoque ao tratamento vetorial. Quanto à linguagem empregada, optou-se por realizar problemas de alcance teórico pelos docentes e discentes que venham a ler o material, utilizando métodos detalhados, e suficientemente ilustrados, dos passos tomados no problema. Por fim, para elaborar as ilustrações da resolução dos problemas e da fundamentação teórica foi empregado o *software* “Geogebra”, bastante utilizado em diversos trabalhos de geometria, visto que é de fácil manuseio e possibilita uma representação mais clara dos conceitos empregados.

3.1 PROBLEMA 01 (ENQ 2018/1, ADAPTADO)

Sejam duas retas reversas r e S no espaço, que são retas suporte das diagonais do cubo e de uma das faces do mesmo, conforme apresentado na Figura 21. Determine qual o cosseno do ângulo entre r e S .

Figura 21 - Problema 01: ENQ - 2018/1

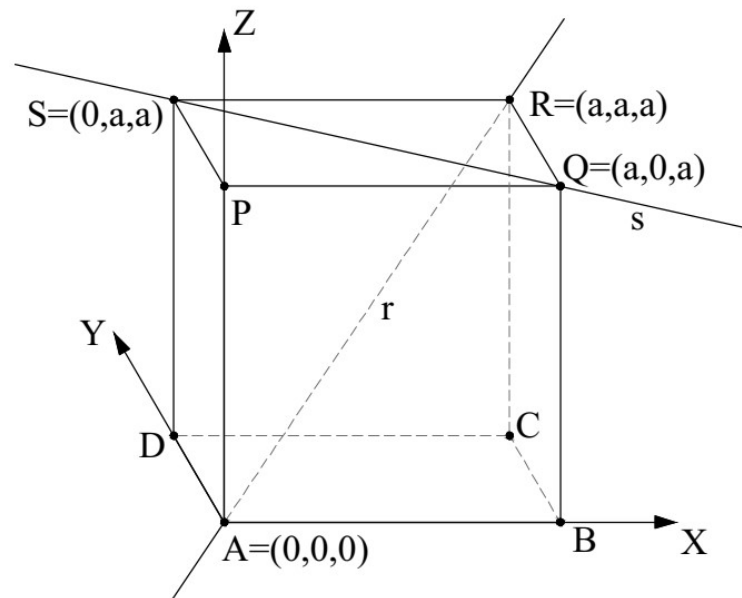


Fonte: Exame Nacional de Qualificação PROFMAT 2018/1.

Proposta de Solução:

Sendo as retas r e s pertencentes ao espaço, sabe-se que o ângulo entre elas é equivalente ao ângulo entre seus vetores diretores. Assim, para descrever a situação, pode-se escolher um sistema de eixos cartesianos $OXYZ$ com origem em A , conforme apresentado na Figura 22. Visto que o cosseno do ângulo entre r e s independe das dimensões do cubo, se a denota a medida da aresta do cubo, tem-se $A=(0,0,0)$, $R=(a,a,a)$, $S=(0,a,a)$ e $Q=(a,0,a)$

Figura 22 – Ilustração geométrica da Figura 21 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

Note que o ângulo entre as retas é igual ao ângulo entre os vetores $\overrightarrow{AR} = (a, a, a)$ e $\overrightarrow{SQ} = (a, -a, 0)$, de modo que o cosseno pode ser encontrado de acordo com a Equação (06) da seguinte forma:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \overrightarrow{AR}, \overrightarrow{SQ} \rangle|}{\|\overrightarrow{AR}\| \cdot \|\overrightarrow{SQ}\|} = \frac{|a^2 - a^2 + 0|}{(\sqrt{3a^2}) \cdot (\sqrt{2a^2})} = 0$$

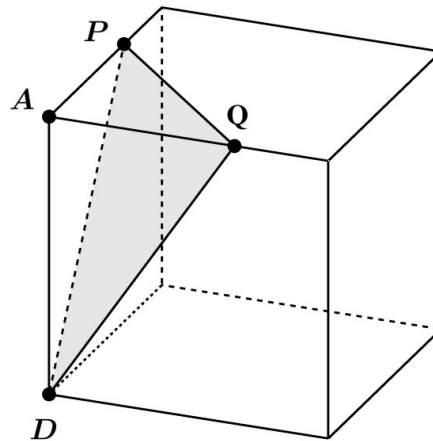
O produto interno deve ser utilizado em módulo para garantir que o ângulo tomado entre os vetores seja um ângulo agudo, que por definição é o ângulo entre as retas. Logo além de se

definir o cosseno do ângulo, tem-se que o ângulo entre as duas retas é reto, qualquer que seja o valor de a tomado.

3.2 PROBLEMA 02 (ENQ 2017/2, ADAPTADO)

Um cubo de aresta de medida 3 é intersectado por um plano, determinando o triângulo DPQ , como mostra a Figura 23. Sabe-se que $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2$.

Figura 23 – Problema 02: ENQ - 2017/2



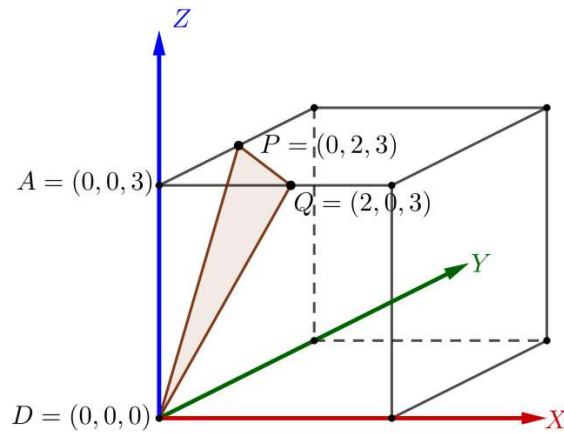
Fonte: Exame Nacional de Qualificação PROFMAT 2017/2.

- Calcule a área do triângulo DPQ .
- Determine a distância do vértice A do cubo ao plano que contém o triângulo DPQ .

Proposta de Solução:

a) Primeiramente, deve-se determinar uma posição adequada para a origem do eixo no espaço. Com os dados do enunciado pode-se determinar a posição do eixo conforme mostra a Figura 24.

Figura 24 - Ilustração geométrica da Figura 23 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

Para se encontrar a área do triângulo DPQ pode-se determinar o produto vetorial de dois vetores limitantes do plano, como por exemplo, os vetores $\overrightarrow{PD} = (0, -2, -3)$ e $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 0)$, por meio da expressão $S = \sqrt{\|\overrightarrow{PD}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \langle \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PQ} \rangle^2}$. As normas destes produtos e seu produto interno podem ser definidos por meio da equações (05) e (07).

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{PD}\| &= \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \\ \|\overrightarrow{PQ}\| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} \\ \langle \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PQ} \rangle &= 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 0 = 4\end{aligned}$$

Por fim pela expressão que define a área do plano (S):

$$S_{DPQ} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2} = \sqrt{22}$$

b) Para encontrar a distância entre o plano e o ponto, uma das possibilidades é encontrar o volume da pirâmide $ADPQ$ e a altura h por

$$V_{ADQP} = \frac{1}{3} \cdot S_{DPQ} \cdot h .$$

Logo,

$$h = \frac{3 \cdot V_{ADQP}}{S_{DPQ}}$$

Ora, vimos anteriormente que o volume da pirâmide triangular $ADPQ$ pode ser definido por um sexto do produto misto de três vetores partindo de um dos vértices da base. Tomemos

então os vetores \overrightarrow{PD} , \overrightarrow{PQ} e $\overrightarrow{PA}=(0,-2,0)$, o volume da pirâmide pode ser definido pela Equação (14).

$$V(Pr_{\Delta}) = \frac{1}{6} \cdot V(P) = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PA})$$

$$V_{ADPQ} = V(Pr_{\Delta}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \text{ u.v.}$$

Assim a distância pode ser encontrada por:

$$h = \frac{3 \cdot V_{ADPQ}}{S_{DPQ}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{22}} = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

Outra proposta de Solução para o item b:

Outra possível forma de resolver o item “b” do exercício proposto é com a determinação da equação do plano $\pi = DPQ$, na forma $ax + by + cz = d$ e encontrando a distância do ponto A ao plano definida por $d(A, \pi)$. Para isso, basta que (i) seja encontrado um possível vetor ortogonal ao plano; (ii) seja definido o valor da constante d ; (iii) e, por fim, que se determine a distância com a fórmula definida no item 2.7.2.

