

**UFRRJ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL – PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO**

**Análise de Erros em Resolução de Problemas**  
**Envolvendo Sólidos Geométricos: uma experiência em**  
**uma turma de segundo ano do Ensino Médio da rede**  
**pública**

**Marcos Vinícius Silva da Costa**

**2020**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL – PROFMAT**

**ANÁLISE DE ERROS EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
ENVOLVENDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA EXPERIÊNCIA EM  
UMA TURMA DE SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO DA REDE  
PÚBLICA**

**MARCOS VINÍCIUS SILVA DA COSTA**

*Sob a Orientação da Professora*

**Aline Mauricio Barbosa**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Agosto de 2020

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837a Costa, Marcos Vinícius Silva da, 1991-  
Análise de Erros em Resolução de Problemas  
Envolvendo Sólidos Geométricos: uma experiência em uma  
turma de segundo ano do Ensino Médio da rede pública  
/ Marcos Vinícius Silva da Costa. - Seropédica, 2020.  
127 f.: il.

Orientadora: Aline Mauricio Barbosa.  
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural  
do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2020.

1. Análise de erros. 2. resolução de problemas. 3.  
sólidos geométricos. 4. materiais manipuláveis. 5.  
Ensino Médio. I. Barbosa, Aline Mauricio, 1981-,  
orient. II Universidade Federal Rural do Rio de  
Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional - PROFMAT III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**MARCOS VINÍCIUS SILVA DA COSTA**

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestre**, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 10/08/2020

**Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020**, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

Aline Mauricio Barbosa. Dr.<sup>a</sup> UFRRJ (Orientadora, Presidente da Banca)

Orlando dos Santos Pereira. Dr. UFRRJ

Aginaldo da Conceição Esquinca. Dr. UFRJ



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, Pai de nosso Senhor Jesus Cristo, autor e consumidor da minha fé, por ter me abençoado com mais esta conquista.

Agradeço a minha esposa Lorrany, por todo apoio que me deu e por sempre ter entendido minha ausência aos finais de semana, férias e feriados, para poder me dedicar ao máximo ao programa.

Agradeço a minha mãe, a meu pai, a meu irmão, à sogra, ao sogro, ao cunhado, que me ajudaram, dando força e estimulando a nunca desistir.

Agradeço a minha prima Livian e a meu primo Gustavo, por terem me ajudado na confecção do *abstract*.

Agradeço a minha orientadora, professora e doutora Aline Mauricio Barbosa, por sempre acreditar em mim, dizendo que daria tudo certo.

Agradeço aos meus amigos de turma, em especial ao Maia, ao Ramiro e ao Robson, por terem me ajudado nos momentos de maior dificuldade com determinados assuntos.

Agradeço aos meus professores, pelo trabalho prestado durante cada período de convivência.

Agradeço ao meu amigo, professor e mestre Alexandre Amândula Bandeira, o qual fui seu estagiário, por ter me impulsionado a participar do PROFMAT.

Agradeço à Valéria, à Cris, à Vanuza, à Kátia, à Érica e a toda direção do CIEP 435, pela realização deste trabalho e a todos os alunos que participaram do mesmo.

Agradeço a todos que, de alguma maneira, me ajudaram e oraram por mim, para que eu obtivesse sucesso.

Agradeço a CAPES, pelo aporte financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.*

## RESUMO

COSTA, Marcos Vinícius Silva da. **Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos**: uma experiência em uma turma de segundo ano do Ensino Médio da rede pública. 2020. 127 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2020.

Este trabalho abordou dificuldades na resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos, por alunos do Ensino Médio. A justificativa desta pesquisa se deve ao fato que a Geometria Espacial está presente no cotidiano, embora, no ambiente escolar, sejam bem conhecidas as dificuldades no ensino-aprendizagem desta área. Por isso, a escola deve preparar os alunos para a resolução de problemas de Geometria Espacial, além de outras áreas da Matemática. Mediante isso, o objetivo geral foi analisar os principais tipos de erros, cometidos por alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio da rede pública, na resolução de problemas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos. A pesquisa foi embasada nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em trabalhos de Polya, Dante, Cury, dentre outros autores. Para a turma selecionada, foi aplicado primeiramente um questionário diagnóstico, com problemas sobre áreas de superfícies e volumes de sólidos geométricos. Depois foram realizadas atividades com materiais manipuláveis, envolvendo planificações e montagem de sólidos geométricos, onde foram trabalhados aspectos conceituais. Após isso, os alunos resolveram, em grupos, três listas de problemas sobre os conteúdos já mencionados. Posteriormente, foi usada a metodologia de análise de erros, segundo Cury, para analisar as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução dos problemas propostos. Eles também escreveram comentários, avaliando as atividades realizadas. Os principais resultados foram: predominaram respostas incorretas ou parcialmente corretas, com boa parte delas em branco ou sem fundamento. Além disso, houve vários equívocos na interpretação de enunciados, erros aritméticos e erros conceituais, envolvendo confusões de grandezas ou de unidades de medidas. Mesmo com essas dificuldades, com essa pesquisa foi possível compreender a importância de se observar os erros cometidos pelos alunos como importantes aliados para se repensar a prática docente e para gerar novas experiências e oportunidades de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Análise de erros; resolução de problemas; sólidos geométricos; materiais manipuláveis; Ensino Médio.

## ABSTRACT

COSTA, Marcos Vinícius Silva da. **Analysis of mistakes in resolution of problems involving geometrical solids**: an experience in a second degree class of High School from public network. 2020. 127 p. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2020.

This work approached the difficulties to solve problems involving geometrical solids by High School Students. The explanation for this research occurs because of the fact that Space Geometry is present in daily; although, at school environment, the learning difficulties in this area it's well-known. For this reason, the school must prepare students for other areas from Mathematics. As shown, the general objective was analyze the principal types of mistakes committed by students from a second degree class of High School from public Network in the resolution of surface areas and geometrical solids bulk problems. The research was based on the National Curricular Parameters and on Polya's, Dante's and Cury's works, among other authors. For a select class, was implemented a diagnosis questionnaire, with questions about surface areas and geometrical solids bulk. After that, were executed activities with manipulate materials, involving planning and installation of geometrical solids, which were worked known aspects. After the students solved, in groups, three lists with conceptual problems about contents already mentioned. Furthermore, the methodology of analyses mistakes was used, according to Cury, to analyze the difficulties found by students in the resolution proposed problems. They also wrote comments, evaluating the activities performed. The main results were: wrong answers and partial rights answers was predominant and a considerable part of the results with no answers or without a fundament. Besides that, there were many mistakes on interpretation of statement, arithmetic's and conceptual mistakes, involving confusion in quantities or unit of measure. Even though the difficulties, with this research, it was possible to understand the value of observe mistakes that were committed by students as an important allied to rethink the teaching practice and for conceive new experiences and learning opportunities.

**Keywords:** Analysis of mistakes; resolution of problems; geometrical solids; manipulate material; High School.



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>14</b>
2.1 O ensino de Matemática e o papel do professor .....	14
2.2 Metodologia de resolução de problemas no ensino-aprendizagem de Matemática.....	16
2.3 O uso de materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem de Matemática .....	24
2.4 Metodologia de análise de erros no ensino-aprendizagem de Matemática .....	27
2.5 Alguns trabalhos sobre a análise de erros em resolução de questões de Geometria.....	30
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>33</b>
3.1 Questionário Diagnóstico .....	34
3.2 Realizações de várias atividades .....	38
3.2.1 Atividade 1 .....	38
3.2.2 Atividade 2 .....	39
3.2.3 Atividades 3, 4 e 5 .....	41
3.2.3.1 Exercícios 1 .....	42
3.2.3.2 Exercícios 2 .....	45
3.2.3.3 Exercícios 3 .....	50
3.2.4 Elaboração de comentários pelos alunos.....	52
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>54</b>
4.1 Resultados obtidos durante a execução da pesquisa .....	54
4.1.1 Resultados obtidos no Questionário Diagnóstico .....	54
4.1.2 Resultados obtidos nos Exercícios 1.....	55
4.1.3 Resultados obtidos durante os Exercícios 2.....	56
4.1.4 Resultados obtidos durante os Exercícios 3.....	57
4.2 Análise e classificação dos tipos de erros .....	57
4.2.1 Análise e classificação dos tipos de erros no Questionário Diagnóstico.....	58
4.2.2 Análise e classificação dos tipos de erros no Exercício 1.....	66

4.2.3 Análise e classificação dos tipos de erros no Exercício 2.....	73
4.2.4 Análise e classificação dos tipos de erros no Exercício 3.....	81
4.3 Discussões e reflexões sobre a análise dos erros encontrados .....	87
4.4 Comentários do professor sobre as atividades realizadas .....	91
4.5 Comentários dos alunos sobre as atividades realizadas .....	93
4.5.1 Comentário 1 .....	94
4.5.2 Comentário 2 .....	95
4.5.3 Comentário 3 .....	96
4.5.4 Comentário 4 .....	97
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>99</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>102</b>
<b>ANEXO A – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO .....</b>	<b>107</b>
<b>ANEXO B – ATIVIDADE ENVOLVENDO MONTAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS .</b>	<b>109</b>
<b>ANEXO C – EXERCÍCIOS 1 .....</b>	<b>111</b>
<b>ANEXO D – EXERCÍCIOS 2 .....</b>	<b>114</b>
<b>ANEXO E – EXERCÍCIOS 3.....</b>	<b>116</b>
<b>ANEXO F – CARTA DE ANUÊNCIA.....</b>	<b>117</b>
<b>ANEXO G – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (ADULTOS).....</b>	<b>118</b>
<b>ANEXO H – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO .....</b>	<b>122</b>
<b>ANEXO I – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (RESPONSÁVEIS)</b> <b>.....</b>	<b>124</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que a Geometria é uma área da Matemática que pode ser aplicada em diversos setores do conhecimento humano. Entretanto, no meio escolar, são bem conhecidas as dificuldades no ensino-aprendizagem dessa área.

Por exemplo, ao longo da experiência docente do autor desta dissertação, foi observado que vários alunos chegam ao Ensino Médio com grandes dificuldades de visualização geométrica. Ao abordar algum assunto novo na área de Geometria, na maioria das vezes se faz necessária uma breve revisão de conteúdos geométricos anteriores. Essa revisão se deve ao fato que os estudantes envolvidos “esqueceram” esses conteúdos anteriores ou que tais conteúdos não foram bem compreendidos por eles.

Além disso, observa-se que alguns livros didáticos de Matemática, até hoje, apresentam os tópicos de Geometria no final, o que pode acarretar, em alguns casos, na não abordagem dessa área temática durante o ano letivo. Vários colegas professores relatam também que não se sentem plenamente preparados para trabalhar com Geometria em sala de aula. Por conta disso, o aluno acaba ficando com uma certa defasagem de conhecimento dentro dessa área, o que implica na dificuldade de avançar dentro da mesma.

Este trabalho abordou as dificuldades na resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos, por alunos do Ensino Médio. A existência de dificuldades no ensino-aprendizagem de Geometria, apontada nos parágrafos anteriores, motivou a escolha desse tema.

A justificativa desta pesquisa decorreu do fato que a Geometria Espacial está presente na vida de qualquer indivíduo. Por exemplo, mesmo que ele não se torne um engenheiro ou um arquiteto, precisará se preocupar, em algum momento de sua vida, em providenciar materiais para a construção, para a reforma ou para a manutenção de sua casa. A quantidade de materiais necessários para essa tarefa, de modo a evitar falta ou desperdício dos mesmos, dependerá de conhecimentos de Geometria Espacial. Por essas e outras razões, a escola tem o papel de preparar

esse indivíduo para a resolução de problemas de Geometria Espacial, além de outras áreas da Matemática.

Entretanto, ao lecionar para turmas do ensino básico regular, este professor-pesquisador também notou que alguns alunos possuem grande dificuldade no que se diz respeito à resolução de problemas. George Polya (1949, apud KRULIK, S.; REYS, R. E., 1998) afirmou que resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Para isso, George Polya (1978) recomendou algumas técnicas que facilitam a resolução de problemas, as quais serão abordadas na dissertação.

Essas técnicas são de grande valia para o ensino de Matemática, pois, ao apresentar um problema bem elaborado ao aluno, este poderá se sentir desafiado a resolvê-lo. Com isso, ele poderá pensar em possíveis caminhos para solucioná-lo, de uma forma prática. Pozo e Echeverría (1998) afirmaram que a solução de problemas se baseia na apresentação de situações que exijam dos alunos um esforço para buscar suas próprias respostas.

A ideia é que o educando possa se sentir mais motivado a resolver outros tipos de problemas e a se aprofundar no estudo de Geometria Espacial. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) defendem e apresentam propostas para o uso de resolução de problemas no ensino de Matemática.

Uma coisa que deve ficar clara é que nem sempre um aluno será bem sucedido na resolução de um problema matemático. Para os PCN, o erro não tem como ser evitado. Em diversas ocasiões, ele pode ser interpretado como um meio para o aluno buscar o acerto. “Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução” (BRASIL, 2007, p. 41). Os PCN ainda sugerem que, diante dos erros dos alunos, o professor identifique as suas causas, reflita sobre elas e use essa oportunidade para construir, junto com a turma, uma trilha pedagógica que os auxilie em sua aprendizagem.

Radatz (1980) fez um breve estudo sobre a origem dos erros dentro do método de ensino-aprendizagem. Helena Cury (2007, apud CURY; E. BISOGNIN; V.

BISOGNIN, 2009) explicou sobre a metodologia de análise de erros em Matemática e explicou as etapas de análise desses erros.

Com base nesses trabalhos, a presente dissertação defende a análise de erros cometidos pelos alunos durante a resolução de problemas como uma metodologia de investigação, que permite ao professor refletir sobre sua prática docente e, num segundo momento, planejar estratégias de ensino para suplantar essas dificuldades.

Mediante o exposto, esta pesquisa teve a seguinte questão norteadora: “Quais são os principais tipos de erros, cometidos por alunos de uma turma do Ensino Médio noturno, na resolução de problemas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos?”.

Sendo assim, o objetivo geral desta pesquisa foi analisar os principais tipos de erros, cometidos por alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio da rede pública, na resolução de problemas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos. Os objetivos específicos desta pesquisa foram:

- Identificar conhecimentos prévios dos alunos pesquisados sobre áreas de superfícies e volumes de sólidos geométricos;
- Esclarecer aos alunos a diferença entre figuras planas e espaciais, com auxílio de materiais manipuláveis;
- Explicar aos alunos como encontrar áreas de superfícies e volumes de determinados sólidos geométricos;
- Usar técnica de resoluções de problemas e materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos;
- Discutir os principais tipos de erros cometidos por esses alunos, na resolução dos problemas propostos.

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho, foi usada a metodologia de pesquisa exploratória, com abordagem qualitativa. Os procedimentos metodológicos envolveram uma pesquisa bibliográfica e uma pesquisa-ação com uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública.

Inicialmente foi aplicado um questionário diagnóstico, contendo problemas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos, para avaliar o conhecimento prévio dos participantes sobre o assunto.

Depois foram realizadas, na turma pesquisada, atividades com materiais manipuláveis, envolvendo planificações e montagem de sólidos geométricos, onde foram trabalhados aspectos conceituais. A escolha do uso de materiais manipuláveis nesta pesquisa se deve ao fato que vários pesquisadores defendem seus benefícios para o ensino-aprendizagem de Matemática e, especificamente, para a compreensão das formas geométricas. Por exemplo, Sarmiento (2012) afirmou que a utilização dos materiais manipuláveis oferece uma série de vantagens para a aprendizagem dos alunos. Dentre elas, ele comentou que o seu uso propicia e motiva a aprendizagem, pois desperta a curiosidade e tem potencial lúdico, favorece a interação com o professor e com os colegas e facilita as descobertas das relações matemáticas ligadas ao material.

Após isso, os alunos participantes da pesquisa formaram grupos, para resolverem, de forma colaborativa, três listas de problemas envolvendo áreas de superfícies e volumes de sólidos geométricos. Ao final, foi usada a metodologia de análise de erros, segundo Cury (2007, apud CURY; E. BISOGNIN; V. BISOGNIN, 2009), para refletir sobre as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução dos problemas propostos e foi solicitado aos alunos que escrevessem comentários sobre o que eles acharam das atividades.

Esta dissertação foi dividida em cinco capítulos, conforme segue:

No Capítulo 1, ou seja, neste Capítulo foi feita uma breve introdução do trabalho.

No Capítulo 2, foi realizada a revisão de literatura desta pesquisa. Mais precisamente, dissertou-se sobre alguns autores que abordaram a questão do ensino da Matemática e o papel do professor nos dias atuais, a metodologia de resolução de problemas, o uso de materiais manipuláveis no ensino de Matemática e a metodologia de análise de erros.

No Capítulo 3, foram descritos o tipo de metodologia adotado na pesquisa, o público-alvo, o detalhamento dos procedimentos metodológicos com os alunos participantes e os instrumentos de pesquisa.

No Capítulo 4, foram apresentados os resultados obtidos durante a pesquisa, além de discussões e reflexões sobre eles, à luz da metodologia de análise de erros. Nessas discussões, constaram as reflexões do professor-pesquisador e a avaliação das atividades por alguns alunos que participaram da pesquisa.

No Capítulo 5, constaram as considerações finais deste trabalho. Nesse capítulo foi relatado se os objetivos foram cumpridos ou não e foram apresentadas propostas para futuros desdobramentos desta pesquisa e as reflexões do autor sobre o trabalho realizado.

Após esses cinco capítulos, houve a apresentação das referências e da bibliografia consultada, mas não citada na pesquisa, além dos anexos.

Esta dissertação gerou como produto uma sequência didática, a saber, a sequência de atividades descritas no Capítulo 3, que poderá ser usada por outros professores de Matemática do Ensino Médio Regular. Também se incorpora a este produto a sequência de procedimentos adotados na análise de erros na resolução dos problemas geométricos abordados, cujo exemplo foi apresentado no Capítulo 4.

A pesquisa realizada também pode servir de subsídio para discussões sobre o uso pedagógico da metodologia de análise de erros no ensino-aprendizagem de Geometria, em cursos de formação inicial ou continuada de professores de Matemática.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

Esta revisão de literatura foi dividida em cinco seções. Na seção 2.1, será feita uma breve discussão sobre o ensino de Matemática e o papel que o professor exerce nele. Na seção 2.2, será discutida a metodologia de resolução de problemas e como ela pode ser utilizada como ferramenta pedagógica no ensino de Matemática. Na seção 2.3, será abordada a importância do uso de materiais manipuláveis no ensino da Matemática. Na seção 2.4, será discutida a metodologia de análise de erros e o seu papel no processo ensino-aprendizagem. Na seção 2.5, serão apresentados alguns trabalhos que abordaram, em suas pesquisas, a metodologia de análise de erros em Geometria.

### 2.1 O ensino de Matemática e o papel do professor

Sempre foi um desafio para o professor de Matemática lecionar a disciplina da forma mais agradável possível aos alunos. Alunos estes que, com o decorrer do tempo, chegam ainda mais desmotivados para as aulas. Gerdes (1983, apud SCOLARO, 2008) disse:

A matemática é percebida, por muitos indivíduos, como sendo uma disciplina abstrata e totalmente separada das situações cotidianas, pois, muitos pensam que a matemática é uma ciência abstrata, muito difícil de aprender e desligada do cotidiano do homem. (p. 11)

Talvez esta desmotivação, descrita acima, tenha uma ligação com alguma insatisfação por algum resultado negativo obtido em determinado momento.

O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem. (BRASIL, 1997, p. 15)

Por conta disso, em vários casos, o professor procura se reinventar, a fim de buscar mais a atenção de seus alunos e, com isso, tentar motivá-los a aprender a Matemática por vontade própria e não apenas pelo simples interesse por um benefício qualquer.



Cabe, aqui, fazer uma diferenciação entre interesse e motivação. As coisas que interessam, e por isso prendem a atenção, podem ser várias, mas talvez nenhuma possua a força suficiente para conduzir à ação, a qual exige esforço de um motivo determinante da nossa vontade. O interesse mantém a atenção, no sentido de um valor que deseja. O motivo, porém, se tem energia suficiente, vence as resistências que dificultam a execução do ato. (MORAES; VARELA, 2007, p. 6)

Como citado anteriormente, nota-se que existe uma diferença entre interesse e motivação. A motivação é algo que vem do interior da pessoa. O simples fato de estar interessado em algo, não significa estar motivado a consegui-lo. Por exemplo: todos os alunos estão interessados a conseguir uma aprovação no fim do ano letivo. Agora, será que todos estão motivados a aprender, para conseguirem este sucesso no final? A motivação é o que impulsiona este desejo e, no caso do aluno, é algo indispensável para o ato de estudar e aprender.

Uma forma de auxiliar no processo ensino-aprendizagem dos alunos é estimular a realização de trabalhos coletivos entre eles, conforme recomendam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

Trabalhar coletivamente, por sua vez, supõe uma série de aprendizagens, como: I. Perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso; II. Saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro; III. Discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias; IV. Incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender. Essas aprendizagens só serão possíveis na medida em que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias. (BRASIL, 1997, p. 31)

Sendo assim, pode se concluir então que a promoção de atividades em grupo possibilita que o aluno desenvolva e exercite diversas habilidades ao mesmo tempo que estuda um determinado conteúdo ou disciplina, além de arquitetar uma permuta de opiniões entre colegas que pensam de forma diferente com o objetivo de alcançar o mesmo bem para todos.

Considerando a experiência docente deste professor-pesquisador, percebe-se que vários professores costumam buscar esse trabalho coletivo em sala de aula e, por algumas vezes, acabam não conseguindo, provavelmente por uma questão de timidez dos alunos ou também por alguma antipatia que possa ocorrer entre eles.

Sobre o item III da citação anterior, será realizada a seguinte ponderação: em alguns momentos da experiência docente, este pesquisador já notou nos semblantes de alunos que determinada atividade não foi concluída com o sucesso esperado. Houve várias situações em que foi solicitado que alunos apresentassem suas dúvidas, para que as mesmas pudessem ser debatidas em sala. Entretanto, nessas ocasiões, predominou o silêncio coletivo. Talvez este silêncio possa ser explicado pela timidez ou pela vergonha que o estudante tenha de perguntar algo que, para ele, seja desnecessário. Além disso, alguns temem ser alvo de chacota pelos colegas de classe. Entretanto, os professores não devem desanimar diante desses obstáculos.

Perrenoud (2001) afirmou que o papel do professor deve estar em constante evolução. Por conta disso, ele deverá ser capaz de:

Analisar situações complexas, tomando como referência diversas formas de leitura; II. Optar de maneira rápida e refletida por estratégias adaptadas aos objetivos e às exigências éticas; III. Escolher, entre vários conhecimentos, técnicas e instrumentos, os meios adequados, estruturando-os na forma de abordagens; IV. Adaptar rapidamente seus projetos em função da experiência; analisar de maneira crítica suas ações e seus resultados; V. Aprender, por meio de avaliação contínua, durante toda a sua carreira. (p. 12)

Quando se comenta a respeito de avaliação contínua, como o próprio nome sugere, é algo que está em constante evolução e, portanto, não é algo que se finda. Este processo de avaliação é algo que deve ocorrer frequentemente entre professor e os alunos, onde o professor está sempre em observação. Esta observação tem por objetivo constatar em que grau de evolução de aprendizagem se encontra o aluno, para que ele possa traçar um plano com o propósito de tornar mais agradável esse processo.

## **2.2 Metodologia de resolução de problemas no ensino-aprendizagem de Matemática**

É interessante iniciar este assunto dizendo que as habilidades estão em constante mutação. Isso significa dizer que uma pessoa não possui o conhecimento estático, mas está em constante aprendizado.

Perrenoud (1999) informou que a habilidade se trata de uma sequência de modos operatórios, de induções e deduções, onde são utilizados esquemas de alto nível. Portanto, para o autor, a habilidade é uma série de procedimentos mentais que o indivíduo aciona para resolver uma situação real, onde ele precise tomar uma decisão.

Para Smole e Diniz (2001), as habilidades escolares de ler, escrever e resolver problemas em Matemática são básicas para aprender qualquer coisa, mas tem sido tratada de forma isolada ou são pouco consideradas, especialmente no que diz respeito à aprendizagem em Matemática.

Segundo os PCN,

Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.

Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução.

O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe. (BRASIL, 1997, p. 33)

Ressalta-se que exercícios matemáticos e problemas matemáticos, embora pareçam semelhantes, são situações totalmente distintas. No exercício, não existe uma preocupação com o procedimento utilizado, pois ele preza pela repetição e prática. Por isso, com o passar do tempo, acaba se tornando algo automático, como por exemplo, a aplicação de determinados valores em uma fórmula qualquer. Já o problema matemático consiste em uma situação em que podemos incluir vários conteúdos dentro de um contexto e sua solução não é produzida de forma mecânica, ou seja, não há uma fórmula pronta para resolvê-los.

Segue um exemplo de exercício matemático:

Sendo  $x$  um número real, determine seu valor em:  $\frac{x+3}{2} = 15$ .

Neste caso, basta utilizar algumas propriedades algébricas e encontrar, como solução para  $x$ , o valor 27.

Segue um exemplo de um possível problema matemático:

A idade de João é 15 anos. Daqui a três anos, a metade da idade de Roberto, irmão de João, será a mesma idade que João possui atualmente. Qual a idade atual de Roberto?

Note neste caso que, antes de tudo, deve-se fazer uma compreensão do problema para focar em seu objetivo. Após isso, traça-se um plano e executa-se o mesmo. Por fim, deve-se verificar se o resultado encontrado será a solução. Esta estratégia utilizada na solução consiste na metodologia de resolução de problemas na visão de Polya (1978), que será citada mais à frente. Voltando ao problema, o objetivo é determinar a idade de Roberto. Esta idade será a incógnita, a qual será denominada “ $x$ ”. Passados três anos, a idade dele será “ $x+3$ ” e a metade desta será igual a 15. Assim pode-se escrever como  $\frac{x+3}{2} = 15$ . Este é o plano de resolução. A execução do mesmo consistirá nas aplicações, dentro da equação obtida, de propriedades algébricas. No fim, encontra-se o valor 27 para  $x$ . Para finalizar a resolução do problema, basta verificar se o valor encontrado é o correto. Verificação:  $27+3 = 30$ , que dividido por 2 resulta em 15.

Na visão de Dante (2010), existem seis tipos de problemas, a saber:

- I. **Exercícios de reconhecimento:** visam ao reconhecimento ou à lembrança de algum conceito ou fato matemático. Isto é, são exercícios trabalhados em sala de aula pelos professores com o intuito de fazer alguma revisão antes de iniciar algum conteúdo que necessite deste anterior.
- II. **Exercícios de algoritmo:** estes podem ser solucionados passo a passo. Tem como objetivo treinar a capacidade em aplicar algum algoritmo. Estes exercícios são aqueles que visam à fixação de um novo conteúdo lecionado pelo professor.
- III. **Problemas padrão:** são aqueles que não exigem estratégias, pois a solução está no próprio problema. O aluno só precisa transformar a linguagem usual em Matemática e reconhecer as operações necessárias para solucioná-lo. Este tipo de problema é aquele mais utilizado no Ensino Fundamental I para inserir no aluno as aplicações das quatro operações matemáticas. Estes problemas também estão muito presente no conteúdo ministrado no início do sexto ano do Ensino Fundamental II onde é feita uma revisão a respeito das quatro operações e suas aplicações.
- IV. **Problemas-processo ou heurísticos:** são problemas que requerem do estudante um tempo para pensar e montar um plano de ação, uma estratégia

que leve o aluno ao resultado. Este tipo de problema se torna interessante para ele, pois estimula a curiosidade do aluno e faz com que ele libere a criatividade, a iniciativa e também o espírito explorador. Ele será utilizado nesta pesquisa e também é comumente empregado em listas de exercícios e provas de escolas públicas e privadas. Nota-se também que ele é constantemente utilizado em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do vestibular da UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro) e também eram utilizados nos antigos vestibulares para outras faculdades públicas.

- V. **Problemas de aplicação:** representam situações reais do cotidiano do aluno e requerem a aplicação da Matemática para resolvê-los. Em geral, exigem investigação e levantamento de dados e podem ser apresentados em forma de projetos. Este tipo de problema também será utilizado nesta pesquisa, pois, assim como o item IV, ele é um tipo de situação que é bastante explorada pelo professor pesquisador em suas turmas de escolas públicas e privadas, assim como também são cobrados em vestibulares e no ENEM.
- VI. **Problemas de quebra-cabeça:** são aqueles que atraem e instigam os alunos a resolvê-los. A solução depende, muitas vezes, de um “golpe de sorte”, da descoberta de algum truque. Este tipo de problema é muito frequente em Olimpíadas de Matemática.

A figura 01 ilustra um exemplo de exercício de algoritmo.

$$\begin{cases} x + x + x = 60 \\ x + y + y = 30 \\ y - 2z = 3 \\ z + x + y = ? \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} \text{Red} + \text{Red} + \text{Red} = 60 \\ \text{Red} + \text{Blue} + \text{Blue} = 30 \\ \text{Blue} - 2 \times \text{Yellow} = 3 \\ \text{Yellow} + \text{Red} + \text{Blue} = ? \end{cases}$$

Figura 01<sup>1</sup> – Apresentação de um sistema linear com três equações e três incógnitas, de duas formas diferentes

<sup>1</sup> Fonte:

<https://www.facebook.com/ProfessordeMatematica/photos/a.625014950869839/2592692577435390/?type=3&theater>

Repare que o sistema apresentado na figura 01 pode ser solucionado com um dos algoritmos usuais para sistemas lineares  $3 \times 3$ . Além disso, tal sistema também pode ser apresentado com uma aparência mais agradável aos alunos, substituindo as incógnitas por figuras, como exemplifica a figura 01. Uma observação a respeito disso é a questão da linguagem algébrica e o quanto ela é temida pelos estudantes.

Entretanto, o formalismo não pode ser considerado o grande e único culpado pela dificuldade do aluno de compreender a linguagem matemática. Outras circunstâncias, como problemas sociais, culturais e, até mesmo, alguns professores são responsáveis por problemas de aprendizagem de jovens que, devidamente motivados, poderiam alinhar-se entre os que se sentem à vontade nos domínios da Matemática. Afinal, ninguém deve desanimar ou sentir-se frustrado se não compreender algum conteúdo matemático na primeira tentativa, pois demoramos muitos milênios para chegar aos conhecimentos que temos hoje nessa área (GARBI, 1997, apud MODEL, 2005, p. 15).

Nesta citação, o autor retratou exatamente o que se pode presenciar em um ambiente escolar, no que se refere ao formalismo, principalmente na rede pública. Por experiência do professor pesquisador, vários alunos, ao se depararem com qualquer tipo de problema ou exercício, têm uma grave deficiência na questão da interpretação textual. Isso acaba acarretando uma dificuldade de tradução daquilo que se pergunta para uma linguagem matemática. A figura 02 ilustra um exemplo de problema de quebra-cabeça.



**20.** Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

- Emília: *Não fui eu.*
- Luísa: *Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.*
- Marília: *Não foi a Rafaela nem a Vitória.*
- Rafaela: *Não foi a Luísa.*
- Vitória: *Luísa não está dizendo a verdade.*

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

A) Emília  
 B) Luísa  
 C) Marília  
 D) Rafaela  
 E) Vitória

Figura 02<sup>2</sup> - Questão 20 da OBMEP 2018, nível 1: exemplo de problema quebra-cabeça.

<sup>2</sup> Fonte: [https://drive.google.com/file/d/13Tgb\\_47jzpdG0aCggZa2gRqEICfHztAY/view](https://drive.google.com/file/d/13Tgb_47jzpdG0aCggZa2gRqEICfHztAY/view)

Note que este problema pode instigar o estudante, por se tratar de um enigma. Este enigma se trata de descobrir quem fez o desenho na parede da sala da vovó Vera. Um fato interessante sobre este problema é que ele esteve presente nos três níveis (níveis 1, 2 e 3) da OBMEP 2018 (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas 2018). Além disso, o professor-pesquisador se recorda de um episódio que ocorreu no dia da aplicação desta prova numa escola: após o término da avaliação e após a conferência das provas e dos cartões-resposta na sala dos professores da escola em questão, uma determinada professora, que não era de Matemática, indagou aos demais professores presentes: “Gente, vocês viram a questão da vovó Vera? Qual foi a resposta?”. Neste dia, os professores presentes se reuniram em grupos para resolver o mistério de quem tinha pintado a parede da vovó Vera.

Para Polya (1978), a resolução de problemas consiste em algumas etapas, a saber:

1. **Compreensão do problema:** aqui Polya diz que, para compreendermos o problema, devemos observar o que é importante para sua resolução, ou seja, observar bem os dados, a incógnita, sua condicionante, e até traçar uma figura, quando necessário.
2. **Estabelecimento de um plano:** significa observar se o problema é conhecido, ou seja, se já solucionou algo parecido, encontrar a conexão entre os dados e a incógnita e, caso não consiga resolver o problema proposto, tentar resolver um mais simples desde que seja parecido com o mesmo.
3. **Execução do plano:** significa realizar o que foi planejado, observando se cada passo dado para a resolução do problema foi feito de maneira correta.
4. **Retrospecto:** significa verificar se é possível chegar ao resultado do problema por outro caminho. E também verificar se o caminho obtido pode ser o mesmo ou parecido, para algum tipo de problema semelhante a ele.

Sobre a resolução de um problema, os PCN defendem uma proposta que é baseada em alguns fundamentos:

I. O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; II. O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; III. Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática; IV. O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações; V. A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1997, p. 32-33)

Os planos de resolução de problemas propostos pelos PCN e pelo professor Polya possuem semelhanças. Este plano é o método utilizado por alguns professores para resolução de problemas nas escolas. Mas o uso deste método em sala de aula nem sempre é bem sucedido, visto que alguns alunos têm dificuldade de traçar um plano, pois não conseguem ao menos fazer a interpretação correta do texto em questão.

Talvez esta dificuldade esteja atrelada à ausência do hábito da leitura, por parte de vários alunos, e a uma eventual falha na estrutura do enunciado ou na contextualização do problema. É importante também salientar que todo esse processo de má interpretação e estruturação de um problema poderá contribuir para uma possível antipatia para com a disciplina, baixo estímulo e rendimento ou até uma potencial reprovação.

A resolução de um problema é uma tomada de decisão e para isso, segundo Pozo e Echeverría (1998),

A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. (p. 9)



O ensino, a partir da resolução de problemas, pode tornar mais agradável o “querer estudar matemática”. Como citado, o problema se baseia na apresentação de situações sugestivas que exigem um esforço do aluno. Quando isto é alcançado, o trabalho pode ficar mais prazeroso para professor e aluno, indo ao encontro da expressão “aprender brincando”.

O desafio de resolver um problema, passa pela modelagem<sup>3</sup> do mesmo e pela visualização da situação-problema. Entretanto, nem sempre essa visualização é fácil para o estudante, pois isso pode depender da sua maturidade acadêmica e de sua experiência de vida.

Contudo, o professor deve sempre aproveitar ao máximo os conhecimentos trazidos pelos seus alunos, pois além de serem diversificados, o ponto de partida nunca será um vazio.

É fundamental não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. (BRASIL, 1997, p. 29)

Por outro lado, o professor deve possibilitar de forma efetiva e dinâmica a contextualização, a compreensão do processo, podendo assim trabalhar de forma simbólica a situação problema.

Sendo uma das funções da disciplina de matemática capacitar o indivíduo a trabalhar simbolicamente, representando os problemas matemáticos do mundo através dos símbolos, esse conhecimento anterior deve ser utilizado pelo professor como passo inicial para a estruturação do conhecimento, levando o estudante a visualizar formas de representação simbólica como poderosos instrumentos de representação das situações cotidianas. (BRITO, 2005, p. 61)

As soluções dos problemas são desconhecidas, pois o desafio da resolução está lançado. Mas, como o resultado imaginado já está dentro do mundo do estudante, como destacado por Polya (1949, apud KRULIK; REYS, 1998, p. 1-3) resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado.

---

<sup>3</sup> Segundo Bassanezi (1994, apud SILVA, 2018, p. 1), “Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão”.

Diante do desafio proporcionado por um problema, o estudante pode ser levado a um comportamento desafiador, o que faz o mesmo encará-lo como uma meta. Mas um problema bem elaborado pode ser visto como parte de um processo de ensino-aprendizagem e com isso desenvolver a habilidade do estudante. Como destacado por Nicholas A. Branca (1997, apud KRULIK; REYS, 1998, p. 4-12), as três interpretações mais comuns de resolução de problemas são:

1. **Como uma meta:** neste caso, ela independe de problemas específicos, de procedimentos e do conteúdo matemático. Aprender a resolver problemas é a principal razão para o estudo de matemática.
2. **Como um processo:** o que é considerado nesta interpretação são os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas que os alunos usam na resolução de problemas. Essas partes do processo são a sua essência e tornam-se um foco do currículo de matemática.

Ainda não é entendida a forma em que se começa a aprender e ensinar o processo de resolução de problemas. Newell e Simon (1972) relatam que existe a teoria do processamento de informações que tem sido usada para examinar esta questão. Mas, de acordo com Krulik e Rudnick (1980), o progresso desta linha tem sido extenso e complicado.

3. **Como uma habilidade básica:** neste caso, devemos considerar especificidades do conteúdo de problemas, tipos de problemas e formas de resolução. A questão é o que, de fato, deve ser ensinado em matéria de resolução de problemas e será preciso tomar uma difícil decisão a respeito da técnica que deverá ser utilizada.

Contudo, é sempre bom lembrar que se deve ter uma boa leitura e interpretação daquilo que o texto fornece. Sem estes pilares, não será possível fazer a interpretação correta daquilo que é proposto no enunciado do problema.

### **2.3 O uso de materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem de Matemática**

O uso de materiais manipuláveis por professores de escolas estaduais, conhecidos por este pesquisador, tem sido raro. Isso se deve principalmente ao fato da escola em que lecionam não possuírem este material ou à falta de tempo para preparar uma atividade que envolva o seu uso em sala de aula. Podem-se considerar também como dificuldades a questão das salas de aulas que não são apropriadas para tais experiências ou a ausência de salas especiais para tal.

Vale (2015) afirmou que:

considera-se um material manipulável todo o material concreto, educacional ou do dia a dia (e.g. ábaco, policubos, folhas de papel, bolas de gude), que represente uma ideia matemática, que durante uma situação de aprendizagem apele aos sentidos e que se caracteriza por um envolvimento ativo dos alunos (p. 6).

De acordo com esta definição, pode-se concluir que material manipulável é todo tipo de material, utilizado em sala de aula para fins de ensino-aprendizagem de Matemática, de modo que o aluno possa pegá-lo, senti-lo ou manuseá-lo de alguma forma.

Por isso, a utilização dos materiais manipuláveis oferece uma série de vantagens para a aprendizagem dos educandos. Podemos destacar:

- a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico;
- b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor;
- c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material;
- d) É motivador, pois dar um sentido para o ensino da Matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial;
- e) Facilita a internalização das relações percebidas. (SARMENTO, 2010, p. 4).

Quando se usa tal material na resolução de algum problema, a ideia é sair do meio abstrato para o meio concreto. Porém deve-se tomar cuidado, pois o uso deste material pode atuar para uma aprendizagem mais atraente, mas nem sempre ele será eficaz (LORENZATO, 2006, apud SILVA, 2019). Isso significa que tais materiais podem ajudar para uma abordagem mais clara dos conteúdos e, com isso, podem tornar as aulas de Matemática mais chamativas; entretanto, o material manipulável, por si só, não fornece garantia total de aprendizagem. Além disso, as atividades, quando em contato com tais materiais, podem permitir que os estudantes arquitetem conhecimentos com a intervenção do docente em sala, abdicando de ser apenas um ouvinte.

Segundo Gazire e Rodrigues (2012), existem dois tipos de materiais manipuláveis:

1) O material manipulável estático: material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação. Durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele algumas propriedades. Ao restringir o contato com o material didático apenas para o campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto. 2) O material manipulável dinâmico: material concreto que permite a transformação por continuidade, ou seja, a estrutura física do material vai mudando à medida em que ele vai sofrendo transformações, por meio de operações impostas pelo sujeito que o manipula. A vantagem desse material em relação ao primeiro, na visão do autor, está no fato de que este facilita melhor a percepção de propriedades, bem como a realização de redescobertas que podem garantir uma aprendizagem mais significativa. (p. 190)

Este segundo tipo de material, citado pelos autores, de fato, é interessante principalmente quando se fala de Geometria Espacial. Em várias ocasiões, em sala, tem-se acesso ao material estático, ou seja, apenas aquela figura “imóvel”. Quando se pode apresentar o material dinâmico, fica mais fácil para o aluno visualizar seções que podemos fazer nele, como também algumas propriedades apresentadas pelo sólido em questão, por conta da “maleabilidade” apresentada pelo material. Esse tipo de material manipulável dinâmico pode ser confeccionado, inclusive como atividade, pelos próprios alunos.

Ainda sobre material manipulável dinâmico, é interessante citar o trabalho realizado por Barbosa, Costa e Feitosa (2014), que consistiu numa pesquisa com alunos do Ensino Médio de uma determinada escola, que deveriam resolver uma questão envolvendo Geometria Espacial, do ENEM 2011 (Exame Nacional do Ensino Médio 2011), de duas formas. Na primeira, a questão foi resolvida sem o auxílio de materiais manipuláveis. Na segunda, foi utilizado um sólido seccionado. Foi notado que, na primeira forma, houve uma dificuldade tão grande a ponto de nenhum aluno conseguir solucionar o exercício proposto. Na segunda forma, quando foi apresentado o sólido em questão, os alunos conseguiram solucionar o exercício de uma forma satisfatória. Com isso, esses autores concluíram que o uso de material manipulável, neste experimento, foi eficaz no processo de aprendizagem.

O trabalho realizado por Vale (2015) relatou algumas experiências em sala de aula com futuros professores do Ensino Básico, baseadas em tarefas geométricas que utilizavam materiais manipuláveis e a resolução de problemas. Essa pesquisa concluiu que esses futuros professores conseguiram desenvolver um conhecimento geométrico utilizando a resolução de problemas, além de materiais manipuláveis. Foi também relatado em seu trabalho que houve uma participação entusiástica por eles

e que alguns conceitos foram, de fato, compreendidos com a ajuda dos materiais e da resolução de problemas.

Nas pesquisas citadas nos dois parágrafos anteriores, notou-se que o uso do material manipulável foi essencial para aprendizagem em dois públicos totalmente distintos. Assim conclui-se que este material pode ser aplicado em experiências com alunos que possuem idades variadas.

## **2.4 Metodologia de análise de erros no ensino-aprendizagem de Matemática**

Para alguns alunos, o erro pode ser interpretado como algo ruim. Isso ocorre porque vários deles se sentem desconfortáveis quando não conseguem atingir o que foi proposto na atividade. Para outros, o erro é encarado como uma pequena falha e serve como motivação, com a finalidade de um aperfeiçoamento do conteúdo.

O erro, para alguns professores, pode ter algumas interpretações. Por exemplo, ele pode ocorrer de forma proposital, ou seja, o estudante pode escrever uma resposta sem fundamento ao problema proposto, por não ter ideia de como resolvê-lo. O erro também pode ser conceitual, ou seja, o discente pode ter solucionado um problema de forma incorreta por não ter compreendido ainda o conteúdo de forma sólida. Outra forma de erro é o aritmético, ou seja, o educando pode ter errado algum tipo de operação proposta no desenvolvimento do problema. Também pode ocorrer um erro por falta de atenção. É interessante observar que esta falta de atenção pode estar presente no segundo e terceiro tipo de erros citados ao longo deste parágrafo.

Radatz (1980) relatou que os erros dos alunos no ensino de Matemática não são simplesmente um resultado de ignorância e acidentes situacionais. Segundo ele, a maioria dos erros dos alunos não se deve a insegurança, descuido ou condições situacionais. O autor também relata que estes erros:

- são determinados casualmente e muitas vezes sistemáticos;
- são persistentes e durarão por vários anos escolares, a menos que o professor intervenha pedagogicamente;
- pode ser analisado e descrito como técnicas de erro;

- pode ser derivado, quanto às suas causas, de certas dificuldades experimentadas pelos alunos durante o recebimento e processamento de informações no processo de aprendizagem matemática, ou de efeitos da interação de variáveis que atuam no ensino de matemática (professor, currículo, estudante, ambiente acadêmico etc.).

Alguns professores afirmam que o processo de avaliação utilizado atualmente está ultrapassado, visto que as respostas dos alunos são classificadas de modo que não se pode concluir com clareza se o aluno realmente aprendeu ou se apenas decorou aquele padrão determinado pelo professor para obter sucesso.

Silva e Buriasco (2005) afirmam que

Para o aluno, a avaliação pode servir para regular sua aprendizagem, sendo subsídio capaz de orientá-lo para a autonomia de pensamento, para perceber suas dificuldades, analisá-las e descobrir caminhos para superá-las. Para o professor, deve contribuir para que ele possa repensar e reorientar a sua prática pedagógica, além de possibilitar-lhe entender e interferir nas estratégias utilizadas pelos alunos. (p. 500)

Esta citação vai ao encontro do que diz respeito à metodologia de análise de erros, segundo Helena Cury (2007, apud CURY; E. BISOGNIN; V. BISOGNIN, 2009), que consiste na observação do erro, a fim de que se possa buscar sua origem e assim conseguir entender a sua causa. Com isso, pode-se também identificar a forma em que os estudantes estão assimilando o que é passado pelo professor.

Para fazer esta análise, segundo Cury, deve-se fazer a leitura de todas as respostas com muita atenção e depois classificá-las em algumas categorias. Estas categorias podem ser:

1. **Correta:** neste caso, não há o que comentar sobre o problema, visto que o aluno obteve sucesso em sua resolução.
2. **Parcialmente correta:** neste caso, o aluno seguiu o caminho correto para a solução, mas acabou cometendo algum descuido e não obteve sucesso.
3. **Incorreta:** neste caso, o aluno não atingiu o objetivo previsto.

As questões parcialmente corretas podem ocorrer de várias formas diferentes. Conforme comentado antes, podem ser provenientes de alguma falta de atenção. Também podem ocorrer por alguma confusão de conteúdo, por erros aritméticos ou

até mesmo por problemas na interpretação textual. É importante ressaltar que existem questões que só admitem as alternativas corretas ou incorretas.

Ainda segundo Cury, após esta etapa de classificação, devem ser criadas categorias para os tipos de erros encontrados. Estas categorias podem ser estabelecidas e definidas com base naquilo que o professor pesquisador observa nas respostas dos alunos, comparando com a sua experiência docente, seja na turma em questão ou em outras.

Além disso, de acordo com Cury, essas categorias devem ser apresentadas por meio de quadro ou tabelas, juntamente com alguns exemplos de erros cometidos, relacionados a cada classe. A partir disso, pode-se utilizar os resultados obtidos nesta análise para fins investigativos ou rotineiros.

Por último, faz-se uma reflexão sobre os tipos de erros obtidos mais comuns. Esta reflexão tem como finalidade investigar a causa dos mesmos e o que o professor-pesquisador poderá fazer para minimizá-los em futuros exercícios ou avaliações.

Os PCN informam que:

Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação. (BRASIL, 1997, p. 41)

Esta citação relata bem o que ocorre durante as aulas. Nitidamente, após tirar a dúvida de um aluno, percebe-se que outros continuam com a mesma e estes não relatam por medo de sofrerem alguma represália pelos colegas ou por se sentirem menos capazes de aprenderem em relação aos outros. Dependendo do professor e da situação, ele pode procurar uma nova maneira de explicar a questão ou até mesmo deixar as coisas como estão.

Segundo Peng e Luo (2009, apud LEITE, PIMENTEL; OLIVEIRA, 2011):

A análise de erros matemáticos é um grande desafio, uma vez que são necessários conhecimentos específicos do conteúdo a ser tratado, bem como, dos fatores que originaram tal situação. A variedade e a complexidade dos erros matemáticos exigem conhecimentos específicos [...]. (p. 264)

De fato, esta análise citada pelos autores é um grande desafio. Determinadas instituições escolares atribuem um curto período para correção e divulgação de resultados. Com isso, o professor responsável pela turma, o qual também leciona em outras, acaba ficando pressionado e, por conta disso, não consegue fazer esta análise detalhada.

Nesta dissertação pretende-se trabalhar com a metodologia de análise de erros, segundo Cury (2007, apud CURY; E. BISOGNIN; V. BISOGNIN, 2009), com os alunos pesquisados. Os detalhes serão apresentados nos Capítulos 3 e 4.

## **2.5 Alguns trabalhos sobre a análise de erros em resolução de questões de Geometria**

Nesta seção, serão apresentados alguns trabalhos com temáticas similares à abordada na presente dissertação, ou seja, serão apresentadas algumas pesquisas que envolveram o uso da metodologia de análise de erros em resolução de questões de Geometria.

Fuck (2013) apresentou um trabalho, tendo como público-alvo alunos de EJA e PROEJA, de uma escola localizada na Região Metropolitana de Porto Alegre - RS, cujo objetivo foi responder à seguinte pergunta: “quais são os tipos de erros mais frequentes em questões de área e perímetro de quadrados e retângulos, cometidos por alunos de EJA e PROEJA?” (p. 16).

Este autor aplicou testes com questões contendo apenas área e perímetro de figuras geométricas e utilizou a metodologia de análise de erros para chegar ao seu objetivo. O mesmo trabalho, de cunho qualitativo, teve como principais resultados obtidos pelos alunos:

ausência de relação dos conceitos de área e perímetro com o contexto; desconhecimento da característica dos quadrados referente à assertiva de que todos os lados do polígono apresentam a mesma medida; confusão nas operações matemáticas envolvidas nos cálculos de área e perímetro; equívocos conceituais das grandezas (p. 16).

É interessante ressaltar que estes resultados vão ao encontro do que será apresentado mais à frente na presente pesquisa. Talvez isso deve ocorrer porque o público-alvo atingido foi parecido.



Cordeiro (2009) realizou uma pesquisa, cujo público-alvo foi composto por estudantes do Ensino Médio de uma escola pública no município de Nova Iguaçu - RJ. O objetivo do seu trabalho foi

analisar as resoluções e tentativas de resoluções dos alunos e a partir destas apresentar sugestões de estratégias para que o professor possa: reforçar, modificar e inovar a sua forma de ensinar, identificar que tipo de questão os alunos têm mais dificuldades, que tipo de erro eles cometem com mais frequência nas suas resoluções e propor soluções para os problemas encontrados e apresentados ao longo da análise para o Ensino de Geometria (p. 6).

Este autor elaborou uma pesquisa com abordagem quanti-quali. Aplicou uma prova com questões de Geometria Plana, baseadas em provas da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas). Essas questões, segundo o autor, foram modificadas de objetivas para discursivas, para que pudesse ser feita a análise de erros.

É interessante ressaltar que, neste trabalho, o autor não fez a análise dos erros de todas as questões propostas. Ele fez uma seleção apenas daquelas questões em que mais de 50% dos alunos acertaram ou mostraram o caminho para a solução e nessas foi feita a análise dos erros.

Sobre as questões analisadas, o autor concluiu que a maior parte dos erros obtidos se encontraram na fase da interpretação do problema, ou seja, houve uma grande dificuldade de traduzir o que foi passado no problema para linguagem matemática. O autor propôs, como melhoria para esta dificuldade, uma maior utilização em sala de aula de “problemas de aplicação”, que requerem mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática adequada.

Santos (2014) realizou um trabalho, tendo como público-alvo alunos do terceiro ano do Ensino Médio de algumas escolas estaduais do município de Maringá - PR, cujo objetivo foi analisar e classificar os erros cometidos por esses estudantes, na resolução de questões de Geometria do ENEM.

A pesquisa desse autor teve uma abordagem qualitativa, a qual foi desenvolvida em uma única fase, com a aplicação de um teste composto por questões anteriores do ENEM. Os resultados obtidos nesta pesquisa foram que os principais erros cometidos pelos participantes no desenvolvimento das questões eram decorrentes das dificuldades que eles tiveram com a sua interpretação, com a

passagem da linguagem natural para a linguagem matemática e com a aplicação e a resolução de fórmulas.

Santos (2014) propôs, como ferramenta para amenizar essas dificuldades, a leitura e a interpretação de textos de diversos gêneros, pois, segundo ele, isso reduziria a dificuldade evidenciada interpretação incorreta dos enunciados. Ele também recomendou verificar a solução de cada questão, comparando com seu enunciado. Além disso, ele manifestou preocupação com o ensino da Geometria, tendo em vista que, segundo alguns pesquisadores, há baixo índice de rendimento em questões dessa área temática nos exames nacionais.

Souza (2016) realizou uma pesquisa, cujo público-alvo foi constituído de alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola privada, no município de Sorocaba-SP. O objetivo do trabalho foi classificar e analisar erros apresentados nas respostas dos alunos participantes em uma sequência de tarefas, que envolvia a comparação da área da superfície de embalagens de leite condensado, de diferentes dimensões.

Esse autor relatou que os alunos participantes apresentaram dificuldades nas tarefas realizadas e que o erro que ocorreu com maior frequência foi no arredondamento de números decimais. Além disso, ele sugeriu que, para amenizar este tipo de erro, seria necessária a elaboração de uma aula e uma sequência de atividades com a turma alvo desta pesquisa, com o objetivo de discutir e aplicar as regras de arredondamento, como também fazer a análise do material didático dos anos anteriores quanto à abordagem das regras de arredondamento de números decimais.