Para encontrar um vetor ortogonal ao plano π , basta empregar-se o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ apresentado na Equação (08):

$$\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{PQ} = [0 - (-6)] \cdot \vec{i} - [0 - (6)] \cdot \vec{j} + [0 - (-4)] \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{PQ} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} = (6, 6, 4)$$

Assim, tem-se pelo vetor ortogonal que $a = 6$, $b = 6$ e $c = 4$. Para que se encontre o valor de d , basta que seja substituído um ponto qualquer do plano como, por exemplo, o ponto $P=(0,2,3)$, em que determinamos $d = 24$.

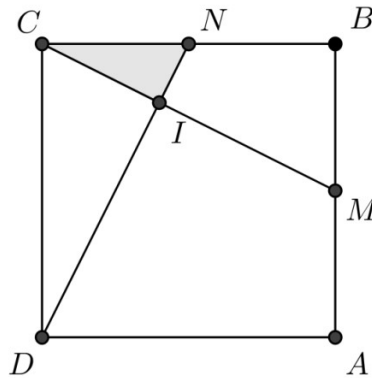
Dessa forma, o plano pode ser definido por $\pi : 6x + 6y + 4z = 20$. Com o ponto $A=(0,0,3)$, a distância $d(A, \pi)$ pode ser encontrada pela Equação (18):

$$d(A, \pi) = \frac{|6 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 24|}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{88}} = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

3.3 PROBLEMA 03 (ENQ 2016/2)

Sejam $ABCD$ um quadrado de lado 1 (uma unidade), M o ponto médio de AB , N o ponto médio de BC e I a interseção de DN e CM . Calcule a área do triângulo NIC .

Figura 25 – Problema 03: ENQ – 2016/2

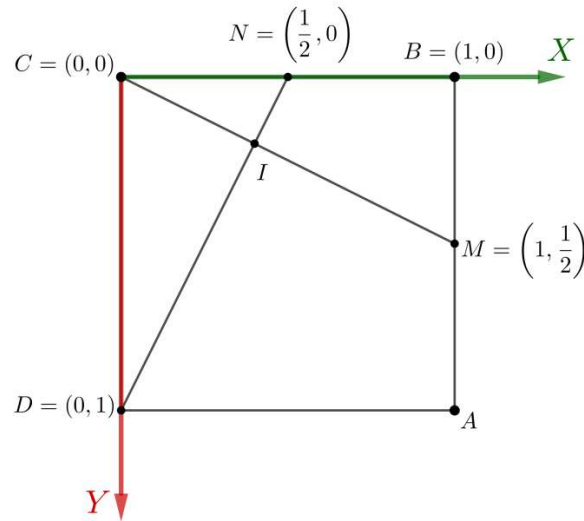


Fonte: Exame Nacional de Qualificação PROFMAT 2016/2.

Proposta de Solução:

Uma possível solução parte de encontrar as coordenadas dos pontos N , C e I e determinar a área pelo determinante da matriz formada pelas coordenadas de dois vetores formados com estes pontos. Assim, considere um eixo OXY com origem no ponto C , e as coordenadas dos pontos conforme apresentadas na Figura 26. Primeiramente, os pontos M e N , por serem pontos médios de \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente, podem ser encontrados pela Equação (03), de modo que $M = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $N = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Figura 26 – Ilustração geométrica da Figura 25 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria

Para encontrar o ponto I , pode-se encontrar o ponto de interseção entre a reta r que contém o segmento \overline{CM} e a reta s que contém o segmento \overline{DN} . Assim partindo dos pontos conhecidos e da função afim relacionada a uma reta, tem-se:

$$r : y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = 0 \\ a \cdot 1 + b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$s : y = a'x + b' \Rightarrow \begin{cases} a' \cdot 0 + b' = 1 \\ a' \cdot \frac{1}{2} + b' = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 1$$

Assim, igualando as duas equações, tem-se que as coordenadas de I é:

$$x = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$I = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

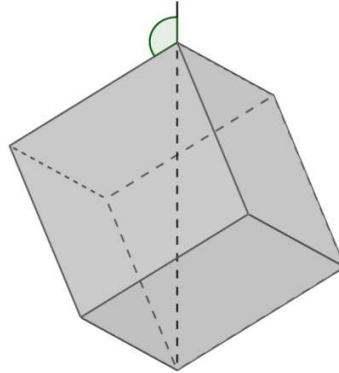
Tomando-se os vetores \overrightarrow{CI} e \overrightarrow{CN} pode-se encontrar a área do triângulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{20} \text{ u.a.}$$

3.4 PROBLEMA 04 (ENQ 2016/1)

Um cubo está pendurado por um de seus vértices, de forma que a corda que o sustenta é colinear a uma das diagonais do cubo, como mostra a Figura 27.

Figura 27 - Problema 04: ENQ – 2016/1



Fonte: Exame Nacional de Qualificação PROFMAT 2016/1.

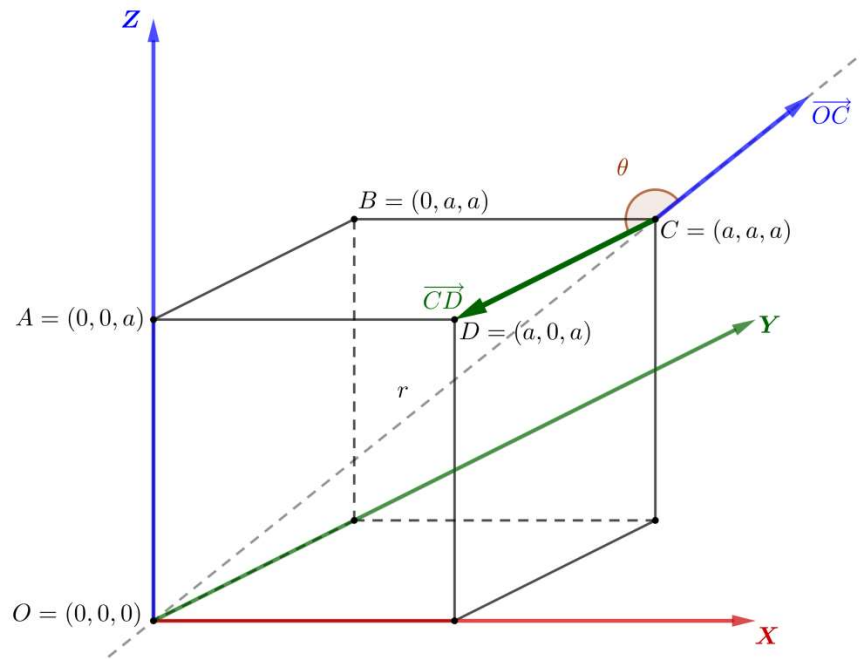
Determine o cosseno do ângulo entre a corda e uma das arestas do cubo que lhe são adjacentes, representado na Figura 28.

Proposta de Solução:

A reta r , que contém a diagonal do cubo, incide sobre o plano formado pela face do cubo. O ângulo pode ser definido pelo formado entre um vetor diretor da reta e um vetor pertencente ao plano. Então para determinar o ângulo pedido, basta que se determine o ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{OC} = (a, a, a)$ e $\overrightarrow{CD} = (0, -a, 0)$ (Figura 28). Para isto basta que empregue-se a Equação (06).

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CD} \rangle}{\|\overrightarrow{OC}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{0 - a^2 + 0}{(\sqrt{3a^2}) \cdot (\sqrt{a^2})} = \frac{-a^2}{a^2 \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Figura 28 – Ilustração geométrica da Figura 27 em um sistema de coordenadas

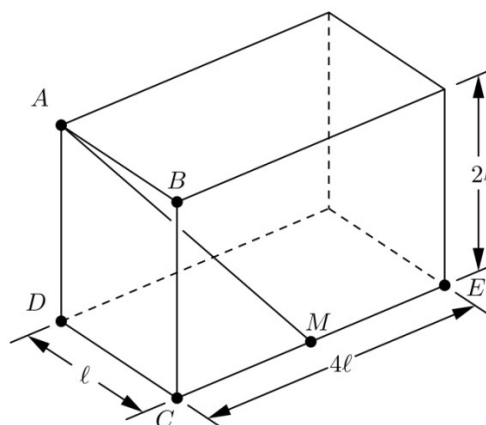


Fonte: Autoria própria.