Ao realizar a leitura dos trabalhos citados nesta seção, o autor desta dissertação notou que foi comum a todos a conclusão de que, ao fazer a análise e a classificação dos erros cometidos por alunos, pode-se observar determinadas dificuldades apresentadas por eles, que ao longo da rotina de sala de aula acabam passando despercebidas. Além disso, cada trabalho serviu para sinalizar que a análise referida é rica e pode ajudar no planejamento de aulas cada vez mais didáticas.

### 3 METODOLOGIA

Este trabalho, de natureza aplicada, teve por objetivo uma pesquisa exploratória, cujos procedimentos envolveram uma pesquisa bibliográfica, já apresentada nos capítulos anteriores, e uma pesquisa-ação com um grupo de alunos do Ensino Médio. Mais precisamente, essa pesquisa-ação foi realizada com uma turma do 2º ano do Ensino Médio Regular, do turno noturno, numa escola estadual, localizada no bairro de Campo Grande, no município do Rio de Janeiro – RJ, durante o 4º bimestre do ano de 2019. Esta turma possuía aproximadamente 19 educandos frequentes (de um total de 30) que, em sua grande maioria, eram alunos com idade acima de 18 anos que já trabalhavam ou que já exerceram alguma atividade remunerada.

A direção da escola assinou uma Carta de Anuência, os participantes maiores de 18 anos assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), o menor de idade assinou um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido e seu responsável assinou um TCLE (responsáveis). Os modelos desses documentos se encontram nos Anexos F, G, H e I deste trabalho.

O Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UFRRJ aprovou esta pesquisa em novembro de 2019 (Processo nº 23083.022109/2019-49).

As atividades com os alunos foram realizadas em sete dias de aula, com duração de dois tempos de quarenta minutos cada aula. No primeiro dia, foi aplicado um questionário diagnóstico, contendo problemas discursivos, relacionados a áreas de superfícies e a volumes de sólidos geométricos, para avaliar conhecimentos prévios sobre os assuntos abordados, sem a intervenção do professor, veja o Anexo A.

No segundo e no terceiro dia, foi feita uma revisão sobre os conceitos de áreas de superfícies e de volumes de sólidos. Esta revisão teve um foco nas áreas das seguintes figuras planas: triângulo, quadrado, retângulo, hexágono e círculo. Além disso, ela destacou o volume dos seguintes sólidos: cubo, paralelepípedo, prisma, pirâmide e esfera (também foi falado de cunha esférica e fuso esférico, de uma maneira bem simples). Ao fim do terceiro dia, o professor fez junto com a turma a resolução do questionário diagnóstico aplicado no primeiro dia, relacionando as questões com os conceitos vistos nos dois dias anteriores. Após isso, o professor

apresentou planificações de alguns sólidos (material da própria escola) e mostrou a formação de cada sólido referente a sua respectiva planificação.

No quarto dia, o professor solicitou à turma a realização de uma atividade, que consistia na montagem de alguns sólidos através de suas planificações, veja o Anexo B.

No quinto, no sexto e no sétimo dia, respectivamente, foram aplicadas listas de exercícios, sendo uma para cada dia, veja os Anexos C, D e E. Nessas ocasiões, os alunos procuraram resolver os problemas propostos, mas poderiam solicitar, a qualquer momento, a intervenção do professor. No fim de cada aula, cada lista de exercícios era resolvida pelo professor, com a participação da turma.

Após a correção da última lista (Exercícios 3), foi pedido aos alunos para que formulassem comentários, por escrito, sobre as atividades realizadas nesta pesquisa, os quais seriam entregues na aula seguinte.

A abordagem da pesquisa foi qualitativa. Optou-se por analisar, de forma detalhada, as respostas dos alunos às questões propostas, procurando identificar aspectos que precisam ser melhorados no ensino-aprendizagem dos conteúdos trabalhados. Para tal, foi usada a metodologia de análise de erros, segundo Helena Cury (2007, apud CURY; E. BISOGNIN; V. BISOGNIN, 2009), conforme descrita na seção 2.4 do Capítulo 2.

Nas próximas seções, será apresentado o detalhamento de cada atividade.

### **3.1 Questionário Diagnóstico**

Como mencionado antes, foi aplicado um questionário diagnóstico na turma que participou desta pesquisa, com o objetivo de observar os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo da trajetória escolar, sobre volumes e áreas de superfície de sólidos geométricos, além da forma e da organização da resolução dos problemas propostos. Esse questionário foi planejado para ter a duração máxima de dois tempos de 40 minutos, ser realizado individualmente, sem consulta a qualquer material didático e com permissão do uso de máquina de calcular.

A seguir, serão apresentados os itens deste questionário, acompanhadas de seus respectivos objetivos e soluções.

1. (Questão adaptada) Uma peça de vidro tem o formato e as medidas da figura abaixo. Qual a área total da superfície da peça? (Dado: a altura de cada face triangular é de aproximadamente 17,3 cm).

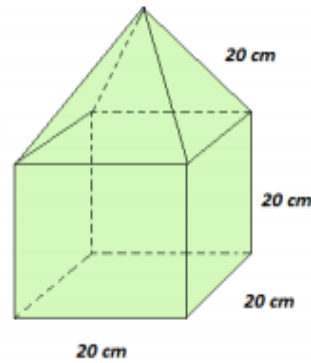


Figura 03<sup>4</sup>

Essa questão teve por objetivos:

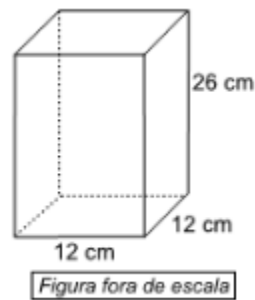
- Observar o conhecimento sobre o cálculo de áreas de quadrados e triângulos;
- Notar se os alunos conseguem assimilar que o sólido dado pode ser dado pela junção de dois sólidos que possuem faces que não serão utilizadas para solucionar o problema.

*Solução:* área de cada face quadrangular:  $20\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 400\text{ cm}^2$ , área de cada face triangular:  $\frac{20\text{ cm} \cdot 17,3\text{ cm}}{2} = 173\text{ cm}^2$ .

Como serão contadas 5 faces quadradas e 4 triangulares, teremos a área total igual a:  $5 \cdot 400\text{ cm}^2 + 4 \cdot 173\text{ cm}^2 = 2692\text{ cm}^2$ .

2. (VUNESP, 2016 - adaptada) Um recipiente tem o formato de um prisma reto de base quadrada com 12 cm de lado e 26 cm de altura, conforme mostra a figura, e está completamente cheio de água, que será transferida para jarras, cada uma delas com capacidade máxima de 720 ml.

<sup>4</sup> Fonte: <http://www.colegioanhanguera.com.br/wp-content/uploads/2016/09/MATEM%C3%81TICA-FL%C3%81VIO-P2-III-BIMESTRE2.pdf>

Figura 04<sup>5</sup>

Qual o número máximo de jarras que poderão ser totalmente enchidas com a água desse recipiente? Considere:  $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ .

Essa questão teve por objetivos:

- Observar o conhecimento sobre o cálculo de volume de um prisma;
- Perceber se ocorre a compreensão da importância da conversão de unidades de volume neste problema.

*Solução:* volume do prisma:  $12 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 26 \text{ cm} = 3744 \text{ cm}^3$ . Como  $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ , então temos 3744 ml. Se cada jarra comporta 720 ml, então podemos encher 5,2 jarras. Mas queremos apenas o número máximo de jarras completamente cheias, ou seja, 5 jarras.

3. Uma laranja tem o formato de uma esfera com 10 cm de diâmetro. Qual a área ocupada pela casca da laranja? (Adote  $\pi = 3$ ).

Essa questão teve por objetivos:

- Observar o conhecimento envolvendo área de uma superfície esférica;
- Observar se os alunos sabem diferenciar diâmetro do raio de uma esfera.

<sup>5</sup> Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/23139505>

Solução: uma vez que a laranja tem 10 cm de diâmetro, então seu raio tem 5 cm. Logo a área ocupada pela casca da laranja será de:  $4 \cdot 3 \cdot (5 \text{ cm})^2 = 300 \text{ cm}^2$ .

4. (VUNESP, 2010 - adaptada) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto de raio 6 metros na posição vertical, está completamente cheio com água e petróleo. Se a altura do tanque correspondente à parte de petróleo é 8 metros e da água 4 metros, qual o volume de cada parte separada (água e óleo) e do tanque?

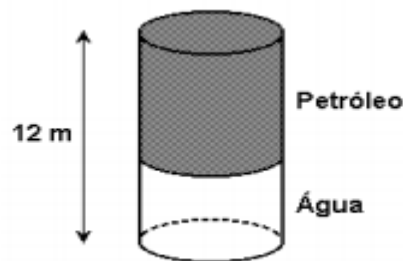


Figura 05<sup>6</sup>

Essa questão teve por objetivos:

- Observar o conhecimento envolvendo o cálculo de volume de um cilindro;
- Observar que as duas partes de água e petróleo formam o volume total do cilindro.

Uma solução:

O volume da parte destinada ao petróleo é:  $\pi \cdot (6 \text{ m})^2 \cdot 8 \text{ m} = 288\pi \text{ m}^3$  e o volume da parte destinada a água é:  $\pi \cdot (6 \text{ m})^2 \cdot 4 \text{ m} = 144\pi \text{ m}^3$ .

<sup>6</sup> Fonte:

[http://www.singularsaobernardo.com.br/portal/emd/ar/professores/Flaber/FLABER%20%20Lista%20de%20Exerc%C3%ADcios%20Geo%20Espacial%20PRISMAS,%20PIR%C3%82MIDES,%20CONES,%20CILINDROS%20\(3.%C2%BA%20Tri\)%202016.pdf](http://www.singularsaobernardo.com.br/portal/emd/ar/professores/Flaber/FLABER%20%20Lista%20de%20Exerc%C3%ADcios%20Geo%20Espacial%20PRISMAS,%20PIR%C3%82MIDES,%20CONES,%20CILINDROS%20(3.%C2%BA%20Tri)%202016.pdf)

## 3.2 Realizações de várias atividades

As atividades, após a aplicação do questionário diagnóstico, foram realizadas em seis dias de aula. A seguir, será apresentado, em detalhes, o que foi feito em cada uma delas.

### 3.2.1 Atividade 1

Nesta atividade, realizada em dois dias, com duração de dois tempos de 40 minutos em cada dia, o pesquisador apresentou alguns sólidos em acrílico (material da própria unidade escolar) os quais, quando “desmontados”, apresentavam suas respectivas planificações, veja as figuras 06 e 07.

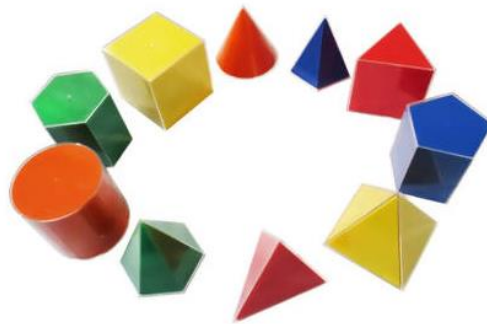


Figura 06<sup>7</sup> - Exemplos de sólidos em acrílico



Figura 07<sup>8</sup> - Planificações de sólidos

---

<sup>7</sup> Fonte: <https://www.casadaeducacao.com.br/solidos-geometricos-em-acrilico-com-planificacoes.5185.html>

<sup>8</sup> Fonte: <https://escolaeducacao.com.br/planificacao-de-solidos-geometricos/>



Feito isso, o mesmo professor pesquisador lembrou o conceito de área de uma superfície plana e apresentou algumas figuras espaciais, que seriam trabalhadas na atividade, juntamente com as fórmulas para determinar o valor da área da superfície de cada figura. Após isso, foi feito um trabalho similar com o conceito de volume de um sólido: foram apresentados alguns sólidos que seriam trabalhados nas atividades, assim como as fórmulas para determinar seu volume. Sobre a esfera, foi ilustrada como uma bola, e a cunha esférica foi ilustrada como um gomo de uma tangerina, que possuía o formato aproximadamente esférico. Além disso, foram desenhados no quadro exemplos de esfera e de cunha esférica.

Durante as atividades, foi escolhido pelo professor pesquisador trabalhar com materiais manipuláveis (sólidos em material acrílico e montagem de sólidos por meio de suas planificações), justamente porque vários educadores apresentaram a importância desses materiais no ensino-aprendizagem de Matemática, conforme abordado na seção 2.3 do Capítulo 2. Além disso, este material é próprio da unidade escolar na qual foi feita a pesquisa.

Ao fim desta revisão, foi feita a correção do questionário diagnóstico juntamente com a turma, utilizando os conceitos revistos pelo professor e a forma de resolução de problemas segundo Polya, conforme apresentada na seção 2.2 do Capítulo 2.

Alguns alunos ficaram surpresos após a correção do questionário, por terem chegado à conclusão de que as questões eram “fáceis”. Também relataram que nunca pensariam na forma de resolver que foi apresentada pelo professor; outros acharam as questões extremamente difíceis por “ter que pensar muito” ou “ter muita conta”.

### **3.2.2 Atividade 2**

Esta atividade teve a duração de uma aula de dois tempos de quarenta minutos e foi desenvolvida em função da atividade anterior. Foram selecionadas algumas planificações de sólidos pelo professor pesquisador, as quais se encontram no Anexo B desta dissertação, que foram impressas em folha de papel sulfite. Foi

solicitado aos alunos montarem os sólidos geométricos correspondentes. Em nenhum momento o professor fez alguma intervenção na construção desses sólidos.

Os alunos se dividiram em várias duplas e um trio. Isso se deu pois, naturalmente, alguns alunos possuíam mais habilidades manuais do que outros e, dessa forma, poderiam ajudar o(s) colega(s) que porventura apresentasse(m) dificuldades. Usaram tesoura e cola para cortarem e construírem os sólidos. O professor os deixou à vontade para ajudarem os demais colegas. Não houve dúvidas dos alunos quanto à execução da tarefa da montagem dos sólidos.

Nas figuras 08 e 09, seguem algumas imagens que foram registradas durante a execução dessa tarefa.

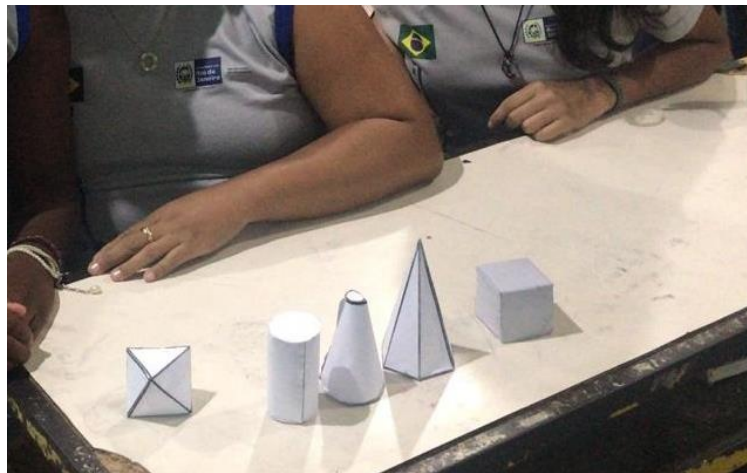


Figura 08<sup>9</sup> – Sólidos montados por uma dupla de alunas.

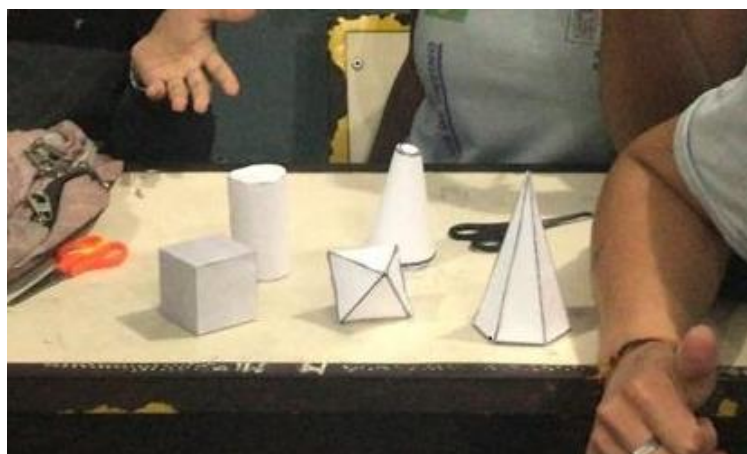


Figura 09<sup>10</sup> – Sólidos montados pelo trio de alunos.

---

<sup>9</sup> Fonte: o autor

<sup>10</sup> Fonte: o autor

Depois que todos montaram os sólidos geométricos, o professor perguntou à turma quais eram os nomes desses e os alunos responderam corretamente os seguintes sólidos: pirâmide, cilindro e cubo. Houve dificuldade quanto ao nome dos outros dois, no caso, octaedro e tronco de cone. Quanto ao octaedro houve, inclusive, uma aluna que respondeu que o sólido era uma junção de duas pirâmides, mas não sabia o nome correto. Quanto ao tronco de cone, os alunos, de fato não sabiam o nome, não arriscaram nomeá-lo e nada sugeriram a respeito de sua montagem.

### **3.2.3 Atividades 3, 4 e 5**

As atividades 3, 4 e 5 ocorreram em três dias distintos (um dia para cada atividade), com dois tempos de 40 minutos em cada dia. As três tiveram os seus desenvolvimentos baseados nas atividades 1 e 2.

Estas atividades consistiram na resolução de três listas de exercícios (Exercícios 1, 2 e 3), sendo uma em cada dia, conforme constam nos Anexos C, D e E, respectivamente. Esses exercícios foram feitos em dupla (um trio foi permitido durante a execução dos Exercícios 1), foi permitido usar o caderno como fonte de consulta, foi liberado o uso da calculadora e a única intervenção do professor durante a execução dos exercícios foi para lê-los e interpretá-los, visto que alguns alunos não conseguiam compreender alguns enunciados.

Como já citado, os exercícios foram feitos em dupla, na sua maioria, e a importância desta escolha foi a questão do ganho que se poderia obter quando se trabalha em grupo. A ideia de se trabalhar em grupo vai ao encontro de uma série de fatores: os alunos têm total liberdade para dialogar em busca de um caminho para solução, podem expressar o pensamento que tiveram e buscar compreender aquilo que o colega imaginou para que possam tomar uma possível decisão, podem debater as dúvidas obtidas, dentre outras apontadas na seção 2.1.

Em cada uma dessas atividades, após a resolução da lista do dia por todos os grupos, o professor resolveu os exercícios juntamente com os alunos, utilizando o quadro. É interessante observar que, durante cada correção, o professor estimulava

a participação dos estudantes, questionando-os sobre a maneira que eles pensavam para resolver cada problema. E assim foi construindo a estratégia para a resolução de cada um desses problemas.

A seguir, são apresentadas as questões de cada lista de exercícios, acompanhadas de seus respectivos objetivos e soluções.

### 3.2.3.1 Exercícios 1

1. As **pirâmides do Egito** são túmulos construídos em pedra para abrigar os corpos dos faraós.

Há 123 pirâmides catalogadas, no entanto, as três mais conhecidas são Quéops, Quéfren e Miquerinos, na península de Gizé.



Figura 10<sup>11</sup>

Este conjunto arquitetônico é guardado pela Esfinge, um ser mitológico com corpo de leão e a cabeça de um faraó<sup>12</sup>.

A figura abaixo representa uma maquete de uma pirâmide do Egito que está apoiada sobre uma mesa com formato de um cubo de aresta 1 m.

---

<sup>11</sup> Fonte: <https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/>

<sup>12</sup> Fonte: <https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/>

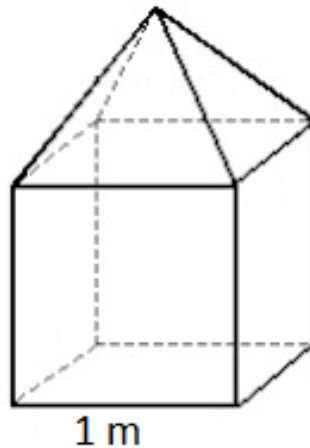


Figura 11<sup>13</sup>

Esta pirâmide vai ser colorida apenas nas laterais por um pintor que usará uma tinta laranja. Sabendo que a altura do cubo é a mesma de cada face triangular da pirâmide, quantos metros quadrados de tinta este pintor utilizará?

Essa questão teve por objetivos:

- Observar o conhecimento sobre cálculo de área de um triângulo;
- Verificar se o aluno consegue perceber que a base de uma face triangular coincide com a aresta do cubo;
- Observar se o aluno nota que nem a base da pirâmide e nem a mesa serão pintadas, ou seja, só serão pintadas as quatro faces triangulares da pirâmide.

*Solução:* segue do enunciado e da figura 11 que a altura e a base de cada face triangular têm a mesma medida de uma aresta do cubo. Então a área de cada face triangular será dada por:  $\frac{1\text{ m} \cdot 1\text{ m}}{2} = 0,5\text{ m}^2$ . Como a pirâmide possui as quatro faces laterais que serão coloridas, logo serão usados  $4 \cdot 0,5\text{ m}^2 = 2\text{ m}^2$  de tinta.

<sup>13</sup> Fonte: [https://professor.bio.br/matematica/provas\\_questoes.asp?section=geometria-espacial&curpage=25](https://professor.bio.br/matematica/provas_questoes.asp?section=geometria-espacial&curpage=25)  
 Obs.: A figura 11 foi editada. A fonte citada remete à figura original.

2. (VUNESP, 2002) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.

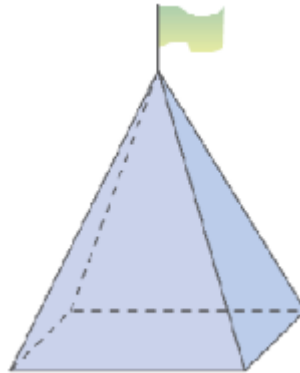


Figura 12<sup>14</sup>

Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, qual o volume de concreto (em m<sup>3</sup>) necessário para a construção da pirâmide?

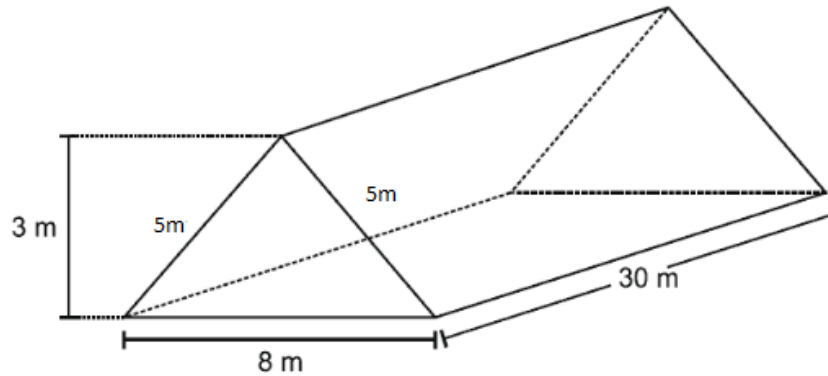
Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno referente a volume de pirâmides;
- Notar se o aluno consegue diferenciar a altura de uma pirâmide e a altura de uma face triangular (apótema da pirâmide).

*Solução:* Como a pirâmide possui a base quadrada de aresta 3 m, então a área desta base será dada por:  $3\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 9\text{ m}^2$ . Logo o volume de concreto utilizado será o mesmo volume da pirâmide, ou seja,  $\frac{9\text{ m}^2 \cdot 4\text{ m}}{3} = 12\text{ m}^3$ .

3. (PUC-RS, 2012 - adaptada) A quantidade de materiais para executar uma obra é essencial para prever o custo da construção. Quer-se construir um telhado cujas dimensões e formato são indicados na figura abaixo.

<sup>14</sup> Fonte: <http://www.colegioanhanguera.com.br/wpcontent/uploads/2016/09/MATEM%C3%81TICA-FL%C3%81VIO-P2-III-BIMESTRE2.pdf>

Figura 13<sup>15</sup>

Qual a quantidade de telhas de tamanho 15 cm por 20 cm necessárias para fazer esse telhado? Lembrar que: 1 m = 100 cm.

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento sobre área de uma superfície;
- Notar se o aluno compreende a necessidade de conversão de metros para centímetros ou vice-versa;
- Observar se o aluno entende que a área a ser ocupada pelas telhas será a área de duas faces retangulares com dimensões 5 m por 30 m.
- Verificar se o aluno nota que o total de telhas que serão utilizadas será dado a partir do quociente entre a área ocupada pelo telhado e a área ocupada por uma telha.

*Solução:* sabemos que 5 m = 500 cm e que também 30 m = 3000 cm. Logo, a área ocupada pelo telhado será dada por  $2 \cdot 500 \text{ cm} \cdot 3000 \text{ cm} = 3000000 \text{ cm}^2$ . A área ocupada por uma telha será dada por  $15 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^2$ . Dessa forma, serão utilizadas  $\frac{3000000 \text{ cm}^2}{300 \text{ cm}^2} = 10000$  telhas.

### 3.2.3.2 Exercícios 2

<sup>15</sup> Fonte: <https://www.mundoedu.com.br/uploads/pdf/5a04d84a8cb2d.pdf>

1. (UFSM, [19--?] - Adaptada) Em um espaço cultural, uma sala de exposições de obras de arte deverá ser pintada. Sabendo que, para pintar  $36 \text{ m}^2$ , é necessário 1 galão de tinta e que a sala tem a forma e dimensões como mostra a figura, então qual o número de galões de tinta necessário para pintar as paredes e o teto?

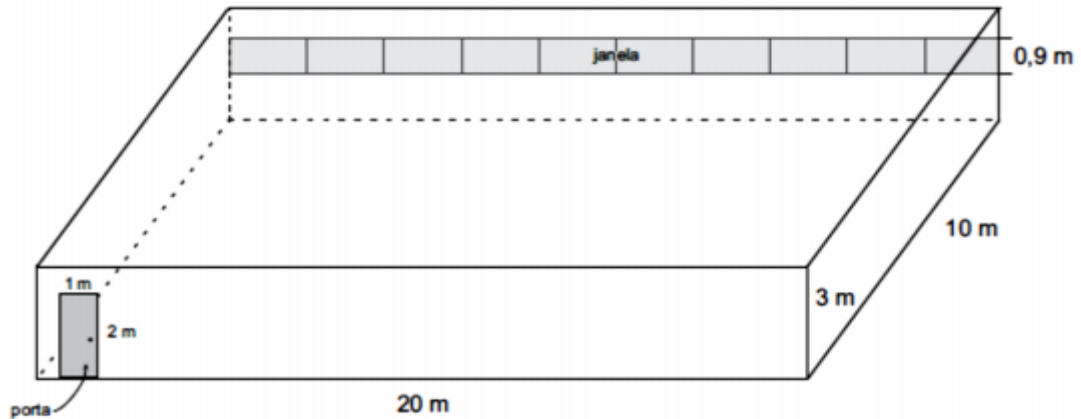


Figura 14<sup>16</sup>

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo da área total da superfície de um paralelepípedo;
- Notar se o aluno observa que porta, janela e chão não serão pintados e, portanto, devem ser excluídos da figura a ser colorida;
- Observar se o aluno utiliza, ao fim, o dado indicativo que 1 galão de tinta =  $36 \text{ m}^2$ .

*Solução:* a área da superfície ocupada pela porta será dada por  $1 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \text{ m}^2$ , a área da superfície ocupada pela janela será dada por  $0,9 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 18 \text{ m}^2$  e a área da superfície ocupada pelo chão, será dada por  $20 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 200 \text{ m}^2$ . Logo, não serão pintados  $2 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2 + 200 \text{ m}^2 = 220 \text{ m}^2$ . A área total da sala será dada por  $2 \cdot (20 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} + 10 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} + 20 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}) = 580 \text{ m}^2$ . Assim, a área total a ser pintada será dada por  $580 \text{ m}^2 - 220 \text{ m}^2 = 360 \text{ m}^2$ . Como 1 galão de tinta pintam  $36 \text{ m}^2$ , então o total de galões utilizados na pintura será dado por  $\frac{360 \text{ m}^2}{36 \text{ m}^2} = 10$  galões.

<sup>16</sup> Fonte:

<http://www.avagaeminha.com.br/vmlogin/uploads/fe3668c60b7d1314df6127664afe9707.pdf>



2. (FFT, [19--?] - adaptada) Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descubrir a área da superfície coberta por terra, sabendo que ela corresponde a, aproximadamente, quarta parte da superfície total.



Figura 15<sup>17</sup>

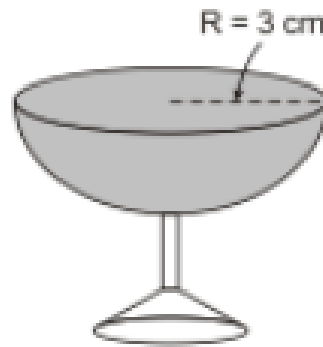
Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo da área de uma superfície esférica;
- Observar se o aluno entende que precisa dividir a área superficial da Terra por quatro, para obter a área da superfície coberta por terra.

*Solução:* a área da superfície terrestre será dada por  $4 \cdot \pi \cdot (6370 \text{ km})^2 = 162307600\pi \text{ km}^2$ . E a área da superfície coberta por terra será dada por  $\frac{162307600\pi \text{ km}^2}{4} = 40576900\pi \text{ km}^2$ .

3. (ENEM, 2010 - adaptada) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério, conforme a figura.

<sup>17</sup> Fonte: <https://canal.cecierj.edu.br/012016/98aea76e5ab149210ed14b8475f2442f.pdf>

Figura 16<sup>18</sup>

Qual o volume de champanhe contido em 20 taças iguais a da figura? (Adote  $\pi = 3$ ).

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo de volume de uma esfera;
- Observar se o aluno nota que o local da taça onde ficará a champanhe ocupa o volume de uma semiesfera, ou seja, metade de uma esfera.
- Observar se o aluno conclui que o total será dado por vinte vezes o volume de cada taça.

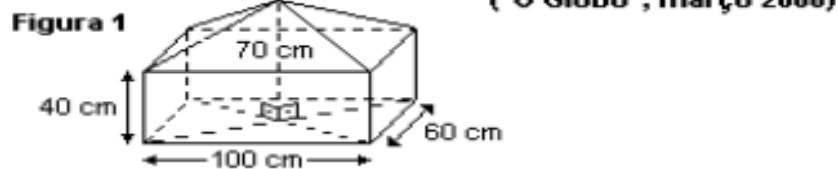
*Solução:* o volume de champanhe ocupado em cada taça será dado por:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot (3 \text{ cm})^3}{3} = 54 \text{ cm}^3.$$

Logo, o volume contido em vinte taças será dado por  $20 \cdot 54 \text{ cm}^3 = 1080 \text{ cm}^3$ .

4. (UERJ, 2002 - adaptada) Leia os quadrinhos:

<sup>18</sup> Fonte: <https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2010/segundo-dia/em-um-casamento-os-donos-da-festa-serviam-champanhe-aos-seus-convidados-em-tacas-com-formato-de-um/>

Figura 17<sup>19</sup>

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo. Assim, qual o volume de terra acumulado no carrinho?

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo de volume de um paralelepípedo e de uma pirâmide;
- Notar se o aluno percebe que a altura da pirâmide é diferente da altura do sólido formado e que a altura da pirâmide é a diferença entre a altura do sólido e a altura do paralelepípedo;
- Observar se o aluno entende que volume total é o somatório entre os volumes do paralelepípedo e da pirâmide.

*Solução:* o volume do paralelepípedo será dado por  $40 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 240000 \text{ cm}^3$ . A altura da pirâmide será dada por  $70 \text{ cm} - 40 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$ . Assim, seu volume será dado por  $\frac{60 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{3} = 60000 \text{ cm}^3$ . Podemos então concluir que o volume do sólido esquematizado será dado por  $60000 \text{ cm}^3 + 240000 \text{ cm}^3 = 300000 \text{ cm}^3$ .

<sup>19</sup> Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27843>

### 3.2.3.3 Exercícios 3

1. (PUC-PR, 2010 - adaptada) A figura mostrada a seguir representa uma embalagem de papelão em perspectiva, construída pelo processo de corte, vinco e cola. Determine a quantidade de material para fabricar 500 embalagens, sabendo que a aresta da base mede 10 cm e a altura mede 30 cm. (Observação: desconsidere o material utilizado para fazer as abas da embalagem)

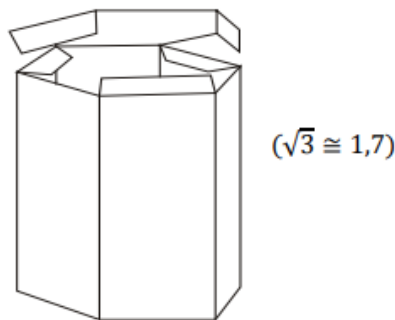


Figura 18<sup>20</sup>

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo da área total da superfície de um prisma hexagonal;
- Observar se o aluno nota que a quantidade de material necessária será dada por 500 vezes a área de cada embalagem.

*Solução:* a quantidade de material necessária para fazer cada embalagem será dada por  $2 \cdot \left[ \frac{3 \cdot (10 \text{ cm})^2 \cdot 1,7}{2} + 3 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} \right] = 2310 \text{ cm}^2$ . Assim, concluímos então que o total de material utilizado para fabricar as embalagens necessárias será dado por  $500 \cdot 2310 \text{ cm}^2 = 1155000 \text{ cm}^2$ .

2. Considere uma laranja com o formato esférico de raio 4 cm, composta por 12 gomos exatamente iguais. Qual a superfície total de cada gomo? (Adote  $\pi = 3$ ).

<sup>20</sup> Fonte: <http://www.avagaeminha.com.br/vmlogin/uploads/fe3668c60b7d1314df6127664afe9707.pdf>

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo da área de uma superfície esférica;
- Observar se o aluno nota que a área da superfície de cada gomo será dada pela área da superfície de uma cunha esférica de  $30^\circ$  ou que também pode ser obtida pela área de um fuso de  $30^\circ$  acrescentada da área de uma circunferência que possui o mesmo raio da esfera.

*Solução:* a área da superfície esférica será dada por  $4 \cdot 3 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 192 \text{ cm}^2$ .

Assim, a área do fuso correspondente a cada gomo será dada por  $\frac{192 \text{ cm}^2}{12} = 16 \text{ cm}^2$ .

A área de uma circunferência que possui o mesmo raio desta esfera será dada por  $3 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 48 \text{ cm}^2$ . Dessa forma, a superfície total de cada gomo será dada por  $16 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$ .

3. Uma fábrica de bombons deseja produzir 20 000 unidades de bombons de chocolate puro, sem recheio, no formato de uma esfera de raio 1 cm. Determine o volume de cada bombom e o volume total de chocolate necessário para produzir esse número de bombons. (Adote  $\pi = 3$ ).

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo do volume de uma esfera;
- Observar se o aluno nota que o volume total de chocolate utilizado será dado por 20000 vezes o volume de uma unidade.

*Solução:* o volume de chocolate contido em cada bombom será dado por  $\frac{4 \cdot 3 \cdot (1 \text{ cm})^3}{3} = 4 \text{ cm}^3$ . Logo, o volume necessário para produzir 20000 unidades será dado por  $20000 \cdot 4 \text{ cm}^3 = 80000 \text{ cm}^3$ .

4. (UCPEL, 2011) Uma esfera metálica de 3 cm de raio é colocada em um congelador e, após algum tempo, acumula uma camada de gelo de 3 cm de

espessura, mantendo a forma esférica. Então, qual o volume do gelo acumulado? (Adote  $\pi = 3$ )<sup>21</sup>.

Essa questão teve por objetivos:

- Verificar o conhecimento do aluno a respeito do cálculo do volume de uma esfera;
- Observar se o aluno entende que o raio da esfera que contém a camada de gelo será dado pelo somatório do raio da esfera colocada no congelador com a camada de gelo acumulada na mesma;
- Verificar se o aluno nota que o volume do gelo acumulado será dado pela diferença entre o volume da esfera que contém a camada de gelo e o volume da esfera antes de ser colocada no congelador.

*Solução:* o volume da esfera que contém a camada de gelo será dado por  $\frac{4 \cdot 3 \cdot (6 \text{ cm})^3}{3} = 864 \text{ cm}^3$ . O volume da esfera, antes de ser colocada no congelador, será dado por  $\frac{4 \cdot 3 \cdot (3 \text{ cm})^3}{3} = 108 \text{ cm}^3$ . Assim, o volume da camada de gelo acumulada na esfera será dado por  $864 \text{ cm}^3 - 108 \text{ cm}^3 = 756 \text{ cm}^3$ .

### 3.2.4 Elaboração de comentários pelos alunos

Conforme dito no início deste Capítulo, após a correção da última lista (Exercícios 3), foi solicitado aos alunos que escrevessem comentários sobre as atividades.

Esses comentários tiveram como finalidade saber de que maneira os alunos encararam o trabalho, se o que foi realizado acrescentou algo ao desenvolvimento de sua aprendizagem, além de conhecer a opinião deles a respeito do que foi realizado. Ou seja, saber o que os alunos acharam mais atrativo na execução das atividades ou se não gostaram da forma em que elas foram executadas. Os

---

<sup>21</sup> Fonte da questão: <https://enem.estuda.com/questoes/?id=449914>

comentários de alguns desses alunos serão apresentados na seção 4.5 do Capítulo 4.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os resultados encontrados durante a pesquisa, à luz da metodologia da análise de erros apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2. Também será feita uma análise dos comentários que os alunos escreveram a respeito das atividades realizadas.

### 4.1 Resultados obtidos durante a execução da pesquisa

Participaram desta pesquisa 19 alunos. Estes alunos foram numerados de 1 a 19. Ocorreram ausências de alguns alunos durante determinados dias, ou seja, os 19 alunos não tiveram 100% de frequência.

#### 4.1.1 Resultados obtidos no Questionário Diagnóstico

Responderam o Questionário Diagnóstico 13 alunos. O gráfico 1, a seguir, representa os resultados obtidos no Questionário Diagnóstico (Anexo A).

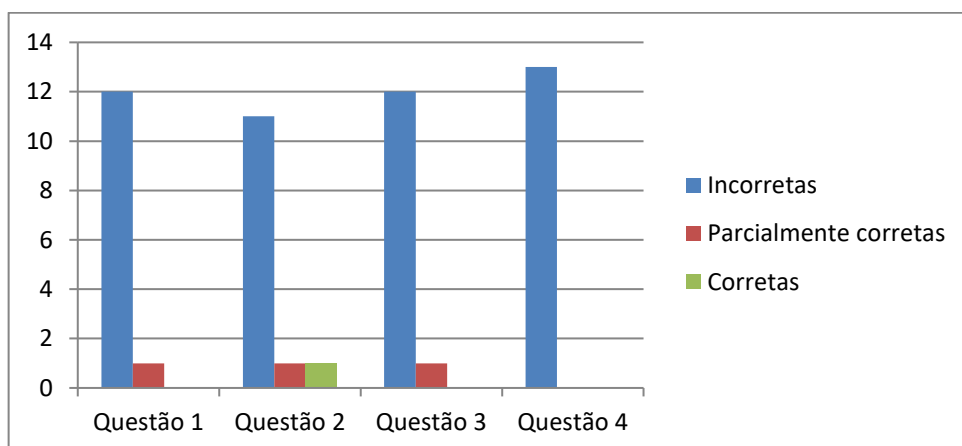


Gráfico 1<sup>22</sup> - Resultados do Questionário Diagnóstico

<sup>22</sup> Fonte: o autor.



Note que o gráfico 1 apresenta uma quantidade muito grande de questões incorretas. Talvez isso ocorreu pelo fato de que os participantes da pesquisa não sabiam ou lembravam do conteúdo abordado durante esse questionário. Além disso, os estudantes envolvidos apresentaram um temor de que tal questionário poderia “valer ponto” ou prejudicá-los na avaliação da disciplina, mesmo após o professor-pesquisador esclarecer que nada disso iria ocorrer.

#### 4.1.2 Resultados obtidos nos Exercícios 1

Participaram desta atividade 15 alunos, que se dividiram em 6 duplas e um trio. Como já mencionado no Capítulo 3, o professor os deixou livres para escolherem as duplas. Devido à quantidade ímpar de participantes, um aluno ficou sobrando e foi incorporado à dupla que ele mesmo escolheu, formando assim o único trio durante esta atividade. O gráfico 2, a seguir, representa os resultados obtidos pelos 7 grupos nos Exercícios 1 (Anexo C).

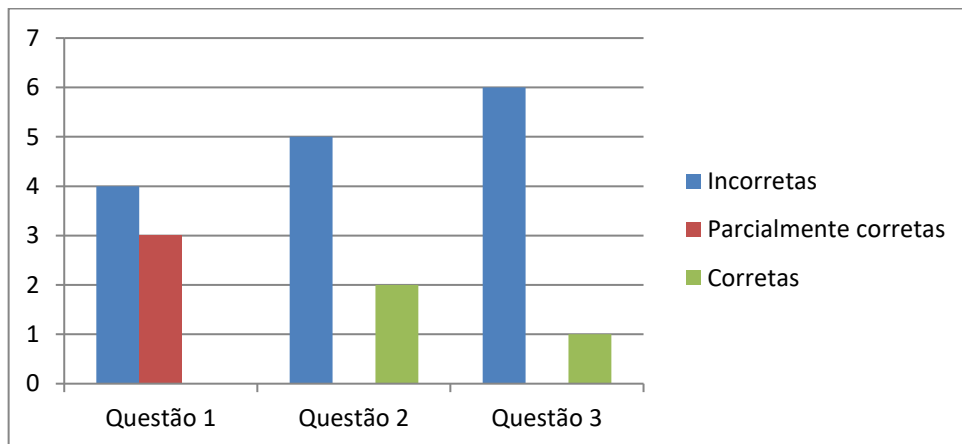


Gráfico 2<sup>23</sup> - Resultados dos Exercícios 1

---

<sup>23</sup> Fonte: o autor.

Note que o gráfico 2 possui resultados, no geral, superiores aos apresentados no gráfico 1. Talvez isso tenha ocorrido pelo fato dos alunos terem trabalhado em grupo (duplas e trio) ou também por terem relembrado ou até aprendido algumas propriedades sobre área de superfícies e volume de sólidos.

#### 4.1.3 Resultados obtidos durante os Exercícios 2

Participaram desta atividade 12 alunos, que se dividiram em 6 duplas. Novamente o professor os deixou livres para escolherem as duplas. O gráfico 3, a seguir, representa os resultados obtidos pelas 6 duplas nos Exercícios 2 (Anexo D).

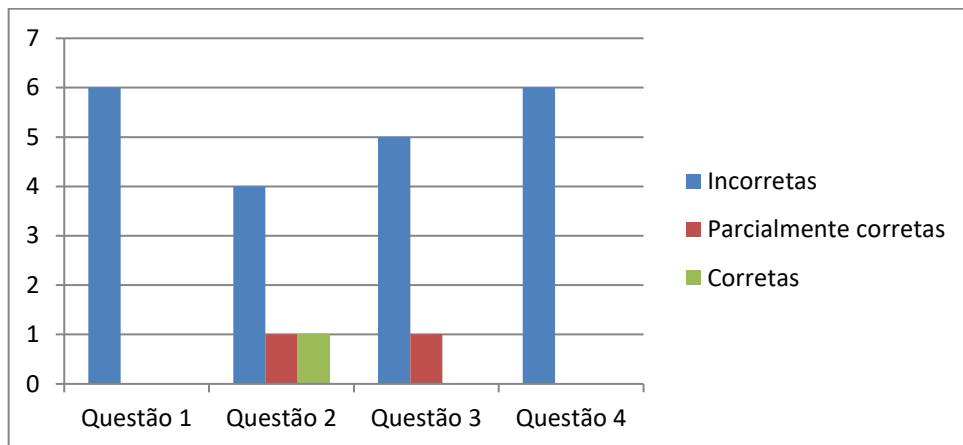


Gráfico 3<sup>24</sup> - Resultados dos Exercícios 2

Note que o gráfico 3 possui resultados inferiores aos apresentados no gráfico 2. Talvez isso tenha ocorrido, devido ao fato de terem sido introduzidas, nesta lista de exercícios, questões que envolvessem esfera e semiesfera, situação que não aconteceu na lista anterior. Uma outra hipótese é que o nível das questões dos Exercícios 2 seja um pouco mais elevado, em comparação aos Exercícios 1.

<sup>24</sup> Fonte: o autor.

#### 4.1.4 Resultados obtidos durante os Exercícios 3

Participaram desta atividade 14 alunos, que se dividiram em 7 duplas. Mais uma vez, o professor os deixou livre para escolherem as duplas. O gráfico 4, a seguir, representa os resultados obtidos pelas 7 duplas nos Exercícios 3 (Anexo E).

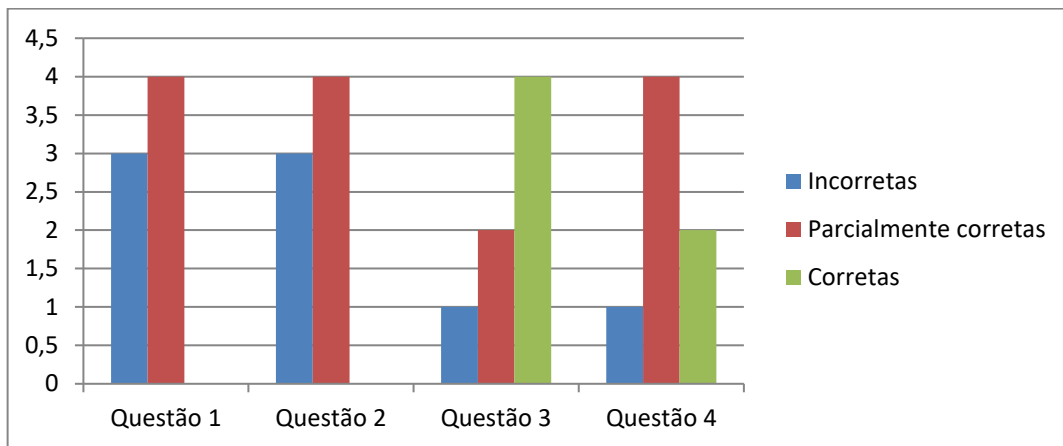


Gráfico 4<sup>25</sup> - Resultados dos Exercícios 3

Note que o gráfico 4 apresenta resultados superiores aos dois anteriores. Pela primeira vez, a quantidade de respostas positivas (parcialmente corretas ou corretas) foi superior à quantidade de respostas incorretas. Provavelmente, isso ocorreu porque nesta lista, os alunos aparentavam estar mais confiantes para resolverem as questões. Além disso, eles venceram o medo de que, de fato, esta pesquisa não teria fim avaliativo para o ano letivo.

## 4.2 Análise e classificação dos tipos de erros

Esta análise foi feita a partir dos erros obtidos pelos alunos nas resoluções do Questionário Diagnóstico e dos Exercícios 1, 2 e 3. Ela foi construída com base no que foi explanado na seção 2.4 do Capítulo 2.

<sup>25</sup> Fonte: o autor.

Para as questões classificadas como corretas, nada foi comentado.

Para as questões classificadas como parcialmente corretas ou incorretas, foram estabelecidos alguns tipos de erros, com base nas respostas apresentadas pelos alunos, a saber:

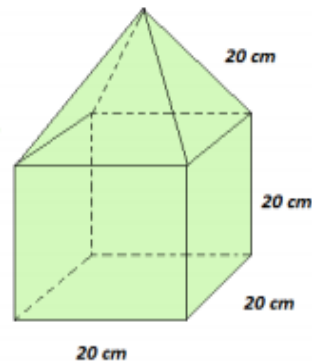
- **E1 – Erro aritmético:** neste caso, o(s) aluno(s) cometeu(eram) um equívoco durante algum procedimento aritmético.
- **E2 – Erro conceitual:** neste caso, o(s) aluno(s) cometeu(eram) um equívoco durante a aplicação de algum conceito, relacionado à Geometria e Medidas.
- **E3 – Erro interpretativo:** neste caso, o(s) aluno(s) cometeu(eram) um equívoco durante a interpretação do problema.
- **E4 – Erro total:** neste caso, o(s) aluno(s) se equivocou(caram) totalmente ao responder(em) o problema ou sua resposta foi dada sem fundamento algum.
- **E5 – Questão em branco:** neste caso, o(s) aluno(s) não respondeu(eram) o problema.

Ao fazer a análise dos erros, o professor-pesquisador notou que algumas soluções apresentaram mais de um tipo de erro.

#### **4.2.1 Análise e classificação dos tipos de erros no Questionário Diagnóstico**

##### **Questão 1**

(Questão adaptada) Uma peça de vidro tem o formato e as medidas da figura abaixo. Qual a área total da superfície da peça? (Dado: a altura de cada face triangular é de aproximadamente 17,3 cm).

Figura 19<sup>26</sup>

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$\widehat{\text{ÁREA TOTAL}} = 80 \text{ cm}$   
 $V_D = a^3 \quad V_s = 8000$   
 $V_{\pi} = 20^3$   
 $V_{\square} = 20 \cdot 20 \cdot 20$   
 $V_{\Pi} = 400 \cdot 20$

Diagrama do sólido com arestas rotuladas como 20 cm. Há marcas de 'X' e '2' sobre as arestas da pirâmide e do cubo.

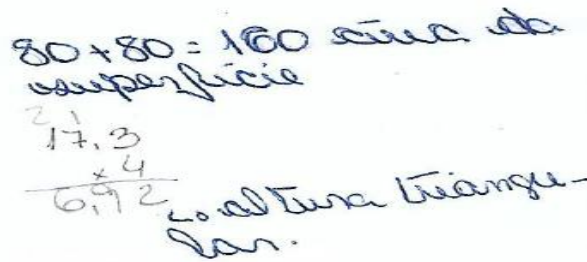
$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 4 \\ \hline 80 \end{array}$$

Figura 20<sup>27</sup> - Solução da questão 1 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 15.

Na figura 20, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E2 e E4. Aqui se pode verificar que o aluno confundiu o conceito de área com o de volume, logo cometeu um erro do tipo E2. Além disso, ele se equivocou totalmente durante a solução, pois ele calculou apenas o volume do cubo sem fazer o da pirâmide e depois “mudou de ideia”, somando as medidas de 4 arestas de 20 cm do sólido, concluindo, de maneira errônea, a área total, logo cometeu também um erro do tipo E4.

<sup>26</sup> Fonte: <http://www.colegioanhanguera.com.br/wp-content/uploads/2016/09/MATEM%C3%81TICA-FL%C3%81VIO-P2-III-BIMESTRE2.pdf>

<sup>27</sup> Fonte: o autor.



$80 + 80 = 160$  sua de  
 superficie  
 $17,3$   
 $\times 4$   
 $69,2$  altura triângulo

Figura 21<sup>28</sup> - Solução da questão 1 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 14.

Na figura 21, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E4. Note que o aluno não fundamentou aquilo que escreveu. Pegou o valor da altura da face triangular e multiplicou por 4 (total de faces triangulares). Pareceu também que ele confundiu o valor da aresta com o valor da área, ou seja, como a pirâmide tem 4 faces laterais, concluiu erroneamente que sua área total seria 80. O mesmo raciocínio ele deve ter utilizado para o cubo, descartando as faces opostas (teto e chão) assim, sobrariam 4 faces apenas e como a suposta área seria 20, logo a área do cubo seria 80. Então concluiu que a área total seria dada por  $80 + 80 = 160$ .

O quadro 1, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 1<sup>29</sup> - Resultados obtidos na questão 1 do Questionário Diagnóstico

ALUNOS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
1			X					X
2			X				X	
4			X				X	
5			X		X			
6			X					X
8		X				X		
11			X					X
12			X					X
14			X				X	
15			X		X		X	
17			X				X	
18			X					X
19			X					X

<sup>28</sup> Fonte: o autor.

<sup>29</sup> Fonte: o autor.

## Questão 2

(VUNESP, 2016 - adaptada) Um recipiente tem o formato de um prisma reto de base quadrada com 12 cm de lado e 26 cm de altura, conforme mostra a figura, e está completamente cheio de água, que será transferida para jarras, cada uma delas com capacidade máxima de 720 ml.

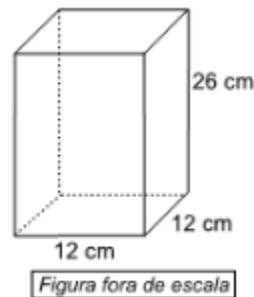


Figura 22<sup>30</sup>

Qual o número máximo de jarras que poderão ser totalmente enchidas com a água desse recipiente? Considere:  $1\text{cm}^3 = 1\text{ml}$ .

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$V = 12 \cdot 12 \cdot 26 = 3744 \text{ cm}^3$$

Figura 23<sup>31</sup> - Solução da questão 2 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 8

Na figura 23, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E3. Este aluno respondeu corretamente o volume do recipiente em forma de paralelepípedo, mas acabou se esquecendo de dividir esse resultado pelo volume de cada jarra, para encontrar a quantidade de jarras que seriam totalmente cheias.

<sup>30</sup> Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/23139505>

<sup>31</sup> Fonte: o autor.



Figura 24<sup>32</sup> - Solução da questão 2 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 17

Na figura 24, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E4. Note que o aluno apenas sinalizou o produto entre 26 e 12, que eram as medidas de duas arestas distintas, mas acabou não concluindo, por não ter certeza daquilo que escreveu.

O quadro 2, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 2<sup>33</sup> - Resultados obtidos na questão 2 do Questionário Diagnóstico

ALUNOS	RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
1				X				X	
2				X				X	
4				X				X	
5				X					X
6				X				X	
8			X				X		
11				X					X
12				X					X
14				X					X
15		X							
17				X				X	
18				X					X
19				X					X

<sup>32</sup> Fonte: o autor.

<sup>33</sup> Fonte: o autor.