3.5 PROBLEMA 05 (ENQ 2015/2)

No paralelepípedo reto retângulo da figura abaixo, calcule a distância do vértice C ao segmento AM , sendo M o ponto médio de CE .

Figura 29 - Problema 05: ENQ – 2015/2

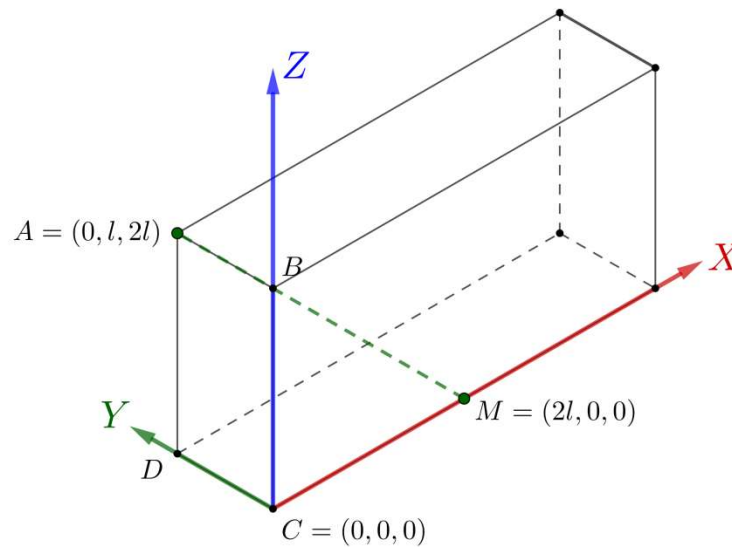


Fonte: Exame Nacional de Qualificação PROFMAT 2015/2.

Proposta de Solução:

Primeiramente, pode-se adotar um eixo $OXYZ$, com origem no ponto C e com eixos. Assim, as coordenadas dos pontos ficam definidas conforme apresentado na Figura 30. Para encontrar a distância do ponto C ao segmento AM , basta determinar a área do triângulo CAM e dividi-la pela norma do vetor MA .

Figura 30 - Ilustração geométrica da Figura 29 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

Assim sendo, podemos encontrar a norma do vetor $\vec{MA} = (-2\ell, \ell, 2\ell)$ e $\vec{MC} = (-2\ell, 0, 0)$ pela Equação (5), de modo que $\|\vec{MA}\| = 3\ell$ e $\|\vec{MC}\| = 2\ell$. Já a área do triângulo pode ser encontrada pela Equação (11) utilizando os vetores \vec{MA} e \vec{MC} :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|\vec{MA}\|^2 \|\vec{MC}\|^2 - \langle \vec{MA}, \vec{MC} \rangle^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9\ell^2 \cdot 4\ell^2 - 16\ell^4} = \sqrt{20}\ell^2$$

Agora dividindo o valor encontrado por $\|\vec{MA}\|$:

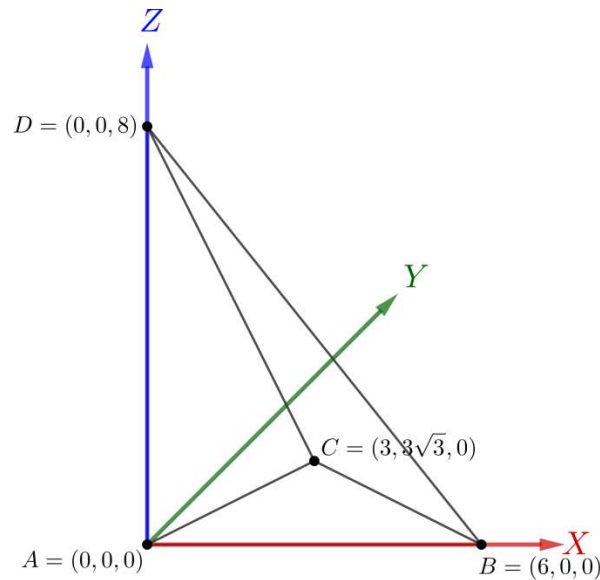
$$d(C, \overline{AM}) = \frac{S_{CAM}}{\|\vec{MA}\|} = \frac{\sqrt{20}\ell^2}{3\ell} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\ell$$

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 6 e AD um segmento perpendicular ao plano desse triângulo de comprimento 8.

- (a) Localize o ponto P do espaço que é equidistante dos quatro pontos A , B , C e D e calcule a distância comum $R = PA = PB = PC = PD$.
- (b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas AC e BD .

Proposta de Solução:

Figura 31 – Ilustração geométrica do Problema 06 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

(a) Primeiramente como referência podemos tomar o eixo $OXYZ$ com origem no ponto A conforme apresentado na Figura 31. Assim para que $R = PA = PB = PC = PD$, basta que a norma dos vetores seja também igual:

$$\vec{AP} = (x, y, z) \Rightarrow \|\vec{AP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (i)$$

$$\vec{BP} = (x-6, y, z) \Rightarrow \|\vec{BP}\| = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \quad (ii)$$

$$\vec{CP} = (x-3, y-3\sqrt{3}, z) \Rightarrow \|\vec{CP}\| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3\sqrt{3})^2 + z^2} \quad (iii)$$

$$\vec{DP} = (x, y, z-8) \Rightarrow \|\vec{DP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} \quad (iv)$$

Igualando-se (i), com (ii), (iii) e (iv) temos:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AP}\| &= \|\overrightarrow{BP}\| \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \\ x &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AP}\| &= \|\overrightarrow{DP}\| \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} \\ z &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AP}\| &= \|\overrightarrow{CP}\| \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-3\sqrt{3})^2 + z^2} \\ 3^2 + y^2 &= (3-3)^2 + y^2 - 6\sqrt{3}y + 27 \\ y &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Assim a coordenada do ponto $P = (3, \sqrt{3}, 4)$. Para determinar a distância de P até os demais pontos basta substituir os valores em uma das equações, seja no caso a equação (i):

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(b) Para calcular o cosseno das retas reversas basta determinar o vetor diretor de ambas as retas e calcular o ângulo entre elas através do produto interno. Sendo assim, o ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{AC} = (3, 3\sqrt{3}, 0)$ e $\overrightarrow{BD} = (-6, 0, 8)$ pode ser encontrado assim:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CD} \rangle|}{\|\overrightarrow{OC}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{|-18 + 0 + 0|}{6 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

3.7 PROBLEMA 07 (PROBLEMA, 2006)

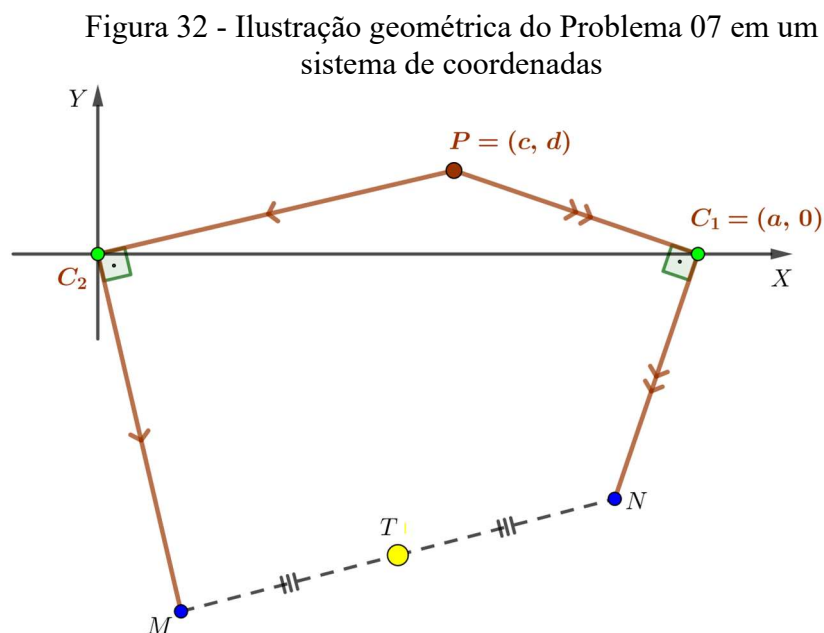
Um tesouro foi enterrado em uma ilha e foi feito um mapa de sua localização. As instruções contidas no mapa dizem que ao desembarcar na ilha avistam-se imediatamente dois grandes carvalhos, e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode

ser encontrado da seguinte forma: “Partindo da palmeira caminhe até o carvalho C_1 contando os passos. Chegando ao carvalho, gire para a direita 90° e caminhe o mesmo número de passos e, onde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, caminhe até o carvalho C_2 contando os passos, gire à esquerda 90° e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas”.