### Questão 3

Uma laranja tem o formato de uma esfera com 10 cm de diâmetro. Qual a área ocupada pela casca da laranja? (Adote  $\pi = 3$ ).

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$A = 4\pi r^2$$

$$4 \cdot 3 \cdot 10^2$$

$$12 \cdot 20 = 240 \text{ cm}^2$$

Figura 25<sup>34</sup> - Solução da questão 3 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 8

O erro encontrado na figura 25 foi classificado como E1 e E2. Note que o aluno pode ter esquecido que o raio de uma esfera equivale à metade de um diâmetro da mesma ou pode ter usado a medida do diâmetro como se fosse a do raio (erro do tipo E2). Repare também que ele tratou  $10^2$  como se fosse  $10 \cdot 2$ , caracterizando um erro do tipo E1.

$$\frac{10}{3} = 3,3\bar{3} \dots$$

Figura 26<sup>35</sup> - Solução da questão 3 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 6

Na figura 26, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E4. Note que o aluno apenas escreveu uma resposta, mas não sinalizou como chegou à mesma.

<sup>34</sup> Fonte: o autor.

<sup>35</sup> Fonte: o autor.

O quadro 3, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 3<sup>36</sup> - Resultados obtidos na questão 3 do Questionário Diagnóstico

ALUNOS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
1			X					X
2			X				X	
4			X				X	
5		X		X		X		
6			X				X	
8			X	X	X			
11			X					X
12			X					X
14			X				X	
15			X				X	
17			X					X
18			X					X
19			X					X

#### Questão 4

(VUNESP, 2010 - adaptada) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto de raio 6 metros na posição vertical, está completamente cheio com água e petróleo. Se a altura do tanque correspondente à parte de petróleo é 8 metros e da água 4 metros, qual o volume de cada parte separada (água e óleo) e do tanque?

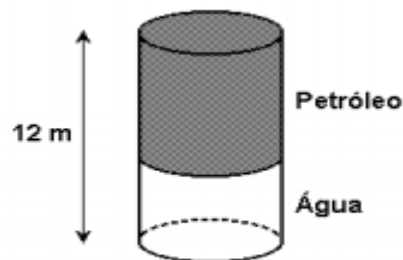


Figura 27<sup>37</sup>

<sup>36</sup> Fonte: o autor.

<sup>37</sup> Fonte:

[http://www.singularsaobernardo.com.br/portal/emd/ar/professores/Flaber/FLABER%20%20Lista%20de%20Exerc%C3%ADcios%20Geo%20Espacial%20PRISMAS,%20PIR%C3%82MIDES,%20CONES,%20CILINDROS%20\(3.%C2%BA%20Tri\)%202016.pdf](http://www.singularsaobernardo.com.br/portal/emd/ar/professores/Flaber/FLABER%20%20Lista%20de%20Exerc%C3%ADcios%20Geo%20Espacial%20PRISMAS,%20PIR%C3%82MIDES,%20CONES,%20CILINDROS%20(3.%C2%BA%20Tri)%202016.pdf)

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

8 M. por 6. M. d. L  
 4 M. por 6. M. d. L  
 24 metros cúbicos de água  
 48 metros cúbicos de óleo

Figura 28<sup>38</sup> - Solução da questão 4 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 17

Na figura 28, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E2. Note que o aluno calculou o volume de cada cilindro, como se estivesse calculando a área de um retângulo. Repare também que ele trata o raio como base de um retângulo. Ou seja, ele trocou  $(\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$  por  $(\text{base}) \cdot (\text{altura})$ .

cada um  
 tem 6 litros

Figura 29<sup>39</sup> - Solução da questão 4 do Questionário Diagnóstico, feita pelo aluno 4

O erro encontrado nesta figura 29 foi classificado como E4. Repare que este aluno escreve a resposta sem nenhuma fundamentação.

O quadro 4, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

<sup>38</sup> Fonte: o autor.

<sup>39</sup> Fonte: o autor.

Quadro 4<sup>40</sup> - Resultados obtidos na questão 4 do Questionário Diagnóstico

ALUNOS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
1			X					X
2			X					X
4			X				X	
5			X					X
6			X					X
8			X				X	
11			X					X
12			X					X
14			X				X	
15			X					X
17			X		X			
18			X					X
19			X					X

#### 4.2.2 Análise e classificação dos tipos de erros no Exercício 1

##### Questão 1

As **pirâmides do Egito** são túmulos construídos em pedra para abrigar os corpos dos faraós.

Há 123 pirâmides catalogadas, no entanto, as três mais conhecidas são Quéops, Quéfren e Miquerinos, na península de Gizé.



Figura 30<sup>41</sup>

<sup>40</sup> Fonte: o autor.

<sup>41</sup> Fonte: <https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/>

Este conjunto arquitetônico é guardado pela Esfinge, um ser mitológico com corpo de leão e a cabeça de um faraó<sup>42</sup>.

A figura abaixo representa uma maquete de uma pirâmide do Egito que está apoiada sobre uma mesa com formato de um cubo de aresta 1 m.

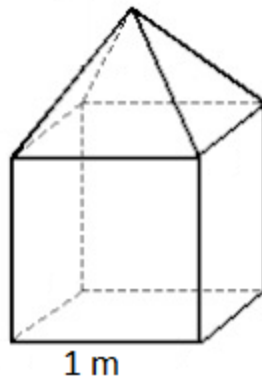


Figura 31<sup>43</sup>

Esta pirâmide vai ser colorida apenas nas laterais por um pintor que usará uma tinta laranja. Sabendo que a altura do cubo é a mesma de cada face triangular da pirâmide, quantos metros quadrados de tinta este pintor utilizará?

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$\begin{aligned}
 A &= 5 \cdot A_0 + 4 \cdot A_{\Delta} \\
 5 \cdot \Delta \cdot \Delta + 4 \cdot \frac{\Delta \cdot \Delta}{2} \\
 5 + 4 \cdot \frac{\Delta}{2} \\
 5 \cdot \frac{4}{2} \\
 5 \cdot 2 &= 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Figura 32<sup>44</sup> - Solução da questão 1 dos Exercícios 1, feita pela dupla formada pelos alunos 10 e 14

<sup>42</sup> Fonte: <https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/>

<sup>43</sup> Fonte: [https://professor.bio.br/matematica/provas\\_questoes.asp?section=geometria-espacial&curpage=25](https://professor.bio.br/matematica/provas_questoes.asp?section=geometria-espacial&curpage=25)

Obs.: A figura 31 foi editada. A fonte citada remete à figura original.

<sup>44</sup> Fonte: o autor.

Na figura 32, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E1, E2 e E3. Esta dupla sinalizou como se fosse colorir toda a figura e não apenas as faces laterais da pirâmide, ou seja, ocorreu um erro do tipo E3. Também houve um equívoco na penúltima linha da solução, ou seja, foi trocado um sinal de soma por um sinal de multiplicação (erro do tipo E1). Talvez isso possa ter ocorrido por alguma distração. Por último, cometeram um erro conceitual (erro do tipo E2), pois a dupla forneceu a resposta em metros, onde deveria ser metros quadrados.

$$\begin{array}{l}
 R. 5 \cdot A_{\square} + 4 \cdot A_{\Delta} \\
 5 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{2} \\
 5 \cdot \frac{4}{2} = 2^2 \\
 5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}^2 \\
 \underline{5 + 2} \rightarrow 7 \text{ cm}^2
 \end{array}$$

Figura 33<sup>45</sup> - Solução da questão 1 dos Exercícios 1, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 9

Na figura 33, os erros encontrados nessa questão também foram classificados como E1, E2 e E3. Esta dupla sinalizou, assim como a anterior, como se fosse colorir toda a figura e não apenas as faces laterais da pirâmide, logo cometeu um erro de interpretação da questão (tipo E3). Também houve um equívoco na penúltima linha da solução, a saber, foi trocado um sinal de adição por um sinal de multiplicação, logo um erro do tipo E1. É interessante notar nesta solução que esta dupla acabou mudando de opinião. Ela começou com uma soma e foi até o fim com a mesma. Parece que depois eles abandonaram o pensamento inicial (somando as duas parcelas até o fim) e finalizaram com uma operação diferente, após a segunda linha (multiplicaram as parcelas). Por último, cometeram

<sup>45</sup> Fonte: o autor.

um erro conceitual (erro do tipo E2), pois a dupla forneceu a resposta em centímetros quadrados, onde deveria ser metros quadrados.

Handwritten solutions for a question. The first line shows  $A1 = 4.1$  and the second line shows  $A1 = 4,1$ .

Figura 34<sup>46</sup> - Solução da questão 1 dos Exercícios 1, feita pela dupla formada pelos alunos 2 e 7

Na figura 34, o erro encontrado nesta questão foi classificado como E2. Nota-se que a dupla conseguiu fazer corretamente a interpretação do problema, pois entendeu que era para pintar 4 faces da pirâmide, mas errou a aplicação conceitual. De fato, esta dupla usou o valor 1, referente à medida da aresta do cubo e da altura de cada face triangular da pirâmide, como se fosse o valor da área de cada face triangular.

O quadro 5, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 5<sup>47</sup> - Resultados obtidos na questão 1 dos Exercícios 1

RESULTADOS DUPLAS/ TRIO	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 12			X	X		X		
Alunos 2 e 7			X		X			
Alunos 4, 11 e 19			X				X	
Alunos 5 e 6		X		X	X	X		
Alunos 8 e 9		X		X	X	X		
Alunos 10 e 14		X		X	X	X		
Alunos 17 e 18			X					X

<sup>46</sup> Fonte: o autor.

<sup>47</sup> Fonte: o autor.

## Questão 2

(VUNESP, 2002) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.

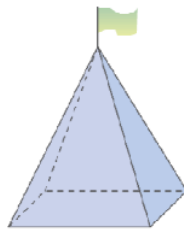


Figura 35<sup>48</sup>

Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, qual o volume de concreto (em m<sup>3</sup>) necessário para a construção da pirâmide?

Segue um exemplo de resposta com erros para essa questão:

$$R = 4 \cdot A_D$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} \quad \frac{4 \cdot 3}{2} = 24 \text{ m}^3$$

Figura 36<sup>49</sup> - Solução da questão 2 dos Exercícios 1, feita pela dupla formada pelos alunos 5 e 6

Na figura 36, os erros encontrados nesta questão foram classificados como E1 e E2. Nota-se que esta dupla concluiu que o volume pedido era quatro vezes a área da face triangular. Talvez este erro tenha ocorrido por ela ainda não ter compreendido bem a diferença entre área e volume. Uma outra observação

<sup>48</sup> Fonte: <http://www.colegioanhanguera.com.br/wpcontent/uploads/2016/09/MATEM%C3%81TICA-FL%C3%81VIO-P2-III-BIMESTRE2.pdf>

<sup>49</sup> Fonte: o autor.



importante: essa dupla usou a medida da altura da pirâmide como se fosse a medida da altura da face triangular da pirâmide, para calcular a área de cada face triangular. Ou seja, ela cometeu vários erros do tipo E2. Note também que ocorre um erro aritmético (tipo E1), onde a dupla escreveu  $4 \cdot 4 : 3 = 48$ , onde o coerente seria escrever  $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ .

O quadro 6, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 6<sup>50</sup> - Resultados obtidos na questão 2 dos Exercícios 1

RESULTADOS DUPLAS/ TRIO	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 12			X					X
Alunos 2 e 7	X							
Alunos 4, 11 e 19	X							
Alunos 5 e 6			X	X	X			
Alunos 8 e 9			X	X	X			
Alunos 10 e 14			X	X	X			
Alunos 17 e 18			X					X

### Questão 3

(PUC-RS, 2012 - adaptada) A quantidade de materiais para executar uma obra é essencial para prever o custo da construção. Quer-se construir um telhado cujas dimensões e formato são indicados na figura abaixo.

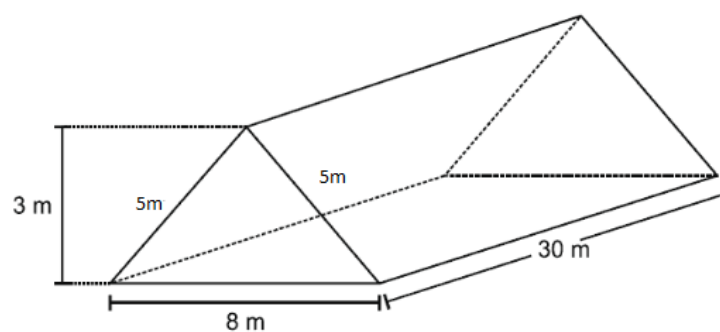


Figura 37<sup>51</sup>

<sup>50</sup> Fonte: o autor.

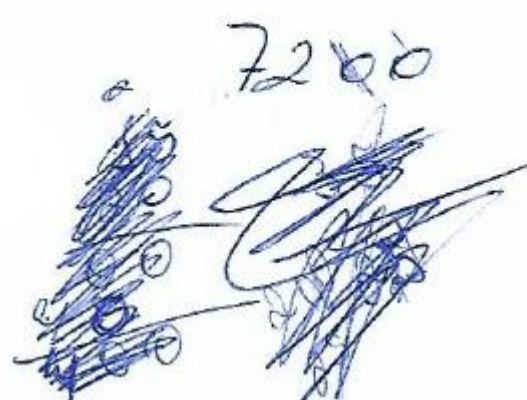
<sup>51</sup> Fonte: <https://www.mundoedu.com.br/uploads/pdf/5a04d84a8cb2d.pdf>

Qual a quantidade de telhas de tamanho 15 cm por 20 cm necessárias para fazer esse telhado? Lembrar que: 1 m = 100 cm.

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$\begin{array}{l} 8 \cdot 30 = 5 \\ 1200 \text{ cm}^2 \\ 12 \text{ cm}^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15 \cdot 20 = 300 \text{ cm}^2 \\ 3 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Figura 38<sup>52</sup> - Solução da questão 3 dos Exercícios 1, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 9

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 8 \cdot 30 = 720 \\ 7200 \end{array}$$


The image shows a student's handwritten solution. At the top, the calculation  $3 \cdot 8 \cdot 30 = 720$  is written, with the result 720 crossed out and replaced by 7200. Below this, there are two large, dense scribbles in blue ink. To the right of the scribbles, a simple line drawing of a triangular prism is visible, representing the roof structure mentioned in the text.

Figura 39<sup>53</sup> - Solução da questão 3 dos Exercícios 1, feita pela dupla formada pelos alunos 17 e 18

As figuras 38 e 39 apresentaram, cada uma, erros dos tipos E1, E2 e E3.

Nos dois casos, ocorreram erros do tipo E2, pois as duas duplas exibiram o cálculo do que seria um volume de um paralelepípedo e usaram-no como se fosse a área ocupada pelo telhado. Ou seja, além de confundirem área de superfície com volume, trataram o prisma triangular que aparece no desenho como um

<sup>52</sup> Fonte: o autor.

<sup>53</sup> Fonte: o autor.

paralelepípedo. A única diferença, neste caso, foi em relação às dimensões utilizadas para efetuar os cálculos: enquanto uma dupla usou o valor 5 m (medida de uma aresta da face triangular) como uma das dimensões, a outra usou o valor 3 m (medida da altura da face triangular), compare as figuras 38 e 39.

Nota-se também que nenhuma dessas duplas conseguiu visualizar que deveria dividir a área do telhado pela área de cada telha para descobrir o número de telhas necessárias (erros do tipo E3), embora a dupla da figura 38 tenha tentado calcular a área de uma telha.

Repare ainda que, nas figuras 38 e 39 ocorreram erros aritméticos (E1). A dupla da figura 38 cortou zeros dos resultados obtidos, de forma indevida. A dupla da figura 39 sinalizou o valor de um produto ( $3 \cdot 8 \cdot 30 = 720$ ), mas depois sinalizou um outro valor ( $3 \cdot 8 \cdot 30 = 7200$ ) e estranhamente, após isso, cortou dois zeros, indicando como resultado o valor 72.

O quadro 7, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 7<sup>54</sup> - Resultados obtidos na questão 3 dos Exercícios 1

RESULTADOS DUPLAS/ TRIO	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 12			X					X
Alunos 2 e 7	X							
Alunos 4, 11 e 19			X				X	
Alunos 5 e 6			X		X			
Alunos 8 e 9			X	X	X	X		
Alunos 10 e 14			X		X			
Alunos 17 e 18			X	X	X	X		

### 4.2.3 Análise e classificação dos tipos de erros no Exercício 2

#### Questão 1

(UFSM, [19--?] - adaptada) Em um espaço cultural, uma sala de exposições de obras de arte deverá ser pintada. Sabendo que, para pintar  $36 \text{ m}^2$ , é necessário 1

<sup>54</sup> Fonte: o autor.

galão de tinta e que a sala tem a forma e dimensões como mostra a figura, então qual o número de galões de tinta necessário para pintar as paredes e o teto?

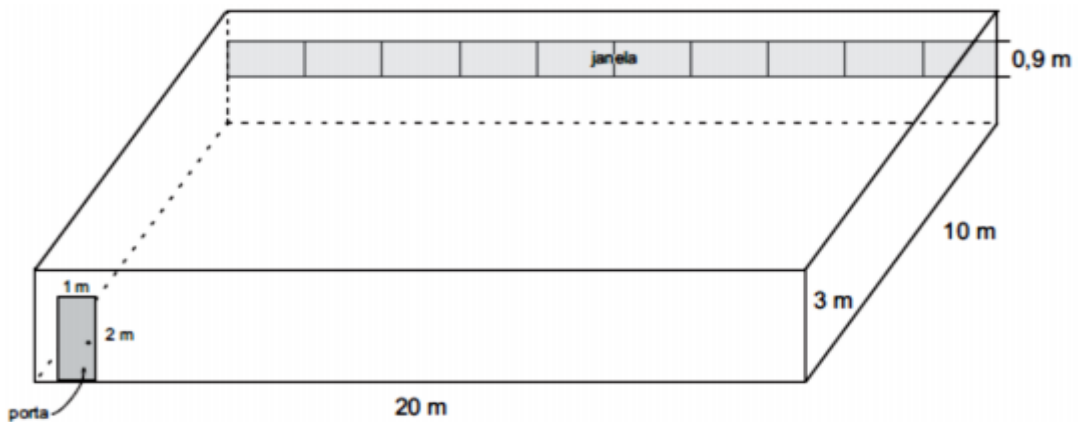


Figura 40<sup>55</sup>

Segue um exemplo de resposta com erros para essa questão:

$$\begin{aligned}
 &5 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 36 \\
 &= 36.000 \\
 &\hline
 &= 7,2
 \end{aligned}$$

Figura 41<sup>56</sup> - Solução da questão 1 dos Exercícios 2, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 9

Na figura 41, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E1 e E4. Note que a dupla armou uma multiplicação  $5 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 36$ , de forma aleatória, logo cometeu um erro do tipo E4. Além disso, cometeu vários erros

<sup>55</sup> Fonte: <http://www.avagaeminha.com.br/vmlogin/uploads/fe3668c60b7d1314df6127664afe9707.pdf>

<sup>56</sup> Fonte: o autor.

aritméticos (E1), a saber: 1) escreveu  $5 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 36 = \frac{36000}{5}$  em vez de  $5 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 36 = 36000$ ; 2) escreveu  $\frac{36000}{5} = 7,2$  em vez de  $\frac{36000}{5} = 7200$ .

O quadro 8, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 8<sup>57</sup> - Resultados obtidos na questão 1 dos Exercícios 2

RESULTADOS DUPLAS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 3 e 12			X					X
Alunos 4 e 10			X					X
Alunos 5 e 6			X				X	
Alunos 8 e 9			X	X			X	
Alunos 14 e 19			X					X
Alunos 17 e 18			X					X

## Questão 2

(FFT, [19--?] - adaptada) Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descubra a área da superfície coberta por terra, sabendo que ela corresponde a, aproximadamente, quarta parte da superfície total.



Figura 42<sup>58</sup>

Segue um exemplo de resposta com erros para essa questão:

<sup>57</sup> Fonte: o autor.

<sup>58</sup> Fonte: <https://canal.cecierj.edu.br/012016/98aea76e5ab149210ed14b8475f2442f.pdf>

$$\begin{aligned}
 R &= 3185 \\
 A &= 4\pi R^2 \\
 &= 4 \cdot \pi \cdot 3185^2 \\
 &= 4 \cdot \pi \cdot 56 \\
 &= 224\pi \text{ Km}^2
 \end{aligned}$$

Figura 43<sup>59</sup> - Solução da questão 2 dos Exercícios 2, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 9

Na figura 43, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E1, E2 e E3. Repare que essa dupla, embora tenha entendido corretamente que deveria calcular a área da superfície de uma esfera, fez a confusão com a afirmação de que o raio é a metade do diâmetro, logo cometeu um erro conceitual (E2). Assim, essa dupla usou 3185 como valor do raio, o que corresponde à metade do raio fornecido pela questão, que é 6370. Houve também um outro erro conceitual, ao responder a área superficial da Terra em quilômetros, em vez de quilômetros quadrados.

Note também que ocorreu um erro aritmético (E1) na parte  $3185^2 = 56$  (resposta da dupla), onde o correto seria  $3185^2 = 10144225$ .

A dupla também não entendeu que também deveria calcular a área da parte coberta por terra. Logo, também ocorreu erro de interpretação (E3).

O quadro 9, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 9<sup>60</sup> - Resultados obtidos na questão 2 dos Exercícios 2

DUPLAS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 3 e 12			X					X
Alunos 4 e 10			X					X
Alunos 5 e 6	X							
Alunos 8 e 9		X		X	X	X		
Alunos 14 e 19			X					X
Alunos 17 e 18			X				X	

<sup>59</sup> Fonte: o autor.

<sup>60</sup> Fonte: o autor.

### Questão 3

(ENEM, 2010 - adaptada) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério conforme a figura.

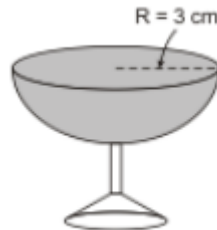


Figura 44<sup>61</sup>

Qual o volume de champanhe contido em 20 taças iguais a da figura? (Adote  $\pi = 3$ ).

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$\begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 11 \cdot 2^3 \\ 11 \cdot 3 \cdot 3^3 \\ 11 \cdot 11 \cdot 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 9 \\ 1,3 \cdot 3 \cdot 9 \\ 45,63 \end{array}$$

Figura 45<sup>62</sup> - Solução da questão 3 dos Exercícios 2, feita pela dupla formada pelos alunos 5 e 6

Na figura 45, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E1 e E3.

Note que, embora essa dupla tenha entendido que se tratava de um problema envolvendo volume, cometeu um erro aritmético (E1) na coluna esquerda,

<sup>61</sup> Fonte: <https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2010/segundo-dia/em-um-casamento-os-donos-da-festa-serviam-champanhe-aos-seus-convidados-em-tacas-com-formato-de-um/>

<sup>62</sup> Fonte: o autor.

escrevendo que  $3^3 = 9$ , onde deveria ser 27. Repare que a dupla cometeu outro erro aritmético na penúltima linha da coluna direita, dizendo que  $1,3 \cdot 3 \cdot 9 = 45,63$ . Aqui essa dupla utilizou desnecessariamente o recurso do arredondamento, substituindo  $\frac{4}{3}$  por 1,3. Fazendo isso, acabou alterando significativamente o resultado do volume obtido.

Além disso, essa dupla esqueceu de determinar o volume das 20 taças, ou seja, apenas se limitou a obter o volume de uma esfera. Logo, cometeu um erro interpretativo (E3).

$$A_0 = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$A_0 = 4 \cdot 3 \cdot 3^2$$

$$A_0 = 4 \cdot 3 \cdot 9$$

$$A = \frac{108}{20}$$

$$\text{Resposta} = 5,41$$

Figura 46<sup>63</sup> - Solução da questão 3 dos Exercícios 2, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 9

Na figura 46, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E1 e E2.

Repare que a dupla fez confusão trabalhando com fórmula de área, ao invés de trabalhar com a de volume, logo cometeu um erro conceitual (E2).

Além disso, se o valor obtido pela dupla, de fato, correspondesse ao volume de uma esfera, o que equivaleria a duas taças, então para obter o volume de 20 taças, a dupla deveria multiplicar o valor obtido por  $10 = \frac{20}{2}$ . O que a dupla fez foi simplesmente dividir o resultado por 20, ou seja, cometeu um erro aritmético (E1).

<sup>63</sup> Fonte: o autor.



O quadro 10, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 10<sup>64</sup> - Resultados obtidos na questão 3 dos Exercícios 2

DUPLAS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 3 e 12			X					X
Alunos 4 e 10			X					X
Alunos 5 e 6		X		X		X		
Alunos 8 e 9			X	X	X			
Alunos 14 e 19			X					X
Alunos 17 e 18			X					X

### Questão 4

(UERJ, 2002 - adaptada) Leia os quadrinhos:

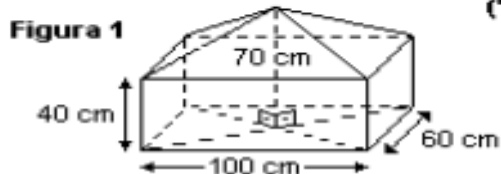


Figura 47<sup>65</sup>

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo. Assim, qual o volume de terra acumulado no carrinho?

Segue um exemplo de resposta com erros para essa questão:

<sup>64</sup> Fonte: o autor.

<sup>65</sup> Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27843>

$$\begin{aligned}
 & 4 \cdot A \square + 4 \cdot AA \\
 & = 4 \cdot 40 \cdot 60 + 4 \cdot \frac{100 \cdot 70}{2} \\
 & = 9600 + \frac{28000}{2} \\
 & = 9600 + 14000 \\
 & = 23600
 \end{aligned}$$

Figura 48<sup>66</sup> - Solução da questão 4 dos Exercícios 2, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 9

Na figura 48, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E2. Repare que a dupla claramente usou o conceito de área, onde estava pedindo o volume. Sem contar que essa dupla cometeu vários equívocos conceituais ao trabalhar com essas áreas, como por exemplo, determinação incorreta das dimensões das faces poligonais trabalhadas.

O quadro 11, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 11<sup>67</sup> - Resultados obtidos na questão 4 dos Exercícios 2

RESULTADOS DUPLAS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 3 e 12			X					X
Alunos 4 e 10			X					X
Alunos 5 e 6			X					X
Alunos 8 e 9			X		X			
Alunos 14 e 19			X					X
Alunos 17 e 18			X					X

<sup>66</sup> Fonte: o autor.

<sup>67</sup> Fonte: o autor.