Depois de muito tempo, exploradores encontraram o mapa e decidiram ir à ilha resgatar o tesouro. Ao chegarem à ilha tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos ainda estavam lá, mas a palmeira tinha desaparecido. Os exploradores não desanimaram e, depois de pensar um pouco, tiveram uma ótima ideia para resolver o problema de modo bastante prático. Como os exploradores fizeram para encontrar o lugar onde o tesouro estava enterrado e recuperá-lo mesmo sem a palmeira?

Proposta de Solução:

Uma das conclusões possíveis que os exploradores podem chegar é que para encontrar o tesouro, não importa a posição da palmeira. Logo, poderiam considerar uma posição hipotética. Seja P um ponto qualquer onde será considerada a localização da palmeira. Tome o sistema de eixos ortogonais OXY conforme mostrado na Figura 32.



Fonte: Autoria própria.

Primeiramente serão encontradas as coordenadas do ponto N . Note que $N = C_1 + \overline{C_1N}$ e que $\overline{C_1N}$ é a rotação do vetor $\overline{C_1P} = (c - a, d)$ de um ângulo de 90° no sentido anti-horário, logo tem-se $\overline{C_1N} = (-d, c - a)$. Isto pode ser considerado pois o produto interno entre os vetores $\overline{C_1N}$ e $\overline{C_1P}$ é igual a zero. Isso mostra que eles são ortogonais, conforme esperado. Dessa forma, tem-se

$$N = C_1 + \overline{C_1N} = (a, 0) + (-d, c - a) = (a - d, c - a)$$

Por outro lado, para determina o ponto M , basta considerar uma rotação de 90° no sentido horário do vetor $\overline{C_2P} = (c, d)$ em torno da origem. Dessa forma, $\overline{C_2M} = (d, -c)$ e, portanto:

$$M = C_2 + \overline{C_2M} = (0, 0) + (d, -c) = (d, -c)$$

Por fim, como o tesouro T está localizado no ponto médio de M e N , segue que

$$T = \frac{M + N}{2} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right)$$

Observe que o tesouro está localizado no ponto T pertencente à mediatriz do segmento $\overline{C_1C_2}$ tal que a distância do tesouro a este segmento equivale à metade da distância entre os carvalhos.

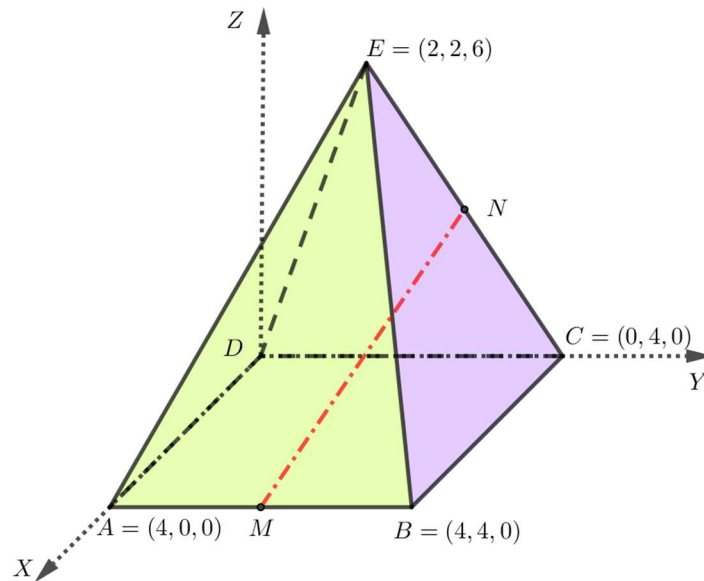
3.8 PROBLEMA 08 (GEOMETRIA, 2011)

Suponha uma pirâmide quadrangular regular com aresta $a = 4$ e altura $h = 6$. Determine a distância entre os pontos médios de duas arestas opostas reversas.

Proposta de Solução:

Seja $ABCDE$ a pirâmide apresentada na Figura 33 baseada nas informações do Problema 2. Neste problema, é interessante considerar um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ de maneira conveniente a fim de facilitar na determinação das coordenadas dos vértices da pirâmide. Com esta escolha, temos claramente as coordenadas de cada vértice, conforme Figura 33.

Figura 33 – Ilustração geométrica do Problema 08 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

Como os pontos M e N são pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{EC} , podemos encontrar suas coordenadas e, conseqüentemente, calcular a distância entre elas. Se M é o ponto médio de um segmento \overline{AB} , em que $A=(a_1, a_2)$ e $B=(b_1, b_2)$, então M é dado por

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

Logo, neste problema, tem-se que

$$M = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (4, 2, 0)$$

$$N = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{6+0}{2} \right) = (1, 3, 3)$$

Agora basta determinar a distância entre os pontos, ou, de modo equivalente, a norma do vetor \overline{MN} . O cálculo da distância entre dois pontos depende apenas de suas coordenadas.

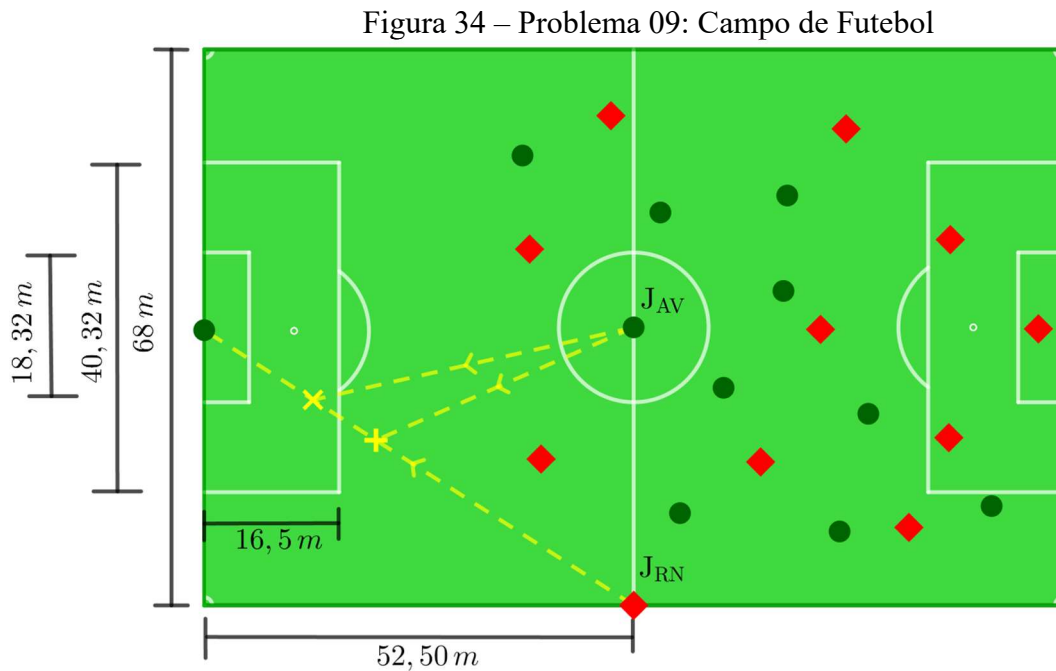
Assim, se $M=(x_1, y_1, z_1)$ e $N=(x_2, y_2, z_2)$, a distância $d(M, N)$ entre M e N é

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{19}.$$

Portanto, a distância entre os pontos médios de duas arestas opostas reversas é igual a $\sqrt{19}$ u.m.

3.9 PROBLEMA 09 (ADAPTADO DE LACERDA, 2015)

Aos 45 minutos do segundo tempo de um jogo de futebol a equipe do time alviverde cobra um escanteio, mas a equipe do time rubro-negro rouba a bola e inicia um contra-ataque. Neste, o jogador J_{RN} recebe a bola e parte em direção ao goleiro com uma velocidade constante e, no mesmo instante, o jogador oponente J_{AV} já se encontra no centro do gramado e vai correndo numa determinada direção com velocidade também constante e igual a 85% da velocidade do jogador J_{RN} , a fim de interceptá-lo, conforme apresentado na Figura 34.