#### 4.2.4 Análise e classificação dos tipos de erros no Exercício 3

##### Questão 1

(PUC-PR, 2010 - adaptada) A figura mostrada a seguir representa uma embalagem de papelão em perspectiva, construída pelo processo de corte, vinco e cola. Determine a quantidade de material para fabricar 500 embalagens, sabendo que a aresta da base mede 10 cm e a altura mede 30 cm. (Observação: desconsidere o material utilizado para fazer as abas da embalagem)

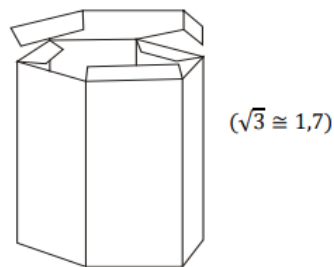


Figura 49<sup>68</sup>

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 1,7}{2} \\
 A &= \frac{3 \cdot 100 \cdot 1,7}{2} \\
 &= \frac{300 \cdot 1,7}{2} = \frac{510}{2} \\
 &= 255 \cdot 500 = 127.500
 \end{aligned}$$

Figura 50<sup>69</sup> - Solução da questão 1 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 14 e 17

<sup>68</sup> Fonte: <http://www.avagaeminha.com.br/vmlogin/uploads/fe3668c60b7d1314df6127664afe9707.pdf>

<sup>69</sup> Fonte: o autor.

Na figura 50, o erro encontrado nesta questão foi classificado como E3. Note que, para esta dupla, o total de material suficiente para construir uma embalagem é apenas o necessário para construir uma face hexagonal. Esse erro foi bem comum na resolução dessa questão.

Figura 51<sup>70</sup> - Solução da questão 1 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 6 e 16

Na figura 51, os erros encontrados nesta questão foram classificados como E1 e E3. Repare que essa dupla cometeu o mesmo erro interpretativo da dupla anterior (E3), colocando como suficiente o cálculo da área de apenas uma face hexagonal, para a obtenção da área de uma embalagem. Além disso, essa dupla cometeu um erro aritmético (E1), indicando que  $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1,7 = 1530$ , onde, na verdade,  $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1,7 = 510$ .

O quadro 12, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 12<sup>71</sup> - Resultados obtidos na questão 1 dos Exercícios 3

RESULTADOS DUPLAS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 13			X				X	
Alunos 2 e 9			X				X	
Alunos 3 e 11			X					X
Alunos 5 e 12		X				X		
Alunos 6 e 16		X		X		X		
Alunos 8 e 10		X				X		
Alunos 14 e 17		X				X		

<sup>70</sup> Fonte: o autor.

<sup>71</sup> Fonte: o autor.

## Questão 2

Considere uma laranja com o formato esférico de raio 4 cm, composta por 12 gomos exatamente iguais. Qual a superfície total de cada gomo? (Adote  $\pi = 3$ ).

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 12}{3} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 88}{3} = \frac{1002}{3} = 336$$

Figura 52<sup>72</sup> - Solução da questão 2 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 1 e 13

Na figura 52, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E4. Repare que esta dupla fez total confusão com os dados da questão. Parece que eles tentaram fazer o volume da esfera com a quantidade de gomos sendo o raio da mesma. Note que até a fórmula do volume da esfera foi escrita de forma incorreta. Talvez esta dupla tenha “chutado” esta solução.

$$A = 4 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 4^2$$

$$A = 12 \cdot 156 \cdot 16$$

$$A = 200,96 \text{ cm}^2$$

Gomos e área total da laranja 200,96 cm<sup>2</sup>

$$200,96 / 12 = 16,74 \text{ cm}^2$$

Figura 53<sup>73</sup> - Solução da questão 2 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 5 e 12

Na figura 53, os erros encontrados nesta questão foram classificados como E3. Há dois erros de mesma natureza nesta questão. O primeiro foi a respeito do

<sup>72</sup> Fonte: o autor.

<sup>73</sup> Fonte: o autor.

arredondamento do valor de  $\pi$ . Note que o problema solicitou para adotar  $\pi = 3$  e a dupla usou 3,14. Talvez este erro tenha sido executado porque, na maioria das vezes (excluindo este trabalho), costuma ser atribuído tal valor. O segundo erro foi que essa dupla acabou determinando apenas a área de um fuso esférico, ou seja, a parte do gomo “voltada para fora” da esfera.

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot 3 \cdot 4^2 \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 16 \\ &= 192, \end{aligned}$$

Figura 54<sup>74</sup> - Solução da questão 2 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 10

Na figura 54, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E3. Essa forma de resolução foi bem comum nesse problema. Para essa dupla, como também para outras, bastava encontrar a área da superfície esférica para determinar a superfície de cada gomo.

O quadro 13, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 13<sup>75</sup> - Resultados obtidos na questão 2 dos Exercícios 3

DUPLAS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 13			X				X	
Alunos 2 e 9			X				X	
Alunos 3 e 11			X					X
Alunos 5 e 12		X				X		
Alunos 6 e 16		X		X				
Alunos 8 e 10		X				X		
Alunos 14 e 17		X				X		

<sup>74</sup> Fonte: o autor.

<sup>75</sup> Fonte: o autor.

### Questão 3

Uma fábrica de bombons deseja produzir 20 000 unidades de bombons de chocolate puro, sem recheio, no formato de uma esfera de raio 1 cm. Determine o volume de cada bombom e o volume total de chocolate necessário para produzir esse número de bombons. (Adote  $\pi = 3$ ).

Segue um exemplo de resposta com erro para essa questão:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 1^3}{3} \\
 &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{3} \\
 &= \frac{36}{3} = 12, \quad R = 240\,000
 \end{aligned}$$

Figura 55<sup>76</sup> - Solução da questão 3 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 10

Na figura 55, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E1. Esta dupla teve um pequeno erro de cálculo quando indicou  $1^3 = 3$ , onde, na verdade, deveria ser  $1^3 = 1$ .

O quadro 14, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 14<sup>77</sup> - Resultados obtidos na questão 3 dos Exercícios 3

DUPLAS \ RESULTADOS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 13			X					X
Alunos 2 e 9	X							
Alunos 3 e 11	X							
Alunos 5 e 12	X							
Alunos 6 e 16	X							
Alunos 8 e 10		X		X				
Alunos 14 e 17		X		X				

<sup>76</sup> Fonte: o autor.

<sup>77</sup> Fonte: o autor.

### Questão 4

(UCPEL, 2011) Uma esfera metálica de 3 cm de raio é colocada em um congelador e, após algum tempo, acumula uma camada de gelo de 3 cm de espessura, mantendo a forma esférica. Então, qual o volume do gelo acumulado? (Adote  $\pi = 3$ )<sup>78</sup>.

Seguem alguns exemplos de erros encontrados nessa questão:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 3^3}{3} = \frac{12 \cdot 27}{3} = \frac{324}{3} = 108 \text{ cm}^3$$

Figura 56<sup>79</sup> - Solução da questão 4 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 6 e 16

Na figura 56, o erro encontrado nessa questão foi classificado como E3. Essa dupla acabou encontrando o volume da esfera antes de ser congelada. Faltou encontrar o volume da esfera após o congelamento, para obter o volume da camada de gelo formada.

$$V = \frac{4 \cdot 3 \cdot 6^3}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 216}{3} = \frac{216}{3} = 72$$

Figura 57<sup>80</sup> - Solução da questão 4 dos Exercícios 3, feita pela dupla formada pelos alunos 8 e 10

<sup>78</sup> Fonte da questão: <https://enem.estuda.com/questoes/?id=449914>

<sup>79</sup> Fonte: o autor.

<sup>80</sup> Fonte: o autor.



Na figura 57, os erros encontrados nessa questão foram classificados como E1 e E3. Note que esta dupla só tentou calcular o volume da esfera após o congelamento. Não entendeu que precisaria calcular o volume da esfera antes do congelamento, para obter o volume da camada de gelo formada. Logo, ocorreu um erro de interpretação (E3). Porém, além disso, houve um erro aritmético (E1), que consistiu em  $6^3 = 18$ , onde, na verdade, seria  $6^3 = 216$ . Repare também que esta dupla cometeu o mesmo tipo de erro na questão 3 da mesma lista. Ao que tudo indica, esta dupla confundiu potenciação com multiplicação nas questões 3 e 4.

O quadro 15, a seguir, apresenta os resultados dos alunos nesta questão, com a classificação dos tipos de erros encontrados.

Quadro 15<sup>81</sup> - Resultados obtidos na questão 4 dos Exercícios 3

RESULTADOS DUPLAS	CORRETAS	PARCIALMENTE CORRETAS	INCORRETAS	E1	E2	E3	E4	E5
Alunos 1 e 13			X					X
Alunos 2 e 9	X							
Alunos 3 e 11	X							
Alunos 5 e 12		X		X		X		
Alunos 6 e 16		X				X		
Alunos 8 e 10		X		X		X		
Alunos 14 e 17		X				X		

### 4.3 Discussões e reflexões sobre a análise dos erros encontrados

Os problemas utilizados nesta pesquisa foram selecionados pelo professor-pesquisador, que também era o professor de Matemática da turma na ocasião. Existiam problemas fáceis, intermediários e até difíceis, considerando o nível de aprendizagem do alunado desta classe. Os níveis dessas questões foram mesclados nas listas trabalhadas. Procurou-se também escolher situações do cotidiano desses estudantes, que pudessem ser representadas em várias dessas questões.

<sup>81</sup> Fonte: o autor.

Um tipo de erro durante a execução das atividades foi o erro E5, ou seja, questões em branco. Sobre esse tipo de erro, Amarante (2019) questionou a respeito das condições que levariam um aluno a deixar uma resposta de questão em branco. Mais precisamente, ele escreveu:

Entende-se que primeiramente, é preciso que o aluno tenha conhecimento mínimo do assunto ao qual será questionado. Tendo garantida essa etapa, devem-se investigar outros fatores como, por exemplo, a questão comportamental, psicológica, socioeconômica, como está sendo repassado esse conhecimento, entre outros. (p. 75)

Em outras palavras, esse autor comentou que, para iniciar a resolução de uma questão, o aluno deve conhecer minimamente o assunto que é trabalhado. Se isso ocorreu e, mesmo assim, o aluno optou por deixar uma questão em branco, outros fatores devem ser analisados, como os que ele descreveu acima. Como professor da rede pública de ensino, o autor desta dissertação, além de corroborar a reflexão de Amarante (2019), complementa, com base em sua experiência docente, que este tipo de erro também pode ocorrer devido à ausência de motivação do aluno para com o problema proposto e ao ambiente escolar.

Já Mesquita (2000) relatou que uma resposta em branco pode também vir de uma situação de bloqueio cognitivo que alguns alunos enfrentam ao serem avaliados de alguma forma. Este bloqueio, apresentado pela autora, pode ser atribuído ao fato de alguns estudantes terem se cobrado sobre determinadas soluções: “O sujeito enquanto observador da sua conduta vê-se como cumpridor das suas tarefas e, ao não obter o sucesso esperado, nomeia o branco” (MESQUITA, 2000, p. 7).

O autor desta dissertação entende que uma maneira de atenuar este tipo de erro pode ser reforçar determinados conteúdos, tendo como foco a solução de problemas, como também encaminhar ao acompanhamento psicológico, se necessário, o aluno que apresente esse tipo de dificuldade. Cumprindo o que foi proposto, espera-se que o aluno tenha uma melhoria em seu desempenho.

Lembrando que o erro E4 significa que o aluno errou totalmente a questão, ou seja, que apresentou uma resolução sem fundamentação, ele pode estar ligado ao fato de que o aluno tenha simplesmente “chutado” a resolução do problema, pelo simples motivo de não querer deixar a resposta “em branco”. Esse erro, apesar de ser semelhante ao E5, de acordo com Cruz, Silva e Tavares (2020), tem se o fato de que o aluno conseguiu assimilar aquilo que era proposto, mas não possuía ferramentas necessárias para desenvolvê-lo.

O erro E3, classificado como erro interpretativo, ocorreu quando o estudante fez confusão com algum dado do problema em questão ou também não conseguiu fazer a “tradução” das informações apresentadas no enunciado do problema para uma linguagem matemática.

Lorensatti (2009) comentou que extrair as informações de um problema e traduzi-las para uma linguagem matemática nem sempre será algo trivial, porque a simbologia matemática não é uma linguagem natural para o aluno. A autora também destacou que algumas palavras utilizadas durante as aulas possuem significados distintos do cotidiano dos estudantes:

Por exemplo, utiliza-se, com frequência, nas aulas sobre frações, a frase reduzir ao mesmo denominador. Reduzir para a maioria das pessoas, no seu dia a dia, tem o significado de tornar menor. Se não for explicado o sentido dessas palavras em contexto de uso, dificilmente um aluno tomará reduzir como sendo converter ou trocar. (LORENSATTI, 2009, p. 91-92)

Além disso, Emmert e Oliveira (2018) afirmaram que “as dificuldades apresentadas pelos estudantes com interpretação textual se devem à leitura limitada e o pouco contato com textos literários em sala de aula” (p. 69).

Para que se possa amenizar este tipo de erro, o autor desta dissertação sugere que sejam propostos, inicialmente, problemas mais fáceis de serem interpretados e que o nível de dificuldade desses problemas venha subindo gradualmente. Também sugere que existam aulas conjuntas com o professor de Língua Portuguesa, pois acredita que este último poderá auxiliar, de uma forma mais didática, aos estudantes interpretarem corretamente o que é proposto.

Para a presente pesquisa, foi considerado erro conceitual (E2) aquele em que o estudante se equivocou ao aplicar algum conceito relacionado à Geometria e Medidas, que foi a principal unidade temática abordada nos problemas propostos. Ao relacionar os erros sobre problemas envolvendo área e perímetro encontrados em sua pesquisa, Fuck (2012) concluiu que alguns alunos podem cometer erros por não conseguirem estabelecer uma conexão entre o tipo de cálculo e o contexto da questão.

Fazendo uma análise de vários erros E2 cometidos por vários estudantes ao longo da presente pesquisa, notou-se que ocorreu, com boa frequência, confusões envolvendo o cálculo de área e de volume de superfícies. Ou seja, esse tipo de erro lembrou o que foi relatado acima sobre os resultados obtidos por Fuck (2012). É importante também salientar que, embora estes conceitos tenham sido esclarecidos

aos alunos durante a realização das atividades, percebeu-se que ainda ocorreram erros provenientes a tal compreensão.

Kikuchi e Trevizan (2010) relataram que:

muitos dos conceitos de Grandezas e Medidas não são compreendidos de forma adequada pelos alunos que se deparam com barreiras aparentemente intransponíveis para avançarem para as etapas posteriores do ensino. Tais dificuldades geram a má utilização de fórmulas matemáticas [...]. (p.1).

Para estas autoras, devem-se deixar claros os conceitos de Grandezas e Medidas para os estudantes, a fim de que erros dessa natureza possam ser minimizados.

Percebeu-se também, durante a análise de erros neste trabalho o seguinte: quando se fazia necessária uma conversão de medidas para se chegar ao objetivo proposto no problema, mesmo que essa conversão já estivesse sinalizada no enunciado do problema, alguns alunos não se sentiram confortáveis para fazerem tal coisa.

Para que se possa amenizar este tipo de erro, o autor desta dissertação sugere que sejam estabelecidas aulas de reforço para quem apresentar tal dificuldade. Nesta aula seriam trabalhados exercícios de fixação do conteúdo de Grandezas e Medidas, como também explorar outros tipos de problemas, que sejam mais voltados ainda para a prática cotidiana destes estudantes, além de tentar também outras formas de abordagem sobre áreas e volumes de superfícies.

Sobre o erro E1, no caso, o erro aritmético, ele foi o mais cometido durante as atividades, considerando apenas E1, E2 e E3. É importante mais uma vez dizer que os alunos puderam utilizar a calculadora durante as atividades, mas, mesmo assim, o erro aritmético foi aquele que apareceu com mais frequência.

Em sua pesquisa, Agranionih, Enricone e Zatti (2010) relataram que os alunos buscam uma solução alternativa para realização dos cálculos, quando se deparam com a incerteza do mesmo. Isso se deve ao fato de várias avaliações realizadas em sala de aula priorizarem apenas a resposta final e não o procedimento realizado pelo aluno. Em alguns casos, o estudante consegue realizar todo processo de pensamento e execução do problema proposto, mas acaba sendo penalizado na questão por errar alguma operação, por falta de atenção ou por alguma falha no processo ensino-aprendizagem em relação à aritmética.

Durante a análise de erros na presente pesquisa, verificou-se também o fato de que alguns conceitos relacionados a Números e Operações não estavam bem sedimentados por vários estudantes. Percebeu-se erros básicos em potenciação, como também na ordem de execução de uma expressão numérica.

Paías (2009) relatou em sua pesquisa que uma parte considerável dos alunos do Ensino Médio não possui com clareza o domínio sobre a operação potenciação; uma confusão acerca deste conteúdo é a troca da função da base e do expoente e, por conta disso, muitos a entendem como uma simples multiplicação.

Silva e Nascimento (2012), ao analisarem o desenvolvimento, com o uso da calculadora, de algumas expressões numéricas por seus alunos, relataram:

Na atividade das expressões numéricas com a calculadora, os estudantes perceberam que é necessário estar atento ao que se está calculando, ou seja, não é apenas “jogar as contas” na calculadora, visto que esta é apenas uma ferramenta e o estudante é quem tem o pensamento matemático. (p.5).

A fala desses autores vai ao encontro do que foi observado durante a análise de erros do tipo E1 na presente pesquisa. Notou-se que os alunos, por fazerem uso da calculadora, esperavam que ela daria a resposta correta de uma determinada expressão, sem levarem em conta a ordem sequencial de resolução das operações. Ou seja, para a calculadora ser uma aliada na aprendizagem matemática, é preciso que o estudante domine conhecimentos básicos sobre Números e Operações.

Sobre os erros do tipo E1, cometidos pelos estudantes ao longo da pesquisa, o autor desta dissertação recomenda a elaboração e a realização de futuras atividades, com o objetivo de lembrar o que foi visto pelo estudante no início do Ensino Fundamental sobre Números e Operações, explorando melhor os significados de conceitos numéricos. Por exemplo, pode-se lembrar os significados das operações, como resolver uma expressão numérica, além de promover o resgate do conceito e do significado de potenciação.

#### **4.4 Comentários do professor sobre as atividades realizadas**

No Questionário Diagnóstico, cinco alunos o entregaram totalmente em branco ou apenas escreveram um valor aleatório, sem fundamento algum. É

importante também dizer que alguns alunos ficaram desconfortáveis durante a aplicação do mesmo pois, embora o professor sempre frisasse que não estava “valendo ponto” e que só queria testar o que eles sabiam para fins de pesquisa, estavam incomodados por “não saberem quase nada”. Inclusive duas alunas fizeram o seguinte questionamento: “tem certeza que não está valendo ponto, né?” Os alunos, nesta ocasião, temiam que isso fosse prejudicá-los em uma possível avaliação, o que não ocorreu, pois a pesquisa não visava computar nota para o ano letivo, em nenhum momento. Ao fim da aplicação desse questionário, foi feita a seguinte pergunta: “o que vocês acharam?” e a resposta foi unânime: “estava muito difícil!”.

Durante a execução dos Exercícios 1, 2 e 3, percebeu-se um “clima de leveza” na turma. Já estavam menos desconfiados em relação ao fato de que as atividades não valiam pontos. Com isso, verificou-se que algumas duplas se destacavam mais em relação as demais.

Foi notado pelo professor-pesquisador que a turma tinha dificuldade na interpretação daquilo que era proposto pelo problema. Por algumas vezes, o professor lia o enunciado com a turma, a fim de que a compreensão do problema ficasse mais simples. Além disso, após a interpretação feita pelo professor, notou-se que os alunos desenvolviam as questões, mas mesmo assim, esqueciam de um detalhe ou outro na solução, principalmente naqueles problemas que envolviam mais de uma etapa, para serem solucionados.

Outra situação notada pelo professor-pesquisador foi a questão dos sólidos que, embora fossem disponíveis, os alunos tentavam resolver o problema sem utilizá-los, pois a figura a ser usada, segundo eles, era de fácil percepção. O problema maior era descobrir que tipo de conta ou fórmula usar. É bom salientar também que os alunos tinham acesso ao formulário, seja ele no caderno ou quadro, dado pelo professor, ou seja, além das fórmulas do caderno, o professor também as colocava no quadro, quando solicitado.

É importante também comentar sobre o comportamento das duplas. Na maioria delas, os alunos se ajudavam. Por exemplo, existiam duplas em que cada integrante fazia uma questão e, no fim, comparavam as respostas. Também havia

duplas em que os dois integrantes pensavam juntos a mesma questão. Entretanto, em outras duplas, apenas um integrante fazia porque o outro afirmava “não saber fazer” e não tentava pelo menos ajudar a sua dupla de alguma forma. E, por fim, existiam duplas que não tentavam resolver os problemas por diversos motivos: por não saberem, por terem dificuldades ou até mesmo por não quererem fazer.

Sobre o uso da calculadora, por mais que tenha sido liberado para auxiliar nas resoluções dos problemas propostos, nem todos o fizeram: uns por não possuírem essa máquina e outros por terem optado não utilizá-la. Mesmo assim, a maioria usou.

Foi interessante também a participação dos alunos mediante a correção das atividades. Pareceu que eles conseguiam desenvolver melhor quando estavam interagindo com o pesquisador e com a turma, de um modo geral em todas as questões. Talvez isso tenha ocorrido pelo fato de não ter aquela “pressão” para acertar o problema mesmo que o professor pesquisador tenha deixado bem claro para os estudantes não se sentirem pressionados de forma alguma. Pode-se afirmar também que, durante a realização da última lista, a turma estava bem mais confiante em relação ao primeiro dia das atividades

#### **4.5 Comentários dos alunos sobre as atividades realizadas**

Conforme descrito no Capítulo 3, após a correção da última lista (Exercícios 3), foi solicitado aos alunos para que formulassem comentários sobre as atividades realizadas nesta pesquisa, os quais seriam entregues na aula seguinte. Nem todos cumpriram essa tarefa, porém alguns comentários chamaram a atenção do professor-pesquisador. A seguir serão apresentados alguns desses comentários:

### 4.5.1 Comentário 1

Segue o comentário realizado pelo aluno 4:

O projeto de matemática feito pelo professor Marcos foi bom para testar o desempenho de cada aluno.

As atividades lançadas para a turma foi muito bacana, pois fez com que a turma se desenvolvesse mais em interpretação e com as contas.

Gostei mais das formas geométricas para montar e color.

Não gostei porque é muito complicada as contas e complicadas de entender.

Figura 58<sup>82</sup> - Comentário feito pelo aluno 4

Aqui este aluno apresentou, como uma parte positiva da atividade, a interação do professor com a turma, tanto na parte da interpretação das questões, quanto na correção de cada problema.

Apresentou também como algo bom a atividade de construção dos sólidos geométricos. Esse comentário reforça o que foi discutido na seção 2.3 da Capítulo 2, com respeito ao potencial lúdico envolvido nos materiais manipuláveis.

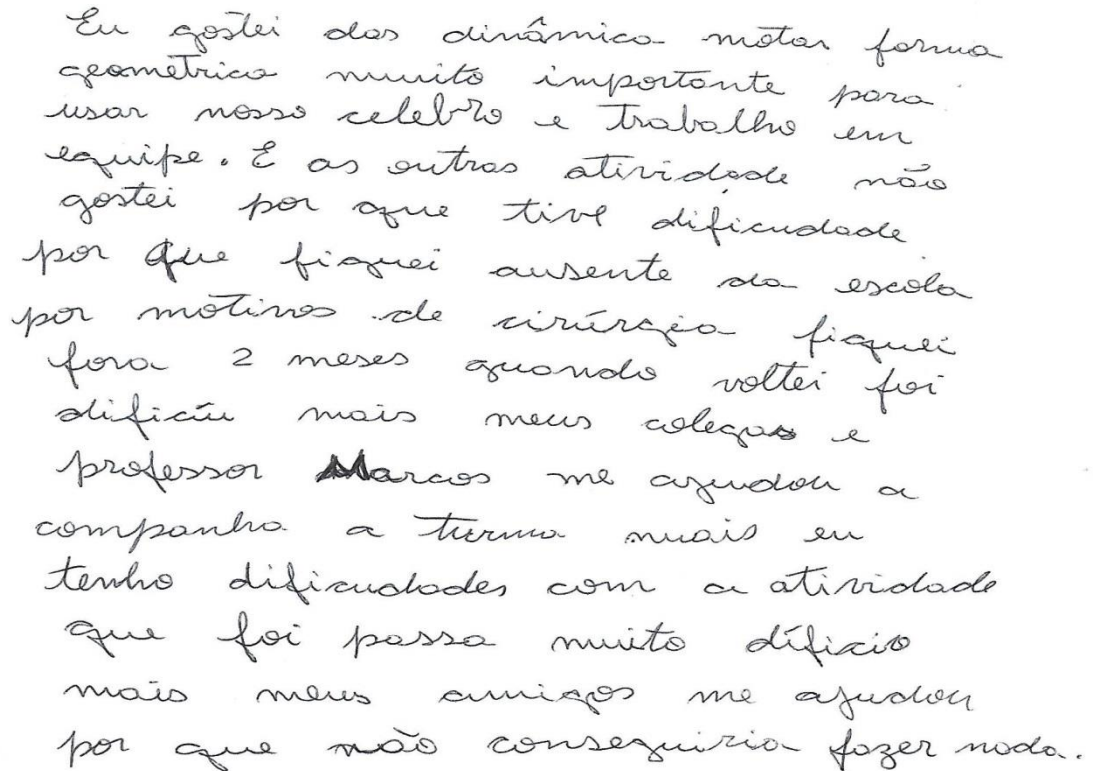
Ele também sinalizou a respeito dos problemas apresentados, dessa vez como ponto negativo, dizendo que foi difícil entender o que foi pedido. Talvez isso possa ter ocorrido pela falta do hábito de leitura ou também pela ausência do costume em resolver problemas, visto que os exercícios passados em sala no cotidiano costumam ser aqueles mais simples possíveis.

<sup>82</sup> Fonte: o autor.



## 4.5.2 Comentário 2

Segue o comentário realizado pelo aluno 10:



Eu gostei das dinâmicas, meter forma geométrica muito importante para usar nosso cérebro e trabalhar em equipe. E as outras atividades não gostei por que tive dificuldade por que fiquei ausente da escola por motivos de cirurgia fiquei fora 2 meses quando voltei foi difícil mais meus colegas e professor Marcos me ajudou a acompanhar a turma mais eu tenho dificuldades com a atividade que foi passa muito difícil mais meus amigos me ajudou por que não conseguiria fazer nada.

Figura 59<sup>83</sup> - Comentário feito pelo aluno 10

Aqui este aluno também apresentou, como parte positiva da pesquisa, a atividade que envolvia a construção de alguns sólidos geométricos, como também o trabalho em equipe realizado durante a maioria das atividades.

Ele relatou que sentiu dificuldades nas demais atividades, pelo fato de ter se ausentado da escola durante dois meses, por conta de um procedimento cirúrgico e citou a importância dos colegas de classe, assim como do professor-pesquisador, na ajuda à realização dos exercícios.

Os comentários realizados por este aluno reforçam a importância de se realizar mais atividades em grupo em sala de aula, que estimulem ações colaborativas entre os alunos, conforme foi defendido na seção 2.1 do Capítulo 2 desta dissertação.