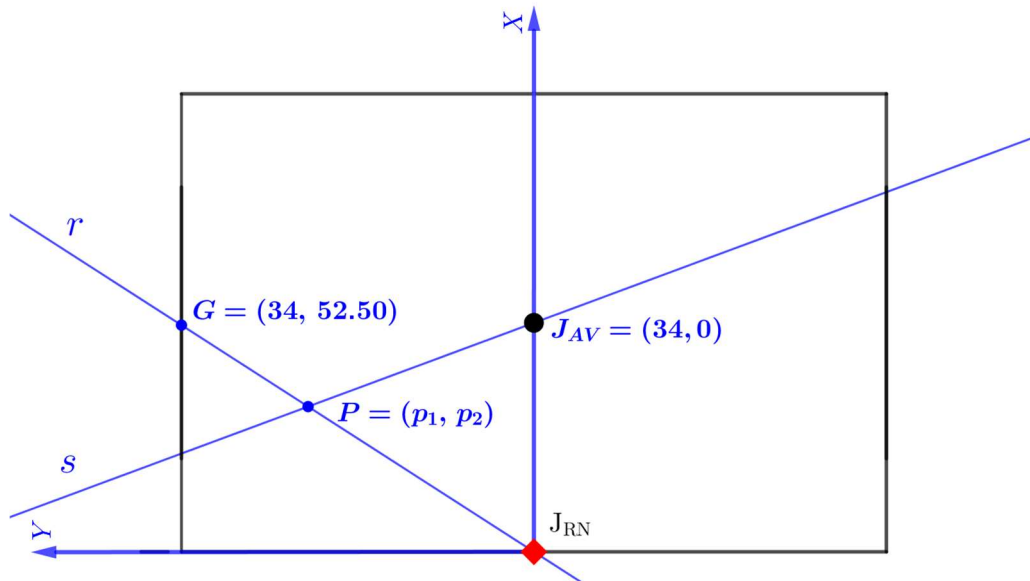
Fonte: Autoria própria.

Sabe-se que J_{AV} conseguiu interceptar J_{RN} com uma falta. Logo, a falta ocorreu fora da área ou foi pênalti?

Proposta de Solução:

Primeiramente, considere o sistema de eixos ortogonais OXY e as coordenadas de alguns pontos, conforme apresentado na Figura 35. O objetivo é determinar o ponto $P=(p_1, p_2)$ que é a posição que ocorreu a falta. Para isso, basta encontrar o ponto de interseção entre as retas r e s .

Figura 35 – Ilustração geométrica do Problema 09 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

A equação da reta r pode ser representada da seguinte maneira:

$$r: y = \frac{52,5}{34}x,$$

Sendo $\frac{52,5}{34}$ o coeficiente angular da reta. Como $P = (p_1, p_2) \in r$, segue que

$$p_2 = \frac{52,5}{34}p_1$$

Por hipótese, a velocidade de J_{AV} é igual à 85% da velocidade de J_{RN} e como os jogadores J_{AV} e J_{RN} se chocam em P , tem-se a seguinte relação

$$d(J_{AV}, P) = \frac{85}{100}d(J_{RN}, P)$$

Assim,

$$\sqrt{(p_1 - 34)^2 + p_2^2} = \frac{85}{100}\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Substituindo $p_2 = \frac{34}{52,5}p_1$ na equação anterior e fazendo o seu desenvolvimento,

obtem-se:

$$0,9391p_1^2 - 68p_1 + 1156 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática e considerando $0 \leq p_1 \leq 34$ devida a natureza do problema, segue que $p_1 = 27,2703$ e, conseqüentemente, $p_2 = 42,1085$. Logo, tem-se que P está localizado nas proximidades do ponto de coordenadas $P = (27.3, 42.1)$. Daí, com base nas informações apresentadas na Figura 34, segue que P encontra-se dentro da grande área, ou seja, a falta ocorreu dentro da área e, portanto, foi pênalti.

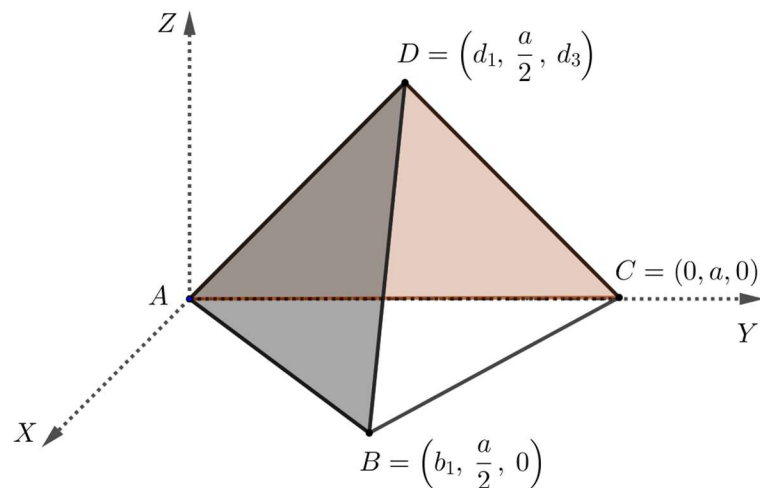
3.10 PROBLEMA 10 (ELABORADO PELOS AUTORES)

Suponha um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a . Determine a área de suas faces e o volume do tetraedro em função de a .

Proposta de Solução:

Vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ com origem no ponto A , o vértice C pertencente ao eixo OY e o vértice B no plano XY . Assim, as coordenadas dos vértices do tetraedro são representadas na Figura 36.

Figura 36 – Primeira ilustração geométrica do Problema 10 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

Para calcular a área de uma face do tetraedro, será utilizado o conceito de produto vetorial. Visto que todas são triângulos equiláteros, pode-se escolher uma qualquer e aqui, será escolhida a face ABC . Note que $\overrightarrow{AB} = \left(b_1, \frac{a}{2}, 0\right)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, a, 0)$, assim:

$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \sqrt{b_1^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Ou, pode-se obter este produto interno como segue:

$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \cdot b_1 + a \cdot \frac{a}{2} + 0 \cdot 0 = \frac{a^2}{2}$$

Igualando-os, segue que:

$$\frac{a^2}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{b_1^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{b_1^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$a^2 = b_1^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$b_1^2 = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$b_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

que é a altura de uma face (triângulo equilátero) do tetraedro. Logo, obtém-se

$$B = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right) \text{ e, portanto, } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right).$$

Agora, é possível calcular a área de uma face, para isso, basta aplicar o conceito de produto vetorial, conforme a seguinte relação

$$S_{face} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ u.a.}$$

O próximo passo é encontrar as coordenadas do vértice D . De

$$\frac{a^2}{2} = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cos 60^\circ = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cos 60^\circ = \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \rangle = d_1 \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{4}$$

$$\text{tem-se, } d_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

De maneira análoga, igualando $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC} \rangle$ obtém-se $d_3 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, que

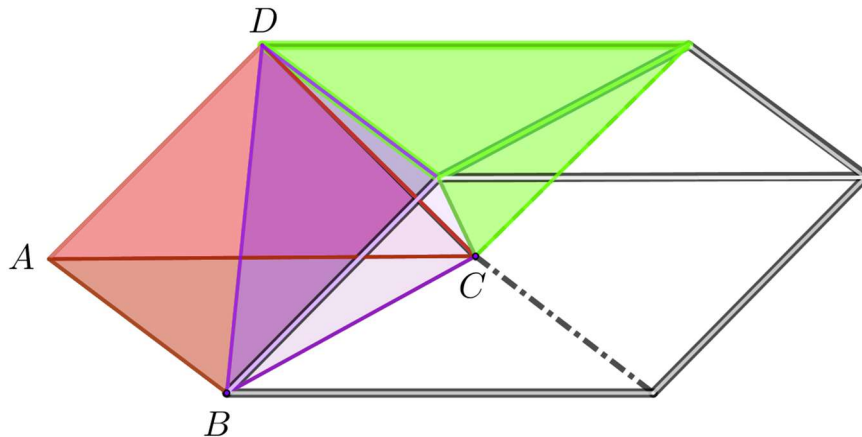
representa a altura do tetraedro regular.