---

<sup>83</sup> Fonte: o autor.

### 4.5.3 Comentário 3

Segue o comentário realizado pelo aluno 8:

Durante todo o projeto foi muito interessante, tirar proveito de um trabalho como esse. No começo foi um pouco difícil mas depois foi melhorando, prestando bem atenção nas correções e refazendo em casa de novo. em relação ao ensino de Mortos foi maravilhoso, é uma pessoa paciente e que me ajuda muito. Um agradecimento especial para o professor e toda sua equipe e banca, de seu mestrado. Gostei muito da dinâmica, Material excelente. muito obrigada pela paciência com os alunos.

Figura 60<sup>84</sup> - Comentário feito pelo aluno 8

Este aluno comentou sobre a dificuldade encontrada durante as atividades e comentou como fez para tentar driblá-la. Este comentário chamou muito a atenção porque, diferente de todos os outros enviados, o aluno 8 relatou que tentou refazer em casa os exercícios passados em sala. O professor-pesquisador notou que este aluno, em especial, sempre se mostrou atento durante as resoluções e não desistia de cada questão, nunca as deixando em branco, escrevendo sempre o que pensava, mesmo sabendo que faltava um “algo a mais”. Conforme dito na seção 2.2 do Capítulo 2, diante do desafio proporcionado por um problema, o estudante pode ser levado a um comportamento desafiador, o que faz o mesmo a encará-lo como uma meta.

---

<sup>84</sup> Fonte: o autor.

#### 4.5.4 Comentário 4

Segue o comentário realizado pelo aluno 1:

Bom, eu gostei das atividades em sala, apesar de ter pouca aptidão em analisar ou resolver qualquer resolução que envolva formas geométricas, e esse é um problema que vem me permeando desde o ensino fundamental. Muitos dizem que é "TOC", já outros, ansiedade. Estar diante de desafios, como esse, que nada mais medem o esforço do aluno, me incentiva a entender amplamente a matéria dada e tentar no instante resolvê-la, mesmo que eu fracasse. Isso me gera motivação para querer aprender e estudar mais a fundo sobre geometria espacial, por exemplo, e aprimorar as dificuldades que ainda me restam. Posso me considerar o tipo de pessoa que não tolera desvios, por mais difíceis (e exaustos) que sejam, uma hora ou outra consigo aprender - e pensar dessa forma até me gera um otimismo tomado nos estudos. Tive uma boa e má experiência participando desse trabalho, mas faz parte. É através do esforço que podemos ser alguém na vida, e não será diferente daqui. Além de ter mencionado só as dificuldades que tive, pude aprender a memorizar as fórmulas de cada forma geométrica, embora o meu nervosismo suba mais a cabeça do que a minha capacidade em saber resolvê-las. Era complexo demais para mim, porém, se eu tivesse tido mais foco, talvez a situação seria outra.

Figura 61<sup>85</sup> - Comentário feito pelo aluno 1

A seguir, será feita a transcrição do comentário realizado pelo aluno 1 (figura 61).

Bom, eu gostei das atividades em sala, apesar de ter pouca aptidão em analisar ou resolver qualquer resolução que envolva formas geométricas, e esse é um problema que vem me permeando desde o ensino fundamental. Muitos dizem que é "TOC", já outros, ansiedade. Estar diante de desafio, como esse, que nada mais medem o esforço do aluno, me incentiva a entender amplamente a matéria dada e tentar no instante resolvê-la, mesmo que eu fracasse. Isso me gera motivação para querer aprender e estudar mais a fundo sobre geometria espacial, por exemplo, e aprimorar as dificuldades que ainda me restam. Posso me considerar o tipo de pessoa que não tolera desvios, por mais difíceis (e exaustos) que sejam, uma hora ou outra consigo aprender - e pensar dessa forma até me gera um ânimo danado nos estudos. Tive uma boa e má experiência participando desse trabalho, mas faz parte. É através do esforço que podemos ser alguém na vida, e não será diferente daqui. Além de ter mencionado só as dificuldades que tive, pude aprender a memorizar as fórmulas de cada forma geométrica, embora o meu nervosismo suba mais a cabeça do que a minha capacidade em saber resolvê-las. Era complexo demais para mim, porém, se eu tivesse tido mais foco, talvez a situação seria outra. (ALUNO 1, 2019)

<sup>85</sup> Fonte: o autor.

Este aluno relatou o que ocorre com boa parte dos estudantes que ingressa no Ensino Médio, oriundos de uma escola pública. Em geral, eles vêm com uma defasagem muito grande de conteúdos e de interpretação de textos. Alguns, inclusive, possuem dificuldades de leitura.

Este aluno também relatou que o desafio proposto em sala o motivou a estudar e nunca desistir, mesmo que ele tenha sentido várias dificuldades com isso. Ele concluiu que houve uma mistura de experiências durante a atividade. Uma boa experiência por ter conseguido memorizar as fórmulas e ter se sentido motivado, e uma má por não ter conseguido se dedicar, o que o dificultou muito.

Nos comentários, ele deixou transparecer que costuma ficar muito ansioso diante de problemas envolvendo formas geométricas. É muito provável que essa ansiedade tenha interferido no desempenho dele nas tarefas realizadas. Esse fato corrobora o comentário de Amarante (2009) (veja a seção 4.3), em relação a uma possível interferência de aspectos psicológicos no desempenho do aluno em tarefas em sala de aula.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mediante o exposto na seção 2.1 do Capítulo 2, o professor de Matemática é desafiado diariamente a lecionar da forma mais agradável possível, para que consiga despertar a atenção e o interesse de um alunado, que costuma chegar desmotivado em sala de aula.

Este trabalho contribuiu para melhorar ainda mais a relação do professor com os alunos pesquisados e motivá-los a desenvolver, não somente a disciplina de Matemática, mas também despertar o interesse pelo estudo de uma forma geral. Além disso, foi notado também que alguns alunos, após a experiência, se mostraram mais seguros na resolução de problemas, e outros se interessaram pelo conteúdo, achando “bem legal”. A pesquisa ocorreu mediante um clima bem amistoso por parte do professor para com os alunos e vice-versa. Nenhum incidente ocorreu durante as atividades desenvolvidas.

As atividades propostas foram consideradas um pouco diferentes daquelas que tradicionalmente são propostas em sala, no ensino noturno, por professores de Matemática. Conforme comentado nesta dissertação, os exercícios normalmente desenvolvidos com os alunos, no período noturno, são aqueles mais simples possíveis, que têm como objetivo apenas fazer a fixação do conteúdo. Já a pesquisa abordada surgiu com uma proposta diferente da tradicional. Isso vai desde a construção dos sólidos até a resolução de problemas individualmente ou em dupla/trio.

Lembrando que o objetivo geral dessa pesquisa foi analisar os principais tipos de erros, cometidos por alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio da rede pública, na resolução de problemas de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos, ele foi cumprido no Capítulo 4.

Cabe comentar que alguns erros encontrados tiveram algum fundamento (confusão conceitual geométrica ou problema de interpretação do texto). Entretanto, a maioria dos erros envolveram respostas sem sentido, respostas em branco ou “tropeços” aritméticos. Ao comparar os resultados encontrados na presente dissertação com aqueles alcançados pelos trabalhos citados na seção 2.5 do

Capítulo 2, notou-se que existem equívocos que se assemelham entre eles, como erros na interpretação textual, confusão entre grandezas, entre outros.

Nos parágrafos seguintes, será lembrado cada objetivo específico do trabalho, grafado em itálico para destacá-lo, acompanhado da indicação sobre o cumprimento ou não do mesmo na pesquisa realizada.

- *Identificar conhecimentos prévios dos alunos pesquisados sobre áreas de superfícies e volumes de sólidos geométricos.*

Esse objetivo foi cumprido com sucesso, após a aplicação e a análise do Questionário Diagnóstico.

- *Esclarecer aos alunos a diferença entre figuras planas e espaciais, com auxílio de materiais manipuláveis.*

Esse objetivo foi cumprido, com algumas ressalvas. Quando eram divulgadas as figuras, de forma isolada, os alunos não tinham dificuldade em identificá-las como planas ou espaciais. Mas alguns deles se confundiam frequentemente, não conseguindo corresponder corretamente a fórmula do cálculo da área de superfície ou do volume à figura relacionada.

- *Explicar aos alunos como encontrar áreas de superfícies e volumes de determinados sólidos geométricos.*

Esse objetivo também foi cumprido, com ressalvas. Como foi dito anteriormente, alguns alunos não conseguiam fazer a associação correta da fórmula de volume ou de área de superfície à figura correspondente.

- *Usar técnica de resoluções de problemas e materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem de áreas de superfícies e de volumes de sólidos geométricos.*

Esse objetivo foi parcialmente cumprido. Por alguns momentos, o uso de materiais manipuláveis não foi possível, por falta de recursos (por exemplo, nas questões que envolviam esferas ou seções dessas). Sobre a técnica de resolução de problemas, ensinada aos alunos pelo professor-pesquisador, era perceptível que poucos a utilizavam durante a obtenção das soluções das questões.

- *Discutir os principais tipos de erros cometidos por esses alunos, na resolução dos problemas propostos.*

Esse objetivo foi cumprido, com ressalvas. Embora a discussão dos erros ocorridos tenha sido realizada com os alunos no fim de cada atividade, foi percebido que vários deles não conseguiram avançar na aprendizagem. O que sinaliza esse fato é a grande quantidade de respostas em branco (E5) ou erros totais (E4), durante as atividades propostas.

Mediante o exposto, considerou-se o trabalho bem sucedido, pois as expectativas e objetivos sobre as atividades realizadas foram concluídos, mesmo que de forma parcial em alguns casos.

Uma proposta de futuro desdobramento para esta pesquisa é a sua realização em turmas do Ensino Médio dos turnos matutino e vespertino da mesma instituição de ensino. Neste caso, a futura pesquisa contará com um número maior de alunos, além de menos ausências às atividades. As várias ausências às aulas noturnas acabaram gerando um problema de descontinuidade na realização das atividades pelos alunos pesquisados.

Outra proposta de desdobramento da pesquisa é a elaboração de sequências didáticas que visem diminuir a quantidade de erros cometidos pelos alunos na resolução dos problemas envolvendo sólidos geométricos, além da aplicação dessas sequências com os alunos envolvidos, para verificar se as mesmas, de fato, surtirão efeitos positivos na aprendizagem.

Este trabalho também serve de sugestão para se repensar o modo em que se avaliam os alunos no ensino básico regular, principalmente no período noturno. Por exemplo, uma dupla trabalhando de forma conjunta e séria tende a ter um rendimento melhor, em comparação a um aluno atuando de forma individual. Além disso, a metodologia de análise de erros serve para se aferir onde está ou estão as maiores dificuldades que um aluno possivelmente enfrenta, mediante um exercício ou problema mais elaborado.

Em suma, a principal reflexão que este trabalho deixa é a importância de se observar os erros cometidos pelos alunos, não mais de forma pejorativa e taxativa, mas sim como importantes aliados para se repensar a prática docente e para gerar novas experiências e oportunidades de aprendizagem com os alunos.

## REFERÊNCIAS

- AGRANIONI, N. T.; ENRIGONE, J. R. B. ZATTI, F. Aprendizagem Matemática: desvendando dificuldades de cálculo dos alunos. **Perspectiva**, Erechim, n.128, p. 115-132, dez. 2010. Disponível em: [http://www.uricer.edu.br/site/pdfs/perspectiva/128\\_142.pdf](http://www.uricer.edu.br/site/pdfs/perspectiva/128_142.pdf). Acesso em: 29 jun. 2020.
- AMARANTE, J. M. N. do. **Análise de Erros**: reflexões sobre o ensino de geometria no município de Óbidos - PA a partir de questões da OBMEP. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2019. Disponível em: <https://www.proformat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=An%C3%A1lise+de+erros&aluno=>. Acesso em: 06 jul. 2020.
- BARBOSA, L. D. F.; COSTA, G. A.; FEITOSA, A. J. R. **Material manipulável no ensino de geometria espacial**. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/pibid/attachments/article/18/Material%20Manipulavel.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2020.
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática** / Secretária de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2020.
- BRITO, M. R. F. Contribuições da psicologia educacional à educação matemática. In: \_\_\_\_\_. **Psicologia da educação matemática**: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2005. p. 49-64.
- CORDEIRO, C. C. **Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. 2009. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) – Faculdade de Matemática, Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, Duque de Caxias, 2009. Disponível em: <http://tede.unigranrio.edu.br/handle/tede/18>. Acesso em: 06 jul. 2020.
- CRUZ, L. F. da; SILVA, J. L. C. da; TAVARES, R. Avaliação matemática nos 8º anos do Ensino Fundamental II da Escola Estadual Pe. Pedro Gislandy. In: **Revista Psicologia & Saberes**, v.9, n.15, 2020. DOI: <https://doi.org/10.3333/rps.v9i15>. Disponível em: <http://revistas.cesmac.edu.br/index.php/psicologia/article/view/1161>. Acesso em: 24 jun. 2020.
- CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- CURY, H.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. A análise de erros como metodologia de investigação. In: PROFMAT, 2009, Viana do Castelo-Portugal. **Anais[...]**. Lisboa: APM, 2009. p. 1-12. Disponível em: [http://www.apm.pt/files/142359\\_CO\\_Cury\\_Bisognin\\_Bisognin\\_4a36c5d50a09a.pdf](http://www.apm.pt/files/142359_CO_Cury_Bisognin_Bisognin_4a36c5d50a09a.pdf). Acesso em: 15 abr. 2020.



DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

EMMERT, R. de F.; OLIVEIRA, V. B. de M. **As Dificuldades de Interpretação Apresentadas Pelos Discentes do Ensino Médio**, 2018. Disponível em: <http://www.academia.edu/download/57174732/381282996-Estudios-e-praticas-de-ensino-de-Lingua-Portuguesa-Literatura-e-Artes.pdf#page=61>. Acesso em: 28 jun. 2020.

FUCK, R. Análise de Erros em Geometria: uma investigação com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, n. 2, p. 16-36, 27 dez. 2013. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/823>. Acesso em: 06 jul. 2020.

GAZIRE, E. S.; RODRIGUES, F. C. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *In*: **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p187>. Acesso em: 26 abr. 2020.

KIKUCHI, L. M.; TREVIZAN, W. A. Obstáculos Epistemológicos na Aprendizagem de Grandezas e Medidas na Escola Básica. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EBRAPEM, 14., 2010, Campo Grande. **Anais [...]**. Campo Grande: UFMS, 2010. p. 2-18. Disponível em: [https://www.researchgate.net/profile/Luzia\\_Kikuchi/publication/305398926\\_Obstaculos\\_Epistemologicos\\_na\\_Aprendizagem\\_de\\_Grandezas\\_e\\_Medidas\\_na\\_Escola\\_Basica/links/578d0f1908ae5c86c9a6532e/Obstaculos-Epistemologicos-na-Aprendizagem-de-Grandezas-e-Medidas-na-Escola-Basica.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Luzia_Kikuchi/publication/305398926_Obstaculos_Epistemologicos_na_Aprendizagem_de_Grandezas_e_Medidas_na_Escola_Basica/links/578d0f1908ae5c86c9a6532e/Obstaculos-Epistemologicos-na-Aprendizagem-de-Grandezas-e-Medidas-na-Escola-Basica.pdf). Acesso em 29 jun. 2020.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na Matemática escolar**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1998.

LEITE, M. D.; PIMENTEL, A. R.; OLIVEIRA, F. D. Um estudo sobre classificação de erros: uma proposta aplicada a Objetos de Aprendizagem. **Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - SBIE)**, [S.l.], out. 2012. ISSN 2316-6533. Disponível em: <https://br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1594/1359>. Acesso em 02 mai. 2020.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem Matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Revista Conjectura**. Caxias do Sul, v. 14, n. 2, mai./ago. 2009. Disponível em: <http://ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/17>. Acesso em 28 jun. 2020.

MESQUITA, C. G. R. Deu branco, e agora? – uma abordagem matemática. *In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED*, 23., 2000, Caxambu. **Anais [...]**. Caxambu: ANPED, 2000. p. 1 -14. Disponível em: [http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/deu\\_branco.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/deu_branco.pdf). Acesso em 24 jun. 2020.

MODEL, S. L. **Dificuldades dos alunos com a simbologia Matemática**. 2005. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul) – Faculdade de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3493/1/336561.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2020.

MORAES, C. R.; VARELA, S. Motivação do aluno durante o processo de ensino-aprendizagem. **Revista eletrônica de Educação**, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2007. Disponível em: [https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/55285815/MOTIVACAO\\_DO\\_ALUNO\\_DURANTE\\_O\\_PROCESSO\\_DE\\_ENSINOAPRENDIZAGEM.pdf?1513224182=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DMOTIVACAO\\_DO\\_ALUNO\\_DURANTE\\_O\\_PROCESSO\\_DE.pdf&Expires=1600455142&Signature=Bf6AgosFTwRtbb75-nxZMuJb2bfAu8iOmc8ViCESbXuzmAivHtAhsSNBoLPsU9Oh7ydLrntCzszwZGBWEFnzNFmzmDAFX39MLzZlaWtoC1FavHfCpv6DVkTKErQ5P5XpLYzY6vgACHZE89SWgEVZvxispFpKe6TF8WmIRfVeyGVF3m0eWHOvPOEE-mD~REzBqkVM-AfmwiCTBK86Ksh4388xTio8cwoN3MAzviOYKCOX0OVnl9TRfZ4NHV80F8i38933cfzMhmiMsEo0skbMQecq8P9AsYpiB71jmwah2KsyZ2XIK5GKbyD1bUGPaKHnm1I3~qwZSlS Wc08karnbMA\\_\\_&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA](https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/55285815/MOTIVACAO_DO_ALUNO_DURANTE_O_PROCESSO_DE_ENSINOAPRENDIZAGEM.pdf?1513224182=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DMOTIVACAO_DO_ALUNO_DURANTE_O_PROCESSO_DE.pdf&Expires=1600455142&Signature=Bf6AgosFTwRtbb75-nxZMuJb2bfAu8iOmc8ViCESbXuzmAivHtAhsSNBoLPsU9Oh7ydLrntCzszwZGBWEFnzNFmzmDAFX39MLzZlaWtoC1FavHfCpv6DVkTKErQ5P5XpLYzY6vgACHZE89SWgEVZvxispFpKe6TF8WmIRfVeyGVF3m0eWHOvPOEE-mD~REzBqkVM-AfmwiCTBK86Ksh4388xTio8cwoN3MAzviOYKCOX0OVnl9TRfZ4NHV80F8i38933cfzMhmiMsEo0skbMQecq8P9AsYpiB71jmwah2KsyZ2XIK5GKbyD1bUGPaKHnm1I3~qwZSlS Wc08karnbMA__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA). Acesso em: 25 fev. 2020.

NASCIMENTO, T. M.; SILVA, F. V. G. Experiências do projeto “Expressões numéricas e radiciação: uma abordagem contextualizada” na escola Maria do Carmo Carneiro. *In: Encontro Nacional PBID-Matemática*, 1, 2012, Santa Maria. **Anais [...]**. Santa Maria: UFSM, 2012. p. 1-7. Disponível em: [https://www.ufsm.br/cursos/pos-graduacao/santa-maria/ppgemef/wp-content/uploads/sites/534/2020/03/PO\\_Silva\\_Francisca\\_Valdielle.pdf](https://www.ufsm.br/cursos/pos-graduacao/santa-maria/ppgemef/wp-content/uploads/sites/534/2020/03/PO_Silva_Francisca_Valdielle.pdf). Acesso em: 29 jun. 2020.

NEWELL, A.; SIMON H.; **Human Problem Solving**. Engliwood Cliffs: Prentice-Hall, 1972.

PAIAS, A. M. **Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicados a alunos do Ensino Fundamental e Médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11385/1/Ana%20Maria%20Paias.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

PERRENOUD, P. **Avaliação da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PERRENOUD, P. **Formando Professores Profissionais: Quais estratégias? Quais competências?** Tradução: Fátima Murad e Eunice Gruman. Porto Alegre: Artmed, 2001.

POLYA, G.; **How to solve it**. Princeton: Doubleday, 1945.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In: POZO, J. I. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RADATZ, H. Students errors in the mathematical learning process: a survey. **For the Learning of Mathematics**. p. 16-19. 1 jul. 1980. Disponível em: [https://flm-journal.org/Articles/flm\\_1-1\\_Radatz.pdf](https://flm-journal.org/Articles/flm_1-1_Radatz.pdf). Acesso em: 02 mai. 2020.

SANTOS, R. R. dos. **Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014. Disponível em: <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/5538>. Acesso em: 06 jul. 2020.

SARMENTO, A. K. C. A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática. **Anais[...]**, Teresina, 2010. Disponível em: [http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT\\_02\\_18\\_2010.pdf](http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf). Acesso em: 27 jun. 2019.

SCOLARO, M. A. O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. **Anais[...]**, Francisco Beltrão, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>. Acesso em 26 abr. 2020.

SILVA, L. R. da; BÔAS, J. V. CONTRIBUIÇÕES DO USO DE MANIPULÁVEIS COMO ESTRATÉGIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO. **Ensino em Foco**, [S.l.], v. 2, n. 4, p. 85-98, abr. 2019. ISSN 2595-0479. Disponível em: <https://publicacoes.ifba.edu.br/index.php/ensinoemfoco/article/view/473>. Acesso em: 25 fev. 2020.

SILVA, M. C. N.; BURIASCO, R. L. C. de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 499-511, dez. 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n3/11.pdf>. Acesso em 02 mai. 2020.

SILVA, M. J. da; Modelagem matemática na educação de jovens e adultos. *In: Revista Partes*, São Paulo, 2018. Disponível em: <https://www.partes.com.br/2018/05/23/modelagem-matematica-na-educacao-de-jovens-e-adultos/>. Acesso em: 23 abr. 2020.

SMOLE, K. S. e DINIZ, M.I. (orgs.) **Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades Básicas para Aprender Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOUZA, R. R. B. de. **Análise de erros em um contexto geométrico envolvendo alunos do 9º ano do ensino fundamental**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal De São Carlos, Sorocaba, 2016. Disponível em:

<http://www.matematicasorocaba.ufscar.br/arquivos/tcc-rodrigo-r-baltazar-de-souza.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.

VALE, I.; BARBOSA, A. Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em:

[https://www.researchgate.net/profile/Ana\\_Barbosa13/publication/277620264\\_Materiais\\_manipulaveis\\_para\\_aprender\\_e\\_ensinar\\_geometria/links/5575676108aeb6d8c0195723/Materiais-manipulaveis-para-aprender-e-ensinar-geometria.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ana_Barbosa13/publication/277620264_Materiais_manipulaveis_para_aprender_e_ensinar_geometria/links/5575676108aeb6d8c0195723/Materiais-manipulaveis-para-aprender-e-ensinar-geometria.pdf). Acesso em: 23 abr. 2020.

## ANEXO A – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

1. (Questão adaptada) Uma peça de vidro tem o formato e as medidas da figura abaixo. Qual a área total da superfície da peça? (Dado: a altura de cada face triangular é de aproximadamente 17,3 cm).

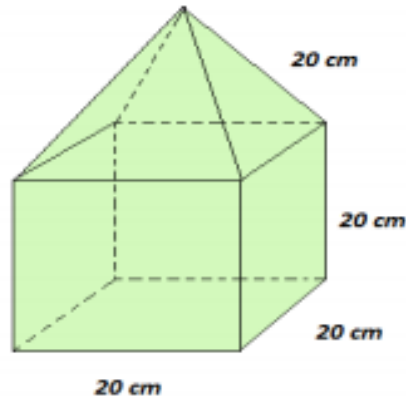


Figura 62<sup>86</sup>

2. (VUNESP, 2016 - adaptada) Um recipiente tem o formato de um prisma reto de base quadrada com 12 cm de lado e 26 cm de altura, conforme mostra a figura, e está completamente cheio de água, que será transferida para jarras, cada uma delas com capacidade máxima de 720 ml.

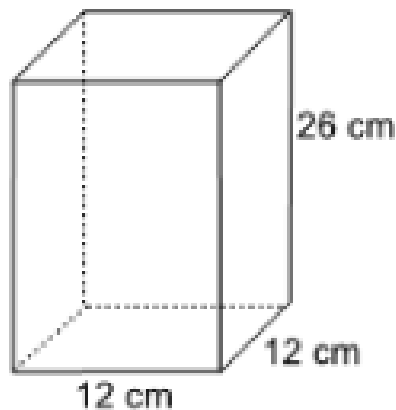


Figura fora de escala

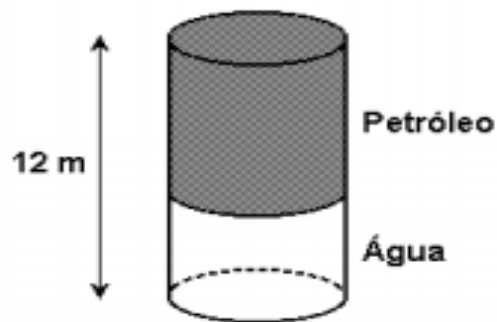
Figura 63<sup>87</sup>

Qual o número máximo de jarras que poderão ser totalmente enchidas com a água desse recipiente? Considere:  $1\text{ cm}^3=1\text{ ml}$ .

<sup>86</sup> Fonte: <http://www.colegioanhanguera.com.br/wp-content/uploads/2016/09/MATEM%C3%81TICA-FL%C3%81VIO-P2-III-BIMESTRE2.pdf>

<sup>87</sup> Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/23139505>

3. Uma laranja tem o formato de uma esfera com 10 cm de diâmetro. Qual a área ocupada pela casca da laranja? (Adote  $\pi = 3$ )
4. (VUNESP, 2010 - adaptada) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto de raio 6 metros na posição vertical, está completamente cheio com água e petróleo. Se a altura do tanque correspondente à parte de petróleo é 8 metros e da água 4 metros, qual o volume de cada parte separada (água e óleo) e do tanque?

Figura 64<sup>88</sup>

---

<sup>88</sup> Fonte:

[http://www.singularsaobernardo.com.br/portal/emd/ar/professores/Flaber/FLABER%20%20Lista%20de%20Exerc%C3%ADcios%20Geo%20Espacial%20PRISMAS,%20PIR%C3%82MIDES,%20CONES,%20CILINDROS%20\(3.%C2%BA%20Tri\)%202016.pdf](http://www.singularsaobernardo.com.br/portal/emd/ar/professores/Flaber/FLABER%20%20Lista%20de%20Exerc%C3%ADcios%20Geo%20Espacial%20PRISMAS,%20PIR%C3%82MIDES,%20CONES,%20CILINDROS%20(3.%C2%BA%20Tri)%202016.pdf)

## ANEXO B – ATIVIDADE ENVOLVENDO MONTAGEM DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

As figuras abaixo estão planificadas. Recorte e cole cada figura a seguir de maneira adequada e sinalize qual o nome do sólido que você encontrou.

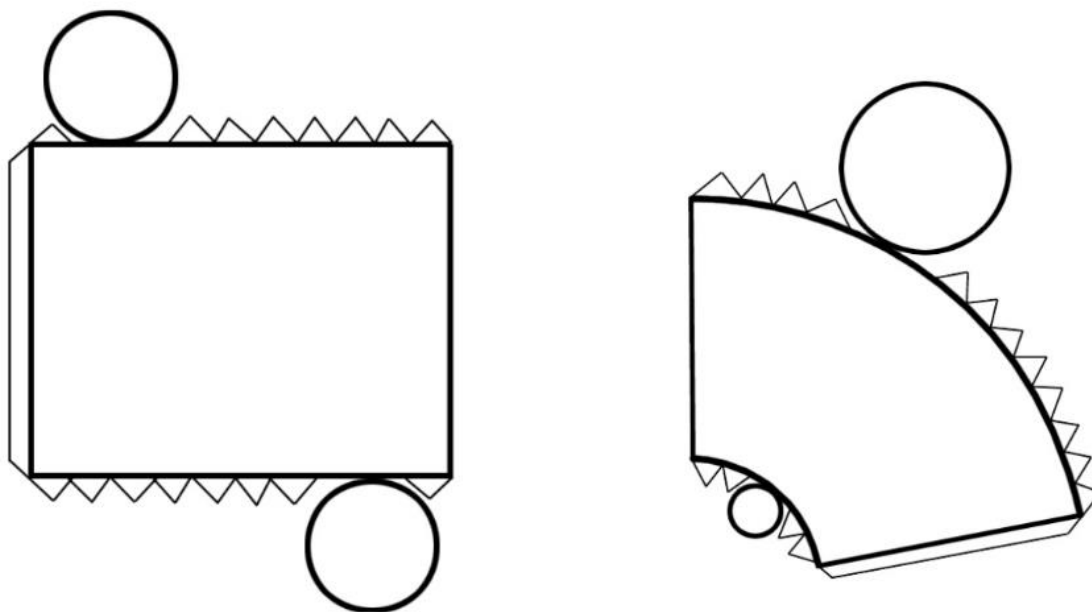


Figura 65<sup>89</sup>

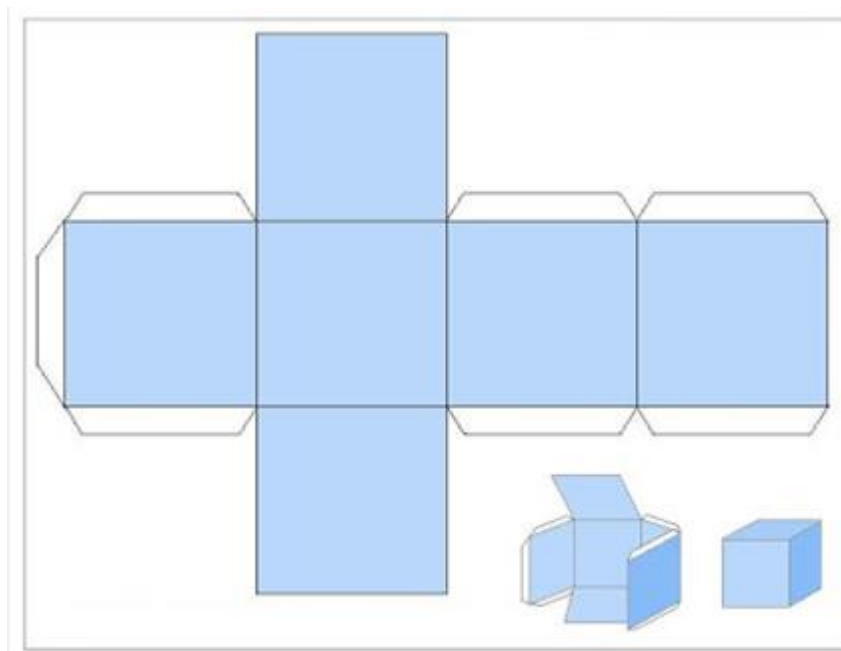
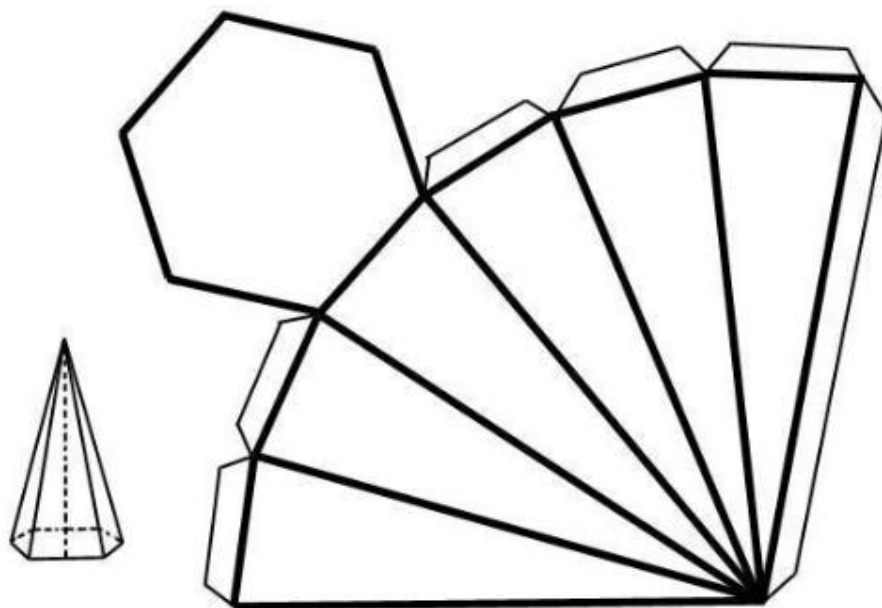
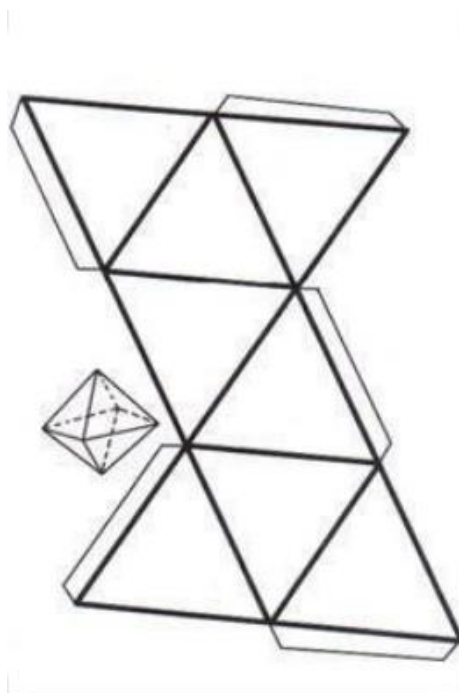


Figura 66<sup>90</sup>

<sup>89</sup> Fonte: <https://pt.slideshare.net/evamariachavarriareynaga/moldes-de-cuerpos-geomtricos>

<sup>90</sup> Fonte: <http://mathematikando.blogspot.com/2013/06/planificacao-do-cubo.html>

Figura 67<sup>91</sup>Figura 68<sup>92</sup>

---

<sup>91</sup> Fonte: <https://artes.umcomo.com.br/artigo/como-fazer-uma-piramide-com-base-hexagonal-2232.html>

<sup>92</sup> Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/361765782554132711/>



## ANEXO C – EXERCÍCIOS 1

1. As **pirâmides do Egito** são túmulos construídos em pedra para abrigar os corpos dos faraós.

Há 123 pirâmides catalogadas, no entanto, as três mais conhecidas são Quéops, Quéfren e Miquerinos, na península de Gizé.



Figura 69<sup>93</sup>

Este conjunto arquitetônico é guardado pela Esfinge, um ser mitológico com corpo de leão e a cabeça de um faraó.

A figura abaixo representa uma maquete de uma pirâmide do Egito que está apoiada sobre uma mesa com formato de um cubo de aresta 1m.

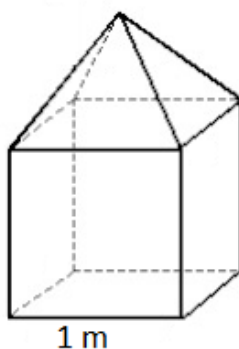


Figura 70<sup>94</sup>

---

<sup>93</sup> Fonte: <https://www.todamateria.com.br/as-piramides-do-egito/>

Esta pirâmide vai ser colorida apenas nas laterais por um pintor que usará uma tinta laranja. Sabendo que a altura do cubo é a mesma da pirâmide, quantos metros quadrados de tinta este pintor utilizará?

2. (VUNESP, 2002) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.

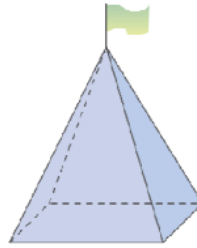


Figura 71<sup>95</sup>

Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, qual o volume de concreto (em m<sup>3</sup>) necessário para a construção da pirâmide?

3. (PUC-RS, 2012 - adaptada) A quantidade de materiais para executar uma obra é essencial para prever o custo da construção. Quer-se construir um telhado cujas dimensões e formato são indicados na figura abaixo.

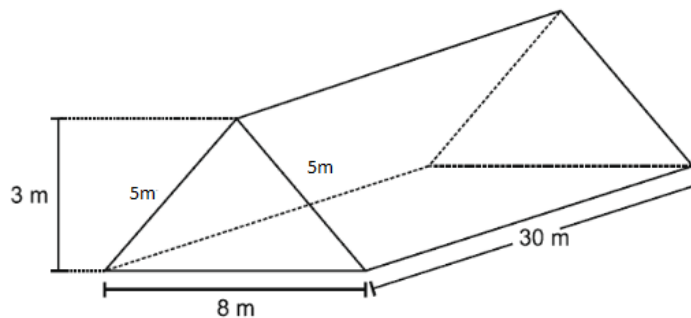


Figura 72<sup>96</sup>

<sup>94</sup> Fonte: [https://professor.bio.br/matematica/provas\\_questoes.asp?section=geometria-espacial&curpage=25](https://professor.bio.br/matematica/provas_questoes.asp?section=geometria-espacial&curpage=25)

Obs.: A figura 10 foi editada. A fonte citada remete a figura original.

<sup>95</sup> Fonte: <http://www.colegioanhanguera.com.br/wpcontent/uploads/2016/09/MATEM%C3%81TICA-FL%C3%81VIO-P2-III-BIMESTRE2.pdf>

<sup>96</sup> Fonte: <https://www.mundoedu.com.br/uploads/pdf/5a04d84a8cb2d.pdf>

Qual a quantidade de telhas de tamanho 15 cm por 20 cm necessárias para fazer esse telhado? Lembrar que: 1m = 100 cm

## ANEXO D – EXERCÍCIOS 2

1. (UFSM, [19--?] - adaptada) Em um espaço cultural uma sala de exposições de obras de arte deverá ser pintada. Sabendo que, para pintar  $36 \text{ m}^2$ , é necessário 1 galão de tinta e que a sala tem a forma e dimensões como mostra a figura, então qual o número de galões de tinta necessário para pintar as paredes e o teto?

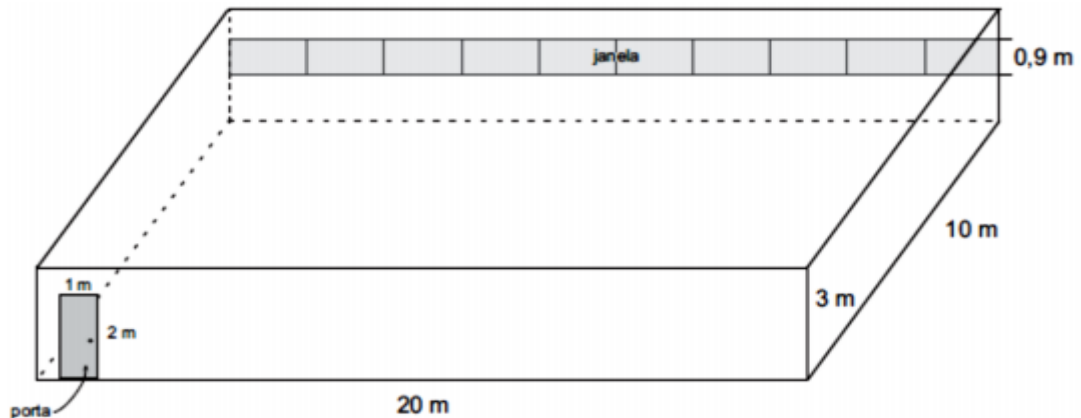


Figura 73<sup>97</sup>

2. (FFT, [19--?] - adaptada) Considere a Terra como uma esfera de raio  $6.370 \text{ km}$ . Qual é sua área superficial? Descobrir a área da superfície coberta por terra, sabendo que ela corresponde a, aproximadamente, quarta parte da superfície total.



Figura 74<sup>98</sup>

3. (ENEM, 2010 - adaptada) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério conforme a figura.

<sup>97</sup> Fonte:

<http://www.avagaeminha.com.br/vmlogin/uploads/fe3668c60b7d1314df6127664afe9707.pdf>

<sup>98</sup> Fonte: <https://canal.cecierj.edu.br/012016/98aea76e5ab149210ed14b8475f2442f.pdf>

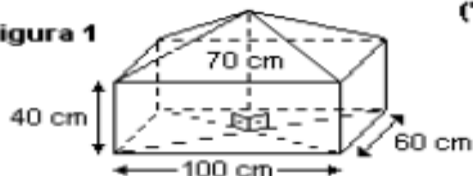
Figura 75<sup>99</sup>

Qual o volume de champanhe contido em 20 taças iguais a da figura? (Adote  $\pi = 3$ )

4. (UERJ, 2002 - adaptada) Leia os quadrinhos:



Figura 1

Figura 76<sup>100</sup>

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo. Assim, qual o volume de terra acumulado no carrinho?

<sup>99</sup> Fonte: <https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2010/segundo-dia/em-um-casamento-os-donos-da-festa-serviam-champanhe-aos-seus-convidados-em-tacas-com-formato-de-um/>

<sup>100</sup> Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27843>

### ANEXO E – EXERCÍCIOS 3

1. (PUC-PR, 2010 - adaptada) A figura mostrada a seguir representa uma embalagem de papelão em perspectiva, construída pelo processo de corte, vinco e cola. Determine a quantidade de material para fabricar 500 embalagens, sabendo que a aresta da base mede 10 cm e a altura mede 30 cm. (Observação: desconsidere o material utilizado para fazer as abas da embalagem)

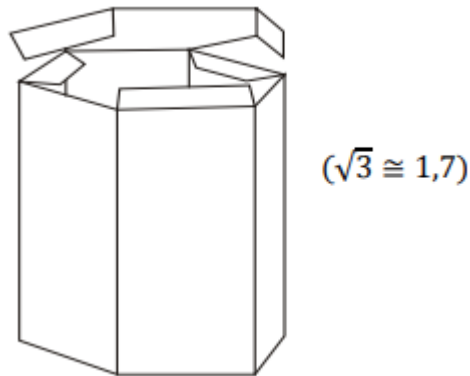


Figura 77<sup>101</sup>

2. Considere uma laranja com o formato esférico de raio 4 cm, composta por 12 gomos exatamente iguais. Qual a superfície total de cada gomo? (Adote  $\pi = 3$ )
3. Uma fábrica de bombons deseja produzir 20 000 unidades de bom bons de chocolate puro, sem recheio, no formato de uma esfera de raio 1 cm. Determine o volume de cada bombom e o volume total de chocolate necessário para produzir esse número de bombons. (Adote  $\pi = 3$ )
4. (UCPEL, 2011) Uma esfera metálica de 3 cm de raio é colocada em um congelador e, após algum tempo, acumula uma camada de gelo de 3 cm de espessura, mantendo a forma esférica. Então, qual o volume do gelo acumulado? (Adote  $\pi = 3$ )<sup>102</sup>

<sup>101</sup> Fonte:

<http://www.avagaeminha.com.br/vmlogin/uploads/fe3668c60b7d1314df6127664afe9707.pdf>

<sup>102</sup> Fonte da questão: <https://enem.estuda.com/questoes/?id=449914>

## ANEXO F – CARTA DE ANUÊNCIA



### **CARTA DE ANUÊNCIA (Elaborado de acordo com a Resolução 466/2012-CNS/CONEP)**

Aceito os pesquisadores Marcos Vinícius Silva da Costa e Aline Mauricio Barbosa (orientador), sob responsabilidade do pesquisador principal Marcos Vinícius Silva da Costa, do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – PROFMAT/UFRRJ a realizarem pesquisa intitulada “Resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência numa turma de segundo ano do Ensino Médio da rede pública, sob orientação da Professora Aline Mauricio Barbosa.

Ciente dos objetivos e da metodologia da pesquisa acima citada, concedo a anuência para seu desenvolvimento, desde que me sejam assegurados os requisitos abaixo:

- O cumprimento das determinações éticas da Resolução nº466/2012 CNS/CONEP.
- A garantia de solicitar e receber esclarecimentos antes, durante e depois do desenvolvimento da pesquisa.
- Não haverá nenhuma despesa para esta instituição que seja decorrente da participação dessa pesquisa.
- No caso do não cumprimento dos itens acima, a liberdade de retirar minha anuência a qualquer momento da pesquisa sem penalização alguma.

Seropédica, \_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019

---

Assinatura e carimbo do responsável

**ANEXO G – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (ADULTOS)****TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO****(Adultos)****UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO****PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**Título do Projeto:** Resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência numa turma de segundo ano do ensino médio da rede pública

**Pesquisador(a):** Marcos Vinícius Silva da Costa

**Pesquisador(a) responsável (professor(a) orientador(a)):** Aline Mauricio Barbosa

Este documento que você está lendo é chamado de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Ele contém explicações sobre o estudo que você está sendo convidado a participar.

Antes de decidir se deseja participar (de livre e espontânea vontade) você deverá ler e compreender todo o conteúdo. Ao final, caso decida participar, você será solicitado a assiná-lo e receberá uma cópia do mesmo.

Antes de assinar faça perguntas sobre tudo o que não tiver entendido bem. A equipe deste estudo responderá às suas perguntas a qualquer momento (antes, durante e após o estudo).

O pesquisador declara que garantirá o cumprimento das condições contidas neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

**Natureza e objetivos do estudo:**

- ✓ Identificar conhecimentos prévios dos alunos pesquisados sobre geometria espacial;



- ✓ Identificar a diferença entre figuras planas e espaciais utilizando com auxílio de material manipulável;
- ✓ Demonstrar relações para áreas e para volumes de determinados sólidos;
- ✓ Usar materiais manipuláveis e técnica de resoluções de problemas no ensino de tópicos de geometria espacial;
- ✓ Interpretar se houve melhora no conhecimento sobre geometria espacial após a realização das atividades.

**Justificativa:**

Esta pesquisa se justifica pela necessidade de responder as seguintes questões sempre impostas por alguns alunos toda vez que surge um assunto novo: “Para que devo aprender este assunto? Onde utilizarei isto na minha vida?”. Assim, além de responder a estas perguntas, esta pesquisa propõe aplicações concretas com o auxílio de materiais manipuláveis em possíveis situações presente no convívio destes educandos.

**Procedimentos do estudo:**

A obtenção do material da pesquisa se consolidará através da resolução de problemas com a utilização de materiais manipuláveis.

**Forma de acompanhamento e assistência:**

Você será acompanhado pelo pesquisador durante todo o período da pesquisa, e será assistido pelo mesmo, antes, durante e depois da pesquisa.

**Riscos e benefícios:**

Este estudo apresenta risco mínimo, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, constrangimento em responder alguma pergunta, invasão de privacidade ou outros riscos não previsíveis.

Caso você se sinta constrangido em responder alguma pergunta, você não precisará responder.

O participante terá direito à indenização, através das vias judiciais, diante de eventuais danos comprovadamente decorrentes da pesquisa.

Sua participação fará com que você adquira uma experiência educacional única.

**Providências e Cautelas**

Serão tomadas providências e cautelas para evitar e/ou reduzir efeitos e condições adversas que possam causar algum dano, como garantir local reservado e liberdade para não responder questões constrangedoras, estar atento a sinais de desconforto do participante, garantir que sempre serão respeitados os valores culturais, sociais, morais, religiosos e éticos, bem como os hábitos e costumes.

**Participação, recusa e direito de se retirar do estudo:**

Sua participação é voluntária. Portanto, você não é obrigado a participar. Você poderá se retirar desta pesquisa a qualquer momento, bastando para isso entrar em contato com um dos pesquisadores responsáveis.

**Confidencialidade:**

Os dados serão manuseados somente pelos pesquisadores e o material e as suas informações (gravações, entrevistas, etc.) ficarão guardados sob a responsabilidade dos mesmos.

Os resultados deste trabalho poderão ser utilizados apenas academicamente em encontros, aulas, livros ou revistas científicas.

Eu, \_\_\_\_\_ RG  
\_\_\_\_\_

após receber uma explicação completa dos objetivos do estudo e dos procedimentos envolvidos concordo voluntariamente em fazer parte deste estudo.

Seropédica, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

---

Participante

---

Orientador(a)

---

Pesquisador(a)

Se persistir alguma dúvida, entre em contato com o(a) Coordenador(a) da pesquisa:

Nome: Aline Mauricio Barbosa

Telefone: (021) 99495-9216

## ANEXO H – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT



### TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa: Resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos: uma experiência numa turma de segundo ano do Ensino Médio da rede pública. Neste estudo podemos analisar a importância dos sólidos geométricos no cotidiano.

O motivo que nos leva a estudar este assunto é responder perguntas do tipo “Para que devo aprender sobre sólidos geométricos? Onde utilizarei isto na minha vida?”. Este trabalho tem como justificativa maior, obter respostas para estas perguntas. Pois todo ele será elaborado com o objetivo de simular situações problema onde, com o auxílio do material manipulável, serão solucionadas de forma concreta pelos educandos, onde o professor será apenas um instrumento de auxílio, e não apenas da forma “tradicional” onde o professor tem sempre o poder da caneta sobre o conhecimento dos alunos.

Para este estudo adotaremos os seguintes procedimentos: A pesquisa versará sobre o enfoque da resolução de problemas com observações em sala de aula, questionários e registro de áudio e vídeo.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, constrangimento em responder alguma pergunta ou outros riscos não previsíveis.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE  
JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Eu, \_\_\_\_\_, portador(a) do documento de Identidade \_\_\_\_\_ (se já tiver documento), fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento

poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Seropédica, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

---

(Assinatura do menor)

---

(Assinatura do(a) pesquisador(a))

Se persistir alguma dúvida, entre em contato com o(a) Coordenador(a) da pesquisa:

Nome: Aline Mauricio Barbosa

Telefone: (021) 99495-9216

E-mail: [alinanet2002@gmail.com](mailto:alinanet2002@gmail.com)

## **ANEXO I – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (RESPONSÁVEIS)**

### **TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Responsáveis) UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**Título do Projeto:** RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA EXPERIÊNCIA NUMA TURMA DE SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO DA REDE PÚBLICA.

**Pesquisador:** Marcos Vinícius Silva da Costa

**Pesquisador responsável (professor(a) orientador(a)):** Aline Mauricio Barbosa

Este documento que você está lendo é chamado de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), que contém explicações sobre o estudo da pesquisa que está convidado a participar. Solicitamos a sua autorização para a participação do menor \_\_\_\_\_ nesta pesquisa.

Antes de decidir se deseja autorizar a participação do menor (de livre e espontânea vontade) você deverá ler e compreender todo o conteúdo. Ao final, caso decida autorizar, você será solicitado a assiná-lo e receberá uma cópia do mesmo.

Antes de assinar faça perguntas sobre tudo o que não tiver entendido bem. A equipe deste estudo responderá às suas perguntas a qualquer momento (antes, durante e após o estudo).

O pesquisador declara que garantirá o cumprimento das condições contidas neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

#### **Natureza e objetivos do estudo**

Os objetivos específicos deste estudo são: Identificar conhecimentos prévios dos alunos pesquisados sobre geometria espacial;

Identificar a diferença entre figuras planas e espaciais utilizando com auxílio de material manipulável;

Demonstrar relações para áreas e para volumes de determinados sólidos;

Usar materiais manipuláveis e técnica de resoluções de problemas no ensino de tópicos de geometria espacial;

Interpretar se houve melhora no conhecimento sobre geometria espacial após a realização das atividades.

### **Justificativa:**

Esta pesquisa se justifica pela necessidade de identificarmos sólidos geométricos e sua importância no cotidiano através da resolução de problemas

### **Procedimentos do estudo:**

A pesquisa versará sobre o enfoque da resolução de problemas com observações em sala de aula, questionários e registro de áudio e vídeo.

### **Forma de acompanhamento e assistência:**

O menor será acompanhado pelo pesquisador durante todo o período da pesquisa, e será assistido pelo mesmo, antes, durante e depois da pesquisa.

### **Riscos e benefícios**

Este estudo apresenta risco mínimo, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, constrangimento em responder alguma pergunta, invasão de privacidade ou outros riscos não previsíveis.

Caso o menor se sinta constrangido em responder alguma pergunta, ele não precisará responder.

O participante terá direito à indenização, através das vias judiciais, diante de eventuais danos comprovadamente decorrentes da pesquisa.

A participação do menor poderá ajudar a conhecer o conceito de sólidos geométricos e sua importância ao longo da vida.

### **Providências e Cautelas**

Serão tomadas providências e cautelas para evitar e/ou reduzir efeitos e condições adversas que possam causar algum dano, como garantir local reservado e liberdade para não responder questões constrangedoras, estar atendo a sinais de desconforto do menor, garantir que sempre serão respeitados os valores culturais, sociais, morais, religiosos e éticos, bem como os hábitos e costumes.

### **Participação, recusa e direito de se retirar do estudo**

A participação do menor é voluntária. Você não terá nenhum prejuízo se não quiser autorizar.

Você poderá retirar a autorização para o menor participar desta pesquisa a qualquer momento, bastando para isso entrar em contato com um dos pesquisadores responsáveis.

### **Confidencialidade**

Os dados serão manuseados somente pelos pesquisadores e o material e as suas informações (gravações, entrevistas, etc.) ficarão guardados sob a responsabilidade dos mesmos.

Os resultados deste trabalho poderão ser utilizados apenas academicamente em encontros, aulas, livros ou revistas científicas.

Eu, \_\_\_\_\_ RG  
\_\_\_\_\_

após receber uma explicação completa dos objetivos do estudo e dos procedimentos envolvidos autorizo a participação voluntaria do menor em fazer parte deste estudo.

Seropédica, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

---

Responsável

---

Orientador(a)



---

Pesquisador(a)

Se persistir alguma dúvida, entre em contato com o(a) Coordenador(a) da pesquisa:

Nome: Aline Mauricio Barbosa

Telefone: (021) 99495-9216

E-mail: [alinanet2002@gmail.com](mailto:alinanet2002@gmail.com)