Para encontrar o volume do tetraedro regular, pode-se aplicar o conceito de produto misto. O produto misto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$ é igual ao produto interno entre o vetor $\vec{AB} \times \vec{AC}$ e o vetor \vec{AD} , isto é, $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \langle \vec{AB} \times \vec{AC}, \vec{AD} \rangle$. Esse cálculo equivale ao módulo do determinante da matriz 3×3 , onde as linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores \vec{AB} , \vec{AC} e \vec{AD} , a saber, $\vec{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$, $\vec{AC} = (0, a, 0)$ e $\vec{AD} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{6}}{3} \right)$. Geometricamente, o módulo do produto misto equivale ao volume do paralelepípedo representado na Figura 37.

Como o volume do tetraedro regular é igual a $1/6$ do volume do paralelepípedo, segue que o volume do tetraedro regular é igual a

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \frac{a\sqrt{3}}{6} & \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{vmatrix} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \text{ u.v.}$$

Figura 37 – Segunda ilustração geométrica do Problema 10 em um sistema de coordenadas



Fonte: Autoria própria.

3.11 PROBLEMA 11 (ADAPTADO DE CONSTRUÇÕES, 2008)

Dado um quadrado $ABCD$ e P um ponto qualquer pertencente ao lado BC . Seja r a reta que passa pelos pontos A e P e S uma reta que contém C e é perpendicular à r . A reta S intersecta a reta suporte ao lado AB no ponto Q . Determine o ângulo \widehat{BQP} .

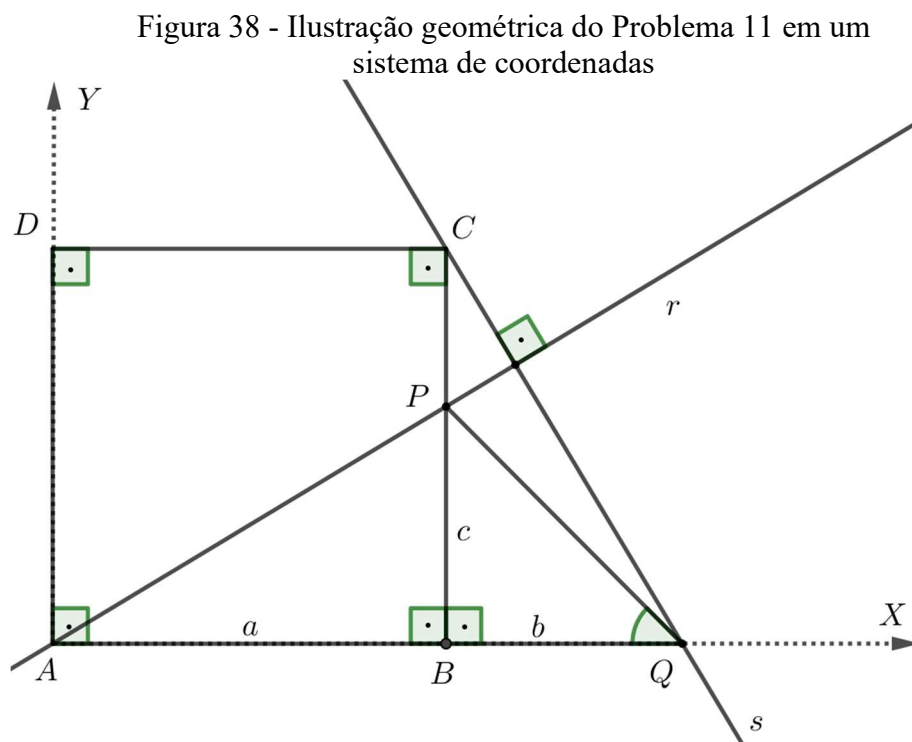
Proposta de Solução:

Um importante passo para a resolução de problemas da geometria plana ou espacial por meio de processos algébricos é considerar um sistema de eixos ortogonais OXY com uma boa escolha para a origem. Neste caso, será considerado um sistema de eixos ortogonais OXY com origem no vértice A do quadrado e seus eixos contendo os lados AB e AD do quadrado $ABCD$, conforme mostrado na Figura 38. Claramente, tem-se $A=(0,0)$, $P=(a,c)$, $C=(a,a)$ e $Q=(a+b,0)$. Como r e S são perpendiculares, o vetor $\overrightarrow{CQ}=(b,-a)$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AP}=(a,c)$, logo $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ} \rangle = 0$.

Como $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ} \rangle = \langle (a,c), (b,-a) \rangle = a \cdot b + c \cdot (-a) = a(b-c)$, segue que

$$a(b-c) = 0$$

Portanto, $b=c$ e isto implica que o ângulo \widehat{BQP} é igual a 45° .



Fonte: Autoria própria.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas clássicos encontrados na geometria sintética via processos algébricos mostrou-se muito importante, pois nota-se que foi possível fazer uma inter-relação de conteúdos da matemática. Foram apresentados alguns conceitos da geometria analítica vetorial de forma muitas vezes simples, valorizando outras ferramentas matemáticas diferentes das tradicionais quando se trata da resolução destes tipos de problemas.

Um dos produtos desta pesquisa foi um o trabalho intitulado “GEOMETRIA ANALÍTICA NO FUTEBOL: Fora da Área ou Pênalti?” na forma de resumo simples com apresentação em póster no IV Colóquio de Ciências Naturais e Matemática - Alfabetização Científica e Matemática: perspectivas frente às políticas públicas da Educação Básica - UFMT/Sinop entre os dias 21 a 25 de outubro de 2019.

Ainda, foi publicado, na forma de trabalho completo nos anais do referido evento, o trabalho “GEOMETRIA ANALÍTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA CLÁSSICA” e a apresentação deste deu-se na forma de comunicação oral.

Espera-se que a metodologia empregada na resolução dos problemas propostos contribua para que tanto alunos quanto professores percebam que a geometria analítica vetorial possui diversas ferramentas que podem ser utilizadas para resolver problemas de geometria plana e espacial que, geralmente, nos inclinamos em explorá-las por meio de processos geométricos (geometria sintética), o que entendemos ser devido às técnicas de resolução que aparecem primeiramente nos currículos escolares, provavelmente fruto do desenvolvimento histórico da geometria. Não tivemos a pretensão de substituir ou sequer comparar tipos de técnicas, e sim chamar atenção para a importância de conhecer outras técnicas de resolução para um mesmo problema, o que mostra a inter-relação entre conceitos inerentes de disciplinas diferentes, além de contribuir na capacitação de resolução de problemas de geometria plana e espacial.

Outras propostas poderão ser aplicadas, tais como a resolução destes e de outros problemas via comparação dos métodos geométricos e algébricos, bem como, aplicar esta metodologia em sala de aula.

O grande legado que se pretende deixar não é de que existam parâmetros de maior facilidade ou dificuldade, mas de que o estudante deve conhecer todo o possível ferramental para conseguir inferir qual técnica é mais adequada na visão dele para resolver problemas

específicos. Isto parte de que o discente não limite o aprendizado pela sua visão, mas que esteja sempre aberto a novas possibilidades.

A questão a ser discutida não é a de elencar o que o professor deve ou não fazer, mas de contribuir de alguma forma com a prática das diretrizes propostas pela BNCC. E a grande mensagem difundida é a do desenvolvimento de competências correlatas por meio da interdisciplinaridade (a terminologia interdisciplinaridade empregada neste trabalho diz respeito a disciplinas da área de matemática, como, por exemplo, geometria sintética e geometria analítica). Para isto, a prática docente naturalmente se inclina para mudanças e estas partem de novas sugestões.

No Apêndice deste trabalho são apresentadas as resoluções propostas nos gabaritos das provas de qualificação do PROFMAT, a fim de possibilitar ao leitor o entendimento das linhas de resolução por meio da geometria sintética. Percebe-se que em grande parte dos exercícios, tanto uma resolução como a outra, exigem do estudante certo grau de visualização de entes geométricos, sejam eles planos ou espaciais e também algébricos. A partir do conhecimento de ambos, ele pode definir com qual situação se sente mais confortável.

Por fim, espera-se que este trabalho de alguma forma possa transformar o leitor e contribuir em sua prática pedagógica ou mesmo na ampliação de seu ferramental matemático.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEZERRA, L. H, SILVA, I. P. C. **Geometria Analítica**. 2. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.

BORBA, M. C. et al. **Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 15 de setembro de 2019.

CONSTRUÇÕES Geométricas. 2008. Produção: IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) – PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio). Disponível em: <<https://impa.br/ensino/programas-de-formacao/linha-do-tempo-dos-cursos/segundo-modulo-de-2008/>>. Acesso em: 12/08/2019.

D'AMBROSIO, B. S. **Como Ensinar Matemática Hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSALF, L. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

FALCÃO, Ana Kelly Nogueira; DIAS, Mônica Souto da Silva. **A Geometria Analítica como Método de Resolução de Problemas**. 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012. Disponível em: <<https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/685/submission/director/685.pdf>>. Acesso em: 03/02/2020.

FALCÃO, Ana Kelly Nogueira. **A Geometria Analítica como Método de Resolução de Problemas Geométricos no Contexto do Ensino Médio**. 2012. 59f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Câmpus Campos-Centro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. 2012.

GEOMETRIA Analítica Plana. 2011. Produção: IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) – PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio). Disponível em: <<http://video.impa.br/2014/papmem-janeiro-de-2011/>>. Acesso em: 08/08/2019.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 7: Geometria Analítica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

JOHN, Gilberto Obando Zapata; CÓRDOBA, Jairo Munera. **Las Situaciones Problema como Estrategia para la Conceptualización Matemática**. Revista Educación y Pedagogía (CIEP) – ISSN 01217593 – v. XV – n. 35 – 185-199, 2003.

JÚNIOR, J. L. V. **A Geometria Analítica como Conteúdo do Ensino Secundário: Análise de Livros Didáticos Utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM.** Minas Gerais: Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, 2013. 106f. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

LACERDA, A. C. T. **Aplicações da geometria analítica na resolução de problemas.** Paraíba: Universidade Federal da Paraíba - UFPB, 2015. 98 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

LEITE, W. J. de S. **Uma abordagem de problemas da geometria plana do ponto de vista da geometria analítica.** Maranhão: Universidade Federal do Maranhão - UFMA, 2018. 58 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

LIMA, L. L.; CARVALHO, C. P. C.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, A. C. A **Matemática do Ensino Médio: Volume 1.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2005.

MELLO, D. A. DE; WATANABE, R. G. **Vetores e uma iniciação à Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzetti. **Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio.** Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB. n. 38, jul. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/download/1612/806>

PONTES, E. A. S. Os Quatro Pilares Educacionais no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática. Revista Iberoamericana De Tecnología En Educación Y Educación En Tecnología, (24), e02, 2019. DOI: <https://doi.org/10.24215/18509959.24.e02>

PROBLEMA do tesouro. 2006. **Unicamp. Exercício de aula:** Primeiro semestre de 2006. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~claudina/ma1412006/Tesouro.html>. Acesso em: 28/09/2019.

SHULMAN, Lee S.. **Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma.** Cadernos Cenpec | Nova série, [S.l.], v. 4, n. 2, jun. 2015. ISSN 2237-9983. Disponível em: <http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/293>. Acesso em: 03 jun. 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v4i2.293>.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica.** 1. ed. São Paulo: Makron Books, 1995.

TERRADAS, Rodrigo Donizete. **A Importância da Interdisciplinaridade na Educação Matemática.** Revista FAED (Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação - UNEMAT – Cáceres) – v. 14 – n. 16 – 95-114 – 2011.

VALERIO, A. A. V. e SOUZA, L. F. R. **Ensino da geometria analítica com o uso do software Geogebra.** Revista Eletrônica de Educação e Ciência (REEC) – ISSN 2237-3462 – v.03 – n. 01 – 8f., 2013.

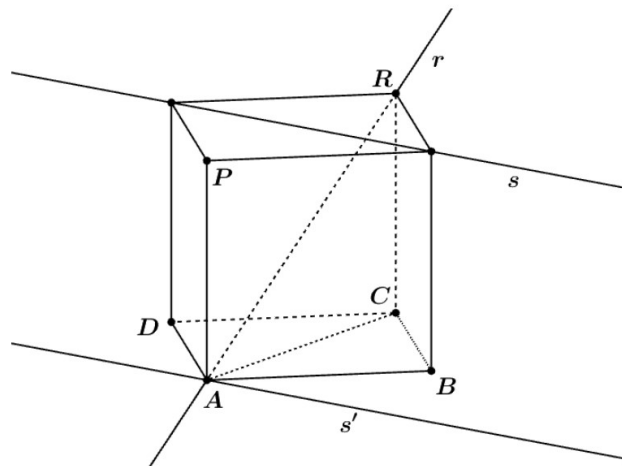
WAGNER, Eduardo. **Sobre o ensino de Geometria Analítica.** Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n.41, p.17-22. quadrim. 1999.

6 APÊNDICE

6.1 ENQ 2018/1 (PROBLEMA 01 - ADAPTADO)

Solução:

De acordo com a definição relembrada no enunciado, precisamos determinar o ângulo entre r e s' , com s' paralela a S e concorrente com r . Ainda de acordo com o enunciado, pode-se escolher qualquer reta s' com tais propriedades. Vamos, então, tomar s' como sendo a paralela a S que concorre com r em um dos vértices do cubo, que chamaremos de A , conforme a figura abaixo.



Note que s' é perpendicular a AP , pois está contida no plano da face da base do cubo, que é perpendicular à aresta vertical AP . Além disso, como S é paralela à diagonal BD da face $ABCD$ do cubo, s' também é paralela a BD ; por fim, como BD é perpendicular a AC , s' é também perpendicular a AC .

Assim, como s' é perpendicular a (ACP) , que é o mesmo plano (ACR) , que por sua vez contém r . Logo, s' é perpendicular a r e, com isso, o cosseno do ângulo entre as retas é 0.

Solução Alternativa:

Temos que S é perpendicular a PR , pois as diagonais de uma face do cubo são perpendiculares. Além disso, S está contida no plano da face $PQRS$ e AP é perpendicular a esta face, logo S é perpendicular a AP . Com isso, S é perpendicular ao plano que contém o quadrilátero $ACRP$.

Então, S é ortogonal a toda reta em $ACRP$, logo, ortogonal a r . Assim, sendo E o ponto em que S intersecta $ACRP$ e r' a paralela a r passando por E , temos que S e r' formam um ângulo de 90° uma com a outra.

6.2 ENQ 2017/2 (PROBLEMA 02 - ADAPTADO)

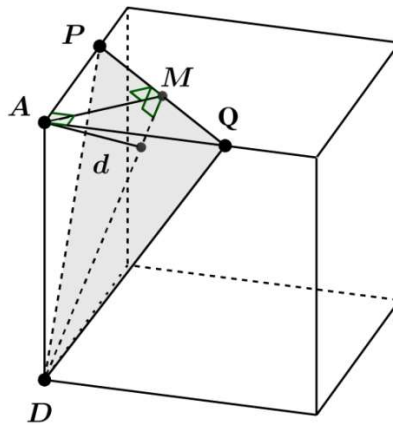
Solução:

(a) Como $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2$ e como PAQ é um triângulo retângulo, temos

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

Logo $\overline{PQ} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Como os triângulos DAQ e DAP são congruentes (caso LAL), tem-se $\overline{DP} = \overline{DQ}$, logo o triângulo DPQ é isósceles de vértice D . Tomando o ponto médio M do lado PQ deste triângulo, tem-se então que DM é a altura de DPQ relativa a PQ .



Como o triângulo APQ é isósceles de vértice A , temos também que AM é altura de APQ , logo $\widehat{AMP} = 90^\circ$. Com isso,

$$\overline{AM} \cdot \overline{PQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{AM} \cdot 2\sqrt{2} &= 2 \cdot 2 \\ \overline{AM} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

O triângulo DAM é retângulo, logo

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AM}^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 = 11$$

Com isso, $\overline{DM} = \sqrt{11}$ e

$$\text{Área}(DPQ) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{22}.$$

(b) Sendo d a distância do vértice A ao plano que contém o triângulo DPQ , o volume V do tetraedro $DPQA$ pode ser calculado de duas formas:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(DPQ) \cdot d$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(APQ) \cdot \overline{DA}$$

(na primeira, tomamos DPQ como base e, na segunda, APQ).

Com isso,

$$\text{Área}(DPQ) \cdot d = \text{Área}(APQ) \cdot \overline{DA}$$

Como $\text{Área}(DPQ) = \sqrt{22}$ e

$$\text{Área}(APQ) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

temos

$$\sqrt{22} \cdot d = 2 \cdot 3$$

Logo

$$d = \frac{6}{\sqrt{22}}.$$

Solução Alternativa do Item (b): O segmento d é a altura do triângulo retângulo DAM . Os catetos medem $\overline{DA} = 3$, $\overline{AM} = \sqrt{2}$, e a hipotenusa mede $\overline{DM} = \sqrt{11}$. Calculando a área de duas formas diferentes, obtemos a relação:

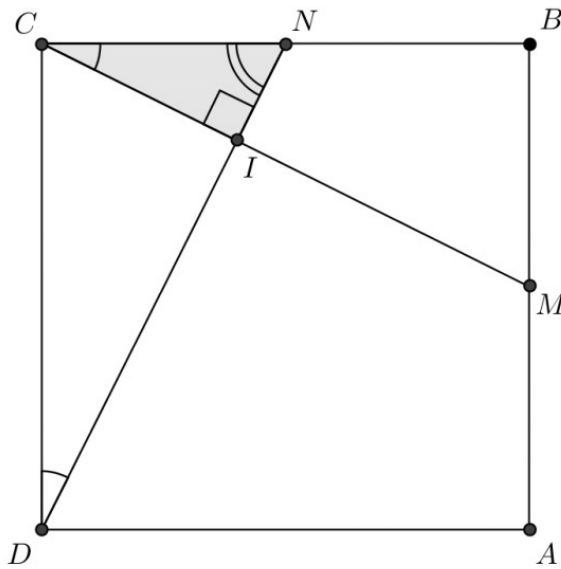
$$\overline{DM} \cdot d = \overline{DA} \cdot \overline{AM},$$

Chegamos a $\sqrt{11} \cdot d = 3\sqrt{2}$, o que nos leva a $d = \frac{3\sqrt{22}}{11} = \frac{6}{\sqrt{22}}$.

6.3 ENQ 2016/2 (PROBLEMA 03)

Solução:

Observe que os triângulos retângulos NCD e MBC são congruentes pelo caso LAL. Consequentemente, temos $\angle NCI \equiv \angle CDN$. Como $\angle CDN$ e $\angle CND$ são complementares, temos então que $\angle NCI$ e $\angle INC$ também o são, logo o triângulo NIC é retângulo de hipotenusas CN .



Os triângulos NIC e MBC têm um ângulo em comum e cada um destes triângulos possui um ângulo reto. Assim, eles têm dois ângulos congruentes e, por isso, são semelhantes. A razão de semelhança entre os triângulos NIC e MBC é dada por

$$k = \frac{\overline{CN}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Com isso,

$$\frac{\text{Área}(NIC)}{\text{Área}(MBC)} = k^2 = \frac{1}{5},$$

logo

$$\text{Área}(NIC) = \frac{1}{5} \text{Área}(MBC),$$

e, como

$$\text{Área}(MBC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

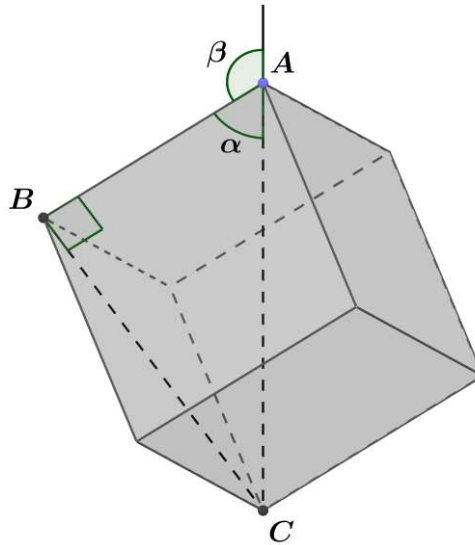
temos

$$\text{Área}(NIC) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

6.4 ENQ 2016/1 (PROBLEMA 04)

Solução:

Denotando o vértice por onde o cubo está pendurado por A , o vértice oposto por C e um dos vértices das arestas adjacentes à corda por B , como na figura, temos que o ângulo β procurando é suplementar ao ângulo $\alpha = \widehat{BAC}$.



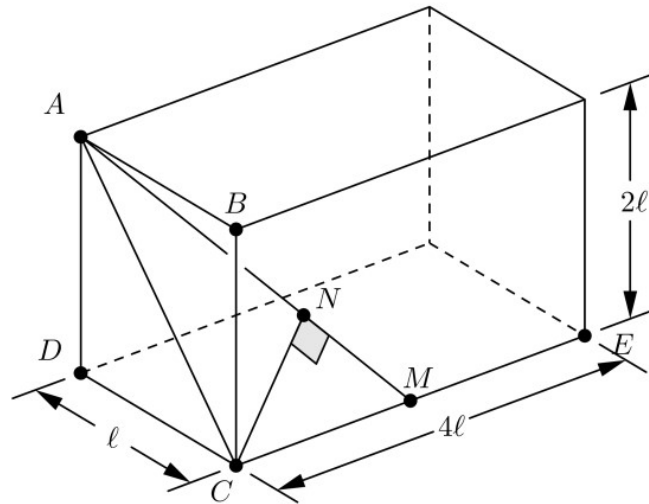
Denotando por a a aresta do cubo, temos $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = a\sqrt{3}$. Como BC é perpendicular a AB , o triângulo ABC é reto em B , logo $\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Como α e β são suplementares, temos que $\cos \beta = -\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solução alternativa: Considere o ângulo $\gamma = \widehat{ACB}$. Como $\operatorname{sen} \gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\beta = \gamma + 90^\circ$ (a medida de um ângulo externo do triângulo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele), temos:

$$\beta - 90^\circ = \gamma \Rightarrow \operatorname{sen}(\beta - 90^\circ) = \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6.5 ENQ 2015/2 (PROBLEMA 05)

Solução:



Inicialmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC , calculamos o comprimento do segmento AC :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \ell^2 + (2\ell)^2$$

Daí segue que $\overline{AC} = \ell\sqrt{5}$.

Analisando agora o triângulo ACM , concluímos que ele é retângulo em C pois o segmento MC é perpendicular à face $ABCD$ do paralelepípedo e, portanto, perpendicular ao segmento AC contido nesta face.

Ainda observando o triângulo retângulo ACM , o segmento CN é perpendicular à hipotenusa AM pois CN representa a distância de C à reta AM e, por definição, distância de ponto à reta é sempre perpendicular à reta.

Então, usando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{AM}^2 = (2\ell)^2 + (\ell\sqrt{5})^2,$$

e assim

$$\overline{AM} = 3\ell.$$

Usando que o produto da hipotenusa pela altura correspondente é igual ao produto dos catetos temos que:

$$\overline{AM} \cdot \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \overline{CM},$$

substituindo os valores correspondentes temos que:

$$3\ell \cdot \overline{CN} = \ell\sqrt{5} \cdot 2\ell,$$

logo,

$$\overline{CN} = \frac{2\ell\sqrt{5}}{3}.$$

6.6 ENQ 2012/2 (PROBLEMA 06)

Solução:

(a) O ponto P deve estar no plano paralelo a ABC a 4 unidades de distância de A , pois esse é o plano dos pontos equidistantes de A e D . Ao mesmo tempo, ele deve estar na reta perpendicular ao plano determinado por ABC que passa pelo centro H de ABC , pois essa reta é o conjunto de pontos que equidistam de A , B e C .

A distância de H a qualquer um dos vértices do triângulo é igual a 2a qualquer um dos vértices do triângulo é igual a $2\sqrt{3}$ (o que pode ser obtido de vários modos). Como AHP é triângulo-retângulo, de catetos $AH=2\sqrt{3}$ e $HP=4$, e hipotenusa $AP=4$, então $R^2 = 12 + 16 = 28$, logo $R=2\sqrt{7}$.

(b) Chame de Q o ponto do plano de ABC tal que $AQBC$ é paralelogramo. O ângulo procurado é o ângulo $\alpha = \widehat{QBD}$. Todos os lados do triângulo QBD são conhecidos: (i) $BD=10$, porque BAD é retângulo com catetos iguais a 6 (o lado do triângulo ABC) e 88 (a altura do ponto D); (ii) $BQ = AC = 6$; (iii) $QD = 10$ (pela mesma razão de (i)). Então, pela Lei dos Cossenos,

$$10^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos \alpha,$$

de onde sai $\cos \alpha = 0,3$.